

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ»

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

На правах рукописи

Шимелевич Михаил Ильич

**Решение обратных задач геоэлектрики с применением нейронных
сетей и оценкой неоднозначности**

1.6.9 – Геофизика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ.....	20
1.1. Обратные задачи геофизики. Степень неоднозначности приближенных решений	20
1.1.1. Фактор δ -эквивалентности приближенных решений обратной задачи	23
1.1.2. Оценки практической неоднозначности приближенных решений	27
1.1.3. Функционалы расстояния в обратных задачах	29
1.1.4. Многокритериальные обратные задачи геофизики	29
1.1.5. Обратная задача электромагнитного мониторинга	33
1.2. Обратные задачи в конечно-параметрических классах сред	36
1.2.1. Основные принципы и типы параметризации геофизических сред	36
1.2.2. Обратные задачи в конечно-параметрических классах сред	45
1.3. Обратные задачи геоэлектрики.....	51
1.3.1. Прямые задачи геоэлектрики	52
1.3.2. Обратные задачи геоэлектрики.....	61
1.3.3. Методы решения обратных задач геоэлектрики.....	78
1.4. Выводы к Главе 1	97
ГЛАВА 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ.....	99
2.1. Классические характеристики неоднозначности	103
2.1.1. Апостериорные характеристики неоднозначности	103
2.1.2. Априорные характеристики неоднозначности.....	112
2.1.3. О связи апостериорных и априорных характеристик неоднозначности	112
2.2. Локальные характеристики неоднозначности.....	138
2.2.1. Локальные и векторные характеристики неоднозначности.....	139
2.3. Характеристики неоднозначности решений многокритериальных обратных задач...	149
2.4. Характеристики неоднозначности конечно-параметрических задач.....	156
2.4.1. Характеристики неоднозначности.....	157
2.4.2. Зависимость неоднозначности решений от размерности сеточной параметризации.....	165
2.5. Регуляризация задачи на основе оценок локального модуля непрерывности обратного оператора.....	175
2.5.1. Эффективная сеточная параметризация	179
2.5.2. Цифровая эффективная параметризация	185
2.6. Выводы к Главе 2	196
ГЛАВА 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ.....	198
3.1. Численные методы расчета характеристик неоднозначности решений нелинейных обратных задач геофизики	199

3.1.1. Оптимизационные задачи расчета характеристик неоднозначности.....	199
3.1.2. Методы решения экстремальной задачи (3.1.1) на основе алгоритмов Монте-Карло.....	202
3.1.3. Схемы алгоритмов расчета характеристик неоднозначности однокритериальной задачи.....	206
3.1.4. Зависимости оценок от размерности имитирующего множества	213
3.1.5. О сходимости алгоритма APR.1.0	215
3.1.6. Пример тестирования алгоритма APR.1.0	222
3.1.7. Схемы алгоритмов расчета локальных характеристик неоднозначности	223
3.1.8. Замечания по расчету характеристик неоднозначности многокритериальных задач.....	232
3.1.9. Вопросы дискретизации используемых норм	233
3.1.10. Программное обеспечение задач расчета характеристик неоднозначности	236
3.2. Примеры расчета априорных характеристик неоднозначности для некоторых типовых задач интерпретации данных геоэлектрики	237
3.2.1. Зависимость неоднозначности решений от глубины расположения анализируемого яруса.....	239
3.2.2. Зависимость неоднозначности решений от детальности параметризации	242
3.2.3. Сравнение неоднозначности решений 2D и 3D обратных задач.....	245
3.2.4. Оценка неоднозначности решений при двухкритериальной инверсии.....	246
3.2.5. Оценка влияния дополнительной априорной информации на степень неоднозначности решений обратной задачи.....	247
3.2.6. Влияние сдвига сети наблюдений относительно исследуемого объекта	249
3.3. Примеры эффективной параметризации среды	250
3.3.1. 2D задача	251
3.3.2. 3D задача	255
3.4. Оценка полной цифровой разрешающей способности геофизического метода.....	259
3.5. Выводы к Главе 3	261
ГЛАВА 4. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ	262
4.1. Сведение обратной задачи к аппроксимационно-интерполяционной проблеме.....	265
4.1.1. Основная задача теории аппроксимации функций.....	265
4.1.2. Аппроксимационный метод решения нелинейных операторных конечномерных уравнений.....	267
4.1.3. Собственная интерполяционная ошибка аппроксиматора	271
4.1.4. Вопросы корректности задачи обучения аппроксиматора	273
4.1.5. Общие свойства аппроксиматоров	275

4.1.6. Аппроксимационно-итерационный метод.....	276
4.1.7. Локальные аппроксиматоры	277
4.2. Аппроксимационный нейросетевой метод решения операторных уравнений вида (4.1.1)	282
4.2.1. Нейронные сети – универсальные аппроксиматоры сложных нелинейных зависимостей.....	282
4.2.2. Аппроксимационный нейросетевой (АНС) метод.....	287
4.2.3. Аппроксимационно-итерационный нейросетевой (АИНС) метод.....	290
4.2.4. Применение локальных НС аппроксиматоров в задачах ЭМ мониторинга	294
4.2.5. Схема применения АНС метода для решения обратных задач геоэлектрики и ЭМ мониторинга.....	295
4.3. Выводы к Главе 4	296
ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АППРОКСИМАЦИОННОГО НЕЙРОСЕТЕВОГО МЕТОДА.....	299
5.1. Схема алгоритма АНС метода	301
А. Схема алгоритма обучения локального НС аппроксиматора I типа.....	301
В. Решение обратной задачи с помощью локального аппроксиматора I типа.....	318
С. Обучение и работа локального НС аппроксиматора II типа.....	324
D. Программное обеспечение задач обучения аппроксиматоров	325
5.2. Примеры решения обратных задач геоэлектрики на модельных данных	326
5.2.1. 2D задача	326
5.2.2. 3D задача	344
5.2.3. Примеры решения обратной задачи ЭМ мониторинга на модельных данных	366
5.2.3.1. 2D задача	367
5.2.3.2. 3D задача	369
5.3. Выводы к Главе 5	373
ГЛАВА 6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ НА ПОЛЕВЫХ ДААННЫХ	374
6.1. Профиль 2ДВ. 2D задача	374
6.1.1. Участок 1 профиля 2ДВ.....	376
6.1.2. Участок 2 профиля 2ДВ.....	379
6.1.3. Детальный анализ локальных участков профиля	383
6.2. Северо-Пясинский регион	388
6.2.1. Профиль ПР-3 03АII-D. 2D задача.....	389
6.2.2. Участок детальной съемки. 3D задача	390
6.3. Выводы к Главе 6	400
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	401
ЛИТЕРАТУРА.....	404

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Данная работа посвящена развитию методов решения обратных коэффициентных задач геоэлектрики методами магнитотеллурического (МТЗ), и магнитовариационного (МВЗ) зондирования. Рассматривается типовая обратная задача геоэлектрики, которая заключается в определении *удельной электропроводности* среды на основе наземных наблюдений МТ поля [Бердичевский, Дмитриев, 2009]. За последние десятилетия достигнут значительный прогресс в теории и практике решения обратных задач геоэлектрики, однако, хорошо известны трудности их решения в случае нелинейности общего типа, когда экстремальная задача не сводится к задаче выпуклого программирования: множество локальных экстремумов, неединственность точки глобального минимума и др., осложняющие строгое обоснование и формализацию применяемых численных методов. При изменении входных данных эту сложную задачу приходится каждый раз решать заново. Метод регуляризации Тихонова решает проблему неустойчивости, но проблема сложной нелинейности общего вида в сочетании с высокой размерностью задачи остается актуальной. При этом на сегодняшний день оценки неоднозначности (погрешности) получаемых решений задач геоэлектрики, как правило, на практике не вычисляются, что не соответствует современному уровню развития теории обратных задач [Тихонов и др., 1990; Yagola, Titarenko, 2007].

Один из возможных альтернативных подходов к решению нелинейных обратных задач, основанный на *предварительном построении множества* («банка») опорных решений прямых (а значит и обратных) задач, в общем виде был сформулирован в работе [Тихонов и др., 1983]. Простейшая реализации данной идеи на практике была представлена в палеточном методе [Ваньян, Бутковская, 1980; Тихонов и др., 1983], в котором интерпретация геофизических данных

проводилась на основе множества опорных решений, рассчитанных в виде альбома палеток. Позднее, развитие палеточного метода реализовалось в нейросетевом (НС) методе. В работах [Poulton et al., 1989; Raiche, 1991; Poulton et al., 1992; Спичак, Попова, 1998; Shimelevich, Osborne, 1998] и ряде других работ была сформулирована концепция НС подхода к инверсии геофизических данных, в котором конструируемая нейросеть предварительно обучается «с учителем» на банке опорных решений. Сопоставление измеренных данных с данными, имеющимися в банке решений, интерполяция и нахождение интерполяционного решения обратной задачи в палеточном методе производится «вручную», а в НС методе - в автоматизированном режиме с помощью обученной нейросети.

В указанных выше и других ранних работах НС метод представлялся с позиции теории распознавания образов, что в некоторых частных случаях является вполне оправданным. В общем случае, как было показано в работе [Шимелевич, Оборнев, 1999], НС метод, применительно к проблеме решения обратных задач, имеет более прозрачный математический смысл, который заключается том, что на заданном множестве опорных решений с помощью нейросетевой аппроксимационно-интерполяционной конструкции строится приближенный непрерывный обратный оператор задачи (так называемый НС аппроксиматор). При этом минимизируется ошибка замены точного обратного оператора приближенным. Для того, чтобы обозначить и подчеркнуть аппроксимационную (детерминистскую) сущность НС метода применительно к обратным задачам, в работе [Шимелевич, Оборнев, 2009] был предложен термин аппроксимационный нейросетевой (АНС) метод.

На базе классического НС метода, представленного в вышеупомянутых работах, в диссертации разработаны модернизированный регуляризованный АНС метод и алгоритмы решения многопараметрической многокритериальной обратной задачи геоэлектрики. В АНС методе «плохая» нелинейная оптимизационная задача построения (обучения) аппроксиматора с минимальной ошибкой решается один раз для заданного класса решений. Обученный НС аппроксиматор позволяет

формализовано в режиме реального времени без задания первого приближения находить решение обратной задачи; время расчета решения составляет первые десятки секунд на персональном компьютере и практически не зависит от физической размерности (2D или 3D) решаемой задачи и конкретного вида представляемых входных данных. Применение АНС метода на практике не требует специальной квалификации и может проводиться техником.

При необходимости, решение, найденное АНС методом, уточняется с помощью аппроксимационно-итерационного нейросетевого (АИНС) метода [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2017а], что требует привлечения дополнительных вычислительных ресурсов. Для решений обратной задачи вычисляются априорные и апостериорные оценки практической неоднозначности (погрешности), независящие от применяемого численного метода инверсии [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др. 2017; Шимелевич, 2020].

В настоящее время актуальными являются обратные задачи ЭМ мониторинга геодинамических процессов [Любушин, 2007; Потапов, Поспеева, 2017; Шевчук и др., 2022]. В диссертации на основе АНС метода разработаны метод и алгоритмы НС электромагнитного мониторинга изменений электропроводности среды, под воздействием геодинамических процессов, протекающих в сейсмоактивных областях, в режиме реального времени [Шимелевич и др., 2003; Shimelevich et al., 2007; Шимелевич, Оборнев, 2008; Шимелевич и др., 2017б].

Реализация представленных выше идей и методов в случае сложных 3D нелинейных задач требует привлечения значительных вычислительных ресурсов и стала возможной на практике только благодаря современному уровню компьютерных и интеллектуальных технологий. Это отражает *актуальность темы* представляемой работы, а быстрый рост технологий обеспечивает дальнейшее широкое развитие и распространение предлагаемых методов.

Развиваемые в диссертационной работе направления и методы лежат в русле идей и достижений отечественной школы геофизики что позволяет предположить, что метод может занять естественную нишу в арсенале математических средств

интерпретации геофизических данных, соответствующих современному уровню развития теории обратных задач и методов искусственного интеллекта.

Цель работы

Целью работы является разработка современной версии нейросетевого метода решения обратных нелинейных задач геоэлектрики и ЭМ мониторинга с оценкой неоднозначности (погрешности) получаемых решений для повышения устойчивости, объективности и эффективности машинных методов интерпретации геофизических данных.

Задачи исследования

1. Разработка методов и алгоритмов расчета априорных и апостериорных локальных (по глубине расположения слоев сетки параметризации) характеристик практической неоднозначности решений нелинейных обратных многокритериальных задач геоэлектрики; исследование сходимости алгоритмов, иллюстрация работы алгоритмов на модельных примерах.
2. Разработка метода и алгоритмов адаптивной регуляризации задачи на основе построения оптимальной (регуляризованной) сетки параметризации, послойная детальность которой максимальна при условии, что неоднозначность решений априори не превышает заданной величины при заданном уровне допустимой невязки (погрешности данных) – задача эффективной параметризации среды; иллюстрация работы алгоритмов на численных примерах 2D и 3D задач геоэлектрики.
3. Разработка и обоснование аппроксимационного метода решения нелинейных многокритериальных обратных задач геоэлектрики, основанного на сведении обратной задачи к проблеме построения приближенного обратного оператора задачи с помощью непрерывных аппроксиматоров общего типа, задаваемых в аналитическом виде; методы оценки погрешности аппроксиматоров, исследование корректности задачи построения аппроксиматоров.
4. Разработка алгоритма построения универсального НС аппроксиматора I типа с использованием нейронной сети сверточного типа, адаптированной к решению

обратной задачи в заданном классе сред и включающей слои отбора существенных признаков, сжатия и накопления данных, подавления влияния неизвестной фоновой среды и других преобразований данных с целью уменьшения собственной ошибки аппроксиматора и повышения эффективности НС метода решения обратной задачи геоэлектрики. Универсальные аппроксиматоры I типа позволяют локально и формализовано решать обратную задачу в заданном классе сред при минимальной априорной информации среде без задания первого приближения.

5. Разработка алгоритма построения аппроксиматоров II типа, требующих задания априорной информации. Аппроксиматоры II типа применяются при решении обратных задач типа «уточнение параметров гипотезы» и обратных задач ЭМ мониторинга среды на основе локальных сетей наблюдений.

6. Расчет новых банков опорных решений в классах G_2^{2D} , G_1^{3D} , G_2^{3D} неоднородных 2D и 3D сред с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления для построения универсальных аппроксиматоров I типа для задач геоэлектрики с использованием технологий массивных вычислений и расчетов на суперкомпьютерных кластерах и графических ускорителях Nvidia CUDA.

7. На основе рассчитанных банков опорных решений обучение НС аппроксиматоров, предназначенных для решения обратных задач прикладной геоэлектрики в указанных выше классах сред при глубинности исследований до 6 км.

8. Разработка комплекса алгоритмов АНС метода, позволяющего с помощью обученных НС аппроксиматоров I, II типов формализовано решать нелинейные многокритериальные 2D, 3D обратные задачи геоэлектрики и ЭМ мониторинга геодинамических процессов.

9. Разработка комплекса алгоритмов АИНС метода, позволяющего уточнять НС решение путем построения корректирующих НС аппроксиматоров, а также методами случайного поиска с использованием алгоритмов кластеризации методом k -средних и интерполяции методом обратных взвешенных расстояний (IDW-метод).

10. Разработка общего комплекса алгоритмов решения нелинейных обратных задач геоэлектрики АНС, АИНС методами в классах сред с расчетом апостериорных характеристик практической неоднозначности (погрешности) получаемых решений.
11. Проведение численных экспериментов по тестированию алгоритмов на модельных данных.
12. Проведение инверсии полевых профильных и площадных данных, получаемых методами МТЗ и МВЗ; расчет апостериорных характеристик неоднозначности полученных решений.

Научная новизна

1. Показано, что модуль непрерывности обратного оператора решаемого уравнения обратной задачи определяет *предел разрешения геофизического метода*, ассоциированного с этим уравнением – т.е. расстояние (по норме пространства решений) между любыми двумя характеристиками среды, начиная с которого (при дальнейшем сближении) характеристики перестают быть гарантированно различимыми (т.е. могут являться эквивалентными решениями при некоторой правой части. Это позволило обобщить понятие разрешающей способности на нелинейные задачи, введенное в работах [Бердичевский, Дмитриев, 2008; Дмитриев, 2012] для линейных и линеаризованных задач. Введено понятие цифровой разрешающей способности, установлена ее связь с ε -емкостью множества априорных ограничений.
2. Для условно-корректных нелинейных конечно-параметрических обратных задач геофизики в классе кусочно-постоянных решений, задаваемых на сетке параметризации, доказано, что характеристики неоднозначности решений монотонно не возрастают с уменьшением размерности (детальности) сетки параметризации, получаемой путем объединения ячеек исходной сетки.
3. Разработан новый метод практической адаптивной регуляризации коэффициентной обратной задачи геоэлектрики в классе кусочно-постоянных решений на основе построения оптимальной сетки параметризации, размерность

которой максимальна при условии, что априорная послойная погрешность решений априори не превышает заданной величины при заданном уровне погрешности данных; это условие означает, что послойная детальность искомого решения согласована с разрешающей способностью геофизического метода дифференцированно по глубине восстанавливаемых параметров среды; доказано существование оптимальной сетки параметризации.

4. Разработан новый метод расчета локальных (по слоям сетки параметризации) априорных и апостериорных характеристик неоднозначности (погрешности) решений нелинейных задач геоэлектрики в классе кусочно-постоянных решений на основе алгоритмов Монте-Карло; доказываемость сходимости алгоритмов.

5. Разработаны теория и метод построения приближенных обратных операторов нелинейных условно-корректных обратных задач в классах кусочно-постоянных решений с помощью непрерывных аппроксиматоров общего типа. Доказано существование непрерывного аппроксиматора (в частности, нейросетевого) с минимальной собственной ошибкой.

6. На базе классического НС метода разработаны новый регуляризованный АНС метод и алгоритмы построения локальных НС аппроксиматоров специального типа для решения обратных задач геоэлектрики при дефиците априорной информации и обратных задач ЭМ мониторинга. Алгоритм основан на конструировании и обучении авторской нейронной CNN.INV-сети сверточного типа, адаптированной к решению обратной задачи и позволяющей минимизировать ошибку обучения.

7. Разработан новый АИНС метод уточнения решения, получаемого НС методом, на основе построения дополнительных корректирующих аппроксиматоров в окрестности найденного решения или методом случайного поиска с использованием алгоритмов кластеризации методом k -средних и интерполяции IDW-методом.

8. Разработан новый метод НС электромагнитного мониторинга изменений электропроводности среды под воздействием геодинамических процессов,

протекающих в сейсмоактивных областях на основе локальных и/или разреженных сетей наблюдения в режиме реального времени.

9. Дана общая математическая постановка многокритериальной обратной задачи геофизики с критериальными ограничениями. Доказано, что априорные и апостериорные характеристики неоднозначности (II типа) многокритериальной обратной задачи монотонно не возрастают при увеличении числа критериев; приводятся примеры расчета характеристик неоднозначности решений многокритериальной задачи геоэлектрики.

Основные защищаемые положения

1. Метод адаптивной регуляризации обратной задачи геоэлектрики в классе кусочно-постоянных решений, основанный на численных оценках локального модуля непрерывности обратного оператора; метод обеспечивает компромисс между детальностью и устойчивостью решений дифференцированно по глубине исследований.

2. Метод расчета априорных и апостериорных характеристик неоднозначности приближенных решений нелинейных обратных задач геоэлектрики с использованием алгоритмов Монте-Карло.

3. Регуляризованный аппроксимационный нейросетевой (АНС) метод решения обратной задачи геоэлектрики, основанный на приближении обратного оператора задачи с помощью нейросети и минимизирующий ошибку решения дифференцированно по глубине исследований; метод позволяет локально решать обратную нелинейную задачу большой размерности в классе сред единообразно при любой правой части, без задания первого приближения; время решения составляет первые десятки секунд независимо от физической размерности задачи.

4. Аппроксимационно-итерационный нейросетевой (АИНС) метод уточнения решения, получаемого АНС методом, путем построения корректирующих аппроксиматоров или методом случайного поиска с использованием алгоритмов кластеризации методом k -средних и интерполяции методом IDW - обратных взвешенных расстояний.

5. Метод НС электромагнитного мониторинга (НСЭМ) динамики электропроводности среды в сейсмоактивных зонах, на основе локальных и/или разреженных сетей наблюдения в режиме реального времени.

6. Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта специальности ВАК 1.6.9. Геофизика:

1. Положения 1–4 соответствуют пунктам 14, 16, 17 паспорта.

2. Положение 5 соответствует пункту 12 паспорта.

Методы исследования

Теоретические исследования

В работе использованы методы теории обратных и некорректных задач (априорные и апостериорные оценки, многокритериальные обратные задачи), методы теории аппроксимации (аппроксимация функций многих переменных с помощью нейросетевых полиномов), методы случайного поиска (вопросы сходимости алгоритмов). **Алгоритмы и расчеты.** Применялись методы вычислительной математики, оптимизации, многомерной интерполяции, кластеризации, методы Монте-Карло, а также специальные методы обучения нейронных сетей с учителем; при расчетах множеств опорных решений применялись технологии параллельных массивных вычислений на суперкомпьютерных кластерах и графических ускорителях Nvidia CUDA.

Практическая значимость

Высокая скорость развиваемого АНС метода с использованием обученных аппроксиматоров, практически независимая от физической размерности задачи, создает основу для принципиально новых методик практической интерпретации геофизических данных с использованием персонального компьютера, не требующих специальной квалификации оператора, таких как: экспресс-инверсия измеренных данных в полевых условиях; экспресс-инверсия данных, измеряемых в движении; проведение НС электрического мониторинга динамических параметров среды в формате реального времени на основе МТ режимных данных, измеряемых на локальных и/или сильно разреженных сетях наблюдений в зонах

нестабильности. Локальные и разреженные сети наблюдений позволяют «обходить» труднодоступные области.

Для входных данных большой размерности АНС метод позволяет проводить инверсию путем перемещения (свертки) локального НС аппроксиматора по всей области измеренных данных.

Расчет оценок неоднозначности решений обратной задачи дает интерпретатору дополнительный инструмент при проведении практической интерпретации измеренных данных, позволяющий выявлять эквивалентные решения, априори и апостериори оценивать разрешающую способность и эффективность применяемого комплекса геофизических методов, получать количественные объективные оценки качества и состоятельности проводимой интерпретации, а также проводить верификацию ранее полученных результатов интерпретации.

Методы уточнения экспресс-решений с помощью проведения дополнительных вычислительных итераций, а также детальный апостериорный анализ данных с расчетом оценок неоднозначности решений требуют дополнительных и ресурсоемких вычислений и должны проводиться в период камеральной обработки полевых данных измерений.

При наличии определенной априорной информации, привязанной к исследуемым территориям, могут конструироваться специализированные «территориальные» аппроксиматоры – палетки, обученные с учетом имеющейся априорной информации.

С помощью развиваемого АНС метода автором получены решения 2D и 3D обратных задач геоэлектрики на основе полевых данных по протяженному профилю 2ДВ Магаданской области и площадных данных по участку Северо-Пясинского региона Красноярского края; рассчитаны ранее не вычислявшиеся невязки и оценки неоднозначности (погрешности) полученных решений.

Программные комплексы и алгоритмы диссертационной работы внедрены в программы обучения студентов на кафедре Информатики и ГИС Российского государственного геологоразведочного университета (МГРИ).

Достоверность результатов

Достоверность результатов работы подтверждена проведением многочисленных расчетов по тестированию программных реализаций на модельных данных, показавших состоятельность и эффективность предлагаемых методов, а также позитивными результатами применения методов к полевым профильным и площадным данным геоэлектрики и сопоставления их с независимыми результатами других исследователей и данными сейсморазведки.

Личный вклад

Лично диссертанту принадлежат: формулировка целей и задач исследований; математическая постановка задач; разработка методов и алгоритмов решения поставленных задач; руководство проведением расчетов по численным экспериментам и анализ получаемых результатов. Диссертантом лично написана существенная часть 29 публикаций из списка по теме диссертации. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Апробация работы

Основные положения диссертационной работы на международных и российских научных семинарах, конференциях и совещаниях, в том числе

по тематике **Геоэлектрика** на

8 Всероссийских **Школах-семинарах по ЭМ зондированию Земли** (Москва, 2003, Москва, 2005, Звенигород, 2007, Москва, 2009, Санкт-Петербург, 2011, Новосибирск, 2013, Иркутск, 2015, Москва 2021);

9 Международных конференциях в МГРИ-РГГРУ **«Новые идеи в науках о Земле»** (Москва, 1999, 2001, 2009, 2011, 2013, 2017, 2019, 2021 и 2023 годах);

10 сессиях **Международного научного семинара им. Д.Г. Успенского** (Воронеж, 2012, Москва, 2013, Екатеринбург, 2014, Воронеж, 2016, Москва 2017, Казань 2018, Пермь 2019, Воронеж 2020, Санкт-Петербург 2022, Екатеринбург 2023);

2 Международных конференциях **International Workshop on Magnetic, Electric and Electromagnetic Methods in Seismology and Volcanology** (Moscow, 2002, France, 2004);

2-х Международных конференциях **Electromagnetic Induction in the Earth** (14-th workshop in Sinaia, Romania, 1998; 18th workshop in Vendrell, Spain, September, 2006);

2 международных семинарах-совещаниях «Теория и методика глубинных электромагнитных зондирований на кристаллических щитах» (Апатиты, 2005, 2006);

по тематике **Обратные и некорректные задачи на**

5-и семинарах "**Обратные задачи математической физики**" под руководством проф. Бакушинского А.Б., проф. Тихонравова А. В, проф. Яголы А.Г. (Москва, МГУ, 2010, 2012, 2021, 2023, 2024);

2 Международных конференциях «**Обратные и некорректные задачи математической физики**», посвященной 80-летию и 85-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Новосибирск, 2012; 2017);

4 Международных конференциях «**Марчуковские научные чтения**» (Новосибирск, Академгородок 2017, 2019, 2020, 2022);

2 Международных конференциях «**Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования**», посвященной 90 и 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2013, 2018);

Международном научном **семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам** (Москва, 2015);

Международной **конференции «Тихонов и современная математика»** (Москва, МГУ ВМК, 2006);

Международной **конференции «Современные проблемы обратных задач»** (Новосибирск, 2022);

по тематике **Искусственный интеллект и нейронные сети на**

8 Всероссийских научно-технических конференциях «**Нейроинформатика**» (Москва, 2007, 2008, 2010, 2012, 2013, 2014, 2015 и 2018);

2 Международных конференциях **"Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии"** (Йошкар-Ола, 2007, Нижний Новгород, 2008);

2 Международных конференциях ICANN. **International Conference on Artificial Neural Network** (Lymassol, Cyprus, 2009; Barcelona, Spain, 2016);

XI и XVI Всероссийских научных конференциях **"Нейрокомпьютеры и их применение"** (Москва 2013, 2018);

2 региональных конференциях EAGE в России и странах СНГ **«Интеллектуальный анализ данных в нефтегазовой отрасли»** (2020, 2021);

Engineering Applications of Neural Networks (EANN-2013) (Halkidiki, Greece, 2013);

2 **International Workshop on Deep Learning in Computational Physics DLCP-21** (Москва, 2021, ОИЯИ, Дубна, 2022);

VIII Международная конференция **«Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2022)** (Самара, 2022);

14-я Международная конференция **«Интеллектуализация обработки информации» (ИОИ-2022)** (Вычислительный центр РАН Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, 2022;

по другим тематикам на

3 Международных геофизических научно-практических семинарах **"Применение современных электроразведочных технологий при поисках месторождений полезных ископаемых"** (Санкт-Петербург, 2008, 2013, 2015);

Международном совещании **«Взаимосвязь между тектоникой, сейсмичностью, магмообразованием и извержениями вулканов в вулканических дугах»** (Петропавловск-Камчатский, 2004);

III международном симпозиуме **«Геодинамика и геоэкология высокогорных регионов в XXI веке»** (Бишкек, 2005);

II Международном симпозиуме **«Активный геофизический мониторинг литосферы Земли»** (Новосибирск: Академгородок, 2005);

- 2 Международных симпозиумах «Геодинамика внутриконтинентальных орогенов и геозкологические проблемы» (Бишкек, 2008, 2014);
- 2 Международных конференциях **International Conference "PROBLEMS OF GEOCOSMOS** (St. Petersburg, Petrodvorets, 2014, 2016; 2020 и 2022);
- 2 ежегодных научно-практических конференциях и выставках **"Инженерная и рудная геофизика"** (Алматы, Казахстан, 2018; Геленджик 2019);
- 2 ежегодных конференциях по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа «Геомодель» (Геленджик 2019, 2020);
- Международной научно-практической конференции **"Стратегия развития геологического исследования недр: настоящее и будущее»** (к 100-летию МГРИ–РГГРУ)" (Москва, 2018);
- 2 школах-конференциях «Гординские чтения» (Москва, 2015, 2017).

Публикации

Основные результаты исследований по теме диссертации опубликованы в **29** статьях в научных изданиях, в том числе **16** в периодических изданиях, которые индексируются в системах Web of Science, Scopus, RSCI; зарегистрированы **4** продукта в каталоге Программы для ЭВМ и БД.

Структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Материалы диссертации изложены на 445 страницах машинного текста, содержат 19 таблиц, 95 рисунков, а также список литературы из 402 наименований.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим учителям профессору В.И. Дмитриеву, профессору Б.С. Светову; д.ф.-м.н. О.Б. Новик и зав. лаб. ЛАМОД МГУ, к.ф.-м.н. С.А. Доленко за ценные советы и полезные обсуждения; заведующему кафедры информатики и ГИС МГРИ Е.А. Оборневу за поддержку при подготовке к работе, директору Центра ЭМИ И.С. Фельдману за предоставление практического

материала и полезные обсуждения по результатам интерпретации полевых данных, доценту И.Е. Оборневу и доценту Е.А. Родионову за помощь при разработке программ, проведении расчетов и оформлении диссертации; Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку работ (гранты № 11-07-00662, 13-05-01135). В работе использовались ресурсы суперкомпьютерного кластера МВС-6000IM МСЦ РАН. Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность всем преподавателям МГРИ, у которых он учился.

ГЛАВА 1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

В главе рассматриваются общие постановки обратных задач геоэлектрики, которые составляют математическую основу практической интерпретации измеренных данных. Дается общая постановка обратной задачи электромагнитного мониторинга электрических свойств среды в сейсмоактивных областях. Отмечаются особенности обратных задач геоэлектрики и существующих методов их решения; анализируются свойства обратных задач в конечно-параметрических классах сред. Рассматриваются вопросы, связанные с оценкой практической неоднозначности (погрешности) получаемых решений. Приводится обзор по методам решения обратных задач геоэлектрики, анализируется опыт применения нейронных сетей при решении обратных задач геофизики и геоэлектрики, в частности.

1.1. Обратные задачи геофизики. Степень неоднозначности приближенных решений

Обратные задачи геофизики заключаются в определении характеристик среды $g(r)$, $r = (x, y, z) \in \Omega$ в исследуемой области Ω физического пространства, по заданным в некоторой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ (расположенной в случае наземной геофизики на поверхности Земли, $z = 0$) характеристикам геофизического поля $f(x, y, \lambda)$, где $(x, y) \in \Omega_1$, а $\lambda \in \Delta_\lambda$ – числовой параметр, определенный в некотором интервале значений Δ_λ и имеющий смысл частоты, времени, разности измерительной установки и т.п. Искомыми характеристиками среды являются пространственные распределения физических и геометрических свойств среды:

плотности, удельного сопротивления, скорости распространения упругих волн и др. Если искомые характеристики сред определяют коэффициенты систем дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют поля рассматриваемых геофизических методов, то такие обратные задачи называют *коэффициентными*.

Характеристики сред представляют собой скалярные, векторные или матричные функции пространственных переменных x, y, z . В данной работе мы ограничимся рассмотрением скалярных характеристик сред и будем обозначать через $G[\Omega]$ пространство функций, к которому принадлежат искомые характеристики среды в исследуемой области Ω . В практических задачах геофизики для описания реальных характеристик сред обычно используются кусочно-непрерывные функции, поэтому будем полагать, что $G[\Omega]$ является пространством кусочно-непрерывных функций. Обычно при решении практических задач в пространстве $G[\Omega]$ на основе априорной информации выделяется подмножество $G_1[\Omega] \subset G[\Omega]$ априорных ограничений на искомые характеристики среды таких, например, как физически возможный диапазон их изменения, степень гладкости, скорость изменчивости и др.

Характеристиками измеряемых геофизических полей $f(x, y, \lambda)$ могут быть обычные, векторные или матричные функции пространственных переменных, заданные в области измерений $\Omega_1 \times \Delta_\lambda$. В дальнейшем в данной работе мы будем полагать, что параметр λ является круговой частотой $\lambda = \omega$. Через $F[\Omega_{1,\omega}]$, $\Omega_{1,\omega} = \Omega_1 \times \Delta_\omega$ будем обозначать пространство функций, которому принадлежат характеристики геофизических полей.

Многие обратные задачи геофизики сводятся к решению нелинейного операторного уравнения I рода [Тихонов, Арсенин, 1979; Лаврентьев и др., 1980; Романов, Кабанихин, 1981; Тихонов и др., 1983]

$$Ag = f, \quad g \in G_1 \subset G, \quad f \in F, \quad (1.1.1)$$

где G , F – заданные нормированные пространства решений (характеристик среды) и входных данных (характеристик поля) соответственно; $G_1 \subset G$ – подмножество априорных ограничений; A – заданный непрерывный оператор прямой задачи, действующий из G в F .

При комплексировании полей различного типа рассматриваются многокритериальные обратные задачи (см. раздел. 2.3), которые сводятся к системе нескольких операторных уравнений типа (1.1.1) [Дмитриев, 2012; Бухаров и др., 2013; Шимелевич, 2013а; Оборнев и др., 2020; Shimelevich et al., 2021].

Замечание 1.1.1. *В большинстве типовых задач геофизики оператор решения прямой краевой (начально-краевой) задачи для заданной фиксированной характеристики среды g является линейным по отношению к источнику поля и краевым условиям. Если функция g изменяется в пределах множества $G_1 \subset G$ допустимых значений, при фиксированных источнике поля и краевых условиях, то отображение $A: G \rightarrow F$ и обратная задача (1.1.1) в общем случае являются нелинейными. Нелинейными задачами являются, например, коэффициентные обратные задачи электроразведки, структурные задачи гравиметрии и магнитометрии, некоторые задачи сейсмометрии. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии, в которых необходимо определить физические характеристики изучаемых геологических объектов при фиксированной геометрии, являются линейными.*

Обратные задачи геофизики вида (1.1.1) в общем случае относятся к классу некорректных задач, так как их решения могут быть теоретически не единственными и неустойчивыми. Если решение обратной задачи на множестве G_1 при точных данных (т.е. в случае $f \in F_1 = AG_1$) единственно и непрерывно зависит от правой части, то задачу называют *условно-корректной*. Множество G_1 в этом случае называют *множеством корректности* для уравнения (1.1.1). На множестве корректности решения обратной задачи устойчивы [Тихонов, 1943; Лаврентьев, 1980; Тихонов, Арсенин, 1979; Тихонов и др., 1983; Лаврентьев, 1980; Кабанихин, 2009; Дмитриев, 2012; Ягола и др., 2014]. В практических задачах геофизики множества корректности обычно задаются компактными множествами.

В геофизике для целого ряда обратных задач доказаны теоремы единственности, поэтому условно-корректные задачи являются реальной математической моделью задач интерпретации геофизических данных (некоторые задачи сейсмометрии, гравиметрии, магнитометрии, геоэлектрики [Тихонов, Арсенин, 1979; Лаврентьев и др., 1980; Кабанихин, 2009; Блох, 2009; Дмитриев, 2012; Ягола и др., 2014]). При этом, в большинстве случаев, имеющих практическое значение, с учетом имеющейся априорной информации, решение обратной задачи геофизики (1.1.1) можно искать в конечно-параметрическом классе функций, а обратная задача сводится при этом к определению конечного числа параметров, изменяющихся в конечных пределах. В этом случае множеством корректности является ограниченное замкнутое подмножество в конечномерном пространстве [Гончарский и др., 1978; Страхов, 1978; Тихонов, Арсенин, 1979]. Задача поиска решения уравнения (1.1.1) в конечно-параметрическом классе функций на основе имеющейся априорной информации может быть корректной и в том случае, если задача без априорной информации является некорректной [Ягола и др., 2014].

Замечание 1.1.2. *При переходе к конечномерной параметризации среды может происходить потеря единственности решения обратной задачи (а значит, и ее корректности), если изначально таковая имела место, например, при невыполнении требований к взаимной однозначности оператора параметризации [Гончарский и др. 1987; Шимелевич и др., 2017a] (см. также раздел 1.2.1). Потеря единственности может происходить также в случае использования неполных входных данных, не соответствующих требованиям теорем единственности.*

1.1.1. Фактор δ -эквивалентности приближенных решений обратной задачи

При фиксированных приближенных входных данных могут существовать различные приближенные решения обратной задачи, получаемые с невязкой, не превышающей некоторую величину δ . Такие решения называют *эквивалентными*

или δ -эквивалентными. Параметр δ может иметь различный смысл, в зависимости от того, известен или неизвестен уровень погрешности данных.

Уровень погрешности данных известен $\delta = \delta_0$. Пусть $f_T = Ag_T$ – точная правая часть уравнения (1.1.1), соответствующая некоторому точному решению $g_T \in G_1$, а $f \in F$ – приближенная, в общем случае не принадлежащая области значений $F_1 = AG_1$ оператора A ,

$$\|f - f_T\| = \|f - Ag_T\| \leq \delta_0. \quad (1.1.2)$$

Обозначим через $g_{\delta_0} \in G_1$ некоторое «опорное» приближенное решение уравнения (1.1.1) с невязкой $\leq \delta_0$ (решение, сопоставимое по точности с входными данными f и δ_0):

$$\|Ag_{\delta_0} - f\| \leq \delta_0. \quad (1.1.3)$$

Помимо найденного решения g_{δ_0} , уравнению (1.1.1) с фиксированной правой частью f может удовлетворять некоторое множество $G_{f,\delta_0} \subset G_1$ других возможных приближенных δ_0 -эквивалентных решений с невязкой $\leq \delta_0$:

$$G_{f,\delta_0} = \{g : g \in G_1, \|Ag - f\| \leq \delta_0\}. \quad (1.1.4)$$

Для условно-корректной задачи (1.1.1) диаметр множества G_{f,δ_0} является конечной величиной [Тихонов, Арсенин, 1979].

Физически существование различных приближенных δ_0 -эквивалентных решений может быть обусловлено, например, тем, что большим изменениям физических свойств малых фрагментов среды, расположенных на большой глубине, соответствуют малые изменения геофизических полей на поверхности Земли, не превышающие уровень δ_0 погрешности данных. Различные δ_0 -эквивалентные решения обратной задачи интерпретатор может получать, например, в случае применения различных численных алгоритмов инверсии к одним и тем же входным данным, что приводит к практической неоднозначности получаемых результатов интерпретации геофизических данных.

Замечание 1.1.3. *Различные приближенные решения из множества G_{f,δ_0} в геоэлектрике обычно называют эквивалентными решениями [Бердичевский, Дмитриев, 2009]. В литературе по обратным задачам гравиметрии эти решения называют практически эквивалентными [Гласко, 1984; Блох, 2009] или δ_0 -эквивалентными [Балк, 2009], чтобы подчеркнуть их отличие от теоретически эквивалентных решений, которые могут существовать при $\delta_0=0$ в случае теоретической неединственности обратной задачи. При теоретической неединственности полное множество δ_0 -эквивалентных решений G_{f,δ_0} содержит эквивалентные решения обоих типов.*

Уровень δ_0 погрешности данных неизвестен. Квазирешение. Обратные задачи геофизики обычно решаются в априори задаваемых модельных классах сред. При этом, суммарная погрешность данных δ_0 в общем случае включает в себя, помимо измерительных ошибок, модельную погрешность [Дмитриев, 2005], которая обусловлена тем, что модельный класс сред, в котором ищется решение обратной задачи, а возможно и модель связи между характеристиками среды и характеристиками поля, определяемая оператором A , не соответствуют действительности. Для разных модельных классов сред, в которых ищется решение, модельная погрешность может быть различной при одних и тех же входных данных. В связи с этим уровень δ_0 суммарной погрешности данных в задачах геофизики, как правило, неизвестен. В этом случае для уравнения (1.1.1) на компактном множестве G_1 с правой частью f , заданной с некоторой неизвестной погрешностью, может быть найдено решение \bar{g} с минимальной невязкой $\bar{\delta}$, которое называется *квазирешением* [Иванов, 1963]:

$$\|A\bar{g} - f\| = \min_{g \in G_1} \|Ag - f\| = \bar{\delta}. \quad (1.1.5)$$

Квазирешение \bar{g} уравнения (1.1.1) с приближенной правой частью $f \in F$ может быть неединственным даже в случае теоретической единственности решения уравнения, при отсутствии погрешности в данных [Иванов, 1963]. Однако при этом для любого квазирешения имеет место сходимости к точному решению: $\bar{g} \rightarrow g_T$

при $\delta_0 \rightarrow 0$. Поэтому задача поиска квазирешений отличается от поиска решений условно-корректной задачи тем, что в общем случае не выполняется условие единственности [Ягола и др., 2014]. При условии теоретической единственности (1.1.1) и некоторых дополнительных условиях квазирешение единственно [Иванов, 1963; Тихонов, Арсенин, 1979].

С помощью используемого численного метода обычно находится некоторое приближенное решение g_{δ_1} с фактической (квазимиимальной) невязкой δ_1 , которая в силу несовершенства вычислительных алгоритмов, не является строго минимальной:

$$\|Ag_{\delta_1} - f\| = \delta_1, \quad \delta_1 \geq \bar{\delta}. \quad (1.1.6)$$

Множество G_{f,δ_1} всех возможных приближенных решений, которые могут быть получены с фактической невязкой $\leq \delta_1$, определяется условием

$$G_{f,\delta_1} = \{g : g \in G_1, \|Ag - f\| \leq \delta_1\}. \quad (1.1.7)$$

В дальнейшем с целью универсализации обозначений и обобщения рассмотренных выше случаев с различным смыслом параметра δ , будем обозначать через $G_{f,\delta}$ множество решений $g_\delta \in G_{f,\delta}$, удовлетворяющих уравнению (1.1.1), с невязкой $\leq \delta$ при фиксированной правой части f :

$$G_{f,\delta} = \{g : g \in G_1, \|Ag - f\| \leq \delta\}. \quad (1.1.8)$$

Решения, принадлежащие множеству $G_{f,\delta}$, называют δ -эквивалентными решениями при фиксированной правой части f или просто δ -эквивалентными. В общем случае множество $G_{f,\delta}$ всех возможных δ -эквивалентных решений может включать в себя теоретически и практически эквивалентные решения, а также квазирешения с невязкой $\bar{\delta} \leq \delta$.

1.1.2. Оценки практической неоднозначности приближенных решений

При отсутствии какой-либо дополнительной априорной информации о свойствах искомого решения, любое решение из множества $G_{f,\delta}$ с равным успехом может быть принято за приближенное решение уравнения (1.1.1), а найденное опорное приближенное решение является лишь одним из возможных δ -эквивалентных решений из множества $G_{f,\delta}$. Это означает практическую неоднозначность приближенных решений обратной задачи, даже в условиях ее теоретической единственности при точных входных данных.

Степень практической неоднозначности решений может быть различной в зависимости от свойств оператора задачи, структуры и уровня погрешности входных данных. Для обратной задачи (1.1.1), рассматриваемой на компактном множестве G_1 , степень практической неоднозначности найденного приближенного решения g_δ оценивается количественно с помощью некоторых непрерывных функционалов, определяющих количественные характеристики множества $G_{f,\delta}$ и возможные отклонения между δ -эквивалентными решениями. Определяются такие характеристики, как расстояние от найденного до наиболее удаленного δ -эквивалентного решения или диаметр множества $G_{f,\delta}$ при заданной невязке δ . В работе [Канторович, 1962] под решением обратной задачи предлагается понимать множество, определяемое границами возможных изменений искомым параметров, при заданном δ . Если уровень погрешности данных известен, то характеристики неоднозначности определяют *апостериорные оценки погрешности* приближенных решений при фиксированной правой части.

В ряде задач бывает полезно строить *априорные характеристики* неоднозначности решений обратных задач, которые не зависят от конкретных входных данных.

Различные подходы к оценке практической неоднозначности приближенных решений рассмотрены в работах [Канторович, 1962; Гончарский, Ягола, 1969; Гончарский и др., 1978; Гончарский и др., 1987; Новик, 1987; Шимелевич, 1989; Тихонов и др., 1990; Шимелевич, Оборнев, 1999; Ягола, 2008; Yagola, Dorofeev, 2000; Николаева и др., 2003; Николаева и др., 2004; Yagola, Titarenko, 2007; Yagola, 2010; Ягола и др., 2014; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2015; Шимелевич и др., 2017; Шимелевич и др., 2018; Шимелевич, 2020].

Характеристики неоднозначности приближенных решений обратных задач геофизики составляют математическую основу решения важной для геофизической практики задачи количественной верификации результатов интерпретации измеренных геофизических данных, которая призвана оценить ее достоверность и объективность. Задача верификации результатов интерпретации заключается в проверке того, насколько предъявленная интерпретатором геофизическая модель строения среды соответствует измеренным данным. Важнейшими количественными параметрами верификации являются величина невязки измеренного и расчетного полей, а также оценка степени неоднозначности полученного решения обратной задачи, показывающая, в каких пределах могут меняться полученные интерпретатором характеристики модели при достигнутой невязке.

Методы получения различных характеристик степени практической неоднозначности решений обратных задач геофизики на компактных множествах рассматриваются в Главе 2 настоящей работы, а примеры их расчета для задач геоэлектрики – в Главах 3,4–6.

Замечание 1.1.4. *В случае существенно некорректных (сингулярных) обратных задач строятся оценки, не являющиеся оценками погрешности в полном смысле этого слова [Ягола, 2008] (см. также п. 2.1.1).*

При определении оценок практической неоднозначности расстояние между решениями и характеристиками поля могут задаваться не только с помощью норм в соответствующих пространствах, но также с помощью функционалов расстояния.

1.1.3. Функционалы расстояния в обратных задачах

При решении обратных задач необходимо вычислять характеристики, отражающие расстояние (уклонение) между элементами в соответствующих функциональных пространствах. В линейном нормированном пространстве X расстояние $d(x', x)$ между элементами x' и x (метрика в X) задается с помощью функционала расстояния, определяемого нормой разности $\|x' - x\|$:

$$d(x', x) = \|x' - x\|. \quad (1.1.9)$$

В вычислительной практике наряду с классическим расстоянием, определяемым нормой разности $\|x' - x\|$, в качестве меры близости элементов x' и x в нормированном пространстве бывает целесообразно оценивать *относительное расстояние* $d^r(x', x)$. Например, часто используется функционал относительного расстояния, между x' и x вида [Беклемишев, 1983; Годунов и др., 1988]

$$d^r(x', x) = \frac{\|x' - x\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0 \quad (1.1.10)$$

Функционал $d^r(x', x)$ относительного расстояния типа (1.1.10) не является нормой, а определяемое им относительное расстояние не является метрикой в нормированном пространстве X . Однако по физическому смыслу эти величины сходны с величинами $\|x' - x\|$ и $d(x', x)$, так как являются количественной мерой близости элементов x' и x .

1.1.4. Многокритериальные обратные задачи геофизики

Известно [Никитин, Хмелевской, 2012], что наиболее эффективным способом повышения устойчивости и однозначности результатов интерпретации

геофизических данных является *комплексирование* интерпретационных признаков (критериев). Комплексирование может проводиться в пределах одного геофизического метода или на основе нескольких методов, использующих поля различной физической природы. В основе комплексной интерпретации лежит решение многокритериальной обратной задачи [Дмитриев, 2012] при этом, в зависимости от типа комплексирования, возникают различные постановки обратных задач. Многокритериальная обратная задача сводится к решению системы операторных уравнений относительно одной или нескольких характеристик среды с использованием различных типов входных данных и критериальных ограничений.

Рассмотрим случай, когда геофизические исследования проводятся двумя геофизическими методами с использованием полей f_1, f_2 различной физической природы, для определения характеристики сред g_1, g_2 . Связь между характеристиками среды g_1 и g_2 с соответствующими характеристиками полей f_1 и f_2 представляется в виде системы операторных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 g_1 = f_1, & g_1 \in G_1 \subset G, f_1 \in F \\ A_2 g_2 = f_2, & g_2 \in G_2 \subset G, f_2 \in F \end{cases}, \quad (1.1.11)$$

где A_1, A_2 – заданные непрерывные взаимно однозначные операторы; G_1, G_2 – компактные множества. В системе (1.1.11) предполагается, что решения g_1, g_2 принадлежат одному и тому же функциональному пространству решений G , а f_1, f_2 – пространству данных F . При указанных ограничениях задача (1.1.11) является условно-корректной.

На практике характеристики сред различной физической природы часто бывают зависимыми. Примером зависимости является, условие коллинеарности градиентов $\nabla g_1, \nabla g_2$ характеристик среды, когда свойства среды по каждой из характеристик изменяются в одном и том же направлении (структурная идентичность моделей сред по различным свойствам). Такого рода взаимозависимость характеристик сред используется для совместной инверсии

сейсмических и магнитотеллурических данных в работе [Gallardo, Meju, 2004]. Взаимозависимость характеристик среды часто носит вероятностный характер. Например, скорость распространения упругих волн зависит от плотности пород и часто коррелирует с электропроводностью [Гурвич, Боганик, 1980].

В случае зависимости характеристик, при заданном значении одной из них, другая может принимать только определенные значения, что позволяет решать обратную задачу для каждой из характеристик на более узких множествах допустимых решений, что, как правило, приводит к уменьшению практической неоднозначности (погрешности) приближенных решений.

Учет взаимозависимости характеристик среды при решении двухкритериальной задачи означает привлечение дополнительной априорной информации об искомым решениях, которая математически может быть выражена с помощью некоторых функционалов. Например, условие коллинеарности градиентов $\nabla g_1, \nabla g_2$ характеристик среды определяется равенством нулю (или близостью к нулю) функционала, определяющего модуль векторного произведения векторов ∇g_1 и ∇g_2 . Степень коррелированности значений характеристик g_1 и g_2 может быть количественно выражена с помощью функционалов типа коэффициента корреляции и др. Условия, определяющие учет дополнительной априорной информации, в частности, взаимозависимость искомым характеристик среды g_1 и g_2 , во многих практических случаях, могут быть записаны в виде дополнительных критериальных ограничений на решения системы (1.1.11) в виде:

$$u_m(g_1, g_2) \leq 0, \quad m = 1, \dots, I_u, \quad g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2. \quad (1.1.12)$$

где $u_m, m = 1, \dots, I_u$, – заданный набор функционалов. Далее будем полагать, что при любом $g_2 \in G'_2 \subseteq G_2$, где G'_2 – замкнутое подмножество в G_2 , критериальные ограничения (1.1.12) определяют некоторое замкнутое подмножество в G_1 значений $g_1 \in G'_1 \subseteq G_1$. Например, в случае конечномерного пространства $g_1, g_2 \in R^N$, критериальные ограничения могут задаваться таким образом: каждому

заданному замкнутому интервалу Δ_2^m , значений m -ой компоненты g_2^m , $m = 1, \dots, I_u$ характеристики g_2 , сопоставляется некоторый замкнутый интервал Δ_1^m значений m -ой компоненты g_1^m характеристики g_1 .

Задача (1.1.11) в совокупности с условиями (1.1.12) является двухкритериальной обратной задачей общего типа с критериальными ограничениями и сводится к системе [Shimelevich et al., 2021]

$$\begin{cases} A_1 g_1 = f_1, & g_1 \in G_1 \subset G, \\ A_2 g_2 = f_2, & g_2 \in G_2 \subset G \end{cases}, \quad f_1, f_2 \in F, \quad u_m(g_1, g_2) \leq 0, m = 1, \dots, I_u. \quad (1.1.13)$$

В частном случае, когда двухкритериальная обратная задача состоит в определении одной характеристики среды g на основе двух критериев f_1 и f_2 различной или одинаковой физической природы, ограничения (1.1.12) приобретают вид $g_1 = g_2 = g$ и задача сводится к более простой системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1 g = f_1, \\ A_2 g = f_2, \end{cases} \quad g \in G_1 \subset G, \quad f_1, f_2 \in F. \quad (1.1.14)$$

При выполнении соответствующих условий единственности при точных правых частях решения каждого из уравнений системы уравнений (1.1.14) совпадают. При наличии погрешности в данных решение задачи (1.1.14) определяется следующим образом [Дмитриев, 2012]: найти g такое, что

$$\begin{cases} \|A_1 g - f_1\| \leq \delta_1, \\ \|A_2 g - f_2\| \leq \delta_2, \end{cases} \quad g \in G_1 \subset G, \quad f_1, f_2 \in F, \quad (1.1.15)$$

где δ_1 и δ_2 – погрешности задания f_1 и f_2 соответственно. Примером двухкритериальной задачи типа (1.1.14) является обратная 2D задача МТЗ на основе импедансов E - и H -поляризации МТ поля [Дмитриев, 2012; Шимелевич, 2013а]; доказана единственность решения обратной задачи (1.1.14) [Дмитриев, 2017]. Во многих случаях E -поляризованные поля более чувствительны к глубинной части разреза, а H -поляризованные – к поверхностной части, поэтому

при интерпретации данных целесообразно использовать обе группы полей (подробнее см. раздел 1.3).

Обратная двухкритериальная 1D задача геоэлектрики типа (1.1.14) рассмотрена в работах [Еров et al., 2011; Бухаров и др., 2013], где в качестве различных критериев используются электромагнитные поля с учетом и без учета токов смещения. К системе (1.1.14) сводится также обратная задача определения геометрических характеристик границ пластов на основе характеристик f_1 и f_2 геофизических полей различной физической природы: данных магнитометрии и гравиметрии, а также ряд других задач геофизики. Далее в разделе 1.4.2 приводятся постановки двухкритериальных 2D и 3D задач геоэлектрики.

Аналогичным образом могут быть сформулированы многокритериальные обратные задачи с числом критериев больше двух. Например, \mathbb{C} -критериальная задача определения одной характеристики среды g на основе \mathbb{C} критериев $f_1, f_2, \dots, f_{\mathbb{C}}$ различной или одинаковой физической природы сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} A_1 g = f_1, \\ A_2 g = f_2, \\ \dots \\ A_{\mathbb{C}} g = f_{\mathbb{C}}, \end{cases}, g \in G_1 \subset G, f_1, f_2, \dots, f_{\mathbb{C}} \in F. \quad (1.1.16)$$

1.1.5. Обратная задача электромагнитного мониторинга

Геодинамические процессы в земной коре могут оказывать значительное влияние на электрические свойства геологической среды [Соболев, 1993; Светов, 1997]. Эти явления составляют объективную основу для проведения ЭМ мониторинга среды с целью количественной оценки изменений электропроводности в сейсмоактивных зонах, а получаемые при этом данные, в

совокупности с данными других методов, могут использоваться для предсказания землетрясений и других катастрофических событий природного или техногенного происхождений. При ЭМ мониторинге могут использоваться естественные магнитотеллурические (МТ) поля и ЭМ поля искусственных источников [Мороз и др., 1995; Мороз, Гонтовая, 2001; Неведрова и др., 2004; Мороз и др., 2005; Матюков, 2011; Неведрова, Шалагинов, 2015; Потапов, Поспеева, 2017]. В этих работах на основе интерпретации данных ЭМ мониторинга вычисляются оценки изменения электропроводности среды в сейсмоактивных зонах. В основе интерпретации данных мониторинга лежит решение *обратной задачи ЭМ мониторинга*. Особенность обратной задачи ЭМ мониторинга состоит в том, что требуется во времени *оценивать изменения электропроводности среды в некоторой локальной подобласти среды на основе измерений ЭМ поля, проводимых на локальных (разреженных) сетях наблюдения*.

В настоящей работе рассматриваются методы ЭМ мониторинга с использованием МТ полей. Классическая обратная задача мониторинга всегда ассоциируется с некоторой обратной задачей и формулируется следующим образом [Шимелевич, Оборнев, 2008; 2009]. Предположим, что в результате ранее проведенных исследований, распределение электропроводности $g(r)$ среды известно в некоторой области $r \in \Omega$, включающей подобласть $D \subset \Omega$, где ожидается динамика электропроводности. Это означает, что g удовлетворяет уравнению (1.1.1), рассматриваемому для всей области Ω , с некоторой невязкой $\delta : \|Ag - f\|_F = \delta$, где f - правая часть (1.1.1), определенная на всей границе Ω_1 (земля-воздух) области Ω . Пусть под влиянием геодинамических процессов произошло изменение Δg характеристики среды g в подобласти $D \subset \Omega$. Обратная задача определения Δg на основе данных f^D , определенных на части границы $\Omega_2 \subset \Omega_1$, сводится к решению нелинейного операторного уравнения при фиксированном g :

$$A(g + \Delta g) = f^D, \Delta g \in G_{1,i}^*, \quad g + \Delta g \in G_1, \quad f^D \in F_1[\Omega_{2,\omega}], \quad (1.1.17)$$

где $G_{1,i}^*[\bar{\Omega}_i] = \{h(r) : h(r) \in G_1, h(r) = 0, r \notin \bar{\Omega}_i\}$ - множество финитных функций, отличных от 0 только в подобласти D ; A - оператор прямой задачи уравнения (1.1.1); $F_1[\Omega_{2,\omega}]$, $\Omega_{2,\omega} = \Omega_2 \times \Delta_\omega$ - пространство векторных функций, определенных на части границы $\Omega_2 \subset \Omega_1$ в диапазоне частот Δ_ω .

В спокойный период отсутствует динамика электропроводности в подобласти D , при этом в уравнении (1.1.17) $\Delta g = 0$, а правая часть f^D не меняется во времени. Обозначим через δ^D невязку решения g уравнения (1.1.17) при $\Delta g = 0$, вычисленную на границе Ω_2 : $\delta^D = \|Ag - f^D\|_{F_1}$. Под влиянием геодинамических процессов электропроводность среды в области D изменяется во времени; $\Delta g \neq 0$, и соответственно во времени меняются отклик среды $A(g + \Delta g)$, правая часть f^D и невязка δ^D . Задача (1.1.17) решается в заданные моменты времени t_j ; находимые решения Δg_t определяют динамику электропроводности среды в области D .

На практике априорная информация о ранее полученном решении g обратной задачи (1.1.1) часто бывает неполной или вообще отсутствует. В общем случае для целей мониторинга вместо (1.1.17), приходится решать обратную задачу (1.1.1) с правой частью, определенной на части границы $\Omega_2 \subset \Omega_1$ в диапазоне частот Δ_ω :

$$A(g) = f, \quad g \in G_1[D], \quad f \in F_1[\Omega_{2,\omega}]. \quad (1.1.18)$$

В Главе 4 (п.4.1.7, 4.2.4) рассмотрены нейросетевые методы решения обратных задач ЭМ мониторинга на основе уравнений (1.1.17), (1.1.19).

1.2. Обратные задачи в конечно-параметрических классах сред

Обратные задачи геофизики с учетом априорной информации о строении геолого-геофизических сред в подавляющем большинстве случаев могут решаться в конечно-параметрических модельных классах сред, свойства которых определяются конечным числом N параметров, изменяющихся в конечных пределах, определяемых на основе априорной информации. Это позволяет естественным образом выделить компактное множество корректности обратной задачи. Классы сред могут выделяться на основе проведения модельной параметризации задачи с использованием априорной информации о строении среды, или - параметризации аппроксимационного типа, если исходная задача (1.1.1) задача решается аппроксимационным методом, в котором характеристика среды аппроксимируется с помощью конечно-параметрической конструкции заданного типа. *Главный принцип параметризации аппроксимационного любого типа состоит в достижении наиболее удовлетворительного компромисса между требованиями к точности аппроксимации исследуемой среды и устойчивости решения обратной задачи [Страхов, 1978; Бердичевский, Дмитриев, 2009].*

1.2.1. Основные принципы и типы параметризации геофизических сред

При параметризации искомые характеристики среды $g(r) \in G[\Omega]$, $r = (x, y, z) \in \Omega$ задаются с помощью функции параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$ [Гончарский и др., 1978; Страхов, 1978; Тихонов и др., 1983; Гончарский и др., 1987; Шимелевич, 1988; Шимелевич, Оборнев, 2007] в виде

$$g(r) = \Pi_N(s, r), \quad s \in S_{\Pi_N} \subset R^N, \quad r \in \Omega, \quad (1.2.1)$$

где $s = (s^1, \dots, s^N)$ – вектор числовых параметров модели среды, N – число параметров; R^N – арифметическое пространство размерности N ; S_{Π_N} – множество допустимых значений параметров (априорных ограничений на параметры). В соответствии с (1.2.1), каждому вектору параметров $s \in S_{\Pi_N} \subset R^N$ ставится в соответствие функция $g(r) \in G[\Omega]$ характеристики среды, что можно трактовать как действие некоторого оператора параметризации Π_N , действующего из пространства параметров R^N в пространство решений G по правилу, определяемому функцией параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$. В дальнейшем будем полагать, что функция параметризации является непрерывной по переменным s^1, \dots, s^N .

Замечание 1.2.1. *Оператор параметризации в дальнейшем, там, где это не вызывает недоразумений, мы будем обозначать таким же символом Π_N , как и функцию параметризации, но без указания переменных s и r .*

Значения характеристик реальных геосред всегда изменяются в конечных пределах, определяемых естественными априорными ограничениями общего вида

$$g_{\min} \leq g(r) \leq g_{\max}, \quad r \in \Omega, \quad (1.2.2)$$

где g_{\min} , $g_{\max} = g_{\min} + D_s$ – известные минимальное и максимальное значения искомой характеристики среды $g(r)$, D_s – диапазон изменения искомой характеристики среды.

Во многих практических случаях (при минимальной априорной информации о среде и соответствующей нормировке параметров) в качестве множества S_{Π_N} допустимых значений параметров (множества априорных ограничений) можно рассматривать N -мерный куб S_N вида

$$S_N = \left\{ s : s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, \quad n = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.2.3)$$

В общем случае при наличии дополнительной априорной информации подмножество S_{Π_N} может определяться более сложными ограничениями типа

неравенств, например, могут задаваться индивидуальные диапазоны $D_s(n)$ допустимых изменений для каждого из параметров (см. ниже (1.2.10)).

Различные виды функций параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$ и априорные ограничения S_{Π_N} порождают различные модельные конечно-параметрические классы сред $G_{\Pi_N}(\Omega, S_{\Pi_N})$ и соответствующие им множества корректности, на которых решается обратная задача (см. п. 1.2.2).

Основные типы параметризации

А. Модельная параметризация, при которой на основе априорной информации задается геолого-геофизическая модель среды, имеющая определенную структуру, а параметрами s^1, \dots, s^N , являются реальные геометрические характеристики структуры: мощности слоев, размеры блоков и иных структурных элементов, а также значения физических характеристик (удельного сопротивления, плотности пород и др.) этих элементов.

Функция параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$ в этом случае может быть задана аналитическими формулами, а также в виде комбинаций правил и алгоритмов, определяющих характер распределения структурных элементов данной модели, а априорные ограничения задачи определяются границами допустимых изменений реальных параметров модели среды. Модельная параметризация требует привлечения большого объема специальной априорной информации о строении исследуемой среды (наличие слоев и других структурных элементов) и применяется при решении обратных задач типа «проверки гипотез» [Бердичевский, Дмитриев, 2004].

В. Параметризация аппроксимационного типа, при которой функция параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$ представляет собой некоторую конструкцию,

аппроксимирующую искомую характеристику среды. Параметрами s^1, \dots, s^N задачи в этом случае являются числовые коэффициенты этой конструкции, которые могут не иметь явного геофизического смысла. В качестве аппроксимационных конструкций могут использоваться, например, суммы различного рода функций с коэффициентами s^1, \dots, s^N . Если функция параметризации линейно зависит от параметров s^1, \dots, s^N , то это – линейная параметризация, в противном случае параметризация является нелинейной. Примером нелинейной параметризации является параметризация с использованием конструкций типа непрерывной дроби, дробно-рациональных функций. Суммы различного рода функций с коэффициентами s^1, \dots, s^N , представляют собой линейную параметризацию.

На основе параметризации аппроксимационного типа с достаточной для практики точностью могут быть охарактеризованы любые реальные модели геосред с помощью конечного числа параметров. При этом требуется значительно меньшие объемы априорной информации по сравнению с модельной параметризацией. Параметризация аппроксимационного типа применяется в обратных задачах общего типа при минимальной информации о строении среды, например, при оценке первого приближения.

В некоторых случаях при параметризации аппроксимационного типа коэффициенты аппроксимационных конструкций имеют самостоятельный физический смысл. Например, при поиске решения задачи (1.1.1) в классе кусочно-постоянных функций используется параметризация сеточного (блочного) типа (см. раздел 1.2.1.2), при которой коэффициентами аппроксимационной конструкции являются значения искомой характеристики среды в узлах (ячейках) сетки параметризации.

С. Параметризация смешанного типа, когда комбинируются методы параметризации типов А и В.

Различные конкретные примеры параметризации геофизических сред указанных выше типов рассматривались в работах [Дмитриев, Кокотушкин, 1971;

Жданов, Страхов, 1978; ; Жданов и др., 1983; Шимелевич, 1988; Аронов, 1990; Шимелевич, Оборнев, 1997; Страхов, 1998; Варенцов, 2002; Долгаль, 1999; Шимелевич, Оборнев, 2007; Блох, 2009; Балк и др., 2011; Долгаль, 2012].

Основные принципы параметризации

I. Основное требование к функции параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$, кроме ее непрерывной зависимости от переменных s^1, \dots, s^N , заключается в том, что различным векторам параметров s, s' должны соответствовать различные характеристики среды g, g' , и наоборот. Это означает, что оператор параметризации Π_N , действующий из R^N в G , должен быть непрерывным и взаимно однозначным. В этом случае по любому заданному вектору параметров s , в соответствии с (1.2.1), может быть однозначно определена характеристика среды $g(s, r)$ из класса сред, определяемого заданным типом параметризации Π_N . При выполнении этого требования не происходит потери единственности решения исходной обратной задачи (1.1.1).

II. Функции параметризации $\Pi_N(s, r)$ должны обеспечивать принадлежность решений, порождаемых этими функциями, пространству решений (классу сред), в котором рассматривается исходная обратная задача (1.1.1). Это условие обеспечивается выбором типа зависимости функции параметризации от пространственных координат (например, параметризация с помощью непрерывных, кусочно-непрерывных, кусочно-постоянных функций).

III. Размерность N (детальность) параметризации должна быть достаточно большой, чтобы адекватно отражать особенности искомой характеристики среды в исследуемой области Ω , так как при малых N в общем случае мы получаем слишком грубое описание свойств среды. Однако, при больших значениях N

множества корректности решаемых обратных задач могут оказаться слишком широкими. Решения обратной задачи в этом случае будут характеризоваться *большой неустойчивостью и, как следствие - большой неоднозначностью (погрешностью)*, что лишает их практического смысла.

Например, если исходная задача (1.1.1) задача решается аппроксимационным методом, то точность аппроксимации характеристик среды растет с ростом размерности аппроксимационной конструкции, при этом также растет неустойчивость (неоднозначность, неопределенность) получаемых решений обратной задачи. Противоречивость требований устойчивости и точности аппроксимации среды приводят к необходимости определения *оптимальной размерности параметризации* [Страхов, 1978; Бердичевский, Дмитриев, 2009]. Следуя Страхову, *параметризацию* аппроксимационного типа, *обеспечивающую компромисс между точностью аппроксимации среды и устойчивостью решения обратной задачи, мы будем называть эффективной*.

Ниже рассматриваются конкретные примеры линейной параметризации аппроксимационного типа и, в частности, сеточной параметризации, которая в дальнейшем используется при численных расчетах.

1.2.1.1. Линейная параметризация аппроксимационного типа

Наиболее распространенным и универсальным способом параметризации среды, не требующим специальной априорной информации о строении среды, является аппроксимация искомой характеристики среды $g(r)$ в исследуемой области Ω с помощью конечной суммы заданных базовых функций $\{\varphi_n(r), n = 1, \dots, N\}$ [Гончарский и др., 1978; Страхов, 1978]

$$g(r) = \Pi_{N,\varphi}(s, r) = \sum_1^N s^n \varphi_n(r), \quad s \in S_N, \quad r \in \Omega. \quad (1.2.4)$$

Искомыми параметрами среды в этом случае являются коэффициенты s^1, \dots, s^N , представления (1.2.4). Условие взаимной однозначности оператора параметризации $\Pi_{N,\varphi}$ (I принцип параметризации) выполняется, например, если функции $\varphi_n(r)$, $n = 1, \dots, N$, линейно независимы. В этом случае векторы $s \in R^N$ и соответствующие им функции $g(r) \in G$ вида (1.2.4) связаны взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением $\Pi_N : R^N \rightarrow G$ [Люстерник, Соболев, 1982]. В частности, например, могут использоваться ортогональные системы функций $\varphi_n(r)$, $n = 1, \dots, N$. В зависимости от того в каком классе решений рассматривается исходная обратная задача (1.1.1), для обеспечения выполнения II принципа параметризации выбирается тип зависимости функций $\varphi_n(r)$, $n = 1, \dots, N$, от пространственных координат.

Функция параметризации $\Pi_{N,\varphi}(s, r)$ и множество S_N порождают модельный класс сред $G_{N,\varphi}(\Omega, S_N)$, в котором решается обратная задача. Для обеспечения выполнения III принципа параметризации должна решаться задача эффективной параметризации для рассматриваемого класса сред.

В работах [Дмитриев, Кокотушкин, 1971; Жданов и др., 1983; Tarantola, 1984; Шимелевич, 1988; Шимелевич, Оборнев, 1997; Варенцов, 2002; Шимелевич, Оборнев, 2007] рассматривались различные конкретные примеры параметризации сред вида (1.2.4) для задач геоэлектрики.

Частным случаем линейной параметризации аппроксимационного типа (1.2.4) является сеточная (блочная) параметризация.

1.2.1.2. Сеточная (блочная) параметризация аппроксимационного типа

В представлении (1.2.4) могут быть использованы финитные функции $\eta_{q,n}(r)$ (например, сплайны порядка q):

$$g(r) = \sum_1^N s^n \eta_{q,n}(r), \quad s \in S_N, \quad r \in \Omega.$$

Для сплайнов нулевого порядка ($q=0$) это соотношение соответствует представлению характеристики среды в классе кусочно-постоянных (ступенчатых) функций $\eta_{0,n}(r)$ в исследуемой области Ω :

$$g(r) = \Pi_{N,\eta}(s,r) = \sum_1^N s^n \eta_{0,n}(r), \quad s \in S_N, \quad r \in \Omega. \quad (1.2.5)$$

Параметризацию типа (1.2.5) называют *сеточной (блочной)*. Каждая из функции $\eta_{0,n}(r)$, $n=1,\dots,N$, отлична от нуля и равна 1 только в пределах n -й ячейки $\Omega_{\theta,n}$, $n=1,\dots,N$ заданной сетки параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω (рис. 1.2.1); на границах ячеек функции вида (1.2.5) имеют разрыв и задаются по определенному правилу. Искомыми параметрами среды являются коэффициенты s^1, \dots, s^N представления (1.2.5), которые равны значениям g^1, \dots, g^N , искомой характеристики среды $g(r)$ в ячейках сетки θ_N параметризации: $s^n = g^n$, $n=1,\dots,N$.

Сеточная параметризация (1.2.5) порождает модельный класс сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$, в котором решается обратная задача. Класс сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ однозначно определяется сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω и априорными ограничениями S_N .

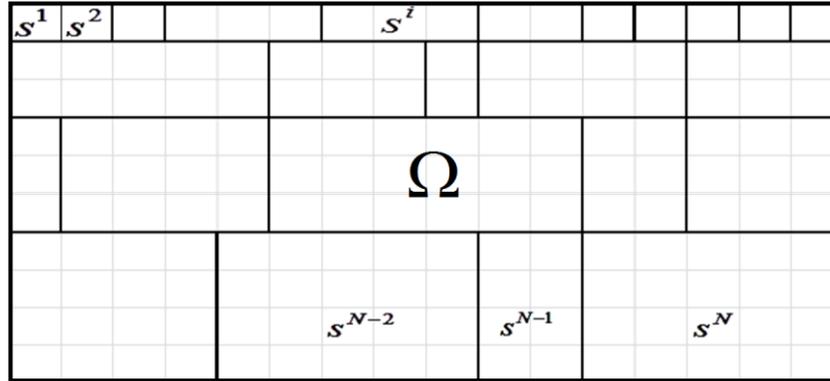


Рис.1.2.1. Схематическое представление неравномерной сеточной (блочной) параметризации, для заданной сетки параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω ; тонкими линиями схематически показана сетка, на которой решается прямая задача.

Замечание 1.2.2. Очевидно, что размерность N сетки параметризации θ_N не может превышать размерности N_0 сетки θ_{N_0} , на которой решается прямая задача: $1 \leq N \leq N_0$. Все укрупненные сетки параметризации θ_N при $N < N_0$ фактически конструируются путем объединения ячеек исходной сетки θ_{N_0} (см. также п. 2.4.2).

Принцип I, в соответствии с которым требуется взаимная однозначность оператора сеточной параметризации $\Pi_{N,n}$, выполняется, так как финитные функции $\eta_{0,n}(r)$, $n = 1, \dots, N$, линейно независимы и образуют базис в N -мерном линейном пространстве функций, представимых в области Ω в виде (1.2.5). Принцип II, применительно к сеточной параметризации, выполняется, так как исходная обратная задача (1.1.1) рассматривается в классе кусочно-непрерывных решений.

Для обеспечения выполнения III принципа параметризации в диссертационной работе решается задача эффективной параметризации в классе кусочно-постоянных (сеточных) решений (см. п.2.5.1). Удобство и универсальность сеточной параметризации заключается в том, что с одной стороны коэффициенты в представлении (1.2.5) совпадают со значениями искомой характеристики среды и являются реальными физическими параметрами среды, а

не абстрактными числовыми коэффициентами. С другой стороны, с помощью сеточных конструкций вида (1.2.5) при достаточно больших $N \leq N_0$ любые характеристики реальных сред могут быть аппроксимированы с необходимой для практики точностью.

Сеточные конструкции могут быть неравномерными. Ячейки сеток могут представлять собой интервалы, прямоугольники, кубы, призмы и другие пространственные элементы (многогранники). В качестве функций $\varphi_n(r)$, $n = 1, \dots, N$, в (1.2.4) могут использоваться произвольные функции с конечными носителями. В этих случаях говорят о *конечно-элементной параметризации*, частным случаем которой является рассмотренная сеточная параметризация. Конечно-элементная параметризация составляет основу монтажного подхода к решению обратных задач потенциальных полей, развиваемого в работах В.Н. Страхова и его последователей [Страхов, Лапина, 1976; Балк и др., 2011; Аронов, 1990; Булах, 2007; Пугин, 2007; Долгаль и др., 2012]. В электромагнитных методах конечно-элементная параметризация среды применялась, например, работах [Жданов и др., 1983; Шимелевич, 1988; Шимелевич, Оборнев, 1997; Шимелевич, Оборнев, 2007; Персова, 2009; Персова и др., 2013].

1.2.2. Обратные задачи в конечно-параметрических классах сред

1.2.2.1. Обратные задачи при параметризации общего типа. Связь с истокорпредставимостью решения

Как уже отмечалось выше, будем полагать, что пространство G решений задачи (1.1.1) является пространством кусочно-непрерывных функций, и все

рассматриваемые типы параметризации обеспечивают принадлежность решений этому пространству.

Обозначим через $G_{\Pi_N} \subset G$ конечно-параметрическое подмножество характеристик среды, представимых в виде (1.2.1) при априорных ограничениях $S_{\Pi_N} = S_N$:

$$G_{\Pi_N} = \{g : g = \Pi_N s, s \in S_N\}, \quad (1.2.6)$$

где $\Pi_N : R^N \rightarrow G$ – непрерывный, взаимно однозначный оператор параметризации, определяемый функцией параметризации $\Pi_N(s, r)$ общего типа, которая действует по правилу (1.2.1) и удовлетворяет принципам параметризации I и II. Будем искать решение обратной задачи (1.1.1) на подмножестве G_{Π_N} :

$$Ag = f, \quad g \in G_{\Pi_N} \subset G, \quad f \in F. \quad (1.2.7)$$

Подмножество $G_{\Pi_N} = \Pi_N S_N$ является компактным в пространстве решений G , так как, в силу непрерывности функции параметризации по переменным s^1, \dots, s^N , оно является непрерывным образом компактного множества S_N [Колмогоров, Фомин, 1972]. Таким образом, обратная задача (1.2.7), при условии взаимной однозначности оператора A , является условно-корректной на G_{Π_N} . Функция параметризации $\Pi_N(s^1, \dots, s^N, r)$ и априорные ограничения S_{Π_N} порождают конечно-параметрический класс сред $G_{\Pi_N}(\Omega, S_{\Pi_N})$ и соответствующее ему множество корректности G_{Π_N} , на котором решается обратная задача (1.1.1).

Следуя общей схеме для нелинейных уравнений [Тихонов и др., 1990] и, подставляя $g = \Pi_N s$ в (1.2.7), получаем уравнение конечномерной обратной задачи в пространстве параметров R^N на множестве S_N :

$$A\Pi_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in F,$$

или

$$A_{N,\Pi} s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in F \quad (1.2.8)$$

где $A_{N,\Pi}$ – оператор, представляющий собой композицию операторов $\Pi_N : R^N \rightarrow G$, $A : G \rightarrow F$ и действующий из R^N в F по правилу

$$A_{N,\Pi}s = A(\Pi_N s). \quad (1.2.9)$$

Оператор $A_{N,\Pi} = A\Pi_N$, как композиция двух непрерывных и взаимно однозначных операторов A и Π_N , сам является непрерывным и взаимно однозначным [Тихонов и др., 1990], поэтому с учетом компактности множества S_N , задача (1.2.8) также является условно-корректной на S_N . При этом любому единственному решению обратной задачи (1.2.7) соответствует единственное решение конечномерной обратной задачи (1.2.8) и наоборот [Гончарский и др., 1987].

Таким образом, исходная обратная задача (1.1.1), рассматриваемая на компактном конечно-параметрическом множестве G_{Π_N} , сводится к более простой конечномерной задаче (1.2.8) в пространстве параметров R^N на кубе S_N . Так как рассмотренная параметризация проводится в соответствии с принципом I, то переход от исходной обратной задачи (1.1.1) к параметризованной не приводит к потере единственности решений исходной (если таковая имела место).

Найденное решение $s \in S_N$ конечномерной задачи (1.2.8) в пространстве параметров пересчитывается в решение задачи (1.2.7) на множестве G_{Π_N} по формуле (1.2.1). В случае, когда параметры имеют самостоятельный физический смысл, такой пересчет необязателен (например, модельная параметризация типа A, сеточная параметризация).

Переход от уравнения (1.1.1) к уравнению типа (1.2.8), основанный на представлении искомого решения в виде (1.2.1), является частным случаем преобразований, применяемых при решении нелинейных некорректных задач, в случае, когда имеется априорная информация об истокообразной представимости точного решения $g \in G$ исходного уравнения (1.1.1) в виде: $g = Bv$, где B – инъективный компактный непрерывный оператор, действующий из метрического пространства V в G [Тихонов и др., 1990; Леонов, Ягола, 1998; Dorofeev, Yagola,

2004] (см. также [Дорофеев и др., 2003; Yagola, Dorofeev, 2000; Yagola, 2010; Ягола и др., 2014]). При параметризации $V = R^N$, $B = \Pi_N$.

Здесь уместно также провести аналогию методов параметризации с методами истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей эквивалентными сеточными моделями источников в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии [Аронов, 1990; Страхов, 1998; Долгаль, 1999; Пугин, 2007; Долгаль и др., 2012]. Аппроксимация измеренных полей эквивалентными сеточными моделями источников производится с помощью набора истокообразных функций – полей элементарных источников (в гравиметрии – избыточных плотностей), расположенных всюду ниже поверхности наблюдений. При этом могут использоваться как линейные [Аронов, 1990; Пугин, 2007] так и нелинейные эквивалентные модели аппроксимирующих источников [Цирульский, 1990; Блох, 2009], хотя на практике в подавляющем большинстве случаев применяются линейные алгоритмы [Страхов, 1999].

При наличии дополнительной априорной информации, когда известны индивидуальные диапазоны $D_s(n)$ допустимых изменений для каждого из параметров, обратная задача рассматривается на N -мерном параллелепипеде $S_{1,N}$

$$S_{1,N} = \left\{ s : s_{\min}^n \leq s^n \leq s_{\min}^n + D_s(n), \quad n = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.2.10)$$

Приведенные в данном разделе результаты справедливы для любых типов параметризации (удовлетворяющих принципам I и II параметризации), определяемых функцией параметризации Π_N и априорными ограничениями. Для обеспечения требования III необходимо решать задачу эффективной параметризации для рассматриваемого класса решений. Ниже рассматривается частный случай конечно-параметрических задач в классе кусочно-постоянных решений, соответствующий параметризации сеточного типа и представляющий наибольший практический интерес, ввиду наибольшей универсальности.

1.2.2.2. Обратные задачи при параметризации аппроксимационного типа

Зададим подмножество $G_{N,\varphi} \subset G$ характеристик среды, определяемое функцией параметризации аппроксимационного типа (1.2.4)

$$G_{N,\varphi} = \{g : g = \Pi_{N,\varphi}s, s \in S_N \subset R^N\}. \quad (1.2.11)$$

Функция параметризации $\Pi_{N,\varphi}(s^1, \dots, s^N, r)$ и априорные ограничения S_N порождают конечно-параметрический класс решений $G_{\Pi_N}(\Omega, S_{\Pi_N})$ и соответствующее ему множество корректности G_{Π_N} , на котором решается обратная задача. В соответствии с общей схемой, изложенной в разделе 1.2.2.1, обратная задача (1.1.1) на множестве $G_{N,\varphi}$ сводится к уравнению в пространстве параметров R^N :

$$A_{N,\varphi}s = f, \quad s \in S_N, \quad f \in F, \quad (1.2.12)$$

где $A_{N,\varphi}$ – оператор параметризованной задачи, который действует из R^N в F и представляет собой композицию операторов $\Pi_{N,\varphi} : R^N \rightarrow G$ и $A : G \rightarrow F$:

$$A_{N,\varphi}s = A(\Pi_{N,\varphi}s). \quad (1.2.13)$$

1.2.2.3. Обратная задача при параметризации сеточного типа

Обратная задача (1.1.1) рассматривается в пространстве $G_N \subset G$ кусочно-постоянных решений на подмножестве $G_{N,\eta} \subset G_N \subset G$ вида

$$G_{N,\eta} = \{g : g = \Pi_{N,\eta}s, s \in S_N \subset R^N\}. \quad (1.2.14)$$

где $\Pi_{N,\eta} : R^N \rightarrow G_N$ – непрерывный взаимно-однозначный оператор параметризации, определяемый параметризацией $\Pi_{N,\eta}(s,r)$ сеточного типа, которая ассоциирована с заданной сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω , и действует по правилу (1.2.5).

Класс сред $G_{N,\eta} = G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ и соответствующее ему множество корректности $G_{N,\eta}$ для обратной задачи (1.1.1) однозначно определяются используемой сеткой параметризации θ_N , покрывающей заданную исследуемую область Ω и естественными априорными ограничениями (1.2.3) на множество S_N .

В соответствии с общей схемой, изложенной в разделе 1.2.2.1, обратная задача (1.1.1) на подмножестве $G_{N,\eta}$ сводится к уравнению

$$A_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in F, \quad (1.2.15)$$

где $A_N : R^N \rightarrow F$ – оператор параметризованной задачи, который представляет собой композицию операторов $\Pi_{N,\eta} : R^N \rightarrow G$ и $A : G \rightarrow F$:

$$A_N s = A(\Pi_{N,\eta} s), \quad s \in S_N \subset R^N, \quad (1.2.16)$$

где S_N – множество априорных ограничений вида (1.2.3). При наличии априорной информации могут задаваться более узкие множества априорных ограничений типа (1.2.10).

Искомые параметры s^1, \dots, s^N при сеточной параметризации имеют самостоятельный физический смысл, так как равны значениям g^n характеристики среды $g(r)$ в ячейках сетки θ_N параметризации. Пересчет параметров s^1, \dots, s^N , находимых из уравнений (1.2.15), по формуле (1.2.5) фактически представляет собой кусочно-постоянную интерполяцию между дискретными значениями характеристики среды, которая находится из уравнения (1.2.15).

При сеточной параметризации решение обратной задачи (1.1.1) ищется в пространстве G_N кусочно-постоянных функций, с помощью которых любые

характеристики реальных кусочно-непрерывных сред могут быть аппроксимированы с точностью, превышающей разрешающую способность наземных геофизических методов, что объясняет *наибольшую универсальность и практическую значимость сеточной параметризации*.

В геоэлектрике в пространстве кусочно-постоянных решений решаются также двухкритериальные конечно-параметрические задачи, которые являются частным случаем задачи (1.1.14)

$$\begin{cases} A_{1,N}s = f_1, \\ A_{2,N}s = f_2, \end{cases} \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_1, f_2 \in F, \quad (1.2.17)$$

где $A_{1,N}$, $A_{2,N}$ – операторы вида (1.2.16) задач, соответствующих используемым критериям. В более общем случае рассматривается \mathbb{C} -критериальная обратная задача типа (1.1.16) в пространстве кусочно-постоянных решений, которая сводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} A_{1,N}s = f_1, \\ A_{2,N}s = f_2, \\ \dots \\ A_{C,N}s = f_C, \end{cases} \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_1, f_2, \dots, f_C \in F, \quad (1.2.18)$$

где $A_{1,N}$, $A_{2,N}$, ..., $A_{C,N}$, – операторы типа (1.2.16), которые действуют из R^N в F .

1.3. Обратные задачи геоэлектрики

Под термином геоэлектрика в широком смысле понимают совокупность геофизических методов исследования Земли, с использованием естественных и искусственных электромагнитных (ЭМ) полей контролируемых источников [Романов, Кабанихин, 1991; Светов, 2008]. В данной работе, следуя [Дмитриев, 2012], геоэлектрикой (в узком смысле) мы будем называть совокупность

магнитотеллурических (МТ) методов, использующих естественные источники поля и включающих в себя методы МТ зондирований (МТЗ), и магнитовариационных (МВ) зондирований (МВЗ). Ниже рассматриваются основные особенности и существующие методы решения прямых и обратных задач МТ методов.

1.3.1. Прямые задачи геоэлектрики

В МТ методах используются ЭМ поля, возбуждаемые в Земле удаленными источниками токов ионосферного происхождения (МТ поля). Если линейные размеры области исследований значительно меньше расстояния до ионосферных источников, то ЭМ поле этих источников в области исследований можно аппроксимировать полем однородной плоской ЭМ волны (с неизвестной амплитудой), вертикально падающей на земную поверхность [Тихонов, 1950; Бердичевский, Жданов, 1981; Бердичевский, Дмитриев, 2009]. Эти условия выполняются в средних и низких широтах в диапазоне частот, соответствующем типовым вариациям МТ поля, которые используются на практике (пульсации, бухты).

Основные уравнения МТ поля

В области, где отсутствуют сторонние токи и заряды, в рамках плоской модели Земли, МТ поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла в диффузном (квазистационарном) приближении для немагнитной, изотропной,

неполяризующейся среды (при гармоническом изменении поля $e^{-i\omega t}$) [Бердичевский, Жданов, 1981]:

$$\begin{cases} \text{rot}H(r, \omega) = \sigma(r)E(r, \omega), \\ \text{rot}E(r, \omega) = i\omega\mu_0 H(r, \omega), \end{cases} \quad (1.3.1)$$

где $r = (x, y, z)$; $H = (H_x, H_y, H_z)$, $E = (E_x, E_y, E_z)$ – векторы МТ поля; $\sigma(r) = 1/\rho(r)$ – удельная электропроводность среды, $\rho(r)$ – удельное сопротивление среды; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота поля, T – период колебаний.

В 2D случае ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$) МТ поле распадается на две независимые группы полей:

H - и E -поляризации (TM - и TE -моды) [Бердичевский, Жданов, 1981].

H -поляризация определяется набором компонент поля $H_x(y, z, \omega)$, $E_y(y, z, \omega)$, $E_z(y, z, \omega)$. Компонента H_x удовлетворяет скалярному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + i\omega\mu_0 H_x = 0. \quad (1.3.2)$$

E_y, E_z выражаются через H_x соотношениями

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

E -поляризация определяется набором компонент поля $E_x(y, z, \omega)$, $H_y(y, z, \omega)$, $H_z(y, z, \omega)$. Компонента E_x удовлетворяет скалярному уравнению

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + i\omega\mu_0 \sigma E_x = 0. \quad (1.3.3)$$

H_y, H_z выражаются через E_x соотношениями

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

1.3.1.1. Методы решения прямой задачи МТ методов

Решение прямой задачи МТ методов заключается в нахождении МТ полей $E(r, \omega), H(r, \omega)$ и их характеристик в исследуемой области среды Ω и, в частности, в области измерений $\Omega_1 \in \Omega$, по известному распределению удельной электропроводности среды $\sigma(r)$, $r = (x, y, z) \in \Omega$. Достаточно полные обзоры по методам решения прямых задач магнитотеллурики представлены в работах [Бердичевский, Жданов, 1981; Жданов, 2007; Hohmann, 1983; Varentsov, 1983; Спичак, 1999; Авдеев, 2005].

При математической постановке прямой задачи источник поля задается в виде плоской волны, поэтому рассматривать прямую задачу изначально приходится во всем пространстве и использовать для этого идеализированные модели исследуемой среды, которые представляют собой неоднородную ограниченную область с электропроводностью $\sigma(r)$, $r \in \Omega$, расположенную в некоторой неограниченной фоновой среде с известным и более простым распределением электропроводности, для которой прямая задача в отсутствие неоднородности решается относительно легко. Знание фоновой среды и соответствующего ей фонового поля позволяют «избавиться» от бесконечных областей и сформулировать прямую задачу в конечной области пространства. При численном решении прямых задач применяются интегральные и дифференциальные методы.

В интегральных методах основной является модель среды, состоящая из неоднородной области с кусочно-непрерывной электропроводностью $\sigma(r)$, $r \in \Omega$, расположенной в безграничной горизонтально-слоистой среде с известной кусочно-постоянной электропроводностью $\sigma_N(z)$ (играющей роль фоновой среды). Основные принципы интегральных методов были заложены в работах [Дмитриев, 1969; Табаровский, 1975; Weidelt, 1975; Hohmann, 1975]. Дальнейшее

развитие методы получили в многочисленных работах А.Н. Дмитриева, а также в работах [Wannamaker, 1991; Xiong, 1992; Авдеев, 2005] и ряде других работ.

Обозначим через $E(r, \omega)$, $H(r, \omega)$ решение системы (1.3.1) для заданной модели среды, возбуждаемой однородной плоской ЭМ волной, нормально падающей на земную поверхность, а через $E^N(r, \omega)$, $H^N(r, \omega)$ – решение этой же задачи в слоистой среде при отсутствии неоднородности (нормальное поле), которое представляется в аналитическом виде (с помощью рекуррентных формул [Бердичевский, Жданов, 1981]). Для данной модели среды электрическое поле $E(r, \omega)$ в любой точке трехмерного пространства может быть представлено [Дмитриев, 2012] в виде

$$E(r, \omega) - \int_{\Omega} \hat{G}_E(r, r', \omega) (\sigma(r') - \sigma_N(z)) E(r', \omega) d\Omega_{r'} = E^N(r, \omega),$$

где $\hat{G}_E(r, r', \omega)$ – тензор Грина электрического типа, который определяется из решения системы уравнений Максвелла в слоистой среде. Если $r \in \Omega$, то данное интегральное соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно поля $E(r, \omega)$ в области Ω . Решив это уравнение, можно рассчитать поле $E(r, \omega)$ (а значит, и поле $H(r, \omega)$ из второго уравнения (1.3.1)) в любой точке пространства. Аналогичное интегральное уравнение может быть получено для магнитного поля с использованием тензора Грина $\hat{G}_H(r, r', \omega)$ магнитного типа. Методы и численные схемы расчета тензоров Грина и решений соответствующих интегральных уравнений для задач геоэлектрики представлены в работах [Дмитриев, 1969; Жданов, 2007; Авдеев, 2005] и ряде других работ.

В дифференциальных методах при постановке прямых краевых задач исследуемая неоднородная область Ω со всех сторон (в общем случае включая часть Ω_{Air} воздушного пространства, примыкающего к Земле) дополняется переходной областью Ω_{TD} , обрамляющей область неоднородности Ω (рис. 1.3.1). В переходной области задается фоновая среда с простым строением.

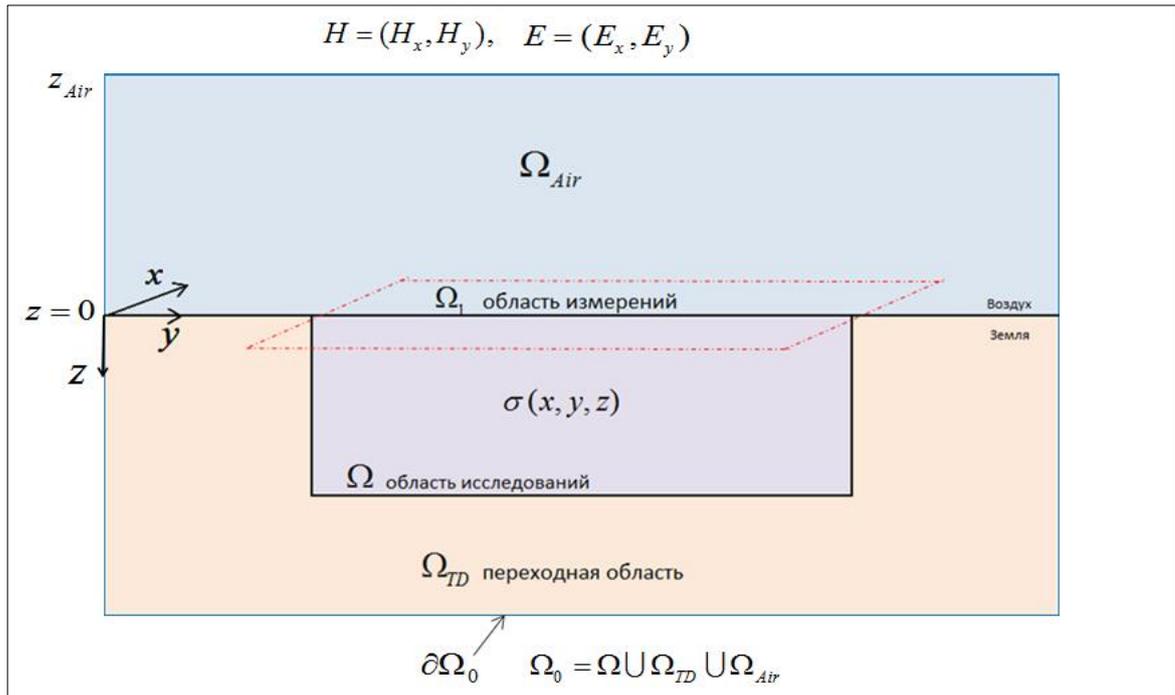


Рис.1.3.1. Схема постановки прямой 3D задачи магнитотеллурических методов.

Краевая задача формулируется для построенной таким образом полной области, границы которой устанавливаются настолько далеко от области Ω , чтобы можно было считать, что искомое полное поле на границе $\partial\Omega_0$ приближенно совпадает с известным фоновым полем. Например, для слоистой фоновой среды получаем краевую задачу с краевыми условиями I рода на границе $\partial\Omega_0$ вида [Бердичевский, Жданов, 1981; Жданов, 2007]

$$\begin{cases} \text{rot} H(r, \omega) = \sigma(r) E(r, \omega), \\ \text{rot} E(r, \omega) = i\omega\mu_0 H(r, \omega), \end{cases} \quad r \in \Omega_0, \quad \begin{cases} E(r, \omega) = E^N(r, \omega), \\ H(r, \omega) = H^N(r, \omega), \end{cases} \quad r \in \partial\Omega_0, \quad \omega \in \Delta_\omega. \quad (1.3.4)$$

Условия (1.3.4) подразумевают, что на верхней границе области Ω_0 задана амплитуда плоской однородной волны, которая зависит только от частоты. Помимо условий I рода могут использоваться также краевые условия II и III родов [Бердичевский, Жданов, 1981; Жданов, 2007]. Например, если на боковых границах области Ω_0 задавать условие равенства производных E , H по нормали (условия выполнения поля вдали от неоднородности), а на нижней границе $E, H = 0$, то знание фоновой среды не требуется, нужен лишь факт ее присутствия. Следует отметить, что условия близости полного и нормального полей на границе $\partial\Omega_0$ в

(1.3.4), строго говоря, следует понимать как предельные $E(r, \omega) \rightarrow E^N(r, \omega)$, $H(r, \omega) \rightarrow H^N(r, \omega)$ при неограниченном расширении границ области Ω_0 , так как они нигде не выполняются точно.

В общем случае при численном решении системы (1.3.4) достаточно задавать тангенциальные компоненты электрического или магнитного полей на разных частях границы $\partial\Omega_0$, что обеспечивает единственность решения краевой задачи в силу теоремы единственности решения уравнений Максвелла для внутренней области [Стрэттон, 1948; Марков, Чаплин, 1967]. Отметим также, что уравнения электродинамики в общем случае не принадлежат ни к одному из изученных в математической теории типов уравнений в частных производных (например, к эллиптическому, гиперболическому или параболическому), в частных случаях они могут сводиться к одному из них, однако, ими не исчерпываются [Власов, 2005].

Размеры переходной области Ω_{TD} , при которых граничные условия на боковых границах выполняются с «приемлемой» точностью, заранее не известны и их приходится подбирать в ходе решения краевой задачи. Опыт расчетов показывает, что при этом переходная область может превышать аномальную в несколько раз [Жданов, 2007]. Более эффективным представляется использование асимптотических краевых условий, учитывающих скорость убывания аномальных полей $E(r, \omega) - E^N(r, \omega)$, $H(r, \omega) - H^N(r, \omega)$, на бесконечности в фоновой среде (аналоги условий Зоммерфельда) [Свешников, 1969; Бердичевский, Жданов, 1981; Жданов, 2007; Спичак, 1999], что позволяет сократить размеры переходной области Ω_{TD} . Универсальность дифференциальных методов может быть повышена за счет использования более сложных переходных областей Ω_{TD} , состоящих из разных слоистых сред, окружающих область Ω с различных сторон («асимметричное обрамление» [Бердичевский, Жданов, 1981; Бердичевский, Дмитриев, 2004]) или обеспечивающих плавный переход от неоднородной среды к фоновой [Бердичевский, Дмитриев, 2004].

Часто для численного решения система (1.3.1) преобразуется в уравнения второго порядка относительно электрического или магнитного полей, для которых формулируются соответствующие краевые задачи [Жданов, 2007; Спичак, 1999; Юдин, 1980а; Юдин, 1982б]. Например, в 2D случае для уравнений (1.3.2), (1.3.3) в двумерной области Ω_0 (рис. 1.3.2) краевые задачи с граничными условиями I рода [Бердичевский, Жданов, 1981] записываются следующим образом.

H-поляризация:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + i\omega\mu_0 H_x = 0, \quad r \in \Omega'_0; \quad H_x(r, \omega) = H_x^N(r, \omega), \quad r \in \partial\Omega_0; \quad (1.3.5)$$

E-поляризация:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + i\omega\mu_0 \sigma E_x = 0, \quad r \in \Omega_0; \quad E_x(r, \omega) = E_x^N(r, \omega), \quad r \in \partial\Omega_0, \quad (1.3.6)$$

где $r = (y, z)$; Ω_0, Ω'_0 – 2D области решений краевых задач, при этом область Ω'_0 исключает воздух, и ее верхняя граница совпадает с земной поверхностью [Бердичевский, Дмитриев, 2009].

Подводя итог обзора дифференциальных методов в целом, следует отметить работы [Jones, and Pascoe, 1972; Jones, 1974; Pridmore, 1978; Pridmore, Lee, 1980; Weidelt, 1975; Fainberg, Singer, 1980; Юдин, 1980; Варенцов, Голубев, 1980а; Варенцов, Голубев, 1980б; Юдин, 1982а; Юдин, 1982б; Зингер, Файнберг, 1985; Юдин, 1985; Спичак, 1985; Жданов, Спичак, 1988; Шимелевич, 1988; Шимелевич, 1989; Жданов и др., 1990; Mackie et al., 1993; Спичак, 1996; Спичак, 1999; Varentsov, 1999; Varentsov et al., 2000; Fomenko, Mogi, 2002] и ряд других работ. В работе [Жданов и др., 1990] (материалы международного проекта **СОММЕМІ**) представлены результаты сравнения различных алгоритмов и программ численного моделирования МТ полей.

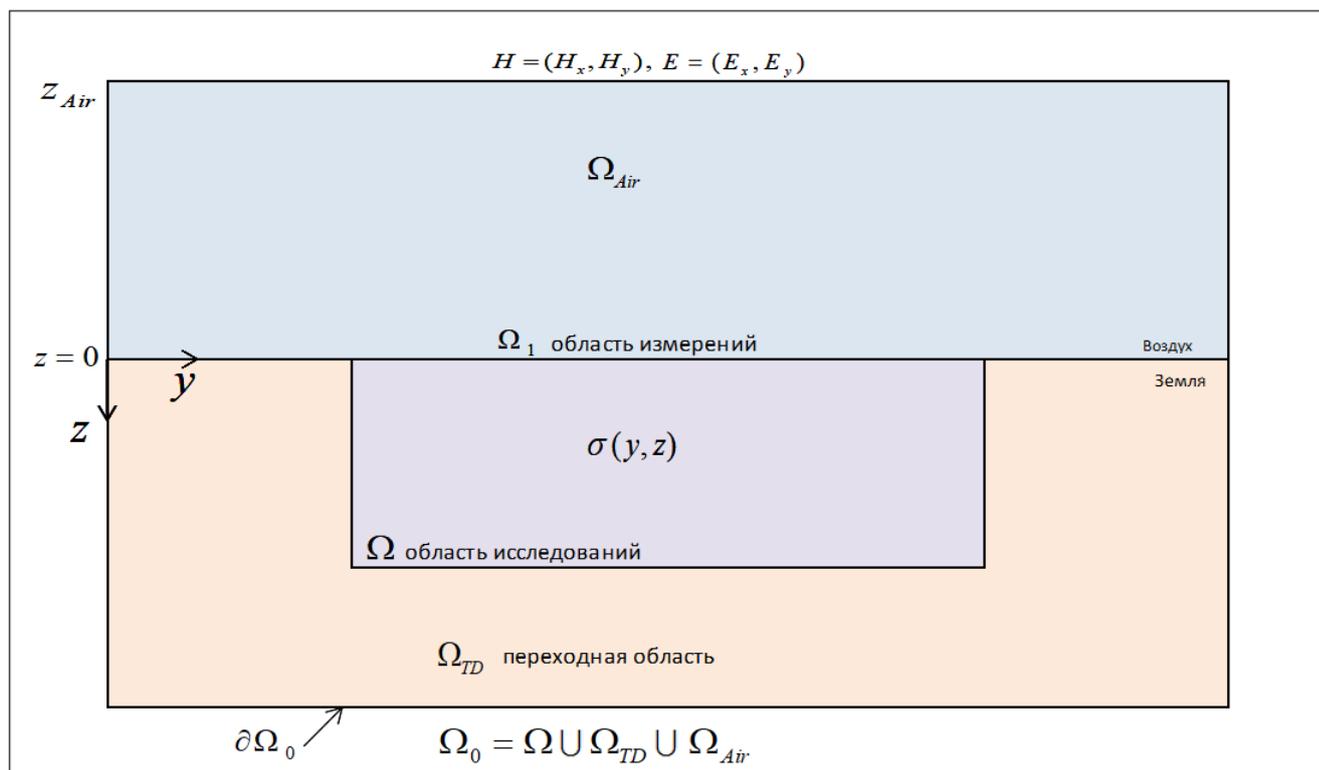


Рис.1.3.2. Схема постановки прямой 2D задачи магнитотеллурических методов.

1.3.1.2. Характеристики МТ поля

Амплитуда плоской волны первичного поля, порождаемого источниками сторонних ионосферных токов неизвестна, поэтому измеряемые МТ поля содержат неизвестный (в 3D случае векторный) множитель, зависящий от частоты. Для исключения этого множителя при решении обратной задачи используются характеристики поля, определяемые отношениями различных компонент МТ поля, которые не зависят от амплитуды плоской волны первичного поля, а зависят только от точки наблюдения, частоты и геоэлектрического строения среды. Основными такими характеристиками являются тензор импеданса \hat{Z} и вектор Визе-Паркинсона (вектор-типпер) \hat{W} [Бердичевский, Дмитриев, 2009].

Тензор импеданса \hat{Z} . В трехмерном случае тензор импеданса $\hat{Z}(x, y, \omega)$ связывает тангенциальные компоненты электрического $E_\tau(x, y, z = 0, \omega) = (E_x, E_y)$ и магнитного $H_\tau(x, y, z = 0, \omega) = (H_x, H_y)$ полей на поверхности Земли:

$$E_\tau = \hat{Z}H_\tau, \quad (1.3.7)$$

где \hat{Z} – матрица тензора импеданса вида:

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

В двумерном случае ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$) матрица тензора импеданса является антидиагональной:

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.9)$$

Где $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$ – импедансы E , H -поляризованных полей, а связь между тангенциальными компонентами имеет более простой вид:

$$E_x = Z_{xy}H_y, \quad E_y = Z_{yx}H_x. \quad (1.3.10)$$

В одномерном случае ($\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, горизонтально-слоистая среда) импеданс $Z(\omega)$ является скалярной функцией, зависящей только от частоты, при этом в (1.3.10)

$$Z_{xy} = -Z_{yx} = Z. \quad (1.3.11)$$

Вектор-типпер \hat{W} . Вектор-типпер $\hat{W}(x, y, \omega) = (W_x, W_y)$ связывает вертикальную компоненту $H_z(x, y, \omega)$ магнитного поля с тангенциальными компонентами $H_\tau(x, y, \omega) = (H_x, H_y)$ магнитного поля на поверхности Земли:

$$H_z = \hat{W}H_\tau = W_{zx}H_x + W_{zy}H_y. \quad (1.3.12)$$

В 2D задаче (E -поляризация) типпер является скалярной величиной $W_{zy}(y, \omega)$:

$$H_z = W_{zy} H_y. \quad (1.3.13)$$

Для нахождения четырех компонент тензора импеданса в 3D случае прямая задача (1.3.4) для системы уравнений Максвелла решается для двух различных поляризаций первичной плоской волны. Для тангенциальных компонент этих двух решений справедливы соотношения вида (1.3.7):

$$E_{\tau,1} = \hat{Z} H_{\tau,1}, \quad (1.3.14)$$

$$E_{\tau,2} = \hat{Z} H_{\tau,2}. \quad (1.3.15)$$

Из этой системы однозначно определяются все компоненты тензора импеданса, так как поля различных поляризаций линейно независимы. Аналогичным образом определяются компоненты вектора-типпера на основе соотношения (1.3.12) [Дмитриев, 2012].

Тензор импеданса и типпер в 2D случае, а также 1D импеданс определяются путем простого деления компонент МТ поля в соответствии с (1.3.10), (1.3.11), (1.3.13).

Передаточные матрицы. При практической интерпретации также используются различного рода передаточные матрицы, связывающие МТ поля в измеряемой и базовой точках и не зависящие от амплитуды плоской волны первичного поля [Бердичевский, Жданов, 1981; Бердичевский, Дмитриев, 2004; Варенцов и др., 2003].

1.3.2. Обратные задачи геоэлектрики

Обратные задачи геоэлектрики относятся к типу коэффициентных обратных задач для системы уравнений Максвелла. Классические обратные коэффициентные

задачи МТ методов заключаются в определении удельной электропроводности $\sigma(x, y, z)$ исследуемой области Ω на основе передаточных функций МТ поля, которые заданы на поверхности Земли в области измерений $\Omega_1 \subset \Omega$ [Бердичевский, Дмитриев, 2009].

В качестве входных данных далее используются характеристики поля, формируемые на основе:

- 1) тензора импеданса – обратные задачи МТЗ и аудио-МТЗ (АМТЗ);
- 2) на основе вектора-типпера – обратная задача МВЗ;

Отметим основные особенности обратных задач магнитотеллурики.

I. В основе решения коэффициентной обратной МТ задачи, как и большинства других обратных задачи геофизики, лежит решение прямой задачи. Как уже отмечалось выше, при решении прямой задачи для корректной постановки граничных условий возникает необходимость введения фоновой среды для окружения исследуемой области Ω переходной областью Ω_{TD} специального типа. При решении обратной МТ задачи в классическом подходе переходная область Ω_{TD} задается в виде слоистой среды, удельная электропроводность σ_{TD} которой считается известной [Бердичевский, Дмитриев, 2009; Дмитриев, 2012].

На практике удельная электропроводность σ_{TD} всей переходной области Ω_{TD} априори неизвестна. Один из возможных подходов к решению этой проблемы [Бердичевский, Дмитриев, 2009] заключается в задании (до решения обратной задачи) типа переходной области Ω_{TD} , которая плавно меняется по заданному закону и постепенно переходит от трехмерной $\sigma_T(x, y, z)$ (двумерной $\sigma_T(y, z)$) к одномерной $\sigma_T(z)$ при приближении к границе полной области Ω_0 (рис. 1.3.3). Для определения удельной электропроводности σ_{TD} фоновой среды, наряду с априорной информацией, используются измерения и результаты приближенной квазиодномерной инверсии этих измерений на границе области Ω_1 с последующей экстраполяцией.

Возможен более общий подход к этой проблеме, при котором удельная электропроводность σ_{TD} всей переходной области Ω_{TD} не задается заранее, а вычисляется одновременно с удельной электропроводностью σ исследуемой области Ω в процессе решения обратной задачи. При этом априори фиксируется только тип строения переходной области, аналогичный рассмотренному выше, что позволяет поставить краевые условия на границе $\partial\Omega_0$ для корректной разрешимости прямой задачи. Поскольку переходная область Ω_{TD} более удалена от области измерений Ω_1 по сравнению с исследуемой областью Ω , результаты инверсии в переходной области обладают большей погрешностью и могут быть существенно неоднозначными. Поэтому при построении результирующего геоэлектрического разреза эти результаты не учитываются [Шимелевич, Оборнев, 2009; Шимелевич и др., 2017].

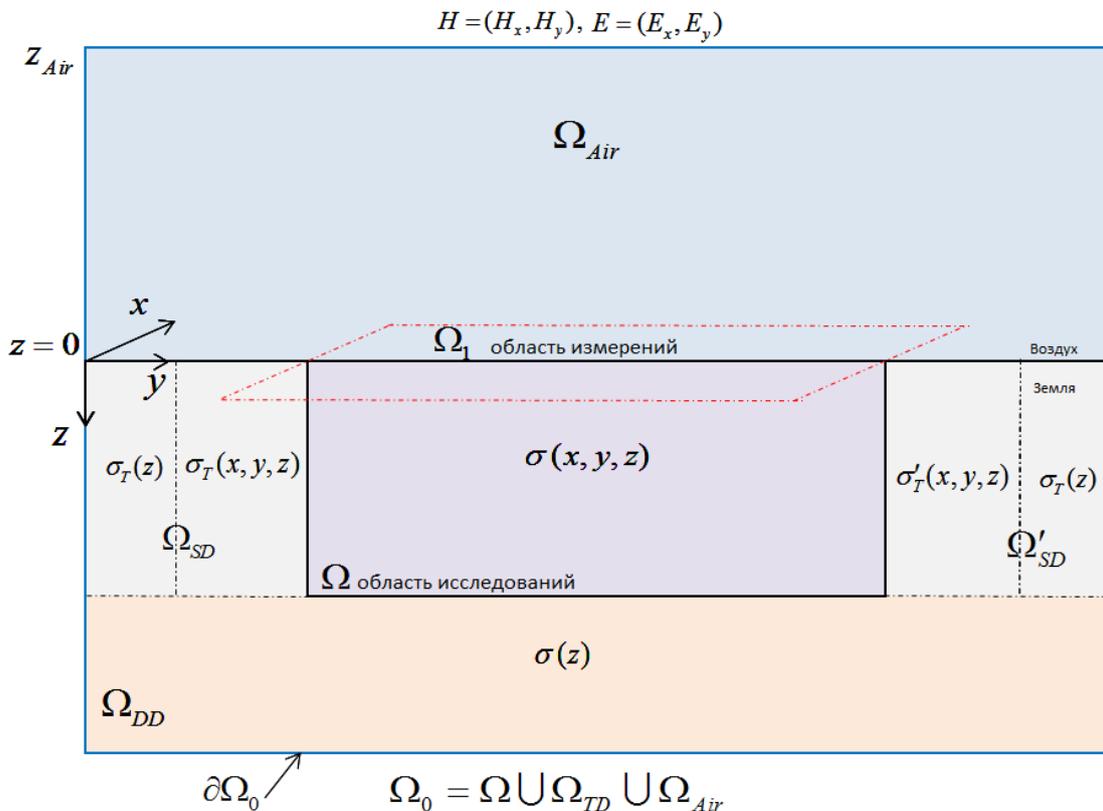


Рис.1.3.3. Схема постановки прямой задачи магнитотеллурики при решении обратной задачи; Ω – исследуемая область, в которой ищется удельная электропроводность среды $\sigma(x, y, z)$; $\Omega_0 = \Omega \cup \Omega_{TD} \cup \Omega_{Air}$ – полная область,

включающая исследуемую Ω , переходную Ω_{TD} область и область воздуха Ω_{Air} ; переходная область $\Omega_{TD} = \Omega_{SD} \cup \Omega'_{SD} \cup \Omega_{DD} \cup \Omega_{Air}$ включает переходные области Ω_{SD} , Ω'_{SD} по бокам и углам со всех сторон, переходную область снизу Ω_{DD} и переходную область в воздухе Ω_{Air} ; Ω_1 – область измерений на поверхности Земли, $z = 0$.

II. Для обратных задач магнитотеллурики доказан ряд теорем единственности (обзоры по этой теме представлены в работах [Бердичевский, Дмитриев, 2009; Дмитриев, 2012; Дмитриев, 2017; Дмитриев, 2018]).

В работе [Тихонов, 1965] доказана теорема единственности решения одномерной задачи МТЗ в классе кусочно-аналитических функций $\sigma(z)$ (в частности для горизонтально-слоистой среды) на основе компонент МТ поля E_x, H_y (или их отношения – импеданса одномерной среды), заданных на поверхности Земли во всем диапазоне частот $0 < \omega < \infty$.

Единственность решения обратных 2D задач магнитотеллурики доказана в следующих случаях:

- при условии задания импеданса $Z_{xy}(y, \omega)$ E -поляризованного поля в классе аналитических [Weidelt, 1978] или кусочно-аналитических [Гусаров, 1981] функций удельной электропроводности $\sigma(y, z)$; значения импеданса задаются на поверхности Земли $z = 0$ во всем спектре частот $0 < \omega < \infty$ на конечном интервале $y_1 \leq y \leq y_2$ или бесконечном интервале $-\infty < y < \infty$ профиля соответственно;

- при условии задания типпера $W_{zy}(y, \omega)$ E -поляризованного поля, заданного при $z = 0$, $-\infty < y < \infty$, $0 < \omega < \infty$ в классе кусочно-аналитических функций удельной электропроводности $\sigma(y, z)$ [Бердичевский и др., 1997; Бердичевский и др., 2000].

- при условии задания импедансов $Z_{xy}(y, \omega)$ или $Z_{yx}(y, \omega)$ МТ поля, заданных при $z = 0$, $-\infty < y < \infty$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, в классе функций удельной

электропроводности, представимых в виде $\sigma(y, z) = \sigma_N(z) + \Delta\sigma(y, z)$, где $\sigma_N(z)$ – кусочно-постоянная удельная электропроводность фоновой однородно-слоистой среды, которая считается известной, а $\Delta\sigma(y, z)$ – избыточная удельная электропроводность локальной неоднородности, расположенной в некоторой ограниченной области D_Δ ; локальная неоднородность в области D_Δ представлена конечным числом N_{cl} горизонтальных неоднородных слоев одинаковой мощности h , удельная электропроводность которых постоянна по z внутри слоя и кусочно-непрерывна по y (локальное слоистое тело). При этом мощность h слоев удовлетворяет условиям «тонкого слоя»:

$$\omega\mu \cdot \max \sigma_{cl} \cdot h^2 \leq 1, \quad \omega \in \Delta_\omega = [\omega_1, \omega_2],$$

где $\max \sigma_{cl}$ – максимальное значение удельной электропроводности локального слоистого тела [Дмитриев, 2017].

Единственность решения обратной 3D задачи по известным тангенциальным компонентам электрического поля, заданного при $z = 0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < x < \infty$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, доказана для трехмерного слоистого локального тела, расположенного в фоновой среде с известной кусочно-постоянной удельной электропроводностью $\sigma_N(z)$; мощность слоев при этом должна удовлетворять условиям «тонкого слоя» [Дмитриев, 2018]. Единственность указанной 3D задачи сохраняется также при использовании тензора импеданса $\hat{Z}(x, y, \omega)$ или вектора-типпера $\hat{W}(x, y, \omega)$, заданных при $z = 0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < x < \infty$, $\omega \in \Delta_\omega$ [Дмитриев, 2012].

III. Задачи магнитотеллурических методов характеризуются избыточным числом используемых для интерпретации характеристик МТ поля, при этом, как следует из предыдущего пункта II, существуют различные наборы характеристик, по каждому из которых, обратная задача имеет единственное решение и может быть решена независимым образом без привлечения каких-либо дополнительных данных. Такие наборы характеристик определяют независимые критерии инверсии. Если при инверсии используется одновременно комплекс \mathbb{C} различных

независимых критериев инверсии, то обратную задачу называют многокритериальной (С-критериальной) [Дмитриев, 2005; Бердичевский, Дмитриев, 2009; Дмитриев, 2009].

В 2D случае можно выделить три независимых критерия инверсии: импедансы Z_{xy} , Z_{yx} и типпер W_{zy} . Примерами С-критериальных (С=2,3) 2D обратных задач магнитотеллурики являются задачи, основанные на одновременном использовании комбинаций этих критериев.

В 3D случае имеются два независимых критерия инверсии: набор компонент Z_{xy} , Z_{yx} , Z_{xx} , Z_{yy} тензора импеданса \hat{Z} (1.3.8) и набор компонент W_x, W_y вектора-типпера \hat{W} (1.3.12). Использование одновременно \hat{Z} и \hat{W} составляет основу двухкритериальной 3D задачи (МТ/МВ-метод).

Использование двух и более критериев инверсии одновременно целесообразно в тех случаях, когда критерии имеют различную чувствительность к изменениям параметров различных частей исследуемой области [Дмитриев, 2012], что приводит к уменьшению степени неоднозначности решений многокритериальной задачи, по сравнению с однокритериальной [Шимелевич, 2013а] (подробнее см. раздел 2.3).

При комплексной интерпретации геофизических данных часто используются дополнительные данные, не обеспечивающие единственность решения рассматриваемой обратной задачи. Однако их использование совместно с основным независимым критерием инверсии может уменьшать степень неоднозначности решения.

1.3.2.1. Сведение обратной задачи геоэлектрики к операторному уравнению

Рассмотрим обратные МТ задачи с использованием тензора импеданса $\hat{Z}^{\text{изм}}(x, y, \omega)$ и вектора-типпера $\hat{W}^{\text{изм}}(x, y, \omega)$, получаемых в результате обработки измеренных МТ данных.

Обозначим через $\hat{Z}[x, y, \omega, \rho]$, $(x, y) \in \Omega_1$ расчетный импеданс, получаемый на основе решения прямой задачи, для любой задаваемой в исследуемой области Ω функции удельного сопротивления $\rho(r)$, $r = (x, y, z) \in \Omega$. Сопоставляя $\hat{Z}[x, y, \omega, \rho]$ и $\hat{Z}^{\text{изм}}(x, y, \omega)$ в области измерений Ω_1 , получаем функциональное уравнение обратной задачи МТЗ относительно искомой функции $\rho(r)$ [Бердичевский, Дмитриев, 2009]:

$$\hat{Z}[x, y, \omega, \rho] = \hat{Z}^{\text{изм}}(x, y, \omega), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad \omega \in \Delta_\omega. \quad (1.3.16)$$

Аналогичным образом может быть получено функциональное уравнение относительно $\rho(r)$, $r \in \Omega$ на основе вектора-типпера:

$$\hat{W}[x, y, \omega, \rho] = \hat{W}^{\text{изм}}(x, y, \omega), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad \omega \in \Delta_\omega. \quad (1.3.17)$$

Каждое из соотношений (1.3.16), (1.3.17) может быть записано в виде операторного уравнения (1.1.1), относительно искомой функции $\rho(r)$. При совместном использовании критериев $\hat{Z}^{\text{изм}}(x, y, \omega)$ и $\hat{W}^{\text{изм}}(x, y, \omega)$ получаем двухкритериальную задачу вида (1.1.14).

Результаты интерпретации данных геоэлектрики традиционно представляются в виде распределения логарифма удельного сопротивления $\lg \rho(x, y, z)$ в исследуемой области, что обусловлено широким диапазоном изменения удельного сопротивления реальных горных пород.

Класс сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$

Будем рассматривать обратные задачи геоэлектрики в классе сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ с кусочно-постоянным распределением искомой характеристик среды $\lg \rho(x, y, z)$ в исследуемой области Ω (параметризация $\Pi_{N,\eta}$ сеточного типа (см. разделы 1.2.1.2 и 1.2.2.3):

$$\lg \rho(s, r) = \Pi_{N,\eta}(s^1, \dots, s^N, r) = \sum_1^N s^n \eta_{0,n}(r), \quad s \in S_N, \quad r \in \Omega, \quad (1.3.18)$$

где s^1, \dots, s^N , – параметры среды, равные значениям $\lg \rho(r)$ в ячейках сетки θ_N параметризации, покрывающей исследуемую область Ω :

$$s^n = \lg \rho^n, \quad n = 1, \dots, N; \quad (1.3.19)$$

S_N – множество априорных ограничений обратной задачи, определяющих допустимые пределы изменения искомых параметров задачи. При минимальной априорной информации о среде может быть использован диапазон изменения удельного сопротивления реальных горных пород:

$$\lg \rho_{\min} \leq \lg \rho(r) \leq \lg \rho_{\max}, \quad r \in \Omega.$$

Из этого условия и (1.3.18) следуют априорные ограничения общего типа (1.2.3) на решения обратной задачи в виде N -мерного куба со стороной D_s :

$$S_N = \left\{ s : s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, n = 1, \dots, N \right\}, \quad (1.3.20)$$

$$s_{\min} = \lg \rho_{\min}, \quad s_{\min} + D_s = \lg \rho_{\max}.$$

В частном случае, например, для практических задач средней и малой глубинности (до 5–6 км), примем $\rho_{\min} = 1$ Ом·м, $\rho_{\max} = 10^4$ Ом·м, тогда ограничения (1.3.20) принимают вид

$$S_N = \left\{ s : s \in R^N, 0 \leq s^n \leq D_s, \quad n = 1, \dots, N \right\}, \quad D_s = 4. \quad (1.3.21)$$

Класс сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ с кусочно-постоянным распределением искомой характеристики среды в виде (1.3.18) определяется сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω , и априорными ограничениями S_N на

параметры (см. разделом 1.2.1.2). Далее, если не оговорено противное, все обратные задачи геоэлектрики мы будем рассматривать в классах сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ с различными исследуемыми областями Ω , соответствующими типу решаемых геофизических задач, сетками параметризации и априорными ограничениями типа (1.3.20) при заданных $\lg \rho_{\min}$ и D_s .

Класс сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ определяет множество корректности $G_{N,\eta}$ вида (1.2.14) для исходной обратной задачи (1.1.1), которая, в зависимости от типа входных данных, сводится к уравнениям (1.2.15), (1.2.17), (1.2.18).

В качестве пространства данных в обратных задачах геофизики обычно используются нормированные пространства комплекснозначных скалярных и векторных функций, определяемых типом входных данных [Дмитриев, 2005; Дмитриев, 2012].

Однокритериальные задачи

2D задача. Независимыми критериями инверсии для двумерных однокритериальных МТ задач являются скалярные комплексные импедансы $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$ и типпер $W_{zy}(y, \omega)$, заданные в области $\Omega_{2,\omega} = \Omega_1 \times \Delta_\omega$.

В пространстве данных $L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$ комплекснозначных функций, интегрируемых в квадрате с весом $b(y, \omega) > 0$ по области $\Omega_{2,\omega}$, зададим норму [Люстерник, Соболев, 1982]:

$$\|f\|_{L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]} = \left(\iint_{\Omega_{2,\omega}} |f(y, \omega)|^2 b(y, \omega) dy d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3.22)$$

где $b(y, \omega)$ – вес, регулирующий вклад отдельных элементов поля по частоте и по пространству. Коэффициент $b(y, \omega)$ обычно задается в виде произведения частотного $b^c(\omega)$ и пространственного $b^n(y, \omega)$ весов

$$b(y, \omega) = b^c(\omega) \cdot b^n(y, \omega). \quad (1.3.23)$$

В пространстве решений R^N будем использовать нормы конечномерного пространства с нормировочными множителями

$$\|s\|_0 = \frac{1}{D_s} \max_{1 \leq n \leq N} |s^n|, \quad (1.3.24)$$

$$\|s\|_1 = \frac{1}{N \cdot D_s} \sum_1^N |s^n|. \quad (1.3.25)$$

Отметим, что для этих норм и любой пары векторов $s', s \in S_N \subset R^N$ справедливы неравенства

$$\|s' - s\|_1 \leq \|s' - s\|_0 \leq 1, \quad s', s \in S_N. \quad (1.3.26)$$

На основе (1.3.16), (1.3.17), для каждого из критериев, обратная задача (1.1.1) на множестве $G_{N, \eta}$ кусочно-постоянных решений (т.е. при сеточной параметризации), в соответствии с общими принципами раздела 1.2.2.3, может быть сведена к решению операторного уравнения типа (1.2.15) относительно вектора параметров среды $s = (s^1, \dots, s^N)$:

$$A_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}], \quad (1.3.27)$$

где $A_N: R^N \rightarrow L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$ – оператор типа (1.2.16); S_N – множество вида (1.3.20); f – элемент пространства данных.

Как уже отмечалось в разделе 1.2.2.3, искомые параметры $s^n = \lg \rho^n$, $n = 1, \dots, N$, при сеточной параметризации имеют самостоятельный физический смысл, и пересчет решений $s \in S_N$, находимых из уравнения (1.3.27), в пространство кусочно-постоянных решений по формуле (1.3.18) фактически представляет собой простейшую кусочно-постоянную интерполяцию между

дискретными значениями s^1, \dots, s^N , характеристики среды, находимой из уравнения (1.3.27).

3D задача. Независимыми критериями 3D однокритериальной задачи являются комплексный тензор импеданса \hat{Z} с компонентами $Z_{xx}(x, y, \omega)$, $Z_{xy}(x, y, \omega)$, $Z_{yx}(x, y, \omega)$, $Z_{yy}(x, y, \omega)$, либо вектор-типпер \hat{W} с компонентами $W_{zx}(x, y, \omega)$, $W_{zy}(x, y, \omega)$, которые заданы в области $\Omega_{3,\omega} = \Omega_1 \times \Delta_\omega$. На основе (1.3.16), (1.3.17) для каждого из этих двух критериев обратная 3D задача в классе $G_{N,\eta}$ сеточных моделей сред сводится к решению операторного уравнения типа (1.2.15) относительно вектора параметров среды $s = (s^1, \dots, s^N)$:

$$A_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in \hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}], \quad (1.3.28)$$

где $A_N: R^N \rightarrow \hat{F}_{M_z}$ – оператор типа (1.2.16); f – элемент пространства данных \hat{F}_{M_z} , элементами которого являются комплекснозначных векторные функции трех переменных в области $\Omega_{3,\omega}$; для тензора импеданса $M_z = 4$, для вектора-типпера $M_z = 2$;

Норму в пространстве \hat{F}_{M_z} комплекснозначных вектор-функций определим следующим образом. Примем, что каждая j -я компонента векторной функции $f = (f^1, \dots, f^{M_z})$ принадлежит пространству $L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]$ комплекснозначных функций, интегрируемых в квадрате с весом $b^j(x, y, \omega) > 0$ по области $\Omega_{3,\omega}$, норма в котором определяется выражением

$$\|f\|_{L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]} = \left(\iiint_{\Omega_{3,\omega}} |f(x, y, \omega)|^2 b^j(x, y, \omega) dx dy d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]. \quad (1.3.29)$$

При решении практических задач различные компоненты характеристик поля (вектор-функций) могут сильно различаться по уровню значений. В таких случаях целесообразно учитывать их значимость при расчете невязок решений обратной

задачи, расчете характеристик неоднозначности и решении других зада. Коэффициент $b^j(x, y, \omega)$ зададим в виде

$$b^j(x, y, \omega) = b^q(\omega) \cdot b^p(x, y) \cdot (\alpha^j)^2, \quad (1.3.30)$$

где α^j – весовые множители, определяющие значимость j -й компоненты вектор-функции данных; b^q , b^p – частотный и пространственный веса.

Подставляя в (1.3.29) указанное представление для веса $b^j(x, y, \omega)$, получаем выражение для нормы в $L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]$

$$\|f\|_{L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]} = \alpha^j \left(\int b^q(\omega) \cdot \left(\int |f(x, y, \omega)|^2 b^p(x, y) dx dy \right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $\hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}]$ векторных функций $f = (f^1, \dots, f^{M_z})$ можно трактовать, как прямое произведение M_z нормированных пространств $L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]$, $j = 1, \dots, M_z$:

$\hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}] = L_{2,b^1}[\Omega_{3,\omega}] \times \dots \times L_{2,b^{M_z}}[\Omega_{3,\omega}]$. Тогда норма $\|f\|_{\hat{F}_{M_z}}$ в пространстве $\hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}]$ может быть определена, например, следующим образом [Александров, 1977; Зорич, 1984],

$$\|f\|_{\hat{F}_{M_z}} = \sum_{j=1}^{M_z} \left(\alpha^j \|f_j\|_{L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]}^* \right), \quad f \in \hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}], \quad (1.3.31)$$

где

$$\|f_j\|_{L_{2,b^j}[\Omega_{3,\omega}]}^* = \left(\int b^q(\omega) \cdot \left(\int |f^j(x, y, \omega)|^2 b^p(x, y) dx dy \right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \dots, M_z. \quad (1.3.32)$$

Если используемые характеристики поля примерно одинаковы по уровню значений, то $\alpha^j = \frac{1}{M_z}$, $j = 1, \dots, M_z$.

Так как для обратных задач геоэлектрики в 2D и 3D случаях доказаны теоремы единственности в классе кусочно-непрерывных решений, то с учетом непрерывности оператора A_N , обратные однокритериальные задачи геоэлектрики

(1.3.27) и (1.3.28), рассматриваемые на ограниченном замкнутом подмножестве $S_N \subset R^N$, являются условно-корректными.

Многокритериальные задачи

Двухкритериальная обратная 2D задача. При совместном использовании импедансов $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$, соответствующих E - и H -поляризациям МТ поля (бимодальные данные), получаем классическую двухкритериальную EH обратную 2D задачу МТЗ. Так как искомый вектор $s = (s^1, \dots, s^N)$ параметров среды двухкритериальной задачи должен удовлетворять измерениям обоих типов полей, то для его определения мы получаем систему типа (1.2.17) двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} A_{1,N}s = f_1, \\ A_{2,N}s = f_2, \end{cases} \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_1, f_2 \in L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}], \quad (1.3.33)$$

где $A_{1,N}$, $A_{2,N}$ – операторы типа (1.2.16); $f_1(y, \omega) = Z_{xy}(y, \omega)$, $f_2(y, \omega) = Z_{yx}(y, \omega)$, $(y, \omega) \in \Omega_{2,\omega}$. К аналогичной системе операторных уравнений сводится двухкритериальная ZW обратная 2D задача с использованием одного из импедансов и типпера W_{zy} (МТ/МВ метод).

Двухкритериальная обратная 3D задача. При совместном использовании бимодальных данных: тензора импеданса \hat{Z} и вектора-типпера \hat{W} , может быть сформулирована двухкритериальная ZW обратная 3D задача. Искомый вектор $s = (s^1, \dots, s^N)$ параметров 3D среды для двухкритериальной задачи должен удовлетворять системе типа (1.2.17) двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} A_{1,N}s = f_1, & f_1 \in \hat{F}_4[\Omega_{3,\omega}] \subset \hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}] \\ A_{2,N}s = f_2, & f_2 \in \hat{F}_2[\Omega_{3,\omega}] \subset \hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}] \end{cases}, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad (1.3.34)$$

где $A_{1,N}: R^N \rightarrow \hat{F}_4$, $A_{2,N}: R^N \rightarrow \hat{F}_2$ – операторы типа (1.2.16); $f_1(x, y, \omega) = (f^1, \dots, f^4)$; $f_2(x, y, \omega) = (f^1, f^2)$, $(x, y, \omega) \in \Omega_{3,\omega}$ – вектор-функции входных данных, компоненты которых определяются компонентами тензора импеданса \hat{Z} и вектора-типпера \hat{W} соответственно; $\hat{F}_2[\Omega_{3,\omega}]$, $\hat{F}_4[\Omega_{3,\omega}]$ – реализации рассмотренного выше пространства $\hat{F}_{M_z}[\Omega_{3,\omega}]$ комплекснозначных вектор-функций при $M_z = 2$ и $M_z = 4$ соответственно. Нормы в пространствах \hat{F}_2 , \hat{F}_4 определяются в соответствии с (1.3.29), (1.3.30).

При точных входных данных f_1, f_2 система уравнений (1.3.33) имеет единственное решение, совпадающее с точными решениями каждого из уравнений. Каждое из уравнений является условно-корректной задачей, откуда следует условная корректность решения системы (1.3.33). То же самое касается и системы (1.3.15).

Из вышесказанного в п. 1.3.2.1 следует, что основные однокритериальные (1.3.27), (1.3.28) и двухкритериальные (1.3.33), (1.3.34) задачи геоэлектрики в классе кусочно-постоянных решений сводятся к типовым задачам (1.2.15) и (1.2.17), рассматриваемым в соответствующих пространствах данных. Отметим также, что рассмотренные постановки двухкритериальных задач очевидным образом обобщаются на задачи с числом критериев больше 2. Например, при использовании импедансов Z_{xy} , Z_{yx} и типпера W_{zy} (МТ/МВ метод) возникает трехкритериальная обратная 2D задача геоэлектрики вида (1.2.18) при $\mathbb{C} = 3$.

1.3.2.2. Сведение многокритериальной задачи к объединенному уравнению

При выполнении условий единственности для каждого из критериев инверсии, решения каждого из уравнений системы уравнений (1.3.33), рассматриваемых по отдельности при точных правых частях, совпадают друг с другом, а значит, и с решением системы. То же самое касается и системы (1.3.34).

Каждая из систем (1.3.33), (1.3.34) может быть записана в виде одного объединенного операторного уравнения. Рассмотрим, например, систему (1.3.33) и запишем ее в виде

$$A_{1,2,N}s = f_{1,2}, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_{1,2} \in \hat{F}_2[\Omega_{2,\omega}], \quad (1.3.35)$$

где $A_{1,2,N}$ – оператор, действующий из R^N в \hat{F}_2 ; $\hat{F}_2[\Omega_{2,\omega}]$ – пространство вектор-функций двух переменных $f_{1,2} = (f_{1,2}^1, f_{1,2}^2)$; компонентами $f_{1,2}^1, f_{1,2}^2$ векторных функций $f_{1,2}$ являются комплексные импедансы: $f_{1,2}^1(y, \omega) = Z_{xy}(y, \omega)$, $f_{1,2}^2(y, \omega) = Z_{yx}(y, \omega)$. Норма в пространстве данных $\hat{F}_2[\Omega_{2,\omega}]$ определяется в соответствии с (1.3.29), (1.3.30) при $M_Z = 2$.

Аналогичным образом может быть получено объединенное операторное уравнение для системы (1.3.34):

$$\hat{A}_{1,2,N}s = f_{1,2}, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_{1,2} \in \hat{F}_6(\Omega_{3,\omega}), \quad (1.3.36)$$

где $\hat{A}_{1,2,N}$ – оператор решения прямой МТ 3D задачи, действующий из R^N в \hat{F}_6 ; $\hat{F}_6[\Omega_{3,\omega}]$ – пространство векторных функции трех переменных $f_{1,2} = (f^1, \dots, f^6)$; компонентами векторных функций являются все комплексные компоненты тензора импеданса и вектора-типпера. Норма в пространстве данных $\hat{F}_6[\Omega_{3,\omega}]$ определяется в соответствии с (1.3.29), (1.3.30) при $M_Z = 6$.

Из этих представлений следует, что двухкритериальные задачи (1.3.33), (1.3.34) геоэлектрики сводятся к операторному уравнению общего типа (1.2.15), рассматриваемому в пространстве данных, соответствующем полному набору используемых критериев.

Вследствие непрерывности и обратимости операторов, задачи решения объединенных уравнений (1.3.35), (1.3.36), рассматриваемых на компактном множестве S_N , являются условно-корректными и представляют собой частный случай задачи общего типа (1.2.15) в пространстве данных, соответствующем используемым критериям.

Отличие объединенных операторных уравнений от соответствующих им систем уравнений заключается в том, что обратная задача решается в различных пространствах данных и, соответственно, используются различные нормы в этих пространствах.

При наличии погрешности в данных возможны различные подходы к решению двухкритериальных задач МТ методов [Дмитриев, 2005; Дмитриев, 2012; Еров et al., 2011; Бухаров и др., 2013]. Один из подходов заключается в том, что решается объединенное (по обоим критериям) операторное уравнение типа (1.3.35) или (1.3.36), и задача сводится к минимизации функционала невязки по всем параметрам задачи (так называемая «общая инверсия»). При этом минимизируется полная скалярная невязка для объединенного операторного уравнения.

При таком подходе минимальная полная невязка объединенного уравнения не гарантирует минимальности парциальных невязок по каждому из уравнений. При другом подходе решение системы сводится к последовательности задач минимизации парциальных невязок для каждого из уравнений системы по некоторым (заранее выделенным) группам параметров (метод «последовательных частичных инверсий» [Дмитриев, 2005; Дмитриев, 2012]). При таком подходе можно добиться минимальных парциальных невязок по каждому из критериев, но приближенные решения по различным критериям могут не совпадать, поэтому необходима их взаимная корректировка в процессе минимизации.

Очевидно, что указанные подходы соответствуют различным постановкам обратной многокритериальной задачи [Дмитриев, 2005], и получаемые на их основе приближенные решения в общем случае не совпадают.

1.3.2.3. Использование функционалов относительного расстояния в задачах геоэлектрики

Для уравнения (1.3.27) расстояние (метрика) $d(f', f)$ между элементами $f', f \in L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$ пространства данных определяется на основе нормы (1.3.22) выражением

$$d_{L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]}(f', f) = \|f' - f\|_{L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]} \quad (1.3.37)$$

На практике часто используется относительное расстояние между элементами $f', f \in L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$ на основе функционала относительного расстояния вида (1.1.10):

$$d_{L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]}^r(f', f) = \frac{\|f' - f\|_{L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]}}{\|f\|_{L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]}} \quad f \neq 0. \quad (1.3.38)$$

Когда в качестве данных используется несколько компонент поля (задачи (1.3.28), (1.3.33), (1.3.34)), расстояние $d_{\hat{F}_{M_z}}(f', f)$ в пространстве данных \hat{F}_{M_z} определяется на основе нормы (1.3.30) выражением

$$d_{\hat{F}_{M_z}}(f', f) = \|f' - f\|_{\hat{F}_{M_z}} = \left(\sum_{j=1}^{M_z} \left(\|(f')^j - f^j\|_{L_2[\Omega_{3,\omega}]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.39)$$

Соответственно, относительное расстояние между элементами f', f может быть задано, например, с помощью функционала вида

$$d_{\hat{F}_{M_z}}^r(f', f) = \left(\sum_{j=1}^{M_z} \alpha^j \left(\frac{\|f'^j - f^j\|_{L_2[\Omega_{3,\omega}]}}{\|f^i\|_{L_2[\Omega_{3,\omega}]}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f^i \neq 0, \quad (1.3.40)$$

где α^j – заданные весовые множители, определяющие вклад различных характеристики поля. Функционалы относительного расстояния вида (1.3.38), (1.3.40) в пространствах $L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$, \hat{F}_{M_z} часто используются в геофизике при расчете невязок и оценок неоднозначности решений обратной задачи (см. разделы 6.1 и 6.2).

Замечание 1.3.1. *Конечномерные аппроксимации норм, указанных выше, и других норм, используемых в работе, подробно рассмотрены в п 3.1.9.*

1.3.3. Методы решения обратных задач геоэлектрики

1.3.3.1. Методы решения уравнений I рода

Выше отмечалось, что рассмотренные классические обратные задачи геоэлектрики относятся к типу коэффициентных обратных задач для системы уравнений Максвелла и сводятся к операторным уравнениям, которые являются частным случаем уравнения (1.1.1), рассматриваемого на компактном множестве G_1 с непрерывным обратимым оператором A . Эти задачи, таким образом, являются условно-корректными (при выполнении условий теоретической единственности обратной задачи рассматриваемого геофизического метода).

Классические методы исследования и решения операторных (функциональных) уравнений вида (1.1.1), основанные на теоретико-функциональных представлениях, рассмотрены в работах [Канторович, 1948;

Вайнберг, 1956; Лаврентьев, 1962; Люстерник, Соболев, 1965] и ряде других работ. При численном решении уравнений типа (1.1.1) с приближенной правой частью обычно используются алгоритмы, основанные на минимизации функционала невязки. Для преодоления неустойчивости решений применяется метод регуляризации, смысл которого заключается в том, что минимизация функционала невязки проводится при некоторых дополнительных ограничениях на решение, задаваемых на основе априорной информации. Эти ограничения учитываются с некоторым весом (параметром регуляризации), который определяется по величине погрешности данных (если она известна) или иными способами. Методу регуляризации и его различным модификациям посвящено множество работ: [Тихонов, 1943; Тихонов, 1965; Иванов, 1963; Страхов, 1971; Тихонов, Гласко, 1975; Танана, 1975; Страхов, 1976; Иванов и др., 1978; Гончарский и др., 1978; Тихонов, Арсенин, 1979; Лаврентьев и др., 1980; Танана, 1981; Страхов, 1981; Тихонов и др., 1983; Дмитриев, 1987; Романов, Кабанихин, 1991; Танана, 1997; Страхов, 2001; Леонов, Ягола, 1998; Кабанихин, 2009; Ягола и др., 2014; Александров, Кризский, 2020; 2022а; 2022б] и ряд других работ.

Основной прогресс в области практического решения прикладных обратных задач геофизики вида (1.1.1) классическими методами регуляризации в настоящее время достигнут в случае линейных уравнений, и в некоторых частных нелинейных случаях, сводящихся к проблеме выпуклого программирования [Ягола и др., 2014]. Задача численного решения уравнения вида (1.1.1) в общем нелинейном случае при больших размерностях входных и искомым данных является весьма сложной и трудоемкой (большое число локальных экстремумов функционала невязки и др.). Метод регуляризации Тихонова решает проблему неустойчивости, но проблема сложной нелинейности общего вида в сочетании с высокой размерностью задачи остается актуальной.

1.3.3.2. Методы решения обратных задач геоэлектрики и пути их совершенствования

Основной метод выделения множества корректности при решении обратных задач геофизики заключается в сведении их к конечно-параметрическим обратным задачам вида (1.2.8), которые решаются методом наименьших (нелинейных) квадратов с использованием различных алгоритмов регуляризации в конечномерных пространствах (регуляризованный метод подбора) [Гласко и др., 1976; Страхов, 1978; Тихонов, Арсенин, 1979; Тихонов и др., 1983; Страхов, 1998; Дмитриев, 2012].

В геоэлектрике в рамках метода подбора следует отметить работы [Гласко, 1972; Жданов, Варенцов, 1978; Жданов и др., 1980; Бердичевский, Жданов, 1981; Жданов, Голубев, 1983; Шимелевич, 1988; Шимелевич, 1989; Жданов и др., 1990; Шимелевич, Оборнев, 1997; Бердичевский и др. 2003; Бердичевский, Дмитриев, 2009; Варенцов, 2002; Жданов, 2007; Персова, 2009; Иванов, Пушкарев, 2010; Спичак, 2010; Вагин и др., 2013; Варенцов и др., 2013; Белявский, 2014; Леушканова, Фельдман, 2014; Куликов, Яковлев, 2013; Бойченко и др., 2014; Яновская, Порохова, 2014; Ковтун, Варданянц, 2015; Неведрова, Шалагинов, 2015; Smith, Booker, 1991; Rodi, Mackie, 2001; Tarantola, 2005; Siripunvaraporn, Egbert, 2000; Siripunvaraporn, 2012]. Следует отметить также последние основные публикации по материалам Всероссийской школы по электромагнитным зондированиям ЭМЗ-2021, касающиеся проблемы инверсии данных:

- [Куликов и др., 2022], где представлены результаты магнитотеллурических зондирований в Юго-Восточном Приладожье, проведенных в 2018–2021 гг. с целью изучения глубинного геоэлектрического строения фундамента Восточно-Европейской платформы. На основании данных, полученных группой ЛАДОГА, с привлечением наиболее качественных материалов предыдущих исследований, была выполнена 3D-инверсия и построена трехмерная геоэлектрическая модель

изучаемой территории. По отдельным профилям были получены более детальные модели удельного электрического сопротивления на основе двухмерной инверсии. Было прослежено продолжение южной ветви Ладожской аномалии электропроводности и уточнено ее глубинное строение;

- [Иванов и др., 2022], где представлены результаты исследований глубинной электропроводности в окрестности Оршанской впадины: двухмерная инверсия синтетических и наблюдаемых магнитотеллурических данных методом REBOSS. В статье дано обобщение геолого-геофизических построений для области сочленения трех крупнейших сегментов Восточно-Европейской платформы, учитывающее новые результаты, полученные за последние два десятилетия, и дающее значимую априорную информацию для получения и геологического истолкования новых результатов ЭМ зондирований в этой области. Показана целесообразность применения 3D-инверсии в окрестности Оршанской впадины или учет интенсивности 3D-искажений в процедурах 2D-инверсии.

Наряду с классическими методами регуляризации в геоэлектрике применяются также:

- вероятностные методы [Гольцман, 1971; Tarantola, Valette, 1982; Backus, 1988; Никитин, 2004; Яновская, Порохова, 2004; Спичак, 2005б];

- методы, основанные на электромагнитной миграции [Жданов, 2007];

- методы, основанные на теории информации [Светов, 2008; Шимелевич, 2013б];

- методы распознавания образов [Никитин, 1986; Никитин, 2004; Шимелевич, Оборнев, 1999; Оборнев и др., 2007; Шимелевич, Оборнев, 2009; Спичак, 2019];

- методы, основанные на комплексной (многокритериальной) инверсии геофизических данных [Дмитриев, 2005; Варенцов, 2006; Спичак, 2009; Erov et al., 2011; Дмитриев, 2012; Бухаров и др., 2013; Шимелевич, 2013а; Каминский и др., 2015; Куликов и др., 2017; Оборнев и др., 2020; Gallardo et al., 2003; Gallardo, Meju, 2004; Шимелевич, 2020; Shimelevich et al., 2021].

– аппроксимационно-интерполяционные методы с использованием нейронных сетей типа многослойного персептрона (MLP-сетей) в геофизике [Спичак, Попова, 1998; Shimelevitch, Osborne, 1998; Шимелевич и др., 2001; Шимелевич и др., 2003; Спичак, Попова, 2004; Шимелевич, Оборнев 2007; Шимелевич, Оборнев 2009; Шимелевич, 2013а; Спичак, Гойдина, 2016; Шимелевич и др., 2017; Шимелевич и др., 2018; Спичак, 2019; Osborne et al., 2020].

Отдельно следует отметить методы, применяемые в потенциальных полях, основанные на теории принятия решений в условиях неопределенности в рамках гарантированного подхода [Балк, 1980; Балк, Долгаль, 2012].

Практическая неустойчивость решений обратной задачи геоэлектрики, помимо общих определяющих ее факторов, усиливается (по сравнению с геопотенциальными или волновыми полями) самой природой квазистационарного (диффузного) ЭМ поля, которое затухает в среднем экспоненциально по мере удаления от источников поля (скин-эффект). Данная особенность квазистационарного поля определяет особый тип нелинейности, присущий всем обратным задачам геоэлектрики. Следствием этого является тот факт, что даже значительным изменениям параметров среды, определяющих электропроводность фрагментов геоэлектрического разреза и удаленных от области измерений, могут соответствовать изменения в ЭМ полях меньше уровня погрешности измеренных данных. Задача определения таких параметров лишена физического смысла и является «абсолютно» неоднозначной [Тихонов и др., 1983; Дмитриев, 2012, Шимелевич, 2013а]. В этой ситуации «лобовая» регуляризация основанная, например, на введении стабилизирующих функционалов, использующих априорную гипотетическую информацию о степени гладкости решения, минимальности его нормы или о других его свойствах, не всегда эффективна (особенно при дефиците априорной информации). Более предпочтительной в таких случаях является адаптивная содержательная регуляризация [Страхов и др., 1981; Тихонов и др., 1983], учитывающая особенности задачи и геофизического поля, что не исключает использование дополнительной априорной информации о строении

среды, если таковая имеет место. Так, например, в задачах геопотенциальных полей применяются подходы, основанные на конечно-элементном описании среды (параметризации) с использованием схем, которые обеспечивают практически устойчивое приближенное решение обратной задачи, с последующим применением регулярных итерационных алгоритмов инверсии, позволяющих уточнять решения, получаемые на начальных итерациях [Страхов, 1978; Страхов, 1981; Страхов, 1999а]. К числу таких схем относятся аппроксимация геопотенциальных полей с помощью истокообразных аппроксимационных конструкций, которые строятся на основе физических соображений таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечивать практическую устойчивость применяемых вычислительных схем, а с другой – достаточную детальность решений [Аронов, 1990]. Применяемые методы отличаются типами параметризации, алгоритмами, обеспечивающими устойчивость численного решения, и стратегией уточнения решений [Страхов и др., 1976; Аронов, 1990; Пугин, 2007; Булах, 2010; Балк, Долгаль, 2011; Долгаль и др., 2012]. Значительный прогресс в решении смешанной обратной задачи гравиметрии достигнут с помощью монтажного метода [Страхов, Лапина, 1976; Балк и др., 2011], а также методов, основанных на теории принятия решений в условиях неопределенности в рамках гарантированного подхода [Балк, 1980; Балк, 1981а; Балк, 1981б; Балк, Долгаль, 2012].

Примером содержательной регуляризации нелинейной обратной задачи геоэлектрики с учетом свойств используемого геофизического поля служит подход, в основе которого лежит подбор минимального числа слоев горизонтально-слоистой модели, при котором достигается невязка, равная погрешности данных [Тихонов и др., 1983].

В работах [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013а; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич и др., 2018; Шимелевич, 2020] предлагается метод адаптивной *практической регуляризации* конечно-параметрических обратных задач, основанный на *эффективной сеточной параметризации* сред, при которой оптимальная размерность N параметризации аппроксимационного типа

(определяющая детальность описания среды) с учетом глубины исследований согласуется со свойствами используемых геофизических полей, а также со структурой и уровнем погрешности данных. Количественным критерием оптимальности параметризации и практической устойчивости являются характеристики степени неоднозначности решений, которые определяются численными оценками модуля непрерывности обратного оператора задачи и его модификациями (метод подробно рассматривается в п.2.5).

Обратные задачи геоэлектрики, в отличие от задач геопотенциальных полей, остаются нелинейными и в случае фиксированной геометрии, что в сочетании с большой размерностью входных и искомым данных также является особенностью, которая делает данные задачи исключительно сложными в вычислительном плане. Следствием этого, как показывает опыт работ по практической интерпретации данных геоэлектрики, является тот факт, что в настоящее время по-прежнему широко используются одномерные (квазиодномерные) или сильно сглаженные, малопараметрические 2D и редко 3D модели геофизических сред и соответствующие им методы инверсии измеренных данных. При этом на практике часто не предоставляется даже обычная невязка решения (соответствующая физической размерности исследуемой среды), не говоря уже об оценках степени практической неоднозначности (погрешности) получаемых результатов интерпретации. Заметим, что теория некорректных задач позволяет получать оценки, которые определяют достоверность и качество проведенной интерпретации геофизических данных (задача верификации результатов интерпретации). Классические априорные и апостериорные характеристики степени неоднозначности решений нелинейных обратных задач геоэлектрики в детерминированной постановке рассмотрены в работах [Шимелевич, 1989; Шимелевич, Оборнев, 1997; Шимелевич, Оборнев, 1999; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич и др., 2018; Шимелевич, 2020; Shimelevich et al., 2021]. Апостериорные оценки для задач геоэлектрики, основанные на возмущении входных данных, рассматривались в

работах [Гончарский и др., 1978; Golubev et al., 1998; Варенцов, 2002; Соколова, 2002; Yagola, Titarenko, 2007].

Таким образом, несмотря на существенное развитие за последнее время методов решения прямых и обратных задач, а также средств измерения ЭМ поля и вычислительных мощностей современных компьютеров, существующее математическое и программное обеспечение интерпретации 2D и 3D данных геоэлектрики нуждается в дальнейшем развитии и совершенствовании.

Учитывая современные тенденции в областях анализа больших данных и интерпретации геофизических данных, основными направлениями достижения этой цели, по мнению автора, следует считать:

I. Развитие аппроксимационно-интерполяционных методов решения обратных задач с использованием нейронных сетей, суперкомпьютерных кластеров и технологий параллельных вычислений.

II. Разработка современных методов оценки степени практической неоднозначности (погрешности) получаемых приближенных решений обратной задачи.

Данные направления являются весьма ресурсоемкими в вычислительном плане, однако, в условиях постоянного роста вычислительных мощностей, в настоящее время они являются вполне реализуемыми на практике и имеют благоприятные перспективы в будущем. Рассмотрим кратко основные принципы, лежащие в основе указанных направлений.

1.3.3.3. Аппроксимационно-интерполяционные методы в обратных задачах геофизики

Аппроксимационные методы в обратных задачах геофизики применяются на различных этапах интерпретации с целью получения упрощенных моделей

исследуемых объектов и инструментов их анализа [Страхов, 1978]. Например, в геоэлектрике, задача определения тензора импеданса, на основе измеренных во времени ЭМ полей, сводится к решению векторного интегрального уравнения свертки, и решается на основе полиномиальной аппроксимации искомого решения в заданном диапазоне частот [Светов, Шимелевич, 1982; Svetov, Shimelevich, 1988]; в нелинейных коэффициентных обратных задачах геоэлектрики решение ищется в виде конечного ряда по заданной системе функций [Варенцов, Голубев, 1980; Шимелевич, 1988, 1889; Шимелевич, Оборнев, 1997]. В линейных обратных задачах геопотенциальных полей активно используются аппроксимационные методы, определяющая роль которых при решении любых задач гравиметрии и магнитометрии неоднократно подчеркивалась в работах В.Н. Страхова [Страхов, 1999в] и других авторов [Долгаль, 1999; Булах, 2007; Блох, 2009; Керимов, 2011; Керимов и др. 2018; Степанова и др., 2018; 2019; 2022]. Аппроксимационные методы в линейных задачах геопотенциальных полей применяются в основном для решения задач двух типов [Страхов, 1999а; Страхов, 1999б, Булах, 2007; Степанова и др.2019]:

1) Аппроксимация искомых решений в задачах параметризации среды. Согласно классификации, предложенной в работе [Степанова и др.2019], это задачи аппроксимации II класса, в которых определяются некоторые функционалы над пространством искомых решений обратной задачи - функций, определяющих распределение источников аномального поля.

2) Аппроксимация входных данных обратной задачи для решения задач интерполяции дискретных точечных полевых измерений, а также для проведения различных трансформаций геофизических полей (аналитическое продолжение полей, разделение полей, истокообразная аппроксимация геопотенциальных полей) с целью получения интерпретационных геолого-геофизических характеристик среды. По классификации указанной работы, это задачи I класса, в которых определяются функционалы над пространством изучаемых потенциальных полей.

В работе [Степанова и др.2019] отмечается, что для задач обоих классов «методы F-, R- и S-аппроксимаций, позволяют получить решение, с помощью которого можно эффективно строить линейные трансформанты поля, а также использовать его в качестве нулевого приближения для решения нелинейной обратной задачи по локализации источников».

В диссертационной работе аппроксимационные методы применяются в двух аспектах:

- для решения задачи эффективной параметризации среды, при которой производится конечно-параметрическая аппроксимация искомой характеристики среды, детальность и структура которой согласована со степенью неоднозначности решений и разрешающей способностью геофизического метода (см. разделы 2.4, 2.5);

- для аппроксимации приближенного обратного оператора задачи с помощью простых в вычислительном плане функций (нейронных сетей), для численного решения нелинейных обратных задач геофизики типа (1.1.1), в частности, задач геоэлектрики (см. Главы 4,5).

Развиваемый в диссертационной работе аппроксимационный нейросетевой метод основан на использовании заранее рассчитанного представительного набора известных решений прямых (а значит, и обратных!) задач (так называемого «банка решений» [Дмитриев, 2012]) для рассматриваемого уравнения обратной задачи. Имея в распоряжении такой набор, представляющий собой конечное множество опорных точек в пространстве решений и их откликов в пространстве данных, можно на основе аппроксимационных конструкций заданного типа, построить приближенный обратный оператор задачи, так называемый *аппроксиматор инверсии*. Обратный оператор-аппроксиматор инверсии строится заранее для заданного класса сред путем однократного решения экстремальной задачи (задачи обучения аппроксиматора), а затем с его помощью достаточно быстро (в режиме реального времени) находится приближенное решение уравнения в этом классе сред для любых новых данных (определенных с некоторой погрешностью), не

входящих в банк решений без задания 1-го приближения. В этом заключается основное преимущество группы аппроксимационных методов, по сравнению с классическими методами, в которых для каждого новых данных приходится решать новую оптимизационную задачу.

Практическая устойчивость аппроксимационного подхода обеспечивается следующими обстоятельствами:

- обратная задача решается на конечно-параметрическом подмножестве допустимых решений, сконструированном так, что априорные оценки неоднозначности (погрешности) решений не превышают заданной величины [Шимелевич, 2013а; Шимелевич, 2020] (см. раздел 2.5);
- непрерывность и гладкость используемой конструкции, аппроксимирующей обратный оператор задачи.

Развиваемый в данной работе подход к решению нелинейных обратных задач вида (1.1.1) на основе построения приближенного обратного оператора с использованием нейросетевых (НС) аппроксимационных конструкций – нейронных сетей – получил название аппроксимационного нейросетевого (АНС) метода [Шимелевич, Оборнев, 2009].

АНС метод по своей сути следует отнести к группе теоретико-функциональных методов решения обратных задач, так как в его основе лежат детерминированные алгоритмы численного расчета краевых задач и детерминированные алгоритмы аппроксимации и интерполяции функций многих переменных. Элементы рандомизации искусственно вводятся в алгоритм АНС метода при формировании банка решений для обеспечения равномерного «засевания» множества допустимых решений, что является необходимым условием получения достоверных интерполяционных решений обратной задачи [Шимелевич, Оборнев, 2009; Шимелевич и др., 2018].

Развитие АНС методов именно в последние десятилетия обусловлено тем, что, с одной стороны, эти методы в значительной степени способны преодолевать проблемы, присущие сложным нелинейным многоэкстремальным обратным

задачам большой размерности, а с другой – возможностью, в условиях интенсивного развития суперкомпьютерных кластеров, производить необходимые для этого массивные вычисления с целью формирования объемных банков данных. При решении обратных задач геофизики имеется возможность заранее насчитать «сколь угодно большое» число опорных точек (известных решений обратной задачи), что обеспечивает эффективное решение аппроксимационно-интерполяционной проблемы, в отличие от ряда многих других задач естествознания и техники, решаемых НС методом, когда опорные точки могут быть получены только на основе длительных экспериментальных наблюдений, и число их обычно существенно ограничено.

Помимо решения обратных задач, НС методы применяются при решении множества других задач вычислительной математики: распознавание образов, классификация, аппроксимация различного рода зависимостей, что свидетельствует об их универсальности.

Универсальность и эффективность применения нейронных сетей на практике обусловлена их свойствами, основными среди которых, являются следующие:

– любая непрерывная функция многих переменных может быть точно представлена в виде конструкции типа трехслойной нейронной сети с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции некоторых непрерывных функций одного переменного (имеющих специальный вид) [Колмогоров, 1957];

– любая непрерывная функция многих переменных может быть сколь угодно точно аппроксимирована с помощью заданных, простых в вычислительном плане функций типа трехслойных нейронных сетей [Cybenko, 1989] (см. также раздел 5.1).

В области решения обратных задач математической физики НС метод был впервые численно реализован для решения обратной задачи, связанной с уравнением теплопроводности, в работе [Павлов, 1994]; в других задачах математической физики НС метод представлен в работах [Ротштейн и др., 1998; Корженевский, 2001; Васильев, 2004; Васильев, 2007] и ряде других работ.

1.3.3.4. Опыт применения нейронных сетей при решении обратных задач геофизики

Общая концепция возможности применения НС технологий в задачах обработки и интерпретации геофизических данных изложена в пионерской работе А. Райча [Raiche, 1991]. В работе рассмотрены основные виды нейросетевой архитектуры: персептрон (Розенблатта), самоорганизующиеся сети (Кохонена), сети ассоциативной памяти (Хопфилда) и др. Рассматривается теория основных алгоритмов обучения данных видов сетей. В заключении А. Райч замечает, что рост вычислительной мощности современных компьютеров позволяет ставить задачи численного моделирования для очень большой геометрии, которые требуют параллельной работы на суперкомпьютерных кластерах. Автор ставит несколько перспективных вопросов: как можно использовать накопленные обширные предыдущие знания в решении интерпретационных задач с новыми данными? Как экстраполировать старые данные, используя наши знания в новой ситуации? Как можно включать в машинные хранилища информации огромные множества данных, выделяя их по внешнему виду? Райч дает прогноз, что НС парадигма предлагает нам прекрасный симулятор для реализации этих процедур, что подтверждается современным уровнем развития НС технологий в геофизике.

В геофизической практике в настоящее время широко применяются различные методы решения целого ряда задач обработки и интерпретации измеряемых данных с использованием нейросетей под общим названием «НС методы»: построение различных зависимостей, восполнение пропущенных данных [Цымблер, Юртин, 2023], задачи инверсии в условиях недостаточности данных [Спичак, 2019], классификация данных [Шимелевич, Оборнев, 1999; Оборнев и др., 2007; Спичак и др., 2007; Спичак, 2019], электромагнитная томография [Корженевский, 2001, Спичак и др. 2007, 2019] и др. Эти задачи под общим названием НС методы, обычно позиционируются, как стохастические, а

обучающее множество формируется на основе экспериментальных, литературных, архивных и других типов данных [Спичак, 2019].

НС метод решения обратных задач имеет определенную специфику и занимает особое место среди НС методов. Реализация НС метода применительно к решению обратных задач предполагает: знание оператора прямой задачи, позволяющего построить множества (банки) опорных решений, возможность получения соответствующих измеренных входных данных, которые позволяют сформулировать классическую обратную коэффициентную задачу; необходимость регуляризации задачи и получение апостериорных оценок неоднозначности находимых решений, а также - проведение ряда специальных преобразований, связанных с учетом геофизических особенностей постановки обратной задачи.

В настоящей работе рассматриваются исключительно НС методы, применительно к решению обратных задач. Ниже представлен краткий обзор по применению НС технологий для решения нелинейных обратных задач геоэлектрики, гравиметрии, магнитометрии и сейсмометрии за последние два десятилетия годы.

Гравиметрия и магнитометрия. Основной класс обратных нелинейных задач гравиметрии и магнитометрии связан со структурными задачами, которые заключаются в определении границ звездного тела с известной избыточной плотностью на основе измеренных характеристик соответствующих потенциальных полей.

В статье [Osman et al., 2007] используется АНС метод решения задачи определения геометрических параметров подземной структуры. В ядре алгоритма решается нелинейная структурная обратная задача гравиметрии определения формы 2D звездного тела при различных задаваемых значениях избыточной плотности. Метод использовался при построении карты гравитационных аномалий в Мексиканском заливе, которая имеет форму антиклинальной структуры. В работе [Abedi et al., 2010] с помощью АНС метода решается обратная структурная 3D задача гравиметрии для простых тел: сфера, бесконечно протяженный

горизонтальный цилиндр и полубесконечный вертикальный цилиндр. Искомыми являются два геометрических параметра: радиус тела и глубина залегания центра с известными значениями избыточной плотности. В качестве обучающей выборки используются модельные данные решения прямой задачи гравиметрии. Строится НС аппроксиматор инверсии с параметрами MLP-сети: 20 нейронов, три входных и два выходных параметра. Метод апробирован на нефтяном битуме Dehloran, Иран.

В работе [Chen et al., 2018] решается обратная структурная 3D задача гравиметрии определения геометрии границ трехслойной среды с известными значениями избыточной плотности слоев. Представлен НС метод, в котором универсальный аппроксиматор инверсии в заданном классе сред не конструируется. Для решения обратной задачи строится «псевдонеуросеть», которая заново обучается на каждом шаге итерации с учетом приближения, полученного на предыдущем шаге. Для каждой новой модели из рассматриваемого класса сред строится своя последовательность нейронных сетей. Используется трехслойная MLP-сеть, у которой число нейронов во входном слое равно числу нейронов в выходном слое и числу измерений гравитационного поля. Число определяемых параметров равняется 50 в случае одной границы, и 20 в случае двух или трех границ. НС 3D инверсия выполнена на данных наблюдений гравитационной аномалии Окинавской впадины. В работе [Eshaghzadeh, Najian, 2018] АНС метод применяется для решения обратной структурной 3D задачи гравиметрии определения параметров сферы, бесконечного горизонтального цилиндра и полубесконечного вертикального цилиндра. Искомыми являются три параметра: тип формы, характеристика размера и глубина залегания тела. Метод применяется для инверсии полевых данных на территории Ирана. В работе [Al-Garni, 2013] применяется АНС метод для оценки глубины источника с простой геометрией. В статье [Alimoradi et al., 2011] АНС метод применяется для решения обратной структурной 3D задачи магнитометрии определения границ слоев в скважине: трехслойная MLP-сеть с количеством нейронов 8, 10 и 16. При

построении сети входной вектор формируется на основе выбранных характерных значений поля (пониженные значения поля, разница между ними и др.). Применение сети к реальным данным (поля Дармиана, Иран), показывает приемлемую точность в предсказании глубин залегания слоев.

Сейсмометрия. Определение скоростных характеристик среды в общем случае сводится к коэффициентной обратной задаче для уравнения упругих полей. На практике используются различные приближения этой задачи: акустическое, приближение геометрической сейсмологии и некоторые другие [Жданов, 2007]. С помощью нейронных сетей в сейсмологии в основном решаются задачи классификации, распознавания образов, построения нелинейных зависимостей и обработки данных, нелинейные классические обратные задачи решаются редко. В ранних работах [Roth, Tarantola, 1994] АНС метод применялся для решения обратной коэффициентной 1D задачи для волнового уравнения, которая заключается в определении скоростных характеристик слоистой среды (8 слоев). Для обучения использовалось 450 модельных примеров. Удовлетворительный результат инверсии получается в 80% случаев. В работе [Alfarraj, AlRegib, 2019] АНС метод применяется для решения обратной 1D задачи сейсмологии в акустическом приближении. Искомой величиной является упругий импеданс, который зависит от скоростей волн и плотности среды и является обобщением акустического импеданса для ненулевых углов падения [Connolly, 1999]; упругий импеданс эффективно используется в задачах интерпретации сейсмических данных. Прямая задача решается на основе приближенных формул для упругого импеданса. Сейсмические трассы и трассы упругого импеданса моделируются как временные ряды. Инверсия сейсмических данных проводится на основе нейронной сети, содержащей сверточный и рекуррентный слои. В работе [Kailai, Darve, 2019] приводится пример решения АНС методом обратной коэффициентной 1D задачи определения скоростей среды для волнового уравнения.

Геоэлектрика. В 90-х годах прошлого века были получены первые результаты применения нейросетевого (НС) метода для решения нелинейных

коэффициентных обратных задач геоэлектрики [Poulton et al., 1989; Raiche, 1991; Poulton et al., 1992; Hidalgo et al., 1994; Спичак, Попова, 1998; Shimelevich, Osbornev, 1998; Шимелевич и др., 1999]. В этих работах использовались стандартные алгоритмы обучения «с учителем» простейших полносвязных трехслойных сетей (типа персептрон) на обучающем множестве, которое представляет собой множество опорных решений прямых (а значит и обратных) задач и строится заранее с помощью прямого оператора. С помощью таких нейросетей можно было получать решения малопараметрических обратных задач геоэлектрики с небольшим числом искомым параметров $N \approx 10 - 15$.

Использование *многослойных* нейросетей (с числом слоев более трех) [Шимелевич и др., 2009] и адаптация общих методов их обучения к особенностям решаемой обратной задачи, позволили развить НС метод на случай 2D сред, геоэлектрические свойства которых определяются числом параметров $N \sim 300$. Разработка усовершенствованных модификаций НС метода с использованием технологий нейросетей *сверточного типа* обеспечили возможность обобщить НС метод на случай 3D сред, геоэлектрические свойства которых определяются числом параметров $N \sim n \cdot 10^3$ [Шимелевич, Оборнев, 2009; Гужва и др., 2010; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Оборнев, 2013; Шимелевич и др., 2015; 2017; 2018; 2022]. В этих работах для уменьшения размерности задачи обучения сети применялись методы сжатия данных и определения оптимальных размерностей входного и выходного векторов нейронной сети с учетом специфики решаемой задачи – реализация *принципа локальности и фокусировки инверсии*.

В работах [Шимелевич, 2013а; Шимелевич, 2013б; Шимелевич и др., 2017; Шимелевич и др., 2018] был представлен итерационный метод уточнения решения, полученного с помощью НС метода.

Глубокие сети. Обзор применения нейронных сетей при решении обратных задач геофизики был бы неполным без упоминания о глубоких нейронных сетях с применением технологий Глубокого обучения - «Deep Learning».

В работах [Liu B. et al., 2020; Liu Z.G. et al., 2021] для решения коэффициентных обратных 1D задач МТЗ и АМТЗ технология «Deep Learning» используется на основе сверточной нейронной сети с распространенной архитектурой U-Net.

Другой пример использования этой технологии представлен в работе [Shucaí Li et al., 2019] для решения обратной 2D задачи сейсмометрии.

В работе [Hu Z. et al., 2021] приводится пример восстановления 2D распределения физических свойств погребенных магнитных рудных тел по данным о магнитных аномалиях на поверхности с помощью сверточных глубоких сетей.

Решение 3D структурной задачи с помощью сверточной сети на основе магнитных данных, разделенных на 5 классов, с прогнозируемыми положениями геологических структур, таких как направление падения и угол падения осевой поверхности складок рассмотрен в работе [Guo J. et al., 2021]. При использовании технологий глубоких нейронных сетей в упомянутых работах обратная задача решается в предположении, что решение принадлежит одному из нескольких гипотетических классов сред. В процессе инверсии на основе имеющихся наблюдаемых данных определяется класс сред (т.е. решается задача классификации) и уточняются параметры модели из найденного класса. На данной стадии развития технологии глубоких нейронных сетей пока удается решать лишь достаточно простые задачи геофизики, однако, по мнению авторов работ, приведенных выше, следует ожидать значительного прогресса в применении этих методов.

Опыт и анализ применения нейронных сетей при решении обратных задач геофизики, а также постоянный рост уровня развития вычислительной техники, позволяют сделать вывод, что одним из наиболее перспективных путей повышения эффективности математической интерпретации многомерных данных геофизики и, в частности, геоэлектрики является развитие АНС методов и других технологий искусственного интеллекта.

1.3.3.5. Оценка степени неоднозначности приближенных решений обратных задач

Для любой обратной задачи могут и должны быть получены оценки степени практической неоднозначности (погрешности) получаемого приближенного решения [Тихонов и др.1990; Лаврентьев, 1962; Иванов, 1963; Гончарский, Ягола, 1969; Тихонов и др., 1990; Yagola, Titarenko, 2007].

В задачах геоэлектрики вопросы количественной оценки степени практической неоднозначности решений обратной задачи ставились и рассматривались в работе [Рокитянский, 1985]. Классические априорные и апостериорные оценки погрешности приближенных нелинейных обратных задач геоэлектрики, в соответствии с методами, изложенными в вышерассмотренных работах, представлены в работах [Новик, 1987; Шимелевич, 1989; Шимелевич, Оборнев, 1997; Шимелевич, Оборнев, 1999; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013а; Шимелевич и др., 2017; Шимелевич и др., 2018; Шимелевич, 2020]. Апостериорные оценки, основанные на возмущении входных данных, рассматривались в работах [Golubev et al., 1998; Варенцов, 2002; Соколова, 2002].

Оценка степени неоднозначности решений обратной задачи лежит в основе задачи верификации результатов интерпретации измеренных геофизических данных и характеризует достоверность проведенной интерпретации, являясь, таким образом, важнейшей составляющей задачи интерпретации. Однако в современных интерпретационных комплексах геоэлектрики, как правило, практически отсутствует полноценный блок верификации получаемых результатов инверсии измеренных данных (за редким исключением случаев, указанных выше) несмотря на то, что математический аппарат решения этой задачи существует и, как отмечалось выше, в том или ином виде применяется в других геофизических

методах. Одной из целей данной работы является устранение указанного пробела в практике геоэлектрических исследований.

Предлагаемые в указанных выше работах методы оценки достоверности интерпретации данных геоэлектрики, основанные на использовании характеристик степени практической неоднозначности решений обратной задачи, опираются на теоретико-функциональные представления и являются естественным развитием существующих классических методов решения этой проблемы. В Главах 2 и 3 настоящей работы разрабатываются методы, алгоритмы и приводятся примеры расчета характеристик степени неоднозначности для задач геофизики (и геоэлектрики, в частности).

1.4. Выводы к Главе 1

1. Представлены общие математические постановки нелинейных обратных задач геоэлектрики, в том числе многокритериальных, которые составляют математическую основу практической интерпретации измеряемых геофизических данных.

2. Приводится математическая формулировка обратной задачи ЭМ мониторинга изменений электропроводности среды в сейсмоактивных зонах на основе локальных и/или разреженных сетей наблюдения.

3. Формулируются обратные задачи геоэлектрики в конечно-параметрических классах сред. Рассматриваются основные принципы и типы параметризации геофизических сред; показано, что применяемые в практических задачах геофизики методы параметризации основаны на принципе истокорпредставимости решения.

4. Приводится обзор существующих методов решения прямых и обратных задач геоэлектрики, анализируется опыт использования нейронных сетей

при решении обратных задач геофизики и геоэлектрики, в частности. Отмечается, что на сегодняшний день оценки неоднозначности (погрешности) приближенных решений обратных задач геоэлектрики, используемые в теории обратных и некорректных задач, на практике не рассчитываются.

5. Делается основной вывод о том, что, учитывая современные тенденции в областях решения обратных задач, анализа и обработки больших данных с применением методов машинного обучения и искусственного интеллекта, а также рост вычислительных мощностей современных компьютеров, дальнейшее усовершенствование существующих методов может быть достигнуто на основе:

I. Разработки современных методов оценки достоверности результатов интерпретации данных геоэлектрики на основе расчета оценок неоднозначности (погрешности) получаемых приближенных решений обратной задачи.

II. Развития аппроксимационно-интерполяционных формализованных методов решения многомерных обратных задач геоэлектрики с использованием нейронных сетей на базе суперкомпьютерных кластеров и технологий массивных вычислений.

ГЛАВА 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

В главе рассматриваются методы построения различных оценок (характеристик) практической неоднозначности (погрешности) приближенных решений условно-корректных нелинейных обратных задач вида (1.1.1) на компактных множествах. Количественно степень практической неоднозначности (или кратко неоднозначность) приближенных решений обратной задачи определяется значениями одного или нескольких функционалов, определенных на пространстве решений и характеризующих «размеры» и иные свойства множеств δ -эквивалентных решений. Различают апостериорные характеристики неоднозначности решения, найденного для конкретных входных данных, и априорные оценки неоднозначности решений обратной задачи, не зависящие от входных данных. В зависимости от числа используемых функционалов, характеристики неоднозначности могут быть скалярными или векторными. Целесообразность использования векторных характеристик обусловлена тем, что множества δ -эквивалентных решений нелинейных обратных задач могут иметь достаточно сложную структуру, адекватное описание которой с помощью одного числа проблематично.

Характеристики неоднозначности приближенных решений обратных задач не зависят от применяемого численного метода решения задачи и определяются свойствами используемого геофизического поля, свойствами операторов прямой и обратной задач, а также структурой и уровнем погрешности данных. Характеристики неоднозначности могут быть определены также для многокритериальных обратных задач, лежащих в основе комплексной интерпретации геофизических данных.

Апостериорные характеристики определяют степень неоднозначности приближенного решения обратной задачи (1.1.1), найденного на основе

конкретных фиксированных (измеренных) данных f с некоторой фактической невязкой δ в заданном модельном классе сред. Апостериорные характеристики отражают такие свойства множеств эквивалентных решений, как, например, величина максимального отклонения возможных δ -эквивалентных решений от некоторого опорного решения g_δ , диаметр множества $G_{f,\delta}$ (максимальный «разброс») δ -эквивалентных решений.

Апостериорные оценки позволяют интерпретатору просматривать множества δ -эквивалентных решений, которые, в равной степени с найденным решением, могут являться решениями обратной задачи с полученной невязкой δ при имеющихся измеренных данных.

Если известен уровень δ_0 погрешности правой части уравнения (1.1.1), то при $\delta = \delta_0$ апостериорные характеристики неоднозначности определяют апостериорную погрешность найденного приближенного решения g_{δ_0} как максимально возможное отклонение решения g_{δ_0} от точного g_T (по норме пространства решений) при фиксированной правой части f .

На основе апостериорных характеристик неоднозначности проводится объективная, не зависящая от применяемых методов инверсии, проверка и оценка достоверности и качества (верификация) проведенной интерпретации имеющихся геофизических данных.

Классические апостериорные оценки погрешности решений обратных задач на компактных множествах рассматривались в работах [Канторович, 1962; Гончарский, Ягола, 1969; Гончарский и др., 1978; Гончарский и др., 1987; Винокуров, Гапоненко, 1982; Новик, 1987; Шимелевич, 1989; Тихонов и др., 1990; Шимелевич, Оборнев, 1999; Ягола, 2008; Yagola, Dorofeev, 2000; Николаева и др., 2003; Николаева и др., 2004; Yagola, Titarenko, 2007; Yagola, 2010; Бакушинский, 2011; Ягола и др., 2014; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2015; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич и др., 2018; Шимелевич, 2020; Шимелевич и др., 2022].

Априорные характеристики неоднозначности приближенных решений обратных задач, основанные на фундаментальной характеристике операторного уравнения – модуле непрерывности обратного оператора [Лаврентьев, 1962; Иванов, 1963; Танана, 1981] – не привязаны к конкретным входным данным и могут быть получены априори на этапе, предшествующем проведению геофизической съемки и интерпретации, при заданном (предполагаемом) уровне погрешности данных (или уровне допустимой невязки синтеза). Априорные характеристики неоднозначности при $\delta = \delta_0$ определяют априорные оценки погрешности найденного приближенного решения g_{δ_0} , не зависящие от правой части f уравнения (1.1.1). На основе априорных характеристик могут быть решены следующие практические задачи интерпретации геофизических данных [Шимелевич, 2013а, 2013б; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич, 2020; Шимелевич и др., 2022]:

- оценка разрешающей способности геофизического метода;
- эффективная (оптимальная) параметризация среды (см. раздел 2.5) с максимальной детальностью при заданной неоднозначности решений;
- априорная оценка неоднозначности определения параметров целевых структур на фоне неизвестной (или слабо изученной) вмещающей среды;
- определение технологических параметров планируемой геофизической съемки (плотность сети наблюдений, набор измеряемых характеристик поля, требования к точности измерений и др.), обеспечивающих желаемую однозначность интерпретации;
- априорная оценка эффективности комплексирования геофизических признаков (см. раздел 2.3) и некоторые другие задачи.

Классические априорные оценки погрешности решений обратных задач, основанные на оценках модуля непрерывности обратного оператора, рассматривались в работах [Лаврентьев, 1962; Иванов, 1963; Иванов и др., 1969; Танана, 1981; Бакушинский, Гончарский, 1989].

Классические априорные и апостериорные характеристики определяют степень неоднозначности (погрешности) решений обратной задачи одним числом интегрально по всей области исследований Ω и по всей совокупности параметров, являясь, таким образом, скалярными характеристиками. В настоящей работе (раздел 2.2) предлагается использовать локальные характеристики неоднозначности [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013а; Шимелевич и др., 2017а, Шимелевич, 2020], которые определяют степень неоднозначности получаемых решений по выделенной подобласти $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ для определенной группы параметров, определяющих свойства среды в подобласти $\bar{\Omega}_i$, а также векторные – для набора выделенных подобластей $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, I$, и соответствующих им групп параметров. Локальные и векторные характеристики по сравнению с классическими позволяют получать более детальные и дифференцированные по глубине оценки неоднозначности решений обратной задачи и разрешающей способности геофизического метода, а значит, и более эффективно решать упомянутые выше практические задачи интерпретации. Основные принципы исчисления поточечных двусторонних границ решений обратных задач впервые были изложены в работе [Канторович, 1962]. В работах [Дорофеев, Титаренко, Ягола, 2003; Yagola, Titarenko, 2007] приводятся примеры расчета поточечных апостериорных оценок погрешности для линейных обратных задач.

Методы, алгоритмы и примеры численного расчета характеристик неоднозначности решений обратных задач геоэлектрики рассмотрены в Главах 3, 5 и 6.

2.1. Классические характеристики неоднозначности

В разделе рассматриваются классические характеристики неоднозначности (погрешности) решений и некоторые их свойства для общего уравнения (1.1.1):

$$Ag = f, \quad g \in G_1 \subset G, \quad f \in F.$$

2.1.1. Апостериорные характеристики неоднозначности

Можно выделить два основных типа апостериорных характеристик неоднозначности: апостериорные характеристики I типа, зависящие от найденного приближенного решения g_δ и апостериорные характеристики II типа, не зависящие от него.

2.1.1.1. Апостериорные характеристики I типа

Пусть $g_\delta \in G_1$ – некоторое фиксированное приближенное решение уравнения (1.1.1) (опорное решение), найденное для фиксированной правой части $f \in F$ с невязкой, не превышающей некоторую заданную величину δ : $\|Ag_\delta - f\| \leq \delta$, где параметр δ может означать величину погрешности правой части уравнения (если она известна) или величину фактической (квазимиимальной) невязки, достигнутой при решении обратной задачи (см. разделы 1.1.1 и 1.1.2).

Максимально возможное отклонение любого другого δ -эквивалентного решения $g'_\delta \in G_1$, $\|Ag'_\delta - f\| \leq \delta$, от g_δ не может превышать величины $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$:

$$\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta_1(f, g_\delta, \delta), \quad (2.1.1)$$

где $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ определяется решением экстремальной задачи вида

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) = \max \{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_1, \|Ag' - f\| \leq \delta \}. \quad (2.1.2)$$

Иногда задачу (2.1.2) мы будем записывать в эквивалентном виде:

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) = \max \{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_{f,\delta} \}, \quad (2.1.3)$$

где $G_{f,\delta} = \{g : g \in G_1, \|Ag - f\| \leq \delta\}$ – множество (1.1.8) всех возможных

δ -эквивалентных решений, которые могут быть получены при фиксированной правой части f с невязкой $\leq \delta$. Множество $G_{f,\delta}$ непусто (так как содержит точное решение уравнения (1.1.1) при точной правой части) и является замкнутым подмножеством компактного множества G_1 . Отсюда следует, что максимум в (2.1.2), (2.1.3) существует и достигается на множестве $G_{f,\delta}$ (следовательно, оценка $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ неумлучшаема) [Гончарский и др., 1978].

Таким образом, для обратной задачи (1.1.1), рассматриваемой на компактном множестве G_1 , функция $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ является апостериорной характеристикой неоднозначности (погрешности) I типа для решений, которые могут быть найдены при фиксированных данных $f \in F$ с невязкой $\leq \delta$. При этом

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Характеристика $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ зависит от свойств оператора A задачи (1.1.1), найденного опорного решения g_δ , конкретных входных данных f и параметра δ . Пусть входные данные f заданы с погрешностью δ_0 , уровень которой известен, g_{δ_0} , $\|Ag_{\delta_0} - f\| \leq \delta_0$ – некоторое опорное решение уравнения (1.1.1), а g_T – точное решение задачи (1.1.1). Тогда для пары g_{δ_0} , g_T справедливо неравенство вида

(2.1.1) при $\delta = \delta_0$ (так как для g_T также выполняется условие $\|Ag_T - f\| \leq \delta_0$) [Гончарский и др., 1978; Тихонов и др., 1990]:

$$\|g_{\delta_0} - g_T\| \leq \beta_1(f, g_{\delta_0}, \delta_0). \quad (2.1.4)$$

Апостериорная характеристика $\beta_1(f, g_{\delta}, \delta_0)$ определяет оценку погрешности фиксированного решения g_{δ_0} при фиксированных $f \in F, \delta_0$.

2.1.1.2. Апостериорные характеристики II типа

В некоторых задачах целесообразно использовать характеристики II типа, которые не зависят от найденного приближенного решения и являются инвариантными характеристиками множества $G_{f,\delta}$ возможных δ -эквивалентных решений задачи (1.1.1) [Yagola, Titarenko, 2007]. Классической характеристикой II типа является $\beta_1^{\max}(f, \delta)$, которая находится из решения задачи

$$\beta_1^{\max}(f, \delta) = \max \{ \beta_1(f, g, \delta) : g \in G_{f,\delta} \}, \quad (2.1.5)$$

которая с учетом (2.1.3) преобразуется к виду

$$\beta_1^{\max}(f, \delta) = \max \{ \|g' - g\| : g', g \in G_{f,\delta} \}. \quad (2.1.6)$$

Из (2.1.6) следует, что величина $\beta_1^{\max}(f, \delta)$ определяет максимально возможное расстояние в метрике пространства решений между любыми двумя δ -эквивалентными решениями из множества $G_{f,\delta}$ и, таким образом, является *диаметром множества $G_{f,\delta}$ возможных δ -эквивалентных решений (1.1.1) при фиксированных f и δ* :

$$\beta_1^{\max}(f, \delta) = \text{Diam}G_{f,\delta}. \quad (2.1.7)$$

Связь между характеристиками I и II типа определяется неравенством

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) \leq \beta_1^{\max}(f, \delta), \quad \forall g_\delta \in G_{f, \delta}. \quad (2.1.8)$$

Для апостериорных характеристик II типа, как и для характеристик I типа, в случае условно-корректной обратной задачи (1.1.1) на компактном множестве корректности, выполняется условие: $\beta_1^{\max}(f, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Апостериорные характеристики $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_1^{\max}(f, \delta)$ не зависят от применяемого численного алгоритма инверсии и могут быть рассчитаны на основе многократного решения прямой задачи (см. Главу 3). Примеры расчета характеристик типа $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ для конкретных обратных задач приводятся в работах [Гончарский, Ягола, 1969; Гончарский и др., 1978; Гончарский и др., 1987; Новик, 1987; Николаева и др., 2003; Николаева и др., 2004].

Для задач геоэлектрики апостериорные характеристики неоднозначности типа $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ рассматривались в работах [Шимелевич, 1989; Шимелевич и др., 1999; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2015; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич и др., 2018, Шимелевич, 2020; Shimelevich et al., 2021].

Замечание 2.1.1. *На практике иногда используется метод оценки неоднозначности (погрешности) решения уравнений типа (1.1.1), основанный на многократном численном решении уравнения для различных правых частей, получаемых путем осложнения исходной правой части всевозможными шумами в пределах заданной величины δ [Гончарский и др., 1978; Golubev et al., 1998; Варенцов, 2002; Соколова, 2002; Yagola, Titarenko, 2007]. Оценки, получаемые таким способом, зависят от применяемого численного алгоритма инверсии и содержат его ошибки. Кроме того, они требуют многократного решения обратной задачи (в отличие от классических оценок, требующих многократного решения прямой задачи), что существенно затрудняет их расчет.*

Использование функционалов относительного расстояния

При использовании функционала относительного расстояния типа (1.1.10), аналогом классической апостериорной характеристики неоднозначности (2.1.2) для уравнения (1.1.1) является характеристика вида

$$\beta_1^r(f, g_\delta, \delta) = \max \left\{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_1, \frac{\|Ag' - f\|}{\|f\|} \leq \delta, f \neq 0 \right\}, \quad (2.1.9)$$

Характеристики неоднозначности для различных функционалов расстояния рассматривались, например, в работах [Канторович, 1962; Балк, 1981б; Беклемишев, 1983; Новик, 1987; Годунов и др., 1988; Шимелевич, 1989] и ряде других работ.

2.1.1.3. Связь неоднозначности решений с объемом априорной информации

Важным свойством характеристик неоднозначности является характер их зависимости от «объема» априорной информации. Рассмотрим обратные задачи вида (1.1.1) для двух случаев, соответствующих множествам априорных ограничений G_1 и G_2 при одинаковых фиксированных данных f и δ . При этом будем считать, что объем априорной информации во втором случае больше, чем в первом, в том смысле, что множество G_2 является более узким, по сравнению с G_1 , т.е. выполняется условие

$$G_2 \subseteq G_1. \quad (2.1.10)$$

Для этих случаев определим множества $G_{f,\delta}^1$, $G_{f,\delta}^2$ вида (1.1.8) возможных δ -эквивалентных решений задачи (1.1.1) при фиксированных f и δ :

$$G_{f,\delta}^1 = \{g : g \in G_1, \|Ag - f\| \leq \delta\}, \quad G_{f,\delta}^2 = \{g : g \in G_2, \|Ag - f\| \leq \delta\}.$$

Из определения множеств следует, что

$$G_{f,\delta}^2 \subseteq G_{f,\delta}^1, \text{ если } G_2 \subseteq G_1. \quad (2.1.11)$$

Согласно (2.1.6), характеристики II типа $\beta_1^{\max}(G_{f,\delta}^1, f, \delta)$ и $\beta_1^{\max}(G_{f,\delta}^2, f, \delta)$ для рассматриваемых двух случаев определяются из решений задач вида

$$\beta_1^{\max}(G_{f,\delta}^1, f, \delta) = \max \{ \|g' - g\| : g', g \in G_{f,\delta}^1 \}, \quad (2.1.12)$$

$$\beta_1^{\max}(G_{f,\delta}^2, f, \delta) = \max \{ \|g' - g\| : g', g \in G_{f,\delta}^2 \}. \quad (2.1.13)$$

Так как $G_{f,\delta}^2 \subseteq G_{f,\delta}^1$, а максимум по подмножеству не может превышать максимума по всему множеству, получаем, что

$$\beta_1^{\max}(G_{f,\delta}^2, f, \delta) \leq \beta_1^{\max}(G_{f,\delta}^1, f, \delta) \text{ при } G_2 \subseteq G_1. \quad (2.1.14)$$

Из вышеизложенного следует, что

- характеристика $\beta_1^{\max}(G_{f,\delta}, f, \delta)$ неоднозначности решений уравнения (1.1.1), определяющая диаметр множества $G_{f,\delta}$ возможных δ -эквивалентных решений (1.1.1) при фиксированных f и δ , монотонно не возрастает при сужении множества априорных ограничений решаемой обратной задачи.

Аналогичным свойством обладает также и упомянутая выше характеристика I типа, определяемая выражением (2.1.3), в следующем смысле. Предположим, что для заданного δ найдено некоторое приближенное решение $g_{\delta,2} \in G_{f,\delta}^2 \subset G_2$ обратной задачи (1.1.1), рассматриваемой на множестве априорных ограничений $G_2 \subset G_1$. Для решения $g_{\delta,2}$ может быть определена апостериорная характеристика I типа на множестве эквивалентных решений $G_{f,\delta}^2$:

$$\beta_1(G_{f,\delta}^2, f, g_{\delta,2}, \delta) = \max \{ \|g - g_{\delta,2}\| : g \in G_{f,\delta}^2 \}. \quad (2.1.15)$$

Так как $g_{\delta,2} \in G_{f,\delta}^2$, а $G_{f,\delta}^2 \subseteq G_{f,\delta}^1$, то $g_{\delta,2} \in G_{f,\delta}^1$ и решение $g_{\delta,2}$ одновременно является решением обратной задачи (1.1.1), рассматриваемой на множестве априорных ограничений G_1 . Для $g_{\delta,2}$ определена апостериорная характеристика I типа на множестве эквивалентных решений $G_{f,\delta}^1$:

$$\beta_1(G_{f,\delta}^1, f, g_{\delta,2}, \delta) = \max \{ \| g - g_{\delta,2} \| : g \in G_{f,\delta}^1 \}. \quad (2.1.16)$$

Так как $G_{f,\delta}^2 \subseteq G_{f,\delta}^1$, то, сопоставляя (2.1.15) и (2.1.16), получаем неравенство

$$\beta_1(G_{f,\delta}^2, f, g_{\delta,2}, \delta) \leq \beta_1(G_{f,\delta}^1, f, g_{\delta,2}, \delta). \quad (2.1.17)$$

Отсюда следует, что, если рассматривать одно и то же решение двух обратных задач при одинаковых входных данных с различными объемами априорной информации, обеспечивающими выполнение условия вида $G_2 \subset G_1$, то соответствующие апостериорные характеристики вида (2.1.3) будут монотонно не возрастать при увеличении объема априорной информации, которое обеспечивает сужение множества априорных ограничений.

Если же (как было отмечено в работе [Балк, 1981б]), два различных приближенных решения $g_{\delta,1} \in G_{f,\delta}^1$, $g_{\delta,2} \in G_{f,\delta}^2$ были получены независимым образом при одинаковых фиксированных данных f и δ , то для них не обязательно выполняется условие монотонного невозрастания неоднозначности решения при увеличении объема априорной информации. Однако в любом случае апостериорные характеристики I типа позволяют решать главную интерпретационную задачу: проверять всевозможные различные δ -эквивалентные решения обратной задачи, которые могут быть получены при имеющихся данных, и учитывать их при проведении интерпретации.

2.1.1.4. Другие подходы к апостериорной оценке неоднозначности

Кроме вышерассмотренных методов, основанных на теоретико-функциональных подходах, для получения апостериорной оценки практической неоднозначности решений обратных задач геофизики применяются также информационно-статистические методы [Гольцман, 1983; Страхов, 1999; Спичак, 2005б]. В задачах геопотенциальных полей применяются подходы, основанные на методах извлечения достоверной информации в условиях неопределенности (концепция гарантированного подхода) [Балк, 1980; Балк, Долгаль, 2012]. Этот подход имеет определенную преимущество с рассмотренными выше теоретико-функциональными методами, поэтому мы коротко остановимся на нем.

Концепция гарантированного подхода

В основе концепции гарантированного подхода лежит идея, согласно которой при решении обратных задач целесообразно ограничиться поиском свойств исследуемого объекта, являющихся общими для всех возможных δ -эквивалентных решений при имеющихся входных данных [Балк, 1980; Рокитянский, 1985]. Например, задачу локализации рудного тела в геопотенциальных методах предлагается рассматривать как задачу построения пары областей $D1$ и $D2$, где $D1$ представляет собой объединение всех допустимых (эквивалентных) областей D_i , а $D2$ – их пересечение. $D1$ и $D2$ (так же как и δ -эквивалентные решения обратной задачи) не противоречат измеренным данным. Область $D2$ является «гарантированной» в смысле подсечения скважиной искомого рудного тела [Балк, 2013]. Величина «разности» $D1 \setminus D2$ областей $D1$ и $D2$ является апостериорной характеристикой (мерой) неоднозначности

(неопределенности) решения задачи локализации тела при имеющихся входных данных. В работах [Балк, 1981б, Балк, 2013] показано, что данная характеристика обладает свойством монотонного роста при увеличении объема априорной информации (ср. раздел 2.1.1.3). Отметим, что границы искомым локальных тел определяются конечным числом параметров задачи, а допустимые изменения границ – интервалами эквивалентных значений этих параметров, которые могут быть определены на основе рассмотренных выше скалярных (см. раздел 2.1.1) и векторных (см. раздел 2.2) характеристик неоднозначности решений обратной задачи. Таким образом, гарантированный подход обладает определенной преемственностью по отношению к классическим теоретико-функциональными методами оценки неоднозначности, так как подразумевает «просмотр» всех возможных δ -эквивалентных решений и построение различного рода функционалов, количественно определяющих фактор δ -эквивалентности решений обратной задачи. Корни концепции гарантированного подхода к получению апостериорной оценки неоднозначности, как было замечено в работе [Балк, 2013], прослеживаются в ранних работах Л.В. Канторовича, где излагаются «принципы исчисления двусторонних границ» множества δ -эквивалентных решений обратной задачи [Канторович, 1962]. Данный подход показал свою эффективность при решении задач геопотенциальных методов, связанных с локализацией рудных тел [Балк, 2009; Балк, 2012], задач сейсморазведки [Тюленева и др., 1989], а также ряда других задач вычислительной математики.

Апостериорные оценки решений некорректных задач

В общем случае *некорректных* обратных задач строятся, так называемые, *апостериорные оценки*, не являющиеся оценками погрешности в классическом смысле [Ягола и др., 2014]. Обзор современных методов получения таких оценок

представлен, например, в работе [Бакушинский, Леонов, 2014]. Методы построения различных типов апостериорных оценок некорректных обратных задач рассмотрены в работах [Винокуров, Гапоненко, 1982; Иванов и др., 1978; Танана, 1981; Дорофеев, Ягола, 2000; Yagola, Dorofeev, 2000; Дорофеев и др., 2003; Леонов, 2010; Бакушинский, 2011; Леонов, 2020; Бакушинский, Леонов, 2014; Leonov et al., 2016; Becker, Rannacher, 2001; Veilina, Johnson, 2005; Veilina, Klibanov, 2008; Veilina, Klibanov, 2010].

2.1.2. Априорные характеристики неоднозначности

Априорные характеристики позволяют определить степень неоднозначности любого решения $g \in G_1$ обратной задачи (1.1.1) при заданном значении параметра δ без привлечения измеренных данных. При этом могут быть получены априорные характеристики, зависящие и не зависящие от рассматриваемого (заданного) решения. Классические априорные оценки неоднозначности решений условно-корректных обратных задач основаны на использовании фундаментальной характеристики операторных уравнений: модуля непрерывности обратного оператора [Лаврентьев, 1962; Иванов, 1963; Лисковец, 1967; Винокуров, 1973; Танана, 1981].

2.1.2.1. Модули непрерывности прямого и обратного операторов

Модуль непрерывности обратного оператора

Рассмотрим основное уравнение обратной задачи (1.1.1), которое перепишем повторно для удобства изложения:

$$Ag = f, \quad g \in G_1 \subset G, \quad f \in F,$$

где G , F – заданные нормированные пространства решений (характеристик среды) и данных (характеристик поля) соответственно. Как и ранее, предполагается, что оператор A является непрерывным и взаимно однозначным, множество G_1 априорных ограничений компактно. Пусть g – некоторое заданное точное решение уравнения (1.1.1), а $f = Ag$ соответствующая ему точная правая часть. Рассмотрим изменение $\Delta f(g, \Delta g)$ значений оператора A при заданном (необязательно малом) изменении решения Δg :

$$A(g + \Delta g) - Ag = \Delta f(g, \Delta g). \quad (2.1.18)$$

Обозначим через $\beta_2(g, \delta)$ максимально возможное изменение Δg решения g при условии, что $\Delta f(g, \Delta g) = A(g + \Delta g) - Ag$ не превышает заданной величины $\delta > 0$:

$$\beta_2(g, \delta) = \max \{ \|\Delta g\| : \|\Delta f(g, \Delta g)\| \leq \delta \}. \quad (2.1.19)$$

Перепишем (2.1.19) в виде

$$\beta_2(g, \delta) = \max \{ \|g' - g\| : g' \in G_1, \|Ag' - Ag\| \leq \delta \}, \quad (2.1.20)$$

где $g' = g + \Delta g \in G_1$. Отсюда следует, что

$$\|g' - g\| \leq \beta_2(g, \delta) \text{ при } \|Ag' - Ag\| \leq \delta. \quad (2.1.21)$$

Величина $\beta_2(g, \delta)$ определяет максимально возможное отклонение (расстояние) какой-либо характеристики среды g' от заданной g при условии, что

расстояние между соответствующими характеристиками поля (откликами среды) Ag' и Ag не превышает заданной величины δ . В случае нелинейного оператора A величина $\beta_2(g, \delta)$ зависит от рассматриваемой характеристики g . Максимальное возможное значение величины $\beta_2(g, \delta)$, рассмотренное для всех возможных $g \in G_1$, при фиксированном значении $\delta > 0$ определяется выражением

$$\beta(\delta) = \max_{g \in G_1} \beta_2(g, \delta), \quad (2.1.22)$$

которое, с учетом (2.1.20), может быть записано в виде

$$\beta(\delta) = \max \{ \|g' - g\| : g, g' \in G_1, \|Ag' - Ag\| \leq \delta \}. \quad (2.1.23)$$

Величина $\beta(\delta)$ определяет максимально возможное отклонение между любыми заданными характеристиками среды $g, g' \in G_1$ при условии, что расстояние между соответствующими характеристиками поля Ag', Ag (откликами среды) не превышает заданной величины δ .

Из (2.1.21)–(2.1.23) следует, что для любой пары $g, g' \in G_1$ и заданного $\delta > 0$ справедливы неравенства

$$\|g' - g\| \leq \beta_2(g, \delta) \leq \beta(\delta) \text{ при } \|Ag' - Ag\| \leq \delta. \quad (2.1.24)$$

В теории некорректных задач функция $\beta(\delta)$ вида (2.1.23) называется *модулем непрерывности обратного оператора на компакте* $F_1 = AG_1$ [Ахиезер, 1947; Лаврентьев, 1962; Иванов, 1963; Лаврентьев, 1973; Лаврентьев и др., 1980]. Строго говоря, выражение (2.1.23) представляет собой форму записи модуля непрерывности обратного оператора для уравнения (1.1.1), которая не требует знания этого обратного оператора A^{-1} уравнения (1.1.1). Отметим, что в работе [Кобрунов, 2001, 2007] модулем непрерывности обратного оператора называется несколько иная функция.

Функцию $\beta_2(g, \delta)$, определяемую (2.1.20), называют *модулем непрерывности обратного оператора в точке* $g \in G_1$ [Бакушинский, Гончарский,

1989]. В частности, в работах [Иванов и др., 1969; Танана, 1981] использовался модуль непрерывности обратного оператора в нуле, $\beta_2(0, \delta)$.

Модуль непрерывности обратного оператора играет важную роль при исследовании и решении обратных задач математической физики [Лаврентьев, 1962; Иванов, 1963; Васин, 1972; Лаврентьев, 1973; Иванов и др., 1978; Танана, 1981; Бакушинский, Гончарский, 1989].

Для линейных задач оценки модуля непрерывности получены в работах [Miller, 1964; Денчев, 1967; Иванов, Королюк, 1969; Коркина, 1969; Коркина, 1974; Иванов и др., 1978; Япарова, 2007; Танана, Ерыгина, 2007], а для нелинейных задач – в работах [Лаврентьев, 1962; Танана, Табаринцева, 2007; Табаринцева, 2013а; Табаринцева, 2013б; Табаринцева, 2018а; Табаринцева 2018б] и в ряде других работ (см. также подробную библиографию в [Иванов и др., 1978]).

Для нелинейных обратных задач геоэлектрики методы численного расчета модуля непрерывности обратного оператора и его модификаций, основанные на алгоритмах Монте-Карло, рассмотрены в работах [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013а; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич, 2020].

Некоторые свойства модулей непрерывности $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$

1) Для условно-корректной задачи (1.1.1)

$$\beta_2(g, \delta), \beta(\delta) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (2.1.25)$$

Свойство (2.1.25) модуля непрерывности $\beta(\delta)$ является выражением теоретической устойчивости решений обратной задачи (1.1.1) при стремлении δ к нулю. При конечных $\delta \neq 0$ величина $\beta(\delta)$ характеризует степень практической неустойчивости задачи.

2) Если множество G_1 допустимых решений является выпуклым компактным множеством, то функции $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$ являются монотонно не убывающими функциями δ [Лаврентьев, 1962]:

$$\beta(\delta_2) \geq \beta(\delta_1), \beta(g, \delta_2) \geq \beta(g, \delta_1), \delta_2 > \delta_1. \quad (2.1.26)$$

Это условие будем предполагать выполненным, так как функции $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$ в дальнейшем вычисляются для конечно-параметрических обратных задач, рассматриваемых на выпуклых замкнутых множествах $G_1 = S_N$ допустимых решений типа N -мерных замкнутых параллелепипедов.

3) Значения функций $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$ могут изменяться в пределах интервала $[0, \text{Diam}G_1]$:

$$0 \leq \beta_2(g, \delta) \leq \beta(\delta) \leq \text{Diam}G_1. \quad (2.1.27)$$

4) Если G_1 – компакт, а оператор A непрерывный и взаимно однозначный, то для любого фиксированного $\delta > 0$ существуют элементы $g, g' \in G_1$ такие, что $\|g' - g\| = \beta(\delta)$ и $\|Ag' - Ag\| = \delta$ [Иванов и др. 1978].

Модуль непрерывности прямого оператора

При решении практических обратных задач типа (1.1.1) важным является понятие чувствительности используемых при интерпретации характеристик поля к изменениям свойств среды (чувствительность геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1)). Чувствительность метода $\gamma(d)$ количественно оценивается величиной максимально возможных изменений характеристик поля в области измерений, при изменениях характеристик среды в исследуемой области, не превышающих заданную величину d [Дмитриев, 2012].

В общем нелинейном случае чувствительность метода $\gamma(d)$ определяется как решение экстремальной задачи [Шимелевич и др., 2013а]

$$\gamma(d) = \max \{ \|Ag' - Ag\| : g, g' \in G_1, \|g' - g\| \leq d \}. \quad (2.1.28)$$

Функция $\gamma(d)$ называется *модулем непрерывности оператора A на компакте G_1* для уравнения (1.1.1).

В работах [Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика, 1990; Дмитриев, 2012] вводится *относительная максимальная чувствительность метода γ_{g_0} в окрестности заданного решения g_0* . Величина γ_{g_0} определяется для нелинейного оператора A , линеаризованного в точке g_0 , и выражается через норму линейной части A_{g_0} оператора A в точке g_0 :

$$\gamma_{g_0} = \max_{g, g' \in G_1} \frac{\|A_{g_0} g' - A_{g_0} g\|}{\|g' - g\|} = \|A_{g_0}\|.$$

Чувствительность γ_{g_0} зависит от рассматриваемого решения g_0 . Величина $\gamma(d)$ вида (2.1.28) характеризует абсолютную чувствительность метода при заданных изменениях характеристик среды $\|g' - g\| \leq d$.

2.1.2.2. Априорные характеристики неоднозначности

Так же, как в случае апостериорных характеристик, выделяют два основных типа априорных характеристик неоднозначности: характеристики, зависящие (I типа) и не зависящие (II типа) от рассматриваемого решения, которые выражаются через функции $\beta_2(g, \delta)$, $\beta(\delta)$. Пусть g_δ и g'_δ – δ -эквивалентные решения, при заданных $f \in F$ и $\delta > 0$:

$$\|Ag_\delta - f\| \leq \delta, \quad \|Ag'_\delta - f\| \leq \delta. \quad (2.1.29)$$

Зафиксируем g_δ как опорное решение. Из (2.1.29) и неравенства треугольника следует, что

$$\|Ag'_\delta - Ag_\delta\| \leq 2\delta, \quad \forall f \in F. \quad (2.1.30)$$

Из последнего, с учетом (2.1.24), получаем оценку максимально возможного отклонения между δ -эквивалентными решениями g_δ и g'_δ (т.е. оценку неоднозначности решения g_δ)

$$\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta_2(g_\delta, 2\delta) \leq \beta(2\delta), \quad \forall f \in F, \quad (2.1.31)$$

где функции $\beta_2(g, x)$ и $\beta(x)$ определяются решениями экстремальных задач (2.1.20) и (2.1.23) соответственно.

Так как неравенства (2.1.29) и (2.1.30) справедливы при любом $f \in F$ (не обязательно принадлежащем области значений оператора A), то функции $\beta_2(g, 2\delta)$ и $\beta(2\delta)$ являются априорными характеристиками неоднозначности (I и II типов соответственно) решений условно-корректной задачи (1.1.1), находимых с невязкой $\leq \delta$ и не зависящими от правой части $f \in F$. Характеристика $\beta(2\delta)$ определяет обусловленность нелинейного уравнения (1.1.1) и в частном линейном случае выражается через число обусловленности квадратной обратимой матрицы (см. ниже п. 2.1.2.4).

На рис. 2.1.1 представлены графики типичных для задач геоэлектрики характеристик $\beta(2\delta)$. В первом случае (кривая 1) решения обратной задачи обладают большей степенью неоднозначности, чем во втором (кривая 2), при любом заданном значении δ .

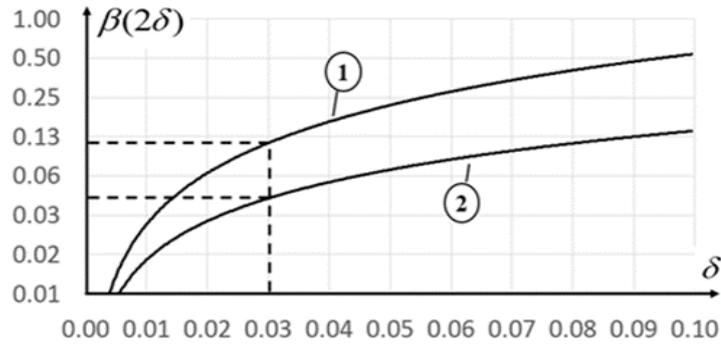


Рис. 2.1.1. Графики (сглаженные) типичных характеристик $\beta(2\delta)$ для задачи геоэлектрики.

Если известна погрешность δ_0 данных, то положив $\delta = \delta_0$ из (2.1.31) получаем, что то величины $\beta_2(g, 2\delta_0)$ и $\beta(2\delta_0)$ являются априорными оценками погрешности приближенного решения g_{δ_0} , найденного с невязкой $\leq \delta_0$:

$$\|g_{\delta_0} - g_T\| \leq \beta_2(g_{\delta_0}, 2\delta_0) \leq \beta(2\delta_0). \quad (2.1.32)$$

Иногда удобно использовать относительные априорные характеристики неоднозначности,

$$\beta^*(2\delta) = \frac{\beta(2\delta)}{2\delta}, \quad \delta > 0, \quad (2.1.33)$$

$$\beta_2^*(g, 2\delta) = \frac{\beta_2(g, 2\delta)}{2\delta}, \quad \delta > 0. \quad (2.1.34)$$

Для этих характеристик, с учетом неравенства (2.1.31), получаем

$$\frac{\|g'_\delta - g_\delta\|}{2\delta} \leq \beta_2^*(g_\delta, 2\delta) \leq \beta^*(2\delta), \quad \forall f \in F. \quad (2.1.35)$$

Из (2.1.35) следует, что при $\delta = \delta_0$ относительные априорные характеристики $\beta_2^*(g_\delta, 2\delta)$ и $\beta^*(2\delta)$ показывают, как погрешность решения соотносится с погрешностью входных данных: величина $\frac{\|g'_\delta - g_\delta\|}{2\delta}$ определяет «коэффициент усиления погрешности».

Априорные характеристики $\beta_2(g, 2\delta)$ и $\beta(2\delta)$ неоднозначности решений обратной задачи (так же, как и рассмотренные выше апостериорные

характеристики) не зависят от применяемого численного метода инверсии данных, а определяются свойствами оператора задачи и величиной параметра δ . Характеристики $\beta_2(g, 2\delta)$ и $\beta(2\delta)$ можно вычислить, не используя какие-либо конкретные измеренные данные и не решая обратную задачу (см. Главу 3).

2.1.2.3. Основные свойства априорных характеристик

Характеристики $\beta_2(g, 2\delta)$ и $\beta(2\delta)$ отличаются от рассмотренных в разделе 2.1.1 модулей непрерывности обратного оператора $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$ только удвоением аргумента. Свойства 1)-4) модулей непрерывности сохраняются и для характеристик $\beta_2(g, 2\delta)$, $\beta(2\delta)$. Помимо этих свойств, отметим следующие.

1. Априорные характеристики $\beta_2(g, 2\delta)$, $\beta(2\delta)$ монотонно не возрастают (см. раздел 2.1.1.3) при сужении множества априорных ограничений (например, за счет увеличения объема дополнительной априорной информации)

$$\beta_2(G_2, g, 2\delta) \leq \beta_2(G_1, g, 2\delta), \text{ если } G_2 \subset G_1, g \in G_2. \quad (2.1.36)$$

$$\beta(G_2, 2\delta) \leq \beta(G_1, 2\delta), \text{ если } G_2 \subset G_1. \quad (2.1.37)$$

2. Справедливо следующее неравенство, устанавливающее связь между характеристиками $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2(g_\delta, 2\delta)$, $\beta(2\delta)$ для фиксированного приближенного решения g_δ обратной задачи (1.1.1), полученного с невязкой $\leq \delta$:

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) \leq \beta_2(g_\delta, 2\delta) \leq \beta(2\delta). \quad (2.1.38)$$

Вторая часть неравенства следует из свойства (2.1.22). Доказательство первой части неравенства приводится в п. 2.1.3.

3. Пусть g_δ и g'_δ – приближенные решения при заданных $f \in F$, $\delta > 0$:

$$\| Ag_\delta - f \| \leq \delta, \quad \| Ag'_\delta - f \| \leq \delta.$$

Из (2.1.1), (2.1.38) следует, что

$$\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta_1(f, g_\delta, \delta) \leq \beta_2(g_\delta, 2\delta) \leq \beta(2\delta). \quad (2.1.39)$$

4. Пусть уровень погрешности данных $\delta = \delta_0$ известен. Если g_{δ_0} – некоторое приближенное решение уравнения (1.1.1), $\|Ag_{\delta_0} - f\| \leq \delta_0$, а g_T – точное решение (1.1.1), то из (2.1.39), (2.1.4) получаем неравенства

$$\|g_T - g_{\delta_0}\| \leq \beta_1(f, g_{\delta_0}, \delta_0) \leq \beta_2(g_{\delta_0}, 2\delta_0) \leq \beta(2\delta_0). \quad (2.1.40)$$

2.1.2.4. Модуль непрерывности обратного оператора как характеристика обусловленности нелинейной задачи

Модуль непрерывности обратного оператора линейной задачи

В частном случае, когда оператор прямой задачи $A = A_L$ является линейным и имеет ограниченный обратный оператор A_L^{-1} , характеристики неоднозначности упрощаются и могут быть выражены через норму обратного оператора. Рассмотрим уравнение (1.1.1) с линейным оператором A_L

$$A_L g = f, \quad g \in G_1, \quad f \in F. \quad (2.1.41)$$

Модуль непрерывности обратного оператора $\beta_L(\delta)$ для этого уравнения, согласно общему определению (2.1.23), определяется выражением

$$\beta_L(\delta) = \max \{ \|g' - g\| : g, g' \in G_1, \|A_L g' - A_L g\| \leq \delta \}. \quad (2.1.42)$$

Учитывая, что $g = A_L^{-1} A_L g$, $g' = A_L^{-1} A_L g'$, получаем, что

$$g' - g = A_L^{-1} A_L g' - A_L^{-1} A_L g = A_L^{-1} (A_L g' - A_L g).$$

В силу линейности оператора A_L , из последнего равенства следует, что

$$\|g' - g\| \leq \|A_L^{-1}\| \cdot \|A_L g' - A_L g\|. \quad (2.1.43)$$

Из (2.1.42), (2.1.43) и условия $\|A_L g' - A_L g\| \leq \delta$ получаем

$$\beta_L(\delta) = \delta \|A_L^{-1}\|. \quad (2.1.44)$$

Для линейного оператора условие (2.1.43) не зависит от решения g , поэтому для модуля непрерывности (2.1.20) в точке g также выполняется равенство

$$\beta_{2,L}(g, \delta) = \delta \|A_L^{-1}\|. \quad (2.1.45)$$

Замечание 2.1.2. Отметим, что для задачи (1.1.1), линеаризованной в точке $g \in G_1$, приближенная оценка модуля непрерывности обратного оператора в точке $g \in G_1$ определяется выражением (2.1.45), в котором вместо A_L^{-1} следует поставить обратный оператор $A_{L,g}^{-1}$ линеаризованной задачи (если таковой существует).

Характеристика обусловленности нелинейной задачи

В численных методах используется понятие «обусловленности» задачи [Беклемишев, 1983, Годунов и др., 1988; Кабанихин, 2009], определяющее количественную связь изменений решения и правой части решаемого уравнения.

В общем нелинейном случае из (2.1.24) с учетом того, что $\|g' - g\| = \beta(\delta)$ при $\|Ag' - Ag\| = \delta$ (см. п. 2.1.2.1, свойство 4), следует, что связь между абсолютным изменением решения и соответствующим изменением правой части определяется неравенством

$$\|\Delta g\| \leq \beta(\|\Delta f\|), \quad (2.1.46)$$

где $\Delta g = g' - g$, $\Delta f = Ag' - Ag = f' - f$. Для линейного уравнения (2.1.41) связь между $\|\Delta g\|$ и $\|\Delta f\|$ оценивается, согласно (2.1.43), линейным неравенством

$$\|\Delta g\| \leq \|A_L^{-1}\| \cdot \|\Delta f\|. \quad (2.1.47)$$

При решении СЛАУ для квадратной невырожденной матрицы \hat{A} определяется число $\kappa(\hat{A}) = \|\hat{A}\| \cdot \|\hat{A}^{-1}\|$, которое оценивает связь между относительным возмущением (погрешностью) решения $\|\Delta g\|/\|g\|$ и соответствующим относительным возмущением (погрешностью) правой части $\|\Delta f\|/\|f\|$ линейного уравнения (2.1.41) [Беклемишев, 1983; Годунов и др., 1988],

$$\frac{\|\Delta g\|}{\|g\|} \leq \kappa(\hat{A}) \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}, \quad g, f \neq 0. \quad (2.1.48)$$

Рассмотрим связь между $\|\Delta g\|/\|g\|$ и $\|\Delta f\|/\|f\|$ в нелинейном случае. Для этого определим аналог модуля непрерывности $\beta^r(\delta)$ для уравнения (1.1.1) с использованием функционалов относительного расстояния вида (1.1.10)

$$\beta^r(\delta) = \max \left\{ \frac{\|g' - g\|}{\|g\|} : g, g' \in G_1, \frac{\|Ag' - Ag\|}{\|Ag\|} \leq \delta, g \neq 0 \right\}. \quad (2.1.49)$$

Из этого определения следует, что для любой пары $g, g' \in G_1$ такой, что $\frac{\|Ag' - Ag\|}{\|Ag\|} \leq \delta$, выполняется неравенство

$$\frac{\|g' - g\|}{\|g\|} \leq \beta^r(\delta). \quad (2.1.50)$$

Отсюда получаем, что при $\|Ag' - Ag\|/\|Ag\| = \|\Delta f\|/\|f\| = \delta$ имеет место следующее неравенство

$$\frac{\|\Delta g\|}{\|g\|} \leq \beta^r \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} \right), \quad g \neq 0. \quad (2.1.51)$$

В линейном случае (с обратимым оператором) величина $\beta^r \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} \right)$ может быть выражена через величины δ и $\kappa(A_L)$. Поделим обе части неравенства (2.1.43) на $\|A_L g\|$,

$$\frac{\|g' - g\|}{\|A_L g\|} \leq \frac{\|A_L^{-1}\| \cdot \|A_L g' - A_L g\|}{\|A_L g\|}, \quad g \neq 0.$$

Усилим последнее неравенство, увеличив знаменатель в левой части, с учетом неравенства $\|A_L g\| \leq \|A_L\| \cdot \|g\|$,

$$\frac{\|g' - g\|}{\|A_L\| \cdot \|g\|} \leq \frac{\|A_L^{-1}\| \cdot \|A_L g' - A_L g\|}{\|A_L g\|},$$

откуда следует

$$\frac{\|g' - g\|}{\|g\|} \leq \kappa(A_L) \frac{\|A_L g' - A_L g\|}{\|A_L g\|}.$$

Из последнего неравенства и определения (2.1.49) функции $\beta^r(\delta)$ при $\|A g' - A g\| / \|A g\| = \|\Delta f\| / \|f\| = \delta$, получаем, что в линейном случае

$$\beta^r(A_L, \delta) = \max_{g, g' \in G_1} \frac{\|g' - g\|}{\|g\|} = \delta \cdot \kappa(A_L). \quad (2.1.52)$$

В частном случае, когда $A_L = \hat{A}$, где \hat{A} – квадратная невырожденная матрица, из (2.1.51), (2.1.52) следует (2.1.48).

Отметим, что классический модуль непрерывности (2.1.42) в линейном случае при $A_L = \hat{A}$ также может быть выражен через число обусловленности $\kappa(\hat{A}) = \|\hat{A}\| \cdot \|\hat{A}^{-1}\|$ матрицы \hat{A} и величину δ на основе равенства (2.1.44)

$$\beta(\hat{A}, \delta) = \delta \|\hat{A}^{-1}\| = \frac{\delta \cdot \kappa(\hat{A})}{\|\hat{A}\|}. \quad (2.1.53)$$

Таким образом, модуль непрерывности обратного оператора $\beta(\delta)$ (как и его аналог $\beta^r(\delta)$) в случае линейного уравнения (2.1.41) явно выражается через число обусловленности задачи в соответствии с (2.1.52), (2.1.53), а в нелинейном случае, согласно (2.1.46), (2.1.51), определяет более общую функциональную связь между абсолютными (относительными) изменениями решения и соответствующими абсолютными (относительными) изменениями правой части рассматриваемого

операторного уравнения (1.1.1). Отсюда следует, что модуль непрерывности обратного оператора $\beta(\delta)$ (как и $\beta^r(\delta)$) является характеристикой обусловленности задачи в нелинейном случае и позволяет, таким образом, обобщить понятие обусловленности на нелинейные задачи.

В заключении этого раздела отметим, что при определении априорных характеристик иногда оказывается полезным использовать функционалы относительного расстояния только в пространстве данных. В этом случае аналогами классических модулей непрерывности $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$ будут являться характеристики вида

$$\bar{\beta}_2^r(g, \delta) = \max \left\{ \|g' - g\| : g' \in G_1, \frac{\|Ag' - Ag\|}{\|Ag\|} \leq \delta, g \neq 0 \right\}. \quad (2.1.54)$$

$$\bar{\beta}^r(\delta) = \max \left\{ \|g' - g\| : g, g' \in G_1, \frac{\|Ag' - Ag\|}{\|Ag\|} \leq \delta, g \neq 0 \right\}. \quad (2.1.55)$$

Многие свойства классических модулей непрерывности сохраняются и для рассмотренных аналогов.

2.1.2.5. Связь неоднозначности обратной задачи с разрешающей способностью геофизического метода

В геофизической практике используются понятия разрешения и разрешающей способности геофизического метода (см., например, работы [Балк, 1981а; Балк, 1981б; Widess, 1982; Кондратьев, 2006; Спичак, 2006; Ершов, Попов, 2010; Пьянков, 2012]), которые количественно выражают способность метода различать (разрешать) детали строения исследуемых сред и близкие по свойствам геофизические среды. Знание оценок разрешающей способности геофизического метода позволяет исключить субъективный фактор из получаемых результатов

интерпретации. Как отмечают некоторые авторы [Кондратьев, 2006]: «...в нашей практике появляются технологии, декларирующие запредельные возможности решения задач, в то время как любой метод натурных исследований имеет свои физические пределы...». Цитата указанного автора относится к задачам сеймики, однако, аналогичная ситуация, когда авторы декларируют «запредельные возможности» геофизического метода, имеет место и в других методах. В упомянутых выше работах рассмотрены некоторые методы оценки разрешающей способности геофизического метода в частных случаях, применительно к конкретным решаемым задачам. При оценке разрешающей способности метода обычно решаются задачи двух основных типов:

- оценка разрешающей способности геофизического метода при определении параметров заданной целевой геолого-геофизической структуры;
- оценка разрешающей способности геофизического метода в целом при определении параметров среды из заданного модельного класса сред (задачи регионального геокартирования и др.).

Разрешающая способность метода в общем случае зависит от свойств используемого геофизического поля, свойств среды, имеющейся априорной информации о строении среды, а также от уровня погрешности и структуры используемых измеренных данных, в том числе от набора измеряемых характеристик поля, типа измерительных установок, плотности и конфигурации измерительной сети. Формально задача определения каких-либо характеристик среды с помощью соответствующего геофизического метода сводится к решению операторного уравнения вида (1.1.1). В процессе формирования уравнения (1.1.1), при правильной постановке задачи, учитываются все перечисленные факторы, влияющие на разрешающую способность метода: задание оператора прямой задачи, его области определения и области значений, с учетом априорных ограничений; формирование правой части, с учетом свойств измерительной сети и измерительных установок, погрешности измерений и др. Таким образом, каждый геофизический метод или его модификация связаны с определенным конкретным

уравнением вида (1.1.1) и поэтому оценка разрешающей способности геофизического метода сводится к оценке возможности «различать» решения уравнения (1.1.1) (или их детали) на основе анализа свойств этого уравнения. В работах [Бердичевский, Дмитриев, 2009; Дмитриев, 2012] вводится формализованное понятие разрешающей способности геофизического метода для линейных и линеаризованных (в окрестности некоторого решения) обратных задач геофизики. В данном разделе эти результаты обобщаются на нелинейные обратные задачи геофизики. Показывается, что разрешающая способность геофизического метода в общем нелинейном случае может быть выражена через модуль непрерывности обратного оператора и его модификации [Шимелевич, 2013а].

2.1.2.5.1. Предел разрешения и разрешающая способность геофизического метода

Пределом разрешения (это понятие пришло из теории оптических инструментов) некоторого метода исследования объекта называют расстояние (угловое или линейное) между двумя точками (элементами) исследуемого объекта, начиная с которого эти точки (при дальнейшем сближении) перестают быть различимыми (разрешимыми) при заданной погрешности метода [Тудоровский, 1948; Ландсберг, 1976]. При этом следует определить понятие «различимости» для данного метода исследования.

С другой стороны, небольшой распределенный (не точечный) элемент объекта, также представляется наблюдателю точкой, т.е. дает при наблюдении, например, в телескоп картину, практически не зависящую от формы элемента и близкую к картине, порождаемой светящейся точкой. Поэтому разрешение данного оптического устройства можно также трактовать как размер (угловой или линейный) минимальной разрешимой детали исследуемого объекта [Ландсберг,

1976] или, что то же самое, как максимально возможную детальность исследования объекта (см. раздел 2.3.2.2).

Величину, обратно пропорциональную пределу разрешения, называют *разрешающей способностью* (разрешающей силой) метода исследований (в частности, некоторого оптического устройства). Разрешающая способность метода исследований определяет максимальное число различных с его помощью точек (деталей) исследуемого объекта (отнесенное к условной единице площади оптического устройства) [Тудоровский, 1948; Ландсберг, 1976]. Например, разрешающая способность фотообъектива определяется числом различных штрихов на 1 мм изображения при фиксированном диаметре объектива; разрешающая способность монитора для графического изображения определяется числом пикселей на 1 дюйм и т.п.

Геофизик-интерпретатор в результате численного решения обратной задачи на основе данных f , измеренных с погрешностью δ , получает некоторое приближенное «опорное» решение g_δ обратной задачи (1.1.1) – точку в пространстве решений. Решение g_δ принадлежит множеству $G_{f,\delta}$ («облаку») δ -эквивалентных решений) при заданных f и δ и является «случайным» (в смысле расположения в пределах множества $G_{f,\delta}$). Вследствие этого некоторые элементы пространства решений $g, g' \in G_1 \subset G$, расстояние между которыми мало (по норме пространства G) могут принадлежать одному и тому же множеству δ -эквивалентных решений $G_{f,\delta}$ при заданном f и, таким образом, не могут являться гарантированно (т.е. независимо от входных данных) различимыми, что порождает неопределенность (неоднозначность) результатов интерпретации.

Отсюда естественным образом вытекают следующие определения различимости характеристик среды и предела разрешения геофизического метода.

Определение 2.1.1. *Гарантированно различимыми* назовем характеристики среды $g, g' \in G_1$, если они не могут являться δ -эквивалентными решениями для какой-либо правой части $f \in F$ уравнения (1.1.1) при заданном значении δ .

Определение 2.1.2. *Пределом разрешения $\varepsilon_r(\delta)$ геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1), при заданном значении δ назовем расстояние (по норме пространства решений G) между двумя характеристиками среды $g, g' \in G_1 \subset G$, начиная с которого (при дальнейшем сближении) характеристики перестают быть гарантированно различимыми при какой-либо правой части $f \in F$.*

Справедлива следующая

Лемма 2.1.1. *Предел разрешения $\varepsilon_r(\delta)$ геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1), при заданном значении δ равен величине $\beta(2\delta)$:*

$$\varepsilon_r(\delta) = \beta(2\delta), \quad (2.1.56)$$

где $\beta(x)$ – функция, определяемая (2.1.23):

$$\beta(x) = \max \{ \|g' - g\| : g, g' \in G_1, \|Ag' - Ag\| \leq x \}.$$

Две характеристики среды $g, g' \in G_1$ гарантированно различимы тогда и только тогда, когда

$$\|g' - g\| > \beta(2\delta). \quad (2.1.57)$$

Доказательство. Второе утверждение леммы очевидно следует из Определения 2.1.1 и оценки (2.1.31) для δ -эквивалентных решений.

Докажем теперь первую часть Леммы. Из второго утверждения следует, что при заданном значении δ , для $g, g' \in G_1$, не являющихся гарантированно различимыми, выполнено

$$\|g' - g\| \leq \beta(2\delta).$$

В то же время, как только $g, g' \in G_1$ становятся гарантированно различимыми, выполняется неравенство (2.1.57). Отсюда, принимая во внимание Определение 2.1.2, получаем, что $\varepsilon_r(\delta) = \beta(2\delta)$.

По аналогии с задачами теории оптики определим *полную* (т.е. независящую от конкретного решения и конкретных входных данных) *разрешающую способность* $R(\delta)$ геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1) как величину, обратно пропорциональную пределу разрешения $\varepsilon_r(\delta)$ [Шимелевич, 2013а,б; Шимелевич и др., 2013а]:

$$R(\delta) = \frac{a}{\varepsilon_r(\delta)} = \frac{a}{\beta(2\delta)}, \quad \delta > 0, \quad (2.1.58)$$

где a – нормировочный коэффициент.

Замечание 2.1.3. *Разрешающая способность $R(\delta)$ геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1), выражается через модуль непрерывности обратного оператора $\beta(2\delta)$ и, таким образом, наряду с величиной $\beta(2\delta) = \varepsilon_r(\delta)$ является количественной характеристикой обратного оператора для уравнения (1.1.1), выражающей способность обратного оператора различать (разрешать) близкие решения уравнения (1.1.1), при заданной погрешности данных δ . Поэтому иногда, чтобы подчеркнуть математический смысл понятия разрешающей способности, величину $R(\delta)$ будем называть «разрешающей способностью обратного оператора» уравнения (1.1.1).*

В частном случае, для фиксированного решения $g \in G_1$ предел разрешения $\varepsilon_r(g, \delta)$ геофизического метода относительно заданной характеристики среды g , выражается через характеристику неоднозначности $\beta_2(g, 2\delta)$:

$$\varepsilon_r(g, \delta) = \beta_2(g, 2\delta), \quad (2.1.59)$$

где $\beta_2(g, x)$ – функция определяемая (2.1.20). Величина $\beta_2(g, 2\delta)$ определяет минимальное расстояние в пространстве решений G , начиная с которого какая-либо характеристика среды $g' \in G_1$ перестает быть гарантированно отличимой от характеристики $g \in G_1$ при заданном уровне δ погрешности данных. На основе

характеристики $\beta_2(g, 2\delta)$ определим разрешающую способность $R_2(g, \delta)$ метода в точке g (т.е. относительно заданного решения g):

$$R_2(g, \delta) = \frac{a}{\varepsilon_r(g, \delta)} = \frac{a}{\beta_2(g, 2\delta)}. \quad (2.1.60)$$

Нормировочный коэффициент a может вводиться различными способами. В задачах оптики он обычно вводится на основе каких-либо характеристик измерительных приборов. В работе [Бердичевский, Дмитриев, 2008] разрешающая способность геофизического метода в окрестности некоторого решения g определяется, как отношение изменения отклика среды $\|Ag' - Ag\|$ к соответствующему изменению $\|g' - g\|$ характеристик среды:

$$R(\delta) = \frac{\|Ag' - Ag\|}{\|g' - g\|}. \quad (2.1.61)$$

Для задачи, линеаризованной в точке $g \in G_1$, при изменении отклика $\|Ag' - Ag\| \leq \delta$ справедлива оценка изменения характеристики среды,

$$\|g' - g\| \approx \|A_{L,g}^{-1}(Ag' - Ag)\| \leq \|A_{L,g}^{-1}\| \cdot \|Ag' - Ag\| \leq \|A_{L,g}^{-1}\| \delta,$$

где $A_{L,g}^{-1}$ – обратный оператор линеаризованной задачи (предполагается его существование). Заменяя знаменатель в (2.1.61) его верхней оценкой $\|A_{L,g}^{-1}\| \delta$ и, полагая $\|Ag' - Ag\| = \delta$, получаем оценку r_g минимальной разрешающей способности метода в точке $g \in G_1$ в линейном приближении [Дмитриев, 2012]:

$$R_2(g, \delta) \approx r_g = \frac{1}{\|A_{L,g}^{-1}\|}. \quad (2.1.62)$$

Следуя логике авторов вышеупомянутой работы, в общем нелинейном случае нормировочный коэффициент a в выражениях (2.1.58), (2.1.60) положим $a = 2\delta$.

Тогда разрешающая способность $R_2(g, \delta)$ в точке g определяется выражением

$$R_2(g, \delta) = \frac{2\delta}{\beta_2(\delta, 2\delta)}. \quad (2.1.63)$$

Так как, согласно (2.1.22), $\beta(\delta) = \max_{g \in G_1} \beta_2(g, \delta)$, то минимальная разрешающая способность $R(\delta)$ метода определяется выражением (ср. (2.1.33), (2.1.34))

$$R(\delta) = \frac{2\delta}{\beta(2\delta)}. \quad (2.1.64)$$

Заметим, что в линейном приближении в точке g для модуля непрерывности обратного оператора, согласно (2.1.45) и Замечанию 2.1.3, справедлива приближенная оценка

$$\beta_2(g, 2\delta) \approx 2 \|A_{L,g}^{-1}\| \delta.$$

Тогда из (2.1.63) для линейризованной в точке g задачи следует приближенная оценка минимальной разрешающей способности, совпадающая с оценкой (2.1.62) минимальной разрешающей способности метода в точке $g \in G_1$ в линейном приближении. Таким образом, определенная в настоящей диссертации разрешающая способность геофизического метода вида (2.1.64) обобщает понятие разрешающей способности, введенной в упомянутых работах В.И. Дмитриевым для линейных и линейризованных задач, на нелинейные задачи.

При нормировке $a = 2\delta$ разрешающие способности (2.1.63), (2.1.64) метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1) при заданном δ , определяют отношение максимального уклонения 2δ между δ -эквивалентными откликами от среды к максимальному уклонению $\beta(2\delta)$ между характеристиками среды (ср. (2.1.33), (2.1.34)). Из (2.1.64) и условия (2.1.57) различимости характеристик g', g получаем условие различимости двух характеристик среды $g, g' \in G_1$ с использованием понятия разрешающей способности:

$$\|g' - g\| > \frac{2\delta}{R(\delta)}. \quad (2.1.65)$$

Из этого условия следует, что для различения близких характеристик среды необходимо увеличивать разрешающую способность метода и уменьшать погрешность данных δ (фактическую невязку решения).

Отметим также, что возможны и другие варианты задания нормировочного коэффициента a в формулах (2.1.58), (2.1.60).

Формула (2.1.58) отражает общий смысл разрешающей способности и связь ее с погрешностью данных и получаемых решений. При решении практических задач разрешение и разрешающую способность геофизического метода так же, как для оптического устройства, целесообразно выражать через какие-либо интерпретационные характеристики метода исследований. Например, такие, как детальность решений обратной задачи, максимальная размерность сетки параметризации при заданном уровне неоднозначности (погрешности) данных и др. Примеры определения характеристик практической разрешающей способности приводятся в разделе 2.5.

2.1.2.5.2. Основные свойства разрешающей способности

Отметим основные свойства характеристик $R_2(g, \delta)$ и $R(\delta)$, определяющих разрешающую способность геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1). При этом будем использовать общую нормировку, полагая $a = const$.

1. Так как, согласно (2.1.26), функции $\beta_2(g, \delta)$ и $\beta(\delta)$ являются монотонно не убывающими функциями δ , то $R_2(g, \delta)$ и $R(\delta)$ являются монотонно не возрастающими функциями δ :

$$R(\delta_2) \leq R(\delta_1), R_2(g, \delta_2) \leq R_2(g, \delta_1), \delta_2 > \delta_1,$$

$$R(\delta), R_2(g, \delta) \rightarrow \infty \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (2.1.66)$$

2. Чем больше неоднозначность (погрешность) решения, тем меньше разрешающая способность метода:

$$\beta'(2\delta) > \beta(2\delta) \Rightarrow R'(\delta) < R(\delta),$$

$$\beta'_2(g, 2\delta) > \beta_2(g, 2\delta) \Rightarrow R'_2(g, \delta) < R_2(g, \delta). \quad (2.1.67)$$

3. Из неравенства $\beta_2(g, 2\delta) \leq \beta(2\delta)$ следует, что разрешающая способность метода не может быть больше разрешающей способности метода в точке:

$$R_2(g, \delta) \geq R(\delta). \quad (2.1.68)$$

4. При увеличении объема дополнительной априорной информации о решении, приводящей к сужению множества допустимых решений, разрешающая способность метода монотонно не убывает:

$$R(G_2, \delta) \geq R(G_1, \delta), \quad G_2 \subset G_1.$$

$$R_2(G_2, g, 2\delta) \geq R_2(G_1, g, 2\delta), \quad G_2 \subset G_1, \quad g \in G_2. \quad (2.1.69)$$

Эти неравенства вытекают из определений (2.1.63), (2.1.64) и того факта, что характеристики $\beta(2\delta)$, $\beta_2(g, 2\delta)$, согласно (2.1.36), (2.1.37), монотонно не возрастают при сужении множества допустимых решений.

Подводя итог по результатам, полученным в данном разделе, приходим к выводу, что разрешающая способность геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1), в общем нелинейном случае может быть выражена через модуль непрерывности обратного оператора (без использования знания последнего) и является одной из разновидностей характеристик неоднозначности решений обратных задач.

В геофизике традиционно используется понятие разрешающей способности геофизического метода, тогда как в теории некорректных задач – понятие неоднозначности (погрешности) решений обратной задачи, связанной с соответствующим геофизическим методом. Установленная в данном разделе количественная связь этих понятий позволяет обобщить результаты, полученные в работах В.И. Дмитриева, на нелинейные задачи и строить однотипные вычислительные схемы для расчета характеристик неоднозначности решений обратной задачи и разрешающей способности метода (см. раздел 3.2).

2.1.2.6. Обратная задача при ограничении на неоднозначность решений

Каждая обратная задача (1.1.1) на заданном компактном множестве G_1 априорных ограничений характеризуется величиной $\beta(2\delta)$, большое значение которой при малых δ свидетельствует о высокой неоднозначности (погрешности) решений. Обычно большая неоднозначность решений уравнения наблюдается на широких множествах G_1 , содержащих информацию об особенностях и мелких деталях исследуемого объекта, отклик от которых в измеряемых характеристиках поля меньше уровня их погрешности. При сужении исходного множества G_1 , т.е. при рассмотрении задачи на подмножестве $G_2 \subset G_1$, неоднозначность решений при фиксированном $\delta > 0$ монотонно не возрастает, согласно свойству (2.1.37) характеристики $\beta(2\delta)$:

$$\beta(G_1, 2\delta) \geq \beta(G_2, 2\delta), \quad G_1 \supset G_2.$$

Однако при этом теряется полнота и детальность описания исследуемого объекта. Будем сужать исходное множество G_1 и рассматривать обратную задачу (1.1.1) на цепочке сужающихся по некоторому заданному правилу компактных множеств

$$\mathbf{G} = \{G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset \dots \supset G_K\}.$$

Характеристики $\beta(G_k, 2\delta)$ обратных задач (1.1.1), рассматриваемых на этих множествах при фиксированном δ , будут монотонно не возрастать:

$$\beta(G_1, 2\delta) \geq \beta(G_2, 2\delta) \geq \dots \geq \beta(G_k, 2\delta) \geq \dots \geq \beta(G_K, 2\delta).$$

Зафиксируем $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$. *Оптимальным* назовем максимально широкий подкомпакт $G_{k_{\max}} \subset \mathbf{G}$, на котором неоднозначность решений задачи (1.1.1) априори не превысит величины $\varepsilon_0(\delta_0)$ [Шимелевич, 2020]:

$$\beta(G_{k_{\max}}, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0. \quad (2.1.70)$$

Для оптимального подкомпакта $G_{k_{\max}}$ должны выполняться условия

$$\begin{cases} \beta(G_{k_{\max}}, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0, \\ \beta(G_{k_{\max}-1}, 2\delta_0) > \varepsilon_0. \end{cases}$$

В силу монотонного невозрастания $\beta(G_k, 2\delta_0)$ с ростом k , задача выбора оптимального подкомпакта $G_{k_{\max}} \subset G$ имеет единственное решение, при условии $\beta(G_{k_{\max}}, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0(\delta_0) \leq \beta(G_1, 2\delta_0)$.

Построение оптимального подкомпакта можно трактовать, как «практическую регуляризацию» исходной условно-корректной обратной задачи при ограничении на неоднозначность решений. Роль «стабилизатора» решений задачи выполняет модуль непрерывности обратного оператора $\beta(2\delta)$ и условие (2.1.70).

Априорная характеристика $\beta(2\delta)$, согласно (2.1.58), однозначно выражается через разрешающую способность геофизического метода, поэтому условие (2.1.70) можно трактовать так же, как практическую регуляризацию обратной задачи, в соответствии с разрешающей способностью геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.1.1).

Методы и примеры построения оптимальных подкомпактов для конечно-параметрических задач, приводятся в разделах 2.5, 3.3 и Главе 5.

2.1.3. О связи апостериорных и априорных характеристик неоднозначности

Рассмотрим обратную задачу (1.1.1):

$$Ag = f, \quad g \in G_1 \subset G, \quad f \in F,$$

где A – заданный непрерывный оператор прямой задачи, действующий из G в F , G_1 – компактное множество. Докажем неравенство

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) \leq \beta_2(g_\delta, 2\delta), \quad (2.1.71)$$

где g_δ – фиксированное приближенное решение обратной задачи (1.1.1), полученное с невязкой δ , $\|Ag_\delta - f\| \leq \delta$; $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2(g_\delta, 2\delta)$ – функции, определяемые в соответствии с (2.1.2), (2.1.20):

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) = \max \{ \|g - g_\delta\| : g \in G_{f, \delta} \}, \quad (2.1.72)$$

$$\beta_2(g_\delta, 2\delta) = \max \{ \|g - g_\delta\| : g \in G_{Ag_\delta, 2\delta} \}, \quad (2.1.73)$$

где

$$G_{f, \delta} = \{ g : \|Ag - f\| \leq \delta \},$$

$$G_{Ag_\delta, 2\delta} = \{ g : \|Ag - Ag_\delta\| \leq 2\delta \}.$$

Оптимизационные задачи (2.1.72) и (2.1.73), определяющие величины $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2(g_\delta, 2\delta)$ имеют один и тот же целевой функционал $\|g' - g\|$, и отличаются подмножествами ограничений, на которых определяется максимум этого функционала.

Множество ограничений $G_{f, \delta}$ представляет собой совокупность элементов, образы которых в пространстве данных F принадлежат множеству $B_1 \cap F_1$,

$$AG_{f, \delta} = B_1 \cap F_1, \quad (2.1.74)$$

где $B_1 = B_1[f, \delta] \in F$ – замкнутый шар с центром в точке f и радиусом δ ; $F_1 = AG_1$.

Множество ограничений $G_{Ag_\delta, 2\delta}$ представляет собой совокупность элементов, образы которых принадлежат $B_2 \cap F_1$:

$$AG_{Ag_\delta, 2\delta} = B_2 \cap F_1, \quad (2.1.75)$$

где $B_2 = B_2[Ag_\delta, 2\delta] \in F$ – замкнутый шар с центром в точке Ag_δ и радиусом 2δ .

Покажем, что множество $G_{f, \delta}$ является подмножеством $G_{Ag_\delta, 2\delta}$. В силу условия $\|Ag_\delta - f\| \leq \delta$, центр Ag_δ шара $B_2[Ag_\delta, 2\delta]$ принадлежит шару $B_1[f, \delta]$,

поэтому расстояние от любой точки шара $B_1[f, \delta]$ до Ag_δ не превышает 2δ , а значит, шар $B_1[f, \delta]$ целиком содержится в шаре $B_2[Ag_\delta, 2\delta]$,

$$B_1 \subset B_2. \quad (2.1.76)$$

Отсюда, с учетом (2.1.74), (2.1.75), получаем, что $AG_{f, \delta} \subseteq AG_{Ag_\delta, 2\delta}$ и, следовательно,

$$G_{f, \delta} \subset G_{Ag, 2\delta}. \quad (2.1.77)$$

Действительно, предположим обратное: пусть $G_{f, \delta} \not\subset G_{Ag_\delta, 2\delta}$. Это означает, что существует точка $g' \in G_{f, \delta}$ такая, что $g' \notin G_{Ag_\delta, 2\delta}$. Так как $g' \in G_{f, \delta}$, то $Ag' \in AG_{f, \delta}$, а значит, согласно (2.1.77), $Ag' \in G_{Ag_\delta, 2\delta}$, откуда следует, что $g' \in G_{Ag_\delta, 2\delta}$. Мы приходим к противоречию.

Неравенство (2.1.71) следует из (2.1.77) и того факта, что максимум по подмножеству $G_{f, \delta}$ не может превосходить максимума по множеству $G_{Ag_\delta, 2\delta}$.

2.2. Локальные характеристики неоднозначности

По-прежнему будем рассматривать общее уравнение (1.1.1). Ниже вводятся некоторые модификации рассмотренных выше характеристик неоднозначности, которые позволяют получать:

– локальные оценки неоднозначности решений обратных задач для выделенной анализируемой подобласти $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ исследуемой области Ω ;

– векторные оценки неоднозначности решений обратных задач для совокупности выделенных анализируемых подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, объединение

которых составляет всю область $\Omega = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i$.

Модифицированные характеристики неоднозначности обратных задач позволяют более адекватно и детально оценить качество и достоверность проводимой интерпретации геофизических данных.

2.2.1. Локальные и векторные характеристики неоднозначности

Каждая из характеристик $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2(g, 2\delta)$, $\beta(2\delta)$ представляет собой скалярную величину, которая оценивает степень неоднозначности решений обратной задачи одним числом, интегрально по всей исследуемой области Ω . Специфика обратных задач наземной геофизики в ряду других обратных задач математической физики состоит в том, что степень практической неоднозначности определения параметров отдельных частей среды растет с глубиной по мере их удаления от поверхности Земли, где расположена измерительная аппаратура. Фрагменты среды, расположенные на различных глубинах, неравноценны по величине их вклада в наблюдаемое поле, который может оказаться меньше уровня погрешности измеряемых данных, что и является основной причиной практической некорректности обратных задач геофизики (и как следствие – неоднозначности решений). Наиболее отчетливо эта особенность проявляется в задачах, где используются поля диффузного типа (например, в геоэлектрике), экспоненциально затухающие с глубиной. Поэтому принципиально важно получать локальные оценки неоднозначности решений обратных задач для выделенных групп параметров, которые определяют свойства получаемых решений обратной задачи дифференцированно по глубине в выделенных анализируемых подобластях исследуемой области. Решение такого рода задач возможно на основе локальных и векторных характеристик неоднозначности решений обратных задач [Шимелевич и др., 2013а; Шимелевич, 2013а; Шимелевич

и др., 2015; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич, 2020], которые рассматриваются ниже.

2.2.1.1. Локальный модуль непрерывности обратного оператора.

Зафиксируем произвольную характеристику среды $g(r) \in G_1[\Omega]$, $r \in \Omega$ из множества допустимых решений G_1 обратной задачи (1.1.1). Обозначим через $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ некоторую анализируемую пространственную подобласть области Ω , а через Ω'_i – ее дополнение до всей области Ω : $\Omega'_i = \Omega \setminus \bar{\Omega}_i$ (рис. 2.2.1). Среда в области Ω'_i играет роль фоновой (вмещающей) среды.

Нас будут интересовать максимально возможные локальные изменения характеристики $g(r)$ в подобласти $\bar{\Omega}_i$ (при произвольно меняющейся фоновой среде) при условии, что соответствующие изменения характеристик поля в области измерений отличаются не более, чем на заданную величину δ .

Обозначим через $G_{1,i}^*[\bar{\Omega}_i] \subset G_1[\Omega]$ подмножество функций $h(r) \in G_{1,i}[\Omega_i]$, которые отличны от нуля только в замкнутой подобласти $\bar{\Omega}_i$:

$$G_{1,i}^*[\bar{\Omega}_i] = \left\{ h(r) : h(r) \in G_1, h(r) = 0, r \notin \bar{\Omega}_i \right\}. \quad (2.2.1)$$

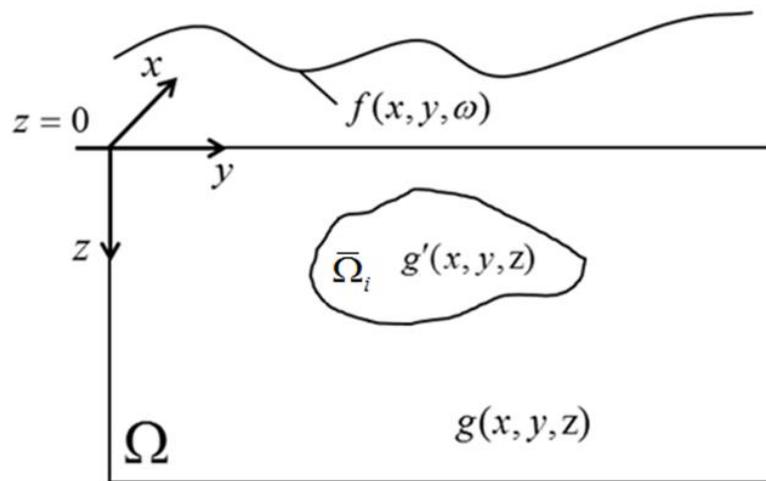


Рис.2.2.1. Анализируемая выделенная подобласть $\bar{\Omega}_i$, для которой определяются локальный модуль непрерывности обратного оператора и локальные характеристики неоднозначности решений обратной задачи.

Пусть $g \in G_1$ – фиксированное точное решение (1.1.1) при точной правой части $f_T = Ag$. Максимально возможное изменение $\Delta g \in G_{1,i}^*$ решения g в подобласти $\bar{\Omega}_i$ при условии, что соответствующее изменение характеристики поля $\Delta f_T(g, \Delta g) = A(g + \Delta g) - Ag$ не превышает заданной величины δ , определяется решением экстремальной задачи вида

$$\beta_2^i(g, \delta) = \max \{ \|\Delta g\| : \Delta g \in G_{1,i}^*, \|A(g + \Delta g) - Ag\| \leq \delta \}. \quad (2.2.2)$$

Обозначив $g' = g + \Delta g \in G_1$, перепишем (2.2.2) в эквивалентном виде и запишем экстремальную задачу, определяющую локальный модуль непрерывности обратного оператора в точке $g \in G_1$ для подобласти $\bar{\Omega}_i$,

$$\beta_2^i(g, \delta) = \max \{ \|g' - g\| : g' \in G_{1,i}, \|Ag' - Ag\| \leq \delta \}, \quad (2.2.3)$$

где $G_{1,i}[\Omega] \subset G_1[\Omega]$ – подмножество функций вида $g + \Delta g$, которые изменяются в подобласти $\bar{\Omega}_i$, а вне ее совпадают с $g \in G_1$:

$$G_{1,i}[\Omega] = \{ g' : g' = g + \Delta g \in G_1, \Delta g \in G_{1,i}^* \}. \quad (2.2.4)$$

Максимально возможное значение величины $\beta_2^i(g, \delta)$ при любом $g \in G_1$ определяется условием

$$\beta^i(\delta) = \max_{g \in G_1} \beta_2^i(g, \delta),$$

которое, с учетом (2.2.3), может быть записано в виде

$$\beta^i(\delta) = \max \{ \|g' - g\| : g \in G_1, g' \in G_{1,i}, \|Ag' - Ag\| \leq \delta \}. \quad (2.2.5)$$

Функция $\beta^i(\delta)$ определяет локальный модуль непрерывности обратного оператора для уравнения (1.1.1) по подобласти $\bar{\Omega}_i$, который характеризует максимально возможное отклонение между любыми заданными характеристиками

среды $g, g' \in G_1$ в подобласти $\bar{\Omega}_i$, при условии, что соответствующее изменение правой части $\|Ag' - Ag\|$ не превышает заданной величины δ . В частности, в качестве подобласти $\bar{\Omega}_i$ может быть выбрана i -я ячейка сетки задачи, тогда локальная характеристика неоднозначности решения является поточечной.

Замечание 2.2.1. По аналогии с (2.2.5) может быть введен локальный модуль непрерывности прямого оператора по подмножеству $G_{1,i} \subset G_1$, ассоциированному с заданной анализируемой подобластью $\bar{\Omega}_i$:

$$\gamma^i(d) = \max \{ \| Ag' - Ag \| : g \in G_1, g' \in G_{1,i}, \|g' - g\| \leq d \}.$$

Функция $\gamma^i(d)$ определяет максимально возможные изменения характеристик поля в области измерений при изменениях характеристик среды в заданной подобласти $\bar{\Omega}_i$, не превышающих заданную величину d и является, таким образом, оценкой локальной чувствительности поля к изменениям свойств среды (см. раздел 2.1.2.1) в подобласти $\bar{\Omega}_i$ (при любом строении фоновой среды в области Ω'_i).

Если анализируемая подобласть $\bar{\Omega}_i$ совпадает со всей областью Ω , то функции $\beta^i(\delta)$ и $\beta_2^i(g, \delta)$ совпадают с классическими модулями непрерывности $\beta(\delta)$ и $\beta_2(g, \delta)$, определенными в разделе 2.1.2.

Для локальных модулей непрерывности обратного оператора условно-корректной задачи сохраняются все свойства 1)–4) классических модулей непрерывности, отмеченные в разделе 2.1.2.1. В частности, из определений (2.2.3), (2.2.5) следует неравенство

$$\beta_2^i(g, \delta) \leq \beta^i(\delta), \quad \forall g \in G_1, \quad \delta > 0. \quad (2.2.6)$$

Справедливы неравенства, устанавливающие связь между классическими и локальными модулями непрерывности:

$$\beta(g, \delta) \geq \beta^i(g, \delta). \quad (2.2.7)$$

$$\beta(\delta) \geq \beta^i(\delta). \quad (2.2.8)$$

Неравенство (2.2.7) является следствием того факта, что максимум в (2.2.3), определяющий величину $\beta^i(g, \delta)$, вычисляется по подмножеству $G_{1,i} \subset G_1$ и не

может превышать максимума по всему множеству G_1 в выражении (2.1.20). Аналогичные рассуждения применимы и к неравенству (2.2.8).

На основе локального модуля непрерывности обратного оператора ниже вводятся локальные априорные характеристики неоднозначности решений обратных задач.

2.2.1.2. Локальные характеристики неоднозначности

Локальная апостериорная характеристика. Зафиксируем приближенное решение $g_\delta \in G_1$, $\|Ag_\delta - f\| \leq \delta$ уравнения (1.1.1), полученное для некоторой фиксированной правой части $f \in F$, с невязкой, не превышающей величину δ . Рассмотрим апостериорную локальную характеристику неоднозначности I типа $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$ по подобласти $\bar{\Omega}_i$:

$$\beta_1^i(f, g_\delta, \delta) = \max \left\{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_{1,\delta,i}, \|Ag' - f\| \leq \delta \right\}, \quad (2.2.9)$$

где

$$G_{1,\delta,i}[\Omega] = \left\{ g' : g' = g_\delta + \Delta g \in G_1, \Delta g \in G_{1,i}^* \right\}, \quad (2.2.10)$$

а $G_{1,i}^*$ определяется в (2.2.1).

Из определения (2.2.9) следует, что максимально возможное отклонение в подобласти $\bar{\Omega}_i$ любого δ -эквивалентного решения $g'_\delta \in G_{1,\delta,i}$, $\|Ag'_\delta - f\| \leq \delta$ от найденного g_δ не может превышать величины $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$:

$$\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta_1^i(f, g_\delta, \delta).$$

Характеристика $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$ является локальной апостериорной характеристикой неоднозначности по заданной подобласти $\bar{\Omega}_i$ для фиксированного приближенного решения g_δ .

Локальные априорные характеристики. На основе локальных модулей непрерывности $\beta^i(\delta)$ и $\beta_2^i(g, \delta)$ вида (2.2.3) и (2.2.5) определяются локальные априорные характеристики неоднозначности $\beta_2^i(g, 2\delta)$ и $\beta^i(2\delta)$ по подобласти $\bar{\Omega}_i$:

$$\beta_2^i(g, 2\delta) = \max \left\{ \|g' - g\| : g' \in G_{1,i}, \|Ag' - Ag\| \leq 2\delta \right\}; \quad (2.2.11)$$

$$\beta^i(2\delta) = \max \left\{ \|g' - g\| : g \in G_1, g' \in G_{1,i}, \|Ag' - Ag\| \leq 2\delta \right\}. \quad (2.2.12)$$

Локальные характеристики неоднозначности $\beta_2^i(g, 2\delta)$, $\beta^i(2\delta)$ являются частным случаем априорных характеристик неоднозначности по всей области Ω , и для них остаются в силе неравенства, аналогичные неравенствам (2.1.39):

$$\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta_1^i(f, g_\delta, \delta) \leq \beta_2^i(g_\delta, 2\delta) \leq \beta^i(2\delta), \quad (2.2.13)$$

где $g'_\delta = g_\delta + \Delta g$, $\Delta g \in G_{1,i}^*$.

Справедливы также неравенства типа (2.2.7), (2.2.8), определяющие связь между характеристиками неоднозначности по всей области Ω с локальными характеристиками по подобластям:

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) \geq \beta_1^i(f, g_\delta, \delta), \quad (2.2.14)$$

$$\beta_2(g, 2\delta) \geq \beta_2^i(g, 2\delta), \quad (2.2.15)$$

$$\beta(2\delta) \geq \beta^i(2\delta). \quad (2.2.16)$$

Неравенства (2.2.14)–(2.2.16) (так же, как и (2.2.7), (2.2.8)) вытекают из определения характеристик $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2^i(g, 2\delta)$, $\beta^i(2\delta)$, и из того факта, что максимум по подмножеству не может превышать максимума по всему множеству.

Рассмотренная общая математическая модель построения локальных характеристик неоднозначности наиболее просто реализуется в случае конечно-параметрических обратных задач вида (1.2.8). В этом случае локальные характеристики определяют апостериорные или априорные оценки неоднозначности определения физических параметров найденной или априори

заданной (целевой) структуры, расположенной в подобласти $\bar{\Omega}_i$, при любой известной или неизвестной фоновой среде (см. также раздел 2.4.1).

□

Если в качестве подобласти $\bar{\Omega}_i$ принята i -я ячейка сетки, покрывающей всю исследуемую область Ω , то локальные апостериорные характеристики неоднозначности численного решения являются поточечными. Основные принципы исчисления поточечных двусторонних границ решений обратных задач впервые были предложены в работе [Канторович, 1962]. В работах [Дорофеев и др., 2003; Yagola, Titarenko, 2007] приводятся примеры расчета поточечных апостериорных оценок погрешности для линейных обратных задач, которые сводятся к задачам линейного программирования. В Главе 3 диссертационной работы предлагаются численные методы расчета различных типов характеристик неоднозначности с использованием алгоритмов Монте-Карло для нелинейных обратных задач и любой заданной подобласти $\bar{\Omega}_i$.

2.2.1.3. Векторные характеристики неоднозначности

Пусть в пределах всей области Ω выделено I подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i=1, \dots, I$, объединение которых составляет Ω

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i. \quad (2.2.17)$$

Для каждой выделенной подобласти $\bar{\Omega}_i$, в соответствии с (2.2.9), (2.2.11) и (2.2.12), могут быть определены локальные характеристики $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2^i(g, 2\delta)$ и $\beta^i(2\delta)$

, $i=1, \dots, I$, для подобластей $\bar{\Omega}_i$, которые, согласно (2.2.14)–(2.2.16), связаны с соответствующими характеристиками для всей области соотношениями:

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) \geq \beta_1^{i, \max}(f, g_\delta, \delta) = \max_{i=1, \dots, I} \beta_1^i(f, g_\delta, \delta), \quad (2.2.18)$$

$$\beta_2(g, 2\delta) \geq \beta_2^{i, \max}(g, 2\delta) = \max_{i=1, \dots, I} \beta_2^i(g, 2\delta), \quad (2.2.19)$$

$$\beta(2\delta) \geq \beta^{i, \max}(2\delta) = \max_{i=1, \dots, I} \beta^i(2\delta). \quad (2.2.20)$$

Данные неравенства означают, что степень неоднозначности решений обратной задачи по всей области не может быть меньше, чем степень неоднозначности по «самой худшей» подобласти $\bar{\Omega}_i^*$, характеристики которой служат нижними оценками для соответствующих характеристик по всей области.

Значения локальных характеристик $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$, $\beta_2^i(g, 2\delta)$, $\beta^i(2\delta)$, $i=1, \dots, I$, зависят от набора выделенных подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i=1, \dots, I$. Если не ставится задача выделения каких-либо конкретных целевых структур, то в качестве стандартных подобластей $\bar{\Omega}_i$ разумно использовать наборы геофизически значимых для интерпретации аномалиеобразующих фрагментов (подобластей) исследуемой области Ω . Для задач наземной геофизики с квазиплоскими источниками поля, например, в методе МТЗ или ЭМ зондирования в дальней зоне, естественно использовать набор, состоящий из I подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i=1, \dots, I$ вида горизонтальных слоев (рис. 2.2.2). В этом случае выделенные подобласти объединяют фрагменты среды, находящиеся примерно на равном расстоянии от источников и приемников поля, и параметры, определяющие их свойства, обладают примерно одинаковой чувствительностью в наблюдаемых полях.

На основе варьирования мощностей выделяемых слоев проводится регуляризация задачи (см. п.2.5.1). В случае исследования целевых структур могут использоваться наборы стандартных подобластей иного вида.

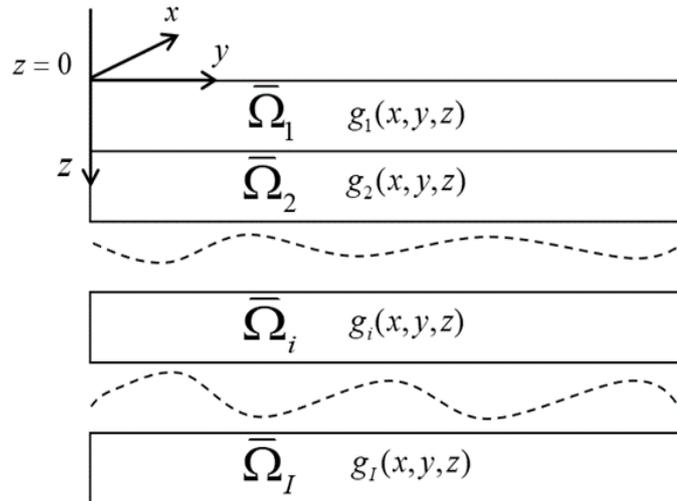


Рис.2.2.2. Совокупность выделенных слоев $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, для которых определятся векторная характеристика неоднозначности решений обратной задачи.

На рис. 2.2.3 представлены кривые типичных (для задач геоэлектрики) *послойных характеристик* $\beta^i(2\delta)$ для различных подобластей $\bar{\Omega}_i$, представленных на рис. 2.2.2, соответствующих ярусам равномерной по вертикали сетки параметризации. Большие номера соответствуют более глубоким ярусам сетки. Из рисунка видно, что при одной и той же величине невязки δ , степень неоднозначности решений обратной задачи по подобласти $\bar{\Omega}_i$ растет с глубиной (более подробно см. п. 3.2.1).

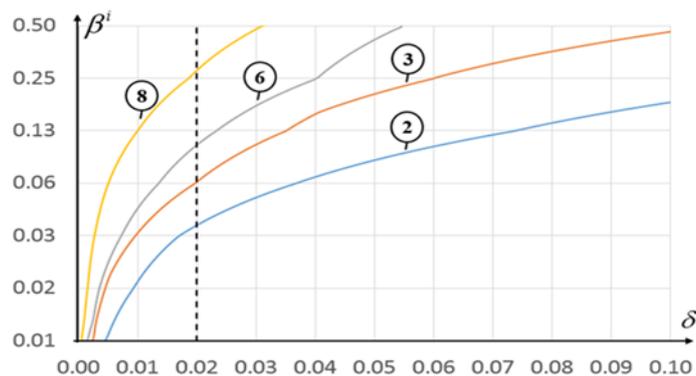


Рис. 2.2.3. Графики типичных (для задач геоэлектрики) *послойных характеристик* $\beta^i(2\delta)$ для различных подобластей $\bar{\Omega}_i$, соответствующих ярусам сетки параметризации одинаковой мощности (рис.2.2.2). Большие номера соответствуют более глубоким подобластям.

Определим векторную функцию $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$, координаты которой равны значениям локальных характеристик $\beta_1^i(f, g_\delta, \delta)$ вида (2.2.9) по подобластям $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, удовлетворяющим условию (2.2.17):

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) = (\beta_1^1, \dots, \beta_1^I). \quad (2.2.21)$$

Для заданного набора подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, векторная функция $\beta_1(f, g_\delta, \delta)$ определяет *векторную апостериорную характеристику неоднозначности решения* g_δ обратной задачи (1.1.1).

Аналогичным образом определяются *векторные априорные характеристики неоднозначности решений* $g \in G_1$ обратной задачи для заданного набора подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$:

$$\beta_2(g, 2\delta) = (\beta_2^1, \dots, \beta_2^I), \quad (2.2.22)$$

$$\beta(2\delta) = (\beta^1, \dots, \beta^I). \quad (2.2.23)$$

В частности, в случае конечно-параметрических обратных задач, при сеточной параметризации, в качестве подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, естественно использовать ярусы сетки параметризации.

Послойные локальные и векторные характеристики более детально (дифференцировано по глубине), по сравнению со скалярными, характеризуют степень неоднозначности решений обратной задачи в исследуемой области Ω с учетом свойств используемого геофизического поля (скорость затухания поля с глубиной или при удалении от источников и др.). Этот факт позволяет использовать локальные и векторные характеристики при решении различных практических задач интерпретации таких, как оценка разрешающей способности геофизического метода (в частности, при описании целевой структуры), эффективная параметризация среды (см. раздел 2.4, а также Главу 3), верификация результатов интерпретации и ряда других задач.

2.2.1.4. Локальная разрешающая способность геофизического метода

В соответствии с общим определением вводятся локальная разрешающая способность $r^i(2\delta)$ по подобласти $\bar{\Omega}_i$ при любой неизвестной фоновой среде

$$r^i(\delta) = \frac{a}{\beta^i(2\delta)} \quad (2.2.24)$$

и локальная разрешающая способность $r_2^i(g, 2\delta)$ по подобласти $\bar{\Omega}_i$ в точке g (т.е. при заданной фоновой среде):

$$r_2^i(g, \delta) = \frac{a}{\beta_2^i(g, 2\delta)}, \quad (2.2.25)$$

где $\beta_2^i(g, 2\delta)$, $\beta^i(2\delta)$ – локальные априорные характеристики вида (2.2.11), (2.2.12).

2.3. Характеристики неоднозначности решений многокритериальных обратных задач

Рассмотрим двухкритериальную обратную задачу общего типа с критериальными ограничениями, которая определяется системой уравнений (1.1.11) при условиях (1.1.12):

$$\begin{cases} A_1 g_1 = f_1, & g_1 \in G_1 \subset G, f_1 \in F, \\ A_2 g_2 = f_2, & g_2 \in G_2 \subset G, f_2 \in F, \end{cases} \quad (1.1.11)$$

$$u_m(g_1, g_2) \leq 0, \quad m = 1, \dots, I_u. \quad (1.1.12)$$

Напомним, что операторы $A_1, A_2: G \rightarrow F$ предполагаются непрерывными и взаимно однозначными, G_1, G_2 - замкнутые подмножества компактного множества G , а для критериальных ограничений (1.1.12) выполняется требование (см.

раздел 1.1.4): при любом $g_2 \in G'_2 \subseteq G_2$, где G'_2 – замкнутое подмножество, критериальные ограничения (1.1.12) определяют некоторое замкнутое подмножество $G'_1 \subseteq G_1$ значений $g_1 \in G'_1$. В частном случае при $g_1 = g_2 = g$ задача (1.1.11)–(1.1.12) сводится к более простой системе уравнений (1.1.14):

$$\begin{cases} A_1 g = f_1, \\ A_2 g = f_2, \end{cases} \quad g \in G_1 \subset G, \quad f_1, f_2 \in F. \quad (1.1.14)$$

Для двухкритериальных задач (1.1.11)–(1.1.12) и (1.1.14) ниже будут получены характеристики неоднозначности различных типов. Показывается, что характеристики (II типа) неоднозначности решений однокритериальной задачи монотонно не возрастают при добавлении второго критерия и учете априорных ограничений типа (1.1.12) [Shimelevich et al., 2021].

Для упрощения изложения в данном разделе будем полагать, что погрешность входных данных известна и характеристики неоднозначности определяют погрешность решений.

При решении первого уравнения системы (1.1.11), второе уравнение в совокупности с (1.1.12) можно использовать в качестве дополнительных ограничений на множество допустимых решений первого, и свести систему (1.1.11) к одному операторному уравнению.

Пусть f_1, f_2 – фиксированные правые части первого и второго уравнений системы (1.1.11)–(1.1.12), заданные с погрешностями δ_1, δ_2 соответственно, а $g_{1,T}, g_{2,T}$ – точные решения системы при $\delta_1, \delta_2 = 0$.

Предположим теперь, что существуют приближенные решения $g_{1,\delta} \in G_{1,\delta} \subset G_1$, $\|A_1 g_{1,\delta} - f_1\| \leq \delta_1$ и $g_{2,\delta} \in G_{2,\delta} \subset G_2$, $\|A_2 g_{2,\delta} - f_2\| \leq \delta_2$ системы (1.1.11)–(1.1.12), где

$$G_{1,\delta} = \{g : g \in G_1, \|A_1 g - f_1\| \leq \delta_1\}, \quad (2.3.1)$$

$$G_{2,\delta} = \{g : g \in G_2, \|A_2 g - f_2\| \leq \delta_2\} \quad (2.3.2)$$

Заметим, что в общем случае такие решения могут не существовать.

Согласно требованию к критериальным ограничениям (1.1.12), если $g_{2,\delta} \in G_{2,\delta} \subset G_2$, то $g_{1,\delta} \in G_{1,2,\delta} \subset G_1$, где

$$G_{1,2,\delta} = G_1 \cap \{g : u_m(g, g') \leq 0, m = 1, \dots, I_u, g' \in G_{2,\delta} \subseteq G_2\}. \quad (2.3.3)$$

Подмножество, определенное в фигурных скобках, является замкнутым, а значит замкнуто и множество $G_{1,2,\delta} \subset G_1$.

Классическая апостериорная оценка $\beta_1(f_1, g_{1,\delta}, \delta_1)$ погрешности I типа решения $g_{1,\delta} \in G_{1,\delta}$ первого уравнения системы (1.1.11), рассматриваемого независимо от второго уравнения, определяется согласно (2.1.2), из решения экстремальной задачи

$$\beta_1(f_1, g_{1,\delta}, \delta_1) = \max \{ \|g - g_{1,\delta}\| : g \in G_{1,\delta} \}. \quad (2.3.4)$$

Оценка $\beta_{1,C}(\bar{f}, g_{1,\delta}, \bar{\delta})$ погрешности этого же решения $g_{1,\delta}$, где $\bar{f} = (f_1, f_2)$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$, с учетом того, что $g_{1,\delta} \in G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta}$, определяется из решения экстремальной задачи

$$\beta_{1,C}(\bar{f}, g_{1,\delta}, \bar{\delta}) = \max \{ \|g - g_{1,\delta}\| : g \in G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta} \}. \quad (2.3.5)$$

Подмножества $G_{1,\delta}$, $G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta}$ замкнуты и непусты, так как $g_{1,T} \in G_{1,\delta}$ и $g_{1,T} \in G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta}$, а значит, максимумы в (2.3.4), (2.3.5) существуют и достигаются. При этом допустимое множество задачи (2.3.5) является подмножеством допустимого множества задачи (2.3.4): $G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta} \subseteq G_{1,\delta}$. Так как максимум по подмножеству не может превышать максимума по всему множеству, справедливо неравенство:

$$\beta_{1,C}(\bar{f}, g_{1,\delta}, \bar{\delta}) \leq \beta_1(f_1, g_{1,\delta}, \delta_1). \quad (2.3.6)$$

Погрешность $\|g_{1,\delta} - g_{1,T}\|$ решения $g_{1,\delta}$ оценивается неравенствами

$$\|g_{1,\delta} - g_{1,T}\| \leq \beta_{1,C}(\bar{f}, g_{1,\delta}, \bar{\delta}) \leq \beta_1(f_1, g_{1,\delta}, \delta_1). \quad (2.3.7)$$

В общем случае решение $\hat{g}_{1,\delta} \in G_{1,\delta}$ однокритериальной задачи, получаемое на основе первого уравнения независимо от второго, не совпадает с решением $g_{1,\delta} \in G_{1,2,\delta}$ двухкритериальной задачи (1.1.11)–(1.1.12). Поэтому, для оценок $\beta_1(f_1, \hat{g}_{1,\delta}, \delta_1)$ и $\beta_{1,C}(\bar{f}, g_{1,\delta}, \bar{\delta})$ может не выполняться неравенство типа (2.3.6), так они зависят от фиксированного приближенного решения.

Рассмотрим оценки погрешности II типа (2.1.6), которые зависят только от правой части и уровня ее погрешности

$$\beta_1^{\max}(f_1, \delta_1) = \max \{ \|g' - g\| : g', g \in G_{1,\delta} \}, \quad (2.3.8)$$

$$\beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}) = \max \{ \|g - g_{1,\delta}\| : g', g \in G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta} \}. \quad (2.3.9)$$

Эти оценки определяют диаметры множеств $G_{1,\delta}$ и $G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta}$ решений, сопоставимых по точности с входными данными соответствующих уравнений. Так как $G_{1,\delta} \cap G_{1,2,\delta} \subseteq G_{1,\delta}$, то выполняется неравенство

$$\beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}) \leq \beta_1^{\max}(f_1, \delta_1). \quad (2.3.10)$$

Для погрешности решения $\hat{g}_{1,\delta} \in G_{1,\delta}$ справедлива оценка

Для погрешности решения $\hat{g}_{1,\delta} \in G_{1,\delta}$ из (2.3.8) справедлива оценка

$$\|\hat{g}_{1,\delta} - g_{1,T}\| \leq \beta_1^{\max}(\delta_1). \quad (2.3.11)$$

Из (2.3.9), (2.3.10) получаем, что погрешность решения $g_{1,\delta} \in G_{1,2,\delta}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{g}_{1,\delta} - g_{1,T}\| \leq \beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}) \leq \beta_1^{\max}(f_1, \delta_1). \quad (2.3.12)$$

Из (2.3.11), (2.3.12) следует, что погрешность решения не возрастает, при добавлении второго критерия.

Рассмотрим теперь задачу (1.1.14). Пусть g_T – точное решение системы (1.1.14) при точных данных, f_1, f_2 – фиксированные правые части первого и второго уравнений системы (1.1.14), заданные с погрешностями δ_1, δ_2 , $\hat{g}_{1,\delta}$ – решение однокритериальной задачи, получаемое на основе первого уравнения

независимо от второго: $\|A_1 \hat{g}_{1,\delta} - f_1\| \leq \delta_1$. Предположим, что существует приближенное решение g_δ , удовлетворяющее обоим уравнениям системы (1.1.3), $\|A_c g_\delta - f_c\| \leq \delta_k$, $c = 1, 2$. Отметим, что $\hat{g}_{1,\delta} \in G_{1,\delta}$, а $g_\delta, g_T \in G_{1,\delta} \cap G_{2,\delta}$, где $G_{1,\delta}, G_{2,\delta}$ определяются в (2.3.1), (2.3.2). *Апостериорные оценки II типа* для 1 уравнения, рассматриваемого независимо, и системы уравнений (1.1.14) при фиксированной правой части $\bar{f} = (f_1, f_2)$

$$\beta_1^{\max}(f_1, \delta_1) = \max \{ \|g' - g\| : g', g \in G_{1,\delta} \}, \quad (2.3.13)$$

$$\beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}) = \max \{ \|g' - g_\delta\| : g', g \in G_{1,\delta} \cap G_{2,\delta} \}. \quad (2.3.14)$$

Из рассуждений, аналогичным предыдущим, следует, что оценки $\beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}), \beta_1^{\max}(f_1, \delta_1)$ удовлетворяют неравенству типа (2.3.10),

$$\beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}) \leq \beta_1^{\max}(f_1, \delta_1). \quad (2.3.15)$$

Из (2.3.13) следует, что для погрешности решения $\hat{g}_{1,\delta} \in G_{1,\delta}$ однокритериальной задачи справедлива оценка

$$\|\hat{g}_{1,\delta} - g_T\| \leq \beta_1^{\max}(f_1, \delta_1). \quad (2.3.16)$$

Из (2.3.14) следует, что для погрешности решения g_δ двухкритериальной задачи (1.1.14) справедлива оценка $\|g_\delta - g_T\| \leq \beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta})$, а также, с учетом (2.3.15), выполняется неравенство

$$\|g_\delta - g_T\| \leq \beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}) \leq \beta_1^{\max}(f_1, \delta_1). \quad (2.3.17)$$

Апостериорные оценки I типа для фиксированного решения g_δ двухкритериальной задачи (1.1.14)

$$\beta_{1,C}(\bar{f}, g_\delta, \bar{\delta}) = \max \{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_{1,\delta} \cap G_{2,\delta} \}. \quad (2.3.18)$$

Оценка (2.3.18) определяет погрешность фиксированного приближенного решения g_δ системы (1.1.14) при фиксированных данных $f_1, f_2 \in F$, определенных с погрешностью $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$. Ясно, что (см. (2.1.8))

$$\beta_{1,C}(\bar{f}, g_\delta, \bar{\delta}) \leq \beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta}),$$

где $\beta_{1,C}^{\max}(\bar{f}, \bar{\delta})$ определяется по формуле (2.3.14).

Локальная апостериорная характеристика I типа $\beta_{1,C}^i(\bar{f}, g_\delta, \bar{\delta})$ фиксированного решения g_δ двухкритериальной задачи (1.1.14), в соответствии с общим определением (2.2.9), находится из решения экстремальной задачи вида:

$$\beta_{1,C}^i(\bar{f}, g_\delta, \bar{\delta}) = \max \left\{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_{1,i,\delta}, \|A_1 g' - f_1\| \leq \delta_1, \|A_2 g' - f_2\| \leq \delta_2 \right\}, \quad (2.3.19)$$

где $G_{1,i,\delta}$ определяется в соответствии с (2.2.10).

Априорные характеристики неоднозначности двухкритериальной задачи (1.1.14) [Шимелевич, 2013а]. Для погрешности приближенного решения $\hat{g}_{1,\delta}$, $\|A_1 \hat{g}_{1,\delta} - f_1\| \leq \delta_1$ однокритериальной задачи, соответствующей первому уравнению системы (1.1.14), согласно (2.1.32), справедлива оценка

$$\|\hat{g}_{1,\delta} - g_T\| \leq \beta(2\delta_1), \quad (2.3.20)$$

где $\beta(x)$ – модуль непрерывности обратного оператора (2.1.23).

Априорную характеристику II типа двухкритериальной задачи (1.1.14) определим как решение экстремальной задачи вида

$$\beta_C(2\bar{\delta}) = \max \left\{ \|g' - g\| : g, g' \in G_1, \|A_1 g' - A_1 g\| \leq 2\delta_1, \|A_2 g' - A_2 g\| \leq 2\delta_2 \right\}. \quad (2.3.21)$$

Характеристика $\beta_C(2\bar{\delta})$ является априорной оценкой погрешности фиксированного решения g_δ системы (1.1.14) при заданном $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$:

$$\|g_\delta - g_T\| \leq \beta_C(2\bar{\delta}). \quad (2.3.22)$$

Нетрудно убедиться, что связь между характеристиками $\beta(2\delta_1)$ и $\beta_C(2\bar{\delta})$ определяется неравенством

$$\beta_C(2\bar{\delta}) \leq \beta(2\delta_1).$$

Из последнего, с учетом (2.3.21), следует, что априорная оценка погрешности решения g_δ двухкритериальной задачи (1.1.14) удовлетворяет неравенству

$$\|g_\delta - g_T\| \leq \beta_C(2\bar{\delta}) \leq \beta(2\delta_1). \quad (2.3.23)$$

На основе определения (2.2.5) локального модуля непрерывности обратного оператора получаем экстремальную задачу для локальной априорной оценки II типа двухкритериальной задачи (1.1.14)

$$\beta_C^i(2\bar{\delta}) = \max_{g \in G_1} \{ \|g' - g\| : g' \in G_{1,i}; \|A_1 g' - A_1 g\| \leq 2\delta_1, \|A_2 g' - A_2 g\| \leq 2\delta_2 \}, \quad (2.3.24)$$

где $G_{1,i}$ определяется в соответствии с (2.2.4). Характеристика $\beta_C^i(2\bar{\delta})$ является априорной оценкой погрешности фиксированного решения g_δ системы (1.1.14) в подобласти $\bar{\Omega}_i$ при заданном $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$.

Представленные выше результаты по оценкам неоднозначности двухкритериальных задач справедливы и для других типов характеристик неоднозначности, рассмотренных ранее в разделах 2.1, 2.2, а также очевидным образом обобщаются на случай \mathbb{C} -критериальных задач (1.1.16) при $\mathbb{C} > 2$.

Подводя общий итог рассмотрению оценок неоднозначности многокритериальных задач, отметим, что априорные и апостериорные характеристики неоднозначности II типа (не зависящие от рассматриваемого решения) монотонно не возрастают (на практике обычно убывают) с увеличением числа критериев, что теоретически обосновывает эффективность комплексной (совместной) интерпретации геофизических данных.

Замечание 2.3.1. *На практике часто используются дополнительные данные, которые сами по себе не обеспечивают единственности решения рассматриваемой обратной задачи и не являются полноценными критериями в указанном выше смысле. Использование дополнительных данных совместно с основным критерием, обеспечивающим единственность обратной задачи, можно рассматривать как привлечение дополнительной априорной информации. Если эта информация обеспечивает сужение множества априорных ограничений (см. раздел 2.1.1.3), то следствием является монотонное невозрастание апостериорных оценок погрешности II типа.*

Апостериорные характеристики неоднозначности I типа, зависящие от рассматриваемого решения, в общем случае указанным свойством не обладают, однако, при расчетах на практике численные оценки неоднозначности в большинстве случаев также уменьшаются с увеличением числа критериев.

Примеры расчета многокритериальных характеристик неоднозначности приводятся в Главах 3 и 6.

2.4. Характеристики неоднозначности конечно-параметрических задач

Уравнение (1.2.8) конечно-параметрической обратной задачи при параметризации общего типа является частным случаем основного уравнения (1.1.1) и для него справедливы результаты предыдущих разделов 2.1–2.3. Характеристики неоднозначности конечно-параметрической задачи могут быть определены для уравнения (1.2.8) в пространстве параметров R^N и затем, при необходимости, пересчитаны в соответствующие характеристики для уравнения (1.2.7) в пространстве кусочно-постоянных решений. При этом, если параметры s^1, \dots, s^N , задачи (1.2.8) имеют самостоятельный физический смысл (например, при модельной или сеточной параметризации), такой пересчет не обязателен. Важным свойством характеристик неоднозначности (погрешности) конечно-параметрических задач является их зависимость от размерности N параметризации, определяющей размерность решения параметризованной обратной задачи. В разделе показано, что неоднозначность решений монотонно не убывает с ростом размерности сетки параметризации [Шимелевич, 2013а; Шимелевич, 2020]. В частности, из этого свойства следует условие неопределенности обратной задачи: увеличение размерности параметризации (детальности решения) влечет за собой увеличение неоднозначности (неопределенности) решений, что фактически не позволяет добиться желаемой детальности.

Ниже мы остановимся на исследовании основных свойств характеристик неоднозначности решений обратных задач в пространстве кусочно-постоянных решений.

2.4.1. Характеристики неоднозначности

Обратная задача (1.1.1) на множестве $G_{N,n} \subset G$ в пространстве G_N кусочно-постоянных решений сводится к решению уравнения вида (1.2.15) относительно вектора параметров $s = (s^1, \dots, s^N)$ (см. п. 1.2.2.3)

$$A_N s = f, \quad s \in S_N, \quad f \in F,$$

где A_N – оператор вида (1.2.16) параметризованной задачи, который действует из R^N в F ; S_N – множество априорных ограничений вида (1.2.3):

$$S_N = \{s : s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, \quad n = 1, \dots, N\}.$$

При сеточной параметризации искомые параметры s^1, \dots, s^N , задачи (1.2.15) равны значениям характеристики среды в ячейках сетки θ_N параметризации и поэтому имеют самостоятельный физический смысл; пересчет в соответствующие характеристики в пространстве кусочно-постоянных решений не требуется.

Классические характеристики неоднозначности. Апостериорная характеристика $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$, неоднозначности I типа (2.1.2) для найденного фиксированного решения s_δ , $\|A_N s_\delta - f\| \leq \delta$, уравнения (1.2.15) определяется решением оптимизационной задачи вида

$$\beta_1(N, f, s_\delta, \delta) = \max \left\{ \|s' - s_\delta\| : s' \in S_N, \|A_N s' - f\| \leq \delta \right\}. \quad (2.4.1)$$

Априорные характеристики неоднозначности $\beta_2(N, s, 2\delta)$, $\beta(N, 2\delta)$ типа (2.1.20), (2.1.23) выражаются через модуль непрерывности обратного оператора для задачи (1.2.15) (см. п. 2.1.2.2) и являются решениями следующих оптимизационных задач

$$\beta_2(N, s, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s' \in S_N, \|A_N s' - A_N s\| \leq 2\delta \right\}, \quad (2.4.2)$$

$$\beta(N, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s, s' \in S_N, \|A_N s' - A_N s\| \leq 2\delta \right\}. \quad (2.4.3)$$

Пусть s_δ, s'_δ являются δ -эквивалентными решениями, при заданных $f \in F$ и $\delta > 0$

$$\|As_\delta - f\| \leq \delta, \quad \|As'_\delta - f\| \leq \delta.$$

Тогда, согласно (2.1.39), справедливы неравенства

$$\|s'_\delta - s_\delta\| \leq \beta_1(N, f, s_\delta, \delta) \leq \beta_2(N, s_\delta, 2\delta) \leq \beta(N, 2\delta). \quad (2.4.4)$$

В соответствии с общим определением (2.1.58), при $a=1$ зададим полную разрешающую способность $r(N, \delta)$ метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15), как величину, обратную к $\beta(N, 2\delta)$

$$r(N, \delta) = \frac{1}{\beta(N, 2\delta)}. \quad (2.4.5)$$

При использовании равномерной нормы вида (1.3.24), расстояние $\|s' - s\|_0$ между векторами $s', s \in R^N$ определяется следующей величиной

$$\|\Delta s\|_0 = \|s' - s\|_0 = \frac{1}{D_s} \max_{1 \leq n \leq N} |s'^n - s^n|, \quad s', s \in R^N.$$

При такой норме, согласно (1.3.26), для характеристики $\beta(N, 2\delta)$ выполняется условие

$$0 \leq \beta(N, 2\delta) \leq 1, \quad (2.4.6)$$

а для $r(N, \delta)$ – условие

$$1 \leq r(N, \delta) \leq \infty, \quad (2.4.7)$$

Характеристики неоднозначности решений конечно-параметрической задачи (1.2.15) имеют простой физический смысл. Согласно (2.4.6), они определяют величину разброса (в долях интервала D_s) возможных δ -эквивалентных решений

уравнения (1.2.15) относительно найденного решения s_δ (рис. 2.4.1а). При этом величина $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ определяет интервал неоднозначности для фиксированного решения s_δ , найденного при фиксированных данных f с невязкой, не превышающей δ ; величина $\beta_2(N, s, 2\delta)$ определяет априорный интервал неоднозначности любого заданного решения s_δ , которое может быть найдено при каких-либо данных f и заданном δ ; $\beta(N, 2\delta)$ определяет априорный интервал неоднозначности любого решения s_δ , найденного при каких-либо данных f и заданном δ .

На рис. 2.4.1 по вертикали отложены значения компонент векторов параметров среды, $s^n, n=1, \dots, N$, по горизонтали – номера этих компонент. Приближенное решение s_δ задачи (1.2.15) представлено зеленой жирной кривой; голубые кривые определяют границы интервала неоднозначности $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$; черные штрихпунктирные и сплошные кривые – интервалы неоднозначности $\beta_2(N, s_\delta, 2\delta)$ и $\beta(N, 2\delta)$ соответственно. Рис. 2.4.1б иллюстрирует соответствующие отклики в полях. По вертикали отложены значения геофизического поля, по горизонтали – номера измерительных точек (пикетов). Заданное (измеренное) поле f представлено красной кривой, зеленая кривая характеризует синтезированное поле, горизонтальной штриховкой обозначена область, в которую могут попадать δ -эквивалентные поля (отклики от δ -эквивалентных решений), отличающиеся от заданного поля f не более чем на δ по заданной норме в пространстве данных.

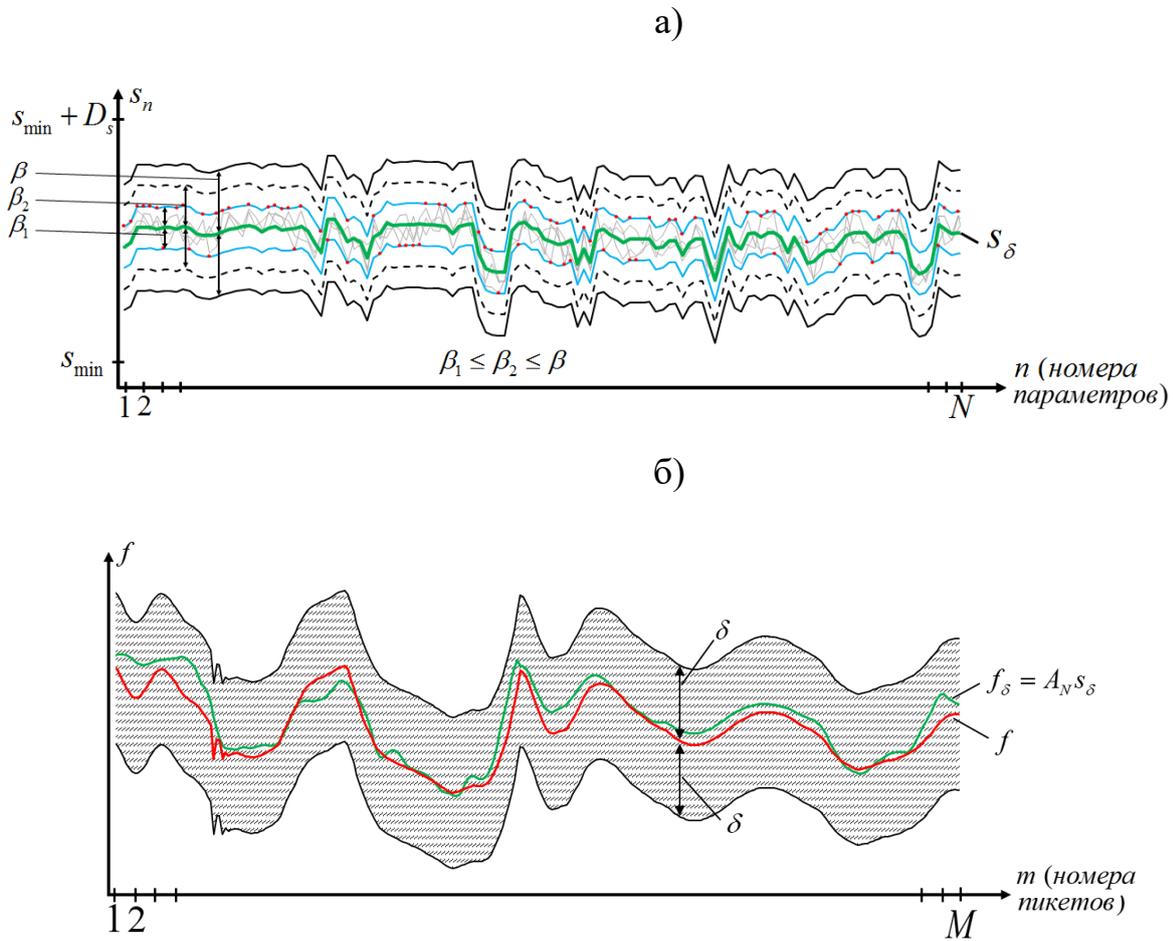


Рис. 2.4.1. Схематическое представление характеристик неоднозначности решений конечно-параметрических задач в пространстве решений (а) и в пространстве данных (б).

Смысл разрешающей способности $r(N, \delta)$ вида (2.4.5), с учетом (2.4.6), состоит в определении отношения максимально возможной «сто процентной» априорной неоднозначности (равной 1) к априорной неоднозначности конкретной рассматриваемой задачи с заданными A_N , f и δ . В разделе 2.5.3 определяется цифровая разрешающая способность, которая выражается целым числом.

Замечание 2.4.1. Здесь уместно провести аналогию характеристики $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ с доверительным интервалом оценки неизвестного параметра, определяемого с доверительной вероятностью, равной 1. Известно [Вентцель, 1969], что доверительный интервал можно рассматривать, как интервал значений искомого параметра, совместимых с опытными данными с заданной

доверительной вероятностью. Если известна погрешность δ данных f , то приближенные (эквивалентные) значения параметров s_δ^n , лежащие вне интервалов $\Delta^n = [s_\delta^n - \beta_1(N, f, s_\delta, \delta), s_\delta^n + \beta_1(N, f, s_\delta, \delta)]$, $n=1, \dots, N$, согласно (2.4.4), следует признать противоречащими входным данным f , а значения $s_\delta^n \in \Delta^n$ – совместимыми с ними. При этом, согласно определению величины $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$, точные значения параметров s_T^n , гарантированно (т.е. с вероятностью 1) лежат в пределах соответствующих интервалов Δ^n . Поэтому декартово произведение интервалов Δ^n , $n=1, \dots, N$, можно рассматривать как N -мерный детерминированный аналог доверительного интервала с доверительной вероятностью 1 приближенных значений параметров среды, находимых из уравнения (1.2.15), при фиксированных данных f с невязкой $\leq \delta$.

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому интервалы неоднозначности, определяемые характеристиками $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$, $\beta_2(N, s, 2\delta)$ и $\beta(N, 2\delta)$ для различных норм будут отличаться лишь множителем.

Локальные характеристики неоднозначности. Рассмотрим некоторую анализируемую подобласть $\bar{\Omega}_i \subseteq \Omega$ с фиксированными границами (см. рис. 2.4.2а,б), которая объединяет N^i ячеек фиксированной сетки параметризации θ_N общей размерности N . Следуя методологии п. 2.2.1, обозначим через $S_i^* \subset S_N$ подмножество векторов параметров, у которых компоненты $s^{i,1}, \dots, s^{i,N^i}$, отличны от нуля только для ячеек сетки параметризации, принадлежащих i -й анализируемой подобласти $\bar{\Omega}_i$, а через $S_i \subset S_N$ – подмножество векторов вида

$$S_i = \{s' : s' = s + \Delta s, \Delta s \in S_i^*\}, \quad (2.4.8)$$

где $s \in S_N$, $\Delta s \in S_i^*$ – заданные векторы.

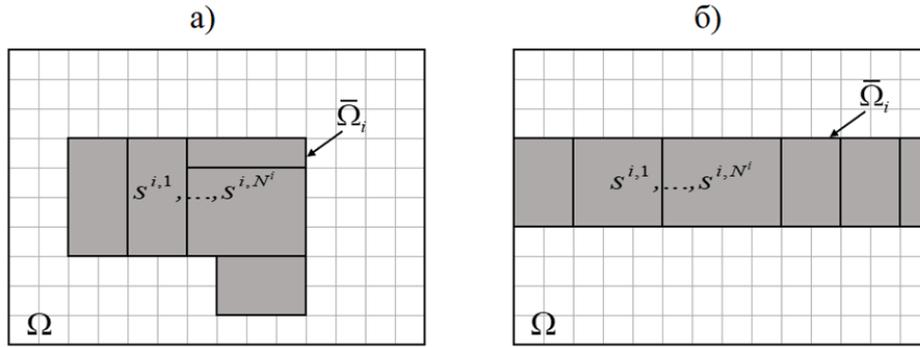


Рис.2.4.2. Схематическое представление различных анализируемых подобластей $\bar{\Omega}_i \subseteq \Omega$ (выделенных серым цветом); тонкими линиями обозначена сетка прямой задачи.

Локальные характеристики неоднозначности по подобласти $\bar{\Omega}_i$ (аналоги характеристик (2.4.1)–(2.4.3)) являются решениями экстремальных задач

$$\beta_1^i(N^i, f, s_\delta, \delta) = \max \left\{ \|s - s_\delta\| : s \in S_{\delta,i}, \|A_N s - f\| \leq \delta \right\}, \quad (2.4.9)$$

$$\beta_2^i(N^i, s, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s' \in S_i, \|A_N s' - A_N s\| \leq 2\delta \right\}, \quad (2.4.10)$$

$$\beta^i(N^i, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s \in S_N, s' \in S_i, \|A_N s' - A_N s\| \leq 2\delta \right\}, \quad (2.4.11)$$

где $S_{\delta,i} = \{s : s = s_\delta + \Delta s, \Delta s \in S_i^*\}$, $s_\delta \in S_N$ – фиксированное решение, $\|A_N s_\delta - f\| \leq \delta$.

Локальные характеристики (2.4.9)–(2.4.11) оценивают максимально возможные изменения компонент $s^{i,1}, \dots, s^{i,N^i}$, δ -эквивалентных решений s_δ, s'_δ в подобласти $\bar{\Omega}_i$ при фиксированной (для характеристик $\beta_1^i(N^i, f, s_\delta, \delta)$, $\beta_2^i(N^i, s, 2\delta)$) или произвольной (для $\beta^i(N^i, 2\delta)$) фоновой среде. Отсюда получаем, что, если $s_\delta \in S_N$ и $s'_\delta \in S_i$ являются δ -эквивалентными решениями (1.2.15) при заданных f и δ , то степень неоднозначности решения s_δ по подобласти $\bar{\Omega}_i$ оценивается неравенством

$$\|s'_\delta - s_\delta\| \leq \beta_1^i(N^i, f, s_\delta, \delta) \leq \beta_2^i(N^i, s_\delta, 2\delta) \leq \beta^i(N^i, 2\delta). \quad (2.4.12)$$

Как уже отмечалось выше (формула (2.2.1.2)), в качестве подобласти $\bar{\Omega}_i$ может быть принята i -я ячейка сетки параметризации, покрывающей исследуемую область Ω .

Характеристики неоднозначности двухкритериальной задачи.

Рассмотрим двухкритериальную задачу (1.2.17)

$$\begin{cases} A_{1,N}s = f_1, \\ A_{2,N}s = f_2, \end{cases} \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_1, f_2 \in F,$$

где $A_{1,N}$, $A_{2,N}$ – операторы вида (1.2.16) параметризованных задач, соответствующих используемым критериям.

Двухкритериальная задача является частным случаем задачи (1.1.14), и для нее справедливы результаты, представленные в разделе 2.3. Здесь мы приведем определения характеристик неоднозначности двухкритериальной задачи (1.2.17), которые будут использоваться в последующих главах при численных расчетах.

Апостериорная характеристика I типа (2.3.18) для фиксированного решения $s_\delta \in S_N$, $\|A_{1,N}s_\delta - f_1\| \leq \delta$, $\|A_{2,N}s_\delta - f_2\| \leq \delta$ двухкритериальной задачи (1.2.17) определяется следующим образом:

$$\beta_{1,C}(N, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta}) = \max \left\{ \|s - s_\delta\| : s \in S_N, \|A_{1,N}s - f_1\| \leq \delta_1, \|A_{2,N}s - f_2\| \leq \delta_2 \right\}. \quad (2.4.13)$$

Локальная апостериорная характеристика I типа (2.3.19) по подобласти $\bar{\Omega}_i$ для фиксированного решения s_δ двухкритериальной задачи (1.2.17) определяется как

$$\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta}) = \max \left\{ \|s - s_\delta\| : s \in S_{\delta,i}, \|A_{1,N}s - f_1\| \leq \delta_1, \|A_{2,N}s - f_2\| \leq \delta_2 \right\}, \quad (2.4.14)$$

где $S_{\delta,i} = \{s : s = s_\delta + \Delta s, \Delta s \in S_i^*\}$; $\bar{f} = (f_1, f_2)$; $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$.

Также для двухкритериальной задачи (1.2.17) приведем определения *априорной характеристики типа* (2.3.21):

$$\beta_C(2\bar{\delta}) = \max \left\{ \|s' - s\| : s', s \in S_N, \|A_{1,N}s' - A_{1,N}s\| \leq \delta_1, \|A_{2,N}s' - A_{2,N}s\| \leq \delta_2 \right\} \quad (2.4.15)$$

и локальной априорной характеристики типа (2.3.24) по подобласти $\bar{\Omega}_i$:

$$\begin{aligned} \beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) = \\ = \max \left\{ \|s' - s\| : s \in S_N, s' \in S_i, \|A_{1,N}s' - A_{1,N}s\| \leq \delta_1, \|A_{2,N}s' - A_{2,N}s\| \leq \delta_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

В дальнейшем будет использоваться локальная разрешающая способность $r_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ двухкритериальной задачи (1.2.17) по подобласти $\bar{\Omega}_i$, которая в соответствии с общим определением разрешающей способности (2.4.5) конечно-параметрической задачи выражается через $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ следующим образом:

$$r_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) = \frac{1}{\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})}. \quad (2.4.17)$$

Если $s_\delta \in S_N$ и $s'_\delta \in S_i$ являются δ -эквивалентными решениями при заданных $f \in F$ и $\delta > 0$, то степень неоднозначности решения s_δ двухкритериальной задачи (1.2.17) по подобласти $\bar{\Omega}_i$ оценивается неравенствами

$$\|s'_\delta - s_\delta\| = \|\Delta s\| \leq \beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta}) \leq \beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}). \quad (2.4.18)$$

Пусть в пределах всей области Ω выделено I подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, совпадающих с ярусами сетки параметризации, покрывающей область исследований Ω , объединение которых составляет всю область $\Omega = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i$ (рис. 2.4.3).

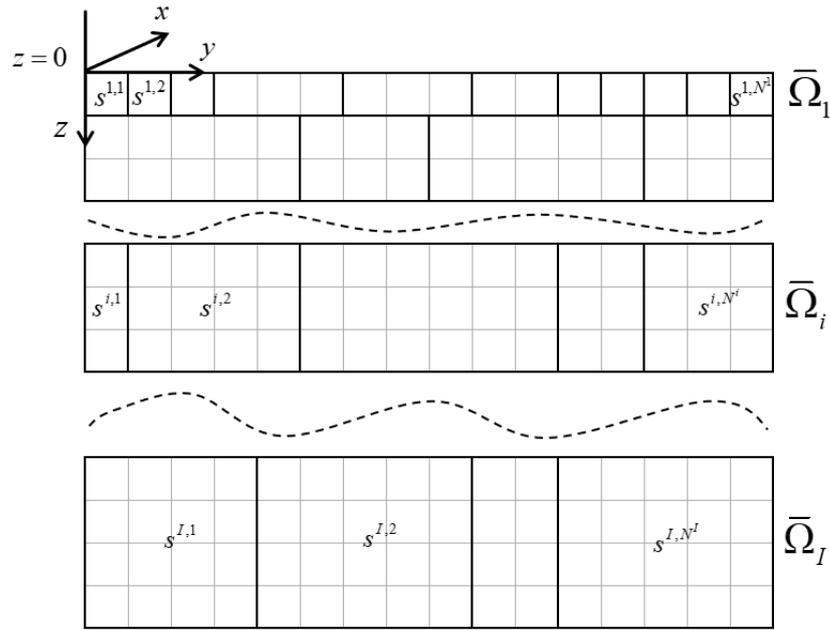


Рис.2.4.3. Схематическое представление набора подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$,

объединение которых составляет всю область $\Omega = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i$.

Для каждой выделенной подобласти $\bar{\Omega}_i$ могут быть определены локальные характеристики рассмотренных выше типов. В соответствии с п. 2.2.1.3 для каждого типа характеристик неоднозначности определяются векторные характеристики по всей совокупности выделяемых подобластей $\bar{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, I$, которые, как уже отмечалось выше, более детально, чем скалярные, характеризуют степень неоднозначности решений обратной задачи в исследуемой области Ω .

2.4.2. Зависимость неоднозначности решений от размерности сеточной параметризации

Напомним, что множество $G_{N,\eta}$ априорных ограничений (1.2.14) исходной задачи (1.1.1), рассматриваемой в пространстве кусочно- постоянных функций при

сеточной параметризации $\Pi_{N,\eta}(s,r)$ вида (1.2.5), определяется заданной сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω , и естественными ограничениями (1.2.2), (1.2.3) (см. п. 1.2.2.3). Ниже показывается, что степень неоднозначности решений обратной задачи (1.2.15), к которой сводится задача (1.1.1) на множестве $G_{N,\eta}$, монотонно не возрастает с уменьшением размерности N сетки θ_N параметризации.

Для удобства изложения выпишем еще раз сеточную аппроксимационную конструкцию (1.2.5):

$$g(r) = \Pi_{N,\eta}(s,r) = \sum_1^N s^n \eta_{0,n}(r), \quad s \in S_N, \quad r \in \Omega. \quad (1.2.5)$$

Определим некоторую *опорную сетку параметризации* θ_{N_0} достаточно большой размерности N_0 (в качестве такой сетки может быть использована, например, конечно-разностная сетка, обеспечивающая корректную разрешимость прямой задачи). Обозначим через $G_{N_0} \subset G$ линейное нормированное пространство кусочно-постоянных функций, представимых в виде (1.2.5) при $N = N_0$:

$$G_{N_0} = \left\{ g : g = \Pi_{N_0,\eta} s, \quad s \in R^{N_0} \right\}. \quad (2.4.19)$$

Определим множество $G_{N_0,\eta} \subset G_{N_0}$ в пространстве G_{N_0}

$$G_{N_0,\eta} = \left\{ g : g = \Pi_{N_0,\eta} s, \quad s \in S_{N_0} \subset R^{N_0} \right\}, \quad (2.4.20)$$

где

$$S_{N_0} = \left\{ s : s \in R^{N_0}, \quad s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, \quad n = 1, \dots, N_0 \right\}. \quad (2.4.21)$$

В соответствии с общей схемой, изложенной в п. 1.2.2.3, обратная задача (1.1.1) на множестве $G_{N_0,\eta}$ сводится к уравнению типа (1.2.15) в пространстве параметров:

$$A_0 s = f, \quad s \in S_{N_0} \subset R^{N_0}, \quad f \in F, \quad (2.4.22)$$

где $A_0 = \text{АП}_{N_0,\eta}$ – оператор, который действует из R^{N_0} в F по правилу

$$A_0 s = A(\Pi_{N_0, \eta} s). \quad (2.4.23)$$

На основе опорной сетки θ_{N_0} построим новую сетку параметризации θ_{N_1} , $N_1 = N_0 - 1$, у которой m -я и $(m+1)$ -я ячейки объединены в одну, а остальные ячейки совпадают с ячейками сетки θ_{N_0} . Объединение m -й и $(m+1)$ -й ячеек опорной сетки θ_{N_0} в одну ячейку новой сетки θ_{N_1} эквивалентно тому, что в (1.2.5) коэффициенты, соответствующие объединенным ячейкам, равны: $s^m = s^{m+1}$. При этом условии новые векторы коэффициентов фактически являются элементами подпространства R^{N_1} : $s \in R^{N_1} \subset R^{N_0}$, $N_1 = N_0 - 1$. Таким образом, новая сетка параметризации θ_{N_1} порождает подпространство кусочно-постоянных функций $G_{N_1} \subset G_{N_0}$ размерности $N_1 = N_0 - 1$.

Определим множество в пространстве G_{N_1}

$$G_{N_1, \eta} = \left\{ g : g = \Pi_{N_0, \eta} s, s \in S_{N_1} \subset R^{N_1} \subset R^{N_0} \right\}, \quad (2.4.24)$$

где

$$S_{N_1} = \left\{ s : s \in R^{N_0}, s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, n = 1, \dots, N_0, s^m = s^{m+1} \right\}. \quad (2.4.25)$$

Новое множество априорных ограничений S_{N_1} определяется новой сеткой параметризации, при сохранении естественных априорных ограничений (1.2.2), (1.2.3). Из сравнения (2.4.21) и (2.4.25) следует, что

$$S_{N_0} \supset S_{N_1}. \quad (2.4.26)$$

Новая задача на множестве $G_{N_1, \eta}$ в пространстве параметров сводится к уравнению

$$A_0 s = f, s \in S_{N_1} \subset R^{N_0}, f \in F.$$

Априорные характеристики $\beta(N_0, 2\delta)$ и $\beta(N_1, 2\delta)$ для уравнений (2.4.22), (2.4.26) определяются решениями экстремальных задач типа (2.4.3):

$$\beta(N_0, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s, s' \in S_{N_0}, \|A_{N_0} s' - A_{N_0} s\| \leq 2\delta \right\}, \quad (2.4.27)$$

$$\beta(N_1, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s, s' \in S_{N_1}, \|A_{N_0} s' - A_{N_0} s\| \leq 2\delta \right\}. \quad (2.4.28)$$

Так как, $S_{N_1} \subset S_{N_0}$, то справедливо неравенство

$$\beta(N_0, \delta) \geq \beta(N_1, \delta), \quad N_0 > N_1. \quad (2.4.29)$$

Данный результат верен при любом числе объединяемых ячеек сетки параметризации θ_{N_0} .

Определение 2.4.1. Обозначим через $\Theta_\nu(N_0)$ конечный упорядоченный набор последовательно укрупняющихся сеток параметризации θ_{N_k} , $k = 0, \dots, K$, размерностей $N_0 > N_1 > \dots > N_K$, покрывающих исследуемую область Ω ; при этом каждая $(k + 1)$ -я сетка образуется путем объединения по какому-либо заданному ν -му правилу некоторого числа ячеек k -й сетки в одну ячейку (сетка $\theta_{N_0} \in \Theta_\nu(N_0)$ максимальной размерности N_0 совпадает с заданной опорной сеткой). Данный принцип построения набора $\Theta_\nu(N_0)$ последовательно укрупняющихся сеток параметризации далее будем называть *основным*.

Согласно вышесказанному, каждая новая сетка параметризации $\theta_{N_{k+1}} \in \Theta_\nu(N_0)$ размерности $N_{k+1} < N_k$ порождает новое множество априорных ограничений $S_{N_{k+1}}$, которое является подмножеством S_{N_k} :

$$S_{N_k} \supset S_{N_{k+1}}, \quad N_k > N_{k+1}, \quad k = 0, \dots, K - 1. \quad (2.4.30)$$

Отсюда следует, что для любой пары задач вида (1.2.15), рассматриваемых на множествах $S_{N_{k+1}}, S_{N_k}$ выполняется неравенство

$$\beta(N_k, 2\delta) \geq \beta(N_{k+1}, 2\delta), \quad N_k > N_{k+1}, \quad (2.4.31)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.4.1. [Шимелевич, 2020]. *Рассмотрим семейство обратных задач (1.2.15) на множествах $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, $k = 0, 1, \dots, K$, порождаемых сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_\nu(N_0)$ при сохранении естественных априорных ограничений (1.2.2), (1.2.3), и зафиксируем $\delta > 0$. Справедливы следующие неравенства:*

$$\beta(N_0, 2\delta) \geq \beta(N_1, 2\delta) \geq \dots \geq \beta(N_k, 2\delta) \geq \dots \geq \beta(N_K, 2\delta) \geq \beta(1, 2\delta), \quad (2.4.32)$$

$$N_0 > N_1 > \dots > N_k \dots > N_K \geq 1,$$

где $\beta(N_k, 2\delta)$, $k = 0, \dots, K$ – априорные характеристики неоднозначности II типа (2.4.3), определенные для данного семейства задач при различных $N_0 > N_1 > \dots > N_k \dots > N_K \geq 1$; $\beta(1, 2\delta)$ – априорная характеристика задачи, рассматриваемой на сетке параметризации размерности $N=1$, у которой все ячейки опорной сетки объединены в одну ячейку, совпадающую со всей областью Ω .

На рис. 2.4.4 схематически представлен вид зависимости характеристики $\beta(N, 2\delta)$ от N при фиксированном δ (на самом деле зависимость $\beta(N, 2\delta)$ от N определяется функцией целочисленного аргумента N). Величина $\beta(1, 2\delta)$ может быть сравнительно легко численно рассчитана на основе решения прямой краевой задачи для однородной исследуемой области Ω .

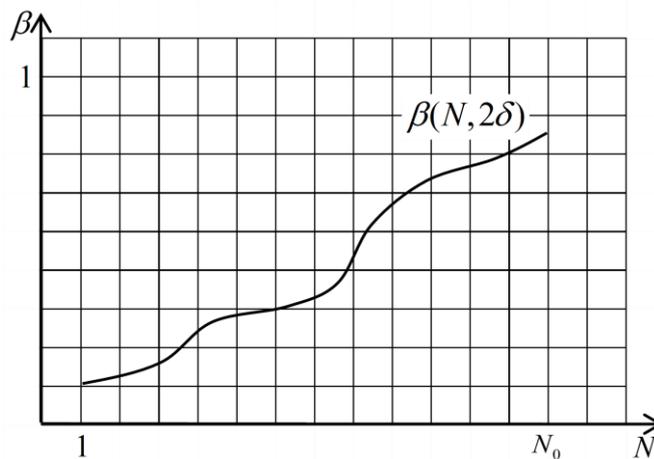


Рис. 2.4.4. Схематический вид типичной зависимости характеристики $\beta(N, 2\delta)$ от N при фиксированном δ .

Замечание 2.4.2. Каждая сетка параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_\nu(N_0)$, покрывающая исследуемую область Ω , и естественные априорные ограничения (1.2.2), (1.2.3)

порождают компактное подмножество $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, которому соответствует подмножество в пространстве G_{N_k} кусочно-постоянных функций вида

$$G_{N_k, \eta} = \left\{ g : g = \Pi_{N_k, \eta} s, s \in S_{N_k} \subset R^{N_k} \subset R^{N_0} \right\}$$

С уменьшением размерности $N_{k+1} < N_k$ новой сетки параметризации $\theta_{N_{k+1}}$, за счет объединения ячеек, растет число ограничений на коэффициенты и уменьшается число независимых коэффициентов в представлении (1.2.5), что приводит к уменьшению $N_{k+1} < N_k$ размерности подпространства $G_{N_{k+1}}$ кусочно-постоянных функций и соответственно – к сужению множества $G_{N_{k+1}, \eta}$ априорных ограничений относительно множества $\bar{G}_{N_k, \eta}$

$$G_{N_k, \eta} \supset G_{N_{k+1}, \eta}, N_k > N_{k+1}, k = 0, 1, \dots, K-1. \quad (2.4.33)$$

Отсюда следует, что исходная обратная задача (1.1.1) при использовании сеток параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_v(N_0)$ рассматривается на последовательности сужающихся компактов $G_{N_k, \eta} \supset G_{N_{k+1}, \eta}$, $N_k > N_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, поэтому характеристики неоднозначности $\bar{\beta}(N_k, 2\delta)$ соответствующих задач, согласно свойству (2.1.37), монотонно не возрастают:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(N_0, \delta) \geq \bar{\beta}(N_1, \delta) \geq \dots \geq \bar{\beta}(N_k, \delta) \geq \dots \geq \bar{\beta}(N_K, \delta) \geq \bar{\beta}(1, 2\delta), \\ N_0 > N_1 > \dots > N_k \dots > N_K \geq 1. \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Таким образом, свойство монотонного невозрастания характеристик неоднозначности при уменьшении размерности параметризации за счет объединения ячеек сетки параметризации выполняется также в пространстве кусочно-постоянных функций. В дальнейшем мы ограничимся исследованием свойств характеристик неоднозначности в пространстве параметров R^N , так как при сеточной параметризации параметры имеют самостоятельный физический смысл и все численные расчеты, проводимые далее в работе, ориентированы на решение именно этой задачи.

Апостериорные характеристики $\beta_1^{\max}(N_0, f, \delta)$ и $\beta_1^{\max}(N_1, f, \delta)$ II типа (2.1.6) для уравнений (1.2.15), рассматриваемых на множествах S_{N_0} и S_{N_1} вида (2.4.21) и (2.4.25) соответственно, определяются решениями экстремальных задач

$$\beta_1^{\max}(N_0, f, \delta) = \max \left\{ \| s' - s \| : s', s \in S_{f, \delta}^0 \right\}, \quad (2.4.35)$$

$$\beta_1^{\max}(N_1, f, \delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s', s \in S_{f, \delta}^1 \right\}, \quad (2.4.36)$$

где $S_{f, \delta}^0, S_{f, \delta}^1$ – множества δ -эквивалентных решений

$$S_{f, \delta}^0 = \left\{ s : s \in S_{N_0}, \|A_{N_0}s - f\| \leq \delta \right\}, \quad (2.4.37)$$

$$S_{f, \delta}^1 = \left\{ s : s \in S_{N_1}, \|A_{N_0}s - f\| \leq \delta \right\}. \quad (2.4.38)$$

Так как $S_{N_1} \subset S_{N_0}$, $N_0 > N_1$, то для характеристик $\beta_1^{\max}(N_0, f, \delta)$ и $\beta_1^{\max}(N_1, f, \delta)$ выполняется неравенство, аналогичное (2.4.29):

$$\beta_1^{\max}(N_0, f, \delta) \geq \beta_1^{\max}(N_1, f, \delta), \quad N_0 > N_1. \quad (2.4.39)$$

Таким образом, верна следующая

Теорема 2.4.2. *Рассмотрим семейство обратных задач (1.2.15) при фиксированных f и δ на множествах $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, $k = 0, \dots, K$, порождаемых сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_\nu(N_0)$ при сохранении естественных априорных ограничений (1.2.2), (1.2.3). Справедливы следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} \beta_1^{\max}(N_0, f, \delta) &\geq \beta_1^{\max}(N_1, f, \delta) \geq \dots \geq \beta_1^{\max}(N_k, f, \delta) \geq \dots \geq \\ &\beta_1^{\max}(N_K, f, \delta) \geq \beta_1^{\max}(1, f, \delta), \quad N_0 > N_1 > \dots > N_k \dots > N_K \geq 1, \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

где $\beta_1^{\max}(N_k, f, \delta)$, $k = 0, \dots, K$ – апостериорные характеристики неоднозначности II типа (2.1.6), определенные для данного семейства задач, при различных $N_0 > N_1 > \dots > N_k \dots > N_K \geq 1$.

Отметим, что на основе рассуждений, приведенных в Замечании 2.4.2, нетрудно убедиться в том, что неравенства (2.4.40) выполняются также и для апостериорных характеристик II типа семейства обратных задач (1.1.1), рассматриваемых при фиксированных f и δ на множествах $\bar{G}_{N_k, \eta}$, $k = 0, \dots, K$, кусочно-постоянных функций, образующих цепочку сужающихся компактных подмножеств вида (2.4.33).

Полученные выше результаты верны и для локальных априорных и апостериорных характеристик неоднозначности II типа (в том числе и для многокритериальных задач). Например, для локальной априорной характеристики II типа (2.4.11) по заданной подобласти $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ справедлива

Теорема 2.4.3. *Рассмотрим семейство обратных задач (1.2.15) при фиксированном $\delta > 0$ на множествах $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, $k = 0, \dots, K$, порождаемых сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_v(N_0)$, и зафиксируем некоторую подобласть $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$. Справедливы следующие неравенства:*

$$\beta^i(N_0^i, 2\delta) \geq \beta^i(N_1^i, 2\delta) \geq \dots \beta^i(N_k^i, 2\delta) \geq \dots \beta^i(N_K^i, 2\delta) \geq \beta^i(1, 2\delta), \quad (2.4.41)$$

$$N_0^i > N_1^i > \dots N_k^i > \dots > N_K^i \dots \geq 1,$$

где $\beta^i(N_k^i, 2\delta)$, $k = 0, \dots, K$, – локальные априорные характеристики неоднозначности II типа (2.4.11) по подобласти $\bar{\Omega}_i$, определенные для данного семейства задач при различных N_k^i ; N_k^i – число ячеек k -й сетки параметризации, покрывающих выделенную подобласть $\bar{\Omega}_i$; N_0^i – число ячеек опорной сетки θ_{N_0} параметризации, покрывающих выделенную подобласть $\bar{\Omega}_i$.

Приведем также результат, который будет часто использоваться в дальнейшем, для локальной априорной характеристики типа (2.4.16) по подобласти $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ в случае двухкритериальной задачи (1.2.17).

Теорема 2.4.4. *Рассмотрим семейство обратных задач (1.2.17) при фиксированном $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$ на множествах $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, $k = 0, \dots, K$, порождаемых сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_v(N_0)$. Зафиксируем некоторую подобласть $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$. Справедливы следующие неравенства:*

$$\beta_C^i(N_0^i, 2\bar{\delta}) \geq \beta_C^i(N_1^i, 2\bar{\delta}) \geq \dots \beta_C^i(N_k^i, 2\bar{\delta}) \geq \dots \beta_C^i(N_K^i, 2\bar{\delta}) \geq \beta_C^i(1, 2\bar{\delta}) \quad (2.4.42)$$

$$N_0^i > N_1^i > \dots N_k^i > \dots > N_K^i \dots \geq 1,$$

где $\beta_C^i(N_k^i, 2\bar{\delta})$, $k = 0, \dots, K$, – локальные априорные характеристики неоднозначности II типа (2.4.16) по подобласти $\bar{\Omega}_i$ для двухкритериальной задачи (1.2.17), определенные для данного семейства задач при различных N_k^i ; N_k^i – число ячеек k -й сетки параметризации, покрывающих выделенную подобласть $\bar{\Omega}_i$; N_0^i – число ячеек опорной сетки θ_{N_0} параметризации, покрывающих выделенную подобласть $\bar{\Omega}_i$.

Доказательства Теорем 2.4.3, 2.4.4 проводятся по схеме, приведенной выше. Результаты для двухкритериальной задачи обобщаются на многокритериальные задачи с числом критериев больше 2.

Замечание 2.4.3. Правила, по которому последовательно укрупняются ячейки опорной сетки θ_{N_0} (например, только по вертикали или только по горизонтали), определяют различные классы сеток параметризации и соответствующие наборы $\Theta_\nu(N_0)$, $\nu = 1, 2, \dots$. При этом рассмотренные выше неравенства будут выполняться для любого заданного набора при сохранении указанного выше **основного** принципа укрупнения ячеек.

Все рассмотренные в разделе свойства характеристик неоднозначности справедливы для любых конечно-элементных аппроксимаций среды, допускающих представление искомым характеристикам в виде суммы финитных функций в области Ω , если параметризация строится по основному принципу.

□

Размерность N сетки параметризации является интегральной характеристикой детальности решения обратной задачи при фиксированном размере исследуемой области Ω . Чем больше N , тем точнее может быть аппроксимирована искомая характеристика исследуемой среды в исследуемой области Ω с помощью ступенчатых функций. Поэтому для исследователя, решающего обратную задачу, желательно использовать сетку параметризации θ_N максимальной размерности N . Однако как следует из результатов п. 2.4.2

увеличение размерности N параметризации (детальности решения) неизбежно влечет за собой увеличение неоднозначности получаемых решений, что фактически не позволяет добиться желаемого результата: более детальные решения являются неопределенными и хуже различимыми (разрешимыми). Поэтому детальность решения должна быть согласована с уровнем неоднозначности решений при постановке обратной задачи. В диссертационной работе это делается на основе эффективной параметризации (п.2.5.1).

Замечание 2.5.1. Иногда для описания указанного эффекта рассматривается условие неопределенности решений [Дмитриев, 2012; Шимелевич, 2013а], которое следует из неравенств (2.4.32)

$$\frac{N}{\beta(N, 2\delta)} \leq c(\delta), \quad (2.4.43)$$

где $c(\delta)$ – коэффициент неопределенности задачи при заданном значении δ . Так как $N \leq N_0$ и $\beta(N, 2\delta) \geq \beta(1, 2\delta)$, то

$$\frac{N}{\beta(N, 2\delta)} \leq \frac{N_0}{\beta(1, 2\delta)} = c(\delta). \quad (2.4.44)$$

Подставляя выражение (2.4.5) для разрешающей способности в (2.4.43), получаем условие неопределенности задачи в терминах разрешающей способности метода

$$N \cdot r(N, \delta) \leq c(\delta). \quad (2.4.45)$$

Условие типа (2.4.45) было введено в работе [Дмитриев, 2012] для линейных и линеаризованных задач и названо условием неопределенности геофизического метода, ассоциированного с рассматриваемым уравнением обратной задачи:

$$d_g \cdot r_g \leq c_1(\delta, g), \quad (2.4.46)$$

где $c_1(\delta, g)$ – коэффициент неопределенности линеаризованной задачи в точке g ; величина

$$r_g = \frac{1}{\|A_{L,g}^{-1}\|} \quad (2.4.47)$$

является оценкой полной разрешающей способности метода в точке $g \in G_1$ в линейном приближении; $A_{L,g}^{-1}$ – норма обратного оператора линеаризованной задачи; d_g – характеристика детальности решения линеаризованной обратной задачи (1.1.1), которая отражает близость точного и приближенного обратных

операторов линеаризованной задачи (1.1.1). Так как размерность N сетки параметризации является интегральной характеристикой детальности решения обратной задачи (1.2.15) в общем нелинейном случае, то условия (2.4.43), (2.4.45) обобщают условие неопределенности Дмитриева на нелинейный случай.

2.5. Регуляризация задачи на основе оценок локального модуля непрерывности обратного оператора.

Условно-корректная задача (1.2.15) является теоретически устойчивой, и погрешность ее решения стремится к 0 при неограниченном уменьшении погрешности δ_0 правой части, однако, при конечной (даже малой) величине δ_0 погрешность решения может оказаться достаточно большой. Это означает, что задача, будучи теоретически корректной и устойчивой, является плохо обусловленной, практически неустойчивой и нуждается в дополнительной «практической регуляризации». Так как на практике всегда $\delta_0 \neq 0$, то уменьшить возможную погрешность (неопределенность) приближенных решений можно только за счет сужения множества допустимых решений на основе привлечения дополнительной априорной информации, как это делается и в случае *некорректных задач*. При отсутствии геофизической дополнительной информации о строении исследуемой среды используется информация о каких-либо свойствах решения.

Общий формализованный подход к решению обратных задач в конечно-параметрических классах сред реализуется в *регуляризованном методе подбора* на основе минимизации сглаживающего функционала [Гончарский и др., 1978; Тихонов, Арсенин, 1979]. При этом на основе гипотетической априорной информации о строении среды или функциональных свойств искомых решений (гладкость, скорость изменчивости и др.) в алгоритм инверсии вводятся сглаживающие функционалы, обеспечивающие сужение множества допустимых

решений и устойчивость решений. Вклад сглаживающего функционала в целевой функционал регулируется параметром регуляризации, который определяется по согласованию с погрешностью данных. Примеры регуляризованных постановок задач геоэлектрики в конечно-параметрических классах сред приводятся, например, в работе [Тихонов и др., 1983; Жданов и др., 1983; Бердичевский, Дмитриев, 2009].

Помимо общего подхода применяются специальные *адаптивные методы регуляризации* [Тихонов и др., 1983; Тихонов и Арсенин, 1979; Дмитриев, 2012] в случаях, когда существует естественный параметр задачи, влияющий на устойчивость задачи: размерность матрицы задачи, шаг дифференцирования, число членов рядов Фурье, число итераций и др. Естественный параметр является аналогом параметра регуляризации и определяется по согласованию с уровнем погрешности данных. Примеры регуляризации обратной задачи с параметром рассмотрены в работах [Тихонов и Арсенин, 1979; Тихонов и др., 1983; Дмитриев, 2012].

Обратные конечно-параметрические задачи в общем случае всегда зависят от параметра, определяющего размерность параметризации задачи и соответствующую ей размерность решения. Выше, на примере кусочно-постоянных решений было показано (п.2.4.2, 2.4.3), что уменьшить неоднозначность и устойчивость решений при фиксированных геофизических априорных ограничениях, можно только путем сокращения размерности параметризации и соответствующего сужения множества допустимых решений задачи. Например, в линейных обратных задачах, связанных с решением СЛАУ, параметром является ранг r матрицы. Распространенный на практике метод априорного сужения множества допустимых решений задач для обеспечения устойчивости, основан на методах оптимальной низкоранговой аппроксимации (Low-rank approximation), при которой, в соответствии с заданными критериями, исходная заданная матрица ранга r аппроксимируется матрицей пониженного ранга $k < r$ [Eckart, Young, 1936; Mirsky, 1960; Markovsky, 2008]. Примером

является алгоритм регуляризации, основанный *на усечении сингулярного спектра матрицы* по номеру k (k -truncated SVD), определяемому в соответствии с различными критериями и согласованному с уровнем погрешности правой части, рассмотренный в работах [Hansen, 1987; Годунов и др., 1988; Шишленин, 2016; Ревунова 2016]. В линейных задачах *геопотенциальных* полей [Аронов, 1990] коэффициенты истокообразных аппроксимационных конструкций строятся на основе физических соображений таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечивать практическую устойчивость применяемых вычислительных схем с, другой – достаточную детальность решений. При этом число уравнений N в процессе решения СЛАУ сокращается по согласованию с числом обусловленности матрицы, структурой и погрешностью данных. В работе [Варенцов, 2002] размерность параметризации, при решении линеаризованной задачи геоэлектрики, корректируется итерационно в ходе минимизации функционала невязки, на основе критериев обусловленности решаемой ньютоновской СЛАУ и некоторых других статистических и эвристических критериев.

В нелинейных конечно-параметрических задачах геоэлектрики необходимость априорного понижения размерности решения обратной задачи диктуется физикой задачи и свойствами используемого квазистационарного ЭМ поля, которое резко (в среднем по экспоненциальному закону) затухает с глубиной исследований. В результате этого чувствительность наблюдаемых на поверхности Земли характеристик поля к изменениям характеристик среды на глубине, а значит и разрешающая способность метода, резко падают, а неоднозначность определения физических параметров этих фрагментов растет и может достигать 100% на больших глубинах. Поэтому для обеспечения практической устойчивости решений равномерно по глубине исследований сетка параметризации должна укрупняться с глубиной. При этом важно отметить, *что* даже если каким-либо методом мы найдем решение обратной задачи на мелкой сетке большой размерности, неоднозначность (погрешность) этого решения при даже при малом $\delta_0 \neq 0$ может оказаться весьма высокой, что лишает такие решения практического смысла. На

рис. 2.4.5 представлен фрагмент алгоритма расчета локальной априорной характеристики $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ типа (2.4.16) двухкритериальной задачи (1.2.17) для глубоко расположенного слоя опорной сетки, представленной на рис. 3.2.1; использовались функционалы расстояния: в пространстве данных – вида (1.3.40), в пространстве решений – вида (1.3.25) (подробно алгоритм расчета характеристик неоднозначности изложен в Главе 3). Из рисунка видно, что при всех возможных $s', s \in S_{N_0}$ и $0 < \|\Delta s\| = \|s' - s\| \leq 1$ относительное изменение отклика среды $\|\Delta f\| = \|A_{N_0} s' - A_{N_0} s\|$ не превышает 0.035. Из определения локальной априорной характеристики $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ следует, что погрешность определения параметров яруса равна 100% при любой среде, окружающей исследуемый ярус, и относительной погрешности правой части более 3.5%, т.е. решение $s \in S_{N_0}$ обратной задачи в пределах рассматриваемого яруса данной сетки значений может принимать любые значения.

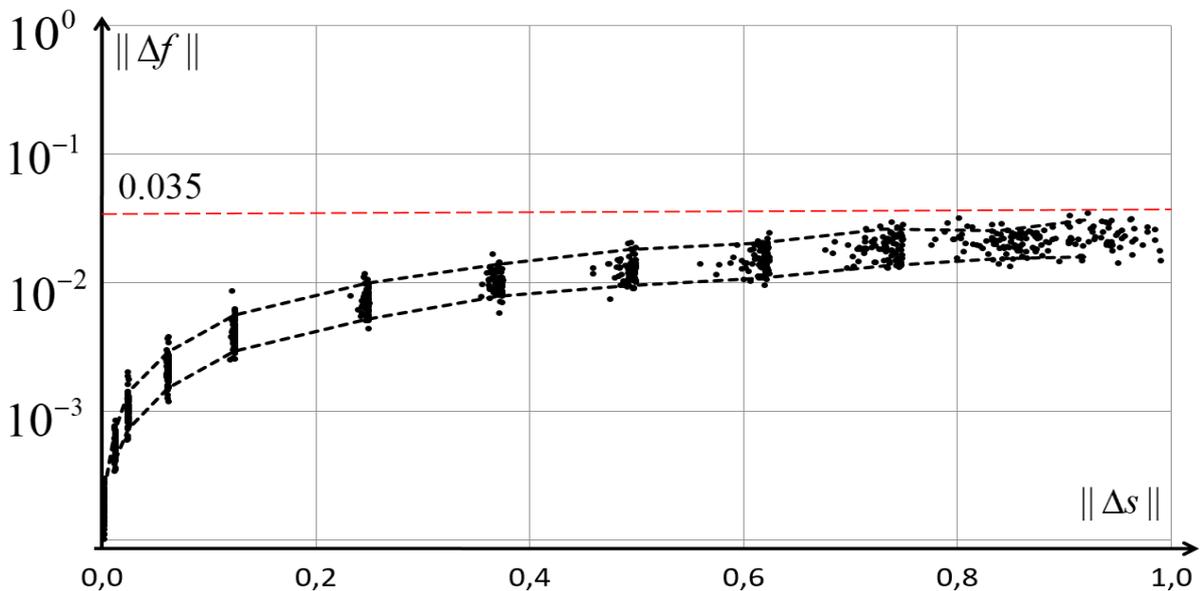


Рис. 2.4.5. Пример слоя среды, параметры которого определяются со 100% неоднозначностью при относительной погрешности данных 3.5%; объем выборки – 3400 прямых задач.

Из вышесказанного следует, что обратная задача геоэлектрики требует специальной, адаптированной к ее особенностям практической регуляризации,

обеспечивающей компромисс между требованиями к точности аппроксимации искомой характеристики среды и устойчивости решения обратной задачи с учетом глубины исследований. Этот компромисс реализуется на основе решения задачи эффективной параметризации (см. п.1.2.1, III принцип параметризации).

2.5.1. Эффективная сеточная параметризация

Рассмотрим задачу *эффективной параметризации* среды в классе кусочно-постоянных решений применительно к геоэлектрике [Шимелевич, 2013а; Шимелевич, 2013б; Шимелевич и др., 2013а, 2013б; Шимелевич, 2020]:

- построение оптимальной сетки параметризации, имеющей максимальную послойную размерность (детальность), при условии, что локальные априорные оценки неоднозначности (погрешности) решений не превышают заданной величины равномерно по всей глубине исследований, при заданном уровне допустимой невязки (погрешности данных).

Следуя логике п. 2.4.2, зададимся некоторой опорной сеткой параметризации θ_{N_0} достаточно большой размерности N_0 и некоторым ν -м правилом построения набора $\Theta_\nu(N_0)$ сеток параметризации. Задачу (1.2.15) будем изначально рассматривать на множестве $S_{N_0} \subset R^{N_0}$ вида (2.4.21), порождаемом опорной сеткой параметризации θ_{N_0} максимальной размерности N_0 и естественными априорными ограничениями вида (1.2.2), (1.2.3) при $N = N_0$:

$$S_{N_0} = \left\{ s : s \in R^{N_0}, s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, n = 1, \dots, N_0 \right\}.$$

Зафиксируем $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим сначала задачу построения *оптимальной сетки параметризации* $\theta_{N_{\max}} \in \Theta_\nu(N_0)$ максимальной размерности $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0) \leq N_0$, и соответствующего этой сетке максимально широкого подмножества $S_{N_{\max}} \subset S_{N_0}$

при условии, что априорная погрешность решений задачи (1.2.15) на $S_{N_{\max}}$ при заданном уровне погрешности данных δ_0 априори не будет превышать ε_0

$$\beta(N_{\max}, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0. \quad (2.5.1)$$

Эта задача является частным случаем рассмотренной в п. 2.1.2.6 задачи построения оптимального подкомпакта при ограничении на неоднозначность решений. Размерность $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$ оптимальной сетки $\theta_{N_{\max}}$, является решением целочисленной экстремальной задачи (рис. 2.5.1):

$$N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0) = \max \{ N : \beta(N, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0, N \leq N_0 \}. \quad (2.5.2)$$

Априорные характеристики $\beta(N, 2\delta_0)$ вида (2.4.3) в экстремальной задаче (2.5.2) определяются для семейства обратных задач (1.2.15), рассматриваемых при различных $N = N_k > N_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, на цепочке последовательно сужающихся множеств

$$S_{N_0} \supset S_{N_1} \supset \dots \supset S_{N_k} \supset S_{N_{k+1}} \dots \supset S_{N_K},$$

порождаемых соответствующими сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta_\nu(N_0)$ из заданного ν -го набора сеток $\Theta_\nu(N_0)$.

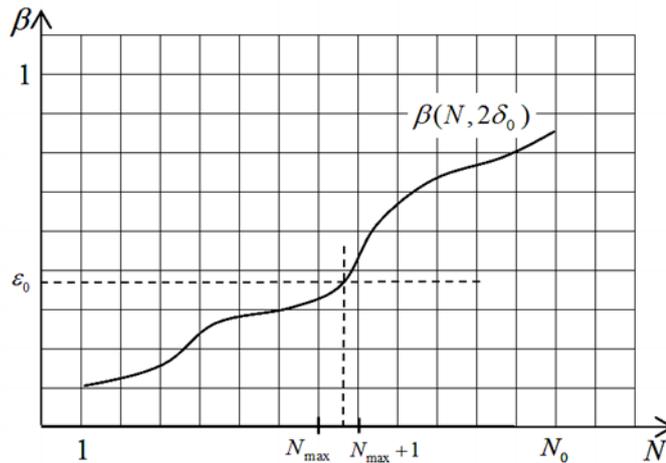


Рис. 2.5.1. Схематическая иллюстрация определения размерности $N_{\max}(\varepsilon_0, \delta_0)$

оптимальной сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}$.

В результате решения экстремальной задачи (2.5.2), при сохранении общих естественных априорных ограничений задачи $s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s$, получаем оптимальное подмножество $S_{N_{\max}} \subset S_{N_0}$ априорных ограничений размерности $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0) < N_0$,

$$S_{N_{\max}} = \left\{ s : s \in R^{N_{\max}}, s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, n = 1, \dots, N_{\max} \right\}. \quad (2.5.3)$$

Исследуем некоторые свойства $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$. С ростом δ_0 растет величина $\beta(N, 2\delta_0)$, поэтому при фиксированном ε_0 необходимо дополнительно уменьшать N , чтобы обеспечить выполнение условия $\beta(N, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0$ в (2.5.2) что в итоге приводит к уменьшению $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что уменьшение ε_0 при фиксированном δ_0 приводит к уменьшению $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$.

Отметим также, что подмножеству $S_{N_{\max}} \subset R^{N_0}$ соответствует подмножество $G_{N_{\max}, \eta} = \Pi_{N_0, \eta}(S_{N_{\max}}) \subset G_{N_0}$ в пространстве G_{N_0} кусочно-постоянных функций (см. Замечание 2.4.2). Подмножество $G_{N_{\max}}$ является квазиоптимальным в том смысле, что сетка параметризации $\theta_{N_{\max}}$, порождающая его, является оптимальной в соответствии с (2.5.2).

Для построения набора сеток $\Theta_v(N_0)$, соответствующего смыслу решаемой задачи, в качестве критерия оптимальности сетки параметризации целесообразно использовать послойные ограничения на локальные характеристики неоднозначности $\beta^i(N, 2\delta)$ вида (2.4.11), определяемые для подобластей $\bar{\Omega}_i, i = 1, \dots, I$, совпадающих со ярусами $\theta_i, i = 1, \dots, I$, конструируемой сетки параметризации. Зададим правило v_1 объединения ячеек исходной опорной сетки θ_{N_0} : *потребуем, чтобы каждый ярус θ_i новой сетки параметризации, начиная с первого, содержал максимальное число N_{\max}^i укрупненных ячеек, равномерных по горизонтали, при условии, что локальная неоднозначность определения параметров полученного яруса θ_i не превышает заданной величины*

$$\beta^i(N_{\max}^i, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.5.4)$$

Оптимальная размерность $N_{\max}^i(\delta_0, \varepsilon_0)$ параметризации каждого i -го яруса новой сетки, при условии (2.5.4), определяется решением целочисленной экстремальной задачи

$$N_{\max}^i(\delta_0, \varepsilon_0) = \max \left\{ N^i : N^i \leq N_0^i, \beta^i(N^i, 2\delta_0) \leq \varepsilon_0 \right\}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.5.5)$$

где N_0^i число узлов опорной сетки, расположенных в выделенной подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_i$. Величина $N_{\max}^i(\delta_0, \varepsilon_0)$ также, как и $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$ убывает с ростом δ_0 и уменьшением ε_0 .

Полученные ярусы сетки параметризации образуют итоговую оптимальную (по правилу ν_1) сетку параметризации $\theta_{N_{1,\max}} \in \Theta_{\nu_1}(N_0)$, размерность которой равна

$$N_{1,\max}(\delta_0, \varepsilon_0) = \sum_1^I N_{\max}^i(\delta_0, \varepsilon_0). \quad (2.5.6)$$

С учетом общих естественных априорных ограничений $s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s$, сетка $\theta_{N_{1,\max}} \in \Theta_{\nu_1}(N_0)$ определяет оптимальное по критерию (2.5.4) подмножество $S_{N_{1,\max}} \subset S_{N_0}$ размерности $N_{1,\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$:

$$S_{N_{1,\max}} = \left\{ s : s \in R^{N_{1,\max}} \subset R^{N_0}, s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, \quad n = 1, \dots, N_{1,\max} \right\}. \quad (2.5.7)$$

Неоднозначность любого решения обратной задачи (1.2.15), рассматриваемой на подмножестве $S_{N_{1,\max}} \subset S_{N_0}$, в подобластях, совпадающих с ярусами сетки $\theta_{N_{1,\max}}$, согласно (2.4.12), (2.5.4), не будет превышать заданной величины ε_0 .

Из неравенств (2.4.32), (2.4.41) следует, что модули непрерывности $\beta(N, 2\delta)$ и $\beta^i(N^i, 2\delta)$ монотонно не возрастают при уменьшении N и N^i соответственно, откуда вытекает существование и единственность решения задач (2.5.2) и (2.5.5), а значит существование и единственность сеток $\theta_{N_{\max}} \in \Theta_{\nu}(N_0)$ $\theta_{N_{1,\max}} \in \Theta_{\nu_1}(N_0)$ при

условии, что величина $\varepsilon_0(\delta_0)$ задана в пределах возможных значений величин $\beta(N, 2\delta)$ и $\beta^i(N^i, 2\delta)$.

Аналогичным образом могут быть сформулированы задачи построения оптимального подкомпакта для двухкритериальной задачи (1.2.17). Для задачи (1.2.17) оптимальная размерность $N_{C,\max}^i(\bar{\delta}_0, \varepsilon_0)$ параметризации i -го яруса новой сетки определяется решением целочисленной экстремальной задачи

$$N_{C,\max}^i(\bar{\delta}_0, \varepsilon_0) = \max \left\{ N^i : N^i \leq N_0^i, \beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}_0) \leq \varepsilon_0 \right\}, \quad i=1, \dots, I, \quad (2.5.8)$$

где $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}_0)$ – локальная априорная характеристика неоднозначности II типа (2.4.16) по подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_i$ для двухкритериальной задачи (1.2.17); N_0^i – число узлов опорной сетки, расположенных в выделенной подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_i$.

Условия (2.5.8) определяют оптимальную сетку параметризации $\theta_{N_{C,\max}} \in \Theta_\nu(N_0)$, при послойных ограничениях вида $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}_0) \leq \varepsilon_0$ на локальные характеристики неоднозначности $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ в подобластях $\bar{\Omega}_i, i=1, \dots, I$, совпадающих с ярусами $\theta_i, i=1, \dots, I$, конструируемой сетки параметризации. Общая размерность новой сетки определяется суммой

$$N_{C,\max}(\bar{\delta}_0, \varepsilon_0) = \sum_1^I N_{C,\max}^i(\bar{\delta}_0, \varepsilon_0). \quad (2.5.9)$$

Оптимальная сетка $\theta_{N_{C,\max}} \in \Theta_\nu(N_0)$, с учетом естественных априорных ограничений $s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s$, определяет по критерию (2.5.8) подмножество $S_{N_{C,\max}} \subseteq S_{N_0}$ размерности $N_{C,\max}(\bar{\delta}_0, \varepsilon_0)$ задачи (1.2.17):

$$S_{N_{C,\max}} = \left\{ s : s \in R^{N_{C,\max}} \subset R^{N_0}, s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, n=1, \dots, N_{C,\max} \right\}. \quad (2.5.10)$$

Степень неоднозначности любого решения обратной задачи (1.2.17), рассматриваемой на подмножестве $S_{N_{C,\max}} \subseteq S_{N_0}$, по ярусам сетки параметризации не будет превышать заданной величины $\varepsilon_0(\delta_0)$.

При решении других обратных задач математической физики эффективная параметризация должна проводиться с учетом физики задачи, определяющей конкретный ν -й набор $\Theta_\nu(N_0)$ сеток параметризации и соответствующее ему правило их построения. Исходная опорная сетка может укрупняться как по горизонтали, так и по вертикали, при этом могут быть получены различные варианты оптимальных сеток параметризации. Выбор наиболее подходящего варианта может быть сделан, исходя из конкретной поставленной задачи и априорной информации.

2.5.1.1. Эффективная сеточная параметризация и разрешающая способность геофизического метода

Условием построения оптимальной сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}$ и решения задачи эффективной параметризации среды общего типа является ограничения сверху на степень неоднозначности решений обратной задачи (1.2.15), основанные на неравенствах (2.5.1), (2.5.4). Эти условия могут быть сформулированы с использованием понятия разрешающей способности метода. Например, из (2.4.5) получаем аналоги условий (2.5.1), (2.5.2), определяющие оптимальную сетку параметризации $\theta_{N_{\max}}$ размерности $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$ при ограничении снизу на величину разрешающей способности метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15) [Шимелевич, 2013а,б]:

$$r(N_{\max}, \delta_0) \geq r_0, \quad (2.5.11)$$

$$N_{\max}(\delta_0, r_0) = \max \{ N : r(N, \delta_0) \geq r_0, N \leq N_0 \}, \quad (2.5.12)$$

где $r_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$.

Таким образом, можно говорить, что эффективная сеточная параметризация среды на основе рассмотренных выше критериев проводится в соответствии с заданной разрешающей способностью геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15).

Ограничение типа (2.5.11), было впервые сформулировано В.И. Дмитриевым [Дмитриев, 2012] при постановке линеаризованной обратной задачи.

□

Рассмотренные критерии эффективной параметризации основаны на ограничении на величину модуля непрерывности обратного оператора (или его модификаций) решаемого уравнения. В частности, можно использовать модификации вида (2.1.49), (2.1.55), в которых вместо классических норм, определяющих расстояние между элементами соответствующих пространств, используются функционалы расстояния типа (1.1.10), (1.3.38), (1.3.40).

Полученные в настоящем разделе результаты очевидным образом обобщаются на случаи любых конечно-элементных аппроксимаций среды, а также для других типов параметризации, рассмотренных в Главе 1. В Главе 3 приводятся примеры численного решения задачи эффективной параметризации в классах сеточных моделей сред для задач геоэлектрики.

2.5.2. Цифровая эффективная параметризация

Разрешающая способность общего вида (2.1.58) как величина, обратно пропорциональная пределу разрешения $\varepsilon_r(\delta) = \beta(2\delta)$, в общем случае является некоторым вещественным числом $R(\delta) > 0$ при $\delta > 0$. Для решения некоторых практических задач интерпретации геофизических данных искомые характеристики среды бывает полезно дискретизировать не только по

пространству (путем задания сетки параметризации), но и по значениям. В этом случае разрешающая способность выражается целым числом, т.е. в цифровом формате.

2.5.2.1. Цифровая разрешающая способность

По-прежнему будем рассматривать уравнение (1.2.15). Разрешающая способность $r(N, \delta)$ метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15), определяется, в соответствии с (2.4.5), выражением

$$r(N, \delta) = \frac{1}{\beta(N, 2\delta)},$$

где $\beta(N, 2\delta)$ – априорная характеристика (2.4.3) неоднозначности решений задачи (1.2.15), которая, согласно (2.1.56), определяет предел разрешения метода

$$\varepsilon_r(N, \delta) = \beta(N, 2\delta). \quad (2.5.13)$$

Согласно общему условию различимости (2.1.57) (Лемма 2.1.1), для того, чтобы векторы $s, s' \in S_N$ были различимы, необходимо и достаточно, чтобы расстояние $\|\Delta s\|_0 = \|s' - s\|_0$ между ними при заданных N, δ было больше предела разрешения $\varepsilon_r(N, \delta) = \beta(N, 2\delta)$:

$$\|\Delta s\|_0 > \beta(N, 2\delta). \quad (2.5.14)$$

Разобьем весь интервал $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ возможных изменений компонент векторов $s \in S_N$ на *максимальное целое число* $r_{\max}(N, \delta)$ дискретных значений $d_l, l = 1, \dots, r_{\max}(N, \delta)$, с шагом

$$d > D_s \cdot \beta(N, 2\delta). \quad (2.5.15)$$

Векторы $\hat{s} \in S_N$, компоненты которых меняются дискретно по этим значениям, являются гарантированно различимыми решениями обратной задачи (1.2.15), так

как расстояние $\| \hat{s}' - \hat{s} \|_0$ между любыми двумя векторами \hat{s}', \hat{s} будет больше предела разрешения:

$$\| \hat{s}' - \hat{s} \|_0 = \frac{1}{D_s} \max_{1 \leq n \leq N} | \hat{s}'^n - \hat{s}^n | = \frac{1}{D_s} d > \frac{1}{D_s} D_s \cdot \beta(N, 2\delta) = \beta(N, 2\delta), \quad (2.5.16)$$

причем число таких векторов в S_N максимально, при заданных N, δ и равно $(r_{\max}(N, \delta))^N$.

Дискретные значения $d_l, l = 1, \dots, r_{\max}(N, \delta)$, компонент векторов \hat{s} с шагом d в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ будем называть *различимыми значениями искомой характеристики среды* (например, электропроводности, плотности и др.). При числе выделяемых значений $r' > r_{\max}(N, \delta)$ в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ условие различимости (2.5.14) нарушается, и получаемые при этом векторы не будут гарантированно различимыми решениями.

Величина $r_{\max}(N, \delta)$ определяется соотношениями

$$r_{\max}(N, \delta) = \left[\frac{1}{\beta(N, 2\delta)} \right] + 1, \text{ если } \frac{1}{\beta(N, 2\delta)} \text{ нецелое} \quad (2.5.17)$$

и

$$r_{\max}(N, \delta) = \frac{1}{\beta(N, 2\delta)}, \text{ если } \frac{1}{\beta(N, 2\delta)} \text{ целое,} \quad (2.5.18)$$

где $[x]$ – целая часть числа x . Векторы, компоненты которых меняются дискретно по значениям, полученным при таком разбиении интервала $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ являются гарантированно различимыми решениями обратной задачи (1.2.15), так как для любой пары таких векторов выполняется условие различимости (2.5.14) по норме (1.3.24).

Подытожим вышесказанное в виде следующего утверждения.

Утверждение 2.5.1. Максимальное число $r_{\max}(N, \delta)$ различных значений d_l , $l = 1, \dots, r_{\max}(N, \delta)$, в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ искомой характеристики среды обратной задачи (1.2.15) при фиксированных N и δ определяется выражениями (2.5.17), (2.5.18). Векторы параметров среды, компоненты которых изменяются дискретно по этим значениям, являются гарантированно различными решениями обратной задачи (1.2.15) по норме (1.3.24) в том смысле, что они не могут являться δ -эквивалентными решения для какой-либо правой части (1.2.15). При этом неоднозначность (погрешность) решений учитываются интервалами дискретизации искомой величины по значениям.

Замечание 2.5.1. Решение задачи (2.5.17)–(2.5.18) нахождения максимального целого числа дискретных значений некоторой величины, которое может быть выделено в заданном интервале Δ ее значений, при условии, что шаг дискретизации d больше заданного числа $d > \varepsilon$, на основе метрики, определяемой нормой (1.3.24), рассмотрено в работе [Колмогоров, 1987].

В задачах интерпретации геофизических данных вместо величины $r_{\max}(N, \delta)$ используют величину

$$\bar{r}_{\max}(N, \delta) = r_{\max}(N, \delta) - 1, \quad (2.5.19)$$

которая называется *цифровой разрешающей способностью по значениям* искомой характеристики среды для метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15), при заданных N и δ . Величина $\bar{r}_{\max}(N, \delta)$ определяет максимальное число подынтервалов Δ_l^d , $l = 1, \dots, \bar{r}_{\max}(N, \delta)$, длины $d > D_s \cdot \beta(N, 2\delta)$, укладываемых в общем интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$. Значения компонент векторов параметров среды в пределах каждого l -го подынтервала Δ_l^d принимаются равными l -му значению характеристики среды (например, значению в нижней границе интервала) и, таким образом, эквивалентные решения обратной задачи объединяются в интервалы эквивалентных значений характеристики среды. При числе подынтервалов, равном $\bar{r}_{\max}(N, \delta)$, векторы, компоненты которых принимают значения из разных интервалов, являются гарантированно различными. Такие интервалы называют

различимыми интервалами (градациями) искомой характеристики среды в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ при фиксированных N и δ , это и объясняет название величины $\bar{r}_{\max}(N, \delta)$ – цифровой разрешающей способностью по значениям искомой характеристики среды.

Ввиду особенности формул (2.5.17), (2.5.18), зависимость величины $\bar{r}_{\max}(N, \delta)$ от δ является целочисленной ступенчатой функцией. При иллюстрации здесь и в дальнейшем на рисунках приводятся кривые более простой функции

$r(N, \delta) = \frac{1}{\beta(N, 2\delta)}$, определяющей полную аналоговую разрешающую

способность. Зная величины $r(N, \delta)$, $\beta(N, 2\delta)$ можно легко по формулам (2.5.17), (2.5.18), (2.5.19) вычислить полную цифровую разрешающую способность

$\bar{r}_{\max}(N, \delta)$. В качестве примера на рис. 2.5.2 представлены типичные зависимости $\beta(N, 2\delta)$ и $r(N, \delta)$ от δ при фиксированном N для задачи геоэлектрики,

сводящейся к уравнению вида (1.2.15). Из графиков рис. 2.5.2 видно, что при уровне погрешности $\delta = 0.02$ степень неоднозначности решений обратной задачи

$\beta(N, 2\delta) \approx 0.06$, а аналоговая разрешающая способность $r(N, \delta) = \frac{1}{\beta(N, 2\delta)} = 16.6$.

В цифровом формате, согласно (2.5.17)–(2.5.19), получаем $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = [16.6] = 16$.

Это означает, что максимальное число различимых градаций искомой характеристики среды $g = \lg \rho$ в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s] = [0, 4]$ для геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15), при заданных N и δ , равно 16. При погрешности $\delta = 0.03$ получаем соответственно $\beta(N, 2\delta) \approx 0.10$ и $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = 9$.

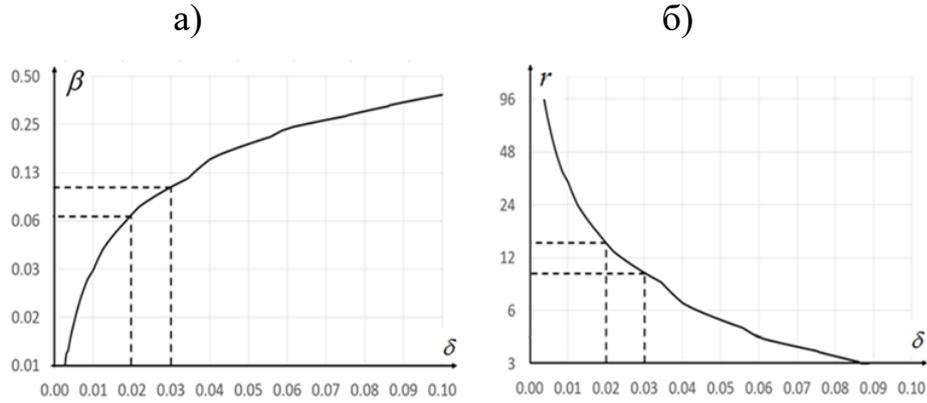


Рис.2.5.2. Типичный для задач геоэлектрики вид характеристик $\beta(N, 2\delta)$ и $r(N, \delta)$.

2.5.2.2. Общая схема расчета цифровой разрешающей способности

По аналогии с тем, как это делалось в предыдущем пункте, определяются характеристики цифровой *разрешающей способности других типов*. Общая схема расчета полной и локальной цифровой разрешающей способности для задач (1.2.15), (1.2.17) выглядит следующим образом.

1. Рассчитываются априорные характеристики неоднозначности $\beta(N, 2\delta)$, $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ по всей области Ω и по подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$, соответственно, для рассматриваемой задачи (см. алгоритмы раздела 3.1.3).

2. Аналоговая разрешающая способность, в соответствии с (2.4.5), вычисляется по формуле

$$r(N, \delta) = \frac{1}{\beta(N, 2\delta)}.$$

3. На основе характеристики $r(N, \delta)$ вычисляется величина $r_{\max}(N, \delta)$ по формулам (2.5.17), (2.5.18).

4. В соответствии с (2.5.19) определяется цифровая разрешающая способность $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = r_{\max}(N, \delta) - 1$.

5. В соответствии с (2.4.17) определяется аналоговая локальная разрешающая способность $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ по подобласти $\bar{\Omega}_i$:

$$r_C^i(N^i, \bar{\delta}) = \frac{1}{\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})}.$$

6. На основе характеристики $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ вычисляется величина $r_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta})$ по формулам (2.5.17), (2.5.18), в которых вместо $\beta(N, 2\delta)$, $r(N, \delta)$ подставляются величины $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$, $r_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta})$.

7. Цифровая локальная разрешающая способность $\bar{r}_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta})$ метода для подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$, в соответствии с (2.5.19), определяется выражением

$$\bar{r}_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta}) = r_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta}) - 1.$$

2.5.2.3. Цифровое графическое представление результатов инверсии

При графическом представлении получаемого решения обратной задачи (1.2.15) в виде геофизического разреза интервалам Δ_l^d , $l = 1, \dots, \bar{r}_{\max}(N, \delta)$ значений характеристики среды сопоставляются градации цвета в цветовой легенде (палитре). Так как векторы, компоненты которых принимают значения из разных интервалов, являются гарантированно различимыми, то любые два геофизических разреза, отличающиеся цветовым изображением, в такой дискретной цветовой легенде хотя бы в одной ячейке сетки параметризации θ_N также являются гарантированно различимыми с помощью данного геофизического метода при фиксированных N и δ . Неоднозначность (погрешность) решений учитывается интервалами дискретизации.

Таким образом, просматривается прямая аналогия между графическим представлением решений обратной задачи в виде геофизического разреза с дискретной цветовой легендой и цифровыми изображениями. Роль пикселей цифрового изображения среды выполняют ячейки сетки параметризации размерности N , градации цвета изображения определяются интервалами различных градаций характеристики среды, число которых определяется величиной $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = r_{\max}(N, \delta) - 1$ полной цифровой разрешающей способности.

Для иллюстрации данной аналогии рассмотрим следующий модельный пример. Предположим, что для обратной задачи (1.2.15) при заданной величине δ получены значения $\beta(N, 2\delta) \approx 0.14$ и соответствующее число различных градаций $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = r_{\max}(N, \delta) - 1 = 7$ дискретной цветовой легенды. На рис. 2.5.3а представлен схематический 2D разрез в обычной аналоговой цветовой легенде на интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s] = [0, 4]$. На рис. 2.5.3б тот же разрез представлен в дискретной легенде, с числом различных градации цвета $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = 7$. Разрез на рис. 2.5.3в представлен в той же легенде, но при этом он отличается от предыдущего по цвету на одну градацию в одной ячейке сетки параметризации. Разность $\Delta s = s_1 - s_2$ векторов s_1 и s_2 параметров, определяющих эти две модели среды равна вектору, который имеет только одну компоненту, отличную от нуля, норма которой равна шагу градаций дискретной цветовой легенды с различными градациями, а значит векторы s_1 , s_2 и соответствующие им георезы на рис. 2.5.3б и 2.5.3в являются гарантированно различными решениями обратной задачи (1.2.15).

На рисунках 2.5.3г, 2.5.3д схематический разрез (рис 2.5.3а) представлен в новой дискретной цветовой легенде, с числом градаций $r^* = 9$, превышающим число различных градаций $\bar{r}_{\max}(N, \delta) = 7$. Эти разрезы различаются по цвету в нескольких ячейках сетки на одну цветовую градацию. В этом случае разность $\Delta s = s_1 - s_2$ векторов s_1 и s_2 параметров, определяющих эти две модели среды, равна вектору, который имеет несколько отличных от нуля одинаковых по

величине компонент. Однако норма этого вектора не удовлетворяет условию построения различимой цветовой легенды, а значит, векторы s_1 и s_2 и соответствующие им георазрезы на рис. 2.5.3г и 2.5.3д не являются гарантированно различимыми, несмотря на то, что визуальное различие георазрезов выглядит более значительным, чем для георазрезов на рис. 2.5.3б, 2.5.3в.

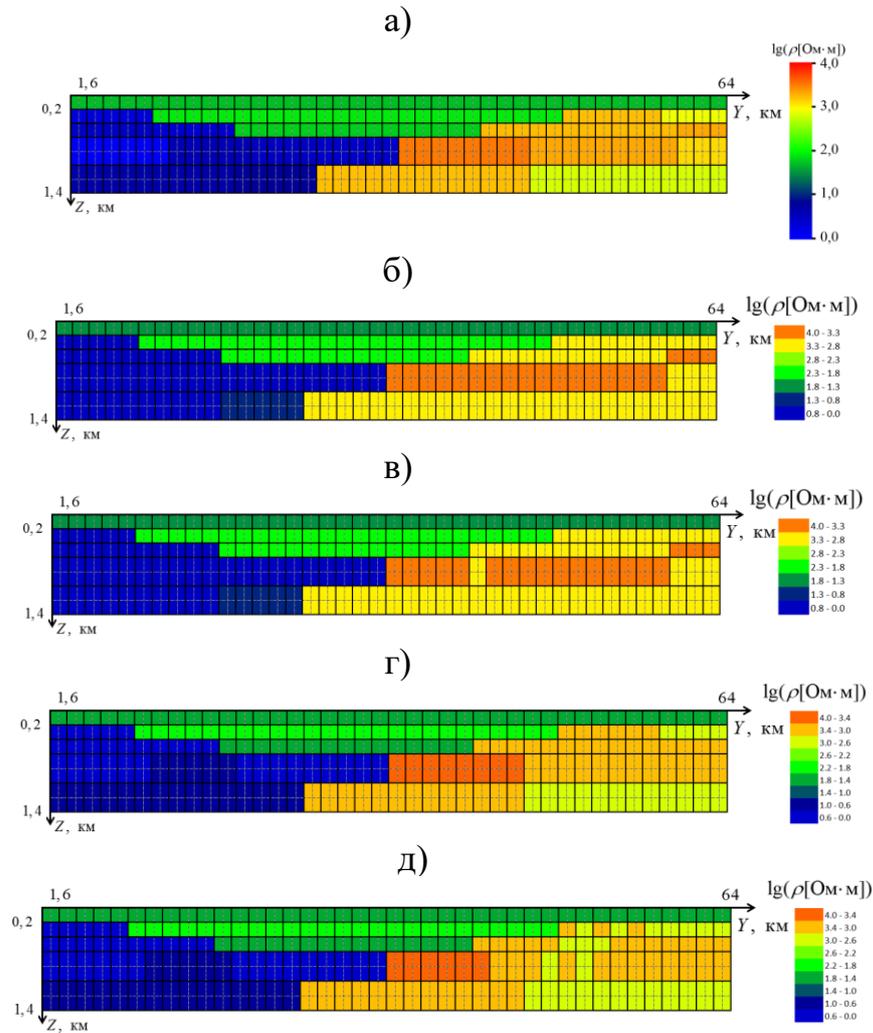


Рис. 2.5.3. Схематическая иллюстрация понятия дискретной цветовой легенды с различимыми и неразличимыми градациями.

2.5.2.4. Полная цифровая разрешающая способность

Величина $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$, определяемая из (2.5.2), при заданных δ_0 и ε_0 определяет максимальное число (различимых) ячеек оптимальной сетки параметризации в исследуемой области Ω . Величина $\bar{r}_{\max}(N_{\max}, \delta_0)$ определяет максимальное число различимых ячеек (подинтервалов) сетки значений искомой характеристики среды в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ при заданных δ_0, N_{\max} . Для дискретных (цифровых) систем разрешающая способность какого-либо устройства обычно определяется, как *максимальное число различимых с его помощью точек (деталей) исследуемого объекта*. По аналогии с этим *полная цифровая разрешающая способность \mathfrak{R} метода* по пространству и по значениям искомой характеристики среды при заданных δ_0 и ε_0 определяется парой величин $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$ (аналог максимального числа пикселей изображения) и $\bar{r}_{\max}(N_{\max}, \delta_0)$ (аналог максимального числа градаций цвета):

$$\mathfrak{R}(\delta_0, \varepsilon_0) = (N_{\max}, \bar{r}_{\max}). \quad (2.5.20)$$

При такой параметризации мы получаем максимально детальное цифровое описание (графическое изображение) среды по пространственным координатам и по значениям искомой характеристики среды. Погрешность получаемых решений обратной задачи (1.2.15) учитывается интервалами дискретизации по значениям и не будет превышать заданной величины ε_0 при заданном уровне δ_0 погрешности входных данных. При этом любые два геофизических разреза, отличающиеся цветовым изображением хотя бы в одной ячейке оптимальной сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}$, являются гарантированно различимыми с помощью данного геофизического метода.

2.5.2.5. Связь цифровой разрешающей способности с ε -емкостью множества априорных ограничений

Величина $r_{\max}(N, \delta)$, определяемая в соответствии с (2.5.17), (2.5.18), связана с такими фундаментальными понятиями теории информации, как ε -емкость компактного множества. Рассмотрим обратную задачу (1.2.15). Величина $r_{\max}(N, \delta)$ определяет максимальное число ε -различимых, точек $d_l, l=1, \dots, r_{\max}(N, \delta)$, принадлежащих интервалу $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$, расстояние между которыми по модулю больше заданной величины $\varepsilon = \beta(N, 2\delta)$ (см. Замечание 2.5.1). Логарифм по основанию 2 этой величины в теории информации называют ε -емкостью $E_\varepsilon(\Delta_D)$ множества Δ_D точек интервала $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ [Колмогоров, 1987]:

$$E_\varepsilon(\Delta_D) = \log_2 r_{\max}(N, \delta).$$

В свою очередь, векторы $\hat{s} \in S_N$, компоненты которых изменяются дискретно по значениям $d_l, l=1, \dots, r_{\max}(N, \delta)$, являются ε -различимыми решениями обратной задачи (1.2.15) при $\varepsilon = \beta(N, 2\delta)$ по норме (1.3.24) (см. Утверждение 2.5.1), а общее число таких векторов в S_N , при заданных N и δ , равно

$$\mathcal{M}_\varepsilon(S_N) = (r_{\max}(N, \delta))^N.$$

Так как число $r_{\max}(N, \delta)$ различимых значений компонент векторов $\hat{s} \in S_N$ в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ при фиксированных N и δ максимально, то и число \mathcal{M}_ε самих ε -различимых векторов множества S_N максимально. Логарифм по основанию 2 максимального числа \mathcal{M}_ε ε -различимых векторов множества S_N является ε -емкостью $E_\varepsilon(S_N)$ множества S_N при $\varepsilon = \beta(N, 2\delta)$,

$$E_\varepsilon(S_N) = \log_2 \mathcal{M}_\varepsilon = \log_2 (r_{\max}(N, \delta))^N. \quad (2.5.21)$$

Из (2.5.21), с учетом (2.5.19), следует, что

$$E_{\varepsilon}(S_N) = N \log_2(\bar{r}_{\max}(N, \delta) + 1). \quad (2.5.22)$$

Таким образом, мы получили, что формула (2.5.23) устанавливает явную количественную связь цифровой разрешающей способности $\bar{r}_{\max}(N, \delta)$ геофизического метода с ε -емкостью $E_{\varepsilon}(S_N)$, $\varepsilon = \beta(N, 2\delta)$ множества S_N априорных ограничений обратной задачи (1.2.15).

В работе [Шимелевич, 2013б] также показано, что введенная выше величина $r_{\max}(N, \delta)$, согласно алгоритмической теории информации, является неслучайной информационной характеристикой геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15), которая определяет количество информации о среде, содержащейся в наблюдаемых полях при заданном уровне погрешности данных.

2.6. Выводы к Главе 2

1. Представлены методы построения априорных и апостериорных характеристик различных типов, определяющих степень практической неоднозначности (погрешности) приближенных решений условно-корректных нелинейных обратных задач на компактных множествах.

2. Устанавливается связь априорных характеристик неоднозначности с обусловленностью нелинейной задачи и разрешающей способностью геофизического метода.

3. Вводятся локальные характеристики неоднозначности многокритериальных нелинейных обратных задач геофизики, которые определяют степень неоднозначности (погрешности) получаемых решений обратной задачи дифференцированно по глубине исследований.

4. Для конечно-параметрических обратных задач в классе кусочно-постоянных решений, задаваемых на сетке параметризации, теоретически

доказано, что степень неоднозначности решений монотонно не убывает с увеличением размерности сетки параметризации. Это приводит к неопределенности обратной задачи: более детальные решения оказываются более неоднозначными, что фактически не позволяет добиться желаемой детальности без привлечения дополнительной априорной информации.

5. Разработан новый метод адаптивной практической регуляризации, основанный на построении оптимальной сетки параметризации, которая обеспечивает компромисс между детальностью аппроксимации среды и неоднозначностью решений дифференцированно по глубине исследований при заданной априорной информации.

6. Введена цифровая разрешающая способность геофизического метода, при которой характеристики среды дискретизируются не только по пространственной области, но по значениям, что позволяет проводить интерпретацию измеренных данных в цифровом формате. Установлена связь цифровой разрешающей способности с ε -емкостью множества априорных ограничений задачи.

ГЛАВА 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

В Главе 3 представлены предлагаемые численные методы, схемы алгоритмов (включая вопросы их сходимости), а также примеры расчета различных типов характеристик неоднозначности решений нелинейных обратных задач геофизики, в том числе геоэлектрики, в конечно-параметрических классах сред [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013а; Шимелевич и др., 2017а].

Иллюстрация работы алгоритмов, а также примеры расчета проводились на модельных примерах для прикладных 2D и 3D задач геоэлектрики с применением методов МТЗ, АМТЗ, МВЗ в смешанном АМТ-МТ диапазоне частот 0.001–1000 Гц с глубиной до 5-6 километров. Методика работ такого типа отражена в практических работах [Сараев и др., 2010; Андреева и др., 2006; Сараев и др., 2011; Куликов, Яковлев, 2011; Варенцов и др., 2013; Жамалетдинов, 2014]. Расчеты характеристик неоднозначности практических результатов интерпретации полевых МТ данных приводятся в Главе 6.

Представленные примеры расчета характеристик неоднозначности иллюстрируют возможность решать следующие практические задачи интерпретации данных МТ методов:

- расчет априорных и апостериорных оценок неоднозначности (погрешности) решений обратных задач геоэлектрики;
- расчет оценок разрешающей способности методов геоэлектрики;
- исследование зависимостей неоднозначности решений обратных задач от погрешности и структуры входных данных (в том числе от числа используемых критериев инверсии), объема дополнительной информации, детальности параметризации среды;
- эффективной параметризации на основе построение оптимальной по детальности регуляризованной сетки параметризации среды при заданных уровне

погрешности данных (в соответствии с разрешающей способностью применяемого метода);

- расчет оценок неоднозначности решений многокритериальных обратных задач.

3.1. Численные методы расчета характеристик неоднозначности решений нелинейных обратных задач геофизики

В данном разделе дается описание предлагаемых методов и алгоритмов расчета характеристик неоднозначности решений обратных задач, основанных на алгоритмах случайного поиска и алгоритмах Монте-Карло. Работа алгоритмов иллюстрируется на примере задач геоэлектрики. Доказывается сходимость алгоритмов, оценивается скорость сходимости алгоритмов на тестовых примерах.

3.1.1. Оптимизационные задачи расчета характеристик неоднозначности

В п. 1.3.2 показано, что основные однокритериальные и двухкритериальные задачи геоэлектрики в классе кусочно-постоянных решений сводятся к типовым задачам (1.2.15) и (1.2.17), рассматриваемым в соответствующих пространствах с априорными ограничениями вида (1.3.20) в виде N -мерного куба со стороной D_s

$$S_N = \{s : 0 \leq s^n \leq D_s, \quad n = 1, \dots, N\}.$$

В данной главе рассматриваются методы расчета характеристик неоднозначности задач вида (1.2.15) и (1.2.17); примеры расчета приводятся для конкретных задач геоэлектрики.

Расчет априорных характеристик неоднозначности наиболее общей \mathbb{C} -критериальной задачи (1.2.18) сводится к решению нелинейных оптимизационных задач вида

$$\max_{s, s' \in S_N} \Phi(s, s'), \quad \varphi_i(s, s') \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, \mathbb{C}; \quad s, s' \in S_N \subset R^N, \quad (3.1.1)$$

где

$$\Phi(s, s') = \|s' - s\|, \quad \varphi_i(s, s') = \|A_{i,N}s' - A_{i,N}s\|, \quad s, s' \in S_N, \quad i = 1, \dots, \mathbb{C}, \quad (3.1.2)$$

δ_i – задаваемые параметры.

При расчете апостериорных характеристик $s = s_\delta$, где s_δ – фиксированное найденное приближенное решение; целевой функционал и ограничения (3.1.2) имеют следующий вид

$$\Phi(s') = \|s' - s_\delta\|, \quad \varphi_i(s, s', f_i) = \|A_{i,N}s' - f_i\|, \quad s' \in S_N, \quad i = 1, \dots, \mathbb{C}, \quad (3.1.3)$$

$f_i \in F$, $i = 1, \dots, \mathbb{C}$, – фиксированные характеристики поля.

Для априорных оценок целевой функционал $\Phi(\Delta s) = \|s' - s\|$ и функции ограничений $\varphi_i(s, s')$ зависят от компонент векторов s и s' , и размерность решаемой экстремальной задачи в пространстве решений равна $2N$; для апостериорных оценок эта размерность равна N . Размерность пространства данных определяется набором используемых критериев инверсии и для задач геоэлектрики может достигать $\sim 10^6$ и более.

Методы Монте-Карло в нелинейных экстремальных задачах большой размерности

В рассматриваемых задачах типа (3.1.1) целевые функционалы и функции ограничений являются нелинейными непрерывными функциями $2N$ переменных - компонент векторов s и s' , которые заданы на ограниченных замкнутых подмножествах R^N , что обеспечивает существование решений соответствующих оптимизационных задач вида (3.1.1). Однако эти задачи имеют большую размерность и, кроме того, ввиду нелинейности общего типа, могут обладать множеством точек локальных и глобального экстремумов и в общем случае не сводятся к задачам выпуклого программирования. В связи с этим для решения рассматриваемых оптимизационных задач целесообразно использовать прямые методы случайного поиска, которые приспособлены к ним в большей степени, чем детерминированные процедуры [Ермаков, 1975; Вайсборд, Юдин, 1968]. К числу таких методов относятся методы Монте-Карло, широко применяемые при решении численных задач математической физики большой размерности, в том числе и для изначально детерминированных задач с предварительной их рандомизацией (например, вычисление многомерных интегралов, интерполирование функций большого числа переменных, задачи оптимизации, оценка значений функционалов и др.) [Ченцов, 1967; Вайсборд, Юдин, 1968; Лисицин, Юдаев, 1972; Соболев, 1973; Ермаков, 1975; Жданов и др., 2005; Ермаков, Сипин, 2014; Kabanikhin et al., 2015]. При таком подходе исходная детерминированная задача рассматривается в вероятностном пространстве, которое задается в соответствии со смыслом решаемой задачи. Для решения вероятностной задачи в пределах множества допустимых решений обратной задачи создается конечная последовательность (выборка) пробных точек с заданным законом распределения [Ермаков, 1975; Соболев, 1973]. Сходимость метода Монте-Карло является сходимостью по вероятности. Основные вопросы применимости метода Монте-Карло к решению

детерминированных задач заключаются в том, насколько выделяемое подмножество пробных точек является представительным по отношению к исходному детерминированному множеству допустимых решений, и как получаемые вероятностные оценки решений соотносятся с соответствующими детерминированными оценками. Общими критериями достоверности оценок, получаемых методом Монте-Карло, являются их «не слишком большая» дисперсия и устойчивость при выходе на асимптотические значения с увеличением объема выборки [Ермаков, 1975]. В благоприятных случаях погрешность получаемых оценок уменьшается с ростом объема выборки. Главное преимущество метода Монте-Карло состоит в том, что он может работать в тех случаях, когда другие методы неприменимы или неэффективны. К числу недостатков метода Монте-Карло следует отнести медленную сходимость. Для локализации точки глобального экстремума методом Монте-Карло с высокой вероятностью и точностью обычно требуются очень большие объемы выборки, поэтому на практике классический метод Монте-Карло часто комбинируется с одним из детерминированных методов локальной оптимизации [Соболь, 1973; Ермаков, 1975] или же дополняется некоторыми его модификациями и процедурами, учитывающими специфику задачи.

3.1.2. Методы решения экстремальной задачи (3.1.1) на основе алгоритмов Монте-Карло

Основную идею, лежащую в основе предлагаемых алгоритмов численного решения экстремальной задачи (3.1.1) [Шимелевич, 2020], проиллюстрируем на примере априорной характеристики $\beta(N, 2\delta)$ для уравнения вида (1.2.15) [Шимелевич, 2020]:

$$A_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in F.$$

Напомним, что к уравнению вида (1.2.15) сводятся все типовые однокритериальные 2D и 3D задачи геоэлектрики, а также двухкритериальные задачи в соответствующих пространствах данных после их сведения к объединенному операторному уравнению (см. п. 1.3.2).

Характеристика $\beta(N, 2\delta)$ для обратной задачи (1.2.15) определяется, согласно (2.4.5), решением нелинейной экстремальной задачи (2.4.3):

$$\beta(N, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s, s' \in S_N, \|A_N s' - A_N s\| \leq 2\delta \right\},$$

которая является частным случаем экстремальной задачи (3.1.1) с функцией ограничений и целевым функционалом $\Phi(s, s')$ вида (3.1.2) при $C = 1$.

Перепишем (2.4.3) в эквивалентном виде:

$$\beta(N, 2\delta) = \max \left\{ \|\Delta s\| : \|\Delta f(s, \Delta s)\| \leq 2\delta, s \in S_N, \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N \right\}, \quad (3.1.4)$$

где

$$\Delta s = s' - s, \Delta f(s, \Delta s) = A_N(s + \Delta s) - A_N s, s, s' \in S_N; \quad (3.1.5)$$

$$\hat{S}_N = \left\{ \Delta s : \Delta s = (\Delta s^1, \dots, \Delta s^N) \in R^N; [-D_s \leq \Delta s^n \leq D_s], n = 1, \dots, N \right\}. \quad (3.1.6)$$

Из (3.1.4) следует, что величина $\beta(N, 2\delta)$ при любом фиксированном δ определяется парой скалярных величин $\|\Delta s\|, \|\Delta f(s, \Delta s)\|$, принимающих различные значения при всех допустимых изменениях $s, s' \in S_N$ (и соответствующих им Δs), определяемых в (3.1.4)-(3.1.6). Каждую пару величин $\|\Delta s\|, \|\Delta f(s, \Delta s)\|$ можно рассматривать, как точку $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|)$ в пространстве R^2 : $(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \leftrightarrow \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in R^2$. Точки $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|)$ при всех возможных изменениях s и Δs образуют некоторое множество $\bar{Q}_\Delta \subset R^2$:

$$\bar{Q}_\Delta = \left\{ \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) : \Delta s \in \hat{S}_N, s \in S_N, s + \Delta s \in S_N, \Delta f(s, \Delta s) = A_N(s + \Delta s) - A_N s \right\} \quad (3.1.7)$$

Множество \bar{Q}_Δ схематически представлено на рис. 3.1.1, где красным цветом обозначены «оггибающие» множества \bar{Q}_Δ – кривые, за пределами которых точки множества отсутствуют.

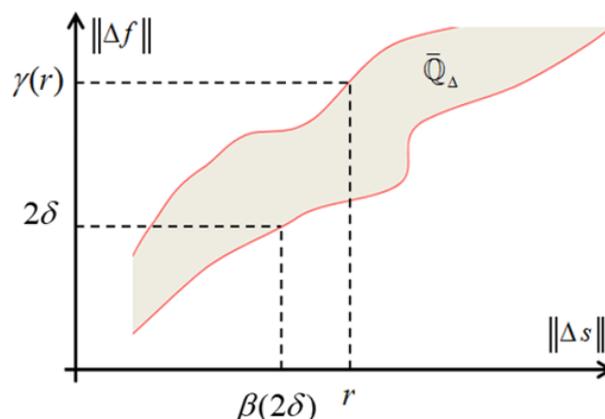


Рис. 3.1.1. Схематическая иллюстрация получения оценок $\beta(N, 2\delta)$, $\gamma(N, r)$ на основе множества \bar{Q}_Δ .

Конфигурация множества \bar{Q}_Δ отражает зависимость изменений откликов поля $\|\Delta f(s, \Delta s)\|$ от изменений $\|\Delta s\|$ параметров объекта. Отвлекаясь от природы величин $\|\Delta s\|$ и $\|\Delta f\|$, предположим, что мы умеем строить это множество. Согласно (3.1.4), проблема отыскания величины $\beta(N, 2\delta)$ на множестве \bar{Q}_Δ , заключается в нахождении точки $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|)$ (возможно, не единственной) с максимальной абсциссой при условии, что ее ордината удовлетворяет условию $\|\Delta f\| \leq 2\delta$ (рис. 3.1.1):

$$\beta(N, 2\delta) = \max \left\{ \|\Delta s\| : \|\Delta f(s, \Delta s)\| \leq 2\delta, \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{Q}_\Delta \right\}. \quad (3.1.8)$$

Таким образом, задача расчета $\beta(N, 2\delta)$ сводится к экстремальной задаче (3.1.1) с функцией ограничений и целевым функционалом типа (3.1.2) при $\mathbb{C} = 1$. Существование хотя бы одной такой точки следует из существования функции модуля непрерывности $\beta(N, \delta)$ обратного оператора для задачи (1.2.15) (см. п. 2.1.2.1). Возможные участки вертикального изменения нижней огибающей, схематически показанные на рис. 3.1.1, отражают свойство монотонного неубывания $\beta(N, 2\delta)$ с ростом δ .

Замечание 3.1.1. На основе множества \bar{Q}_Δ попутно определяется модуль непрерывности $\gamma(N, r)$ прямого оператора для задачи (1.2.15), который в

соответствии с общим определением (2.1.28), является решением экстремальной задачи по функционалу:

$$\gamma(N, r) = \max \{ \|A_N s' - A_N s\| : s, s' \in S_N, \|s' - s\| \leq r \}. \quad (3.1.9)$$

Задача (3.1.9), по аналогии с тем, как это делалось для величины $\beta(N, 2\delta)$, преобразуется к задаче на множестве \bar{Q}_Δ :

$$\gamma(N, r) = \max \{ \|\Delta f(s, \Delta s)\| : \|\Delta s\| \leq r, \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{Q}_\Delta \}. \quad (3.1.10)$$

Схема получения величины $\gamma(N, r)$ при заданном $\|\Delta s\| = r$ показана на рис. 3.1.1. Возможные горизонтальные участки верхней огибающей отражают свойство монотонного неубывания $\gamma(N, r)$ с ростом r .

Таким образом, предлагаемый численный метод расчета характеристики $\beta(N, 2\delta)$ заключается в следующем: сначала во всем диапазоне допустимых изменений s и Δs с помощью прямого оператора задачи (1.2.15) моделируется имитирующее множество $\tilde{Q}_\Delta \subset \bar{Q}_\Delta$ и проводятся его огибающие, а затем решается задачи (3.1.8) и (3.1.10) получения оценок значений $\beta(N, 2\delta)$ и $\gamma(N, r)$ для любых заданных δ и r в соответствии со схемой, указанной на рис. 3.1.1. Алгоритм построения огибающих множества \bar{Q}_Δ в своей основе опирается на решения экстремальных задач определения точек множества \bar{Q}_Δ с минимальной $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ и максимальной $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|)$ ординатами при различных фиксированных $\|\Delta s\| = r$:

$$\Delta_{\min}(\|\Delta s\|) = \min_{s, \Delta s} \{ \|\Delta f(s, \Delta s)\| : s \in S_N, \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N, \|\Delta s\| = r \}, \quad (3.1.11)$$

$$\Delta_{\max}(\|\Delta s\|) = \max_{s, \Delta s} \{ \|\Delta f(s, \Delta s)\| : s \in S_N, \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N, \|\Delta s\| = r \}. \quad (3.1.12)$$

Так как при любом фиксированном $\|\Delta s\| = r$ точки множества \bar{Q}_Δ вне интервала $[\Delta_{\min}(\|\Delta s\|), \Delta_{\max}(\|\Delta s\|)]$ отсутствуют, то совокупность точек $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$, $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|)$ при различных $\|\Delta s\|$ образуют нижнюю и верхнюю огибающие множества \bar{Q}_Δ соответственно. Ниже в п. 3.1.5 показано, что нижняя огибающая $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ множества \bar{Q}_Δ является возрастающей, а верхняя огибающая $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|)$ – неубывающей функцией аргумента $\|\Delta s\|$; в этом случае характеристики

$\beta(N, 2\delta)$ и $\gamma(N, r)$ однозначно определяются по точным огибающим при любых задаваемых δ и r . Методы построения оценок $\beta(N, 2\delta)$ и $\gamma(N, r)$, основанные на решении экстремальных задач (3.1.11) и (3.1.12) с использованием алгоритмов Монте-Карло, рассмотрены в следующем пункте.

3.1.3. Схемы алгоритмов расчета характеристик неоднозначности однокритериальной задачи

Представлены схемы алгоритмов расчета апостериорной $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ и априорной $\beta(N, 2\delta)$ характеристик неоднозначности вида (2.4.1) и, (2.4.3) соответственно для задачи (1.2.15). Рассматриваются вопросы сходимости алгоритмов, приводятся примеры их тестирования и работы на модельных данных.

Работа алгоритмов иллюстрируется на примере однокритериальной 2D задачи геоэлектрики (1.3.27), которая решается в классе сред $G_1^{2D} \subset G_{N,n}(\Omega, \theta_N, S_N)$ с кусочно-постоянным удельным сопротивлением вида (1.3.18), и сводится к решению уравнению вида (1.2.15). Класс сред G_1^{2D} в данном случае определяется сеткой параметризации θ_N (рис. 3.1.2), покрывающей заданную исследуемую область Ω , и априорными ограничениями S_N на параметры типа (1.3.20):

$$S_N = \{s : 0 \leq s^n \leq D_s, \quad n = 1, \dots, N\}, \quad D_s = 4.$$

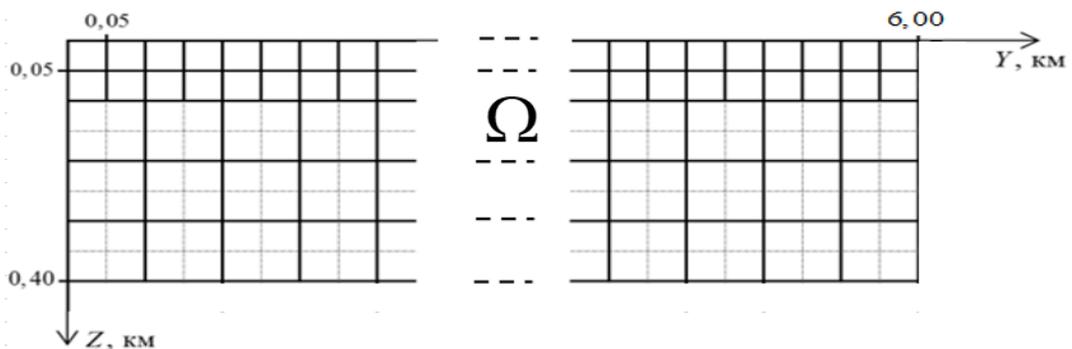


Рис. 3.1.2. Исследуемая область Ω и сетка параметризации рассматриваемого класса сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$; жирными линиями обозначена сетка θ_N параметризации размерности $N = 540$, тонкими – сетка θ_{N_0} прямой задачи размерности $N_0 = 5760$.

Входные данные обратной задачи определяются компонентой $Z_{xy}(y, \omega)$ тензора импеданса E -поляризованного плоского электромагнитного поля, определенного на верхней границе Ω_1 ($z = 0$) области Ω в заданном диапазоне частот $[\omega_1, \omega_2]$

$$f(y, \omega) = Z_{xy}(y, \omega), \quad y \in \Omega_1, \quad \omega \in \Delta_\omega = [\omega_1, \omega_2].$$

При расчетах, иллюстрирующих работу алгоритма, в пространстве решений использовалась норма (1.3.24), в пространстве данных – норма (1.3.22); дискретные аналоги этих норм приводятся в п. 3.1.9.

Численный оператор \tilde{A}_N прямой задачи геоэлектрики конструируется на основе решения соответствующей краевой задачи (1.3.6) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном 2D приближении.

3.1.3.1. Схема алгоритма APR.1.0 априорной характеристики $\beta(N, 2\delta)$

Для удобства изложения выпишем экстремальную задачу (2.4.3) для характеристики $\beta(N, 2\delta)$:

$$\beta(N, 2\delta) = \max \left\{ \|s' - s\| : s, s' \in S_N, \|A_N s' - A_N s\| \leq 2\delta \right\}.$$

А. Построение имитирующего множества \tilde{Q}_Δ для множества \bar{Q}_Δ вида (3.1.7),

$$\tilde{Q}_\Delta = \left\{ \xi(\|\Delta s_m\|, \|\Delta f_m\|), \quad m = 1, \dots, Q \right\}. \quad (3.1.13)$$

Задача построения множества $\tilde{\mathbb{Q}}_{\Delta}$ заключается в генерировании множества пар (s, s') векторов параметров среды и соответствующих откликов $(A_N s, A_N s')$ среды и расчете норм разностей этих пар $\|\Delta s\|$ и $\|A_N s' - A_N s\|$ в диапазоне их возможных изменений. Отметим, что величина $\|\Delta s\|$ при использовании нормы (1.3.24), изменяется в пределах интервала $[0, 1]$.

A1. Строится сетка $r_1, \dots, r_{\nu}, \dots, r_{Q_2} \in [0, 1]$ градаций величины $\|\Delta s\|$

$$\|\Delta s\| = r_{\nu}, \quad \nu = 1, \dots, Q_2. \quad (3.1.14)$$

Примечание. Для нормы (1.3.24) требование $\|\Delta s\| = r_{\nu}$ выполняется при условиях

$$\left(\left| \Delta s^n \right| \leq r_{\nu} D_s \right)^*, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.1.15)$$

где символ «звездочка» означает, что хотя бы при одном n выполняется равенство $\left| \Delta s^n \right| = r_{\nu} D_s$, что обеспечивает выполнение требования $\|\Delta s\| = r_{\nu}$.

A2. Для каждой величины $\|\Delta s\| = r_{\nu}$ с помощью численного прямого оператора \tilde{A}_N задачи (1.2.15) методом Монте-Карло строится множество $\tilde{\mathbb{Q}}_{\Delta, \nu}$ точек

$$\xi_{q, \nu} \left(\left\| \Delta s_{q, \nu} \right\|, \left\| \Delta f_{q, \nu} \right\| \right) \in \tilde{\mathbb{Q}}_{\Delta, \nu},$$

где $\Delta f_{q, \nu} = \tilde{A}_N(s_{q, \nu} + \Delta s_{q, \nu}) - \tilde{A}_N s_{q, \nu}$, $s_{q, \nu} \in S_N$; $\left(\left| \Delta s_{q, \nu}^n \right| \leq r_{\nu} D_s \right)^*$, $n = 1, \dots, N$;

$s_{q, \nu} + \Delta s_{q, \nu} \in S_N$, $q = 1, \dots, Q_1$.

Компоненты $s_{q, \nu}^n, \Delta s_{q, \nu}^n$, $n = 1, \dots, N$, векторов $s_{q, \nu}, \Delta s_{q, \nu}$ меняются независимо случайным образом с равномерной плотностью в интервалах их допустимых. Пары векторов $s_{q, \nu}, \Delta s_{q, \nu}$, для которых условия $s_{q, \nu} + \Delta s_{q, \nu} \in S_N$ или $\left(\left| \Delta s_{q, \nu}^n \right| \leq r_{\nu} D_s \right)^*$ не выполняются, отбрасываются. Объединение всех

подмножеств $\tilde{Q}_{\Delta, \nu}$ образует имитирующее множество $\tilde{Q}_{\Delta} = \bigcup_{\nu} \tilde{Q}_{\Delta, \nu}$ (рис.3.1.3а); общее число точек в \tilde{Q}_{Δ} равно $Q = Q_1 \cdot Q_2$.

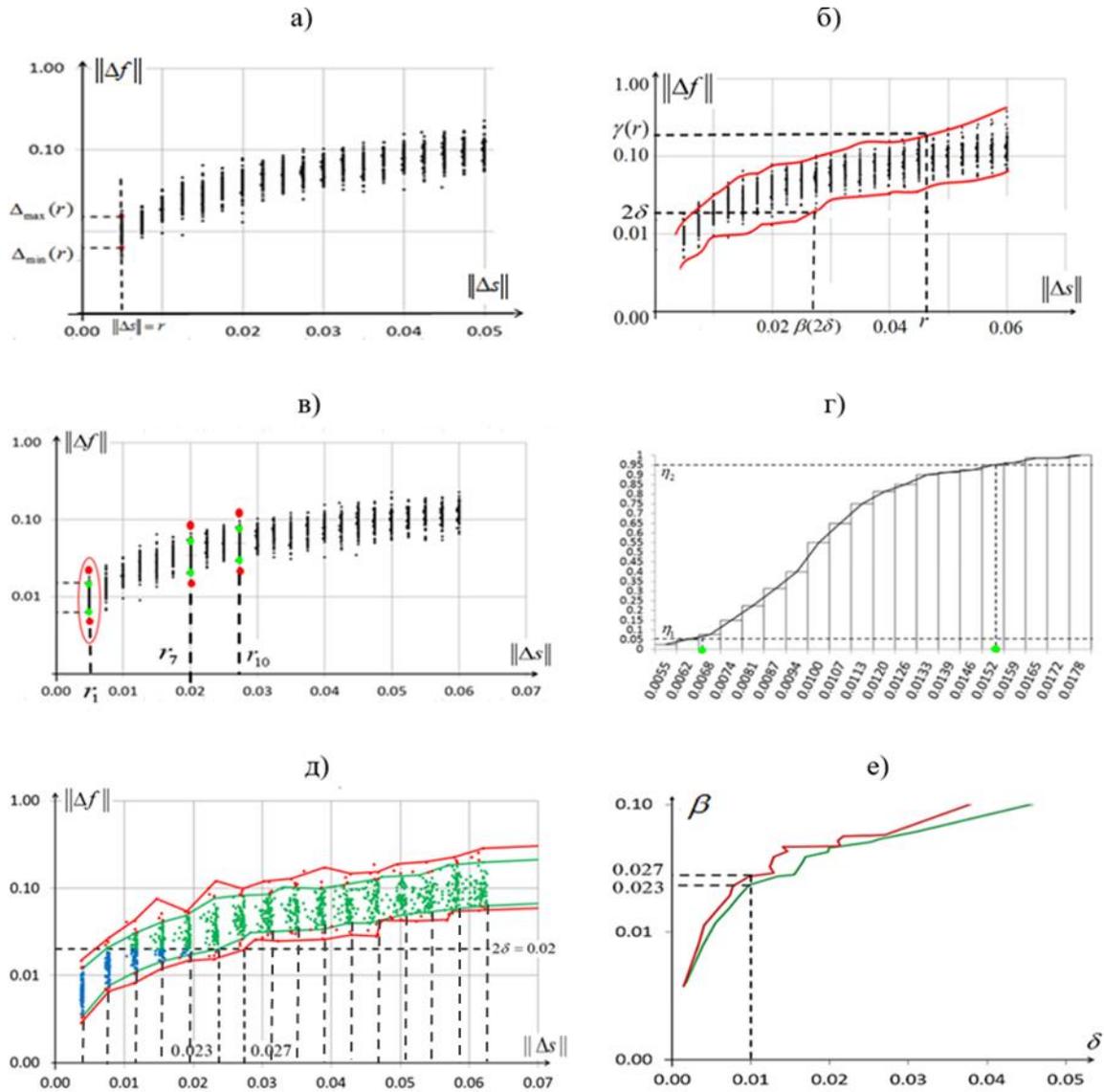


Рис.3.1.3. Иллюстрация работы алгоритма APR.1.0; а) имитирующее множество \tilde{Q}_{Δ} , построенное по правилу пункта А2 схемы алгоритма, с числом точек в группе $Q_1 = 80$, б) огибающие множества \tilde{Q}_{Δ} , проведенные через точки с минимальными и максимальными ординатами; в) имитирующее множество \tilde{Q}_{Δ} , красным цветом обозначены точки с минимальной и максимальной ординатами, зеленым – квантили, определенные по порогу значимости $\eta = 0.05$; г) пример

эмпирической функции распределения $\hat{F}(\Delta)$ для $\|\Delta s\| = r_1$; д) пример построения множества \tilde{Q}_Δ по правилу пункта В2.2 схемы алгоритма; е) фрагменты итоговых кривых оценок $\beta(N, 2\delta)$.

В. Вычисление значений функций $\beta(N, 2\delta)$ и $\gamma(N, r)$.

В1. Для каждой величины r_ν , $\nu = 1, \dots, Q_2$, определяются точки подмножества $\tilde{Q}_{\Delta, \nu}$ с минимальной $\Delta_{\min}(r_\nu) = \|\Delta \tilde{f}_\nu\|^{\min}$ и максимальной $\Delta_{\max}(r_\nu) = \|\Delta \tilde{f}_\nu\|^{\max}$ ординатами. Затем, с помощью интерполяционных процедур, через все эти точки проводятся нижняя $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ и верхняя $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|)$ огибающие для всего имитирующего множества \tilde{Q}_Δ (рис. 3.1.3б).

В2. Точки пересечения нижней огибающей с горизонтальной линией $\|\Delta f\| = 2\delta$, в соответствии с (3.1.8), определяют приближенное значение функции $\beta(N, 2\delta)$; точки пересечения верхней огибающей с вертикальной линией $\|\Delta s\| = r$, в соответствии с (3.1.10), определяют приближенное значение функции $\gamma(N, r)$ (рис.3.1.3б).

В2.1. Целесообразно отбрасывать маловероятные точки имитирующего множества \tilde{Q}_Δ . Для каждого ν -го подмножества $\tilde{Q}_{\Delta, \nu}$ точек строится эмпирическая функция распределения $\hat{F}(\Delta)$ случайной величины $\Delta = \|\Delta f\|$ (рис. 3.1.3г), на основании которой по заданному порогу значимости η находятся квантили Δ_{η_1} , Δ_{η_2} уровней значимости $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = 1 - \eta$ (рис.3.1.3в, зеленые точки); через найденные квантили и крайние точки проводятся соответствующие огибающие множества \tilde{Q}_Δ (с учетом и без учета порога значимости); далее делается переход к пункту В2 схемы алгоритма.

B2.2. Точки подмножества $\tilde{\mathbb{Q}}_{\Delta, \nu}$ можно строить не для фиксированных значений нормы $\|\Delta s\| = r_\nu$, $\nu = 1, \dots, Q_2$, а для интервалов изменения нормы (рис. 3.1.3д)

$$r_{\nu-1} \leq \|\Delta s\| \leq r_\nu, \nu = 2, \dots, Q_2.$$

Для нормы (1.3.24) это условие выполняется при

$$r_{\nu-1} D_s \leq \max_n |\Delta s^n| \leq r_\nu D_s.$$

Соответствующие итоговые графики функции $\beta(N, 2\delta)$ в зависимости от δ , полученные по правилу B2.2, представлены на рис. 3.1.3е (зеленые кривые с учетом задаваемого порога значимости, красные – без его учета). Например, для $\delta = 0.01$ получаем значения $\beta(N, 2\delta) = 0.023$ и $\beta(N, 2\delta) = 0.027$.

B2.3. Огибающие множества $\tilde{\mathbb{Q}}_\Delta$ могут не проводиться; в этом случае среди всех точек множества, удовлетворяющих условию

$$\|\Delta f\| \leq 2\delta, \nu = 1, \dots, Q_2,$$

находится точка (точки) с максимальной абсциссой $\|\Delta s\| = \|\Delta s\|^{\max}$, при этом последняя принимается за оценку искомой величины $\beta(N, 2\delta)$.

Замечание 3.1.2. При построении априорных характеристик иногда оказывается полезным использовать функционалы относительного расстояния в пространстве данных. В этом случае аналогом классической априорной характеристики $\beta(N, 2\delta)$ вида (2.4.3) является характеристика $\bar{\beta}^r(\delta)$ вида (2.1.55).

3.1.3.2. Схема алгоритма APS.1.0 расчета апостериорной характеристики

Апостериорная характеристика $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ неоднозначности фиксированного решения s_δ , $\|A_N s_\delta - f\| \leq \delta$, рассматриваемого уравнения (1.2.15) определяется решением оптимизационной задачи вида (2.4.1):

$$\beta_1(N, f, s_\delta, \delta) = \max \left\{ \|s - s_\delta\| : s \in S_N, \|A_N s - f\| \leq \delta \right\}.$$

Алгоритм APS.1.0 расчета характеристики $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$, где f, s_δ и δ фиксированы, отличается от алгоритма APR.1.0 видом целевого функционала и ограничений и, как следствие, конфигурацией имитирующего множества \tilde{Q}_Δ .

A. Построение имитирующего множества \tilde{Q}_Δ (по правилу B2.2)

A1. Строится сетка $r_1, \dots, r_\nu, \dots, r_{Q_2} \in [0, 1]$ значений величины $\|\Delta s\| = r_\nu$, $\nu = 1, \dots, Q_2$.

A2. Для каждой величины $\nu = 1, \dots, Q_2$, строится имитирующее подмножество $\tilde{Q}_{\Delta, \nu}$ точек вида

$$\xi_{q, \nu} \left(\|\Delta s_{q, \nu}\|, \|\Delta f_{q, \nu}\| \right) \in \tilde{Q}_{\Delta, \nu}, \quad q = 1, \dots, Q_1, \quad r_{\nu-1} \leq \|\Delta s\| \leq r_\nu, \quad \nu = 2, \dots, Q_2,$$

где $\Delta f_{q, \nu} = \tilde{A}_N(s_{q, \nu} + \Delta s_{q, \nu}) - f$, $s_{q, \nu} = s_\delta$, $r_{\nu-1} D_s \leq \max_n |\Delta s_{q, \nu}^n| \leq r_\nu D_s$, $n = 1, \dots, N$,

$s_{q, \nu} + \Delta s_{q, \nu} \in S_N$.

B. Вычисление функции $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$.

B1. Огибающие не проводятся. Среди всех точек имитирующего множества \tilde{Q}_Δ , удовлетворяющих условию $\|\Delta f\| \leq \delta$, находится точка (точки) с максимальной абсциссой $\|\Delta s\| = \|\Delta s\|^{\max}$, которая принимается за оценку искомой величины $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$.

На рис. 3.1.4 представлено имитирующее множество \tilde{Q}_Δ , построенное по правилу пункта А2 схемы алгоритма; в качестве фиксированного решения была принята модель среды, представленная в п. 5.2.1.1 на рис. 5.2.3Г, величина невязки $\delta = 0.051$. Оценка характеристики $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ определялась в соответствии с пунктом В1 схемы алгоритма и составила величину $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta) \approx 25.9\%$.

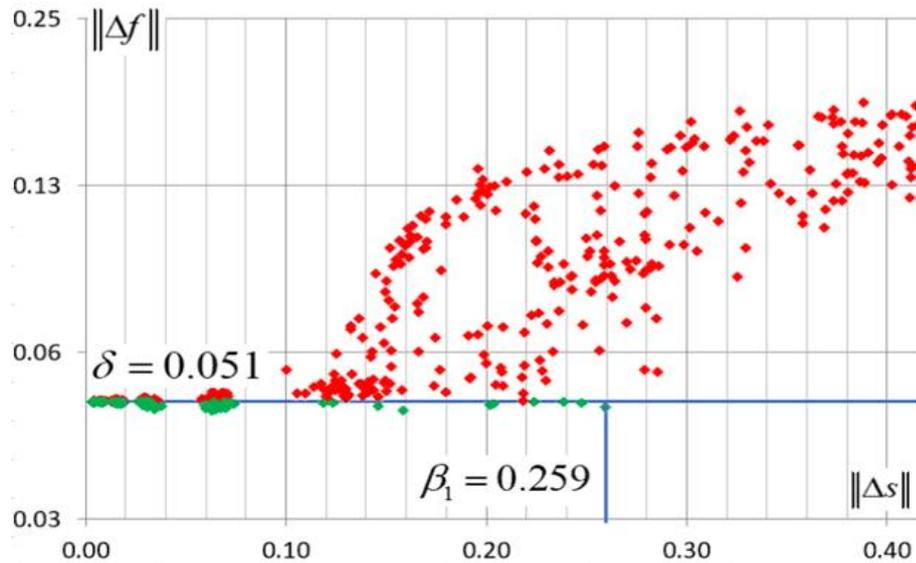


Рис. 3.1.4. Иллюстрация расчета апостериорной характеристики $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$; точками обозначено имитирующее множество \tilde{Q}_v ; для зеленых точек выполнено условие $\|\Delta f_{q,v}\| \leq \delta$, для красных условие $\|\Delta f_{q,v}\| > \delta$, $\delta = 0.051$.

3.1.4. Зависимости оценок от размерности имитирующего множества

Общая размерность имитирующего множества определяется числом выделяемых значений r_ν , $\nu = 1, \dots, Q_2$, значений величины $\|\Delta s\|$ и числом Q_1 примеров в каждой из выделенных градаций.

На рис.3.1.5а,б приводятся примеры типичных зависимостей верхних и нижних квантилей от числа Q_1 примеров для r_7 , r_{10} соответственно, при пороге

значимости $\eta = 0.05$. На рис. 3.1.5в приведена зависимость величины получаемой оценки $\beta(N, 2\delta)$ от числа Q_2 при фиксированном $Q_1 = 80$.

Приведенные примеры и другие многочисленные расчеты показывают, что приемлемые устойчивые оценки $\beta(N, 2\delta)$ могут быть получены при $Q_2 \sim 20$ и $Q_1 \sim 120 - 500$. В каждом конкретном случае число примеров Q_1 следует уточнять на основе дополнительных расчетов.

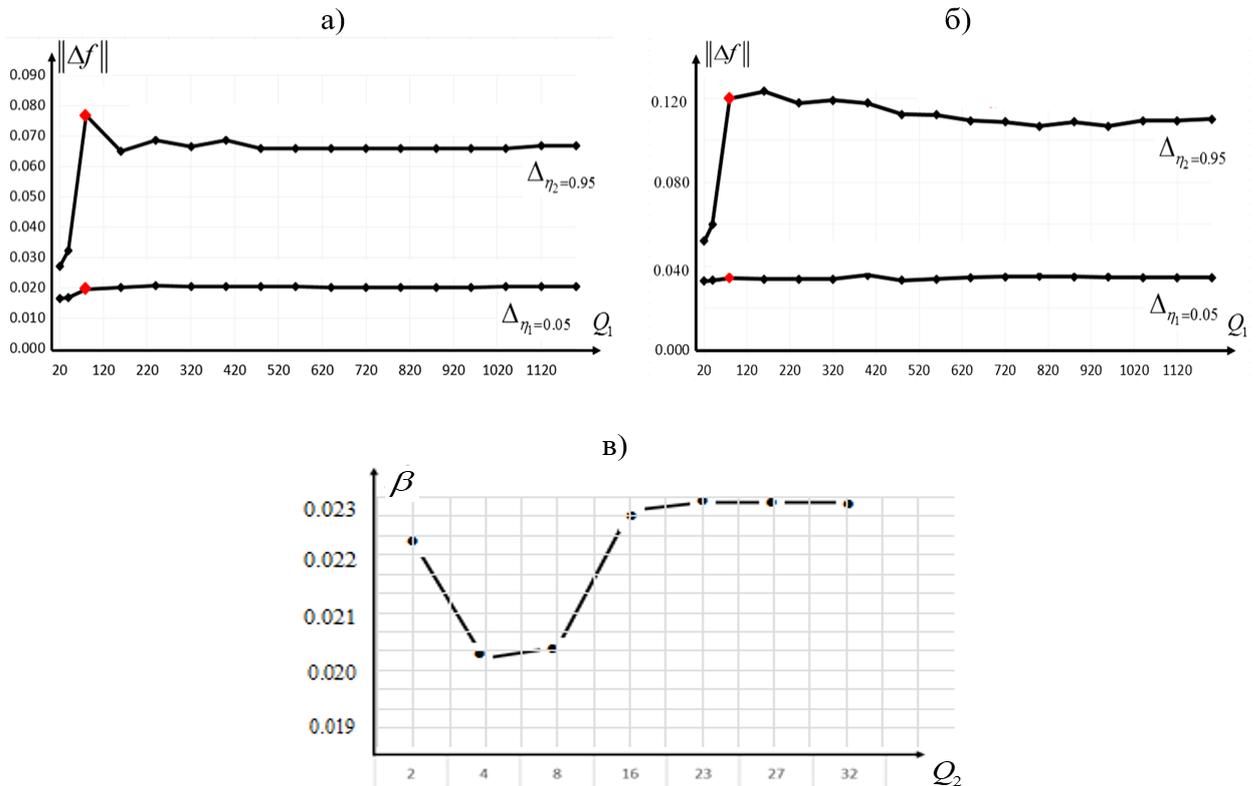


Рис. 3.1.5. Примеры зависимостей численных оценок от числа примеров; а), б) зависимости верхних и нижних квантилей от числа Q_1 для r_7, r_{10} соответственно, при пороге значимости $\eta = 0.05$; в) зависимость получаемой оценки $\beta(N, 2\delta)$ от числа Q_2 при фиксированном Q_1 .

3.1.5. О сходимости алгоритма APR.1.0

Чем гуще сетка $r_1, \dots, r_\nu, \dots, r_{Q_2}$, по горизонтальной оси, тем точнее проводятся огибающие множества \bar{Q}_Δ , и тем точнее определяются искомые оценки. Увеличение числа точек Q_2 важный, но в то же время технически решаемый вопрос. Наиболее существенное влияние на точность получаемых оценок оказывают результаты решения экстремальных задач (3.1.11), (3.1.12), определяющих точки огибающих множества \bar{Q}_Δ (пункт В1 схемы алгоритма). Для исследования сходимости алгоритма решения задач (3.1.11), (3.1.12) понадобится знание некоторых свойств множества \bar{Q}_Δ .

Свойства множества \bar{Q}_Δ

Лемма 3.1.1. *Решения задач (3.1.11), (3.1.12) существуют, при этом*

$$\begin{cases} \Delta_{\min}(\|\Delta s\|) > 0, & \text{при } \|\Delta s\| \neq 0 \\ \Delta_{\min}(\|\Delta s\|) = \Delta_{\max}(\|\Delta s\|) = 0, & \text{при } \|\Delta s\| = 0 \end{cases}. \quad (3.1.16)$$

Доказательство. Докажем существование решения экстремальных задач.

Рассмотрим сначала задачу (3.1.11) при фиксированном $\|\Delta s\| = r$

$$\Delta_{\min}(\|\Delta s\|) = \min_{s, \Delta s} \left\{ \|\Delta f(s, \Delta s)\| : s \in S_N, \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N, \|\Delta s\| = r \right\}.$$

Выделяя циклы минимизации по $s, \Delta s$, перепишем (3.1.11) в виде:

$$\Delta_{\min}(\|\Delta s\|) = \min_s \left\{ \Delta_{1, \min}(s) : s \in S_N \right\}, \quad (3.1.17)$$

где величина $\Delta_{1,\min}(s)$ является решением задачи минимизации (3.1.11) по переменной Δs , при фиксированном $s \in S_N$:

$$\Delta_{1,\min}(s) = \min_{\Delta s} \left\{ \|\Delta f(s, \Delta s)\| : \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N, \|\Delta s\| = r \right\}. \quad (3.1.18)$$

В (3.1.17), (3.1.18) решаются задачи минимизации непрерывного функционала на замкнутых ограниченных подмножествах R^N и их пересечениях, откуда следует существование решений этих задач, а значит и существование решения $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ задачи (3.1.11) (отметим, что множество точек в (3.1.18) с различными $\Delta s \in \hat{S}_N$, для которых $\|\Delta s\| = r$, представляет собой сферу в R^N с радиусом r и центром в нуле, которая, как известно, является ограниченным замкнутым множеством в R^N [Зорич, 1997]). Аналогичным образом доказывается существование решения (3.1.12).

Докажем (3.1.16). Если $\|\Delta s\| = 0$, то $\Delta s = 0$, а значит и $\|\Delta f(s, \Delta s)\| = \|A_N(s + \Delta s) - A_N s\| = 0$. Отсюда следует, что в (3.1.11), (3.1.12) $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|) = 0$, $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|) = 0$, при $\|\Delta s\| = 0$. Так как оператор A_N является инъективным, то $\Delta f(s, \Delta s) = A_N(s + \Delta s) - A_N s \neq 0$ при $\Delta s \neq 0$, откуда следует, что $\|\Delta f(s, \Delta s)\| = \|A_N(s + \Delta s) - A_N s\| > 0$ при $\|\Delta s\| > 0$.

Замечание 3.1.3. Для нормы (1.3.24) условие $\|\Delta s\| = r$ означает, согласно (3.1.15), что

$$\left(|\Delta s^n| \leq r_v D_s \right)^*, \quad n = 1, \dots, N,$$

где символ «звездочка» означает, что хотя бы при одном n выполняется равенство $|\Delta s^n| = r_v D_s$. Из последнего, с учетом ограничений $s \in S_N$, $\Delta s \in \hat{S}_N$, $s + \Delta s \in S_N$ в (3.1.11), получаем множество Π_N ограничений (замкнутый куб в R^N) на компоненты вектора s при фиксированном $\|\Delta s\| = r \leq 0.5$

$$\Pi_N = \{s : rD_s \leq s^n \leq D_s - rD_s, n=1, \dots, N\}, r \leq 0.5,$$

(последние неравенства теряют смысл при $r > 0.5$).

Тогда экстремальные задачи (3.1.17), (3.1.18) запишутся в виде

$$\Delta_{\min}(r) = \min_s \{ \Delta_{1,\min}(s, r) : s \in \Pi_N \},$$

$$\Delta_{1,\min}(s, r) = \min_{\Delta s} \{ \|\Delta f(s, \Delta s)\| : s \in \Pi_N, \|\Delta s\| = r \}, r \leq 0.5.$$

При $0.5 < r \leq 1$ куб Π_N определяются условиями вида

$$\Pi_N = \{s : 0 \leq s^n \leq D_s - rD_s, n=1, \dots, N\}, 0.5 < r \leq 1.$$

Лемма 3.1.2. Ординаты точек $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$, $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|)$ при различных $0 < \|\Delta s\| = r \leq 1$, образующих нижнюю и верхнюю огибающие множества $\bar{\mathbb{Q}}_\Delta$, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} \Delta_{\min}(r_2) > \Delta_{\min}(r_1) > 0, \\ \Delta_{\max}(r_2) \geq \Delta_{\max}(r_1) > 0, \end{cases} r_2 > r_1.$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$. Пусть $\beta(N, 2\delta)$ является решением задачи (2.4.5). Это означает, что существуют элементы $s, s' \in S_N$ такие, что $\|s' - s\| = \|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$ и $\|A_N s' - A_N s\| = \|\Delta f\| \leq 2\delta$, а значит, существует точка $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{\mathbb{Q}}_\Delta$ с координатами $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$, $\|\Delta f\| \leq 2\delta$ (отметим, что этому условию удовлетворяет точка с координатами $\|\Delta f\| = 2\delta$, $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$ (п.2.1.2.1, свойство 4)). Среди точек $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{\mathbb{Q}}_\Delta$, удовлетворяющих условиям $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$, $\|\Delta f\| \leq 2\delta$, согласно Лемме 3.1.1, существует точка с минимальной ординатой $\|\Delta f\| = \Delta_{\min}(\|\Delta s\|) > 0$ при $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$. Отсюда следует неравенство

$$0 < \Delta_{\min}(\|\Delta s\|) \leq 2\delta, \text{ при } \|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta). \quad (3.1.19)$$

На рис. 3.1.6 точка $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{\mathbb{Q}}_\Delta$ с координатами $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$, $\|\Delta f\| = \Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ схематически обозначена цифрой 1. В частности, точка 1 совпадает с точкой с координатами $\|\Delta f\| = 2\delta$, $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta)$.

Во втором случае $\beta(N, 2\delta') = \beta(N, 2\delta)$. Так как, по определению $\beta(N, 2\delta')$, существует пара $(\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta'), \|\Delta f\| \leq 2\delta')$, то существует точка $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|)$ (схематически обозначена на рис. 3.1.6 цифрой 2^*) множества $\bar{\mathbb{Q}}_\Delta$ с координатами

$$\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta') = \beta(N, 2\delta), \quad 0 < \|\Delta f\| \leq 2\delta'. \quad (3.1.21)$$

Точка 2^* не может быть ниже точки 1, так как последняя, согласно доказанному ранее, является точкой с минимальной ординатой $\|\Delta f\| = \Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ при $\|\Delta s\| = \beta(N, 2\delta') = \beta(N, 2\delta)$.

Так как величины δ и δ' были выбраны произвольно ($\delta < \delta'$), то из (3.1.19) - (3.1.20) следует первое неравенство из системы неравенств Леммы 3.1.2.

Полученный результат означает, что ординаты точек нижней огибающей $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ строго возрастают с ростом $\|\Delta s\|$, при этом для некоторых значений $\|\Delta s\|$ точки (типа 1 и 2^*), определяемые условиями (3.1.19), (3.1.21) могут располагаться строго вертикально одна над другой, что обусловлено монотонным неубыванием функции $\beta(N, \delta)$ при увеличении δ .

Таким образом, нижняя огибающая $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ множества $\bar{\mathbb{Q}}_\Delta$ является монотонно возрастающей, в некоторых точках, возможно, многозначной функцией аргумента $\|\Delta s\|$. Из построения кривой $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$ следует, что каждому значению $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|) = 2\delta$ соответствует значение $\beta(N, 2\delta)$, таким образом, функция, обратная к $\Delta_{\min}(\|\Delta s\|)$, является монотонно неубывающей функцией $\beta(N, 2\delta)$.

По аналогичной схеме доказывается второе неравенство Леммы 3.1.2 для верхней огибающей: $\Delta_{\max}(r_2) \geq \Delta_{\max}(r_1) > 0$, при $r_2 > r_1$, которое означает, что верхняя огибающая $\Delta_{\max}(\|\Delta s\|)$ является монотонно неубывающей функцией аргумента $\|\Delta s\|$. Как уже отмечалось выше, в этом случае характеристики $\beta(N, 2\delta)$ и $\gamma(N, r)$ однозначно определяются по огибающим при любых задаваемых δ и r .

**Доказательство сходимости алгоритма построения обгибающих
множества $\bar{\mathbb{Q}}_{\Delta}$**

Целевой (непрерывный) функционал $\|\Delta f(s, \Delta s)\|$ в задачах (3.1.11), (3.1.12) зависит от двух векторов: $s = (s^1, \dots, s^N) \in S_N$ и $\Delta s = (\Delta s^1, \dots, \Delta s^N) \in \hat{S}_N$ и, таким образом, является некоторой функцией $2N$ переменных x^1, \dots, x^{2N} , которые с учетом (3.1.4)–(3.1.6) определяются через компоненты векторов s и Δs следующим образом

$$\begin{cases} x^n = s^n, & 0 \leq x^n \leq D_s, \\ x^{N+n} = \Delta s^n, & -D_s \leq x^{N+n} \leq D_s, \end{cases} \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.1.22)$$

Рассмотрим сначала задачу (3.1.11) при фиксированном $\|\Delta s\| = r \leq 0.5$, которая в новых обозначениях принимает вид

$$\Delta_{\min}(r) = \min \{ \varphi(X), X \in R^{2N}, X \in \Pi \}, \quad (3.1.23)$$

где $\varphi(X)$ – функционал, действующий в соответствии с заменой переменных (3.1.22); Π – замкнутое ограниченное множество, которое при фиксированном $\|\Delta s\| = r \leq 0.5$ для нормы (1.3.24), согласно Замечанию 3.1.3, определяется следующим образом:

$$\Pi = \left\{ X : rD_s \leq x^n \leq D_s - rD_s, -rD_s \leq x^{N+n} \leq rD_s, \max_n |x^{N+n}| = rD_s, n = 1, \dots, N \right\}. \quad (3.1.24)$$

Задача (3.1.23)–(3.1.24) рандомизируется и решается методом случайного поиска с применением алгоритмов Монте-Карло [Соболь, 1973]. Обозначим через $X^* \in \Pi$ точку (возможно не единственную), на которой достигается глобальный минимум задачи: $\varphi(X^*) \leq \varphi(X), X \in \Pi$. Векторы $X = (x^1, \dots, x^{2N})$ будем рассматривать, как $2N$ -мерные случайные векторы (точки) в соответствующем вероятностном пространстве, мера в котором, как известно [Ширяев, 2007], задается с помощью

$2N$ -мерной функции распределения $\mathbb{F}(x^1, \dots, x^{2N})$ случайных величин x^1, \dots, x^{2N} . Случайный поиск решения задачи (3.1.23) методом Монте-Карло заключается в том, что в области минимизации Π строится множество пробных случайных точек $X_1, X_2, \dots, X_q, \dots, X_{Q_1}$, с плотностью распределения, определяемой выражением

$$p(x^1, \dots, x^{2N}) = p_1(x^1)p_2(x^2)\dots p_{2N}(x^{2N}), \quad X = (x^1, \dots, x^{2N}) \in \Pi, \quad (3.1.25)$$

где $p_n(x^n) > 0$ – одномерные плотности распределения случайных величин x^1, \dots, x^{2N} , отличные от нуля в пределах соответствующих интервалов допустимых значений; далее находится точка \tilde{X}^* , в которой $\varphi(\tilde{X}^*) = \min_{1 \leq q \leq Q_1} \varphi(X_q)$, и принимается за приближенное решение задачи (3.1.23). Если при минимизации использовать независимые пробные точки $X_q \in \Pi$, $q = 1, \dots, Q_1$, с плотностью распределения $p > 0$ вида (3.1.25), то процесс случайного поиска сходится по вероятности при $Q_1 \rightarrow \infty$ [Соболь, 1973]:

$$\forall \varepsilon > 0: P(\|\tilde{X}^* - X^*\| > \varepsilon) \xrightarrow{Q_1 \rightarrow \infty} 0.$$

В частности, если никакой предварительной информации о расположении точки X^* нет, то используются пробные точки, равномерно распределенные в области минимизации Π (*простейший случайный* или *слепой поиск*).

Равномерные плотности $p_n(x^n)$ в (3.1.25) для интервалов изменений компонент случайных векторов определяются условиями:

$$\begin{cases} p_n(x^n) = \frac{1}{D_s - 2rD_s}, & x^n \in [rD_s, D_s - rD_s], & p_n(x^n) = 0, & x^n \notin [D_s - rD_s, rD_s], \\ p_{n+N}(x^{N+n}) = \frac{1}{2rD_s}, & x^{N+n} \in [-rD_s, rD_s], & p_{n+N}(x^{N+n}) = 0, & x^{N+n} \notin [-rD_s, rD_s], \end{cases} \quad n = 1, \dots, N.$$

При генерировании выборок случайных значений компонент x^{N+n} в интервале $[-rD_s, rD_s]$ необходимо искусственно задавать точки, для которых выполняется условие $|x^{N+n}| = rD_s$, хотя бы для одного n .

Аналогичным образом доказывается сходимость алгоритма для случая $0.5 < r \leq 1$, а также для задачи (3.1.12).

Мы рассмотрели вопросы сходимости алгоритма APR.1.0 расчета априорной характеристики $\beta(N, 2\delta)$. Доказательство сходимости алгоритма APS.1.0 расчета апостериорной оценки $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ строится по аналогичной схеме.

3.1.6. Пример тестирования алгоритма APR.1.0

Рассмотрим простейший случай уравнения типа (1.2.15) с оператором возведения в квадрат:

$$s^2 = f, \quad s \in [0, 1], \quad s, f \in R^1. \quad (3.1.26)$$

Зададимся нормой в R^1 : $\|x\|_{R^1} = |x|$. В этом случае классический модуль непрерывности обратного оператора для уравнения (3.1.26) определяется следующим образом

$$\beta(\delta) = \max_{s, s' \in [0, 1]} \{ |s' - s| : |(s')^2 - s^2| \leq \delta \},$$

и, как нетрудно убедиться, вычисляется по формуле

$$\beta(\delta) = \sqrt{\delta}.$$

На рис. 3.1.7а представлено имитирующее множество, на рис. 3.1.7б – истинная и расчетная функции $\beta(\delta)$. Кривая зависимости ошибки $\Delta\bar{\beta}$ (модуль разности расчетной и истинной величин $\beta(\delta)$, осредненный по всем точкам кривой) от числа Q_1 точек в группе аппроксимируется (методом наименьших квадратов) функцией $\frac{a}{Q_1^b}$ (рис. 3.1.7в, бежевая кривая). Лучшее совпадение достигнуто при $a = 0.3$, $b = 0.94$; таким образом, скорость сходимости для данного

примера составляет $\Delta\bar{\beta} \approx O\left(\frac{1}{Q_1}\right)$. Расчетные данные показывают, что, величина ошибки $\Delta\bar{\beta} < 0.01$ достигается уже при $Q_1 \approx 40$.

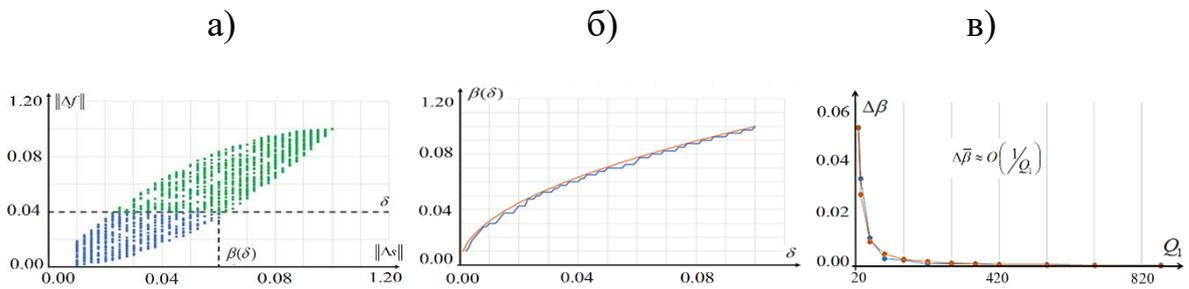


Рис. 3.1.7. Иллюстрация расчета модуля непрерывности обратного оператора $\beta(\delta)$ для уравнения $s^2 = f$; а) имитирующее множество \tilde{Q}_Δ ; синим цветом обозначены точки, удовлетворяющие условию $\|\Delta f\| \leq \delta$; б) теоретическая (бежевая) и расчетная (синяя) кривые $\beta(\delta)$; в) зависимость средней ошибки $\Delta\bar{\beta}$ от числа Q_1 точек в одной группе.

3.1.7. Схемы алгоритмов расчета локальных характеристик неоднозначности

Рассмотрим особенности расчета локальных характеристик на примере двухкритериальных задач геоэлектрики вида (1.2.17)

$$\begin{cases} A_{1,N}s = f_1, \\ A_{2,N}s = f_2, \end{cases} \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_1, f_2 \in F.$$

Задача расчета локальных характеристик неоднозначности задачи (1.2.17) является частным случаем экстремальной задачи (3.1.1) при $\mathbb{C} = 2$. Проиллюстрируем основные отличия алгоритма решения этой задачи от рассмотренного выше в п. 3.1.3 алгоритма расчета характеристики $\beta(N, 2\delta)$ для задачи (1.2.15) на примерах расчета локальных априорных и апостериорных характеристик двухкритериальных задач.

3.1.7.1. Схема алгоритма APR.2.0 расчета локальных априорных характеристик

Локальная априорная характеристика двухкритериальной задачи (1.2.17) по выделенной подобласти $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ является решением экстремальной задачи (2.4.16):

$$\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) = \max \left\{ \|s' - s\| : s \in S_N, s' \in S_i, \|A_{1,N}s' - A_{1,N}s\| \leq \delta_1, \|A_{2,N}s' - A_{2,N}s\| \leq \delta_2 \right\}.$$

Схема расчета локальной характеристики $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ рассматривается на примере двухкритериальной обратной 2D задачи геоэлектрики (1.3.33) для заданного слоя сетки параметризации с использованием бимодальных *EH* данных. При расчетах в (2.4.16) для простоты изложения было принято $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Обратная задача по-прежнему решается в классе $G_1^{2D} \subset G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ с кусочно-постоянным удельным сопротивлением вида (1.3.18), определяемом сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω (рис. 3.1.2), при априорных ограничениях S_N на параметры (1.3.21). В качестве подобласти $\bar{\Omega}_i$ был взят 3-й слой сетки параметризации θ_N . Входные данные *EH* обратной задачи определяются компонентами $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$, заданными на границе Ω_1 ($z = 0$) области Ω .

Численные операторы $\tilde{A}_{1,N}$, $\tilde{A}_{2,N}$ прямых задач конструируются на основе решения соответствующих краевых 2D задач для E - и H -поляризации в области Ω для системы уравнений Максвелла в 2D приближении с последующим пересчетом в импедансы Z_{xy} , Z_{yx} (см. п. 1.3.1).

При расчетах характеристик неоднозначности для первого и второго уравнений системы (1.2.17) в пространстве решений использовалась норма вида (1.3.24), в пространстве данных – норма вида (1.3.22); дискретные аналоги норм и уклонений приводятся в п. 3.1.9.

Отличия алгоритма APR.2.0 от алгоритма APR.1.0 состоят в том, что для уравнений системы (1.2.17) с помощью численных прямых операторов $\tilde{A}_{c,N}$, $c = 1, 2$ для фиксированной подобласти $\bar{\Omega}_i$ формируются два имитирующих множества точек $\mathbb{Q}_{\Delta,i}^c$, $c = 1, 2$ по следующей схеме.

1. Для каждого интервала $r_{\nu-1} \leq \|\Delta s\| \leq r_\nu$, $\nu = 2, \dots, Q_2$ строятся множества точек

$$\xi_{q,\nu,i,c} (\|\Delta s_{q,\nu,i,c}\|, \|\Delta f_{q,\nu,i,c}\|) \in \mathbb{Q}_{\Delta,i}^c, \quad q = 1, \dots, Q_1, \quad c = 1, 2, \quad (3.1.27)$$

где:

$$\begin{aligned} \Delta f_{q,\nu,i,c} &= \tilde{A}_{c,N}(s_{q,\nu,i,c} + \Delta s_{q,\nu,c,i}) - \tilde{A}_{c,N}s_{q,\nu,i,c}, \quad s_{q,\nu,i,c} \in S_N, \quad \Delta s_{q,\nu,c,i} \in S_i^*; \\ r_{\nu-1}D_s &\leq \max_n |\Delta s_{q,\nu,c,i}^n| \leq r_\nu D_s; \quad s_{q,\nu,i,c} + \Delta s_{q,\nu,c,i} \in S_N, \quad n = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

$S_i^* \subset S_N$ – подмножество векторов, у которых N^i компонент $x^{i,1}, \dots, x^{i,N^i}$ отличны от нуля только для ячеек сетки параметризации, принадлежащих i -й анализируемой подобласти $\bar{\Omega}_i$. Условие $r_{\nu-1}D_s \leq \max_n |\Delta s_{q,\nu,c,i}^n| \leq r_\nu D_s$ (см. B2.2 алгоритма APR.1.0) обеспечивает выполнение поинтервальных требований $r_{\nu-1} \leq \|\Delta s\| \leq r_\nu$.

2. Среди всех точек, имитирующих множеств $\mathbb{Q}_{\Delta,i}^c$, $c = 1, 2$, одновременно удовлетворяющих условиям

$$\|\Delta f_c\| \leq 2\delta_c, \quad c = 1, 2, \quad (3.1.29)$$

находится точка (точки) с максимальной абсциссой $\|\Delta s\| = \|\Delta s\|^{\max}$, которая принимается за приближенное решение экстремальной задачи (2.4.16).

На рис. 3.1.8а приведены: точки первого множества $\mathbb{Q}_{\Delta, v, i}^1$ (YX-компонента), среди которых синие точки удовлетворяют условию $\|\Delta f\| \leq \delta = 0.02$, красные точки удовлетворяют обоим условиям (3.1.29). Точка с максимальной абсциссой среди синих точек – $\beta_1^i(N, 2\delta) = 0.038$, среди красных – $\beta_{1,2}^i(N, 2\delta) = 0.030$.

На рис. 3.1.8б приведены: точки второго множества $\mathbb{Q}_{\Delta, i}^2$ (XY-компонента), среди которых синие точки удовлетворяют условию $\|\Delta f\| \leq \delta$, красные точки удовлетворяют обоим условиям (3.1.27); точка с максимальной абсциссой среди синих точек – $\beta_1^i(N, 2\delta) = 0.051$, среди красных – $\beta_{1,2}^i(N, 2\delta) = 0.031$.

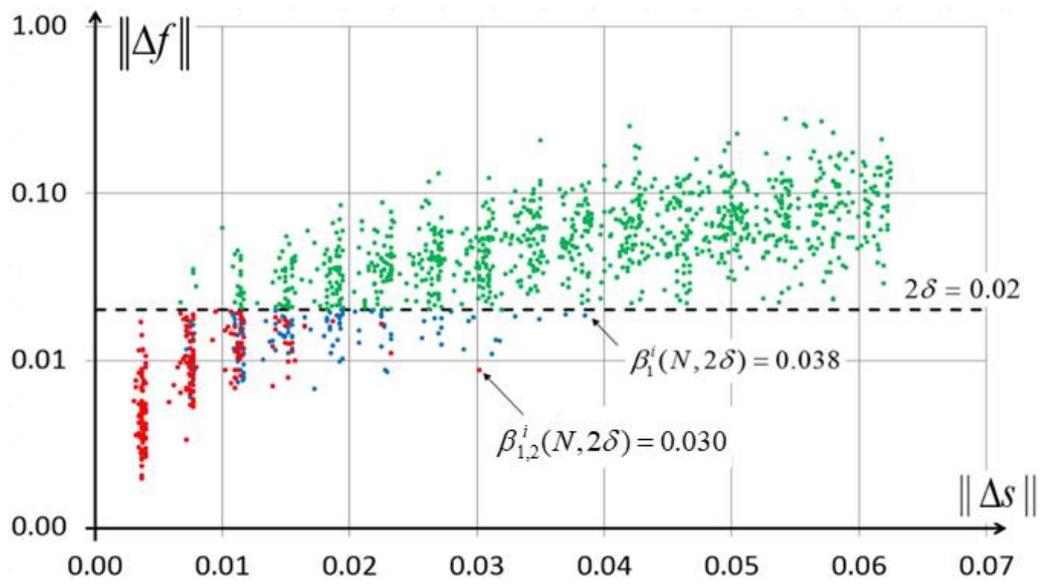
Из двух точек $\beta_{1,2}^i(N, 2\delta) = 0.030$, $\beta_{1,2}^i(N, 2\delta) = 0.031$ выбираем точку с максимальной абсциссой, которая принимается за приближенное решение экстремальной задачи (2.4.16):

$$\beta_c^i(N^i, 2\bar{\delta}) = 0.031.$$

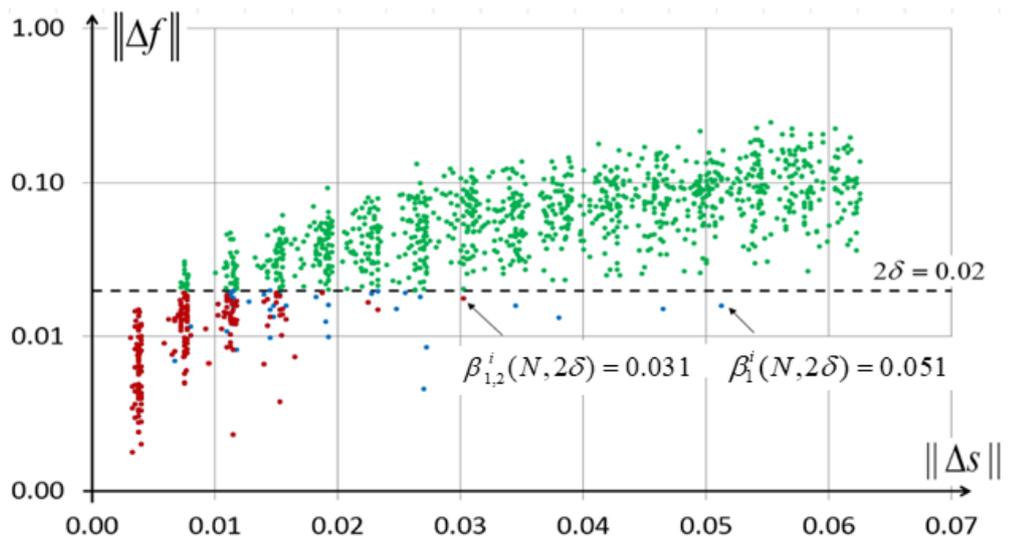
Полученный результат означает, что при заданных невязках $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ для рассматриваемой двухкритериальной задачи δ -эквивалентные значения параметров 3-го яруса сетки параметризации могут отличаться друг от друга в пределах 3.1% при любых значениях параметров остальных ярусов сетки и любых входных данных рассматриваемой обратной задачи.

Комментарии. Кривые характеристик $\beta_1^i(N, 2\delta)$ по каждому из критериев и по комплексу критериев $\beta_c^i(N^i, 2\bar{\delta})$ приведены на рис. 3.1.8в. Из рисунков видно, что в среднем неоднозначность определения параметров 3-го яруса сетки параметризации по двум критериям не больше (в данном случае меньше), чем по каждому из них, что соответствует теории (см. раздел 2.3).

a)



б)



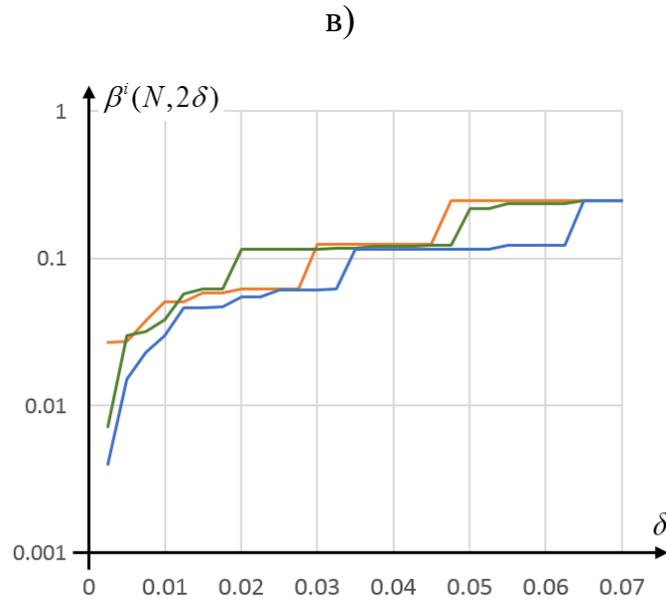


Рис.3.1.8. Пример расчета характеристик $\beta_1^i(N, 2\delta)$, $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$;

на рис. а), б) представлены множества $\mathbb{Q}_{\Delta, i}^c(\|\Delta s_{q, v, c, i}\|, \|\Delta f_{q, v, c, i}\|)$, $c = 1, 2$, пробных точек с координатами $\|\Delta s\|$ по горизонтальной оси и $\|\Delta f\|$ по вертикальной оси: а) для компоненты Z_{yx} , б) для компоненты Z_{xy} ; в) кривые $\beta_1^i(N, 2\delta)$, $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$: зеленая кривая $\beta_1^i(N, 2\delta)$ соответствует YX-компоненте, оранжевая – XY-компоненте, синяя кривая $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ соответствует комплексу двух компонент YX, XY.

3.1.7.2. Схема алгоритма APS.2.0 расчета локальных апостериорных характеристик

Рассматривается экстремальная задача (2.4.14) расчета локальной (для заданной подобласти $\bar{\Omega}_i$) апостериорной характеристики $\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ неоднозначности двухкритериальной задачи (1.2.17) для решения s_δ , удовлетворяющего системе уравнений (1.2.17) с невязкой $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$, правой части $\bar{f} = (f_1, f_2)$:

$$\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta}) = \max \left\{ \|s - s_\delta\| : s \in S_{\delta,i} \left\| A_{1,N} s - f_1 \right\| \leq \delta_1, \left\| A_{2,N} s - f_2 \right\| \leq \delta_2 \right\}.$$

Работа алгоритма иллюстрируется на примере двухкритериальной обратной 3D задачи геоэлектрики (1.3.34) и использованием бимодальных ZW данных. Обратная задача решается в классе $G_2^{3D} \subset G_{N,n}(\Omega, \theta_N, S_N)$ с кусочно-постоянным удельным сопротивлением вида (1.3.18) на сетке параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω (рис.5.2.15), и априорными ограничениями (1.3.21) на параметры (подробнее про класс сред G_2^{3D} см. п. 5.2.2.2). В качестве исследуемой подобласти $\bar{\Omega}_i$ был выбран 4-й ярус сетки параметризации θ_N . Входные данные ZW обратной задачи (1.2.17) определяются компонентами тензора \hat{Z} импеданса и вектора-типпера \hat{W} .

Численные операторы прямых задач $\tilde{A}_{1,N}$, $\tilde{A}_{2,N}$ конструируются на основе решения соответствующей краевой 3D задачи в области Ω для системы уравнений Максвелла с последующим пересчетом в компоненты тензора импеданса и вектора-типпера (см. п. 1.3.2.1).

При расчетах характеристик неоднозначности использовались следующие нормы: в пространстве решений – норма вида (1.3.24), в пространстве данных – норма вида (1.3.31) при $\alpha^j = \frac{1}{M_z}$, $j = 1, \dots, M_z$, $M_z = 4$ и $M_z = 2$ для первого и

второго уравнений системы (1.2.17) соответственно ($j=1, \dots, M_z$; дискретные аналоги формул для расчета уклонений и невязок см. в п. 3.1.9).

Алгоритм APS.2.0 расчета локальных апостериорных характеристик, отличается от алгоритма APR.2.0 видом целевого функционала, ограничений и, как следствие – конфигурацией имитирующих множеств $\mathbb{Q}_{\Delta,i}^c$, $c=1, 2$.

Множества $\mathbb{Q}_{\Delta,i}^c$, $c=1, 2$ в алгоритме APS.2.0 строятся по следующей схеме.

1. Для каждого интервала $r_{v-1} \leq \|\Delta s\| \leq r_v$, $v=2, \dots, Q_2$ строятся множества точек

$$\xi_{q,v,i,c}(\|\Delta s_{q,v,c,i}\|, \|\Delta f_{q,v,c,i}\|) \in \mathbb{Q}_{\Delta,i}^c, \quad q=1, \dots, Q_1, \quad (3.1.30)$$

где

$$\Delta f_{q,v,c,i} = \tilde{A}_{c,N}(s_{q,v,c,i} + \Delta s_{q,v,c,i}) - f_c, \quad c=1, 2, \quad s_{q,v,c,i} = s_\delta, \quad \Delta s_{q,v,c,i} \in S_i^*,$$

$$r_{v-1} D_s \leq \max_n |\Delta s_{q,v,c,i}^n| \leq r_v D_s, \quad s_{q,v,c,i} + \Delta s_{q,v,c,i} \in S_N, \quad n=1, \dots, N; \quad q=1, \dots, Q_1; \quad c=1, 2;$$

множество $S_i^* \subset S_N$ определяется в (3.1.28), $s_\delta \in S_N$ – фиксированный вектор.

На рис. 3.1.9 представлен пример, иллюстрирующий работу алгоритма построения оценки $\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ фиксированного решения s_δ уравнения (1.2.17); в качестве фиксированного решения была принята модель среды, представленная в п. 5.2.2.2 на рис. 5.2.19; парциальные невязки решения составили $\delta_1 = 18.06\%$, $\delta_2 = 11.28\%$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно.

На рис. 3.1.9 представлены 2 имитирующих множества $\tilde{\mathbb{Q}}_{\Delta,v,i}^c$, $c=1, 2$, для 4-го яруса сетки параметризации; синим цветом обозначены точки, соответствующие импедансу, красным – типперу; горизонтальные линии соответствуют полученным невязкам $\delta_1 = \delta_{imp} = 18.06\%$, $\delta_2 = \delta_{ip} = 11.28\%$ по импедансу и типперу соответственно.

Среди всех точек обоих имитирующих множеств $\mathbb{Q}_{\Delta,v,i}^c$, $c=1, 2$, одновременно удовлетворяющих условиям

$$\|\Delta f_c\| \leq \delta_c, \quad c=1, 2,$$

находится точка (точки) с максимальной абсциссой $\|\Delta s\| = \|\Delta s_{q,v,i,c}\|^{\max}$, которая принимается за приближенное решение экстремальной задачи (2.4.14):

$$\beta_{1,c}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta}) \approx 5.73\% .$$

Полученный результат означает, что при достигнутых невязках решения $\delta_1 = 18.06\%$, $\delta_2 = 11.28\%$, δ -эквивалентные значения параметров 4-го слоя могут отличаться в пределах 5.73% от значений, найденных при решении обратной задачи, при фиксированных значениях параметров остальных ярусов.

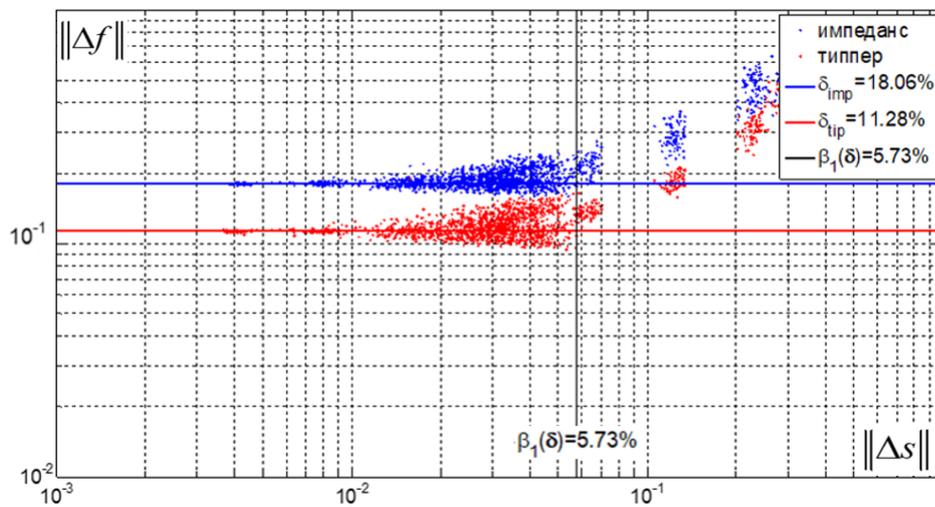


Рис. 3.1.9. Иллюстрация расчета локальной апостериорной характеристики $\beta_{1,c}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ для 4-го яруса ($i = 4$) сетки параметризации; точками обозначены имитирующие множества $\tilde{Q}_{\Delta,v,i}^c$, $c = 1, 2$: красным цветом обозначены точки, соответствующие типперу, синим – импедансу; горизонтальные линии соответствуют невязкам $\delta_1 = \delta_{imp}$, $\delta_2 = \delta_{tip}$ полученного решения по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно.

Алгоритмы расчета характеристики неоднозначности $\beta_c(N, 2\bar{\delta})$, $\beta_{1,c}(N, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ по всей области Ω отличаются от рассмотренных выше локальных характеристик лишь тем, что изменения векторов параметров задаются во всей области Ω .

Другие многочисленные примеры расчета априорных и апостериорных характеристик для задач геоэлектрики приводятся в разделе 3.2 и Главах 5–6.

Доказательства сходимости алгоритмов расчета локальных априорных и апостериорных характеристик принципиально не отличаются от рассмотренных в п. 3.1.5.

3.1.8. Замечания по расчету характеристик неоднозначности многокритериальных задач

Система уравнений (1.3.33) является исходной при постановке двумерной двухкритериальной задачи геоэлектрики. При ее решении вычисляются парциальные невязки найденного приближенного решения по каждому из критериев, т.е. для каждого из уравнений исходной системы (1.3.33), и оценки неоднозначности решения $\beta_{1,C}(N, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ или $\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ (вида (2.4.13), (2.4.14) соответственно) в соответствии со схемой п. 3.1.7.

В случае, когда система (1.3.33) решается методом общей инверсии (см. п. 1.3.2.2) и сводится к объединенному операторному уравнению (1.3.35) (которое является частным случаем однокритериального уравнения (1.2.15)), вычисляется полная скалярная невязка по совокупности обоих критериев. Для этого уравнения вычисляются оценки неоднозначности вида $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ или $\beta_1^i(N^i, f, s_\delta, \delta)$ вида (2.4.1), (2.4.9) по схеме, изложенной в п. 3.1.3, для однокритериальной задачи.

Получаемые в этих двух случаях оценки неоднозначности, вообще говоря, различны, так как соответствуют различным постановкам двухкритериальной задачи. Система уравнений (1.3.33) является исходной при постановке двухкритериальной задачи, поэтому оценки на основе этой системы в большей степени соответствуют смыслу задачи и являются более строгими. Однако оценки

для объединенного уравнения (1.3.35) вычисляются проще, так как рассчитываются по схеме однокритериальной задачи. Поэтому в некоторых случаях, с целью упрощения вычислений, мы будем использовать эти оценки.

Вышесказанное касается и системы (1.3.34), определяющей решение трехмерной двухкритериальной задачи геоэлектрики.

3.1.9. Вопросы дискретизации используемых норм

Пространство решений

При расчетах невязок и характеристик неоднозначности приближенных решений необходимо вычислять нормы разности $\Delta s = \|s - s'\|$, $\Delta f = \|f - f'\|$ элементов в пространствах решений и данных.

В пространстве решений для всех задач используется норма (1.3.24). Для этой нормы уклонение между элементами пространства решений для принятых априорных ограничений (1.3.21) записывается в виде

$$\|\Delta s\|_0 = \|s' - s\|_0 = \frac{1}{4} \max_{1 \leq n \leq N} |s'^n - s^n|. \quad (3.1.31)$$

При использовании нормы (1.3.24) выполняются условия (1.3.26):

$$\|s' - s\|_0 \leq 1, \quad s', s \in S_N.$$

Пространство данных

Для 2D задачи (1.3.27) со скалярной правой частью используется норма (1.3.22) в пространстве данных $L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$. Зададим частотную и пространственную сетки в частотном интервале Δ_ω и области измерений Ω_1 .

Расстояние $\|\Delta f\| = \|f' - f\|$ между элементами f и $f' \in L_{2,b}[\Omega_{2,\omega}]$ вычисляется на основе конечномерной аппроксимации нормы (1.3.22) с весом вида (1.3.23) по формуле

$$\|\Delta f\|_{L_{2,b}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{M_\omega} b_k^q \sum_{m=1}^{M_p} b_{m,k}^{пч} |\Delta f_{m,k}|^2}, \quad (3.1.32)$$

где $f_{m,k}$, $m = 1, \dots, M_p$ - сеточный вектор данных в области измерений на k -й частоте; $\Delta f_{m,k} = f_{m,k} - f'_{m,k}$ - разность между элементами данных; M_ω - число используемых частот; b_k^q , $b_{m,k}^{пч}$, $m = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, M_\omega$ - сеточные векторы частотных и пространственно-частотных весов соответственно.

Частотные веса задаются в виде постоянной величины

$$b_k^q = \frac{1}{M_\omega}, \quad k = 1, \dots, M_\omega, \quad (3.1.33)$$

при необходимости, могут также использоваться различные частотные веса.

Пространственно-частотные веса $b_{m,k}^{пч}$ на k -й частоте определяются по формуле

$$b_{m,k}^{пч} = \frac{1}{b_k^f}, \quad k = 1, \dots, M_\omega,$$

где

$$b_k^f = \max_q \sum_{m=1}^{M_p} |f_{m,k}^q|^2, \quad f^q \in E_{bs}, \quad q = 1, \dots, Q_{bs}, \quad (3.1.34)$$

E_{bs} - расчетное множество E_{bs} опорных решений $f^q \in E_{bs}$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$ прямой задачи (1.3.27) (всевозможных точных откликов среды, подробнее см. п. 4.1.2)

Фактически при расчетах вместо строгого максимума берется квантиль $\eta_1 = 0.95$, при пороге значимости $\eta_2 = 0.05$ этой величины. В итоге формула (3.1.32) для уклонения $\|\Delta f\| = \|f' - f\|$ записывается в виде

$$\|\Delta f\|_{L_{2,b}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{M_\omega} \frac{1}{M_\omega} \left(\frac{1}{b_k^f} \sum_{m=1}^{M_p} |\Delta f_{m,k}^f|^2 \right)}. \quad (3.1.35)$$

Отметим, что для указанных весов итоговая величина уклонения $\|\Delta f\|_{L_{2,b}} \leq 1$.

Для обратной задачи с векторной правой частью (3D задача (1.3.28) и многокритериальные задачи) уклонение в пространстве данных \hat{F}_{M_z} определяется на основе конечномерной аппроксимации нормы (1.3.31) по формуле

$$\|\Delta f\|_{\hat{F}_{M_z}} = \sum_{j=1}^{M_z} \alpha^j \|\Delta f_j\|_{L_{2,b^j}}, \quad (3.1.36)$$

где величина $\|\Delta f_j\|_{L_{2,b}}$ вычисляется для каждой j -й компоненты векторной функции $f = (f^1, \dots, f^{M_z})$ по формуле (3.1.35); α^j – весовые множители, определяющие вклад j -й компоненты; величина M_z определяется типом используемых данных, для тензора импеданса $M_z = 4$, для вектора-типпера $M_z = 2$, для двухкритериальной задачи (1.3.36) $M_z = 6$. Если используемые характеристики поля примерно одинаковы по уровню значений, то $\alpha^j = \frac{1}{M_z}$, $j = 1, \dots, M_z$, в противном случае задаются определенные веса (см. п. 6.2.2).

Относительные уклонения. При использовании функционалов относительного расстояния типа (1.3.40) между элементами f' и f нормировочный коэффициент b_k^f в (3.1.35) принимается равным величине

$$b_k^f = \sum_{m=1}^{M_p} |f_{m,k}|^2. \quad (3.1.37)$$

Априорные оценки. При расчете априорных оценок численные формулы (3.1.34)–(3.1.36) определяют абсолютные по норме с весом уклонения откликов среды f и f' , а формула (3.1.36) с весом (3.1.37) – относительные уклонения с весом уклонения.

Невязки и апостериорные оценки. При расчете невязок и апостериорных оценок численные формулы (3.1.34)–(3.1.36) определяют абсолютные по норме с весом невязки, а формула (3.1.36) с весом (3.1.37) – относительные с весом невязки измеренной f и расчетной f' правых частей решаемого уравнения.

Рассмотренные виды невязок определяют отклонения в пространстве данных на основе только лишь модуля разности элементов в силу особенности нормы в комплексном пространстве L_2 . При необходимости могут вычисляться невязки для действительной и мнимой частей по отдельности, а также по фазе.

3.1.10. Программное обеспечение задач расчета характеристик неоднозначности

Для решения перечисленных выше задач расчета характеристик неоднозначности решений обратных задач геоэлектрики автором диссертационной работы были разработаны алгоритмы. Эти алгоритмы реализованы в виде программных комплексов **МТ-Геос2D ХН**, **МТ-Геос3D ХН** при участии группы исследователей: заведующего кафедрой Информатики и геоинформационных систем МГРИ-МГГРУ Оборнева Е.А, доцента Оборнева И.Е, доцента Родионова Е.А.

В указанных комплексах для решения прямой 2D задачи МТЗ используется программный комплекс **МТ-Геос2D** (авторы М.И. Шимелевич, М.В. Дмитриева, Оборнев Е.А., Оборнев И.Е.), в котором в качестве ядра-«решателя» использовался модуль программы **ALTOR**, разработанный в ИПМ имени Келдыша, АН СССР [Дмитриева, 1988], и адаптированный к задаче геоэлектрики. Для обращения матриц в модуле **ALTOR** использовался пакет прикладных программ **SPARSPAK** [Джордж, Лю, 1984].

Прямая 3D задача МТЗ решается с помощью программного комплекса **MT-Геос3D** (авторы: Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Родионов Е.А.), в котором в качестве ядра-«решателя» использовался модуль **MTD3FWD** [Mackie et al., 1993]), Massachusetts Institute of Technology, University of Utah Research Institute.

Программы решения прямой задачи МТЗ тестировались на основе:

- анализа решений, получаемых при сгущении конечно-разностной сетки;
- сравнения с решениями для 1D слоистых моделей сред в аналитическом виде;
- сравнение решений для 2D среды, полученных с помощью 3D и 2D программных версий;
- сравнение с решениями других авторов на основе международного проекта **СОММЕМІ** [Жданов, 1990].

Расчеты имитирующих множеств решений прямых задач проводились с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН) а также суперкомпьютера «Ломоносов» НИВЦ МГУ.

3.2. Примеры расчета априорных характеристик неоднозначности для некоторых типовых задач интерпретации данных геоэлектрики

В разделе приводятся примеры расчета характеристик неоднозначности для задач МТ методов и анализ их зависимости от интерпретационных параметров задачи, таких как:

- 1) тип и детальность (размерность) параметризации анализируемых целевых структур и геоэлектрического разреза в целом с учетом имеющейся априорной информации о строении среды;

- 2) уровень погрешности данных (допустимой невязки решений);
- 3) набор используемых интерпретационных критериев.

Представляемые ниже примеры расчета характеристик неоднозначности проводились для моделей сред задач АМТ-МТ методов в смешанном АМТ-МТ диапазоне частот 0.1–1000 Гц с глубиной до первых километров. Примеры носят методический характер и приводятся с целью иллюстрации наиболее важных свойств априорных характеристик неоднозначности однокритериальных и двухкритериальных 2D и 3D задач геоэлектрики, рассмотренных в п. 1.3.2. Для практических задач численные примеры приведены в Главах 5 и 6.

Расчеты проводились для обратных задач геоэлектрики в рассмотренных выше классах сред $G_{N,n}$ (см. п. 1.3.2.1) с априорными ограничениями (1.3.21), за исключением примера из п. 3.2.5, в котором менялась величина D_s .

На рис. 3.2.1. представлена схема области Ω (2D или 3D) исследований (без переходной области) и опорная сетка θ_{N_0} (сетка прямой задачи) максимальной размерности N_0 .

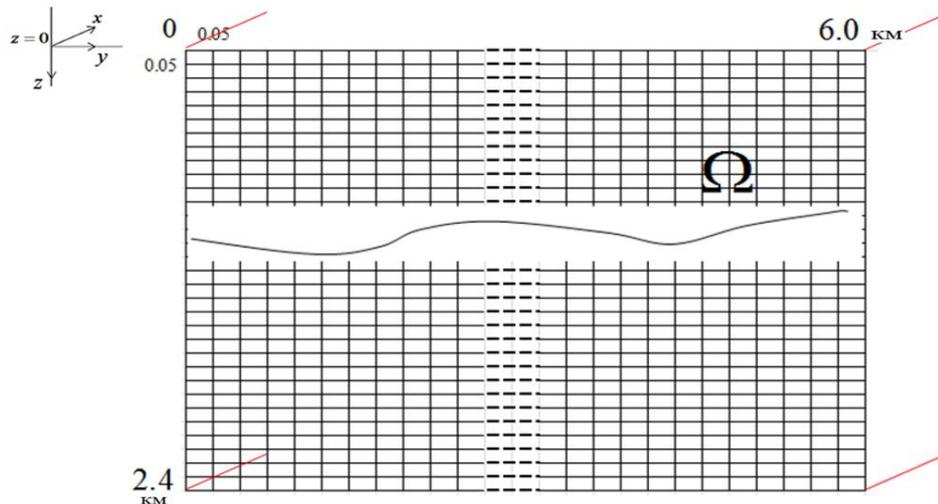


Рис. 3.2.1. Схематическое представление области Ω (2D или 3D) исследований (без переходной области); опорная сетка параметризации θ_{N_0} максимальной размерности N_0 схематически показана тонкими линиями.

Для однокритериальных и двухкритериальных задач геоэлектрики, с использованием алгоритма **APR.1.0** (п. 3.1.3.1), рассчитывались априорные локальные характеристики неоднозначности с учетом порога значимости $\eta = 0.05$ для величины $\lg \rho$. В пространстве решений использовалась норма (1.3.24), в пространстве данных для однокритериальной задачи со скалярной правой частью – норма вида (1.3.22), для задач с векторной правой частью и двухкритериальной задачи – норма (1.3.31) при M_Z , соответствующем набору используемых данных. Дискретизированные аналоги норм при численных расчетах для соответствующих задач приведены в п. 3.1.9.

Расчет характеристик разрешающей способности проводился в соответствии с общей схемой (см. п. 2.5.2.2).

3.2.1. Зависимость неоднозначности решений от глубины расположения анализируемого яруса

Рассмотрим двухкритериальную 2D задачу геоэлектрики (1.3.33) на основе бимодальных данных – импедансов $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$, соответствующих E, H -поляризациям магнитотеллурического поля в классах кусочно-постоянных решений. Характеристики неоднозначности этой задачи рассмотрены в п. 2.4.1.

На рис.3.2.2а,б представлены расчетные априорные характеристики локальной неоднозначности $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ вида (2.4.16) и соответствующей аналоговой локальной разрешающей способности $r_C^i(N^i, \bar{\delta}) = \frac{1}{\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})}$ (см. п. 2.5.2.2) для анализируемых 2D подобластей $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$, соответствующих ярусам θ_{N_i} , $i = 3, 4, 6, 8$, опорной сетки параметризации θ_{N_0} , представленной на рис. 3.2.1

(большие номера соответствуют более глубоким ярусам сетки). Отметим следующие факты, которые следуют из графиков:

- наблюдается монотонное возрастание (убывание) неоднозначности (разрешающей способности) с увеличением δ , что является следствием свойств модуля непрерывности обратного оператора (2.1.26) (см. п. 2.1.2.1) и соответствует физике задачи;
- при фиксированной величине δ неоднозначность $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ решений растет, а разрешающая способность $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ падает с увеличением глубины анализируемого яруса, что также соответствует физике задаче.

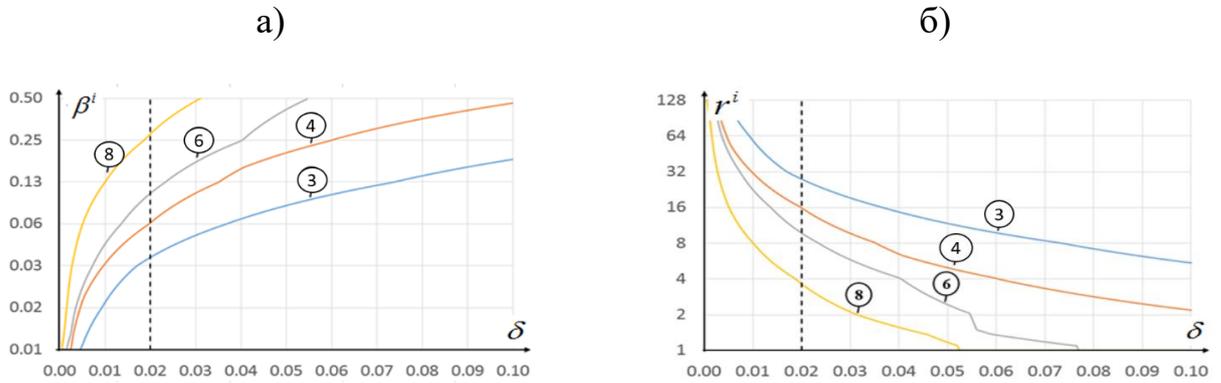


Рис. 3.2.2. Графики характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (а), $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ (б) для различных анализируемых 2D подобластей $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$, соответствующих ярусам θ_{N_i} опорной сетки θ_{N_0} .

Например, из рис. 3.2.2а следует, что для 4-го яруса при уровне погрешности данных $\delta = 0.02$ величина $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) \approx 0.06$. В соответствии со схемой из п. 2.5.2.2 для $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) = 0.06$ получаем цифровую разрешающую способность $\bar{r}_{C_{\max}}^i(N^i, \bar{\delta}) = 16$. Это означает, что при решении обратной двухкритериальной 2D задачи геоэлектрики (1.3.33), степень неоднозначности определения параметров (т.е. максимальный разброс δ -эквивалентных значений параметров) 4-го яруса при $\delta = 0.02$ может составлять $0.06 \cdot D_s = 0.06 \cdot 4 = 0.24$, т.е. почти четверть порядка изменения величины ρ . Величина $\bar{r}_{C_{\max}}^i(N^i, \bar{\delta}) = 16$ означает, что, если

использовать дискретную легенду, то для параметров 4-го яруса опорной сетки θ_{N_0} фактически может быть выделено максимум 16 различных градаций искомой величины $\lg \rho$ в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$. Если известен уровень δ_0 погрешности данных, то $\delta = \delta_0$ и величина $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}_0) \approx 0.06$ определяет априорную оценку погрешности нахождения параметров 4-го яруса опорной сетки θ_{N_0} для обратной задачи (1.3.33).

Действуя аналогичным образом, при $\delta = 0.02$ для 8-го яруса получаем: $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) \approx 0.26$, $\bar{r}_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta}) = 3$. По сравнению с 3-м ярусом неоднозначность возросла более, чем в 4 раза, а цифровая разрешающая способность упала более, чем в 5 раз.

На рис.3.2.3 представлены кривые зависимости характеристики локальной неоднозначности $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ от глубины нижней границы ярусов опорной сетки θ_{N_0} для фиксированных значений $\delta = 0.02$ и $\delta = 0.05$. Из рисунка видно, что неоднозначность определения параметров ярусов растет с глубиной и уровнем погрешности данных.

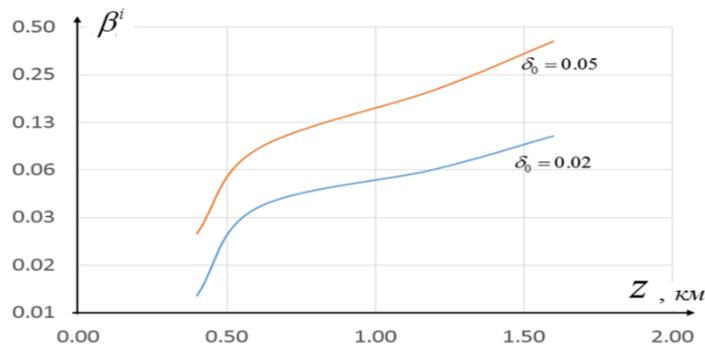


Рис. 3.2.3. Графики зависимости характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ от глубины нижней границы ярусов 2D опорной сетки θ_{N_0} для фиксированных $\delta = 0.02$ и $\delta = 0.05$.

3.2.2. Зависимость неоднозначности решений от детальности параметризации

В общем случае, как было показано в п. 2.4.2, при укрупнении сетки параметризации неоднозначность решений обратной задачи монотонно не возрастает, а разрешающая способность геофизического метода (по числу различимых градаций искомой величины $\lg \rho$ в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$) монотонно не убывает. Обратимся к численным расчетам.

Для двухкритериальной 2D задачи геоэлектрики (1.3.33), которая сводится (см. п. 1.3.2.1) к задаче (1.2.17), на рис. 3.2.5а,б представлены кривые $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ и $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ для 2D подобластей $\bar{\Omega}_i$, выделенных темным цветом на рис.3.2.4а,б, с различной детальностью параметризации.

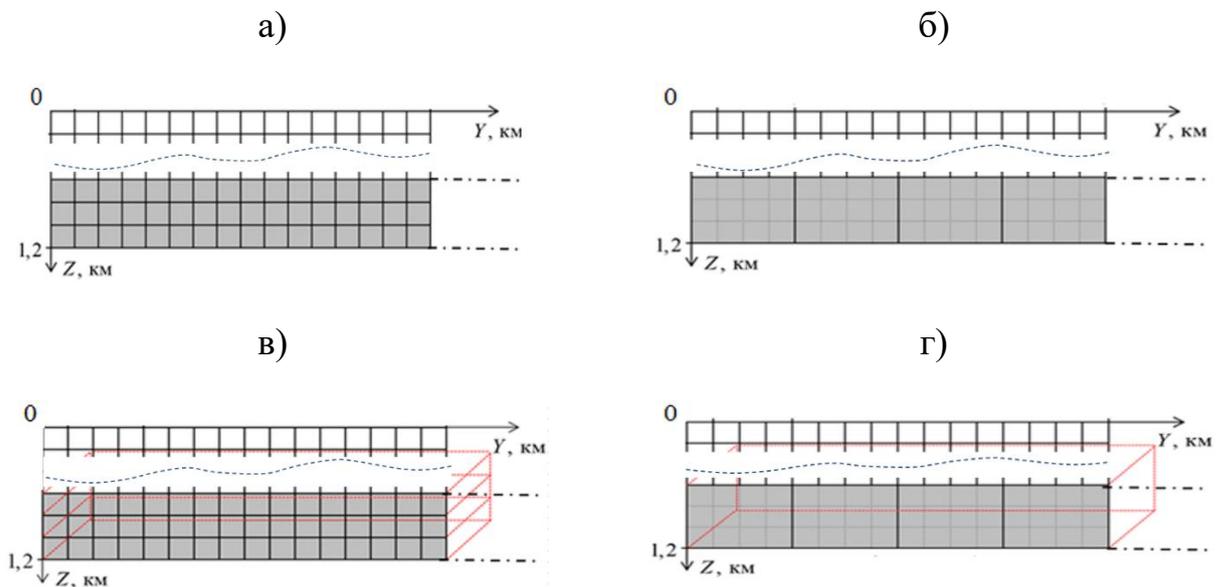


Рис. 3.2.4. Схемы анализируемых подобластей $\bar{\Omega}_i$, выделенных в пределах исследуемой области Ω и обозначенных темным цветом; а) анализируемая 2D подобласть $\bar{\Omega}_i$ с детальностью опорной сетки параметризации θ_{N_0} ; б) – с укрупненной параметризацией (размер блока 4×3); в) анализируемая 3D подобласть $\bar{\Omega}_i$ с детальностью опорной сетки параметризации θ_{N_0} ; г) – с

укрупненной параметризацией (размер блока $4 \times 4 \times 3$). Размеры ячеек 2D сетки θ_{N_0} совпадают с размерами ячеек вертикального сечения 3D сетки θ_{N_0} .

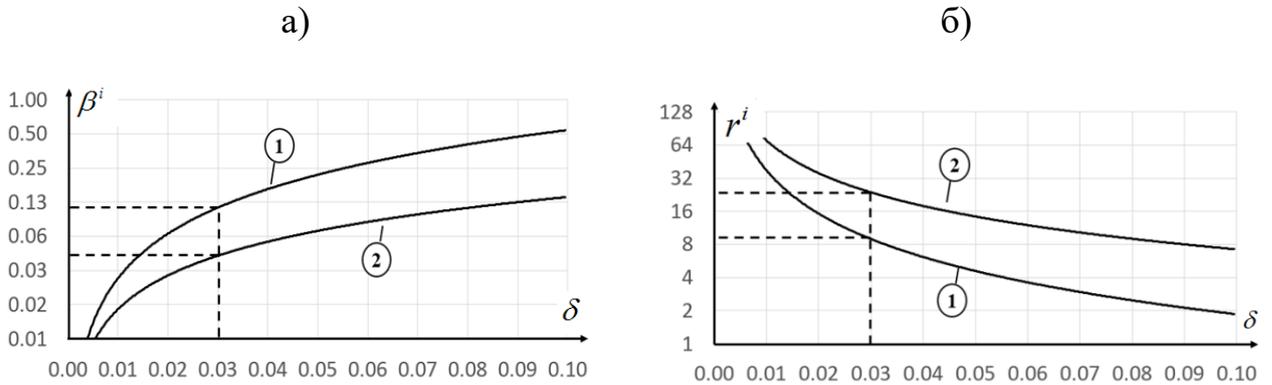


Рис. 3.2.5. Кривые зависимостей (сглаженные) локальной априорной характеристики $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (а) и аналоговой разрешающей способности $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ (б) от параметра δ , построенные на основе бимодальных EH синтезированных входных данных для одной и той же 2D подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$ с различной детальностью параметризации; 1 – детальность опорной сетки параметризации θ_{N_0} , 2 – укрупненная параметризация.

Для опорной сетки θ_{N_0} при $\delta = 0.03$, получаем $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) \approx 0.12$, а соответствующая цифровая разрешающая способность составляет $\bar{r}_{C_{\max}}^i(N^i, \bar{\delta}) = 8$ различимых градаций. Для той же самой анализируемой подобласти $\bar{\Omega}_i$ при укрупненной параметризации (рис.3.2.4б) получаем: $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) \approx 0.045$, $\bar{r}_{C_{\max}}^i(N^i, \bar{\delta}) = 22$. Таким образом, в рассматриваемом случае при укрупнении сетки параметризации неоднозначность решений обратной задачи в подобласти $\bar{\Omega}_i$ уменьшилась в 2.6 раз, а цифровая разрешающая способность геофизического метода (по числу различимых градаций искомой величины $\lg \rho$ в интервале $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$) возросла примерно в 2.5 раза. Отметим, что при этом

пространственная детальность решения обратной задачи (т.е. пространственная разрешающая способность метода по числу выделяемых пространственных элементов) в подобласти $\bar{\Omega}_i$ уменьшилась в $3 \times 4 = 12$ раз, что является следствием неопределенности обратной задачи (см. п. 2.4.2, Замечание 2.5.1. и п. 2.5.2.4).

Рассмотрим двухкритериальную 3D задачу геоэлектрики (1.3.34) на основе бимодальных данных: тензора импеданса \hat{Z} и вектора-типпера \hat{W} , которая также сводится (см. п. 1.3.2.1) к двухкритериальной задаче (1.2.17). На рис. 3.2.6а,б представлены кривые расчетных характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$, $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ для 3D подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$, представленной на рис. 3.2.4в,г, с различной детальностью параметризации.

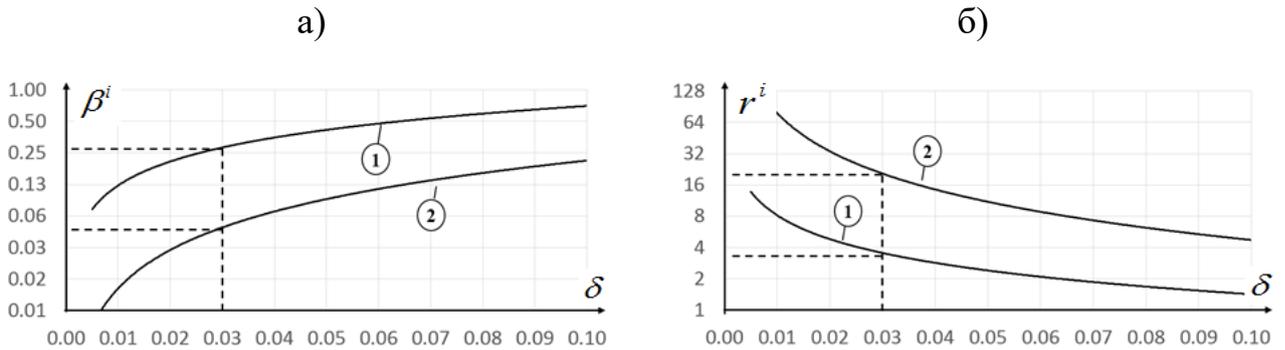


Рис. 3.2.6. Кривые зависимостей (сглаженные) характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (а), $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ (б) от параметра δ , построенные на основе бимодальных ZW синтезированных входных данных для одной и той же 3D подобласти $\bar{\Omega}_i = \theta_{N_i}$ с различной детальностью параметризации; 1 – детальность опорной сетки θ_{N_0} , 2 – укрупненная параметризация.

Из графиков на рис. 3.2.6а (кривые с номером 1) получаем, что при $\delta = 0.03$ для 3D подобласти $\bar{\Omega}_i$ с детальностью параметризации, соответствующей опорной сетке θ_{N_0} , $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) \approx 0.26$, $\bar{r}_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta}) = 3$. Для этой же области с укрупненной параметризацией (кривые с номером 2) $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta}) \approx 0.05$, $\bar{r}_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta}) = 19$. Таким

образом, в рассматриваемом 3D случае при выбранном укрупнении сетки параметризации локальная неоднозначность решений обратной задачи по подобласти $\bar{\Omega}_i$ уменьшилась более, чем в 5 раз, а цифровая разрешающая способность геофизического метода по числу различимых градаций возросла более, чем в 6 раз. При этом пространственная детальность решения обратной задачи по подобласти $\bar{\Omega}_i$ уменьшилась в $4 \times 4 \times 3 = 48$ раз, что является следствием упомянутой неопределенности обратной задачи.

3.2.3. Сравнение неоднозначности решений 2D и 3D обратных задач

На рис. 3.2.7 представлены графики характеристик $\beta_c^i(N^i, 2\delta)$ для однотипных 2D и 3D целевых структур, представленных на рис. 3.2.4, для двухкритериальных задач, рассмотренных выше. Анализируемые 2D и 3D структуры, представленные на рис. 3.2.4а,б и 3.2.4в,г, однотипны в том смысле, что слагаются ярусами сетки одинаковой мощности и расположены на одинаковой глубине.

Из графиков (рис. 3.2.7а) видно, что в рассматриваемом случае неоднозначность определения параметров 2D структуры с параметризацией на сетке прямой задачи заметно меньше, чем для аналогичной 3D структуры. Это свойство сохраняется (при $\delta > 0.02$) также и для аналогичных структур с укрупненной параметризацией (рис. 3.2.7б), однако, разница в неоднозначности во втором случае менее контрастна. Опыт расчетов показывает, что отмеченная закономерность обычно выполняется для любых однотипных (в указанном выше смысле) 2D и 3D подобластей.

а)

б)

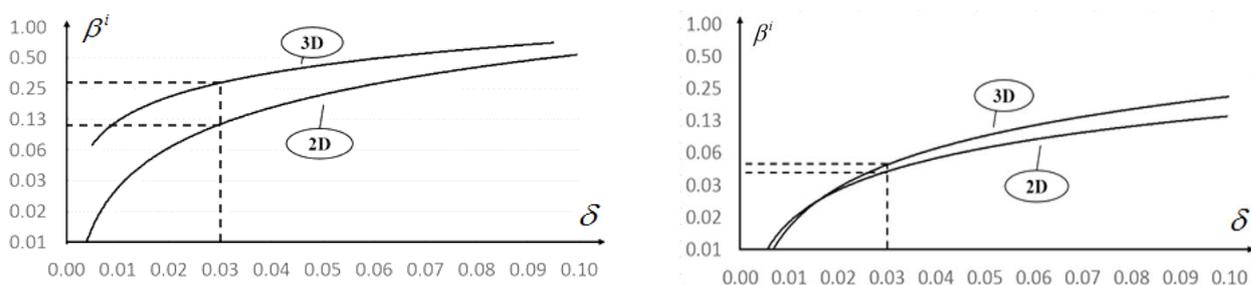


Рис. 3.2.7. Графики характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ для анализируемых однотипных 2D и 3D целевых структур; а) однотипные модели 2D и 3D ярусов с детальностью параметризации на сетке параметризации θ_{N_0} ; б) однотипные модели 2D и 3D ярусов с укрупненной параметризацией.

3.2.4. Оценка неоднозначности решений при двухкритериальной инверсии

В разделе 2.3 было теоретически показано, что априорные оценки II типа решения однокритериальной задачи монотонно не возрастают при увеличении числа критериев. Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий данное утверждение для однокритериальной и двухкритериальной 2D задач геоэлектрики.

На рис. 3.2.8а,б представлены графики локальных априорных характеристик неоднозначности $\beta^i(N^i, 2\delta)$ вида (2.4.11) однокритериальных задач для E и H поляризации (на рисунках кривые обозначены индексами E и H соответственно) и локальной характеристики (вида (2.4.16)) неоднозначности $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ двухкритериальной EH обратной задачи на основе бимодальных данных (на рисунках кривые обозначены индексом EH) для подобласти $\bar{\Omega}_i$ с различной детальностью параметризации (рис. 3.2.4а,б). При расчетах характеристик вида (2.4.16) для двухкритериальной задачи было принято $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

Из графиков видно, что неоднозначность $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ решений двухкритериальной обратной EH задачи в обоих случаях заметно меньше, чем

неоднозначность решений $\beta^i(N^i, 2\delta)$ однокритериальных задач на основе E и H данных, используемых по отдельности, что подтверждает теорию.

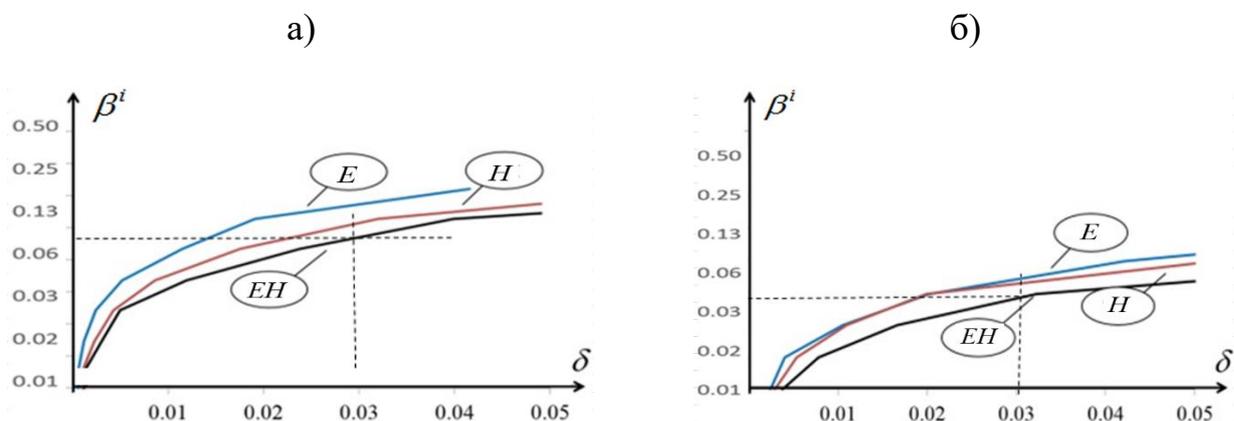


Рис. 3.2.8. Характеристики неоднозначности для однокритериальных E и H и двухкритериальной EH задач; а) для анализируемой 2D подобласти $\bar{\Omega}_i$ (рис. 3.2.4а) с детальностью опорной сетки параметризации θ_{N_0} , б) для этой же подобласти $\bar{\Omega}_i$ с укрупненной параметризацией рис. 3.2.4б.

3.2.5. Оценка влияния дополнительной априорной информации на степень неоднозначности решений обратной задачи

Влияние учета дополнительной априорной информации на степень неоднозначности решений обратной задачи проиллюстрируем на примере уменьшения диапазона D_s изменений искомых параметров двухкритериальной задачи (1.3.33).

На рис. 3.2.9б,в представлены кривые локальных характеристик неоднозначности $\beta_c^i(N^i, 2\bar{\delta})$ для подобластей, соответствующих ярусам сетки параметризации θ_{N_1} размерности $N_1 < N_0$, которые помечены цифрами I и II

(рис. 3.2.9а). Кривые, отмеченные цифрами 1 и 2, соответствуют двум ситуациям:
 β_c^i

- 1) задается полный диапазон $0 \leq \lg \rho^n \leq 4$, изменения параметров среды;
- 2) используется дополнительная априорная информация о том, что диапазон изменения параметров среды составляет $0 \leq \lg \rho^n \leq 2$.

Из графиков видно, что, при использовании дополнительной априорной информации о сужении интервала $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ изменений искомым параметров среды, неоднозначность определения параметров обеих анализируемых подобластей уменьшается.

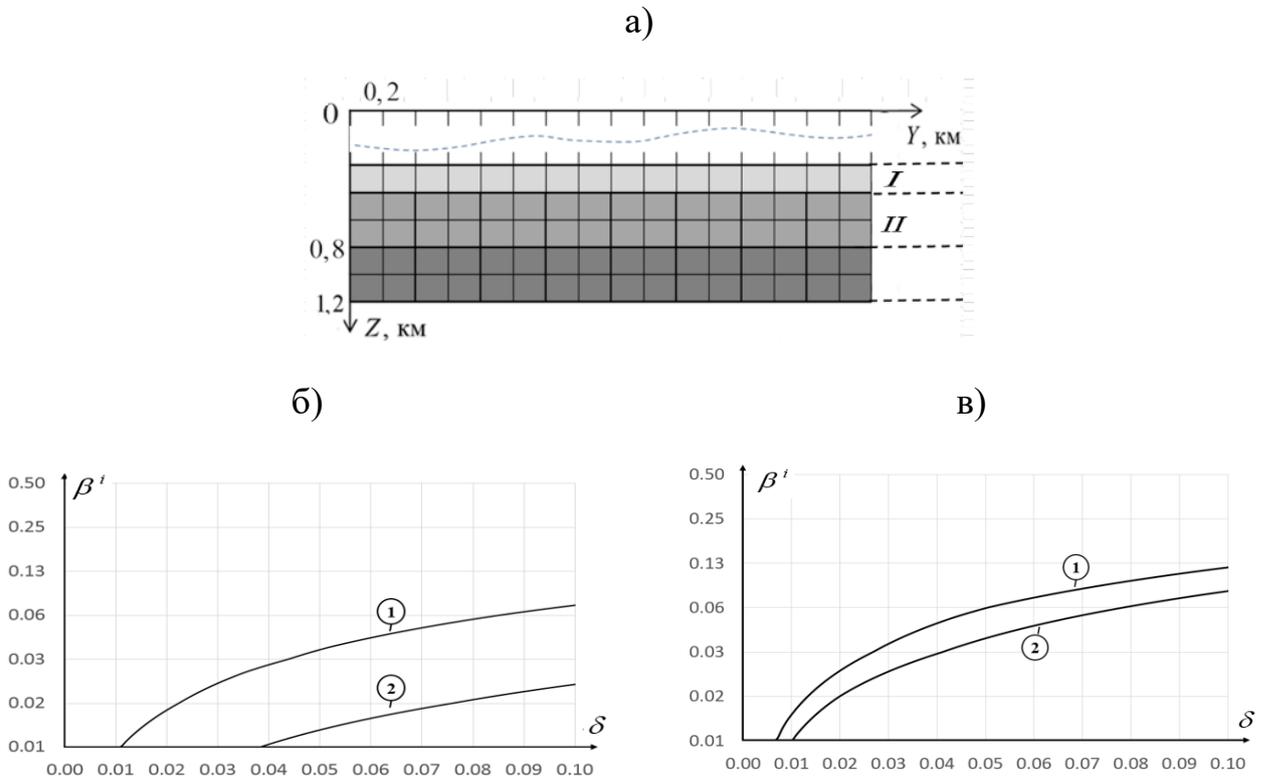


Рис. 3.2.9. Оценка влияния априорной информации о свойствах среды на неоднозначности решений обратной задачи; а) анализируемые ярусы сетки параметризации θ_{N_i} , обозначенные цифрами I и II; б) графики характеристик $\beta_c^i(N^i, 2\bar{\delta})$ для яруса I, в) – для яруса II; цифрой 1 обозначены характеристики, построенные для полного диапазона изменений параметров задачи, $0 \leq \lg \rho^n \leq 4$, цифрой 2 – с учетом дополнительной априорной информации, $0 \leq \lg \rho^n \leq 2$.

3.2.6. Влияние сдвига сети наблюдений относительно исследуемого объекта

На рис. 3.2.10б представлены графики характеристик неоднозначности $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ для параметров анализируемой 3D неоднородной плиты, в зависимости от расположения фактической сети наблюдений. Неоднородная плита состоит из 16 микроблоков (3×4×1) размером 800х800х200м и расположена во втором ярусе сетки прямой задачи на глубине 200м (рис. 3.2.10а). Характеристики неоднозначности построены на основе 3D полимодальных ZW синтезированных входных данных. Из графиков следует, что неоднозначность $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ определения параметров плиты при любой заданной фоновой среде увеличивается примерно в 2 раза при сдвиге площадной измерительной сети относительно плиты по оси Y . Тем не менее, даже, если сеть измерений не находится непосредственно над плитой, определение ее параметров возможно с приемлемой для практики точностью: при уровне допустимой невязки 0.03 неоднозначность решения составляет порядка 0.15 от диапазона возможных изменений D_s параметров плиты. Оценки такого рода необходимы при оценке эффективности электроразведки методом бокового зондирования [Дмитриев, 2012].

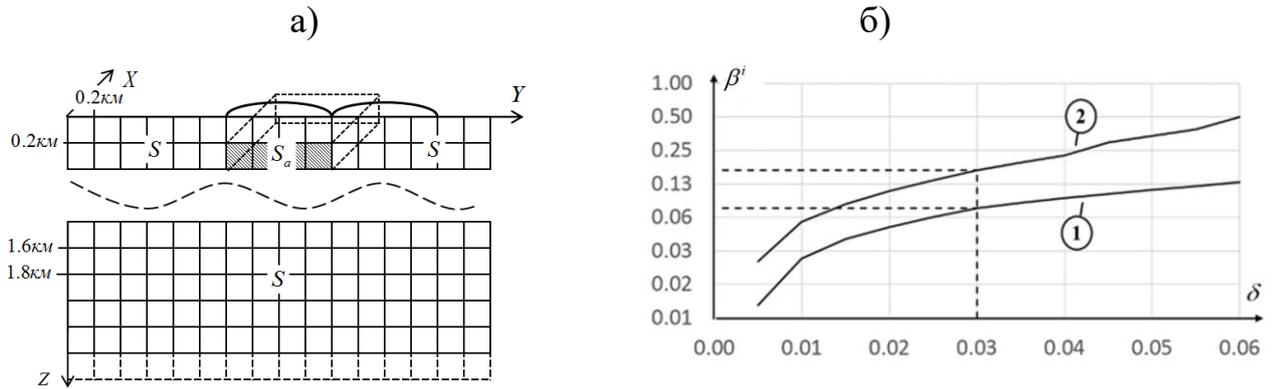


Рис. 3.2.10. Зависимость неоднозначности от расположения фактической сети наблюдений; а) модель плиты и схема сети наблюдений; Графики характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ неоднозначности (б) определения параметров анализируемой 3D неоднородной плиты при различных расположениях фактической сети наблюдений.

3.3. Примеры эффективной параметризации среды

По-прежнему будем рассматривать класс сред $G_{N,\eta}$ (см. п. 1.3.2.1) с априорными ограничениями типа (1.3.20). Область исследования и опорная сетка параметризации для 2D задачи представлены на рис. 3.2.1, для 3D задачи – на рис. 3.3.4.

При расчетах характеристик вида (2.4.16) двухкритериальной задачи было принято $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. В пространстве решений использовалась норма (1.3.24), в пространстве данных – нормы вида (1.3.31), при M_z , соответствующем набору используемых данных, $\alpha^j = \frac{1}{M_z}$, $j = 1, \dots, M_z$. Дискретизированные формулы расчета норм для соответствующих задач приведены в п. 3.1.9.

3.3.1. 2D задача

Рассмотрим двухкритериальную обратную 2D задачу геоэлектрики (1.3.33) с использованием бимодальных входных данных, соответствующих E -, H -поляризациям МТ поля.

Размеры исследуемой 2D области Ω (рис. 3.2.1) составляют $6 \times 2,4$ км, размеры ячеек равномерной опорной 2D сетки параметризации θ_{N_0} равны $0,05 \times 0,05$ км; число горизонтальных ярусов сетки – 48, общая размерность опорной сетки θ_{N_0} параметризации $N_0 = 48 \times 120 = 5760$ ячеек.

Зададимся уровнем допустимой невязки синтеза δ_0 и желаемой величиной ε_0 неоднозначности решений обратной задачи. Величины ε_0 и δ_0 являются целевыми параметрами, определяющими точность интерпретации в пространствах искомым параметров среды и наблюдаемых данных применяемого геофизического метода. Для иллюстрации схемы расчета условно примем $\delta_0 = 0,02$, $\varepsilon_0 = 0,06$. Следуя п. 2.5.2.2, получаем, что при $\beta(N, 2\delta_0) = \varepsilon_0$ величине $\varepsilon_0 = 0,06$ соответствует минимальная требуемая цифровая разрешающая способность $\bar{r}_0 = 16$, определяющая 16 гарантированно различимых градаций величины $\lg \rho$ в интервале $[0, 4]$.

На рис.3.3.1а,б представлены графики локальных априорных характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ и $r_C^i(N^i, \bar{\delta}) = \frac{1}{\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})}$ для различных ярусов θ_{N_i} опорной сетки параметризации θ_{N_0} .

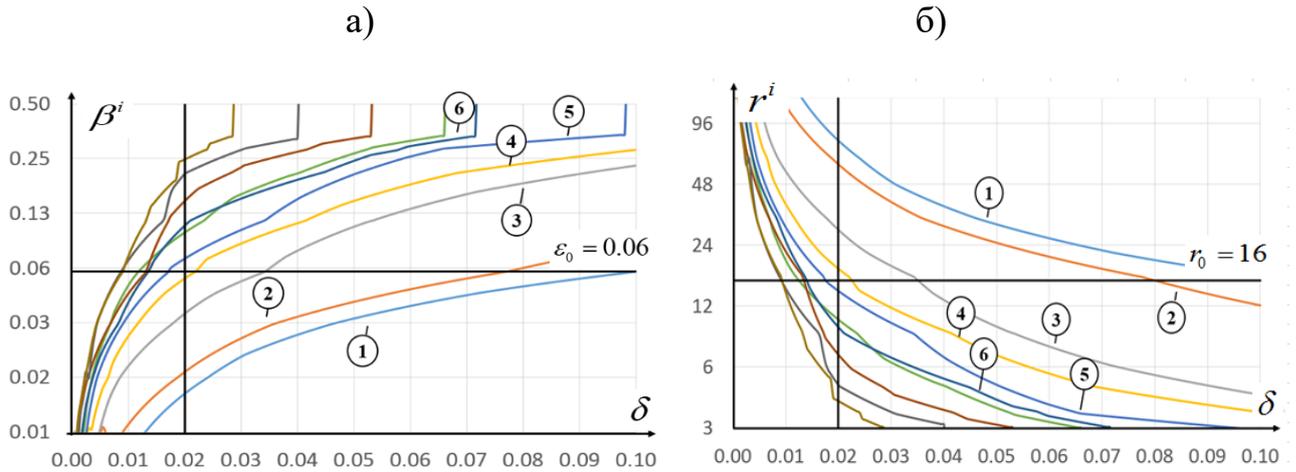


Рис.3.3.1. Графики локальных характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (а), $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ (б) для различных ярусов опорной сетки параметризации θ_{N_0} двухкритериальной 2D задачи геоэлектрики (1.3.33). Цифрами обозначены номера анализируемых ярусов. Большим номерам соответствуют более глубокие ярусы сетки.

Из графиков на рис. 3.3.1 видно, что, начиная с 5-го яруса опорной сетки, неоднозначность $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ нахождения параметров ярусов при $\delta = 0.02$ превышает заданную желаемую величину 0.06, а цифровая разрешающая способность $\bar{r}_{C,\max}^i(N^i, \bar{\delta})$ составляет менее $\bar{r}_0 = 16$ различных градаций. Например, уже для 10-го яруса опорной сетки $\beta_C^{10}(N^{10}, 2\bar{\delta}) = 0.25$, а цифровая разрешающая способность уменьшается до величины $\bar{r}_{C,\max}^{10}(N^{10}, \bar{\delta}) = 4$ различных градаций.

Будем последовательно, начиная с 5-го яруса, укрупнять (по горизонтали и вертикали) опорную сетку θ_{N_0} путем объединения ее ячеек, образуя ярусы новой сетки параметризации θ_N , $N < N_0$ (равномерной по горизонтали). Добьемся приближенного выполнения условия вида (2.5.4) при $\varepsilon_0 = 0.06$:

$$\beta^i(N_{\max}^i, 2\bar{\delta}_0) \leq 0.06 \quad \text{при } \delta_0 = 0.02, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (3.3.1)$$

и определим $N_{\max}^i(\delta_0, \varepsilon_0)$ в соответствии с (2.5.5) для всех ярусов новой сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}(\delta_0, \varepsilon_0)$ (представлена жирными линиями на рис. 3.3.2).

Размерность получившейся новой сетки равна $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0) = 120 \times 2 + 60 \times 3 + 30 \times 4 = 540$ ячеек.

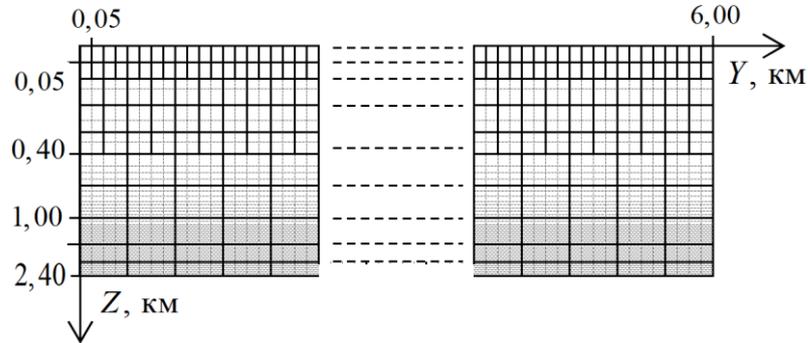


Рис. 3.3.2. Исходная опорная θ_{N_0} и новая $\theta_{N_{\max}}$ сетки параметризации; тонкими линиями обозначена исходная опорная сетка параметризации размерности $N_0 = 5760$, толстыми – новая сетка размерности $N_{\max} = 540$.

На рис. 3.3.3а,б представлены графики характеристик $\beta_c^i(N^i, 2\bar{\delta})$, $r_c^i(N^i, \bar{\delta})$ для ярусов новой оптимальной сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}(\delta_0, \varepsilon_0)$ при заданных значениях $\delta_0 = 0.02$, $\varepsilon_0 = 0.06$.

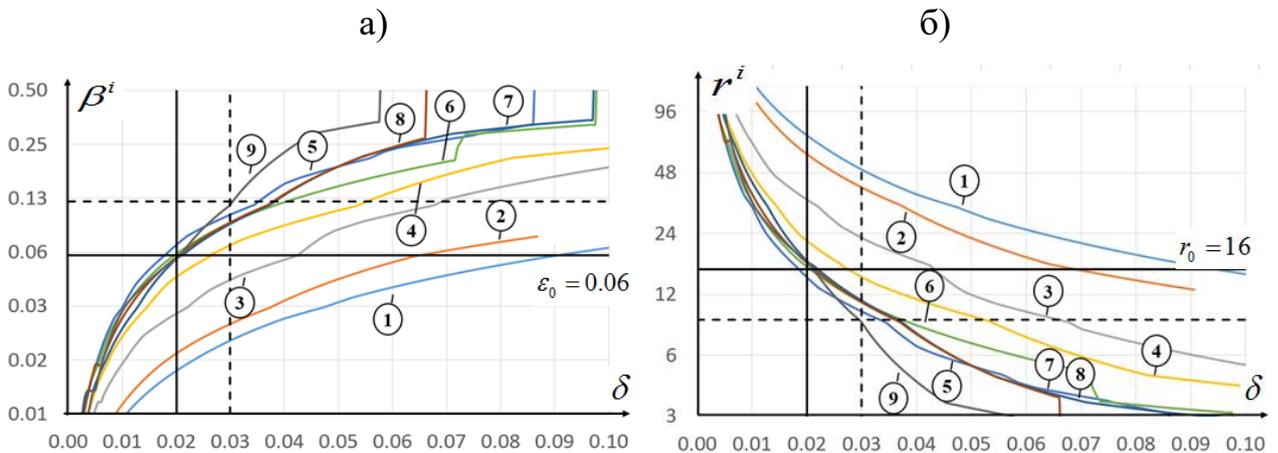


Рис. 3.3.3. Графики характеристик $\beta_c^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (а) и $r_c^i(N^i, \bar{\delta})$ (б) для различных ярусов оптимальной сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}(\delta_0, \varepsilon_0)$. Цифрами обозначены номера анализируемых ярусов. Большим номерам соответствуют более глубинные ярусы сетки.

Анализ графиков на рис. 3.3.3а показывает, что при $\delta = 0.02$ для ярусов новой укрупненной сетки $\theta_{N_{\max}}$ максимальная неоднозначность нахождения параметров ярусов достигается на 5-м ярусе ($i = 5$) и составляет $\beta_C^5(N^5, 2\bar{\delta}) \approx 0.07$, а соответствующая минимальная цифровая разрешающая способность метода $\bar{r}_{C,\max}^5(N^5, \bar{\delta}) \approx 14$, что довольно близко к целевым значениям $\varepsilon_0 = 0.06$, $\bar{r}_0 = 16$. Однако уже при $\delta = 0.03$ максимальная неоднозначность достигается на 9-м ярусе и возрастает почти вдвое $\beta_C^9(N^9, 2\bar{\delta}) \approx 0.13$, а минимальная цифровая разрешающая способность метода уменьшается, соответственно, до величины $\bar{r}_{C,\max}^9(N^9, \bar{\delta}) \approx 8$.

Максимально возможная размерность $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0)$ сетки $\theta_{N_{\max}}$ параметризации, а значит, и детальность решений обратной задачи, при заданных параметрах ε_0 и δ_0 оказалась равной $N_{\max}(\delta_0, \varepsilon_0) = 540$, при размерности исходной опорной сетки $N_0 = 5760$. Здесь проявляется отмеченное ранее свойство неопределенности обратных задач: уменьшение неоднозначности решений обратной задачи (увеличение разрешающей способности метода) может быть достигнуто ценой уменьшения пространственной детальности (размерности) исходной опорной сетки θ_{N_0} параметризации.

Из графиков рис. 3.3.3б видно, что теоретически возможно увеличить размерность новой сетки $\theta_{N_{\max}}$ за счет увеличения числа ячеек в первых четырех ярусах, так как неоднозначность для этих ярусов при заданном $\delta_0 = 0.02$ меньше установленной величины $\varepsilon_0 = 0.06$, однако, практически в данном случае это невозможно, так как опорная сетка θ_{N_0} совпадает с конечно-разностной сеткой прямой задачи.

Если изначально усилить требования к неоднозначности решений обратной задачи и уменьшить пороговое значение ε_0 , увеличив тем самым желаемую разрешающую способность \bar{r}_0 , то сетку обратной задачи пришлось бы укрупнить

еще больше и уменьшить тем самым возможную пространственную детальность получаемых решений.

На практике значение пороговой величины ε_0 заданной неоднозначности задается интерпретатором на основе требований, предъявляемых к проводимым исследованиям.

Отметим, что при имеющейся априорной информации в рассматриваемой обратной задаче (когда задан только диапазон $[s_{\min}, s_{\min} + D_s]$ изменения искомого параметра), желаемая степень однозначности достигается только на крупных сетках параметризации, обеспечивающих грубую пространственную аппроксимацию искомого параметра среды, тогда как для получения более детальных решений в этом случае необходимо привлечение дополнительных данных, например, комплексирование с другими геофизическими методами и/или привлечение дополнительной априорной информации о строении исследуемой среды.

3.3.2. 3D задача

Рассмотрим двухкритериальную обратную 3D задачу геоэлектрики (1.3.34) для области Ω , представленной на рис. 3.3.4а и соответствующей задаче построения верхней части разреза на глубинах до первых сотен метров методом АМТЗ (например, при картировании кимберлитовых месторождений).

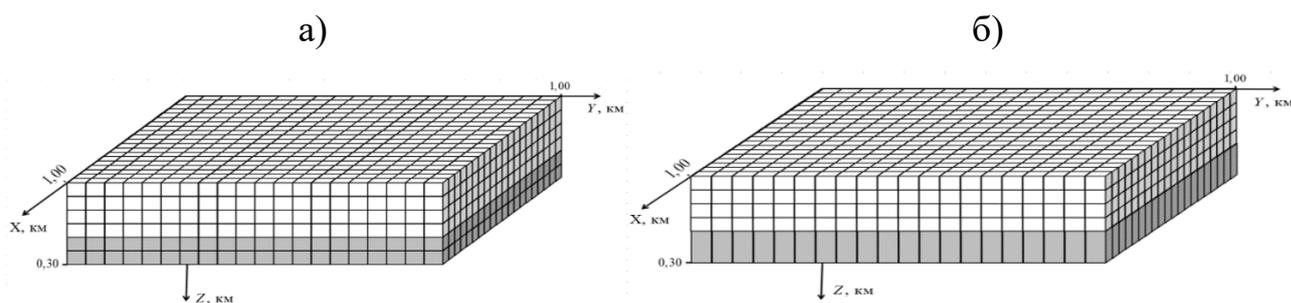


Рис. 3.3.4. Схема исследуемой 3D области Ω для задачи детальной съемки методом АМТЗ; а) опорная θ_{N_0} сетка параметризации размерности $N_0 = 2400$; б) новая сетка $\theta_{N_{\max}}(\delta_0, \varepsilon_0)$ параметризации размерности $N_{\max} = 2000$.

Размер этой области $1000 \times 1000 \times 300$ м. В качестве опорной сетки θ_{N_0} принята сетка прямой задачи, включающая 6 ярусов, размеры ячеек сетки $50 \times 50 \times 50$ м, общее число ячеек $N_0 = 2400$.

При расчете характеристик неоднозначности будем использовать расчетные значения компонент тензора 3D импеданса и вектора-типпера АМТ поля на заданной сетке частот в диапазоне от 100 до 20 000 Гц.

Зададимся прежними целевыми параметрами для эффективной сеточной параметризации среды: $\delta_0 = 0.02$ и $\varepsilon_0 = 0.06$ ($\bar{r}_0 = 16$). Рассмотрим два варианта данных и соответствующих им обратных задач:

- 1) только тензор импеданса \hat{Z} , однокритериальная 3D задача (1.3.28) при $M_z = 4$;
- 2) тензор импеданса \hat{Z} и вектор-типпер \hat{W} , двухкритериальная 3D задача (1.3.34).

Однокритериальная 3D задача (1.3.28). На рис. 3.3.5а,б представлены графики локальных характеристик $\beta^i(N^i, 2\delta)$ и $r^i(N^i, \delta)$ для различных ярусов опорной сетки параметризации θ_{N_0} (большие номера соответствуют более глубинным ярусам сетки).

а)

б)

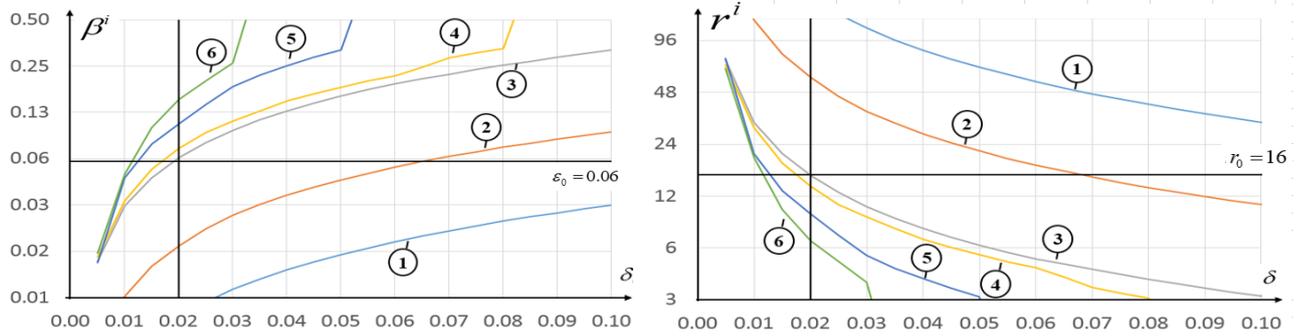


Рис. 3.3.5. Графики характеристик $\beta^i(N^i, 2\delta)$ (а), $r^i(N^i, \delta)$ (б) для ярусов опорной сетки параметризации θ_{N_0} . Цифрами обозначены номера анализируемых ярусов, большим номерам соответствуют более глубокие ярусы сетки.

Из анализа графиков (рис. 3.3.5а) видно, что при $\delta = 0.02$ значения характеристик $\beta^i(N^i, 2\delta)$ для ярусов опорной сетки, начиная с 4-го яруса, превышают заданную величину 0.06, а соответствующая цифровая разрешающая способность составляет менее 16 различных градаций. Например, для 5-го яруса опорной сетки неоднозначность $\beta^5(N^5, 2\delta) \approx 0.08$, а соответствующая цифровая разрешающая способность составляет $\bar{r}_{\max}^5(N^5, \delta) = 12$ различных градаций. Действуя по аналогии с тем, как это делалось ранее, при построения новой укрупненной сетки параметризации будем добиваться приближенного выполнения условий (3.3.1) для всех ярусов сетки. Расчеты показывают, что объединение двух самых глубоких ярусов опорной сетки приводит к квазиоптимальной пятислойной сетке параметризации $\theta_{N_{\max}}(\delta_0, \varepsilon_0)$, $N_{\max} = 2000$ при заданных значениях $\delta_0 = 0.02$, $\varepsilon_0 = 0.06$ (рис. 3.3.4б). На рис. 3.3.6а,б представлены графики характеристик $\beta^i(N^i, 2\delta)$, $r^i(N^i, \delta)$ для ярусов получившейся сетки.

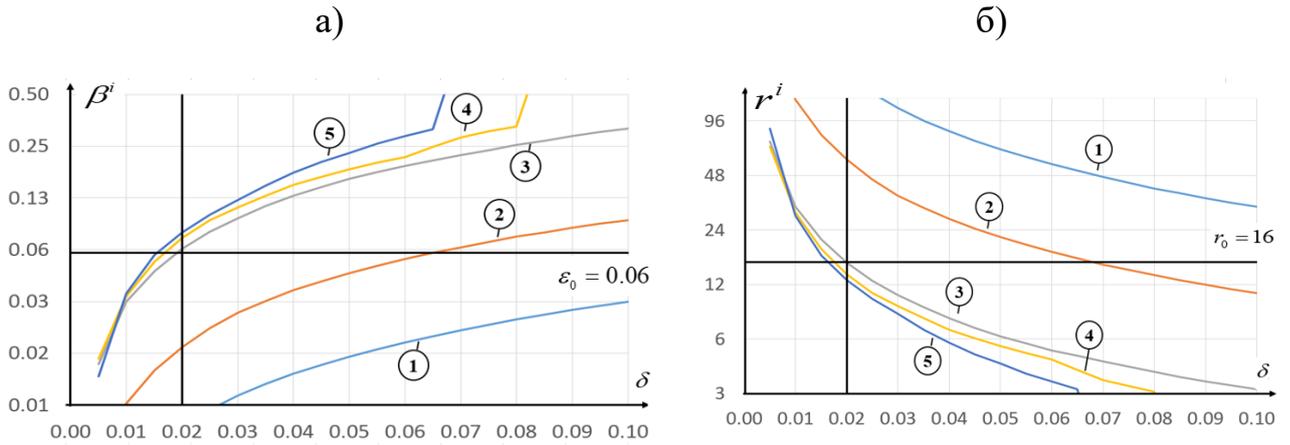


Рис. 3.3.6. Графики характеристик $\beta^i(N^i, 2\delta)$ (а) и $r^i(N^i, \delta)$ (б) для ярусов оптимальной сетки параметризации $\theta_{N_{\max}}(\delta_0, \varepsilon_0)$, $N_{\max} = 2000$. Цифрами обозначены номера анализируемых ярусов, большим номерам соответствуют более глубокие ярусы сетки.

Анализ графиков на рис.3.3.6а показывает, что при $\delta = 0.02$ для ярусов новой укрупненной сетки $\theta_{N_{\max}}$ максимальная неоднозначность (среди всех ярусов сетки) нахождения параметров ярусов достигается на 5-м ярусе ($i=5$) и составляет $\beta_C^5(N^5, 2\bar{\delta}) \approx 0.08$, а соответствующая минимальная цифровая разрешающая способность метода $\bar{r}_{C_{\max}}^5(N^5, \bar{\delta}) = 12$, что уже близко к целевым значениям $\varepsilon_0 = 0.06$, $\bar{r}_0 = 16$. Дальнейшее укрупнение сетки привело бы к уменьшению неоднозначности решений за счет потери пространственной детальности метода. В данном случае можно привлечь дополнительные данные: вектор-типпер \hat{W} .

Двухкритериальная 3D задача (1.3.34). На рис. 3.3.7а,б представлены графики характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (вида (2.4.16)) и $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ для всех ярусов опорной сетки θ_{N_0} задачи с числом параметров $N_0 = 2400$. Из анализа графиков (рис. 3.3.7а,б) следует, что при уровне погрешности данных $\delta = 0.02$ максимальная неоднозначность (для 6-го яруса) $\beta_C^6(N^6, 2\bar{\delta}) \approx 0.05$, а цифровая разрешающая способность метода $\bar{r}_{C_{\max}}^5(N^5, \bar{\delta}) = 19$. Таким образом, заданные желаемые параметры однозначности $\varepsilon_0 = 0.06$ и разрешающей способности $\bar{r}_0 = 16$

по числу градаций, при комплексном использовании тензора импеданса \hat{Z} и вектора-типпера \hat{W} заведомо выполняются на опорной сетке θ_{N_0} (совпадающей в рассматриваемом случае с сеткой прямой задачи) и укрупнение опорной сетки не требуется. Это позволяет в данном случае сохранить детальность решений обратной задачи на сетке прямой задачи.

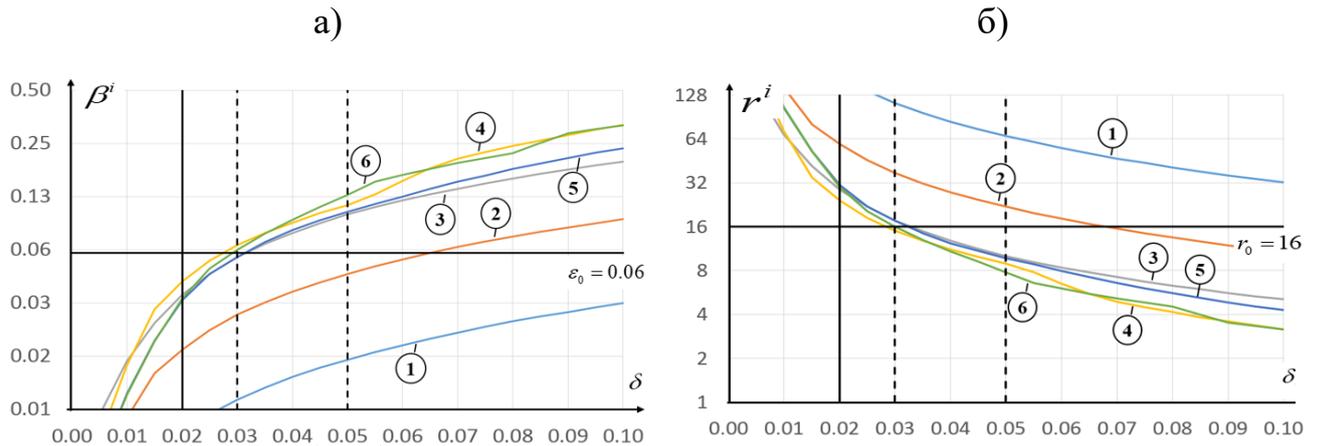


Рис. 3.3.7. Графики характеристик $\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ (а) и $r_C^i(N^i, \bar{\delta})$ (б) для различных слоев опорной сетки θ_{N_0} (рис 3.3.4а), построенные на основе комплекса ZW данных.

3.4. Оценка полной цифровой разрешающей способности геофизического метода

Полная цифровая разрешающая способность геофизического метода, ассоциированного с уравнением (1.2.15), при заданных $\delta_0 = 0.02$, $\varepsilon_0 = 0.06$, определяется выражением (2.5.20)

$$\mathfrak{R}(\delta_0, \varepsilon_0) = (N_{\max}, \bar{r}_{\max}).$$

Для 2D задачи, рассмотренной в п. 3.3.1, расчетная величина $N_{\max}(\delta_0, r_0)$ составила 540. За величину полной разрешающей способности $\bar{r}_{\max}(N_{\max}, \delta_0)$

примем расчетную минимальную разрешающую способность $\bar{r}_{C,\max}^5(N^5, \bar{\delta}) = 14$, соответствующую 5-му ярусу сетки параметризации (см. рис. 3.3.3)

$$\bar{r}_{\max}(N_{\max}, \delta_0) = 14.$$

Отсюда получаем, что рассматриваемый геофизический метод характеризуется полной цифровой разрешающей способностью

$$\mathfrak{R}_{\max}(r_0, \delta_0) = (540, 14). \quad (3.3.2)$$

Последнее означает, что при заданных $\delta_0 = 0.02$ и $\varepsilon_0 = 0.06$ размерность оптимальной сетки параметризации, покрывающей исследуемую область Ω , составляет $N_{\max}(\delta_0, r_0) = 540$, при этом можно выделить 14 гарантированно различимых (цветовых) градаций искомой величины $\lg \rho$ в интервале ее допустимых значений $[0, D_s]$. В силу условия (2.4.45) неопределенности обратной задачи увеличение одной из величин этой пары влечет за собой уменьшение другой.

Для 3D задачи, рассмотренной в п. 3.3.2, полученные численные характеристики эффективной параметризации на основе одномодальных (импедансных) \hat{Z} данных, составили $N_{\max}(\delta_0, r_0) = 2000$, $\bar{r}_{\max}(N_{\max}, \delta_0) = 12$, при входных параметрах $\delta_0 = 0.02$, $\varepsilon_0 = 0.06$. Полная разрешающая способность метода, соответствующая рассматриваемой задаче, составляет

$$\mathfrak{R}_{\max}(r_0, \delta_0) = (2000, 12). \quad (3.3.3)$$

Для этой же задачи, численные характеристики эффективной параметризации на основе бимодальных $\hat{Z}\hat{W}$ данных составили $N_{\max}(\delta_0, r_0) = 2400$, $\bar{r}_{\max}(N_{\max}, \delta_0) = 19$. Полная разрешающая способность метода, соответствующая рассматриваемой задаче, составляет

$$\mathfrak{R}_{\max}(r_0, \delta_0) = (2400, 19). \quad (3.3.4)$$

Таким образом, комплексирование критериев в рассматриваемом случае повышает цифровую разрешающую способность по пространству на 20%, а по значениям более чем в 1.5 раза.

3.5. Выводы к Главе 3

1. Разработаны новые алгоритмы расчета априорных и апостериорных характеристик неоднозначности (погрешности) решений нелинейных обратных 2D и 3D задач геоэлектрики в классе кусочно-постоянных решений. В алгоритмах используются методы Монте-Карло; доказана сходимость алгоритмов.

2. Приведены примеры численного расчета априорных характеристик неоднозначности для некоторых типовых задач интерпретации данных геоэлектрики; иллюстрируется зависимость неоднозначности решений обратной задачи от: глубины залегания анализируемого фрагмента среды, детальности параметризации среды, числа интерпретационных критериев, конфигурации сети наблюдений и др. Отмечается, что результаты расчетов адекватно отражают известные свойства применяемых в геоэлектрике квазистационарных ЭМ полей и подтверждают теоретические результаты, полученные в предыдущих разделах данной работы.

3. Приведены численные примеры регуляризации обратных 2D, 3D задач геоэлектрики на основе построения оптимальной сетки параметризации с максимальной детальностью, при заданном ограничении на неоднозначность решений, задаваемом дифференцированно по слоям сетки.

4. Приводятся примеры расчета полной *цифровой разрешающей способности* геофизического метода.

5. Предлагаемые алгоритмы расчета характеристик неоднозначности для задач геоэлектрики при некоторой адаптации могут использоваться для нелинейных обратных задач других геофизических методов.

ГЛАВА 4. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Обратные коэффициентные задачи геофизики и, в частности, геоэлектрики, в общем случае являются нелинейными и характеризуются большой размерностью, как по числу искомым параметров среды, так и по входным измеренным данным. Прямые методы минимизации функционала невязки в случае нелинейности общего типа достаточно трудно реализуемы на практике и не всегда приводят к желаемым результатам (проблема локальных минимумов, неединственность точки глобального минимума и др.), причем решать эту сложную оптимизационную задачу приходится каждый раз заново при изменении входных данных.

Один из возможных альтернативных подходов к решению нелинейных обратных задач, основанный на предварительном построении множества («банка») опорных решений прямых (а значит, и обратных) задач, впервые был предложен в работе [Тихонов и др., 1983]. Реализации данной идеи на практике издана была представлена в палеточном методе [Ваньян, Бутковская, 1980; Тихонов, Гласко, Дмитриев, 1983] при котором интерпретации геофизических данных проводилась на основе множества (альбома палеток) опорных решений. Позднее, в работах [Poulton et al., 1989; Raiche, 1991; Poulton et al., 1992; Спичак, Попова, 1998; Shimelevich, Osborne, 1998] и ряде других работ была сформулирована концепция нейросетевого (НС) подхода к инверсии геофизических данных, в котором конструируемая нейросеть предварительно обучается «с учителем» на банке опорных решений. В этих и других ранних работах НС метод трактовался с позиций теории распознавания образов, что в некоторых частных случаях представляется вполне оправданным. Вместе с тем, в работах [Шимелевич, Оборнев, 1999; Шимелевич, Оборнев, 2009] было показано, что в общем случае суть НС метода, применительно к проблеме решения обратных задач, состоит в том, что на заранее рассчитанном банке решений с помощью нейросетевой

аппроксимационно-интерполяционной конструкции строится приближенный обратный оператор (так называемый НС аппроксиматор) для рассматриваемой задачи. При этом, вообще говоря, могут использоваться любые аппроксимационные конструкции: различные типы полиномов и др., но именно нейронные сети, обладающие известными особыми свойствами [Stone, 1948; Колмогоров, 1957; Cybenko, 1989; Горбань 1998], обеспечивают высокую вычислительную эффективность при решении задач аппроксимации сложных нелинейных зависимостей большой размерности, подтвержденную также многолетним опытом и всевозрастающей широтой их использования на практике.

Таким образом, НС метод решения обратных задач характеризуется следующими основными особенностями в ряду общих НС методов: 1) использование предварительно построенного множества опорных решений на основе заданного оператора прямой задачи; 2) построение приближенного обратного оператора задачи; 3) использование нейронных сетей в качестве аппроксимационно-интерполяционных конструкций. Для того, чтобы обозначить специфику НС метода решения обратных задач и подчеркнуть его аппроксимационную (детерминистскую) сущность, авторами статьи был предложен термин *аппроксимационный нейросетевой* (АНС) метод [Шимелевич, Оборнев, 2009; 2012; Шимелевич и др., 2017а].

В АНС методе «плохая» нелинейная оптимизационная задача построения (обучения) НС аппроксиматора для заданного класса решений решается один раз, при этом вычисляется ошибка замены точного обратного оператора задачи НС аппроксиматором, что позволяет оценить общую погрешность решения обратной задачи. Обученный НС аппроксиматор способен, формализовано, в режиме реального времени при минимальной априорной информации, *без задания первого приближения* находить решение обратной задачи в заданном классе сред для любых входных данных; время расчета решения практически не зависит от физической размерности (2D, 3D) задачи и составляет первые десятки секунд на персональном компьютере. Данный подход к решению обратных задач можно

трактовать, как обобщение палеточного метода интерпретации геофизических данных в классе 1D слоистых сред [Ваньян, Бутковская, 1980] на многомерные задачи.

Повышение эффективности развиваемого в диссертационной работе АНС метода, по сравнению с ранними версиями НС метода, основано на построении локальных аппроксиматоров, которые устанавливают связь группы искомым параметров среды с некоторой группой входных данных. Локальные аппроксиматоры обеспечивают минимальную ошибку решения обратной задачи дифференцированно по глубине исследований. Это позволяет увеличить точность и разрешающую способность НС метода в целом. Адаптивная регуляризация задачи обеспечивается использованием оптимальной сетки параметризации (см. п.2.1).

При необходимости, решение, найденное АНС методом, уточняется аппроксимационно-итерационным нейросетевым (АИНС) методом [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Оборнев, 2013; Шимелевич и др., 2017а; Шимелевич и др., 2022], что требует дополнительных ресурсов времени.

Другим важным аспектом применимости АНС метода является обратная задача ЭМ мониторинга геодинамических подобластей ранее изученной (или слабо изученной) среды (например, задачи геодинамического электромониторинга в зонах субдукции) [Шимелевич и др., 2003; Shimelevich et al., 2007; Шимелевич, Оборнев, 2008; Шимелевич, Оборнев, 2009; Шимелевич и др., 2017б].

В Главе рассматриваются методы обучения непрерывных аппроксиматоров, в том числе НС аппроксиматоров, и вопросы корректности задачи обучения.

Для решений обратной задачи в рамках теоретико-функционального подхода вычисляются априорные и апостериорные оценки практической неоднозначности (погрешности), не зависящие от применяемого метода инверсии [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др. 2017а] и позволяющие объективно оценить достоверность и состоятельность результатов интерпретации измеренных данных.

4.1. Сведение обратной задачи к аппроксимационно-интерполяционной проблеме

Вернемся к уравнению вида (1.2.15) с общими априорными ограничениями (1.2.3):

$$A_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in F$$

$$S_N = \{s : s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s, \quad n = 1, \dots, N\}.$$

В данном разделе проблема поиска приближенного решения уравнения (1.2.15) рассматривается с позиций теории аппроксимации и интерполяции функций многих переменных. Как уже отмечалось выше, к уравнению вида (1.2.15) сводятся все типовые однокритериальные и двухкритериальные 2D и 3D задачи геоэлектрики (см. п. 1.3.2). Развиваемые методы решения обратной задачи типа (1.2.15) справедливы при произвольной сеточной параметризации среды, однако при решении практических задач следует использовать *регуляризованную сетку*, построенную в соответствии с принципом эффективной параметризации (п.2.5.1), что обеспечит желаемую практическую устойчивость решений.

4.1.1. Основная задача теории аппроксимации функций

Основная классическая задача теории аппроксимации функций заключается в следующем (в формулировке Н. И. Ахиезера [Ахиезер, 1947; Ахиезер, 1965] с незначительными дополнениями).

Задача 1. На некотором точечном множестве $E \subset F$ в пространстве F произвольного числа измерений заданы две функции $\psi(x)$ и $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$, зависящие от $x \in E$ и принимающие значения в заданном нормированном

пространстве G , из которых вторая зависит от некоторого числа параметров a^1, \dots, a^J . Эти параметры требуется определить так, чтобы уклонение (расстояние) функции $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$ от функции $\psi(x)$ на множестве $x \in E$ было наименьшим (в определенном смысле, например, в метрике пространства G).

На практике, наряду с основной задачей аппроксимации, часто рассматривается следующая аппроксимационно-интерполяционная задача на заданной конечной выборке известных значений функции $\psi(x)$.

Задача 2. В условиях основной Задачи 1 функция $\psi(x)$ определена на всем множестве E , но ее значения $\psi(x_q)$ известны только на конечном подмножестве некоторых (опорных) точек $x_q \in E_1 \subset E$, $q = 1, \dots, Q_1$ этого множества, и параметры a^1, \dots, a^J , функции $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$ требуется определить таким образом, чтобы уклонение $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$ от $\psi(x)$ было наименьшим в точках $x_q \in E_1$; при этом неизвестные значения функции $\psi(x)$ в точках $x \notin E_1$ принимаются равными значениям построенной функции $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$.

В простейшем случае скалярных функций одного переменного эту задачу иногда называют *задачей нахождения значения многочлена в данной точке, принимающего точные или приближенные значения в некоторой системе точек* [Канторович, 1962], или *задачей построения функции заданного вида на основе конечного набора «табличных» значений* [Березин, Жидков, 1962].

Погрешность замены функции $\psi(x)$ аппроксимирующей функцией $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$ (интерполяционная ошибка) на всем множестве E зависит от свойств $\psi(x)$ и $\Psi(a^1, \dots, a^J, x)$, а также от структуры и объема выборки E_1 , которые определяют ее «представительность». Применительно к рассматриваемым обратным задачам, выборка E_1 формируется на основе построения множества опорных решений прямых и обратных задач; ее объем и структура задаются и могут

изменяться исследователем, что существенно повышает эффективность решения аппроксимационно-интерполяционной задачи.

4.1.2. Аппроксимационный метод решения нелинейных операторных конечномерных уравнений

Зафиксируем некоторую сетку параметризации θ_N размерности $N \leq N_0$. Рассмотрим конечно-разностный аналог уравнения (1.2.15) (обозначение сеточной величины f оставим таким же, как и в исходном уравнении там, где это не вызывает недоразумений)

$$\tilde{A}_N s = f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in R^M, \quad M \geq N, \quad (4.1.1)$$

где $s = (s^1, \dots, s^N)$ – искомый вектор параметров (макропараметров) среды, компоненты которого равны значениям искомой характеристики среды g в соответствующих ячейках *регуляризованной сетки параметризации* θ_N , покрывающей исследуемую область Ω ; $f = (f^1, \dots, f^M)$ – вектор характеристик геофизических полей, сформированный на основе проектирования измеренных данных на пространственно-частотную сетку прямой задачи в области измерений; $\tilde{A}_N : R^N \rightarrow R^M$ – приближенный оператор задачи. В дальнейшем предполагается, что существует консервативная схема численного сеточного решения прямой задачи для рассматриваемого геофизического метода. Мы не будем останавливаться на вопросах сходимости решений конечно-разностного аналога (4.1.1) к решению исходного уравнения (1.2.15) при неограниченном увеличении размерности сетки θ_{N_0} . При этом будем считать размерность сетки θ_{N_0} настолько большой, что погрешность, связанная с аппроксимацией уравнения, значительно меньше погрешности данных [Тихонов и др., 1990].

Каким бы численным методом не решалось уравнение (4.1.1), его приближенное решение $\tilde{s} = (\tilde{s}^1, \dots, \tilde{s}^N)$, является некоторой векторной функцией $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}^1, \dots, \tilde{\psi}^N)$ от M переменных – компонент вектора входных данных $f = (f^1, \dots, f^M)$:

$$\tilde{s}^n = \tilde{\psi}^n(f^1, \dots, f^M), \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.1.2)$$

или в векторном виде:

$$\tilde{s} = \tilde{\psi}(f). \quad (4.1.3)$$

Векторная функция $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}^1, \dots, \tilde{\psi}^N)$ определяется последовательностью вычислительных процедур и, если алгоритм формализован, то с ее помощью любому заданному вектору данных $f = (f^1, \dots, f^M) \in R^M$ может быть поставлен в соответствие вектор $\tilde{s} = (\tilde{s}^1, \dots, \tilde{s}^N) \in R^N$ параметров среды, т.е. функция $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}^1, \dots, \tilde{\psi}^N)$ определяет приближенный обратный оператор для уравнения (4.1.1). Однако, хорошо известно, что в задачах с нелинейностью общего типа алгоритм обращения не всегда поддается формализации.

При аппроксимационно-интерполяционном подходе приближенный обратный оператор задачи строится с помощью некоторой заданной в аналитическом виде универсальной векторной функции $\Psi(\hat{a}, x) = (\Psi^1, \dots, \Psi^N)$, $x \in R^M$, принимающей значения в R^N , и зависящей от набора свободных коэффициентов $\hat{a} = (a^1, \dots, a^{M_a}) \in R^{M_a}$. Функцию $\Psi(\hat{a}, x)$ называют *аппроксиматором инверсии* или просто *аппроксиматором*; далее будем рассматривать аппроксиматоры, координатные функции которых непрерывны по \hat{a} и x . Свободные коэффициенты $\hat{a} = (a^1, \dots, a^{M_a})$ аппроксиматора определяются на основе следующих соображений. Для задачи (4.1.1) обозначим через $E \subset R^M$ образ множества $S_N \subset R^N$ при отображении его оператором \tilde{A}_N

$$E = \{x : x = \tilde{A}_N s, s \in S_N\}.$$

Аппроксиматор $\Psi(\hat{a}, x) : E \rightarrow R^N$ должен приближенно вычислять решения уравнения (4.1.1) при любой точной правой части $x = f \in E$ с минимальной ошибкой, коэффициенты $\hat{a} = (a^1, \dots, a^{M_a})$ находятся из решения экстремальной задачи вида

$$\|\Psi(\hat{a}, x) - s\|_{R^N} \longrightarrow \min_{\hat{a}}, \quad s \in S_N, \quad x = \tilde{A}_N s, \quad \hat{a} \in Q_\Psi, \quad (4.1.4)$$

где $Q_\Psi \in R^{M_a}$ – замкнутое, ограниченное множество допустимых значений коэффициентов.

В силу компактности множеств S_N, E, Q_Ψ и непрерывности $\Psi(\hat{a}, x)$ по \hat{a} и x решение (4.1.4) (возможно, неединственное) существует. Задачу (4.1.4) можно решать классическими методами оптимизации, вычисляя на каждом шаге аргумент $x = \tilde{A}_N s$, однако, опыт показал, что эффективнее оказывается аппроксимационный метод: задается некоторый «представительный» набор $S_{bs} \subset S_N$ векторов параметров среды $s_q \in S_{bs}$ и рассчитывается соответствующий набор E_{bs} векторов точных данных $f_q = \tilde{A}_N s_q \in E_{bs}$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$. В итоге формируется множество (банк опорных решений) $Q_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ прямых (а значит, и обратных) задач для уравнения (4.1.1) (рис. 4.1.1):

$$Q_{bs} = \{s_q, f_q : s_q \in S_{bs} \subset S_N, f_q = \tilde{A}_N s_q, q = 1, \dots, Q\}, \quad (4.1.5)$$

и мы приходим к Задаче 2. Обозначим через $\psi : R^M \rightarrow R^N$ точный обратный оператор \tilde{A}_N для уравнения (4.1.1).

Примечание. Заметим, что точный обратный оператор $\psi(x)$ уравнения (4.1.1) существует (вообще говоря, неединственный и неоднозначный), так как по определению для любого вектора $x = \tilde{A}_N s \in E$ существует его прообраз $s \in S_N$. Определив для любого $x \in E$ значение $\psi(x) = s$ (на основе знания множеств S_N, E), получаем $\tilde{A}_N(\psi(x)) = x, f \in E$.

Для точных правых частей $f_q \in E_{bs}$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$, известны точные решения уравнения (4.1.1) – векторы $s_q \in S_{bs}$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$, определяющие значения точного обратного оператора уравнения (4.1.1):

$$s_q = \Psi(f_q), \quad s_q \in S_{bs} \subset S_N, \quad f_q \in E_{bs}, \quad q = 1, \dots, Q.$$

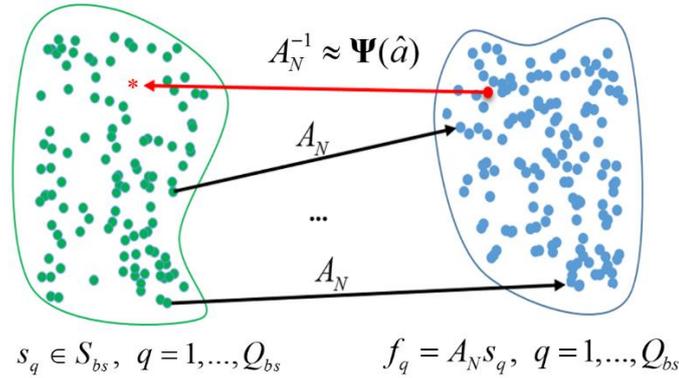


Рис. 4.1.1. Схематическая иллюстрация множества опорных решений аппроксимационно-интерполяционного метода.

Для конструируемого аппроксиматора $\Psi(\hat{a}, x)$ на множестве опорных решений $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$, согласно Задаче 2, должны выполняться некоторые условия близости функций $\psi(x)$ и $\Psi(\hat{a}, x)$ в точках s_q, f_q :

$$\Psi(\hat{a}, f_q) \approx \psi(f_q) = s_q, \quad s_q, f_q \in \mathbb{Q}_{bs}. \quad (4.1.6)$$

Общее отклонение ε_{err} между функциями $\psi(x)$ и $\Psi(\hat{a}, x)$ определим, как средний квадрат нормы их разности по всему множеству S_{bs} точек опорных решений:

$$\varepsilon_{err}(\hat{a}) = \frac{1}{Q_{bs}} \sum_q^{Q_{bs}} \|\Psi(\hat{a}, f_q) - s_q\|^2, \quad s_q, f_q \in \mathbb{Q}_{bs}. \quad (4.1.7)$$

Искомый набор коэффициентов \hat{a}_0 аппроксиматора определяется из решения экстремальной задачи минимизации функционала ошибки:

$$\hat{a}_0 = \arg \min_{\hat{a}} \{\varepsilon_{err}(\hat{a}) : \hat{a} \in \mathbb{Q}_{\Psi}\}. \quad (4.1.8)$$

Множество $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений задач называют *обучающим множеством*, а задачу (4.1.8) – *задачей обучения аппроксиматора*. Аппроксиматор

$\Psi(\hat{a}_0, x)$ для правых частей $x = f_q \in E_{bs}$, принадлежащих множеству Q_{bs} опорных решений, вычисляет решение обратной задачи (4.1.1) с минимальной средней ошибкой $\varepsilon_{err}^*(\hat{a}_0)$ (для заданного множества Q_{bs}), а для иных правых частей $x \notin E_{bs}$ в качестве приближенных решений принимаются значения функции $\Psi(\hat{a}_0, x)$ (как значения интерполирующей функции между опорными точками)

$$\tilde{s} = \Psi(\hat{a}_0, x), \quad x \in R^M, \quad (4.1.9)$$

или в координатной записи,

$$\tilde{s}^n = \Psi^n(x^1, \dots, x^M), \quad n = 1, \dots, N.$$

В дальнейшем аппроксиматор, обученный по указанной схеме, мы будем называть классическим и иногда обозначать его без указания аргумента x , как приближенный обратный оператор уравнения (4.1.1): $\Psi(\hat{a}_0)$, или для краткости Ψ .

4.1.3. Собственная интерполяционная ошибка аппроксиматора

Решение обратной задачи (4.1.1), получаемое с помощью обученного аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$, по своему смыслу является аппроксимационно-интерполяционным. Обозначим через s_T точное решение уравнения (4.1.1) при точно заданной правой части $f_T = \tilde{A}_N s_T$, а через $s_\Psi = \Psi(\hat{a}_0, f_T) \in S_N$ – приближенное решение, полученное для этих же данных с помощью аппроксиматора. Ошибка $\|s_\Psi - s_T\|$ любого фиксированного решения s_Ψ за счет неточности обратного оператора отлична от нуля даже при точных входных данных и оценивается неравенством

$$\|s_\Psi - s_T\| \leq \varepsilon_\Psi, \quad (4.1.10)$$

где ε_Ψ – собственная ошибка аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$ при любых точных данных, которая определяется из решения экстремальной задачи

$$\varepsilon_{\Psi} = \max \left\{ \|\Psi(\hat{a}_0, \tilde{A}_N s) - s\| : s \in S_N \right\} \quad (4.1.11)$$

Пусть правая часть задана с некоторой погрешностью $\xi \in R^M$, $\|\xi\| \leq \delta_0$, тогда общая ошибка решения оценивается неравенством

$$\|s_{\Psi, \delta} - s_T\| \leq \varepsilon_{\Psi, \delta}(\delta_0), \quad (4.1.12)$$

где $\varepsilon_{\Psi, \delta}$ определяется из решения экстремальной задачи вида:

$$\varepsilon_{\Psi, \delta} = \max \left\{ \|\Psi(\hat{a}_0, \tilde{A}_N s + \xi) - s\| : s \in S_N, \xi \in R^M, \|\xi\| \leq \delta_0 \right\}. \quad (4.1.13)$$

Из (4.1.13) и непрерывности аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$ следует, что

$$\varepsilon_{\Psi, \delta} \rightarrow \varepsilon_{\Psi}, \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Для линейного оператора \tilde{A}_N и линейного аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$ из (4.1.13) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Psi, \delta} &= \max_{s \in S_N, \|\xi\| \leq \delta_0} \|\Psi(\hat{a}_0)(\tilde{A}_N s + \xi) - s\| \leq \\ &\max_{s \in S_N} \|\Psi(\hat{a}_0)\tilde{A}_N s - s\| + \max_{\|\xi\| \leq \delta_0} \|\Psi(\hat{a}_0)\xi\| = \varepsilon_{\Psi} + \varepsilon_{\delta}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{\delta} = \max_{\xi} \|\Psi(\hat{a}_0)\xi\| \leq \|\Psi(\hat{a}_0)\| \cdot \|\xi\| = \|\Psi(\hat{a}_0)\| \delta_0$ - ошибка решения, обусловленная погрешностью правой части. Откуда получаем, что для линейного оператора A_N

$$\varepsilon_{\Psi, \delta} \leq \varepsilon_{\Psi} + \varepsilon_{\delta}, \quad \varepsilon_{\Psi, \delta} \xrightarrow{\varepsilon_{\Psi} \rightarrow 0} \varepsilon_{\delta}.$$

Аналогичный результат справедлив и для задачи, линеаризованной в окрестности точки s_{Ψ} при условии малости δ_0 . Этот результат важен, так как означает, что суммарная ошибка решения обратной задачи, полученного на основе приближенных данных, может быть уменьшена за счет уменьшения собственной ошибки аппроксиматора ε_{Ψ} , что используется в алгоритмах уточнения решений итерационными методами (см. п. 4.2.3).

На практике для расчета собственных ошибок аппроксиматора формируются независимые *тестирующие подмножества* Q^{Tst} опорных решений, не использовавшихся при обучении аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$. При этом вычисляются оценки собственной ошибки аппроксиматора, определяемые некоторыми

непрерывными функционалами от разности $s_\Psi - s_T$: максимальная ошибка типа (4.1.11), средняя ошибка и некоторые другие. Например, часто используется среднеквадратичное отклонение по тестирующей выборке \mathbb{Q}^{Tst} :

$$\bar{\varepsilon}_\Psi(\hat{a}_0) = \frac{1}{I_{Tst}} \sum_q^{I_{Tst}} \|s_{\Psi,q} - s_{T,q}\|^2, \quad s_{T,q} \in \mathbb{Q}^{Tst}. \quad (4.1.14)$$

4.1.4. Вопросы корректности задачи обучения аппроксиматора

Зафиксируем некоторое множество \mathbb{Q}_{bs} , опорных решений и тестирующее множество \mathbb{Q}^{Tst} . В основе задачи обучения аппроксиматора $\Psi(\hat{a})$ лежит задача минимизации функционала ошибки $\varepsilon_{err}(\hat{a})$ вида (4.1.8). Аргумент \hat{a} аппроксиматора изменяется в пределах замкнутого множества Q_Ψ , а координатные функции Ψ^n непрерывно зависят от этих коэффициентов. Поэтому глобальный минимум ε_{err}^* непрерывного функционала $\varepsilon_{err}(\hat{a})$ на множестве Q_Ψ существует, но может достигаться в общем случае на некотором множестве $Q_\Psi^* \subset Q_\Psi$ элементов $\hat{a} \in Q_\Psi^*$:

$$Q_\Psi^* = \{ \hat{a} : \hat{a} \in Q_\Psi, \varepsilon_{err}(\hat{a}) = \varepsilon_{err}^* \}.$$

Множество Q_Ψ^* точек глобального минимума непрерывного функционала $\varepsilon_{err}(\hat{a})$, согласно теореме Вейерштрасса, не пусто и является компактным [Васильев, 1988]. Различные точки глобального минимума определяют различные наборы коэффициентов $\hat{a} \in Q_\Psi^*$ и соответствующие им различные аппроксиматоры $\Psi(\hat{a})$ с различной собственной ошибкой $\bar{\varepsilon}_\Psi(\hat{a})$ (4.1.14). Нашей целью является построение аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$ с минимальной собственной, средней по тестирующей выборке, ошибкой $\bar{\varepsilon}_\Psi^*$. Поэтому из множества Q_Ψ^* точек глобального минимума

следует выделить такой набор коэффициентов $\hat{a}_{\min} \in Q_{\Psi}^*$, при котором собственная ошибка аппроксиматора будет минимальна. Этот набор определяется из решения экстремальной задачи

$$\hat{a}_{\min} = \arg \min \{ \bar{\varepsilon}_{\Psi}(\hat{a}) : \hat{a} \in Q_{\Psi}^* \}.$$

Решение этой задачи существует, но также может быть неединственным, однако, нас устраивает любое ее решение, так как оно дает набор коэффициентов для аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$, $\hat{a}_0 = \hat{a}_{\min}$ с минимальной собственной ошибкой $\bar{\varepsilon}_{\Psi}^*$ по тестирующему множеству. Таким образом, задача обучения аппроксиматора с минимальной собственной ошибкой вида (4.1.14) сводится к решению двухкритериальной экстремальной задачи вида:

$$\begin{cases} Q_{\Psi}^* = \arg \min \{ \varepsilon_{err}(\hat{a}) : \hat{a} \in Q_{\Psi} \} \\ \hat{a}_{\min} = \arg \min \{ \bar{\varepsilon}_{\Psi}(\hat{a}) : \hat{a} \in Q_{\Psi}^* \} \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Таким образом задача (4.1.15) построения аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_{\min})$ с минимальной собственной ошибкой снимает проблему неединственности глобального минимума, присущую методу регуляризации Тихонова (по крайней мере теоретически).

Координатные функции аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0, x)$ непрерывными функциями x , поэтому приближенные решения уравнения (4.1.1), получаемые с его помощью, являются устойчивыми по отношению к входным данным.

Из вышесказанного и п. 4.1.2, 4.1.3 следует

Теорема 4.1.1. *Для уравнения (4.1.1) при любых фиксированных $N, M, M \geq N$ и заданных множествах Q_{bs}, Q^{Tst} существует непрерывный аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_{\min})$ заданного типа с минимальной собственной ошибкой $\bar{\varepsilon}_{\Psi}^*$ вида (4.1.14).*

При фиксированном объеме Q_{bs} обучающего множества Q_{bs} собственная интерполяционная ошибка аппроксиматора дополнительно может быть уменьшена

за счет изменения типа его конструкции, а при фиксированном типе конструкции – за счет увеличения объема множества (см. раздел 5.1).

Далее в работе символом $\Psi(\hat{a}_0)$ мы будем обозначать обученный аппроксиматор с коэффициентами $\hat{a}_0 = \hat{a}_{\min}$, найденными из решения задачи (4.1.15).

4.1.5. Общие свойства аппроксиматоров

- 1) Классический непрерывный аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_0)$, построенный при минимальной априорной информации типа (1.2.2), (1.2.3), определяющей диапазон возможных изменений искомого параметра среды, является *универсальным "решателем" обратной задачи* (4.1.1) и может быть применен к любым предложенным входным данным $f \in R^M$; решения, получаемые с его помощью приближенные решения устойчивы.
- 2) При работе универсального аппроксиматора не требуется задания 1-го приближения.
- 3) Высокая скорость инвертирования предложенных данных практически не зависит от физической размерности задачи, а определяется временем вычисления аппроксимирующего полинома в заданных точках, что позволяет работать в режиме реального времени.
- 4) При наличии априорной информации о строении среды в исследуемом регионе, могут конструироваться аппроксиматоры различного типа с учетом дополнительной информации и специфики решаемой задачи. Например, *территориальные аппроксиматоры* [Шимелевич, Оборнев, 2009], а также *локальные аппроксиматоры* II типа (см. ниже п.4.1.7.2) для решения обратных задач типа «уточнения параметров гипотезы» (задачи данного типа ввел в практику

геоэлектрики проф. В.И. Дмитриев [Дмитриев, 2005; Дмитриев, 2012]), а также обратных задач геодинамического электромониторинга параметров ранее изученной среды [Шимелевич и др., 2003; Shimelevich et al., 2007; Шимелевич, Оборнев, 2008; Шимелевич и др., 2017б]. Территориальные аппроксиматоры «привязаны» к территории исследований и могут применяться только в данном регионе.

5) Аппроксиматор в явном виде не минимизирует невязку решения при фиксированной правой части решаемого уравнения. Уменьшение невязки (при необходимости) может быть достигнуто путем проведения дополнительных итераций какими-либо методами (см. п.4.1.6).

б) В качестве координатных функций, аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$ могут использоваться различные непрерывные многочлены, задаваемые в аналитическом виде, что существенно облегчает решение оптимизационной задачи обучения аппроксиматора. Помимо классических многочленов для этих целей могут использоваться классы функций более общей природы, удовлетворяющие условиям теоремы Вейерштрасса-Стоуна [Stone, 1948; Ильин, Позняк, 2002; Cybenko, 1989; Hornik et al., 1989] и их обобщениям [Горбань, 1998]. К числу таких конструкций относятся НС многочлены, речь о которых пойдет ниже в разделе 4.2.

4.1.6. Аппроксимационно-итерационный метод

Решение, полученное с помощью обученного универсального аппроксиматора, может рассматриваться, как первое приближение и, при необходимости, уточняться. Один из методов уточнения решения заключается в построении уточняющих аппроксиматоров $\Psi(s_{\Psi,\chi}, \hat{a}_\chi)$, $\chi = 1, 2, \dots$ (такой же конструкции, как $\Psi(\hat{a}_0)$), обученных на новых, более узких множествах опорных

решений, лежащих в окрестности приближенных решений, которые были найдены с помощью аппроксиматора $\Psi(\hat{a}_0)$ [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Шимелевич и др., 2017а].

Обучение аппроксиматоров $\Psi(s_{\Psi, \chi}, \hat{a}_\chi)$ на более узких обучающих множествах множеств, как правило, позволяет уменьшить собственную ошибку аппроксиматора, что создает предпосылки для нахождения решений с меньшей невязкой (см. ниже п. 4.2.3).

Уточняющие итерационные аппроксиматоры привязаны к измеренным данным и на каждой новой итерации должны строиться заново, при этом требуются дополнительные временные ресурсы.

Уточнение первого приближения может проводиться также на основе иных методов: классических оптимизационных процедур, методов случайного поиска (СП) и др. (см. п. 4.2.3 и 5.1.2).

4.1.7. Локальные аппроксиматоры

Рассмотренный выше классический аппроксиматор $\Psi(\hat{a})$ является приближенным численным обратным оператором для уравнения (4.1.1), который каждому полному вектору входных данных $f = (f^1, \dots, f^M)$, определенных на пространственно-частотной сетке в области измерений Ω_1 , ставит в соответствие вектор искомых параметров $s = (s^1, \dots, s^N)$, определяющих свойства среды на сетке параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω . При построении этого аппроксиматора используется вид зависимости между векторами f и s , определяемой с помощью оператора \tilde{A}_N прямой задачи.

Для некоторых практических задач бывает необходимо находить значения выделенной группы искомым параметров $s^D = (s^{N_1}, \dots, s^{N_D})$, $N_1 \geq 1$, $N_1 \leq N_D \leq N$, определяющих свойства среды в некоторой изучаемой подобласти $D \subset \Omega$, на основе неполного набора входных данных $f^D = (f^{M_1}, \dots, f^{M_D})$, $M_1 \geq 1$, $M_1 \leq M_D \leq M$, $N_D - N_1 \leq M_D - M_1$. Такую задачу называют *задачей частичной инверсии по неполным данным*, которая была впервые сформулирована в работе [Шимелевич и др., 2003] для нейросетевых аппроксиматоров, применительно к обратной задаче ЭМ мониторинга (1.1.17), и получила дальнейшее развитие в работах автора [Шимелевич, Оборнев, 2008; Шимелевич, Оборнев, 2009]. Ясно, что эта задача в общем случае выходит за рамки классической постановки обратной задачи, прежде всего потому, что, зная параметры среды только в подобласти D , нельзя решить прямую задачу. Однако, имея в распоряжении множество $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений для задачи (4.1.1), используемое для построения классического аппроксиматора $\Psi(\hat{a})$ (п. 4.1.2), можно построить *локальный аппроксиматор* $\Psi^D(\hat{a})$, который заданному вектору неполных входных данных f^D ставит (с некоторой ошибкой) в соответствие вектор параметров s^D

$$s^D \approx \Psi^D(\hat{a}, f^D). \quad (4.1.16)$$

Задача определения коэффициентов аппроксиматора $\Psi^D(\hat{a})$ также, как и в случае полных данных, сводится к аппроксимационно-интерполяционной проблеме на множестве $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$.

В зависимости от объема априорной информации различают локальные аппроксиматоры I и II типов. Аппроксиматоры I типа используются в алгоритмах аппроксимационного метода решения обратной задачи (4.1.1) и обратной задачи ЭМ мониторинга вида (1.1.18) при дефиците априорной информации о строении исследуемой области. Локальные аппроксиматоры II типа являются частным случаем территориальных аппроксиматоров и на основе априорной информации о

решении применяются в обратных задачах типа «уточнения параметров гипотезы», и классических обратных задачах ЭМ мониторинга типа (1.1.17).

4.1.7.1. Свойства локальных аппроксиматоров

Для обучения локального аппроксиматора **I** типа для заданной подобласти D на основе множества опорных решений $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ формируется подмножество $\bar{\mathbb{Q}}_{bs,i}(\bar{S}_{bs}, \bar{E}_{bs}, Q_{bs})$ пар «неполных» векторов (s_q^D, f_q^D) , $s_q^D \in \bar{S}_{bs}$, $f_q^D \in \bar{E}_{bs}$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$, проекции которых составлены из проекций полных векторов $s = (s^1, \dots, s^N) \in S_{bs}$, $f = (f^1, \dots, f^M) \in E_{bs}$ исходного множества $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$. При этом векторы $s^D = (s^{N_1}, \dots, s^{N_D})$ определяют свойства среды в заданной подобласти $D \subset \Omega$, а векторы $f^D = (f^{M_1}, \dots, f^{M_D})$ отобраны по некоторому принципу, указанному ниже. Векторы f_q^D, s_q^D определяют вход и выход обучаемого локального аппроксиматора Ψ^D . Условие для определения коэффициентов локального аппроксиматора на основе множества $\bar{\mathbb{Q}}_{bs,i}(\bar{S}_{bs}, \bar{E}_{bs}, Q_{bs})$ по аналогии с (4.1.6) записывается в виде:

$$\Psi^D(\hat{a}, f_q^D) \approx s_q^D, \quad s_q^D, f_q^D \in \bar{\mathbb{Q}}_{bs}.$$

Соответственно задача обучения аппроксиматора Ψ^D сводится к решению экстремальной задачи типа (4.1.15) с целевыми функционалами вида:

$$\varepsilon_{err}(\hat{a}) = \frac{1}{Q_{bs}} \sum_q^{\bar{Q}_{bs}} \left\| \Psi^D(\hat{a}, f_q^D) - s_q^D \right\|^2, \quad s_q^D, f_q^D \in \bar{\mathbb{Q}}_{bs},$$

$$\bar{\varepsilon}_{\Psi}(\hat{a}_0) = \frac{1}{I_{Tst}} \sum_q^{I_{Tst}} \left\| s_{\Psi,q} - s_{T,q} \right\|^2, \quad s_{T,q} \in \bar{\mathbb{Q}}^{Tst}.$$

Рассуждая по аналогии с тем, как это делалось в п. 4.1.4, можно убедиться в существовании локального аппроксиматора Ψ^D с минимальной собственной ошибкой для фиксированной области D и множеств опорных решений $\bar{Q}_{bs}(\bar{S}_{bs}, \bar{E}_{bs}, Q_{bs})$, $\bar{Q}_{bs}^{Tst}(\bar{S}_{bs}^{Tst}, \bar{E}_{bs}^{Tst}, Q_{bs}^{Tst})$.

Теорема 4.1.2. Для уравнения (4.1.1) для любой заданной подобласти $D \subset \Omega$, фиксированных параметрах N_D , M_D , $M_D \geq N_D$ и заданных множествах Q_{bs} , Q^{Tst} существует непрерывный локальный аппроксиматор $\Psi^D(\hat{a}_{\min})$ заданного типа с минимальной собственной ошибкой $\bar{\varepsilon}_\Psi^*$.

Локальные аппроксиматоры I типа являются частным случаем классического аппроксиматора и обладают всеми свойствами последнего (п.4.1.5), однако имеют ряд особенностей.

1) При обучении локального аппроксиматора в набор f^{M_1}, \dots, f^{M_D} входных данных (откликов среды) включаются только наиболее чувствительные к изменениям заданного набора параметров s^{N_1}, \dots, s^{N_D} характеристики поля, определенные на некоторой части $\Omega_{1,D} \subset \Omega_1$ области измерений Ω_1 , на некотором подинтервале частот $\Delta_{\omega,D} \subset \Delta_\omega$, результатом чего является сжатие обучающих данных. Опыт проведенных расчетов показал, что такое сжатие данных позволяет уменьшить собственную ошибку обучения локального аппроксиматора Ψ^D , по сравнению с ошибкой классического аппроксиматора Ψ , обученного на основе полных данных $f = (f^1, \dots, f^M)$, $s = (s^1, \dots, s^N)$. Решается задача определения оптимальной конфигурации выделяемых подобластей $D \subset \Omega$, $\Omega_{1,D} \subset \Omega_1$ и соответствующих оптимальных размерностей неполных векторов f^D , s^D данных, обеспечивающих минимальную ошибку обучения.

2) В задачах геоэлектрики, учитывая быстрое затухание ЭМ квазистационарного поля с глубиной (в среднем по экспоненте), наборы параметров s^{N_1}, \dots, s^{N_D} следует выбирать на различных глубинах, например по i -м, $i=1, \dots, I$ ярусам сетки параметризации. В этом случае строятся поярусные

локальные аппроксиматоры $\Psi_i^D, i=1, \dots, I$, которые лучше адаптированы к свойствам задачи; при этом для каждого аппроксиматора Ψ_i^D определяются оптимальные размерности входного и выходного векторов данных, что обеспечивают обучение локальных аппроксиматоров и проведение с их помощью локальной инверсии данных с минимальной ошибкой, определяемой дифференцированно по каждому ярусу, т.е. в соответствии с глубиной исследований.

3) При обучении локального аппроксиматора I типа, наряду с параметрами среды из выделенной группы s^{N_1}, \dots, s^{N_D} , в процессе построения обучающего множества $\bar{Q}_{bs,i}(\bar{S}_{bs}, \bar{E}_{bs}, Q_{bs})$, варьируются также параметры, и соответствующие им отклики среды, не принадлежащие выделенным группам, так как полные векторы являются элементами исходного множества $Q_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений. В результате этого минимизируется влияние параметров, определяющих свойства среды в области $\Omega \setminus D$, окружающей выделенную подобласть D , а также влияние фоновой среды (см. п. 1.3.2), окружающей всю исследуемую область Ω на свойства обучаемого локального аппроксиматора Ψ^D . Это свойство локальных аппроксиматоров дополнительно уменьшает ошибку локальной инверсии данных.

4) При обучении аппроксиматоров II типа параметры среды, не принадлежащие выделенной группе s^{N_1}, \dots, s^{N_D} , остаются фиксированными и считаются известными на основе априорной информации. Для построения аппроксиматора II типа формируется специальное множество $Q_{bs}^F(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений.

5) При построении локальных аппроксиматоров для решения обратных задач типа (1.1.17), (1.1.18) мониторинга параметров среды в сейсмоактивных областях не всегда может быть использована оптимальная конфигурация подобласти измерений $\Omega_{1,D} \subset \Omega_1$ (вследствие возможной труднодоступности), но

могут быть сформулированы определенные требования к структуре и объему измеряемых данных в предполагаемой подобласти $\Omega_2 \subset \Omega_1$ режимных наблюдений (см. п.5.2.3.1).

4.2. Аппроксимационный нейросетевой метод решения операторных уравнений вида (4.1.1)

4.2.1. Нейронные сети – универсальные аппроксиматоры сложных нелинейных зависимостей

Классическими примерами функций, которые могут быть использованы для построения аппроксиматоров, являются нейросетевые многочлены типа трехслойных нейронных сетей $\varphi(V, W, x^1, \dots, x^M)$ [Горбань, 1998; Cybenko, 1989; Hornik et al., 1989; Хайкин, 2006], которые преобразуют входной вектор $x = (x^1, \dots, x^M)$ в выходной вектор $y = (y^1, \dots, y^N)$ по правилу

$$y^n = \varphi^n(V, W, x) = \sum_{l=1}^L v^{nl} \lambda \left(\sum_{m=1}^M w^{lm} x^m \right), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.2.1)$$

где v^{nl} , w^{lm} – элементы матриц V, W , определяющие свободные коэффициенты НС нейросети данного типа; $\lambda(x)$ – заданная (в общем случае нелинейная) ограниченная непрерывная монотонно возрастающая дифференцируемая функция (функция активации), например, логистическая функция $\lambda(x) = 1 / (1 + e^{-x})$, L – параметр, определяющий сложность (порядок) НС многочлена.

Широкое использование нейронной сети вида (4.2.1) на практике обусловлено двумя основными обстоятельствами.

1. С одной стороны – это простота конструкции нейронной сети, представляющей собой функцию M переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и их линейных комбинаций. При этом согласно известной теореме Колмогорова [Колмогоров, 1957], *любая непрерывная функция $\eta(x^1, \dots, x^N)$ M переменных, заданная на M -мерном кубе, может быть точно представлена в виде суперпозиций непрерывных функций (специального вида) одного переменного и сложения,*

$$\eta(x^1, \dots, x^M) = \sum_{i=1}^{2M+1} \chi_i \left(\sum_{j=1}^M \phi_{i,j}(x^j) \right), \quad (4.2.2)$$

где функции $\chi_i, \phi_{i,j}$ – действительные непрерывные функции одного переменного, при этом, функции $\phi_{i,j}$ можно выбрать стандартными, т.е. не зависящими от η , и даже монотонными.

Сравнение представлений (4.2.1) и (4.2.2) показывает принципиальную возможность реализации сколь угодно сложных непрерывных многомерных зависимостей с помощью функций типа нейронных сетей. Говоря иначе, это теорема существования точного представления типа (4.2.2) для произвольных непрерывных многомерных функций сколь угодно сложного вида.

2. С другой стороны, произвольная непрерывная функция M переменных может быть аппроксимирована трехслойной нейросетью вида (4.2.1) с любой заданной точностью при достаточно большом L . Имеет место следующая теорема Цыбенко [Cybenko, 1989]: *любая непрерывная функция $\eta(x^1, \dots, x^M)$ M переменных, заданная в M -мерном кубе, может быть аппроксимирована (по равномерной норме) с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$ трехслойной нейронной сетью вида (4.2.1) при $L \rightarrow \infty$:*

$$\left| \eta(x^1, \dots, x^M) - \sum_{l=1}^L v_l \lambda \left(\sum_{m=0}^M w_{lm} x^m \right) \right| < \varepsilon, \quad L \rightarrow \infty.$$

В теореме Колмогорова доказано существование некоторых функций (имеющих специальный и довольно экзотический вид и достаточно сложно

реализуемых на практике) одного переменного, с использованием которых может быть точно представлена произвольная непрерывная функция $\eta(x^1, \dots, x^M)$ M -переменных, а теорема Цыбенко утверждает, что $\eta(x^1, \dots, x^M)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована с помощью заданных элементарных (удобных для реализации) функций x^m и $\lambda(x)$. Таким образом, теорема Цыбенко доказывает существование нейронной сети типа (4.2.1), аппроксимирующей любую непрерывную функцию с любой наперед заданной точностью. Функция обратного оператора - отображение “вход-выход” - условно-корректной обратной задачи является непрерывной [Тихонов, Арсенин, 1979], поэтому теорема Цыбенко служит теоретическим обоснованием АНС метода решения обратной задачи с использованием трехслойных нейросетей.

4.2.1.1. Полносвязные MLP-сети

Для аппроксимации сложных нелинейных зависимостей применяются многослойные нейронные сети – многослойные перцептроны (MLP) с более сложной каскадной архитектурой [Хайкин, 2006], которые преобразуют входной вектор $x = (x^1, \dots, x^M)$ в выходной вектор $y = (y^1, \dots, y^N)$ по правилу

$$y^n = \lambda_0 \left(\sum_{l_9=1}^{L_9} v_9^{nl_9} \lambda_9 \left(\dots \sum_{l_2=1}^{L_2} v_2^{l_3 l_2} \lambda_2 \left(\sum_{l_1=1}^{L_1} v_1^{l_2 l_1} \lambda_1 \left(\sum_{m=1}^M w^{l_1 m} x^m \right) \right) \right) \right), n = 1, \dots, N, \quad (4.2.3)$$

где $\{w^{l_1 m}\}$ – матрица коэффициентов входного слоя сети; $\{v_1^{l_2 l_1}\}, \dots, \{v_9^{nl_9}\}$ – набор матриц скрытых слоев сети; элементы всех этих матриц определяют свободные коэффициенты нейронной сети данного типа; $\lambda_k(x)$, $k = 1, \dots, 9$ – функции активации скрытых слоев сети типа $\lambda(x) = 1 / (1 + e^{-x})$; 9 – число скрытых слоев сети, определяющее ее сложность; $\lambda_0(x)$ – функция активации на выходе нейронной

сети. В рассматриваемых далее задачах $\lambda_0(x)$ равна постоянной величине, если выход последнего \mathcal{Y} -го слоя принадлежит S_N , и отбрасывает его в противном случае.

MLP-сети являются *полносвязными сетями*, в которых каждый элемент последующего слоя связан со всеми элементами предыдущего слоя, причем каждая связь имеет свой персональный весовой коэффициент.

MLP-сети в настоящее время широко используются при решении нелинейных задач в различных отраслях математической физики и вычислительной математики: [Павлов, 1994; Васильев, 2004; Васильев, 2007; Корженевский, 2007; Хайкин, 2006; Ротштейн и др., 1998] и множество других работ. Обзор по применению MLP-сетей при решении нелинейных обратных задач геофизики был представлен выше в п. 1.3.3.3.

4.2.1.2. Глубокое обучение. Сверточные нейронные сети

Глубокое обучение (Deep learning) — это особый раздел машинного обучения, суть которого состоит в изучении последовательных слоев (уровней) все более значимых представлений об исследуемых объектах (например, изображениях). Глубокое обучение подразумевает создание алгоритмов для искусственного интеллекта нового поколения [Шолле, 2018]. В этом контексте обычно говорят не о машинном обучении, а о глубоком обучении. Соотношение понятий искусственный интеллект, машинное обучение и глубокое обучение может быть проиллюстрировано в виде следующей схемы (рис. 4.2.1) [Шолле, 2018]:



Рис. 4.2.1. Искусственный интеллект, машинное и глубокое обучения.

Глубокое обучение реализуется в *глубоких нейронных сетях* (ГНС или DNN – Deep Neural Networks), состоящих из большого количества скрытых иерархических слоев с различными функциями нелинейных преобразований данных [Ивахненко, Лапа, 1965; Bengio, 2009; Schmidhuber, 2015; Шолле, 2018; Будума, Локашо, 2020]. Количество слоев, на которые делится модель данных, называют глубиной модели. Такие нейронные сети способны обучаться сложным зависимостям и стратегиям принятия решений и демонстрировать более высокую эффективность при решении целого ряда задач по сравнению с обычными нейронными сетями типа персептрон, состоящими из нескольких слоев.

Среди ГНС особое место занимают *сверточные сети* (convolution neuronet, CNN) [LeCun et al., 1989; Шарден и др., 2018; Будума, Локашо, 2020]. В сверточной нейронной сети каждый элемент последующего слоя данных связан с группой элементов (окном) предыдущего слоя посредством фильтра – операцией свертки; окно, образуя ядро свертки, скользит по слою (в самом начале – непосредственно по первому входному слою, т.е. анализируемому цифровому массиву входных данных). При этом ядра свертки не фиксируются исследователем заранее, а формируются адаптивно в ходе обучения сети. Выходной слой таких преобразований – сжатая карта признаков, созданная этими фильтрами. Применяются также дополнительные преобразования с целью понижения размерности карт признаков: max pooling и ряд других преобразований [Bengio et al., 2007; Шарден и др., 2018; Будума, Локашо, 2020]. После многократных

прохождений указанных слоев преобразований данные передаются на обычную полносвязную MLP-сеть. Глубина сверточной сети определяется общим числом слоев преобразования данных.

Сверточные многослойные сети, позволяют существенно более точно, по сравнению с классическими полносвязными сетями, решать задачи обработки и анализа изображений [Визильтер и др., 2010], классификации [Bengio et al., 2007; Larochelle et al., 2007], регрессии [Salakhutdinov, Hinton, 2007] и множество других задач [Bengio, 2009].

4.2.2. Аппроксимационный нейросетевой (АНС) метод

АНС метод является представителем группы аппроксимационных методов решения операторных уравнений вида (1.2.15). В качестве координатных функций аппроксиматора инверсии в АНС методе используются нейронные сети. Например, с помощью MLP-сети вида (4.2.3) координатные функции Ψ^n аппроксиматора $\Psi(V, W, x)$ представляются в виде:

$$\Psi^n(V, W, x) = \lambda_0 \left(\sum_{l_g=1}^{L_g} v_g^{nl_g} \lambda_g \left(\dots \sum_{l_2=1}^{L_2} v_2^{l_3 l_2} \lambda_2 \left(\sum_{l_1=1}^{L_1} v_1^{l_2 l_1} \lambda_1 \left(\sum_{m=1}^M w^{l_1 m} x^m \right) \right) \right) \right), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.2.4)$$

где $W = \{w^{l_1 m}\}$ – матрица коэффициентов входного слоя сети; $V = \{v_1^{l_2 l_1}\}, \dots, \{v_g^{nl_g}\}$ – набор матриц скрытых слоев сети.

Все результаты, представленные выше, в разделе 4.1, справедливы для НС аппроксиматоров с координатными функциями вида (4.2.4) с непрерывными функциями активации $\lambda_k(x)$, $k = 1, \dots, \mathcal{G}$. В частности, согласно Теореме 4.1.1, для уравнения (4.1.1) при любых заданных конечно-разностной сетке θ_{N_0} и сетке параметризации θ_N размерности $N \leq N_0$ существует НС аппроксиматор (а также

локальный аппроксиматор) с минимальной собственной интерполяционной ошибкой $\bar{\varepsilon}_\Psi^*$.

В п.1.3.2.2 показано, что многокритериальные задачи геоэлектрики, решаемые методом общей инверсии, сводятся к объединенному операторному уравнению однокритериальной задачи общего типа (1.2.15), поэтому АНС метод применим также и для решения многокритериальных задач.

В ранних работах [Hidalgo et al., 1994; Poulton, 2002; Спичак, Попова, 1998; Shimelevich, Osborne, 1998; Spichak V., Popova, 2000; Спичак, Попова, 2004; Спичак, 2005] применялись простейшие *трехслойные* MLP-сети и *стандартные алгоритмы обучения* [Хайкин, 2006]. При этом использовались множества опорных решений, ~ 100 примеров. Это позволяло получать приближенные решения простейших малопараметрических обратных задач геоэлектрики с числом искомым параметров $N \sim 10 \div 15$. Дальнейшая модернизация АНС метода проводилась на основе использования 5-слойной MLP-сети и построения локальных аппроксиматоров I типа; объемы банков решений при этом составляли ~ 10000 примеров различных вариантов сред, что в совокупности позволило решать обратные 2D задачи геоэлектрики с числом искомым параметров $N \sim 300$ [Шимелевич, Оборнев, 2009; Гужва и др., 2010; Шимелевич, 2013].

В диссертационной работе на базе предшествующих работ разработан модернизированный регуляризованный АНС метод и алгоритмы решения обратных задач геоэлектрики в классах кусочно-постоянных решений на регуляризованной сетке параметризации. В основе алгоритма лежит конструирование и построение НС аппроксиматоров различных типов с помощью *нейронной сети сверточного типа*, адаптированной к решению обратной задачи и включающей слои отбора существенных признаков, сжатия и накопления данных, подавления влияния неизвестной фоновой среды и других преобразований данных с целью уменьшения ошибки обучения аппроксиматоров и повышения эффективности метода. С помощью усовершенствованной версии АНС метода стало возможным решать обратные 2D и 3D задачи геоэлектрики с числом искомым

параметров $N \sim n \cdot 10^3$ и более, в режиме реального времени без задания 1-го приближения на основе больших профильных и площадных данных [Шимелевич и др., 2017а; 2018; 2022].

4.2.2.1. Применение сетей сверточного типа для решения обратной задачи геоэлектрики

В обратных задачах геоэлектрики архитектура входного слоя измеренных данных является достаточно сложной. Если на некотором плоском участке поверхности Земли измеряется некоторая характеристика переменного ЭМ поля на сетке частот, то возникает трехмерный массив входных данных. Если же измеряется несколько характеристик поля на сетке частот, то возникает входной массив, включающий наборы трехмерных массивов. Размерность входного массива кратна числу частот, числу точек измерений и числу используемых характеристик поля и может достигать $M \sim 10^4 \div 10^6$. Обучение классических аппроксиматоров при таких сложных входных данных на основе полносвязной MLP-нейросети применительно к решению обратных нелинейных задач большой размерности, как показал опыт, затруднительно. Более эффективным оказалось использование локальных аппроксиматоров I типа, для обучения которых применяются технологии сетей сверточного типа.

В диссертационной работе для обучения локального НС аппроксиматора строится CNN.INV-сеть сверточного типа, адаптированная к решению нелинейных обратных задач геоэлектрики типа (4.1.1). Сеть CNN.INV включает слои *специальных преобразований данных*, предшествующих обучению полносвязных MLP-сетей, позволяющих уменьшить собственную ошибку аппроксиматора, причем некоторые из этих преобразований существенно отличаются от применяемых в классических CNN-сетях, применяемых для решения задач

распознавания образов и анализа изображений. Алгоритм построения и обучения CNN.INV-сети представлен в разделе 5.1.

Локальные НС аппроксиматоры I типа, обученные на основе CNN.INV-сети позволяют значительно более точно по сравнению с классическими аппроксиматорами, обученными с помощью полносвязных MLP-сетей, аппроксимировать сложные нелинейные зависимости большой размерности, возникающие в задачах построения обратных операторов.

Примеры построения локальных НС аппроксиматоров различных типов, обучаемых на основе сетей сверточного типа, для решения обратных задач геоэлектрики рассматривались в работах [Шимелевич, Оборнев, 2009; Гужва и др., 2010; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2017а; 2018, 2022].

4.2.3. Аппроксимационно-итерационный нейросетевой (АИНС) метод

АИНС метод позволяет уточнять решение, найденное АНС методом (АНС решение). Рассматриваются две модификации АИНС метода. Модификация АИНС1 основана на построении новых уточняющих аппроксиматоров, которые строятся в окрестности найденного АНС решения [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Шимелевич и др., 2017а]; в модификации АИНС СП для уточнения решения применяется метод случайного поиска, с использованием алгоритмов кластеризации и интерполяции [Шимелевич и др., 2022].

I. Метод АИНС1

Пусть $s_{\Psi, \delta} = \Psi(\hat{a}_0, f) \in S_N$ – приближенное АНС решение, полученное с помощью универсального аппроксиматора для фиксированных приближенных данных $f \in F$ с невязкой $\delta_f = \|A_N s_{\Psi, \delta} - f\| \leq \delta_0$.

Рассмотрим уравнение (4.1.1) на новом подмножестве априорных ограничений вида

$$S_{N,1} = \{s: \|s - s_{\Psi, \delta}\| \leq \beta_1(N, f, s_{\Psi, \delta}, \delta_0) \cap S_N\}, \quad (4.2.5)$$

где $\beta_1(N, f, s_{\Psi, \delta}, \delta)$ – апостериорная оценка неоднозначности вида (2.4.1) решения $s_{\Psi, \delta}$. Из (4.2.5) следует, что $S_{N,1}$ является подмножеством S_N ,

$$S_{N,1} \subseteq S_N. \quad (4.2.6)$$

Построим новый аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_1)$ (такой же конструкции, как и $\Psi(\hat{a}_0)$) на подмножестве $S_{N,1}$ для этой задачи и вычислим его собственную ошибку $\varepsilon_{\Psi,1}$. Из (4.2.6) и определения (4.1.11) собственной ошибки аппроксиматора ε_{Ψ} следует, что выполняется неравенство

$$\varepsilon_{\Psi,1} \leq \varepsilon_{\Psi}. \quad (4.2.7)$$

В п. 4.1.3 показано, что уменьшение собственной ошибки ε_{Ψ} аппроксиматора влечет за собой уменьшение суммарной ошибки $\varepsilon_{\Psi, \delta}$ решения обратной задачи (4.1.1) с приближенной правой частью, при этом:

$$\varepsilon_{\Psi, \delta} \rightarrow \varepsilon_{\delta} \text{ при } \varepsilon_{\Psi} \rightarrow 0. \quad (4.2.8)$$

Оценим влияние величины собственной ошибки ε_{Ψ} аппроксиматора на невязку решения. С целью упрощения положим, что в (4.1.1) A_N - обратимая квадратная матрица размерности $N \times N$. В этом случае аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_0)$ также является матрицей $N \times N$. Представим аппроксиматор $\Psi(\hat{a}_0)$ в виде

$$\Psi(\hat{a}_0) = \Delta\Psi(\hat{a}_0) + A_N^{-1},$$

где $\Delta\Psi(\hat{a}_0)$ - квадратная матрица размерности $N \times N$, определяющая отличие аппроксиматора от точной обратной матрицы A_N^{-1} . Запишем приближенное решение $s_{\Psi,\delta}$ задачи (4.1.1) для некоторой произвольной приближенной правой части $f \in R^N$:

$$s_{\Psi,\delta} = \Psi(\hat{a}_0)f = \Delta\Psi(\hat{a}_0)f + A_N^{-1}f, \quad f \in R^N.$$

Поддействуем прямым оператором A_N на обе части последнего равенства

$$A_N s_{\Psi,\delta} = A_N \Delta\Psi(\hat{a}_0)f + f.$$

Отсюда получаем оценку для невязки решения $s_{\Psi,\delta}$:

$$\delta_f = \|A_N s_{\Psi,\delta} - f\| = \|A_N \Delta\Psi(\hat{a}_0)f\| \leq \|A_N\| \cdot \|\Delta\Psi(\hat{a}_0)\| \cdot \|f\|. \quad (4.2.9)$$

Под обозначениями $\|A_N\|$, $\|\Delta\Psi(\hat{a}_0)\|$ здесь и далее понимаются нормы в ЛНП квадратных матриц размерности $N \times N$.

С учетом того, что в рассматриваемом случае

$$\Psi(\hat{a}_0, A_N s) - s = (\Delta\Psi(\hat{a}_0) + A_N^{-1})A_N s - s = \Delta\Psi(\hat{a}_0)A_N s,$$

Решение экстремально задачи (4.1.11) определения собственной ошибки имеет вид

$$\varepsilon_\Psi = \max_s \{ \|\Delta\Psi(\hat{a}_0)(A_N s)\| : s \in S_N \} = \max_s \{ \|\Delta\Psi(\hat{a}_0)\| \cdot \|A_N s\| : s \in S_N \} = \|\Delta\Psi(\hat{a}_0)\| \cdot c_A$$

где $c_A = \max \{ \|A_N s\| : s \in S_N \}$. Отсюда и из (4.2.9) следует, что

$$\delta_f \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon_\Psi \rightarrow 0. \quad (4.2.10)$$

Заметим, что для решения $s_\delta = A_N^{-1}f$, полученного с помощью точного обратного оператора, т.е. при $\|\Delta\Psi\| = 0$, невязка по определению равна нулю:

$$\delta_f = \|A_N s_\delta - f\| = 0.$$

Таким образом, в линейном случае погрешность $\varepsilon_{\Psi,\delta}$ и невязка δ_f решения (4.1.1), получаемого с помощью аппроксиматора, убывают при уменьшении

собственной ошибки аппроксиматора $\varepsilon_\Psi \rightarrow 0$. Этот результат при определенных условиях справедлив для линеаризованной в окрестности точки s_Ψ задачи (4.1.1).

На практике возможность успешно обучить аппроксиматоры на последовательности сужающихся множеств $S_N \supset S_{N,1} \dots \supset S_{N,\chi} \dots$ с уменьшающимися собственными ошибками $\varepsilon_\Psi > \varepsilon_{\Psi,1} \dots > \varepsilon_{\Psi,\chi} \dots$ в нелинейном случае обеспечивается тем, что на каждом шаге среднее расстояние между точками нового обучающего множества, имеющего такой же объем, как и предыдущем шаге, в среднем уменьшается, что и создает предпосылки для уменьшения ошибки интерполяции и собственной ошибки аппроксиматора и как следствие – уменьшения невязки решения. Заметим, что, вообще говоря, решение с невязкой $\delta_1 < \delta$ может и не существовать уже даже после первой итерации. Опыт расчетов показывает, что, как правило, для рассматриваемых задач геоэлектрики удается добиться выполнения необходимых условий для проведения нескольких итераций с уменьшением невязки (п. 5.1.В).

II. Метод АИНС СП

Уточнение приближенного АНС решения приближения может проводиться также методами случайного поиска. В работе предложен АИНС СП метод, в котором на новом множестве опорных решений, построенном в малой окрестности АНС решения, решается задача минимизации функционала невязки с предварительной кластеризацией методом k -средних и последующей интерполяцией методом IDW - обратных взвешенных расстояний (п. 5.1.2.В). Идея применения метода обратных взвешенных расстояний для уточнения решения обратной задачи автору диссертации была высказана д.ф.-м.н. О.Б. Новиком.

4.2.4. Применение локальных НС аппроксиматоров в задачах ЭМ мониторинга

Важным приложением АНС метода в геоэлектрике, как уже отмечалось выше, является обратная задача электромониторинга среды. Рассмотрим обратную задачу (4.1.1) для области исследований Ω . Следуя п.1.1.5, на основе априорной информации будем полагать, что локальный объект, для которого проводится мониторинг расположен в некоторой подобласти $D \subset \Omega$. Для этой задачи, как было показано выше, может быть построен и обучен локальный НС аппроксиматор Ψ^D I или II типа (в зависимости от объема априорной информации) определяющий связь группы параметров $s^D = (s_D^1, \dots, s_D^{N_D})$, $N_1 \geq 1, N_D < N$ среды в подобласти $D \subset \Omega$, с группой данных $f^D = (f_D^{M_1}, \dots, f_D^{M_D})$, $M_1 \geq 1, M_D \leq M$, измеренных на части границы $\Omega_2 \subset \Omega_1$ в окне входных данных F_D . С помощью обученного локального аппроксиматора Ψ^D группа параметров среды $s_D^1, \dots, s_D^{N_D}$ в подобласти D вычисляется по формуле (4.1.16)

$$s_D^n = \Psi^D(f^D), \quad n = 1, \dots, N_D.$$

Под воздействием геодинамических процессов во времени изменяется электропроводность среды в подобласти D и соответственно изменяется вектор данных f^D . Отсюда получаем формулу электромониторинга в режиме реального времени

$$s_D^n(t_j) = \Psi^D(f^D(t_j)), \quad n = 1, \dots, N_D, \quad j = 1, \dots \quad (4.2.11)$$

Из-за недоступности пространственное окно данных не всегда можно выбрать оптимальным, в этом случае формируются квазиоптимальные сети наблюдений, обеспечивающие квазимиимальную ошибку обучения аппроксиматора.

4.2.5. Схема применения АНС метода для решения обратных задач геоэлектрики и ЭМ мониторинга

Обратные задачи геоэлектрики.

Обученный локальный НС аппроксиматор $\Psi^D(\hat{a}_0^D, f^D)$ I типа для решения уравнения вида (4.1.1) характеризуется:

- 1) классом сред, в котором решается обратная задача (см. п. 1.2.1.2 и 1.3); класс сред, в свою очередь, определяется сеткой параметризации θ_N и естественными априорными ограничениями типа (1.2.3) на множество S_N .
- 2) набором используемых характеристик поля, задаваемых на пространственно-частотной сетке аппроксиматора;
- 3) типом используемой НС конструкции и ее коэффициентами полученными в результате обучения НС аппроксиматора;
- 4) собственной ошибкой аппроксиматора $\bar{\varepsilon}_\Psi(\hat{a}_0)$.

Схема применения АНС метода к измеренным данным геоэлектрики включает в себя следующие основные операции.

1. Интерполяция и пересчет измеренных данных на пространственно-частотную сетку аппроксиматора, упорядочивание данных в виде вектора данных $f = (f^1, \dots, f^M)$.

2. Применение аппроксиматора $\Psi^D(\hat{a}_0^D, f^D)$ к входным данным путем перемещения по области измерений таким образом, чтобы выход аппроксиматора в конечном итоге определил все параметры исследуемой области и вычисление приближенного решение \tilde{z} обратной задачи (4.1.1) единообразно для любой правой части $f \in R^M$ без задания первого приближения

Время инверсии данных с помощью обученного аппроксиматора определяется скоростью вычисления функции нейронной сети и обычно составляет первые секунды.

3. Вычисление невязки решения и, при необходимости, уточнение АНС решения с помощью АИНС метода (п.4.2.3).

4. Вычисление апостериорных оценок неоднозначности (погрешности) для финального решения с использованием алгоритмов п. 3.1.3 и 3.1.7.

Обратные задачи ЭМ мониторинга

1. Задается область D проведения мониторинга.

2. В зависимости от объема имеющейся априорной информации о строения среды и возможностей организации измерительной сети, строится локальный аппроксиматор I или II типа.

3. С помощью обученного локального проводится мониторинг динамических параметров среды, на основе измеренных характеристик ЭМ поля $f^D(t_j)$ в задаваемые моменты времени t_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ по формуле (4.2.11):

$$s_D^n(t_j) = \Psi^D(f^D(t_j)), \quad n = 1, \dots, N_D, \quad j = 1, \dots$$

4.3. Выводы к Главе 4

1. Развивается аппроксимационный метод решения нелинейных обратных задач геоэлектрики, основанный на построении приближенного непрерывного обратного оператора задачи, так называемого *аппроксиматора*, с помощью простых полиномиальных конструкций на основе заранее построенного *множества опорных решений* прямых и обратных задач.

2. Исследованы вопросы корректности задачи построения аппроксиматора; доказано существование непрерывного аппроксиматора с минимальной собственной ошибкой.

3. Представляемый аппроксимационный нейросетевой (АНС) метод является частным случаем аппроксимационного метода, в котором в качестве

аппроксимационных конструкций используются нейросетевые полиномы (нейросети).

4. Повышение эффективности развиваемого в диссертационной работе АНС метода, по сравнению с ранними версиями НС метода, основано на построении локальных аппроксиматоров, которые устанавливают связь группы искомого параметра среды с некоторой группой входных данных с учетом быстрого затухания ЭМ квазистационарного поля с глубиной. Локальные аппроксиматоры позволяют проводить *локальную инверсию данных* с минимальной ошибкой, определяемой дифференцированно по глубине исследований.

5. Доказано существование непрерывного локального аппроксиматора с минимальной собственной ошибкой для обратной конечно-параметрической задачи.

6. Конструируются локальные НС аппроксиматоры двух типов. Локальные аппроксиматоры I типа применяются для решения обратной задачи геоэлектрики и обратной задачи ЭМ мониторинга при дефиците априорной информации о строении исследуемой области. Аппроксиматоры II типа используются при наличии дополнительной априорной информации для решения обратных задач типа «уточнение параметров гипотезы» и обратных задач ЭМ мониторинга ранее изученной среды, когда ее геоэлектрические параметры полностью известны, а требуется отслеживать в режиме реального времени динамику его отдельных подобластей на основе локальных или разреженных сетей наблюдения.

7. Основные преимущества АНС метода при решении практических обратных задач заключаются в следующем:

- НС аппроксиматор, построенный при минимуме априорной информации о решении в заданном классе сред (например, при ограничениях на диапазон возможных изменений искомого физического параметра среды), является универсальным "решателем" обратной задачи и может быть применен к любым предложенным входным данным без задания 1-го приближения;

- высокая скорость инверсии предложенных данных практически не зависит от физической размерности задачи, что позволяет работать в режиме реального времени;

- возможность проводить локальную инверсию данных, измеряемых на отдельных участках региональных профилей большой протяженности, с минимальной ошибкой;

- при наличии априорной информации о строении среды в исследуемом регионе строятся территориальные аппроксиматоры с учетом соответствующих априорных ограничений. Территориальный аппроксиматор «привязан» к региону исследований.

8. АНС метод в явном виде не минимизирует невязку решения для заданной фиксированной правой части решаемого уравнения. Уменьшение невязки (при необходимости) может быть достигнуто за счет проведения итераций на основе аппроксимационно-итерационного (АИНС) метода. Разработаны две модификации АИНС метода:

- АИНС1, путем построения уточняющих аппроксиматоров в окрестности найденного АНС решения;

- АИНС СП, методом случайного поиска, с использованием алгоритмов кластеризации (алгоритм k – средних) и интерполяции (алгоритм IDW - обратных взвешенных расстояний). АИНС метод требует дополнительных ресурсов по времени и привязан к конкретным измеренным данным.

9. Показано, что обратная задач ЭМ электромагнитного мониторинга электропроводности среды в сейсмоактивных зонах на основе локальных и/или разреженных сетей наблюдения решается с помощью локальных аппроксиматоров в режиме реального времени.

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АППРОКСИМАЦИОННОГО НЕЙРОСЕТЕВОГО МЕТОДА

Общая схема современного алгоритма АНС метода решения обратной задачи геоэлектрики, представляемая в диссертационной работе, является модернизированной версией, рассмотренной в работе [Шимелевич и др., 2018], и включает следующие основные блоки:

- I.** Адаптивная регуляризация задачи.
- II.** Построение (обучение) НС аппроксиматора.
- III.** Решение обратной задачи; расчет невязки.
- IV.** Уточнение НС решения.
- V.** Расчет апостериорных оценок.

Алгоритмы I, V блоков рассмотрены в Главе 3. В настоящей Главе представлены алгоритмы II, III, IV блоков.

В основе задачи обучения лежит нелинейная экстремальная задача (4.1.15), которая в общем случае не сводится к задаче выпуклого программирования. Сложность численного решения задачи усугубляется ее высокой размерностью, которая в пространстве данных может достигать 10^5 – 10^6 . В настоящей работе для решения этой задачи применяется рандомизированный алгоритм, который использует детерминированные и стохастические методы [Граничин, 2011].

I этап. Исходная детерминированная экстремальная задача (4.1.15) обучения аппроксиматора рандомизируется и решается методами случайного поиска с применением алгоритмов Монте-Карло и технологий сетей сверточного типа. Правильность работы обученных НС аппроксиматоров проверяется на тестирующих множествах известных решений обратных задач. При этом вычисляется собственная ошибка аппроксиматора замены точного обратного оператора приближенным.

II этап. Проводится *дерандомизация* задачи: *обученный аппроксиматор фиксируется* и принимается за приближенный обратный оператор задачи (4.1.1). С его помощью на основе элементарных алгебраических операций вычисляется решение обратной задачи и затем с помощью прямого оператора рассчитывается невязка.

III этап. При необходимости решение, полученное на II этапе, уточняется АИНС методом, содержащим рандомизированные процедуры.

Для численной реализации задач I этапа, в соответствии с принципами, изложенными в п. 4.2.2.1, строится авторская многослойная сеть CNN.INV (Convolutional Neural Networks.Inversion) сверточного типа, адаптированная к решению нелинейных обратных задач геоэлектрики и позволяющая строить *локальные НС аппроксиматоры*, обеспечивающие минимальную ошибку решения обратной задачи дифференцированно по глубине исследований.

Для решения задач III этапа разработаны алгоритмы АИНС метода уточнения НС решения: АИНС1 метод основан на построении новых уточняющих аппроксиматоров, которые строятся в окрестности найденного АНС решения [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Шимелевич и др., 2017а], АИНС СП метод случайного поиска, с использованием алгоритмов кластеризации k-средних и IDW-интерполяции [Шимелевич и др., 2022].

В Главе представлены схемы алгоритмов построения локальных аппроксиматоров I и II типов с помощью CNN.INV-сети; приводятся численные примеры решения обратных задач геоэлектрики и ЭМ мониторинга на модельных данных АНС, АИНС методами [Шимелевич, Оборнев, 2003; Shimelevich et al, 2007; Шимелевич, Оборнев, 2008; Шимелевич, Оборнев, 2009; Dolenko et al., 2009; Гужва и др., 2010; Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2017а; 2018; 2022].

5.1. Схема алгоритма АНС метода

А. Схема алгоритма обучения локального НС аппроксиматора I типа

Представлен алгоритм решения обратной задачи геоэлектрики (1.3.27), которая после дискретизации сводится к решению уравнению вида (4.1.1), рассматриваемом на множестве априорных типа (1.3.20):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_N s &= f, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f \in R^M, \quad M \geq N \\ S_N &= \{s : 0 \leq s^n \leq D_s, \quad n = 1, \dots, N\} \end{aligned}$$

А1. Построение обучающего множества опорных решений

Основой построения локального аппроксиматора является обучающее множество $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений прямых задач для уравнения (4.1.1)

Для построения обучающего множества $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений для каждого вектора параметров $s_q \in S_{bs}$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$ вычисляется вектор данных (отклик среды) $f_q = \tilde{A}_N s_q \in E_{bs}$, где \tilde{A}_N - оператор численного решения прямой задачи. При построении множества \mathbb{Q}_{bs} опорных решений применяются методы Монте-Карло и параллельных вычислений на высокопроизводительных кластерах. Компоненты s^n векторов s изменяются случайно, в пределах интервалов $s_{\min} \leq s^n \leq s_{\min} + D_s$ по равномерному закону, что обеспечивает равномерное заполнение опорными решениями всего множества S_N априорных

ограничений задачи. Множество $Q_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ делится на три части $Q^{Est}, Q^{Val}, Q^{Tst}$ (обычно в пропорциях 70%–20%–10%):

$Q^{Est}\{s_q, f_q\}$, $q=1, \dots, I_{Est}$ – подмножество для оценивания (estimation set) целевого функционала задачи обучения НС аппроксиматора;

$Q^{Val}\{s_q, f_q\}$, $q=1, \dots, I_{Val}$ – подмножество для проверки (validation set) интерполяционных свойств НС аппроксиматора в процессе обучения;

$Q^{Tst}\{s_q, f_q\}$, $q=1, \dots, I_{Tst}$ – подмножество для тестирования (test set) обученного НС аппроксиматора и расчета его собственной интерполяционной ошибки;

$$I_{Est} + I_{Val} + I_{Tst} = Q_{bs}.$$

A2. Построение сети CNN.INV сверточного типа

Для задач геоэлектрики размерность векторов $f = (f^1, \dots, f^M)$, подаваемых на вход обучаемой нейросети $M \sim 10^4 \div 10^6$, а выходных $s = (s^1, \dots, s^N)$ - $N \sim 10^2 \div 10^4$; число пар векторов $s_q, f_q, q=1, \dots, Q_{bs}$ в банке решений может составлять $Q_{bs} \sim n \cdot 10^4$. Обучить классическую полносвязную MLP-сеть типа с такими размерностями входа и выхода стандартными методами не представляется возможным. В НС методах применяются сверточные сети (п.4.2.2.1), в которых в отличие от полносвязных сетей, каждый элемент последующего слоя данных связан с группой элементов (окном) предыдущего слоя посредством свертки. На основе этой идеи в настоящей работе была сконструирована нейронная сеть сверточного типа, в которой, в соответствии с принципами п.4.1.7.1, строятся локальные НС аппроксиматоры, определяющие связи некоторых групп параметров

$s^D = (s^{N_1}, \dots, s^{N_D})$, $N_1 \geq 1, N_D < N$ в подобласти $D \subset \Omega$ среды, с группами данных $f^D = (f^{M_1}, \dots, f^{M_D})$, $M_1 \geq 1, M_D \leq M$, определенными на части границы $\Omega_{1D} \subset \Omega_1$ [Шимелевич, Оборнев, 2003; 2008; 2009; Шимелевич и др., 2017а]:

Локальные аппроксиматоры обеспечивают сжатие данных, что позволяет уменьшить ошибку обучения аппроксиматоров. Кроме того, как уже отмечалось ранее, учитывая быстрое затухание ЭМ квазистационарного поля с глубиной, наборы параметров s^{N_1}, \dots, s^{N_D} задаются на различных глубинах по ярусам сетки параметризации, что позволяет строить локальные НС аппроксиматоры с минимальной ошибкой обучения дифференцированно для каждого яруса сетки.

Ниже представлена авторская обучающая CNN.INV – сеть сверточного типа. Аббревиатура CNN является общепринятой в литературе для обозначения сверточных сетей [Шарден и др., 2018], аббревиатура INV – подчеркивает прикладную специфику сети, ориентированную на обратные задачи геоэлектрики.

На рис.5.1.1 представлена обобщенная укрупненная схема CNN.INV-сети. Сеть состоит из следующих трех основных макрослоев преобразований (рис. 5.1.1): сверточный макрослой входных данных, макрослой преобразования данных, макрослой обучения локального НС аппроксиматора на основе полносвязной MLP-сети. На вход подается множество $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений, выходом сети CNN.INV-сети является обученный локальный НС аппроксиматор $\Psi^D = \{\Psi_i^D, i = 1, \dots, I\}$.

Примечание. В НС технологиях последовательные преобразования данных традиционно называют слоями нейросети. В данной работе автор придерживается этой терминологии.

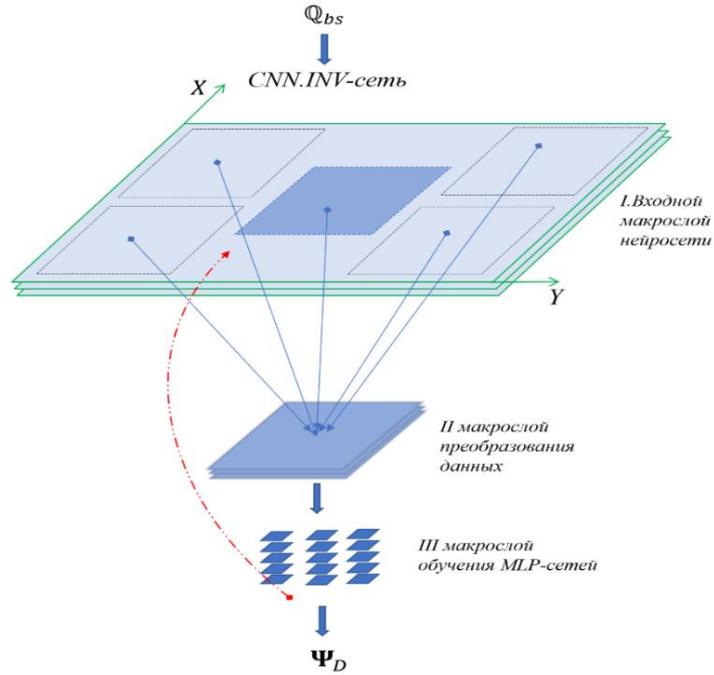


Рис. 5.1.1. Схема CNN.INV-сети сверточного типа для обучения локального аппроксиматора обратной задачи. Красная стрелка обозначает многократные циклы работы сети.

A2.1. Сверточный макрослой данных

A2.1.1. Слой сжатия данных

В пределах каждого i -го, $i=1, \dots, I$ яруса сетки параметризации \mathcal{G}_N , покрывающей исследуемую область Ω , выделяется группа (окно) параметров среды и формируется вектор $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^{N_i})$, определяющий свойства среды в ячейках яруса сетки, попадающих в некоторую заранее выделенную подобласть D_i яруса (рис. 5.1.2). Для этого окна параметров из всего набора имеющихся входных данных выявляется группа $f_i = (f_i^1, \dots, f_i^{M_i})$ наиболее значимых (существенных)

входных данных, которые составляют *сверточное окно входных данных* F_i , , выделенное на рис.5.1.1, синим цветом. Значимыми считаются входные данные (отклики среды) $f_i^1, \dots, f_i^{M_i}$, которые «достаточно хорошо» реагируют на изменения параметров $s_i^1, \dots, s_i^{N_i}$ данного окна. В сверточное окно данных включаются входные данные, значимые по пространственным координатам точек измерений, по частоте и по типу характеристик поля. Окно входных данных по пространственным координатам обычно существенно меньше полной пространственной области измерений Ω_i . Сверточные окна F_i , D_i определяют входы и выхода будущих поярусных локальных аппроксиматоров.

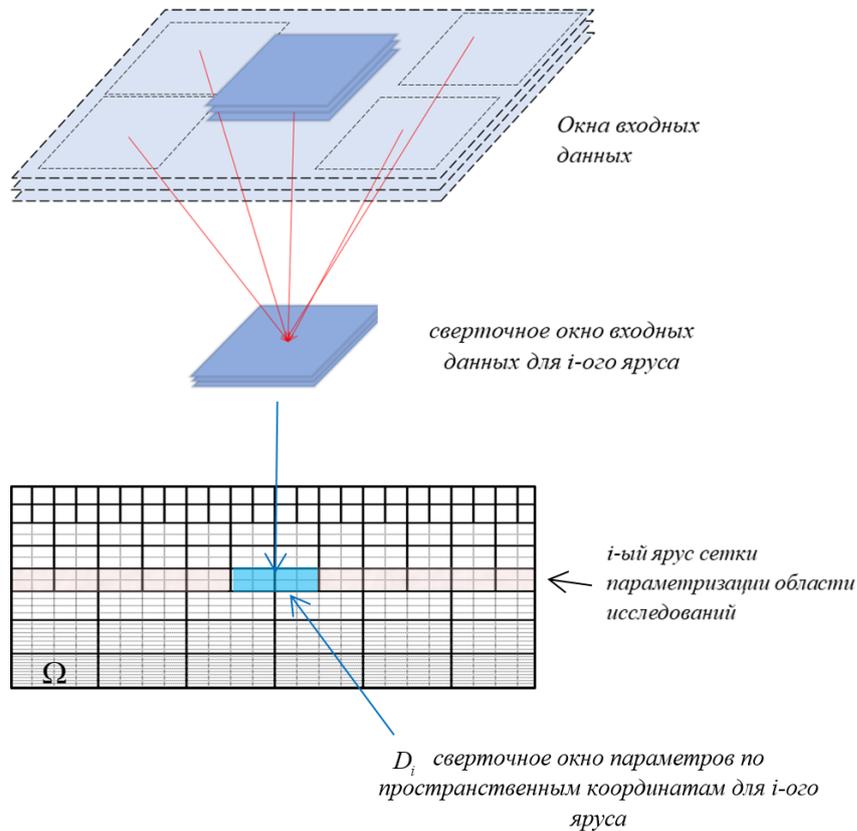


Рис. 5.1.2. Схема выделения окон параметров и данных. Толстыми линиями показана сетка параметризации, тонкими - сетка прямой задачи; аугментация данных сверточного окна данными из других окон входных данных, обозначенных пунктиром, схематически показаны красными стрелками.

Совокупность окон параметров для каждого яруса сетки параметризации по всей глубине исследуемой области Ω образует вертикальный столбец окон параметров, определяющих свойства среды в подобласти $D = \bigcup D_i \subset \Omega$ (см. пример на рис. 5.1.3). Столбцу параметров соответствует набор сверточных окон входных данных.

Неполные векторы $f_i = (f_i^1, \dots, f_i^{M_i})$, $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^{N_i})$ определяют, соответственно, вход и выход обучаемого *локального* аппроксиматора Ψ_i^D , $i = 1, \dots, I$ для i -го яруса сетки параметризации. Совокупность всех аппроксиматоров Ψ_i^D определяет полный локальный НС аппроксиматор Ψ^D обратной задачи (4.1.1)

$$\Psi^D = \{\Psi_i^D, i = 1, \dots, I\}, \quad (5.1.1)$$

который устанавливает связь между полным набором сверточных окон данных и параметрами среды подобласти D .

A2.2. Макрослой преобразования данных

A2.2.1. Сжатие данных на основе критерия значимости

Применяются различные критерии значимости данных, включаемых в сверточные окна: степень коррелированности изменений параметров и входных данных, уровень отклика входных данных, включаемых в сверточные окна, по отношению к отбрасываемым данным. Итоговым критерием значимости сжатых данных, включаемых в сверточные окна F_i , D_i , являются фактические собственные ошибки $\bar{\varepsilon}_{\Psi_i}(\hat{a})$ обучения локальных аппроксиматоров Ψ_i^D . Опыт вычислений показывает, что собственная ошибка обучения полного локального

аппроксиматора $\Psi^D = \{\Psi_i^D, i = 1, \dots, I\}$ в много раз меньше ошибки классического аппроксиматора, обученного на полных данных $f^1, \dots, f^M, s^1, \dots, s^N$. Ошибка обучения зависит от размерности окон F_i, D_i . В процессе работы сети определяются оптимальные размерности сверточных окон для каждого яруса сетки параметризации, обеспечивающие минимальные ошибки обучения $\bar{\varepsilon}_{\Psi,i}(\hat{a})$.

Таким образом, преобразования в данном слое сети обеспечивают сжатие данных и уменьшение размерности задачи при условии минимальности ошибки обучения дифференцированно по глубине привязки искомым параметрам.

A2.2.2. Дополнительное сжатие данных (пулинг)

Слой, в котором производится дополнительное нелинейное сжатие данных путем:

- – выделения квазиоднородных групп данных в пределах окна и взятие максимума по группе размером 2×2 – max pooling и/или взятие среднего по группе 4×4 .
- – исключения угловых точек области краевой задачи, попадающих в окно данных;
- – упрощение структуры переходной области обратной задачи.

A2.2.3. Аугментация данных

Во слое производится дополнение сжатых входных данных, первоначально включенных в сверточные окна, данными, получаемыми при перемещении

сверточных окон по всему массиву входных данных. Данное преобразование является разновидностью процедуры *аугментации* – создание дополнительных обучающих данных на основе имеющихся [Емельянов и др., 2018; Gayer et al; 2019]. Применительно к решаемой обратной задаче, группы элементов характеристик поля, получаемые при различных положениях окна, скользящего по полному входному массиву данных, добавляются (суммируются) с заданными весами в группу данных сверточного окна (рис. 5.1.2). При равномерной по горизонтали сетке параметризации и равномерном законе генерации значений параметров среды во всех ячейках сетки параметризации веса принимаются равными единице при любом положении окна.

Такое преобразование данных позволяет увеличить объем обучающего множества (накопление данных в окне) на 2–3 порядка, не прибегая к дополнительному расчету новых опорных решений, что приводит к дополнительному уменьшению собственной ошибки конструируемого НС аппроксиматора.

Аугментация и сжатие данных, проводимые совместно, позволяют упростить сеть, облегчить обучение и одновременно уменьшить ошибку обучения аппроксиматора и таким образом улучшить обобщающие свойства нейросети. Итогом работы слоев п. А2.1, А2.2 являются наборы поярусных сверточных окон параметров и соответствующих окон входных данных обучаемого аппроксиматора, в которых сконцентрирована вся наиболее существенная информация о данных, используемых при дальнейшем обучении сети.

А2.2.4. Уточнение сетки параметризации

Аппроксиматор для задачи (4.1.1) не всегда удается обучить на оптимальной сетке параметризации $\theta_{N_{\max}}$ размерности N_{\max} (см. раздел 2.5.1) с ошибкой, не

превышающей заданную. В этом случае сетку параметризации приходится укрупнять; размерность сетки параметризации уточняются в соответствии с «обучаемостью» нейросети и формируется новая сетка параметризации $\theta'_{N_{\max}}$ максимальной размерности (детальности) при ограничении на ошибку обучения. Решение обратной задачи, получаемое на новой сетке параметризации $\theta'_{N_{\max}}$, проецируется на исходную оптимальную сетку $\theta_{N_{\max}}$ с помощью интерполяционных процедур. Если различие между сетками существенное, то обратная задача рассматривается в новом классе сред, порождаемом новой сеткой параметризации $\theta'_{N_{\max}}$ и прежними априорными ограничениями типа (1.3.20).

A2.2.5. Подавление влияния фоновой среды

При построении множества опорных решений исследуемая область Ω , в соответствии с п. 1.3.2.1, 1.3.2, дополняется переходной областью Ω_{TD} до полной области Ω_0 , для которой решается прямая задача. Если отсутствует априорная информация о строении переходной области, то неизвестные параметры среды в переходной области при построении множества опорных решений варьируются для каждого q -го варианта строения модели, чтобы уменьшить их влияние на свойства обучаемого аппроксиматора.

A2.3. Макрослой обучения MLP-сетей

Макрослой включает слои обучения полносвязных MLP-сетей, входом которых являются сверточные окна входных данных, а выходом -

соответствующие сверточные окна параметров среды для каждого i -го, $i = 1, \dots, I$ яруса сетки параметризации. Эти MLP-сети определяют локальные аппроксиматоры $\Psi_i^D, i = 1, \dots, I$.

A2.3.1. Оптимизационная задача обучения MLP-сети

Для каждого i -го, $i = 1, \dots, I$ яруса сетки параметризации на основе множества $\mathbb{Q}_{bs}(S_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений из проекций векторов $s_q = (s_q^1, \dots, s_q^N)$, $f_q = (f_q^1, \dots, f_q^M)$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$ формируется множество $\bar{\mathbb{Q}}_{bs,i}(\bar{S}_{bs}, \bar{E}_{bs}, Q_{bs})$ пар $(s_{i,q}, f_{i,q})$, $q = 1, \dots, Q_{bs}$ неполных векторов $s_{i,q} = (s_{i,q}^1, \dots, s_{i,q}^{N_i}) \in \bar{S}_{bs}$, $f_{i,q} = (f_{i,q}^1, \dots, f_{i,q}^{M_i}) \in \bar{E}_{bs}$, проекции которых являются элементами окон параметров и соответствующих окон данных, сформированных на выходе макрослоя A2.2.

Множество $\bar{\mathbb{Q}}_{bs}$ по аналогии с пунктом A1 алгоритма делится на три части $\bar{\mathbb{Q}}_i^{Est}, \bar{\mathbb{Q}}_i^{Val}, \bar{\mathbb{Q}}_i^{Tst}$ с объемами $I_{Est}, I_{Val}, I_{Tst}$ соответственно. Оптимизационная двухкритериальная задача (4.1.15) обучения полносвязной MLP-сети вида (4.2.4) решается на множестве опорных решений $\bar{\mathbb{Q}}_{bs,i}$. Основной целевой функционал ε_{err} задачи (4.1.15) вычисляется на множестве $\bar{\mathbb{Q}}_i^{Est}$ оценивания и записывается в виде:

$$\varepsilon_{err,i} = \varepsilon_{Est,i}(V, W) = \frac{1}{I_{Est}} \sum_{q=1}^{I_{Est}} \sum_{n=1}^{N_i} \left(\Psi_i^{D,n}(V, W, f_{i,q}) - s_{i,q}^n \right)^2, (s_{i,q}, f_{i,q}) \in \bar{\mathbb{Q}}_i^{Est}. \quad (5.1.2)$$

Второй функционал $\bar{\varepsilon}_\Psi$ задачи (4.1.15) вычисляется на валидационном множестве $\bar{\mathbb{Q}}_i^{Val}$:

$$\bar{\varepsilon}_{\Psi,i} = \varepsilon_{Val,i}(V, W) = \frac{1}{I_{Val}} \sum_{q=1}^{I_{Val}} \sum_{n=1}^{N_i} \left(\Psi_i^{D,n}(V, W, f_{i,q}) - s_{i,q}^n \right)^2, (s_{i,q}, f_{i,q}) \in \bar{\mathbb{Q}}_i^{Val}. \quad (5.1.3)$$

Задача обучения (4.1.15) в новых обозначениях записывается в виде:

$$\begin{cases} Q_{\Psi,i}^* = \text{Arg min} \{ \varepsilon_{Est,i}(V,W) : V,W \in Q_{\Psi} \} \\ (V,W)_{\min} = \text{arg min} \{ \varepsilon_{Val,i}(V,W) : V,W \in Q_{\Psi,i}^* \} \end{cases}, \quad (5.1.4)$$

где Q_{Ψ}^* - множество точек глобального минимума непрерывного функционала $\varepsilon_{Est,i}(V,W)$.

Схема алгоритма минимизации. Строгое обоснование методов решения нелинейных многоэкстремальных задач типа (5.1.4) в общем случае затруднительно. Поэтому, для того чтобы приспособить стандартные методы оптимизации для решения задачи обучения, приходится их комбинировать с неформальными эвристическими подходами. Сложность численного решения задачи обучения усугубляется ее высокой размерностью. Для каждого заданного класса сред, определяемого сеткой параметризации и априорными ограничениями, задачу обучения приходится решать индивидуально с применением различного рода эвристик, однако, если тем или иным способом аппроксиматор удалось обучить с достаточно малой собственной ошибкой ε_{Ψ} , то он может быть успешно использован в качестве приближенного обратного оператора для получения формализованных детерминированных решений уравнения (4.1.1) в заданном классе сред.

В диссертационной работе применяются известные, ставшие классическими, методы обучения полносвязных MLP-сетей [Галушкин, 1974; Werbos, 1974; Хайкин, 2006; Воронцов, 2009]. Рассмотрим кратко основные вычислительные приемы, которые применяются в указанных работах.

Целевые функционалы $\varepsilon_{Est}(V,W)$, $\varepsilon_{Val}(V,W)$ в задаче обучения (5.1.4) определены в аналитическом виде и легко дифференцируются, поэтому для решения задачи минимизации применяется метод стохастического градиента (SG), который является модификацией классического градиентного метода. Производные функционалов рассчитываются на основе алгоритма обратного

распространения ошибки (BPE). Для выхода процесса минимизации из локальных минимумов и «просмотра» множества точек глобального минимума применяются приемы, основанные на методах случайного поиска. Основными среди таких правил, применительно к задаче обучения, являются случайные изменения (сдвиги) текущих значений свободных коэффициентов при попадании целевого функционала в область минимума, а также многократное проведение «повторных пусков» процесса оптимизации при новых начальных значениях свободных коэффициентов [Хайкин, 2006; Воронцов, 2009]. Идеальным критерием (критерий перекрестной проверки Стоуна [Stone, 1977]) завершения процесса обучения является стабилизация (начало роста) проверочного функционала $\varepsilon_{Val}(V, W)$ при достаточно малых значениях функционала оценивания $\varepsilon_{Est}(V, W)$ на протяжении большого числа итераций, после чего при увеличении числа итераций функционал $\varepsilon_{Val}(V, W)$ начинает расти [Хайкин, 2006]. Все текущие значения матриц свободных коэффициентов аппроксиматора, при которых обнаруживаются указанные признаки – «подозрительные точки» – запоминаются. После проведения серии повторных пусков все удачные варианты коэффициентов сети сравниваются путем проверки ее работы на независимом тестовом подмножестве и выбирается такой набор коэффициентов, который дает минимальную собственную ошибку сети. Для ускорения сходимости используются некоторые дополнительные эвристические приемы [Хайкин, 2006; Воронцов, 2009].

A2.3.2. Выбор оптимальной архитектуры MLP-сети

Сложность архитектуры обучаемой MLP-сети вида (4.2.4) (число слоев, число скрытых нейронов в слоях, типы функции активации) должна быть согласована с физической сложностью нелинейного обратного отображения

решаемой задачи. Простые сети с малым числом слоев сети и свободных параметров легко обучаются, но при интерполяции между точками опорных решений пропускают детали и особенности нелинейного отображения (в этом случае говорят, что сеть обладают плохой обобщающей способностью); это проявляется в том, что сеть распознает новые входные данные, ранее «не виденные» сетью с большой ошибкой. Усложнение сети уменьшает ошибку интерполяции (обобщения), но затрудняет ее обучение так как ухудшается обусловленность задачи обучения (эффект «бритвы Оккама») [Хайкин, 2006]. Критерием оптимальности архитектуры является максимальная сложность сети (выраженная в количестве слоев и нейронов) при ограничении на собственную ошибку аппроксиматора. Оптимальная архитектура сети определяется экспериментально методом подбора. Многочисленные варианты расчетов по обучению сетей с различной архитектурой показали, что наилучшие результаты применительно к рассматриваемым задачам геоэлектрики показали пятислойные MLP-сети с количеством нейронов в скрытых слоях $L_k = 32, 16, 8$, $k = 1, 2, 3$, при использовании оптимальных входных и выходных окон. При этом в скрытых слоях использовалась логистическая функция активации $\lambda(x) = 1 / (1 + e^{-x})$, в выходном слое – линейная.

A2.3.3. Оценка размерности I_{bs} множества опорных решений

Для задач MLP-аппроксимации известна упрощенная оценка [Хайкин, 2006] объема Q_{bs} обучающего множества

$$Q_{bs} = O\left(\frac{M_w \cdot M_a}{\varepsilon}\right),$$

где M_w – размерность входного вектора обучаемой MLP-сети; M_a – общее число искомым свободных параметров сети; ε – допустимая собственная ошибка обучения сети. Для 3D задачи и указанной выше пятислойной MLP-сети $M_a = 56$ и при $\varepsilon = 0.1$ и размерности сверточного окна данных $M_w = 80$, получаем $Q_{bs} = 44800$; при $M_w = 1500$, $Q_{bs} = 840000$. Для 2D задач при $M_w = 350$ получаем $Q_{bs} = 196000$. С учетом аугментации данных размерность Q_{bs} фактически насчитанного обучающего множества может быть увеличена в 10–20 раз и более, что реально позволяет получать необходимые объемы. При этом надо понимать, что приведенная оценка не является строгой, а позволяет получить примерный порядок размеров обучающих множеств, который уточняется в процессе обучения. Построение обучающих множеств требуемых объемов требует использования техники параллельных вычислений и использования суперкомпьютерных вычислительных средств.

Многочисленные расчеты, показали, что для рассматриваемых задач геоэлектрики приемлемые для практики результаты могут быть получены при фактических объемах $Q_{bs} \sim 20000 \div 30000$ для 2D задач и $Q_{bs} \sim 30000 \div 50000$ для 3D задач.

A2.3.4. Вычисление собственной ошибки аппроксиматора

После полного завершения всех циклов обучения MLP-сетей по каждому i -му ярусу $i = 1, \dots, N_\Omega$ сетки параметризации на основе тестирующей выборки \bar{Q}_i^{Tst} – вычисляются фактически достигнутые ошибки обучения нейросетей, определяющих собственные ошибки поярусных локальных аппроксиматоров Ψ_i :

$$\bar{\varepsilon}_{\Psi,i} = \frac{1}{I_{Tst}} \sum_{q=1}^{I_{Tst}} \sum_{n=N_1}^{N_i} \left(\Psi_i^{D,n}(f_{i,q}) - s_{i,q}^n \right)^2, (s_{i,q}, f_{i,q}) \in \bar{\mathbb{Q}}_i^{Tst}, \quad i=1, \dots, N_{\Omega}. \quad (5.1.5)$$

Набор величин $\bar{\varepsilon}_{\Psi,i}$ определяет собственную ошибку локального аппроксиматора по всем ярусам сетки параметризации

$$\bar{\varepsilon}_{\Psi} = \{ \bar{\varepsilon}_{\Psi,i}, i=1, \dots, I \}.$$

Вычисляется также средняя ошибка локального аппроксиматора по ярусам сетки параметризации

$$\hat{\varepsilon}_{\Psi} = \sum_{i=1}^{N_{\Omega}} \bar{\varepsilon}_{\Psi,i}. \quad (5.1.6)$$

А3. Работа сети CNN.INV

Итоговая ошибка $\bar{\varepsilon}_{\Psi}$ аппроксиматора, помимо ошибок обучения, зависит также от числовых параметров преобразований сети:

- исходная размерность множества опорных решений;
- размерности сверточных окон параметров среды и входных данных;
- кратность увеличения размерности обучающей выборки, за счет аугментации данных;
- размерность уточняемой в процессе обучения сетки параметризации задачи;
- число слоев и нейронов в слоях MLP-сетей.
- число параметров переходной области Ω_{TD} обратной задачи.

В процессе работы сети CNN.INV обучаются вспомогательные локальные аппроксиматоры и на их основе определяются оптимальные значения указанных

параметров преобразований, при которых собственная ошибка аппроксиматора минимальна.

В качестве примера работы сети рассмотрим модель среды 3D задачи геоэлектрики из класса G_2^{3D} , схематически представленную на рис. 5.2.15 (раздел 5.2.2.2). Размерность полного вектора параметров модельного класса $N = 1225$, а полного вектора входных данных $M = M_p \cdot M_\omega \cdot M_Z = 151200$ (см. нижняя строка табл. 5.1.1). На рис. 5.1.3 представлены полученные в результате всех проведенных преобразований сверточные окна D_i параметров среды по ярусам сетки параметризации для локального аппроксиматора Ψ_{3D}^2 , построенного для класса сред G_2^{3D} . В данном случае на каждом ярусе окно параметров включает одну ячейку сетки параметризации, $N_i = 1, \forall i = 1, \dots, I$.

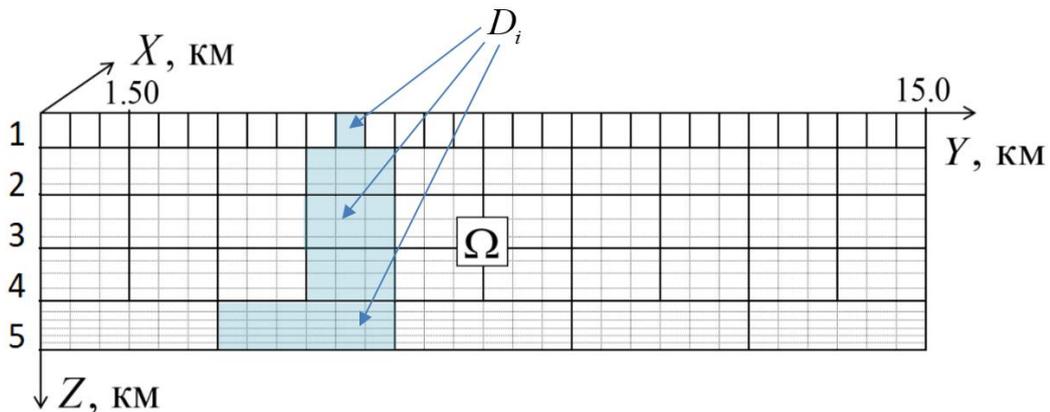


Рис. 5.1.3. Схематическая иллюстрация расположения областей D_i сверточных окон параметров. Области D_i выделены голубым цветом; цифрами слева указаны номера ярусов сетки параметризации.

В табл. 5.1.1 представлены размерности окон входных данных, сжатых по числу частот и числу точек измерения на основе критерия значимости; суммарная размерность сжатых входных данных по всем ярусам составила 7464; в скобках в правом столбце указаны размерности сжатых данных по числу используемых характеристик поля и за счет дополнительного сжатия (п.А2.2.1). Таким образом, получено сжатие в 20.3 (52.1) раз относительно полных данных, при этом исходный

объем обучающего множества в окне за счет аугментации данных, был увеличен в ~12раз.

Таблица 5.1.1. Размерности сверточных окон данных.

Номер яруса сетки i	Число точек в сверточном окне данных			
	Число точек измерений	Число характеристик поля	Число частот	Размерность окна $M = M_p \cdot M_\omega \cdot M_z$
	M_p	M_z	M_ω	M
1	$3 \times 3 = 9$	12	3	324 (120)
2	$5 \times 5 = 25$	12	3	900 (504)
3	$5 \times 5 = 25$	12	3	900 (600)
4	$5 \times 5 = 25$	12	5	1500 (640)
5	$8 \times 8 = 64$	12	5	3840 (1040)
Суммарная размерность сжатых данных				7464 (2904)
Полный вектор данных	900	12	14	151200

Отметим, что, ошибка обучения на полных данных превышала 30%, т.е. сеть практически не обучалась.

Итогом работы сети CNN.INV является формирование финального оптимального локального аппроксиматора задачи с минимальной собственной ошибкой.

В. Решение обратной задачи с помощью локального аппроксиматора I типа

В1. Применение аппроксиматора к входным данным

В процессе работы CNN.INV-сет подавляется влияние неизвестной фоновой среды, окружающей исследуемую область на обучаемые аппроксиматоры, поэтому при исследовании протяженных по горизонтали областей, обученный локальный НС аппроксиматор I типа может применяться к любому участку измеряемых данных – реализуется *принцип локальности инверсии*. В соответствии с этим свойством локального аппроксиматора I типа применение локального аппроксиматора Ψ_i^D для i -го яруса (п. А2.1.1) к входным данным осуществляется путем перемещения входного окна локального аппроксиматора по горизонтали в пределах области измерений Ω_1 таким образом, чтобы выход аппроксиматора - вертикальный столбец окон параметров - в конечном итоге определил все параметры яруса в пределах области Ω . Если шаг перемещения аппроксиматора меньше размера ячеек соответствующего, то вычисляемые параметры в каждой ячейке усредняются. Аналогичным образом, если фактические размеры области исследований по горизонтали превышают размеры области Ω , то локальный аппроксиматор может практически быть применен к любому участку измеренных данных. Поэтому размерность измеряемых площадных данных и определяемых параметров среды в горизонтальном направлении практически не ограничена (в пределах сохранения заданного класса исследуемой среды). Наиболее эффективно данная методика срабатывает для сред с «более-менее» регулярным изменением уд. сопротивления по горизонтали.

В2. Уточнение решения, полученного с помощью универсального аппроксиматора

В соответствии с разделом 4.2.3 рассматриваются два подхода к уточнению АНС решения, найденного с помощью универсального аппроксиматора:

- построение новых уточняющих аппроксиматоров (**АИНС1 метод**)
- метод случайного поиска с использованием алгоритмов кластеризации и интерполяции (**АИНС СП метод**).

В2.g. Метод АИНС1

g1. На основе аппроксиматора $\Psi^D(V_0, W_0) = \{\Psi_i^D, i = 1, \dots, I\}$, обученного для задачи (4.1.1), рассматриваемой на множестве S_N типа (1.3.20), вычисляется приближенное решение $s_\Psi = \Psi^D(V_0, W_0, f)$ задачи и невязка $\delta = \|\tilde{A}_N s_\Psi - f\|$ для фиксированного вектора данных $f \in R^M$.

g2. Строится новый НС аппроксиматор $\Psi^{D,1}(V_0, W_0) = \{\Psi_i^{D,1}, i = 1, \dots, I\}$ для задачи (4.1.1), рассматриваемой на новом, более узком множестве априорных ограничений $S_{N,1}$, которое, согласно (4.2.5), определяется следующим образом:

$$S_{N,1} = \{s : \|s - s_{\Psi, \delta}\| \leq \beta_1(N, f, s_\Psi, \delta), s \in S_N\},$$

где $\beta_1(N, f, s_\Psi, \delta)$ – апостериорная оценка неоднозначности вида (2.4.1) решения s_Ψ .

С целью упрощения расчетов, новое множество $S_{N,1}$ можно задавать с помощью собственной ошибки аппроксиматора:

$$S_{N,1} = \{s : \|s - s_{\Psi,\delta}\| \leq \varepsilon_{\Psi}, s \in S_N\}.$$

Для нормы $\|s\|_0 = \frac{1}{D_s} \max_{1 \leq n \leq N} |s^n|$ это условие определяется следующим образом:

$$S_{N,1} = \{s : s \in R^N, |s^{i,n} - s_{\Psi}^{i,n}| \leq \bar{\varepsilon}_{\Psi,i} D_s, n = 1, \dots, N, i = 1, \dots, I\},$$

где $s^{i,n}$, $s_{\Psi}^{i,n}$ - проекции вектора параметров $s = (s^1, \dots, s^N)$, соответствующие ячейкам сетки параметризации, расположенным в i -м ярусе $\theta_{N,i}$ сетки параметризации θ_N ; $\bar{\varepsilon}_{\Psi,i}$ - собственные ошибки вида (5.1.5) локальных аппроксиматоров $\Psi_i^D, i = 1, \dots, I$ по ярусам сетки параметризации. $\bar{\varepsilon}_{\Psi} = \{\bar{\varepsilon}_{\Psi,i}, i = 1, \dots, I\}$.

Вычисляется собственная ошибка $\varepsilon_{\Psi,1}$ нового аппроксиматора, новое решение $s_{\Psi,1} = \Psi_1(V_1, W_1, f)$ уравнения (4.1.1) для того же вектора входных данных f и соответствующая невязка $\delta_1 = \|\tilde{A}_N s_{\Psi,1} - f\|$.

g3. Проверяется условие $\delta_1 < \delta$?

g4. Если $\delta_1 < \delta$, то происходит переход к пункту **g2** и осуществляется следующая итерация, в противном случае процесс останавливается и найденное на данной итерации решение принимается за приближенное решение обратной задачи (4.1.1) с соответствующей ему фактической невязкой.

V2.h. Метод АИНС СП

Для минимизации невязки применяется также метод *случайного поиска* (СП) с предварительной кластеризацией найденного решения методом k -средних и последующей интерполяцией множеств опорных решений, построенных в окрестности решения методом обратных взвешенных расстояний (IDW).

Применительно к задаче геоэлектрики данный подход рассмотрен в работе [Шимелевич и др. 2022].

h1. Проводится кластеризация найденного решения S_Ψ в рамках каждого i -го яруса сетки параметризации методом k -средних [Steinhaus H., 1956; Lloyd S., 1957; MacQueen, 1967; Vogel, Wong, 1978; Любушин и др., 2004; Любушин, 2011]. Обозначим через N_Π размерность признакового пространства (в нашем случае $N_\Pi = 3$: две пространственные координаты ячейки сетки параметризации в плоскости XY и значение проекции вектора параметров S в этой ячейке), а через $\xi_j, j = 1, \dots, M_\Pi$, – систему векторов (точек) в N_Π -мерном пространстве, которые необходимо классифицировать.

h1.1. Пусть число кластеров известно и фиксировано: $q \geq 2$. В N_Π -мерном пространстве произвольно (или экспертным методом) задается q центров (центроидов, центров масс) кластеров $c_k, k = 1, \dots, q$.

h1.2. Производится разбиение системы векторов $\xi_j, j = 1, \dots, M_\Pi$ на кластеры B_1, \dots, B_q по принципу минимального расстояния (в евклидовой норме) до ближайшего центра c_k .

h1.3. Определяются новые центры получившихся кластеров как точки $r_k, k = 1, \dots, q$, в N_Π -мерном пространстве, координаты которых равны средним значениям координат всех точек кластера. Если $r_k = c_k$, выходим из алгоритма, иначе полагаем $c_k = r_k$ и возвращаемся к пункту **h1.2**.

Шаги **h1.2, h1.3** итеративно повторяются.

Смысл алгоритма заключается в минимизации суммарного квадратичного отклонения точек кластеров от центров этих кластеров

$$J(q, c_1, \dots, c_q) = \sum_{k=1}^q \sum_{\xi_j \in B_k} \|\xi_j - c_k\|^2. \quad (5.1.7)$$

В результате минимизируется расстояние между элементами внутри кластеров и увеличиваются расстояния между центрами кластеров и, таким образом в пределах каждого яруса выявляются подобласти близких между собой значений уд. сопротивления среды.

Алгоритм завершается за конечное число итераций, так как количество возможных разбиений конечного множества конечно, а на каждом шаге суммарное квадратичное отклонение (5.1.7) уменьшается, поэтому заикливание невозможно [David Arthur & Sergei Vassilvitskii, 2006].

Основные проблемы алгоритма [Von Luxburg, 2010; Ortega et al., 2009]:

- конечное разбиение зависит от начального выбора центров кластеров;
- достижение глобального минимума суммарного квадратичного отклонения (5.1.7) не гарантируется, имеет место сходимость к одному из локальных минимумов;
- необходимость знания числа кластеров.

На практике число кластеров и их центры генерируются случайно большое количество раз, после чего выбирается то положение центров, для которых величина (5.1.7) минимальна. Сильными сторонами алгоритма считаются: высокая эффективность при простоте реализации, высокое качество кластеризации.

На выходе алгоритма получаем кластеризованное решение.

h2. В окрестности кластеризованного решения s'_ψ проводится расчет множества опорных решений методом Монте-Карло путем случайного изменения параметров среды s^n в ячейках сетки параметризации в рамках каждого кластера на одинаковую величину в большую, либо в меньшую сторону (показано стрелками на рис. 5.1.4) в пределах допустимых значений параметров и вычисляются невязки этих решений.

Из построенного множества этих решений отбираются решения с невязками меньшими, чем на предыдущей итерации. Таких решений может не оказаться в полученной выборке, в этом случае s_ψ принимается за приближенное решение (квазирешение) обратной задачи. Пусть M_s – число таких решений. Отсортируем и проиндексируем решения в порядке возрастания их невязок $E_1 < E_2 < \dots < E_{M_s}$: $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{M_s}$. Из этих решений формируются M_s групп решений $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{M'_s})$, при различных $M'_s = 1, 2, \dots, M_s$ и для каждой группы методом обратных взвешенных расстояний (IDW-метод [Шепард, 1968]) строятся новые M_s решений при помощи формул

$$\tilde{s}_{M'_s} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{M'_s} (E_i)^{-1} \right)} \cdot \sum_{i=1}^{M'_s} \frac{1}{E_i} \tilde{s}_i, \quad M'_s = 1, 2, \dots, M_s,$$

среди которых находится решение \tilde{s}_1^d с минимальной невязкой δ_1 .

h3. Если $\delta_1 < \delta$, то происходит переход к пункту **h1** и осуществляется следующая итерация. В противном случае процесс останавливается и найденное на данной итерации решение принимается за приближенное решение обратной задачи (4.1.1) с соответствующей ему финальной фактической невязкой.

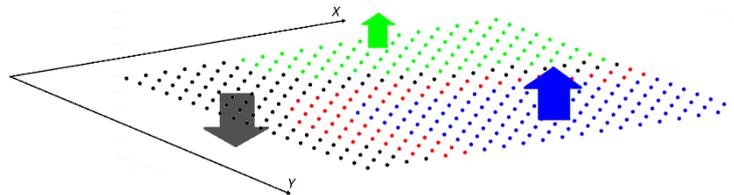


Рис. 5.1.4. Схематическая иллюстрация (в 3D случае) построения множества опорных решений (соответствующего определенному слою сетки параметризации).

Метод случайного поиска эффективен в случае наличия в исследуемой среде явно выраженных квазиоднородных подобластей, что позволяет надежно

проводить кластеризацию решения. Метод уточняющих аппроксиматоров более универсален, но как показывает опыт расчетов (особенно в случае 3D задач), является более времяемким, так как требует большего числа (примерно в 3-5 раз) опорных решений прямых задач по сравнению с методом случайного поиска.

С. Обучение и работа локального НС аппроксиматора II типа

Задача построения аппроксиматора Ψ^{DF} II типа решается по схеме п. 4.1.7.2. Данными для обучения аппроксиматора служат: вектор измерений $f^D = (f^{M_1}, \dots, f^{M_D})$, расположенных в подобласти $\Omega_{1,D} \subset \Omega_1$ режимных наблюдений и вектор динамических параметров $s^D = (s^{N_1}, \dots, s^{N_D})$, определяющий свойства среды в подобласти $D \subset \Omega$ проведения мониторинга.

С1. Формируется специальное множество $\mathbb{Q}_{bs}^F(s_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ опорных решений, которое отличается от множества от множества аппроксиматора I типа тем, что параметры среды, не принадлежащие выделенной группе s^{N_1}, \dots, s^{N_D} , остаются фиксированными и считаются известными на основе априорной информации.

С2. Множество $\mathbb{Q}_{bs}^F(s_{bs}, E_{bs}, Q_{bs})$ подается на вход CNN.INV-сети. Выход сети определяет обученный локальный аппроксиматор II типа $\Psi^{DF} = \{\Psi_i^{DF}, i = 1, \dots, I_F\}$, где I_F - число ярусов сетки параметризации, попадающих в область мониторинга D .

С3. Аппроксиматоры Ψ_i^{DF} для i -х ярусов (п. А2.1.1) применяются к вектору $f^D = (f^{M_1}, \dots, f^{M_D})$ режимных наблюдений.

С4. Проведение режимных измерений и анализ динамики изменения параметров в области D в моменты времени t_j по формуле (4.1.18)

$$s^D(t_j) = \Psi_F^D(f^D(t_j)), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Д. Программное обеспечение задач обучения аппроксиматоров

Для численного решения прямых 2D и 3D задач геоэлектрики (метод МТЗ) используются авторские программные комплексы **МТ-Геос2D**, **МТD3FWD** (см. раздел 3.1.10).

Программы обучения авторской CNN.INV – сети для обратной задачи геоэлектрики были разработаны сотрудниками кафедры ГИС и Информатики МГРИ-РГГРУ и Центра ИНТЭМИ: доцентом Е.А. Оборневым, доцентом И.Е. Оборневым и доцентом Е.А. Родионовым с участием автора диссертации.

Для обучения MLP-сети, в работе использовались авторские и открытые программные коды (**TensorFlow**, **Keras** и **PyTorch**) обучения многослойных персептронов, которые были адаптированы к особенностям обратной задачи геоэлектрики.

Примечание. Авторский программный код обучения MLP-сети, применительно к задаче геоэлектрики, был разработан совместно с коллективом ЛАМОД МГУ, руководимой Сергеем Анатольевичем Доленко.

Уравнение (4.1.1) является конечно-разностным аналогом исходного уравнения (1.2.15), к которому сводятся все типовые однокритериальные и двухкритериальные 2D и 3D задачи геоэлектрики (см. раздел 1.3.2) и поэтому рассмотренный алгоритм APRNN может использоваться также и для решения этих задач.

5.2. Примеры решения обратных задач геоэлектрики на модельных данных

В разделе приводятся примеры решения АНС, АИНС методами многокритериальных обратных 2D и 3D задач геоэлектрики в классах сред и обратных задач НС ЭМ мониторинга на основе синтезированных модельных данных. Для задаваемых моделей сред вычислялись соответствующие характеристик поля, имитирующие геофизические измерения методами МТЗ, АМТЗ, МВЗ в смешанном АМТ-МТ диапазоне частот $\sim 0.001-1000$ Гц, при исследованиях на глубинах до 6 км. Полученные решения сравнивались с истинными и вычислялись средние относительные $\bar{\varepsilon}$ ошибки по норме в R^N вида (1.3.25), а также средние относительные ошибки $\bar{\varepsilon}_i$ по каждому i -му ярусу сетки параметризации (поярусные ошибки) вида:

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{N_i \cdot D_s} \sum_1^{N_i} |\Delta s_i^n|, \quad (5.2.1)$$

где $\Delta s_i^1, \dots, \Delta s_i^{N_i}$ - уклонение между истинными и найденными параметрами i -го яруса сетки; вычислялись невязки и апостериорные оценки неоднозначности $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$, $\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ вида (2.4.1), (2.4.14) соответственно.

5.2.1. 2D задача

Решается двухкритериальная EH обратная 2D задача геоэлектрики (см. п. 1.3.2.2) вида (1.3.33) при совместном использовании импедансов $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$ (бимодальные EH данные). Эта задача методом общей инверсии сводится к объединенному уравнению (1.3.35)

$$A_{1,2,N}s = f_{1,2}, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_{1,2} \in \hat{F}_2[\Omega_{2,\omega}], \quad (1.3.35)$$

рассматриваемому в заданных классах сред G_{2D}^1 , G_{2D}^2 , которые являются подклассами общего модельного класса сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ (см. п. 1.3.2.1).

Входные синтезированные данные задачи определяются расчетными значениями вектор-функции двух переменных $f_{1,2}(y, \omega) = (f_{1,2}^1, f_{1,2}^2) \in \hat{F}_2[\Omega_{2,\omega}]$, компонентами которой являются комплексные импедансы, соответствующие E и H поляризациям МТ поля: $f_{1,2}^1(y, \omega) = Z_{xy}(y, \omega)$, $f_{1,2}^2(y, \omega) = Z_{yx}(y, \omega)$, $y \in \Omega_1$, $\omega \in \Delta_\omega = [\omega_1, \omega_2]$, которые заданы на верхней границе Ω_1 ($z=0$) области Ω на пространственно-частотной сетке.

5.2.1.1. Класс сред G_{2D}^1 , глубинность до 1.4 км

Для построения модельных примеров геоэлектрических разрезов из класса сред G_{2D}^1 использовались некоторые структурные элементы и величины удельного сопротивления схематического геоэлектрического разреза, приведенного на рис. 5.2.1 [Хмелевской и др., 2005; Неволин и др., 1971; Геологический факультет ВГУ. Лекция 1].

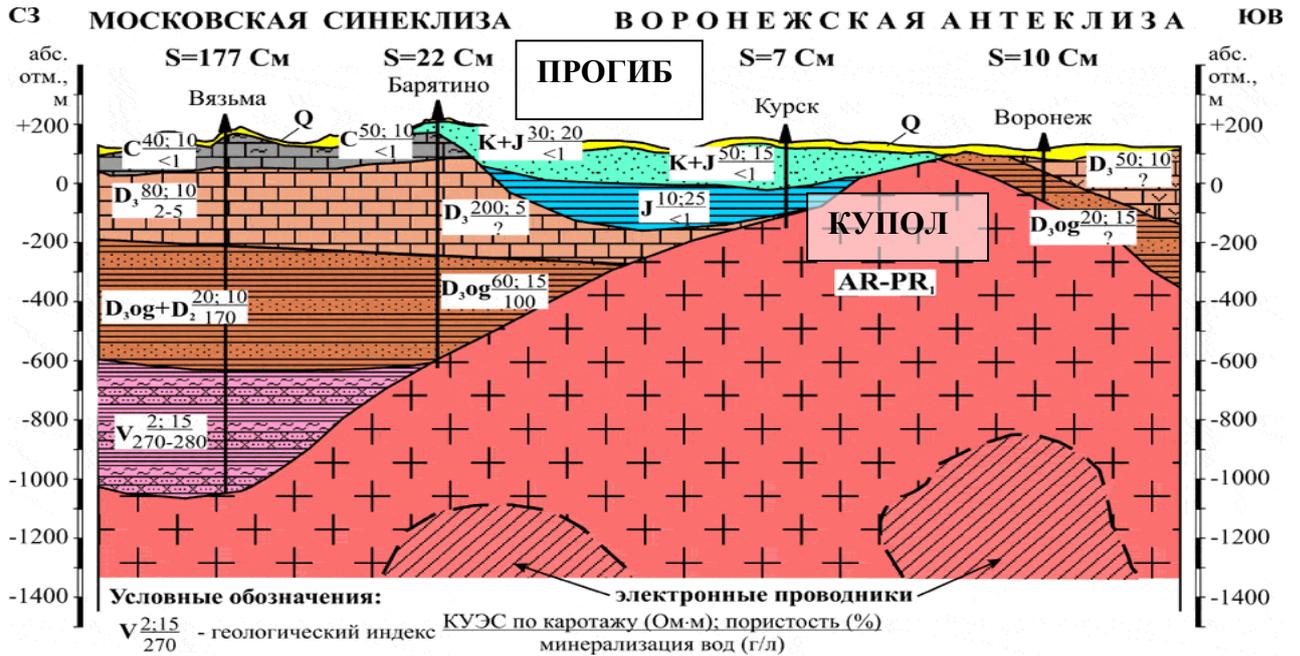


Рис. 5.2.1. Схематический сводный геолого-геофизический разрез. Кажущееся уд. электрическое сопротивление (КУЭС), определенное на основе данных каротажа, указано в числителе слева (для справки, расстояния Вязьма-Воронеж составляет ~ 600 км).

В дополнение к этому, в качестве модельных примеров сред были приняты типовые структурные модели малоглубинной геоэлектрики: группы локальных контрастных и слабоконтрастных тел, контрастно-неоднородная верхняя часть разреза (ВЧР) [Шимелевич, 2013а; Шимелевич и др., 2013б; Шимелевич и др., 2018; Shimelevich et al, 2021].

Класс сред G_{2D}^1 определяется 2D областью исследований Ω (рис. 5.2.2а), сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω , и априорными ограничениями вида (1.3.21). Область исследований Ω имеет размеры 64×1.4 км; используемый диапазон частот 1–300 Гц. Регуляризованная сетка параметризации θ_N размерности $N = 200$, построена в соответствии с методами, изложенными в пунктах 2.5.1 и 3.3.1 [Шимелевич, 2013а], при заданных параметрах $\delta_0 = 0.05$, $\varepsilon_0 = 0.25$.

На рис. 5.2.2б,в приведены графики локальных характеристик неоднозначности $\beta^i(N, 2\delta)$ и разрешающей способности $r^i(N, \delta)$ по ярусам сетки параметризации; на рис. 5.2.2г,д – графики характеристик $\beta(N, 2\delta)$, $r(N, \delta)$ для всей области исследований. Из графиков на рис. 5.2.2г,д видно, что при $\delta \leq 5\%$ априорная степень неоднозначности $\beta(N, 2\delta)$ (т.е. максимально возможный разброс δ -эквивалентных значений) искомым параметров среды при решении обратной задачи не будет превышать 25%, а полная цифровая разрешающая способность по всем параметрам задачи (согласно п. 2.5.2.1) не более 5 различных градаций. Вместе с тем, неоднозначность определения, например, параметров 1-го яруса значительно меньше: из рис. 5.2.2б видно, что при невязке решения 5% неоднозначность определения этих параметров составляет ~ 0.028 , а цифровая разрешающая способность (рис.5.2.2в) достигает 35 различных градаций.

найти все параметры s^1, \dots, s^N среды в исследуемой области Ω по заданному полному вектору EH данных $f = (f^1, \dots, f^M)$. В качестве априорной информации о решении задается только диапазон $0 \leq s^n = \lg \rho^n \leq 4$, $n = 1, \dots, N$, возможных изменений параметров среды.

Для обратной задачи (1.3.35), рассматриваемой в классе сред G_{2D}^1 , был построен универсальный локальный 2D аппроксиматор Ψ_{2D}^1 I типа.

Характеристики универсального локального аппроксиматора Ψ_{2D}^1

1. Время расчета исходного множества опорных решений. Время счета одной прямой задачи на всех используемых частотах: на персональном компьютере 109.5 с, на суперкомпьютерном кластере – 51.84 с на одном вычислительном узле.
2. Размер множества опорных решений составляет 10000 примеров, общее время расчета множества опорных решений – ~14 ч с распараллеливанием на 10 ядрах CPU (центральное процессорное устройство).
 - а. Время расчета множества опорных решений для второй и последующих итераций составляет ~7ч на 10 ядрах CPU.
 - б. Время обучения аппроксиматора на готовом множестве опорных решений составляет ~12 ч с распараллеливанием на 10 ядрах CPU.
3. Собственные ошибки аппроксиматора. В столбике цифр справа на рис.5.2.2а указаны собственные ошибки аппроксиматора для набора параметров, соответствующих ярусам сетки параметризации.
4. Назначение универсального аппроксиматора Ψ_{2D}^1 . Аппроксиматор позволяет решать 2D обратную двухкритериальную задачу геоэлектрики вида (1.3.33) АНС методом в классе G_{2D}^1 сред с кусочно-постоянным распределением

удельного сопротивления на основе EH данных (методом общей инверсии) на глубинах до 1.4 км.

5. Время инверсии измеренных данных обученным аппроксиматором составляет ~ 10 с учетом процедур чтения и записи.

6. Время расчета невязки финального решения соответствует времени решения прямой задачи на всех частотах.

Дополнительные временные затраты:

1. Время расчета апостериорных оценок определяется временем расчета 1000 прямых задач и числом ярусов сетки.

2. Время расчета априорных оценок определяется временем расчета 1000 прямых задач и числом ярусов сетки.

Ниже представлена серия примеров решения обратной задачи для моделей из класса G_{2D}^1 с помощью АНС, АИНС1 методов.

Модель 2D-K1. Прогиб и перекрывающая проводящая линза

На рис. 5.2.3а изображен геоэлектрический разрез модели 2D-K1. Модель представляет собой прогиб (имитация центральной части разреза рис. 5.2.1); на поверхность выходит линза с удельным сопротивлением 80 Ом·м, перекрываемая образованиями 50 Ом·м.

На рис. 5.2.3б представлено решение обратной задачи, найденное АНС методом (*АНС решение*); на рис. 5.2.3 в - решение обратной задачи АИНС1 методом (уточняющих аппроксиматоров) на 4-й итерации.

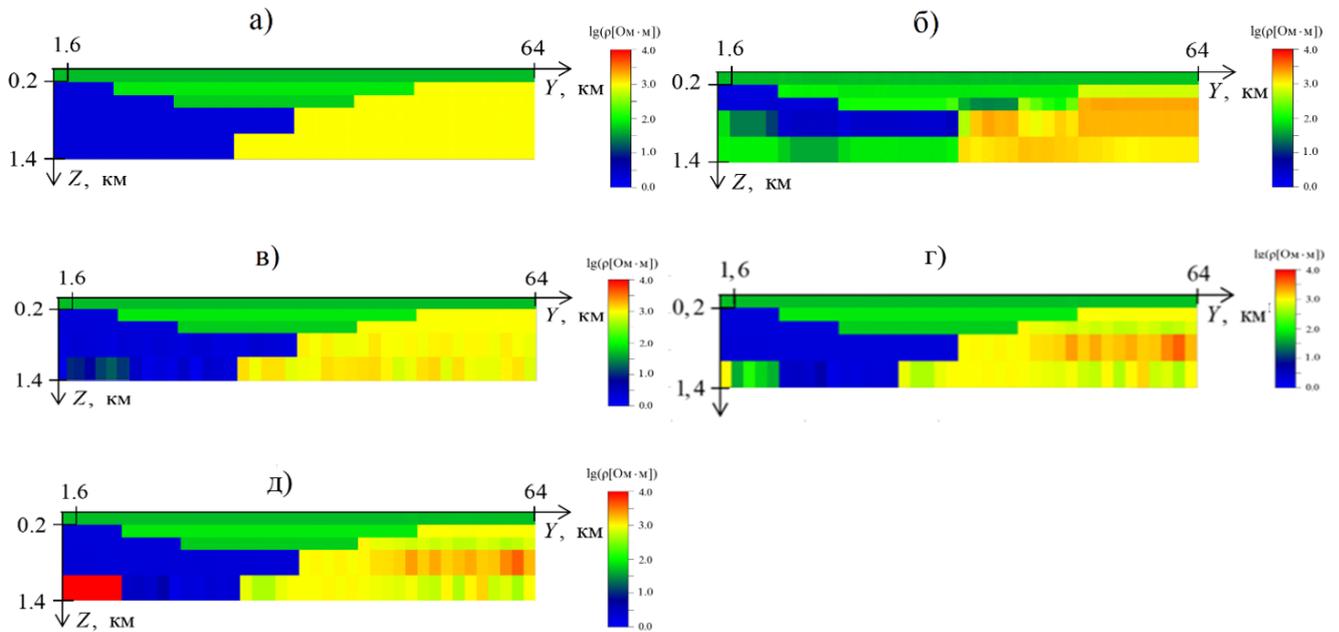


Рис. 5.2.3. Результаты решения обратной задачи; а) истинная модель 2D-K1; б) АНС решение; в) решение АИНС1 методом на 4-й итерации; г), д) примеры решений δ -эквивалентных найденному на 4-й итерации.

В табл. 5.2.1 приведены: средние относительные ошибки $\bar{\varepsilon}_i$ найденных параметров задачи по каждому i -му ярусу $i=1, \dots, 5$ сетки параметризации и средние относительные ошибки $\bar{\varepsilon}$ для всей модели на каждой итерации, а также невязки δ и апостериорные оценки неоднозначности $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ вида (2.4.1) для уравнения (1.3.35). На рис. 5.2.3д,е представлены примеры решений, δ -эквивалентных найденному на 4-й итерации, т.е. решений с невязкой, не превышающей невязку решения на 4-й итерации.

Из представленных результатов видно, что АНС решение находится с заметными ошибками, достигающими 19% (по 5-му ярусу), тем не менее, геологическая структура и удельное сопротивление ее элементов определены с приемлемой для практики точностью. Итерации АИНС1 метода (рис.5.2.4) позволяют уточнить АНС решение: конечная 4-я итерация АИНС1 метода снижает невязку в восемь раз, среднюю ошибку по всей модели – в 3 раза, а апостериорную оценку неоднозначности – в пять раз, по сравнению с АНС решением. Отметим,

что апостериорные оценки неоднозначности решений уменьшаются по итерациям, главным образом за счет уменьшения невязки.

Таблица. 5.2.1. Ошибки, невязки и апостериорные оценки для модели 2D-K1.

Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}, \%$					
Номер яруса сетки	АНС метод, $\bar{\varepsilon}_i$	Итерации АИНС1 метода, $\bar{\varepsilon}_i$			
		1	2	3	4
1	0.29	0.04	0.03	0.03	0.03
2	1.46	0.05	0.06	0.06	0.06
3	7.24	2.97	1.41	1.63	1.52
4	7.36	4.42	3.79	2.61	2.40
5	19.05	23.55	15.20	8.88	7.71
Средняя ошибка, $\bar{\varepsilon}$	7.08	6.20	4.10	2.64	2.35
Невязки $\delta, \%$					
	5.09	2.78	1.17	0.74	0.64
Апостериорные оценки $\beta_1, \%$					
	7.18	5.67	2.34	1.96	1.32

а)

б)

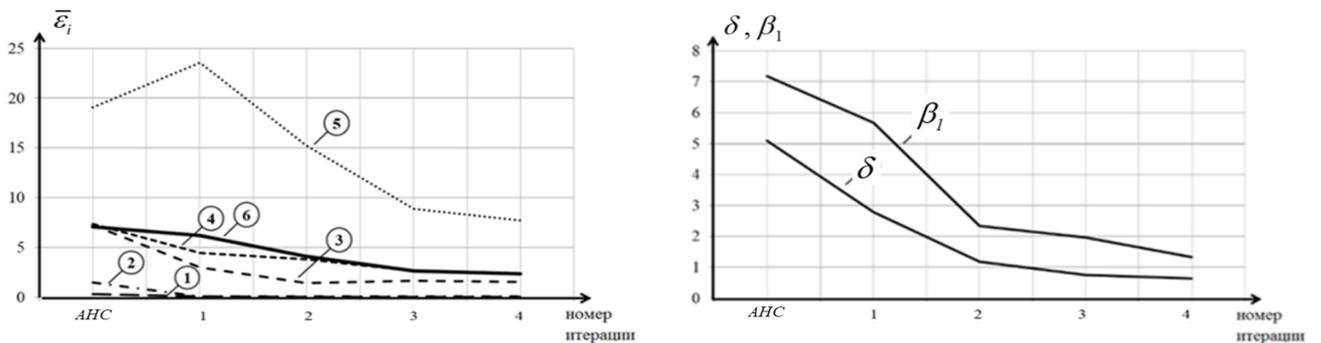


Рис. 5.2.4. Графики зависимости ошибок, невязок решений и апостериорных оценок (в %) от номера итерации, для модели 2D-K1; а) пунктиром обозначены кривые ошибок $\bar{\varepsilon}_i$, цифрами номера ярусов сетки модели (большим номерам соответствуют более глубокие ярусы), жирная сплошная кривая с номером 6 –

ошибка $\bar{\varepsilon}$; б) кривые невязок δ и апостериорных оценок β_1 . Точка АНС на горизонтальной оси соответствует АНС решению.

Оценка влияния погрешности в данных

Для анализа устойчивости полученных решений был проведен ряд экспериментов по внесению погрешности в данные. Для этого в расчетные синтезированные характеристики поля вносился аддитивный случайный шум. Величина относительной погрешности δ_0 данных определялась, как отношение суммы квадратов шума к сумме квадратов точных значений характеристик поля. На рис. 5.2.5 представлены зависимости поярусных ошибок $\bar{\varepsilon}_i$ АНС решений от величины погрешности δ_0 .

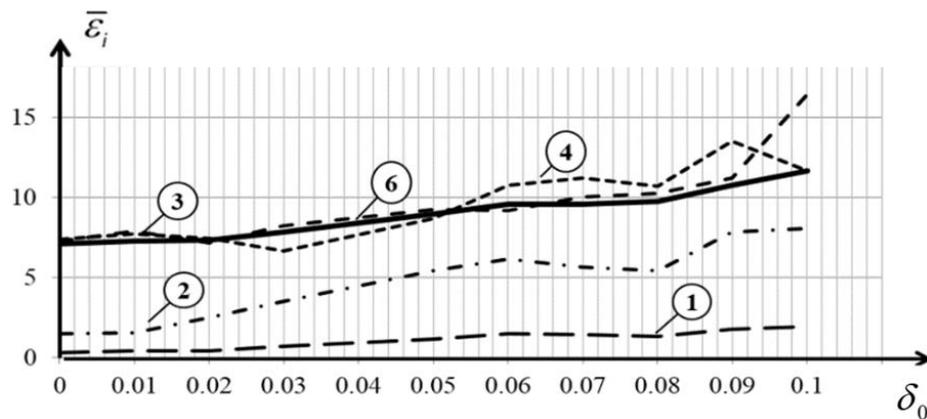


Рис. 5.2.5. Зависимость поярусных ошибок $\bar{\varepsilon}_i$ АНС решений от величины погрешности δ_0 в данных для модели 2D-K1. Цифрами обозначены номера ярусов сетки параметризации (большим номерам соответствуют более глубокие ярусы), жирная сплошная кривая с номером 6 – средняя ошибка $\bar{\varepsilon}$.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что в АНС метод в целом справляется с погрешностью в данных, и даже при шуме в 10%

ошибка определения параметров модели для ярусов сетки параметризации с 1-го по 4-й не превышает 12%, но достигает 20% для параметров 5-го яруса сетки.

Модель 2D-K2. Плохо проводящий купол, не выходящий на поверхность

На рис. 5.2.6а представлена модель среды 2D-K2.

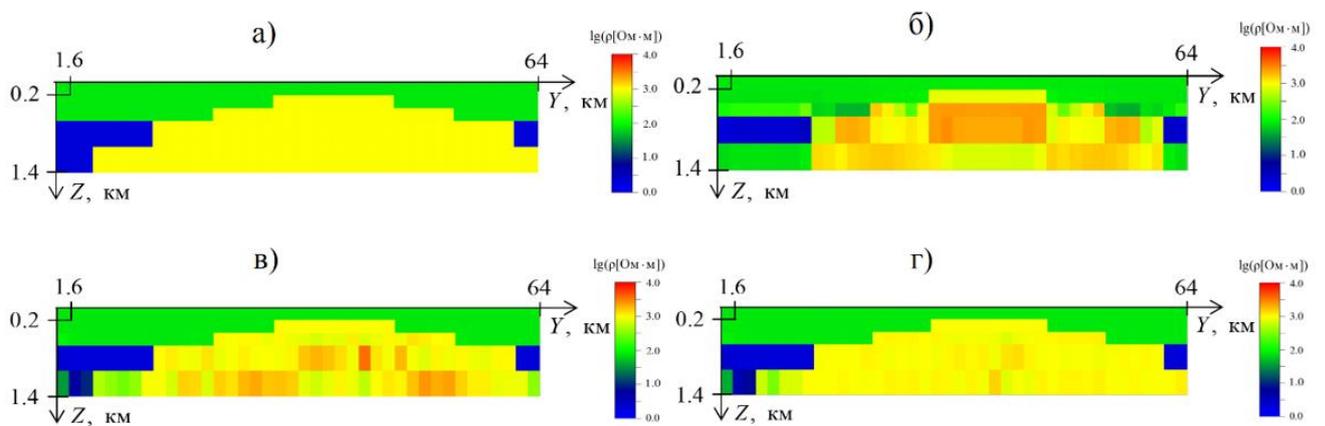


Рис. 5.2.6. Результаты решения обратной задачи; а) истинная модель 2D-K2; б) АНС решение; в), г) решения АИНС1 методом на 1-й, 4-й итерациях соответственно.

Модель 2D-K2 (рис. 5.2.6а) представляет собой однородный купол, не выходящий на поверхность, с удельным сопротивлением 1000 Ом·м (имитация правой части разреза на рис.5.2.1). Купол перекрыт приповерхностным слоем с удельным сопротивлением 80 Ом·м. На рис. 5.2.6б представлено АНС решение; из рисунка видно, что общий контур купола в целом определяется, невязка АНС решения составляет 4.07%, а средняя ошибка по всем параметрам 4.54%. На рис. 5.2.6в,г представлены решения обратной задачи АИНС1 методом на 1-й и 4-й итерациях; в табл. 5.2.2 и на рис. 5.2.7 приведены ошибки найденных параметров модели, невязки δ и апостериорные оценки неоднозначности $\beta_1(N, f, s_\delta, \delta)$ для всех итераций. Анализ результатов показывает, что для данной

модели 4-я итерация АИНС1 метода снижает невязку в 18 раз, среднюю ошибку по параметрам – в 6 раз, а апостериорную оценку – в 5 раз (относительно с АНС решения).

Таблица. 5.2.2. Ошибки, невязки и апостериорные оценки для модели 2D-K2.

Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon} \%$						
Номер яруса сетки	АНС метод, $\bar{\varepsilon}_i$	Итерации АИНС1 метода, $\bar{\varepsilon}_i$				$\bar{\varepsilon}_i/\bar{\varepsilon}_{4,i}$
		1	2	2	4	
1	0.20	0.01	0.01	0.01	0.01	20
2	0.86	0.02	0.01	0.01	0.01	86
3	6.65	3.10	0.71	0.50	0.44	15
4	4.73	4.80	1.74	0.56	0.50	9
5	10.27	13.6	5.73	3.15	2.53	4
Средняя ошибка, $\bar{\varepsilon}$	4.54	4.32	1.64	0.85	0.70	6
Невязки $\delta, \%$						
	4.07	3.03	0.54	0.44	0.22	18
Апостериорные оценки $\beta_1, \%$						
	5.81	4.56	2.01	1.85	1.12	5

а)

б)

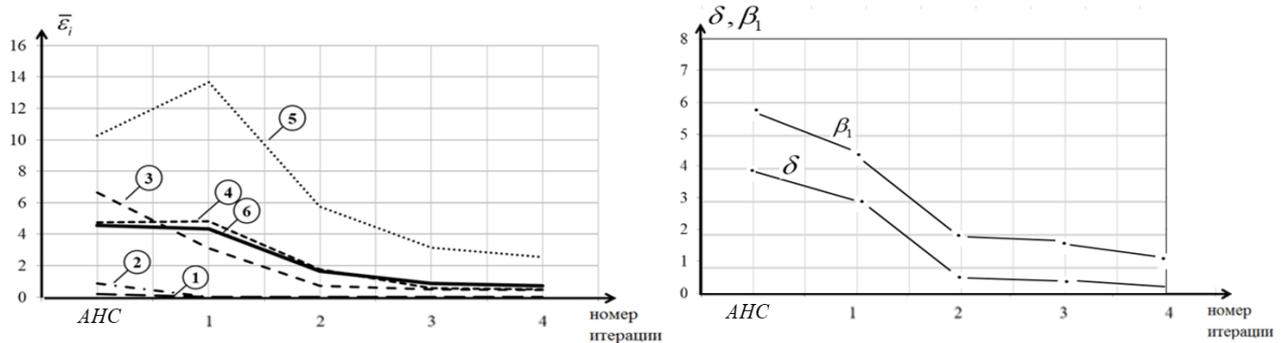


Рис. 5.2.7. Графики зависимости ошибок, невязок решений и апостериорных оценок (в %) от номера итераций, для модели 2D-K2; а) пунктиром обозначены кривые ошибок $\bar{\varepsilon}_i$, цифрами – номера ярусов сетки модели (большим номерам

соответствуют более глубинные ярусы), жирная линия с номером 6 – ошибка $\bar{\varepsilon}$ по; б) кривые невязок δ и апостериорных оценок β_1 . Точка АНС на горизонтальной оси соответствует АНС решению.

Модель 2D-К3. Группа проводящих, экранирующих друг друга тел.

Результаты решения обратной задачи для модели 2D-К3 (рис. 5.2.8а) приведены на рис. 5.2.8б,в,г и в табл. 5.2.3. На рис. 5.2.8б – решение АНС методом двухкритериальной EH задачи; на рис. 5.2.8в, г - АНС решения задачи отдельно по H и E критериям соответственно. Визуальное сопоставление рисунков показывает, что ошибка восстановления среды по комплексу двух критериев заметно меньше, чем по каждому в отдельности. При этом, по H критерию погрешность решения больше на глубине, а по E критерию – больше в приповерхностной области, что соответствует природе H и E поляризованных полей: H -поляризованное поле более чувствительно к поверхностным неоднородностям, а E -поляризованное поле - к глубинным [Дмитриев, 2012.]. Из табл. 5.2.3 видно, как уменьшаются ошибки решения двухкритериальной обратной задачи по итерациям АИНС1 метода.

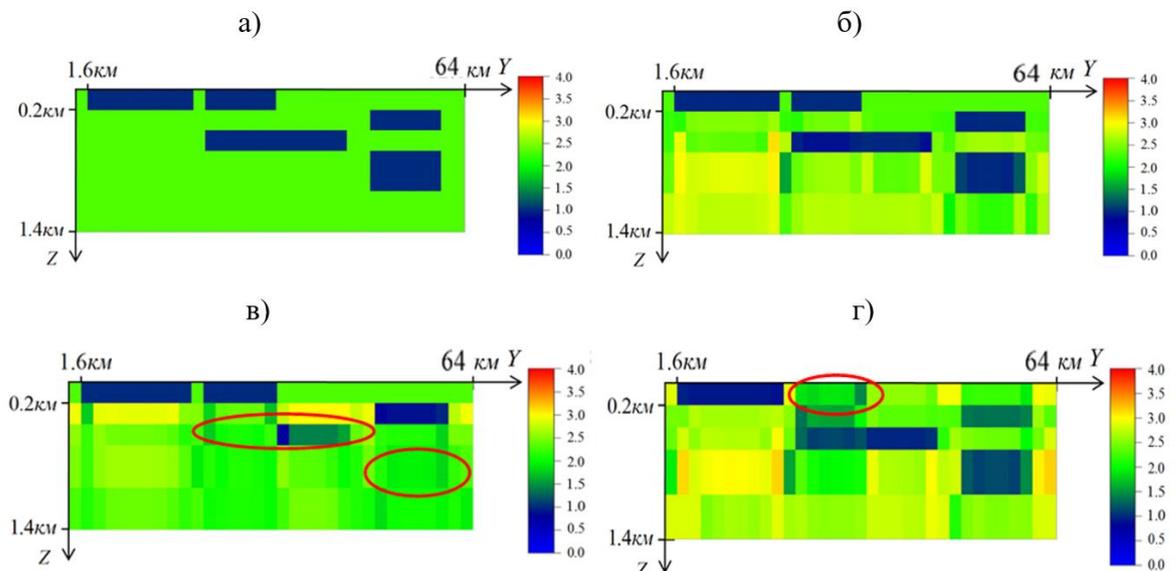


Рис. 5.2.8. Результаты решения обратной задачи АНС методом; а) истинная модель 2D-K3; б) АНС решение по комплексу двух E, H критериев; в), г) АНС решения отдельно по H и E критериям соответственно.

Таблица. 5.2.3. Ошибки, невязки и апостериорные оценки для модели 2D-K3.

Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon} \%$			
Номер яруса сетки	Итерации АИНС1 метода, $\bar{\varepsilon}_i$		
	1	2	3
1	0.07	0.01	0.01
2	1.32	0.03	0.01
3	6.61	0.10	0.05
4	10.08	3.30	0.49
5	13.50	6.50	1.27
Средняя ошибка, $\bar{\varepsilon}$	6.27	1.99	0.37
Невязки $\delta, \%$			
	16.54	3.35	0.64
Апостериорные оценки $\beta_1, \%$			
	13.12	4.02	1.09

Модель 2D-K4. Сложно построенная верхняя часть разреза (ВЧР)

На рис. рис. 5.2.9а представлена модель 2среды D-K4 и решение обратной задачи АНС1 методом на 4-й итерации (рис. 5.2.9б). В табл. 5.2.4 приводится сравнение ошибок этого решения с ошибками АНС решения; видно, что невязка снижается в 5.6 раз, средняя ошибка по параметрам – в 6.1 раза, апостериорная оценка β_1 - в 6.5 раза, по сравнению с АНС решением.

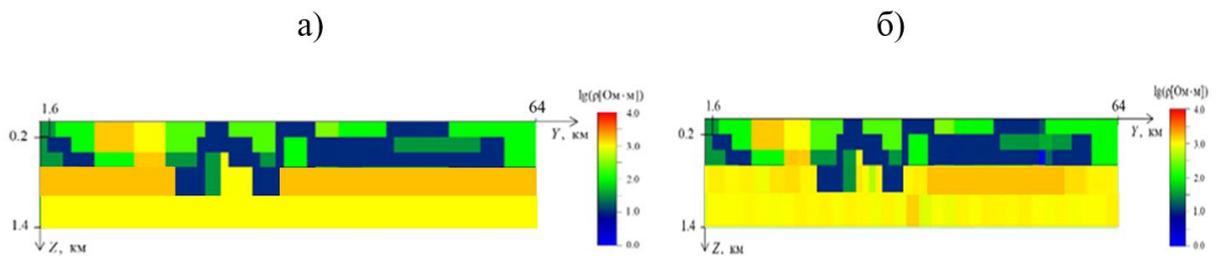


Рис. 5.2.9. Результаты решения обратной задачи АИНС1 методом; а) истинная модель 2D-K4; б) результат решения АИНС1 методом на 4-й итерации.

Таблица. 5.2.4. Ошибки, невязки и апостериорные оценки для модели 2D-K4.

Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon} \%$		
Номер яруса сетки	АНС метод, $\bar{\varepsilon}_i$	4-ая итерация АИНС1 метода, $\bar{\varepsilon}_i$
1	0.13	0.10
2	1.49	0.10
3	5.48	0.56
4	6.85	1.42
5	17.61	2.74
Средняя ошибка, $\bar{\varepsilon}$	6.27	1.03
Невязки $\delta, \%$		
	13.29	2.37
Апостериорные оценки $\beta_1, \%$		
	10.22	1.58

5.2.1.2. Класс сред G_{2D}^2 , глубинность до 6 км

Модельный класс сред G_{2D}^2 отличается от рассмотренного выше класса G_{2D}^1 размерами области Ω и сеткой параметризации θ_N , покрывающей область (рис. 5.2.10). Размеры области исследований Ω составляют 6×100 км, сетка параметризации, построенная на основе критерия обучаемости (п. алгоритма А2.2.4), содержит 9 ярусов, общая размерность сетки $N = 256$; диапазон частот

0.001–16 Гц. Размерность полного вектора $f = (f^1, \dots, f^M)$ входных EH данных $M = 4 \times 13 \times 125 = 6500$.

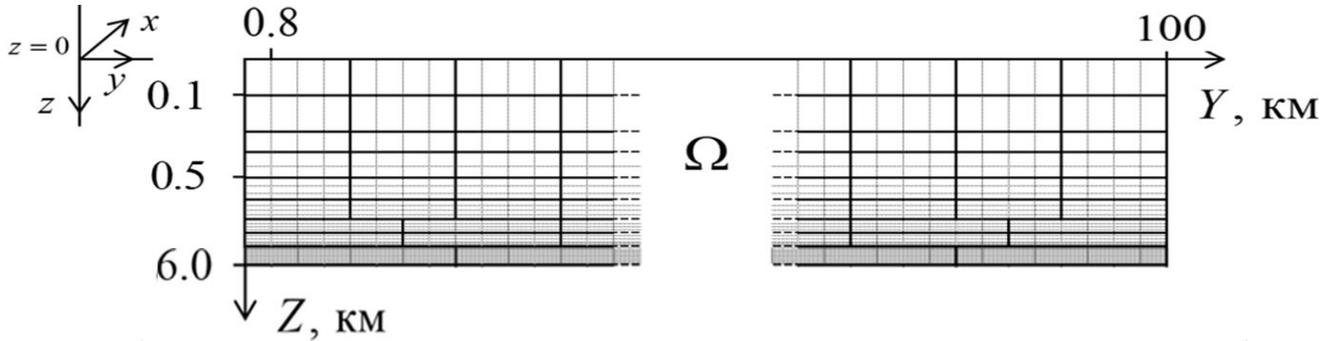


Рис.5.2.10. Схема области Ω класса сред G_{2D}^2 ; сетка параметризации θ_N размерности $N = 256$ показана жирными линиями; опорная сетка прямой задачи – тонкими.

Обратная задача в классе сред G_{2D}^{2D} заключается в том, чтобы найти все параметры s^1, \dots, s^N , $N = 256$ среды в области Ω на сетке θ_N параметризации по заданному вектору EH данных $f = (f^1, \dots, f^M)$, $M = 6500$. В качестве априорной информации о решении задается только диапазон $0 \leq s^n = \lg \rho^n \leq 4$, $n = 1, \dots, N$, допустимых изменений параметров среды.

Для обратной задачи (1.3.35), рассматриваемой в классе сред G_{2D}^2 , был построен универсальный локальный аппроксиматор Ψ_{2D}^2 I типа.

Характеристики универсального локального аппроксиматора Ψ_{2D}^2 в основном аналогичны характеристикам рассмотренного выше универсального аппроксиматора Ψ_{2D}^2 . Основные отличия состоят в расширении области исследований Ω , главным образом в глубину и в соответствующем расширении диапазона частот (в сторону низких частот).

Собственные ошибки аппроксиматора Ψ_{2D}^2 по тестирующей выборке представлены в табл. 5.2.5.

Таблица. 5.2.5. Собственные средние по ярусу ошибки аппроксиматора Ψ_{2D}^2 .

Номер яруса сетки i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ошибки $\bar{\varepsilon}_{\Psi, i}, \%$	3.01	4.68	8.91	9.28	10.51	13.28	15.79	17.44	18.03

Назначение универсального аппроксиматора Ψ_{2D}^2 . Аппроксиматор позволяет решать АНС методом 2D обратную двухкритериальную задачу геоэлектрики вида (1.3.33) в классе G_{2D}^2 сред с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления на основе EH данных методом общей инверсии на глубинах до 6 км.

Ниже приводится пример решения обратной задачи АНС методом для модели из класса G_{2D}^2 .

Модель 2D-M1. Серия проводящих вставок и подстилающая плита

Модель 2D-M1 из класса G_{2D}^2 (рис. 5.2.11б) представляет собой серию последовательно погружающихся блоков с сопротивлением $10 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ в непроводящей вмещающей среде ($1000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$), которые подстилаются горизонтальной плитой с сопротивлением $30 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Данная модель является малоглубинным аналогом геоэлектрической структуры, представленной в международном проекте COPROD-2S [Varentsov, 2015].

АНС решение обратной задачи с помощью универсального аппроксиматора Ψ_{2D}^2 представлено на рис. 5.2.11а. Визуальное сопоставление найденной модели среды с заданной (рис. 5.2.11б) показывает, что границы блоков определяются практически безошибочно; основные ошибки решения обратной задачи связаны с в уд. сопротивлениях вмещающей среды. Средняя по всем параметрам модели ошибка решения $\bar{\varepsilon} = 10.4\%$, при невязке $\delta = 13.72\%$.

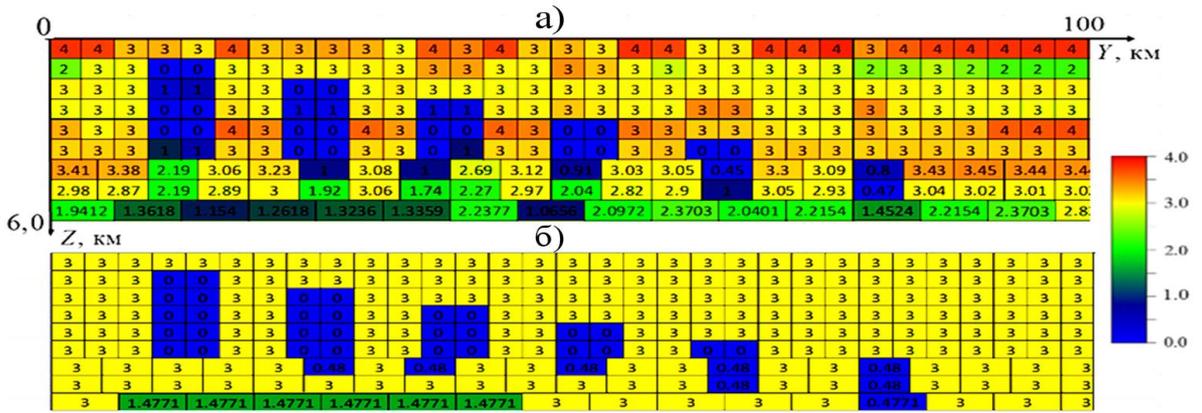


Рис. 5.2.11. Результаты решения обратной задачи АНС методом для модели 2D-M1; а) АНС решение; б) истинная модель.

5.2.2. 3D задача

Рассматривается двухкритериальная $\hat{Z}\hat{W}$ обратная 3D задача геоэлектрики (1.3.34) при совместном использовании тензора импеданса \hat{Z} и вектора-типпера \hat{W} . Эта задача (методом общей инверсии) сводится к объединенному уравнению общего типа (1.3.36) (см. п. 1.3.2.2)

$$\hat{A}_{1,2,N}s = f_{1,2}, \quad s \in S_N \subset R^N, \quad f_{1,2} \in \hat{F}_6(\Omega_{3,\omega}), \quad (1.3.36)$$

в заданных классах сред G_{3D}^1 и G_{3D}^2 , которые являются подклассами общего модельного класса сред $G_{N,\eta}(\Omega, \theta_N, S_N)$ (см. п. 1.3.2.1).

Входные данные рассматриваемой задачи определяются значениями вектор-функции трех переменных $f_{1,2}(y, \omega) = (f^1, \dots, f^6) \in \hat{F}_6[\Omega_{3,\omega}]$, $(x, y, \omega) \in \Omega_{3,\omega}$, компонентами которых являются все комплексные компоненты тензора импеданса и вектора-типпера, заданные на верхней границе Ω_1 ($z = 0$) исследуемой области Ω на пространственно-частотной сетке задачи.

5.2.2.1. Класс сред G_{3D}^1 , глубинность до 0.3 км

Класс сред определяется 3D областью исследований Ω , сеткой параметризации θ_N , покрывающей исследуемую область Ω (рис. 5.2.12б) и априорными ограничениями вида (1.3.21). Область исследований Ω имеет размеры $1000 \times 1000 \times 250$ м; диапазон частот – 1–1000 Гц. Класс G_{3D}^1 соответствует методике съемки методами МТЗ-АМТЗ для целей поиска хорошо проводящих малоглубинных образований типа «кимберлитовая трубка взрыва» [Сараев и др., 2010; Сараев и др., 2011].

Регуляризованная (оптимальная) сетка θ_N размерности $N = 1300$ (рис. 5.2.12б) построена в соответствии с методами п. 2.5.1 и 3.3.1 при заданных параметрах $\delta_0 = 0,03$, $\varepsilon_0 = 0.06$.

График априорной характеристики степени неоднозначности $\beta(N, 2\delta)$ вида (2.4.3) для объединенного уравнения (1.3.36) представлен на рис. 5.2.12а; по графику можно определить, что при невязках до 5% априорная степень неоднозначности находимых параметров среды для рассматриваемой задачи при любых входных данных не будет превышать $\sim 10\%$.

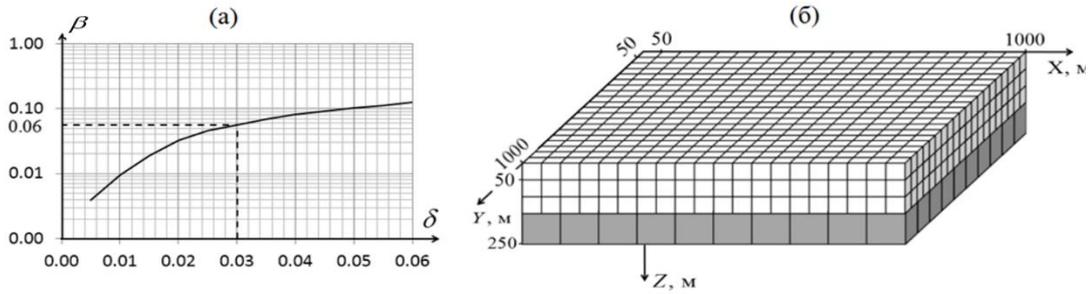


Рис. 5.2.12. Схематическая модель исследуемой аномальной области Ω ; а) график априорной характеристик степени неоднозначности $\beta(N, 2\delta)$; б) исследуемая 3D область Ω и сетка параметризации класса сред G_{3D}^1 .

Размерность полного вектора $f = (f^1, \dots, f^M)$ входных $\hat{Z}\hat{W}$ данных составила $M = 12 \times 13 \times 400 = 62400$.

Обратная задача в классе сред G_{3D}^1 заключается в том, чтобы найти все параметры s_1, \dots, s_N , $N = 1300$ среды в области Ω на сетке θ_N параметризации по заданному вектору данных $f = (f^1, \dots, f^M)$.

Для обратной задачи (1.3.36), рассматриваемой в классе сред G_{3D}^1 , был построен универсальный локальный 3D аппроксиматор Ψ_{3D}^1 I типа.

Характеристики универсального локального аппроксиматора Ψ_{3D}^1

1. Время расчета множества опорных решений. Время расчета одной прямой задачи на всех используемых частотах: на персональном компьютере 20 мин, на суперкомпьютерном кластере – 12 мин на одном вычислительном узле.
2. Размер множества опорных решений составляет 25000 примеров, время расчета множества опорных решений – 17 ч, при этом требуется 300 ядер CPU, например, 6 пусков по 50 ядер.

- a. Время расчета множеств опорных решений для каждой из последующих итераций ~ 8.5 ч на 300 ядрах CPU.
- b. Время обучения аппроксиматора на готовом множестве опорных решений составляет ~ 72 ч без распараллеливания вычислений.
- 3. Собственные ошибки аппроксиматора. Средняя по всем ярусам сетки параметризации собственная ошибка обученного аппроксиматора Ψ_{3D}^1 составляет 3.7%.
- 4. Назначение универсального аппроксиматора Ψ_{3D}^1 . Аппроксиматор позволяет решать АНС методом 3D обратную двухкритериальную $\hat{Z}\hat{W}$ задачу геоэлектрики вида (1.3.34) в классе G_{3D}^1 сред с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления на основе бимодальных $\hat{Z}\hat{W}$ данных методом общей инверсии на глубинах до 250 м.
- 5. Время инверсии измеренных данных обученным аппроксиматором ~ 10 с с учетом процедур чтения и записи.
- 6. Время расчета невязки финального решения соответствует времени решения прямой задачи на всех частотах.

Дополнительные временные затраты:

- 1. Время расчета апостериорных оценок определяется временем расчета 1000 прямых задач и числом ярусов сетки параметризации.
- 2. Время расчета априорных оценок определяется временем расчета 1000 прямых задач и числом ярусов сетки.

Ниже представлен пример решения обратной задачи АНС, АИНС1 методами для модели среды из класса G_{3D}^1 .

Модель 3D-МТ кимберлитовой трубки

На рис. 5.2.13 представлена модель 3D-МТ из класса сред G_{3D}^1 , схематизировано отражающая строение кимберлитовой трубки взрыва (Архангельская область [Барсуков и др. , 2008]).

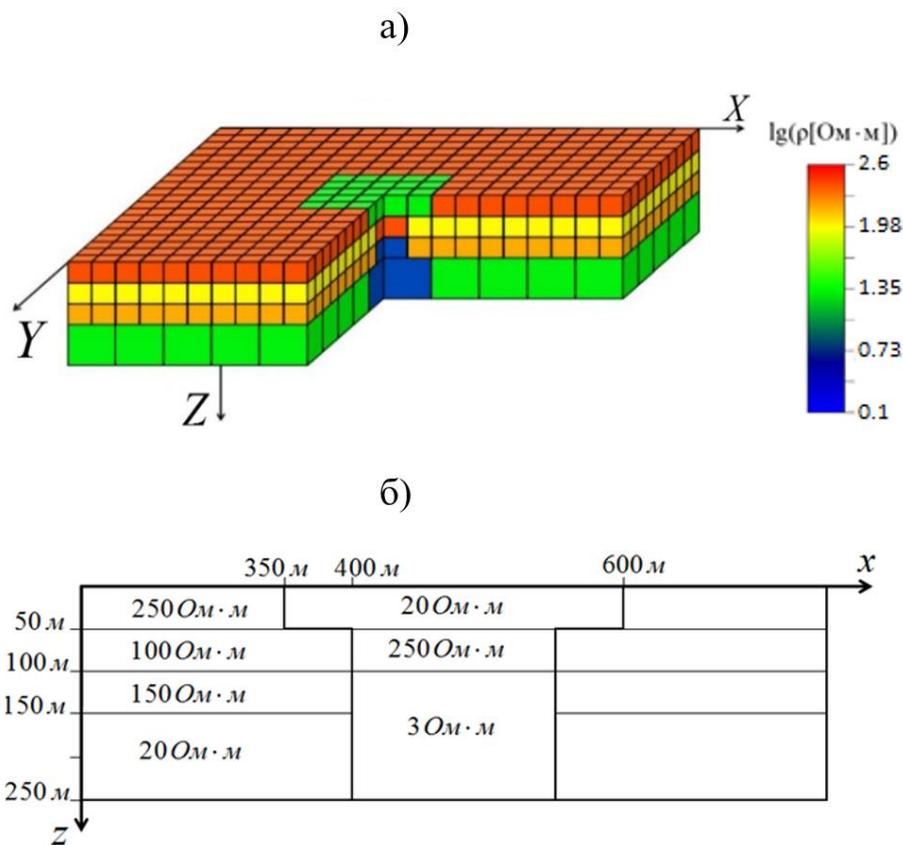


Рис. 5.2.13. Схема типовой модели 3D-МТ кимберлитовой трубки; а) 3D модель; б) вертикальное сечение через центр области Ω вдоль оси X.

Обратная задача решалась на основе бимодальных $\hat{Z}\hat{W}$ входных данных. На рис. 5.2.14 приведены результаты решения обратной задачи, найденного на 4-й итерации АИНС1 метода (уточняющих аппроксиматоров), в виде горизонтальных сечений области Ω по ярусам сетки θ_N параметризации. В табл. 5.2.6 представлены

невязки по комплексу критериев \hat{Z}, \hat{W} и средние по всем параметрам модели относительные ошибки $\bar{\varepsilon}$ решения обратной задачи

Анализ результатов решения показывает, что для модели 3D-М_T в результате 4-х итераций полная невязка снижается в 3.4 раза, средняя ошибка по параметрам – в 2.4 раза, по сравнению с АНС решением. Контуры трубки в центре области по всем ярусам сетки параметризации определяются без ошибки.

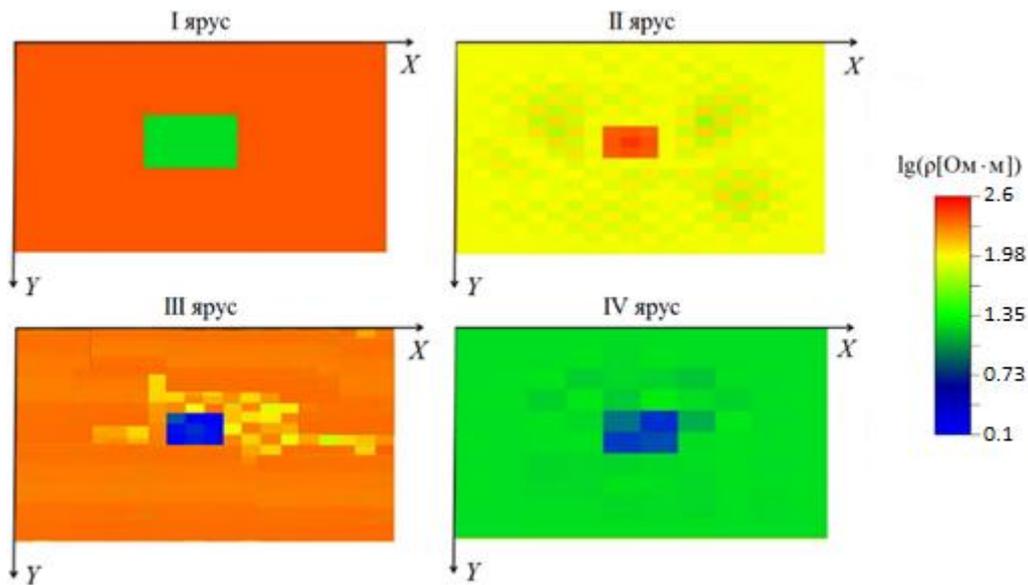


Рис. 5.2.14. Результаты решения обратной задачи АИНС1 методом для модели 3D-М_T; представлены горизонтальные сечения решения на 4-й итерации АИНС1 метода модели среды по ярусам сетки θ_N параметризации.

Таблица 5.2.6. Значения средних по всем параметрам модели относительных ошибок и невязок решений для модели 3D-М_T на различных итерациях.

Номер итерации	АНС	1	2	3	4
Ошибки решения $\bar{\varepsilon}, \%$	12.00	10.02	10.02	10.01	5.03
Невязка синтеза $\delta, \%$	4.86	2.72	2.79	1.65	1.43

5.2.2.2. Класс сред G_2^{3D} , глубинность до 3.2 км

Модельный класс сред G_2^{3D} отличается от рассмотренного выше класса G_1^{3D} размерами области Ω , сеткой параметризации θ_N , покрывающей область (рис. 5.2.15) и диапазоном частот используемых характеристик поля. Размеры области исследований Ω составляют $15000 \times 15000 \times 3130$ м; диапазон частот – 0.001–1000 Гц. Размерность опорной сетки прямой задачи $N_0=16200$. Сетка параметризации θ_N , построенная на основе критерия обучаемости (п.А2.2.4), содержит 5 ярусов по глубине; общая размерность сетки параметризации $N = 1225$.

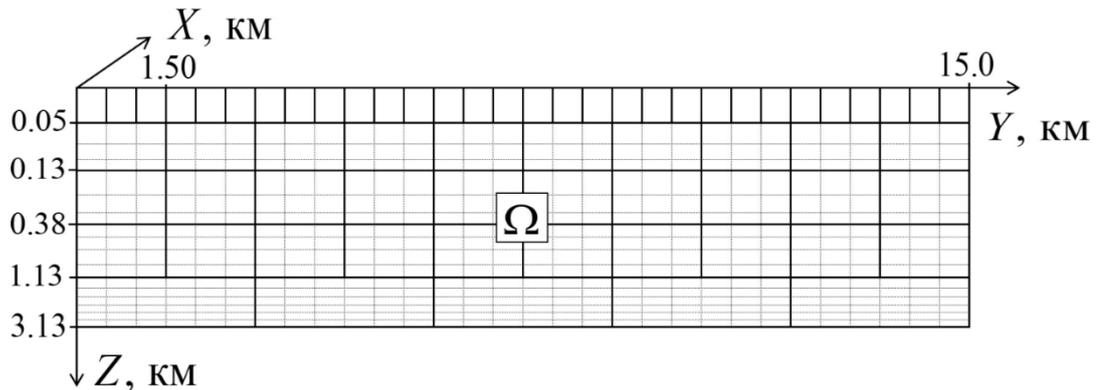


Рис. 5.2.15. Схематическая модель (вертикальный разрез) исследуемой области Ω для класса сред G_{3D}^2 ; опорная сетка θ_{N_0} , $N_0=16200$ прямой задачи показана тонкими линиями; сетка параметризации показана жирными линиями.

На рис. 5.2.16 представлены графики локальных априорных характеристик неоднозначности $\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_{\delta}, \bar{\delta})$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ вида (2.4.16) для ярусов сетки параметризации θ_N . Из графиков видно, что при невязках до 8% априорная степень неоднозначности (т.е. максимально возможный разброс δ -эквивалентных значений) искомых параметров любого яруса сетки θ_N параметризации рассматриваемой задачи не будет превышать 30%, независимо от используемых

входных данных. Размерность полного вектора $f = (f^1, \dots, f^M)$ входных данных: $M = 900$ точек измерений $\times 12$ характеристик поля $\times 14$ частот $= 151200$.

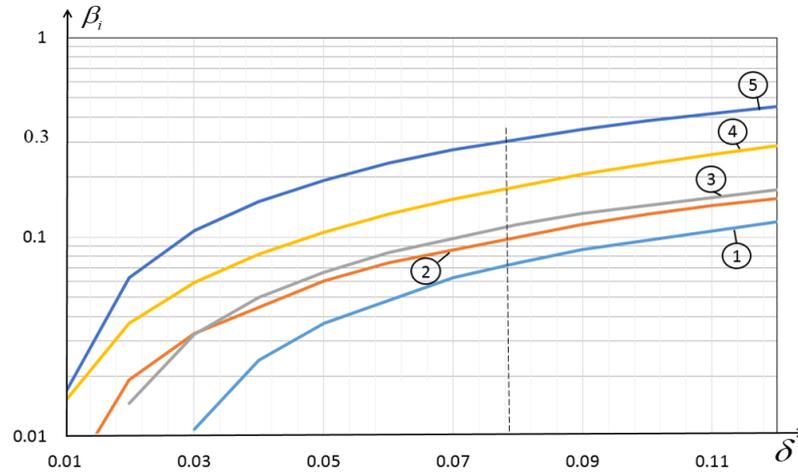


Рис.5.2.16. Графики локальных априорных характеристик неоднозначности

$\beta_C^i(N^i, 2\bar{\delta})$ по ярусам сетки параметризации θ_N для класса сред G_{3D}^2 .

Обратная задача в классе сред G_{3D}^2 заключается в том, чтобы найти все параметры s_1, \dots, s_N , $N = 1225$ модели среды на сетке θ_N параметризации по заданному вектору ZW данных $f = (f^1, \dots, f^M)$. В качестве априорной информации о решении задается только диапазон $0 \leq \lg \rho^n \leq 4$, $n = 1, \dots, N$, возможных изменений параметров среды.

Для обратной задачи (1.3.36), рассматриваемой в классе сред G_{3D}^2 , был построен универсальный локальный 3D аппроксиматор Ψ_{3D}^2 I типа.

Характеристики универсального локального аппроксиматора Ψ_{3D}^2 аналогичны характеристикам рассмотренного выше универсального аппроксиматора Ψ_{3D}^1 , за исключением следующих параметров:

- расширена область исследований, в глубину и в горизонтальном направлении, соответствующим образом расширен диапазон частот (в область низких частот).

- размер множества опорных решений составляет 30000 примеров.

Пример расчетных характеристик поля $|Z_{xy}|$ из множества опорных решений аппроксиматора Ψ_{3D}^2 на частотах 10 Гц (а) и 0.1 Гц (б) по центральному профилю области измерений Ω_1 по оси Y представлен на рис. 5.2.17.

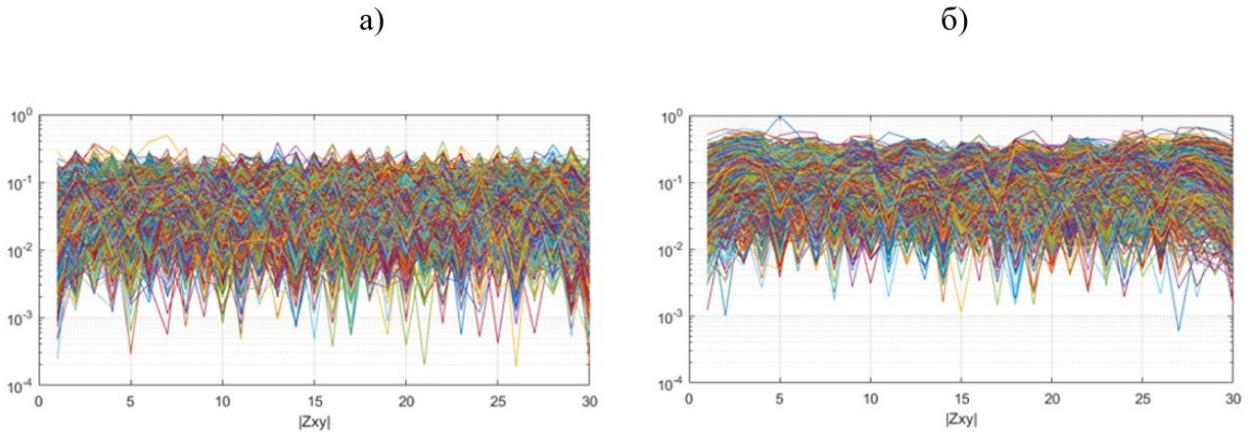


Рис.5.2.17. Расчетные компоненты тензора импеданса из множества опорных решений аппроксиматора Ψ_{3D}^2 . Представлены множества кривых модулей импедансов $|Z_{xy}|$ по центральному профилю, проходящему через середину области измерений в направлении оси Y; а) на частоте 10 Гц ; б) на частоте 0.1 Гц; на каждом графике изображены 783 кривые; по горизонтали отложены номера точек измерений в направлении оси Y с шагом 500 м.

Собственные ошибки обученного аппроксиматора Ψ_{3D}^2 на тестирующей выборке представлены в табл. 5.2.7.

Таблица 5.2.7. Собственные средние по ярусу сетки параметризации ошибки аппроксиматора Ψ_{3D}^2 .

Номер яруса, i	1	2	3	4	5	среднее
Ошибки $\bar{\varepsilon}_{\Psi_i}, \%$	1.16	2.89	4.30	7.17	10.80	5.26

На рис. 5.2.18 показан пример (из множества опорных решений по центральному профилю) сопоставления точных и вычисленных импедансов и типперов, соответствующих решениям обратной 3D задачи, полученным с помощью аппроксиматора Ψ_{3D}^2 .

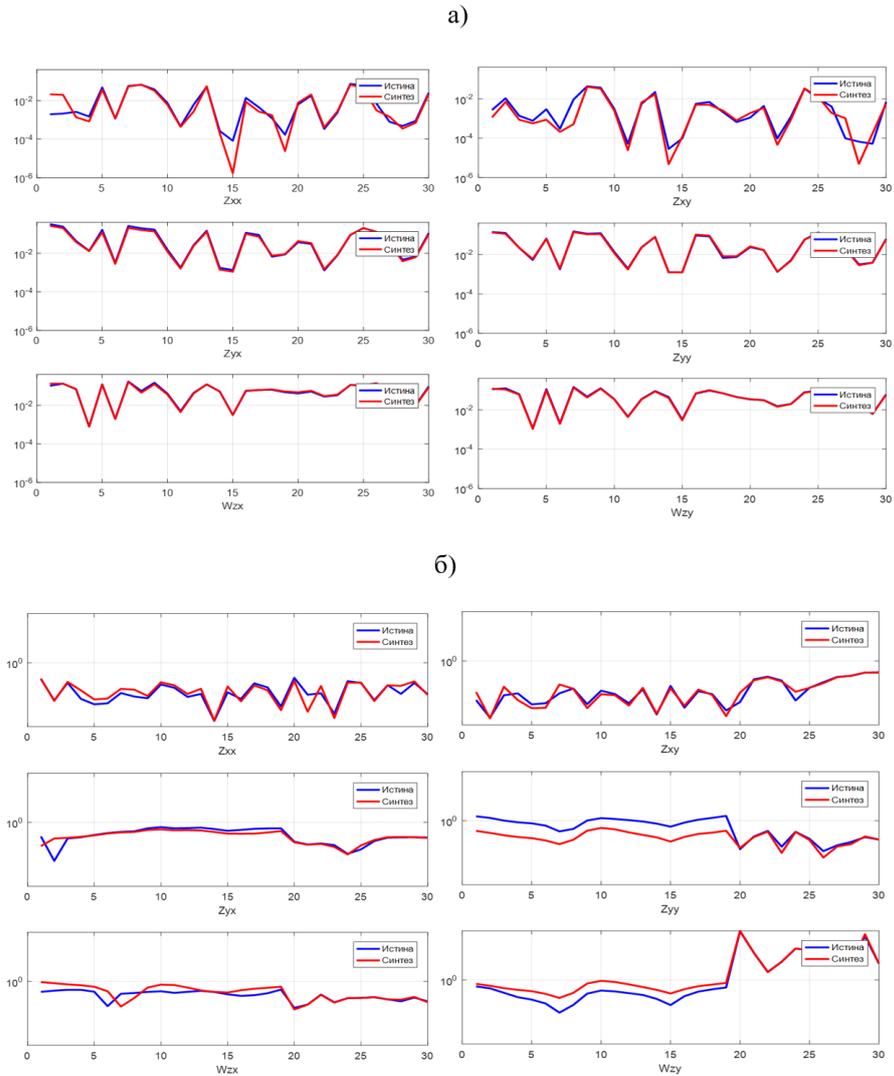


Рис.5.2.18. Иллюстрация работы аппроксиматора Ψ_{3D}^2 на тестирующей выборке.

По вертикали - значения модулей импедансов и типперов точных и (синий цвет) и синтезированные (красный цвет); по горизонтали - номера узлов сетки параметризации; а) на частоте 10 Гц ; б) на частоте 0.1 Гц.

Назначение универсального аппроксиматора Ψ_{3D}^2 . Аппроксиматор позволяет решать АНС методом 3D обратную двухкритериальную задачу

геоэлектрики вида (1.3.34) в классе сред G_{3D}^2 с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления на основе EH данных методом общей инверсии на глубинах до 3200 м.

Ниже представлена серия примеров решения обратной задачи АНС, АИНС СП методами (раздел 5.1, пункт алгоритма В2.н) для моделей сред из класса G_{3D}^2 .

Для модели 3D-K1 представлена подробная иллюстрация всех этапов получения решения обратной задачи, расчета ошибок и апостериорных оценок неоднозначности решения. Для остальных моделей приводятся результаты в виде итоговых рисунков и таблиц.

Модель 3D-K1. Купол повышенной проводимости

Для модели (рис. 5.2.19а), имитирующей купол повышенной проводимости, на основе решения прямой 3D задачи были рассчитаны тензор импеданса \hat{Z} и вектор-типпер \hat{W} .

АНС решение. На рис.5.2.19б приведен результат решения обратной задачи на АНС методом с помощью универсального аппроксиматора Ψ_{3D}^2 ; парциальные невязки решения составили $\delta_1 = 18.06\%$, $\delta_2 = 11.28\%$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно.

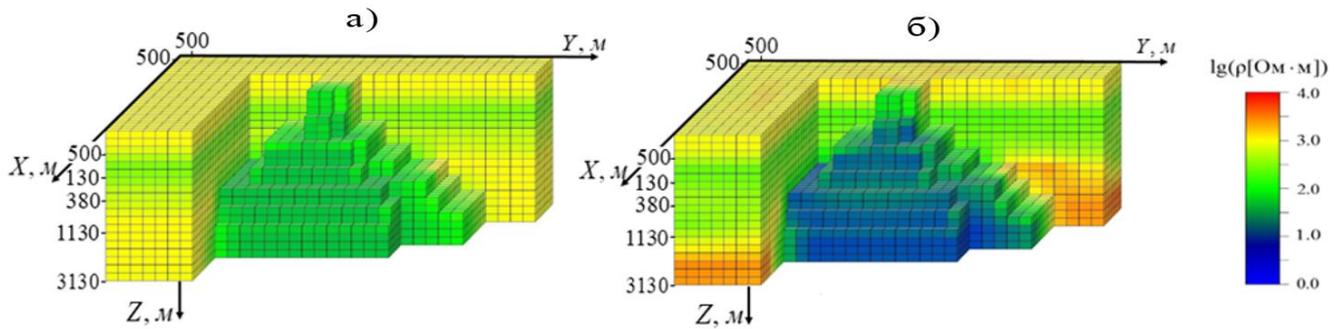


Рис. 5.2.19. Результаты решения обратной задачи АНС методом для модели 3D-K1; а) истинная модель; б) решение на АНС методом.

В табл. 5.2.8 представлены средние по ярусу ошибки решения и поярусные локальные апостериорные оценки неоднозначности $\beta_{1,c}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$ вида (2.4.14) по комплексу критериев \hat{Z}, \hat{W} при невязках $\delta_1 = 18.06\%$, $\delta_2 = 11.28\%$ соответственно. Из рис. 5.2.19 видно, что АНС решение практически безошибочно восстанавливает форму структуры, а ошибки определения удельного сопротивления в среднем по модели составляют 5.38%. Максимальная ошибка решения на 5-м ярусе достигает 11.38%. Данный результат является приемлемым для задач геоэлектрики.

Таблица 5.2.8. Ошибки и локальные апостериорные оценки АНС решения для модели 3D-K1.

Номер яруса сетки i	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i, \%$	Апостериорные оценки $\beta_{1,c}^i, \%$
1	0.89	0.90
2	3.77	5.06
3	5.59	6.32
4	5.28	5.73
5	11.38	11.56
среднее	5.38	5.91

На рис. 5.2.20 представлены примеры расчетов локальных апостериорных характеристик $\beta_{1,C}^i$ по комплексу критериев для ярусов $i = 2, \dots, 5$, сетки параметризации модели 3D-K1.

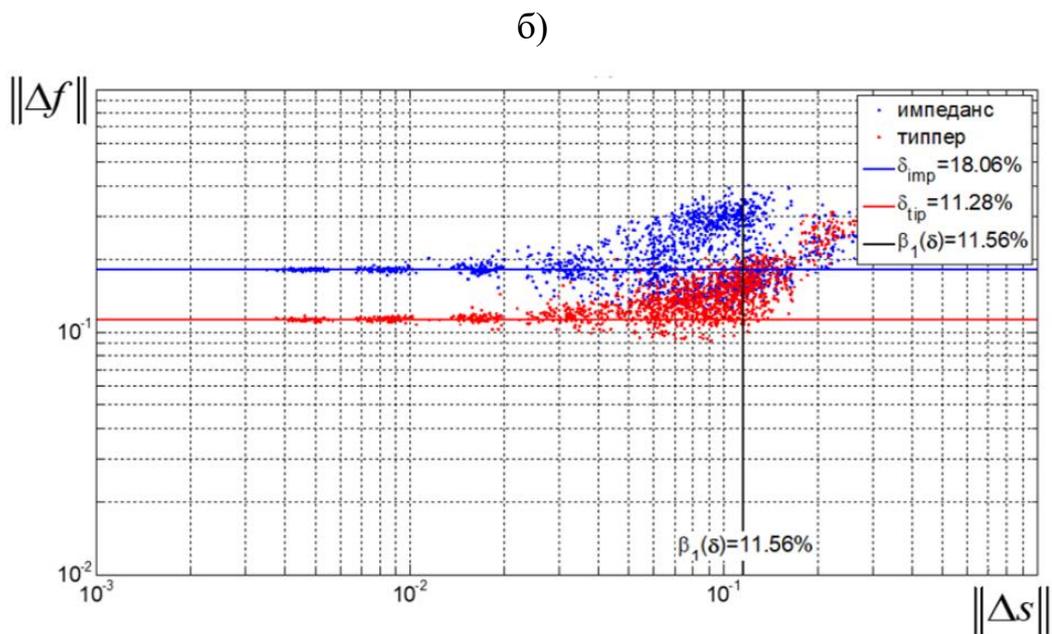
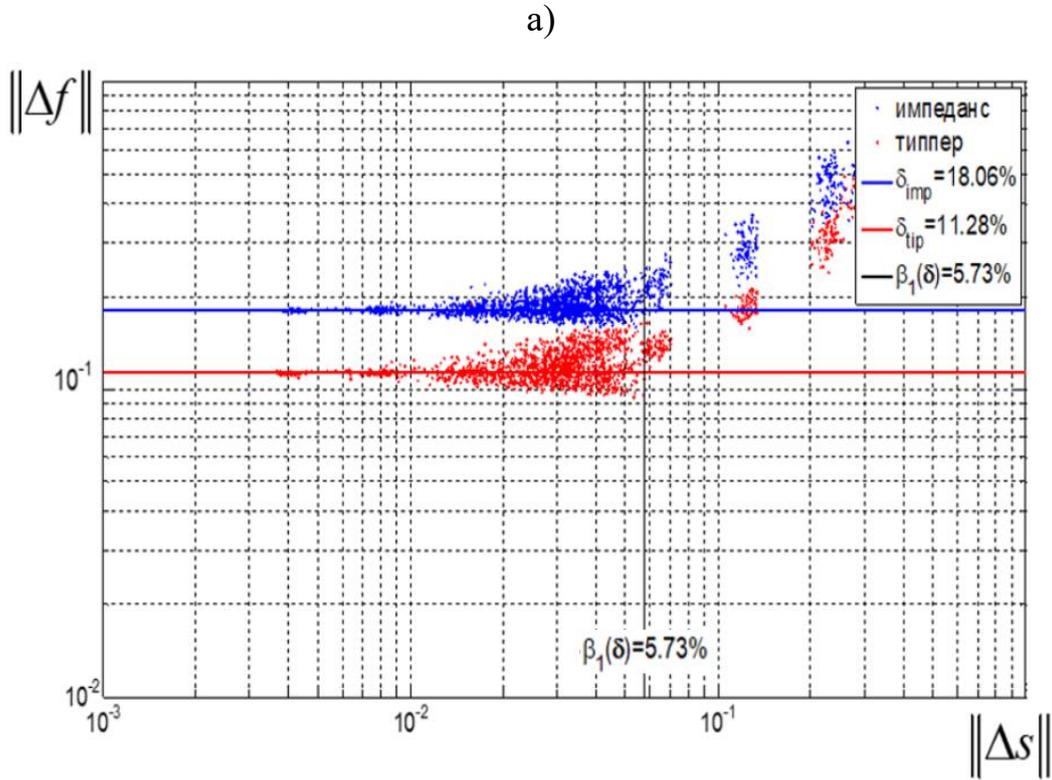


Рис. 5.2.20. Иллюстрация расчета локальных апостериорных характеристик $\beta_{1,C}^i(N^i, \bar{f}, s_\delta, \bar{\delta})$; на рисунках а), б) представлены соответственно характеристики

для 4-го и 5-го ярусов сетки параметризации модели 3D-K1. Точками показаны имитирующие множества $\tilde{Q}_{\Delta,i}^k, k = 1, 2$: красным цветом обозначены точки, соответствующие вектору-типперу, синим – тензору импеданса; горизонтальные линии соответствуют парциальным невязкам $\delta_1 = \delta_{imp}, \delta_2 = \delta_{tip}$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно; вертикальная черная линия, обозначенная на рисунке $\beta_1(\delta)$, определяет искомую величину $\beta_{1,C}^i = \beta_1(\delta)$.

Уточненное решение. На рис. 5.2.21 представлено АНС решение и решение, уточненное АИНС СП методом (на 5-й итерации) – финальное решение.

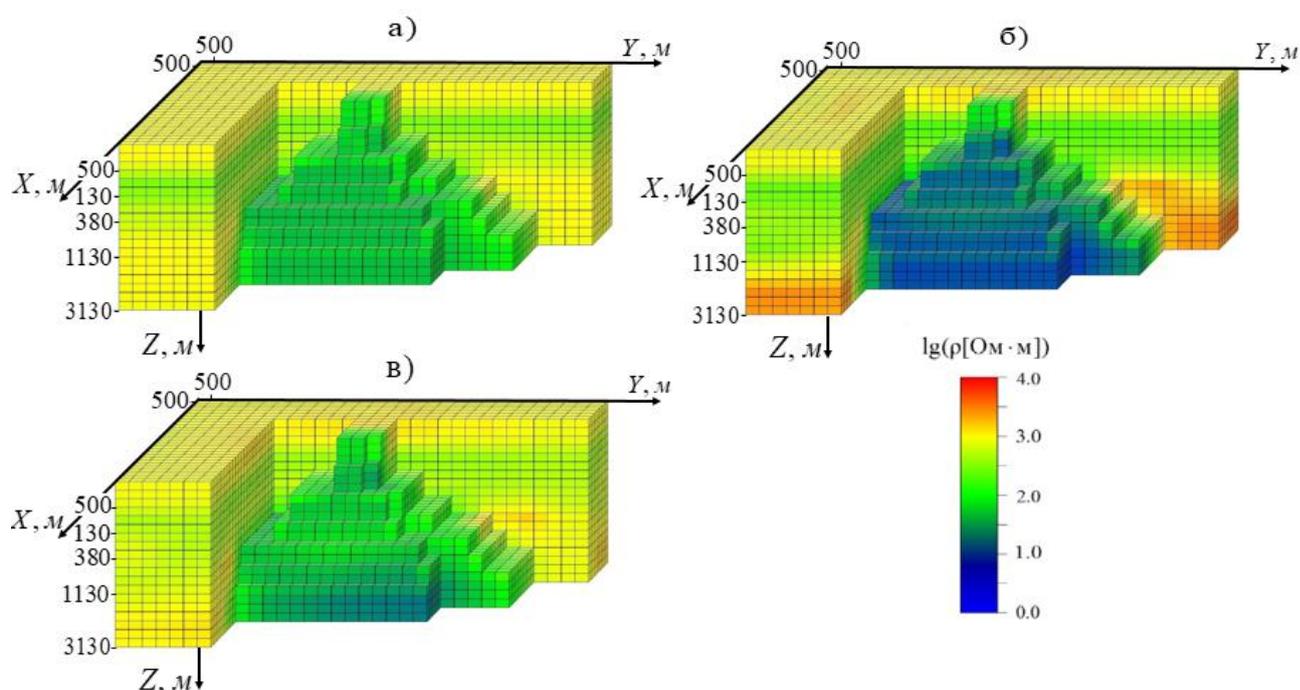


Рис. 5.2.21. Уточненное решение обратной задачи для модели 3D-K1; а) истинная модель; б) решение АНС методом; в) уточненное решение АИНС СП методом.

В табл. 5.2.9 представлены невязки и средние по ярусу сетки ошибки решения на различных итерациях применяемых методов. Из таблицы видно, что средняя ошибка финального решения уменьшается более, чем в 2 раза по сравнению с ошибкой АНС решения, невязка по тензору импеданса уменьшается почти в 3 раза, а невязка по вектору-типперу – в 1.5 раза.

Таблица 5.2.9. Ошибки и невязки решения для модели 3D-K1.

Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %						
Номер яруса сетки i	АНС решение	Номер итерации АИНС СП метода				
		1	2	3	4	5
1	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89
2	3.77	3.46	4.32	3.31	3.49	1.77
3	5.59	5.42	2.82	2.18	1.87	1.64
4	5.28	5.34	4.11	3.96	4.01	3.61
5	11.38	11.11	7.42	5.06	5.02	4.83
среднее	5.38	5.24	3.91	3.08	3.06	2.55
Невязки δ , %						
По тензору импеданса	18.06	15.00	10.19	7.35	8.04	6.80
По вектору- типперу	11.28	12.05	11.29	8.12	8.49	7.81

Серия модельных примеров

Представлена серия модельных примеров сред, для которых обратная задача решалась на основе синтезированных данных единообразно по приведенной выше схеме. На рисунках 5.2.22-5.2.25 приводятся: а) истинная модель; б) результаты решения на АНС методом; в) решение, уточненное АИНС СП методом.

В таблицах 5.2.10-5.2.13 представлены ошибки решений, парциальные невязки и локальные апостериорные оценки $\beta_{1,c}^i$ вида (2.4.14) для АНС решений.

Модель 3D-K2. Отдельные хорошо проводящие тела, экранирующие друг друга

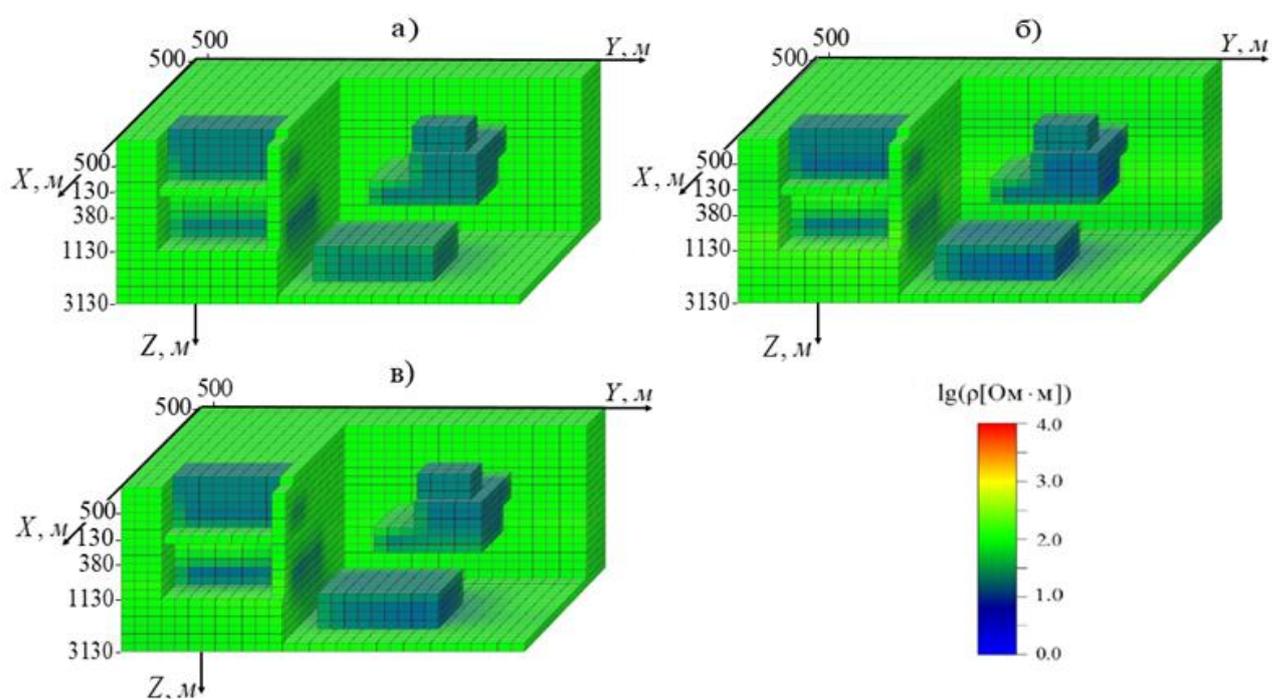


Рис. 5.2.22. Модель 3D-K2; а) истинная модель; б) результаты решения на АНС методом; в) решение, уточненное АИНС СП методом.

Из рисунка и таблицы видно, что АНС решение практически безошибочно восстанавливает форму структуры, а ошибки определения удельного сопротивления в среднем по модели составляют 2.8%, парциальные невязки составили $\delta_1 = 3.12\%$, $\delta_2 = 5.5\%$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно.

Таблица 5.2.10. Ошибки, невязки и локальные апостериорные оценки решения для модели 3D-K2.

	АНС решение, невязки $\delta_1 = 3.12\%$, $\delta_2 = 5.5\%$		Финальное решение, невязки $\delta_1 = 1.21\%$, $\delta_2 = 2.57\%$
Номер яруса сетки i	Ошибки АНС решения $\bar{\varepsilon}_i$, %	Апостериорные оценки β_{LC}^i , %	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %
1	0.23	0.41	0.23
2	3.37	1.70	0.26
3	1.38	1.82	1.01
4	4.11	4.90	2.08
5	4.93	6.20	2.31
среднее	2.80	3.00	1.18

Максимальная ошибка и неоднозначность АНС решения наблюдаются на 5-м ярусе и составляют 4.93% и 6.20% соответственно. Из таблицы видно, что средняя ошибка финального решения уменьшается более, чем в 2 раза по сравнению с ошибкой АНС решения, а парциальные невязки составили $\delta_1 = 1.21\%$, $\delta_2 = 2.57\%$.

Модель 3D-K3. Отдельные слабоконтрастные плохо проводящие тела, экранирующие друг друга

На рис. 5.2.23 и в табл. 5.2.11 представлены решения, ошибки и невязки решения по ярусам сетки параметризации и итерациям применяемых методов.

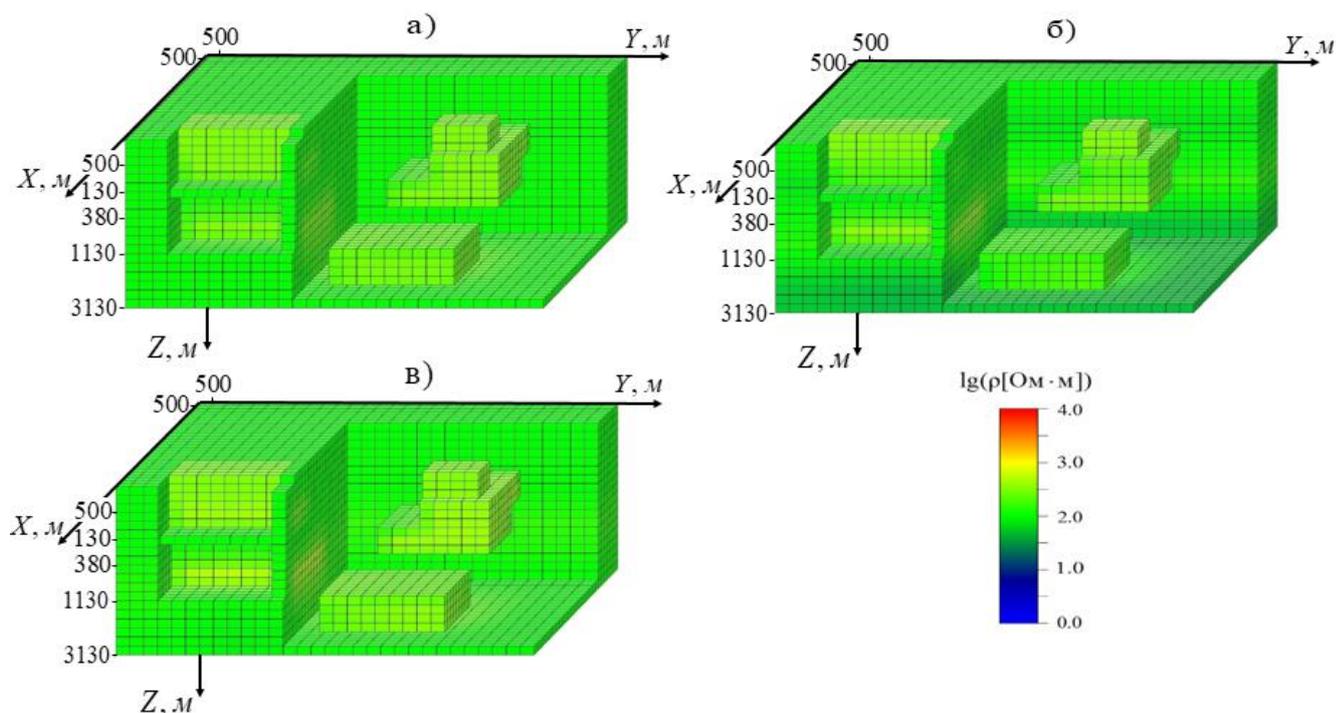


Рис. 5.2.23. Модель 3D-K3; а) истинная модель; б) результаты решения АНС методом, в) решение, уточненное АИНС СП методом.

Из рисунка и таблицы видно, что АНС решение практически безошибочно восстанавливает форму структуры, а ошибки определения удельного сопротивления в среднем по модели составляют 3.67%, парциальные невязки составили $\delta_1 = 4.50\%$, $\delta_2 = 3.04\%$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно.

Максимальная ошибка и неоднозначность НС решения наблюдаются на 5-м ярусе и составляют 10.08% и 10.62% соответственно. Данный результат является приемлемым для задач геоэлектрики.

Из таблицы видно, что средняя ошибка финального решения уменьшается более, чем в 3 раза по сравнению с ошибкой АНС решения.

Таблица 5.2.11. Ошибки, невязки и локальные апостериорные оценки решения для модели 3D-K3.

	АНС решение, невязки $\delta_1 = 4.50\%$, $\delta_2 = 3.04\%$		Финальное решение, невязки $\delta_1 = 2.02\%$, $\delta_2 = 2.63\%$
Номер яруса сетки i	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %	Апостериорные оценки $\beta_{1,C}^i$, %	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %
1	0.28	0.41	0.28
2	3.88	0.63	0.49
3	0.84	1.04	0.45
4	3.26	1.68	3.64
5	10.08	10.62	0.87
среднее	3.67	2.88	1.15

Модель 3D-K4. Уступ (сброс)

На рис. 5.2.24 и в табл. 5.2.12 представлены решения, ошибки и невязки решения по ярусам сетки параметризации и итерациям применяемых методов.

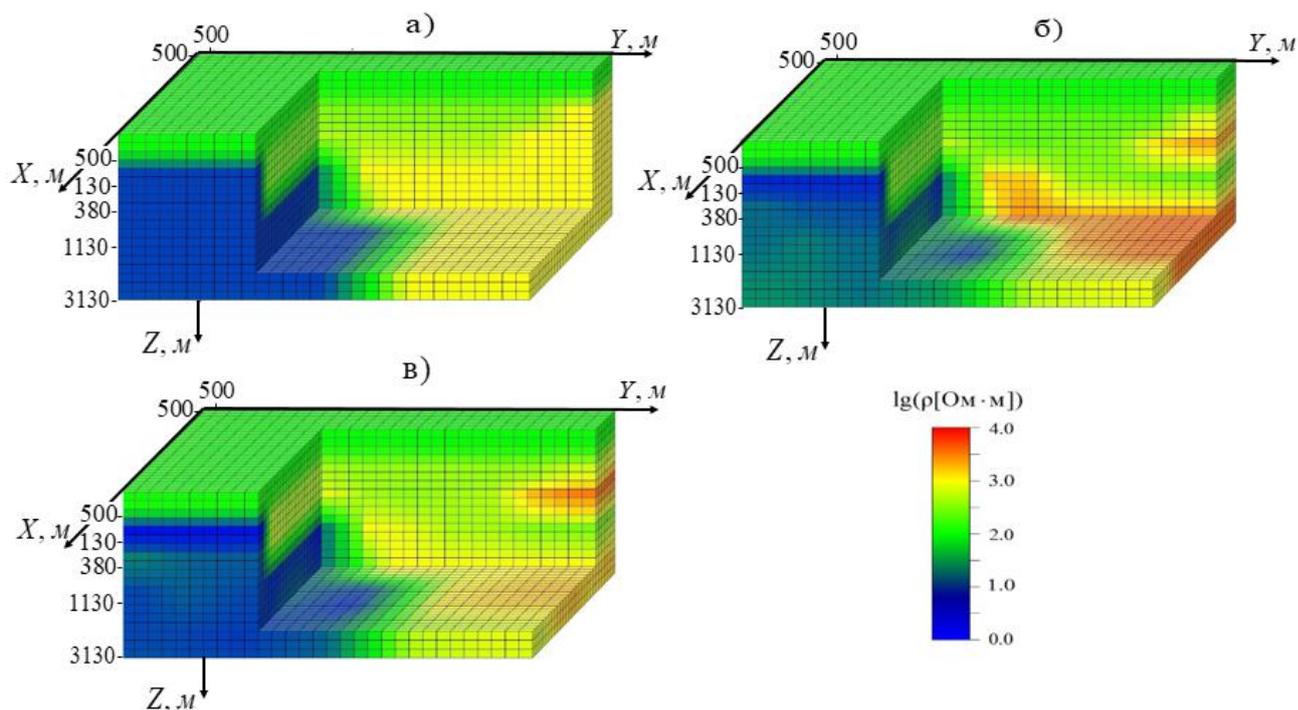


Рис.5.2.24. Модель 3D-K4; а) истинная модель; б) результаты решения АНС методом, в) решение, уточненное АИНС СП методом.

Из рисунка и таблицы видно, что АНС решение практически безошибочно восстанавливает форму структуры, а ошибки определения удельного сопротивления в среднем по модели составляют 5.74%, парциальные невязки составили $\delta_1 = 13.27\%$, $\delta_2 = 22.82\%$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно.

Максимальная ошибка и неоднозначность НС решения наблюдаются на 5-м ярусе и составляют 11.64% и 14.21% соответственно. Данный результат является приемлемым для задач геоэлектрики.

Из таблицы видно, что средняя ошибка финального решения уменьшается более чем в 1.5 раза по сравнению с ошибкой НС решения на 1-й итерации.

Таблица 5.2.12. Ошибки, невязки и локальные апостериорные оценки решения для модели 3D-K4.

	АНС решение, невязки $\delta_1 = 13.27\%$, $\delta_2 = 22.82\%$		Финальное решение, невязки $\delta_1 = 6.42\%$, $\delta_2 = 11.02\%$
Номер яруса сетки i	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %	Апостериорные оценки β_{LC}^i , %	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %
1	0.40	0.46	0.40
2	3.61	4.1	2.81
3	4.40	6.42	4.43
4	8.67	8.05	5.69
5	11.64	14.21	4.07
среднее	5.74	6.65	3.48

Модель 3D-K5. Экранирующий эффект

На рис 5.2.25 и в табл. 5.2.13 представлены решения, ошибки и невязки решения по ярусам сетки параметризации и итерациям применяемых методов.

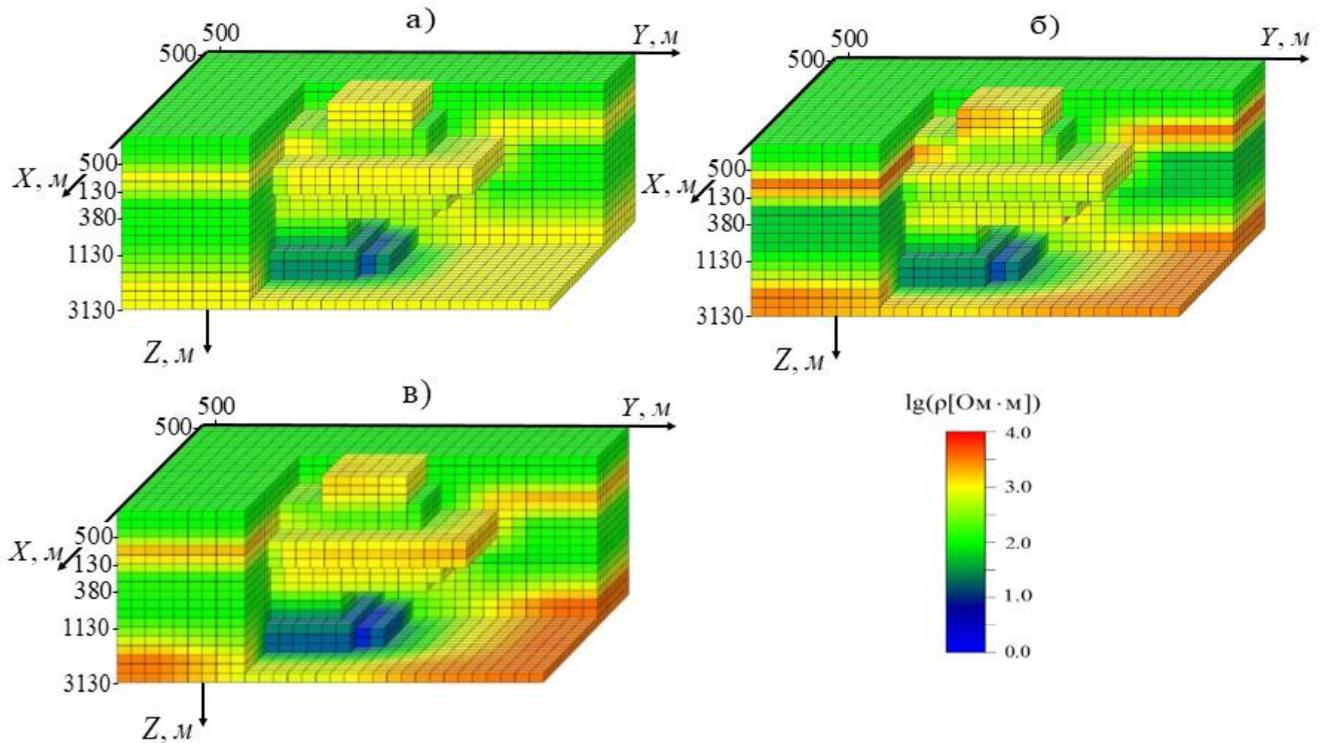


Рис. 5.2.25. Модель 3D-M5; а) истинная модель; б) результаты решения на

Из рисунка и таблицы видно, что АНС решение практически безошибочно восстанавливает форму структуры, а ошибки определения удельного сопротивления в среднем по модели составляют 4.36%, парциальные невязки составили $\delta_1 = 8.82\%$, $\delta_2 = 11.00\%$ по тензору импеданса и вектору-типперу соответственно. $\lg \sigma$

Максимальная ошибка НС решения наблюдается на 4-м ярусе и составляет 7.34%, максимальная неоднозначность решения 10.82% достигается на 5-м ярусе. Данный результат является приемлемым для задач геоэлектрики.

Из таблицы видно, что средняя ошибка финального решения по сравнению с ошибкой АНС решения, существенно уменьшается на 3-м и 4-м ярусах, но возрастает на 2-м и 5-м ярусах. Средняя ошибка решения уменьшается в 1.3 раза.

Таблица 5.2.13. Ошибки, невязки и локальные апостериорные оценки решения для модели 3D-K5.

	АНС решение, невязки $\delta_1 = 8.82\%$, $\delta_2 = 11.00\%$		Уточненное решение, невязки $\delta_1 = 6.16\%$, $\delta_2 = 7.45\%$
Номер яруса сетки i	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %	Апостериорные оценки $\beta_{1,C}^i$, %	Ошибки решения $\bar{\varepsilon}_i$, %
1	0.25	0.42	0.25
2	4.41	2.15	4.81
3	4.69	6.17	2.55
4	7.34	8.89	2.06
5	5.09	10.82	7.37
среднее	4.36	5.69	3.41

5.2.3. Примеры решения обратной задачи ЭМ мониторинга на модельных данных

В разделе приводятся результаты решения обратной задачи НС электромагнитного мониторинга (НСЭМ) на модельных данных, опубликованные в работах [Шимелевич и др., 2003; Shimelevich et al., 2004; Shimelevich et al., 2007; Шимелевич, Оборнев, 2008; Шимелевич и др., 2017б]. Эти работы были выполнены при поддержке Гранта РФФИ № 06-05-65299-а (<https://elibrary.ru/mejoab?ysclid=luwmhf3e6b90122906>) «Разработка нейросетевых методов распознавания образов для решения обратной задачи магнитотеллурических зондирований и геоэлектромониторинга активных геодинамических зон»; руководитель проекта М.И. Шимелевич.

5.2.3.1. 2D задача

Типичным примером активных геодинамических областей являются зоны субдукции. Зоны субдукции возникают на стыке литосферных плит и допускают описание в виде протяженных квазидвумерных структур [Сорохтин, 1974; Кокс, Харт, 1989], например, Курило-Камчатская зона субдукции и другие. На рис.5.2.26 представлена простейшая 2D модель среды в виде плохо проводящего слоя, содержащего более проводящую вставку, которая имитирует возможные изменения электропроводности в области состыковки плит.

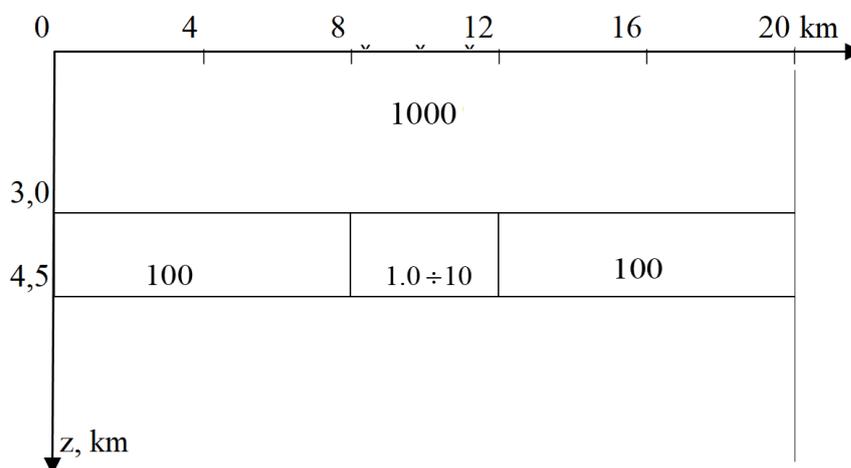


Рис. 5.2.26. Схематическая 2D модель геoeлектрического разреза, представленная горизонтальным слоем с включением проводящей вставки; цифрами обозначены величины уд. сопротивления в Ом·м; галочками в центре профиля ($z = 0$) помечены 3 точки разрезной сети наблюдения.

Решалась однопараметрическая обратная задача НСЭМ уд. сопротивления вставки. Для решения задачи строился локальный аппроксиматор II типа; при обучении все параметры модели были фиксированы и считались известными, кроме уд. сопротивления вставки, которое может изменяться в пределах $1 \div 10$ Ом·м; диапазон частот – 0.001 – 100 Гц.

Мониторинг параметра вставки проводился на основе компонент 2D-тензора импеданса, заданных в 51 точке профиля длиной 20км (полные данные) и по

разряженной сети наблюдения в трех точках (неполные данные) в центральной части профиля (рис.5.2.26). В основу моделирования процесса мониторинга был положен монотонный рост уд. сопротивления вставки.

На рис. 5.2.27 приведено сравнение теоретического изменения параметра вставки с расчетными значениями, полученными с помощью аппроксиматоров, обученных на основе 51-й точки наблюдения (а) и на основе 3-х точек (б). Средние относительные ошибки решения задачи мониторинга по всем точкам графика составили 2,5% и 3% соответственно. Таким образом, при сокращении числа точек наблюдения в 17 раз, средняя ошибка мониторинга увеличивается лишь на 0,5%, что доказывает принципиальную возможность НСЭМ с помощью аппроксиматоров II типа на основе сильно разреженной сети наблюдения при наличии априорной информации о строении среды, окружающей объект мониторинга.

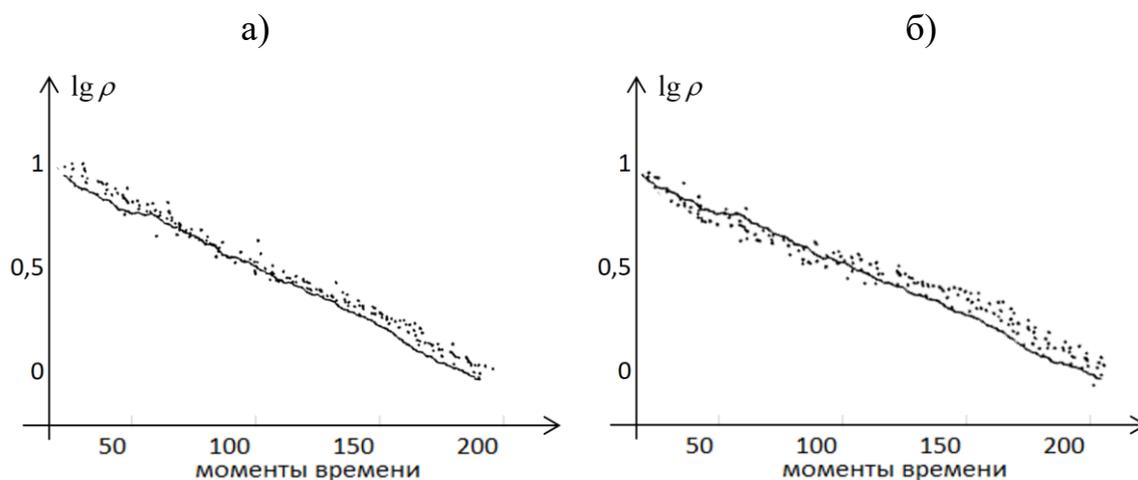


Рис. 5.2.27. Графики изменений уд. сопротивления активного блока в зависимости от времени наблюдения; а) мониторинг на основе полных данных; б) мониторинг на основе измерений в 3-х точках. Сплошной кривой обозначены истинные изменения параметра блока, точками - данные, полученные с помощью аппроксиматоров.

5.2.3.2. 3D задача

Квазидвумерные зоны субдукции обычно содержат 3D включения - локальные магматические очаги периферической магматической камеры вулкана [Кокс, Харт, 1989; Пашкевич и др., 2014], для которых характерна динамика электропроводности в период подготовки землетрясений.

Для иллюстрации проведения НСЭМ таких объектов был сформирован класс $G_{П9}$ сред на основе модели П9 трехмерной среды, схематически показанной на рис. 2.5.28 (вид сверху). Модель П9, представляет собой неоднородную плиту, погруженную в однородное плохо проводящее пространство (на рисунке показана только аномальная область без переходной области).

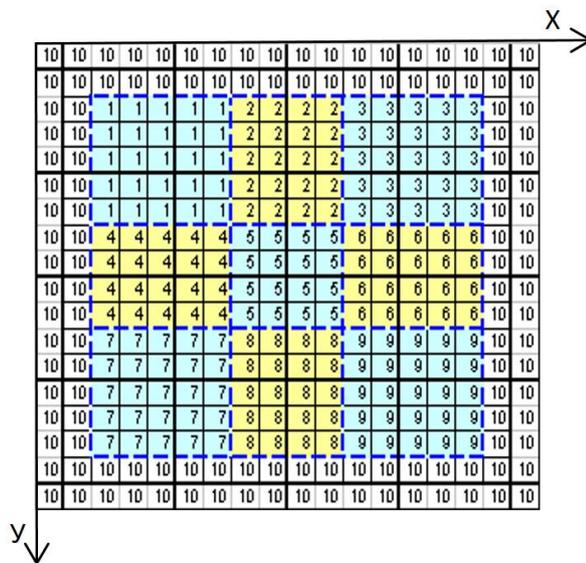


Рис 2.5.28. Схематическая модель П9, аномальная область. Синим пунктирным контуром показаны границы блоков плиты, конечно – разностная сетка прямой задачи обозначена тонкими линиями. Цифры в ячейках конечно-разностной сетки (номера параметров от 1 до 9) указывают на принадлежность микроячеек соответствующему блоку плиты. Ячейки с индексом 10 соответствуют вмещающей среде. Жирными черными сплошными линиями обозначена система измерительных профилей.

Плита состоит из 9 блоков с различным сопротивлением. Параметрами модели s_1, \dots, s_9 являются уд. сопротивления блоков. Общий размер плиты 6х6 км, мощность плиты – 1500 м. Верхняя граница плиты находится на глубине 2000 м; диапазон частот – 0.001 – 100 Гц. При формировании модельного класса $G_{П9}$ значения уд. сопротивления всех 9-ти блоков, образующих аномальную зону, варьировались в пределах $1 \div 100$ Ом·м. Уд. сопротивление фоновой среды (ячейки с индексом 10 на рис. 2.5.28) известно и равно 100 Ом·м. Входными данными являлись 4 компоненты комплексного 3D тензора импеданса. Размерность M вектора $f = (f^1, f^2, \dots, f^{M_1})$ полных входных данных, которые вычислялись на сетке 38×38 при решении прямой задачи, равна $M = 38 \times 38 \times 4 \times 4 \times 2 = 46208$. Для проведения мониторинга параметров плиты при отсутствии априорной информации о ее строении строился локальный аппроксиматор $\Psi_{П9}$ I типа, обученный для данного класса сред $G_{П9}$. Опыт расчетов показывает, что эффективно обучить аппроксиматор с помощью классической MLP-сети при такой размерности входного вектора невозможно. Поэтому, даже для сравнительно простого класса сред $G_{П9}$, аппроксиматор I типа обучался с помощью CNN.INV-сети сверточного типа (см. п. А2). В табл.5.2.15 приведены собственные ошибки обученного локального аппроксиматора $\Psi_{П9}$ для всех 9 параметров плиты.

Таблица 5.2.14. Собственные ошибки аппроксиматора $\Psi_{П9}$ (в %).

Номера параметров плиты	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Собственная ошибка аппроксиматора	0.8	1.2	1.5	1.0	1.5	1.3	1.2	1.4	0.9

Полученные результаты показывают высокую точность обученного аппроксиматора $\Psi_{П9}$ и означают, что изменения всех параметров плиты могут быть надежно определены с помощью локального аппроксиматора $\Psi_{П9}$ в режиме реального времени. Для аппроксиматора I типа минимальная сеть измерений при

НСЭМ определяется оптимальным окном входных данных, формируемым в процессе обучения CNN.INV-сети.

На практике не всегда возможно использовать оптимальную измерительную сеть. Поэтому были исследованы несколько типов измерительных сетей, чтобы выявить оптимальную среди легко реализуемых. Приведем пример мониторинга параметра 5-го блока, расположенного в центре плиты, имитирующего магматический очаг периферической магматической камеры вулкана; размеры блока составляют $1714 \times 1714 \times 1500$ м по осям X, Y, Z соответственно. Был подготовлен набор из 86 примеров, моделирующих геодинамические события, при которых уд. сопротивление 5-го блока сначала падает, а затем возрастает (рис. 2.5.29) (в соответствии с построением локального аппроксиматора остальные параметры плиты заранее неизвестны). Данная постановка задачи отвечает неопределенной ситуации, когда отсутствует достаточная априорная информации о свойствах среды, окружающей объект мониторинга. Использовались сети измерений различной конфигурации, расположенные над 5-м блоком плиты: квадрат 5×5 (все узлы сетки центрального блока), уменьшенная сеть квадрат 3×3 , сеть типа крест (5 точек), сеть типа ромб (4 точки) и сеть типа центр (1 точка). Для этих измерительных сетей обучались соответствующие локальные аппроксиматоры (I) типа. На рис. 2.5.29 сплошной линией показаны теоретические кривые, имитирующие динамику уд. сопротивления центрального блока; пунктирной линией показаны расчетные значения, полученные с использованием аппроксиматоров для разных схем наблюдения. Ошибки определения параметра в процессе НСЭМ для различных сетей наблюдения приведены в табл. 5.2.15.

Таблица 5.2.15. Ошибки определения параметра s_5 .

Виды сетей наблюдения:	Квадрат 5×5 (25Т)	Квадрат 3×3 (9Т)	Крест (5Т)	Ромб (4Т)	Центр (1Т)
Среднее ошибка в %	1.021	1.03	0.98	14.81	32.51

Анализ рис. 5.2.16 и таблицы показывает, что мониторинг НС параметра s_5 на основе измерительных сетей типа Квадрат и Крест может быть проведен с

высокой точностью; на основе сети типа Ромб мониторинг затруднен, а на основе сети Центр - практически невозможен. Этот эксперимент позволяет сделать практически понятный вывод о том, что центр области измерений надо располагать как можно ближе к эпицентру ожидаемых изменений, а саму область по возможности равномерно заполнять измерительными точками.

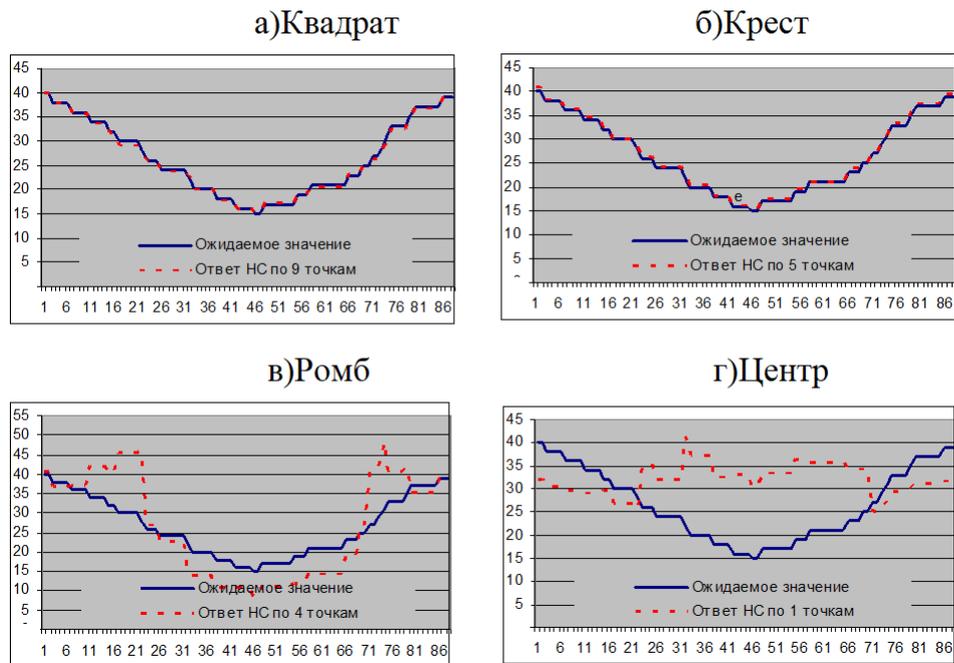


Рис 2.5.29. Графики иллюстрирующие процесс НСЭМ параметра s_5 . По вертикали отложено уд. сопротивление, по горизонтали номер примера.

Проведенный численный эксперимент подтверждает принципиальную возможность и эффективность применения аппроксиматоров I типа для решения обратных задач НСЭМ локальных 3D объектов, при минимальной априорной информации о строении среды, окружающей объект мониторинга, на основе локальных измерительных сетей в режиме реального времени.

5.3. Выводы к Главе 5

1. Представлена схема алгоритма АНС метода, для решения нелинейных многокритериальных обратных задач геоэлектрики и обратных задач ЭМ мониторинга в заданных классах сред с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления.

2. В основе алгоритма лежит численное решение задачи обучения локальных НС аппроксиматора I, II типов. Для этого сконструирована авторская нейронная CNN.INV-сеть сверточного типа, которая содержит слои с различными функциями преобразований данных, адаптированных к решаемым обратным задачам и обеспечивающих минимальную ошибку обучения дифференцированно по ярусам сетки параметризации.

3. Разработаны алгоритмы аппроксимационно-итерационного нейросетевого (АИНС) метода уточнения НС решения обратной задачи путем построения уточняющих аппроксиматоров или методом случайного поиска.

4. Обучение нейросетевых аппроксиматоров для решения практических обратных задач проводится с использованием современной вычислительной техники типа суперкомпьютерных кластеров и технологий массивных параллельных вычислений, а также технологий обучения многослойных нейронных сетей.

5. Приведены примеры решения обратных прикладных 2D и 3D задач геоэлектрики с расчетом апостериорных оценок неоднозначности и обратных задач ЭМ мониторинга на основе модельных данных. Полученные результаты иллюстрируют заявленные преимущества и эффективность АНС, АИНС методов на практике.

ГЛАВА 6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ НА ПОЛЕВЫХ ДАННЫХ

В данной главе приводятся примеры решения 2D и 3D обратных задач геоэлектрики (метод МТЗ) на основе полевых данных. Измеренные данные МТЗ после первичной обработки были любезно предоставлены генеральным директором Центра ЭМИ И.С. Фельдманом. Для находимых решений вычисляются апостериорные оценки неоднозначности.

6.1. Профиль 2ДВ. 2D задача

В качестве примера полевых данных были использованы измерения МТ поля на участках Профиля 2ДВ, Магаданская область [Фельдман и др. 2008]: Участок 1: с 490 до 1100 км и Участок 2: с 1530 по 2100 км (рис. 6.1.1).

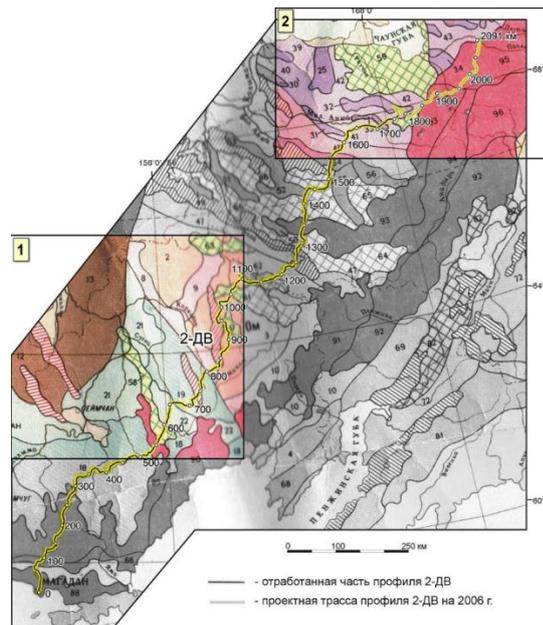


Рис.6.1.1. Профиль 2ДВ. Цифрами 1,2 обозначены выделенные участки.

Решается двухкритериальная *ЕН* обратная 2D задача МТЗ вида (1.3.33) при совместном использовании импедансов $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$, которая сводится к объединенному уравнению (1.3.35) методом общей инверсии (см. п. 1.3.2.2). Задача решается в классе 2D сред G_{2D}^2 (см. п. 5.2.1.2) АНС и АИНС методами по схеме, изложенной в разделе 4.2.5, с использованием алгоритмов из раздела 5.1А. При расчетах использовались следующие нормы: в пространстве решений – норма вида (1.3.25), в пространстве данных – норма вида (1.3.31) при $M_z = 2$; $\alpha^j = \frac{1}{M_z}$, $j = 1, 2$; дискретизованные аналоги нормы (1.3.31) вычислялись по формуле (3.1.36).

Обратная задача решалась на основе профильных данных в квазидвумерном приближении. Для решения обратной задачи на основе использовался локальный 2D аппроксиматор Ψ_{2D}^2 I типа (см. п. 5.2.1.2); предполагалось, что исследуемая среда, примыкающая к отрезку профиля в пределах входного окна локального аппроксиматора Ψ_{2D}^2 , является квазидвумерной; первое приближение не задавалось. Локальный НС аппроксиматор Ψ_{2D}^2 I типа, согласно *принципу локальности инверсии* (пункт алгоритма 5.1.В1), применялся путем перемещения по профилю.

Для получаемых решений вычислялись средние невязки по всему участку 1 профиля и локальные невязки по отдельным фрагментам участка 1, а также апостериорные оценки неоднозначности решений уравнения (1.3.35) по всему участку 1 и локальные на основе алгоритмов пп. 3.1.3 и 3.1.7.

6.1.1. Участок 1 профиля 2ДВ

На рис. 6.1.2а представлен результат решения обратной 2D задачи АНС методом в виде геоэлектрического разреза на основе полевых данных; по Участку 1 определено 1580 параметров среды: значений $\lg \rho$ в ячейках регуляризованной сетки параметризации.

В целом по всему Участку 1 абсолютная с весом невязка решения δ составила 14.35%, а оценка неоднозначности решения обратной задачи (средняя по всем ярусам сетки) $\beta_1 = 21.5\%$. Невязки и оценки неоднозначности решения по отдельным интервалам, выделенным черными прямоугольниками, представлены в верхней части рис. 6.1.2а. Для сравнения на полученный геоэлектрический разрез нанесены независимые данные сейсморазведки (черные кривые). Видно, что границы геоэлектрических структур, выделенные АНС методом, вполне сопоставимы с сейсмическими границами.

На рис. 6.1.2б представлены результаты интерпретации тех же самых полевых данных, полученные Центром ЭМИ. Видно, что результаты, полученные разными авторами и методами, в целом вполне сопоставимы. Наблюдается неплохое визуальное совпадение границ массивных плохо проводящих (красных) и хорошо проводящих (синих) структур, а также просматривается общая корреляция результатов. На выделенных черными прямоугольниками участках хорошее визуальное совпадение различных геоэлектрических структур сопровождается достаточно малыми невязками синтеза. Отметим, что время получения решения обратной задачи АНС методом с помощью обученного аппроксиматора Ψ_{2D}^2 составило первые десятки секунд.

В табл. 6.1.1 приведены невязки для различных компонент тензора импеданса на различных частотах.

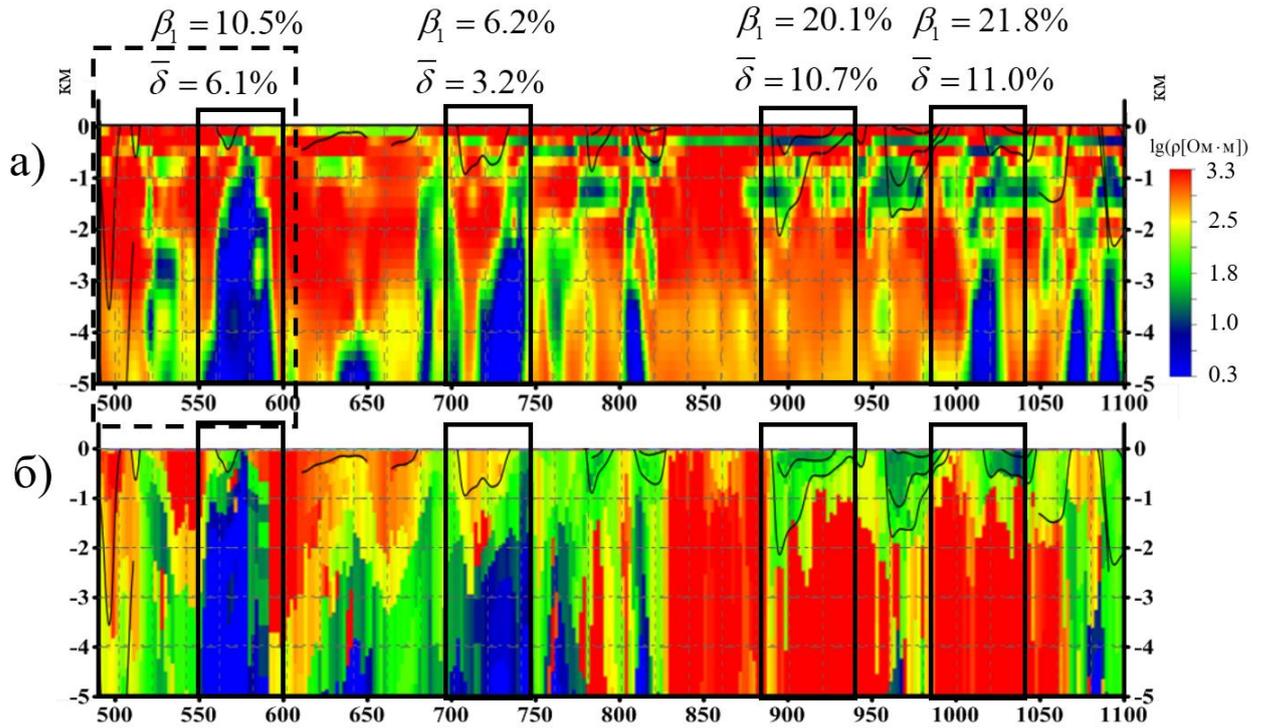


Рис.6.1.2. Геоэлектрический разрез по региональному профилю 2ДВ, Участок 1 (490–1100 км); а) решение АНС методом; б) независимая интерпретация Центра ЭМИ. Черными прямоугольниками отмечены отдельные участки детального анализа; черными кривыми обозначены сейсмические границы. Пунктиром обозначен участок, где была применена 1-я итерация АИНС1 метода.

Таблица 6.1.1. Невязки решения для главных компонент тензора импеданса на различных частотах по Участку 1.

ω_k , рад/с	Z_{xy}		Z_{yx}	
	RE	IM	RE	IM
99.58	10.75%	6.33%	12.88%	9.80%
44.48	9.28%	7.03%	12.52%	11.99%
19.87	8.52%	8.90%	12.40%	11.44%
8.875	8.84%	8.35%	11.48%	10.74%
3.964	10.01%	8.79%	12.29%	11.11%
1.771	7.29%	9.25%	15.11%	11.16%
0.791	8.67%	9.03%	18.39%	12.89%
0.353	17.96%	7.78%	17.90%	14.82%
0.158	22.43%	8.26%	19.60%	16.29%
0.070	25.41%	9.39%	21.68%	17.24%
0.031	27.60%	12.22%	20.26%	17.70%
0.014	30.17%	15.69%	19.87%	17.74%
0.006	33.57%	19.85%	20.10%	17.57%
AVG	Среднее = 14.35%			

На рис. 6.1.3 приведены разности (по абсолютной величине) полевых и синтезированных данных, нормированные на диапазон $f_{\max} - f_{\min}$ изменения соответствующих измеренных компонент импедансов по всему профилю 2ДВ. Величина уклонения данных представлена в цветовой легенде. Из рисунка видно, что в основном для данного Участка 1 разность полевых и синтезированных данных изменяется в пределах 5–25%, и только на отдельных группах данных достигает 40–45%. Большие расхождения полевых и синтезированных данных могут объясняться, в частности, влиянием близлежащих 3D структур.

Приведенные результаты сопоставления полевых и синтезированных данных показывают приемлемую погрешность решения обратной задачи в пространстве данных.

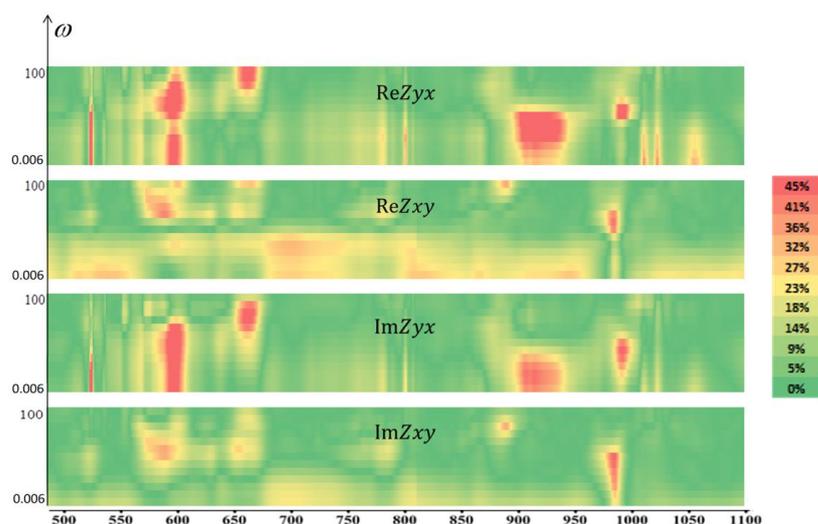


Рис.6.1.3. Иллюстрация сопоставления полевых и синтезированных данных по Участку 1 для главных компонент тензора импеданса; по горизонтали отложены номера пикетов, по вертикали – частоты.

На участке длиной 130 км у левого края разреза, выделенном на рис. 6.1.2а пунктирной линией, проводилось уточнение решения: была проведена первая итерация АИНС1 метода (рис. 6.1.4). Невязка решения на 1-й итерации для этого участка составила $\delta = 12.1\%$, апостериорная оценка неоднозначности $\beta_1 = 21.6\%$.

Невязка δ на второй итерации АНС1 метода снизилась до 11.3%, оценка неоднозначности составила $\beta_1 = 20.0\%$.

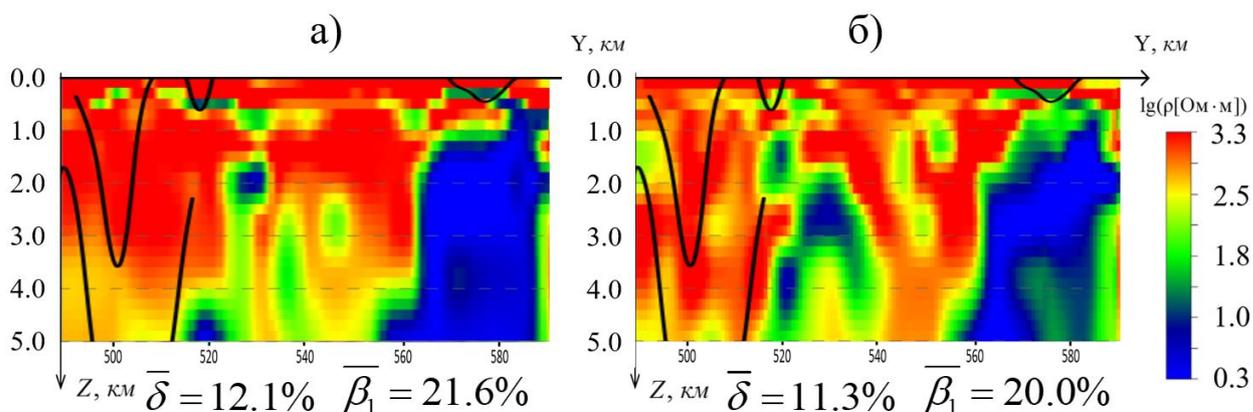


Рис.6.1.4. Уточнение решения для участка протяженностью 130 км профиля 2ДВ, выделенного пунктиром на рис.6.1.2а; первая (а) и вторая (б) итерации АИНС1 метода.

6.1.2. Участок 2 профиля 2ДВ

На рис. 6.1.5 представлен результат решения обратной 2D задачи АНС методом на основе полевых данных по Участку 2 в виде геоэлектрического разреза; по Участку 2 определено 1459 параметров среды – значений $\lg \rho$ в ячейках сетки параметризации. Время получения решения АНС методом составило первые десятки секунд.

В целом по всему Участку 2 невязка δ составила 13%, а оценка неоднозначности решения обратной задачи (средняя по всем ярусам сетки) – $\beta_1 = 24.7\%$. Для сравнения на полученный геоэлектрический разрез нанесены независимые данные сейсморазведки (черные кривые); на вынесенных в низ рисунка областях сопоставление показано крупным планом. Для этих областей на рисунке представлены локальные невязки решения. Видно, что границы

геоэлектрических структур, выделенные АНС методом, достаточно вполне сопоставимы с сейсмическими границами и сопровождаются малыми локальными невязками.

В табл. 6.1.2 приведены невязки полного решения для различных компонент тензора импеданса и различных частот.

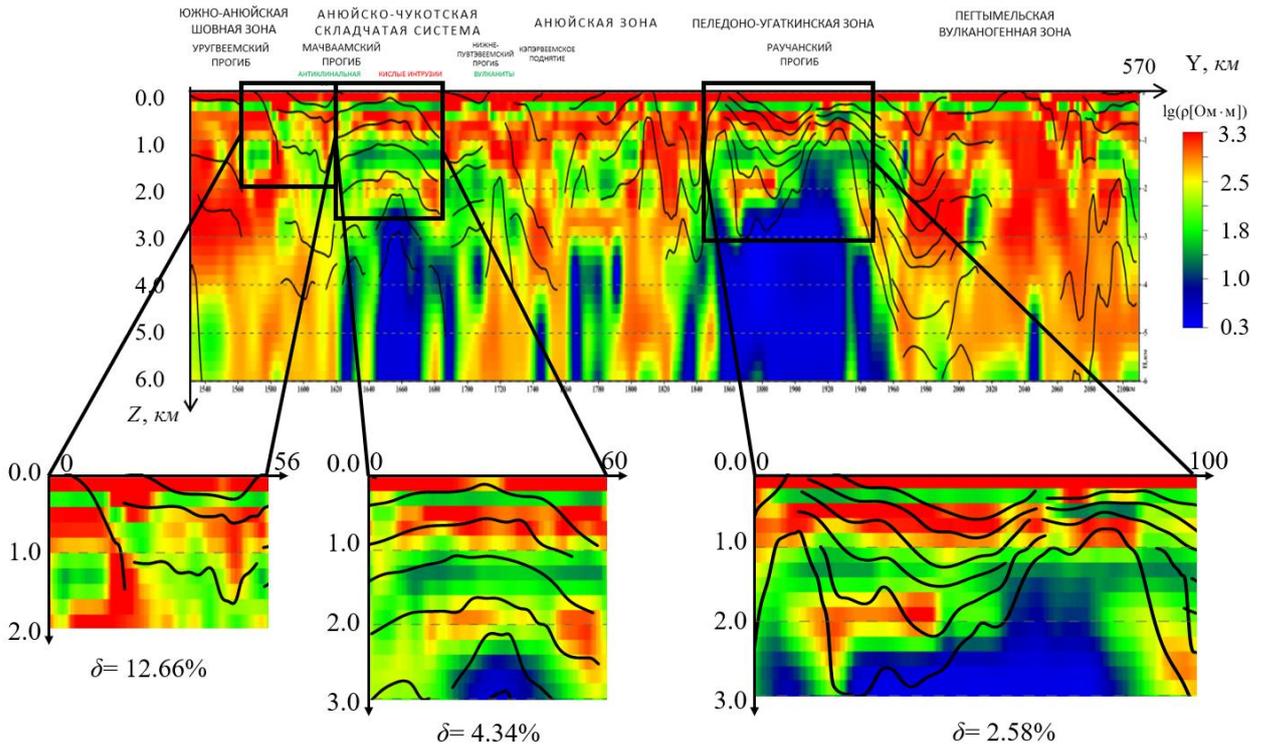


Рис.6.1.5. Геоэлектрический разрез по региональному профилю 2ДВ, Участок 2 с 1530 по 2100 км; представлено решение АНС методом; сейсмические границы отмечены черными кривыми; прямоугольниками отмечены области сравнения с сейсмическими границами.

На рис. 6.1.6 приведены разности (по модулю) полевых и синтезированных данных, нормированные на диапазон $f_{\max} - f_{\min}$ изменения соответствующих измеренных компонент импедансов по всему профилю 2ДВ. Величина уклонения данных представлена в цветовой легенде. Из рисунка видно, что для Участка 2 также, как и для Участка 1, величина уклонения полевых и синтезированных данных в основном составляет 5–25%, и только на отдельных группах данных

достигает 40–45%. Большие расхождения полевых и синтезированных данных могут объясняться, в частности, влиянием близлежащих трехмерных структур.

Таблица 6.1.2. Невязки решения для главных компонент тензора импеданса и частот по Участку 2.

ω_k , рад/с	Z_{xy}		Z_{yx}	
	RE	IM	RE	IM
99.58	7.08%	17.66%	13.01%	15.97%
44.48	8.29%	12.02%	11.46%	15.23%
19.87	10.24%	9.40%	11.63%	15.60%
8.875	9.33%	9.87%	11.74%	12.78%
3.964	7.74%	9.50%	14.30%	12.12%
1.771	8.80%	8.70%	11.89%	12.63%
0.791	10.21%	9.76%	11.13%	16.15%
0.353	15.51%	9.65%	11.99%	13.94%
0.158	32.58%	9.14%	13.90%	13.58%
0.070	39.35%	9.46%	14.52%	15.01%
0.031	36.48%	13.51%	15.22%	14.20%
0.014	33.46%	19.66%	14.67%	15.14%
0.006	32.40%	20.46%	13.45%	16.54%
AVG	Среднее = 14.77%			

Результаты сопоставления полевых и синтезированных данных показывают приемлемую погрешность решения обратной задачи в пространстве данных.

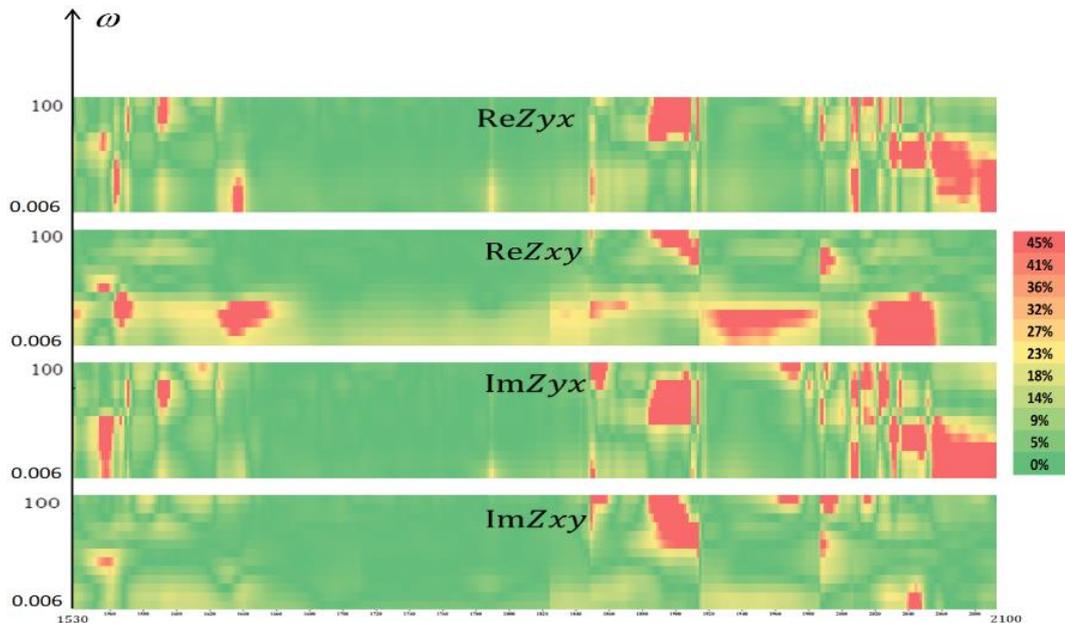


Рис.6.1.6. Иллюстрация сопоставления полевых и синтезированных данных по Участку 2 для главных компонент тензора импеданса; по горизонтали отложены номера пикетов, по вертикали – частоты.

На рис. 6.1.7 приведено сравнение НС решения с результатами интерпретации, полученными Центром ЭМИ по Участку 2. Видно, что данные, полученные разными авторами и методами, в целом вполне сопоставимы. На выделенных прямоугольниками участках наблюдается хорошее визуальное совпадение геоэлектрических структур, которое сопровождается малыми локальными невязками синтеза $\delta = 8.41\%$, $\delta = 2.03\%$.

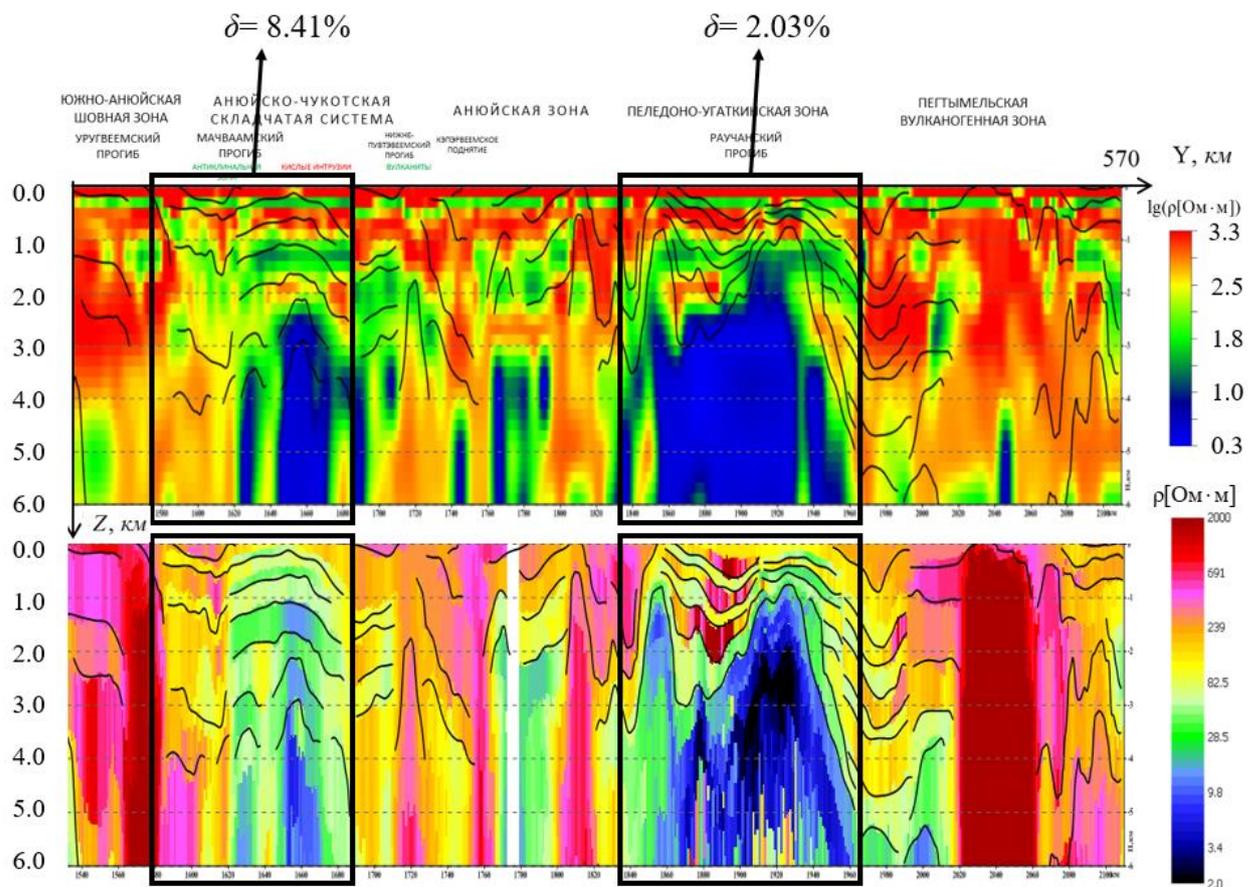


Рис.6.1.7. Сопоставление АНС решения с результатами интерпретации Центра ЭМИ по Участку 2; верхний разрез – решение АНС методом, первая итерация; нижний разрез – независимая интерпретация Центра ЭМИ. Черными прямоугольниками отмечены отдельные области сравнения АНС решения с сейсмическими границами и расчета локальных невязок.

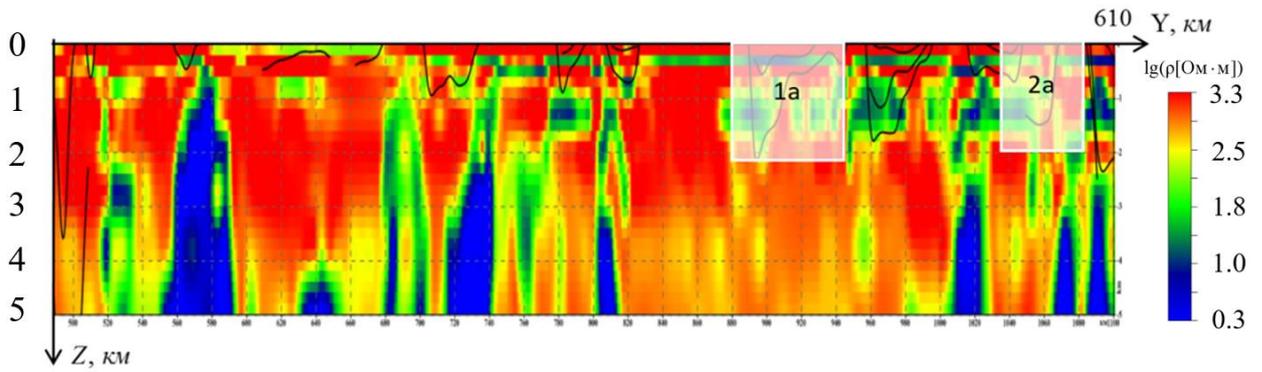
Необходимо подчеркнуть, что Ануйско-Чукотская складчатая система и Пегтымельская вулканогенная зона в пределах изучаемого участка профиля имеют сложное блочное строение. Мощные высокоомные породы приурочены к крупным

прогибам. Представленный геоэлектрический разрез верхней части характеризует неоднородную, различную по проводящим свойствам, среду и в целом достаточно хорошо согласуется с имеющимися геологическими данными. Наблюдается хорошее визуальное совпадение границ массивных плохо проводящих (красных) и хорошо проводящих (синих) структур, а также хорошая общая корреляция результатов. Выделяемые обоими методами аномалии удельного сопротивления соответствуют известным геологическим структурам, через которые проходит Участок 2 профиля (обозначенными сверху на рис. 6.1.7).

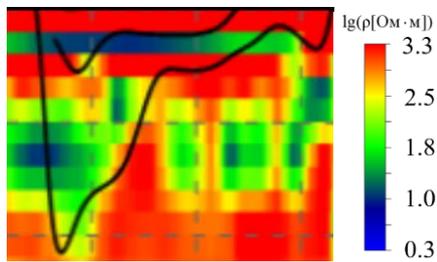
6.1.3. Детальный анализ локальных участков профиля

Примеры сопоставления с сейсмическими границами. На рис. 6.1.8 выделены подобласти 1а, 2а, 3а, 4а, иллюстрирующие качественную корреляцию решения обратной задачи, полученного АНС методом с сейсмическими границами на Участках 1 и 2 профиля 2ДВ. Для этих подобластей были рассчитаны локальные невязки, показанные в соответствующих таблицах. Приведем краткое описание выделенных подобластей.

а)



Подобласть 1а



Подобласть 2а

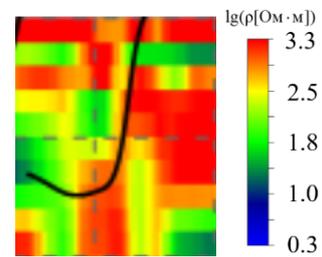
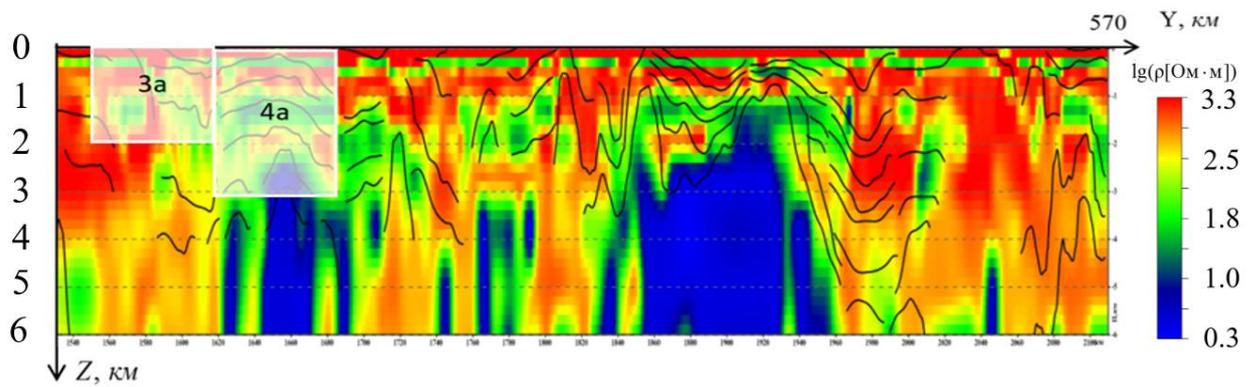


Таблица локальных невязок				
	Zxy		Zyx	
ω_{kr} рад/с	<i>RE</i>	<i>IM</i>	<i>RE</i>	<i>IM</i>
99.58	4.15%	2.46%	3.49%	4.99%
44.48	4.70%	3.48%	4.07%	5.36%
19.87	7.43%	4.97%	5.53%	3.69%
8.875	11.79%	4.53%	6.97%	3.21%

Таблица локальных невязок				
	Zxy		Zyx	
ω_{kr} рад/с	<i>RE</i>	<i>IM</i>	<i>RE</i>	<i>IM</i>
99.58	3.88%	2.92%	6.74%	6.32%
44.48	5.08%	3.68%	4.83%	8.87%
19.87	5.34%	3.69%	3.91%	6.87%
8.875	5.31%	4.75%	3.47%	4.30%

б)



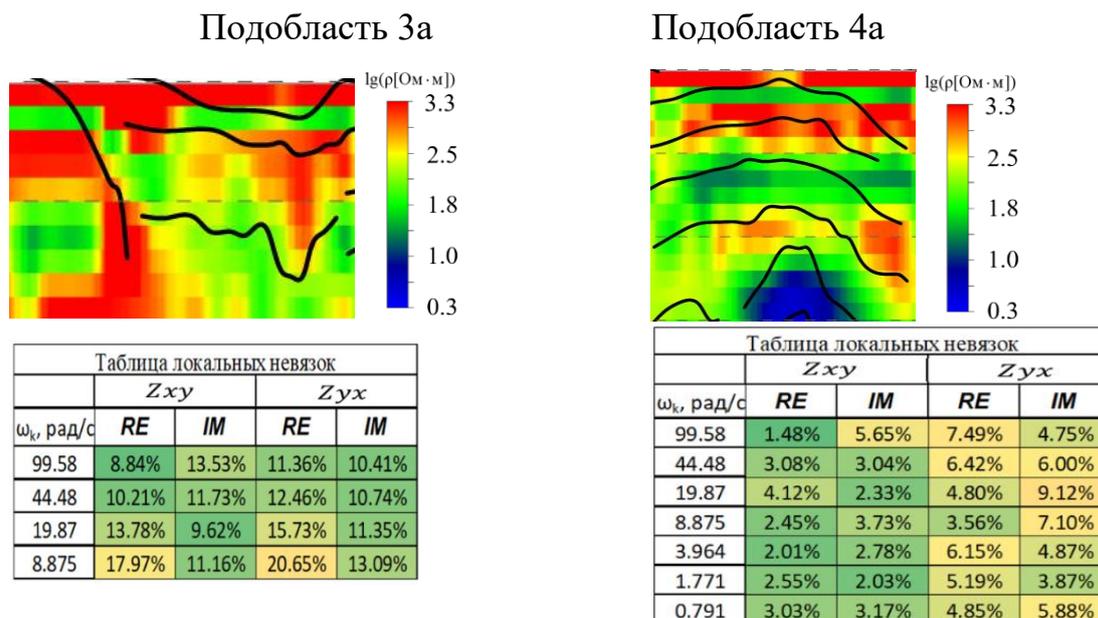


Рис.6.1.8. Выделенные подобласти, иллюстрирующие корреляцию с сейсмическими границами на Участках 1 и 2 профиля 2ДВ. Представлены результаты решения обратной задачи АИНС1 методом, первая итерация; а) Участок 1; б) Участок 2.

Подобласть 1а: протяженность по профилю 62 км, 77 точек профиля; средняя локальная невязка по подобласти $\delta = 5.05\%$.

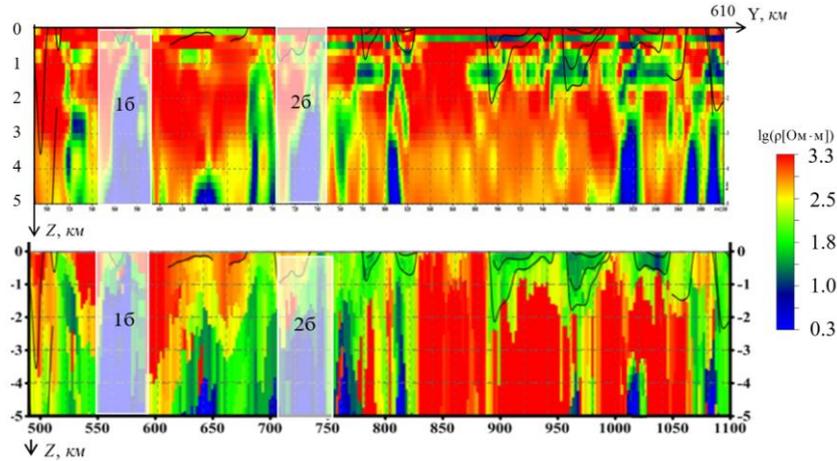
Подобласть 2а: протяженность по профилю 34 км, 43 точки профиля; средняя локальная невязка по подобласти 5.00%.

Подобласть 3а: протяженность по профилю 56 км, 71 точка профиля; средняя локальная невязка по подобласти 12.66%.

Подобласть 4а: протяженность по профилю 60 км, 75 точек профиля; средняя локальная невязка по подобласти 4.34%

Примеры сопоставления с результатами Центра ЭМИ. На рис. 6.1.9 выделены подобласти 1б, 2б, иллюстрирующие «корреляцию» полученного АНС методом решения обратной задачи с результатами независимой интерпретации Центра ЭМИ на Участках 1 и 2. Для этих подобластей были рассчитаны локальные невязки, показанные в соответствующих таблицах.

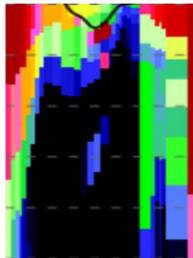
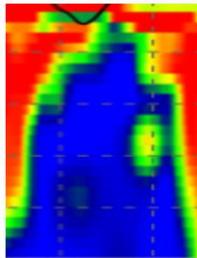
Участок 1



Подобласть 16

АНС метод

Центр ЭМИ

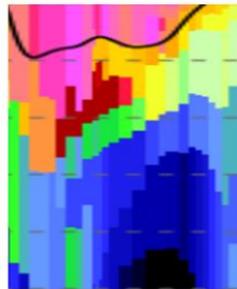
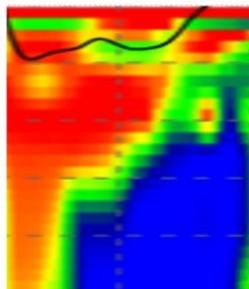


ω_k , рад/с	Таблица локальных невязок			
	Zxy		Zyx	
	RE	IM	RE	IM
99.58	4.02%	5.26%	10.42%	14.18%
44.48	2.25%	4.17%	12.11%	9.84%
19.87	1.55%	3.26%	11.51%	8.84%
8.875	1.25%	1.86%	8.93%	10.48%
3.964	1.91%	1.57%	8.13%	10.12%
1.771	2.31%	1.49%	9.27%	8.93%
0.791	3.80%	1.52%	11.02%	9.36%

Подобласть 26

АНС метод

Центр ЭМИ



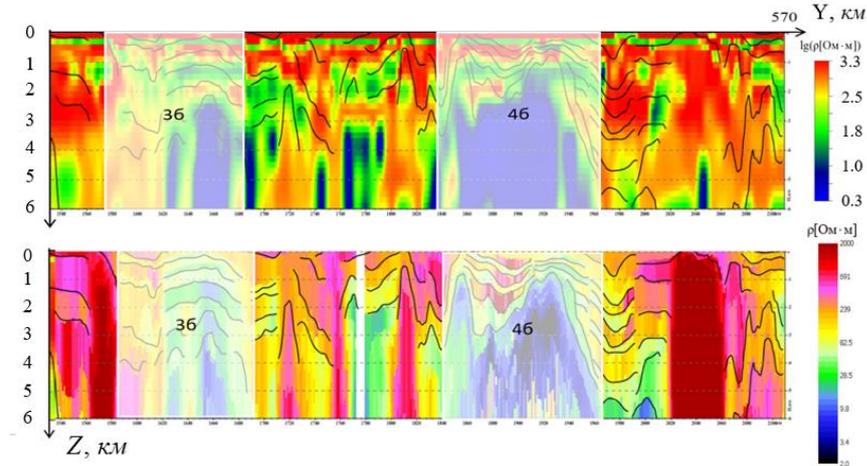
ω_k , рад/с	Таблица локальных невязок			
	Zxy		Zyx	
	RE	IM	RE	IM
99.58	4.66%	4.32%	6.99%	8.31%
44.48	4.99%	3.71%	4.69%	8.75%
19.87	3.54%	4.97%	2.53%	6.82%
8.875	2.10%	3.90%	1.10%	4.10%
3.964	1.11%	2.78%	0.90%	2.08%
1.771	0.69%	1.68%	1.14%	1.08%
0.791	1.63%	1.11%	1.52%	1.02%

Рис.6.1.9. Сопоставление решения обратной задачи АНС методом (верхний разрез) с результатами независимой интерпретации Центра ЭМИ (нижний разрез) для выделенных подобластей 16, 26 Участка 1.

Подобласть 16: протяженность по профилю 39 км, 49 точек профиля; средняя локальная невязка по подобласти 6.1%.

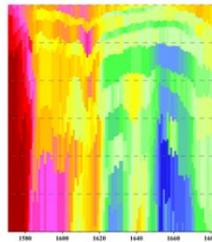
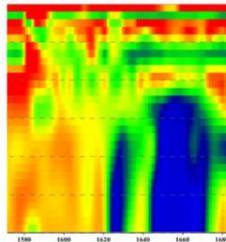
Подобласть 2б: протяженность по профилю 38 км, 48 точек профиля; средняя локальная невязка по подобласти 3.2%.

Участок 2



Подобласть 3б

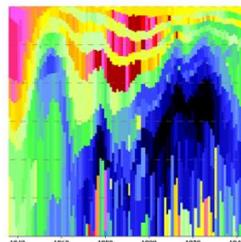
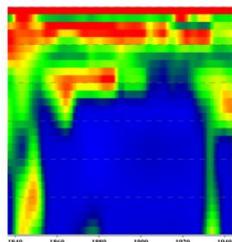
АНС метод Центр ЭМИ



ω_v , рад/с	Zxy		Zyx	
	RE	IM	RE	IM
99.58	2.45%	6.49%	8.75%	5.54%
44.48	4.05%	4.44%	8.64%	6.69%
19.87	6.95%	3.44%	9.23%	9.45%
8.875	7.61%	5.82%	10.60%	8.86%
3.964	9.45%	6.87%	13.95%	8.78%
1.771	12.01%	7.90%	10.01%	8.86%
0.791	10.82%	11.30%	8.60%	11.54%
0.353	7.30%	13.30%	9.46%	9.91%

Подобласть 4б

АНС метод Центр ЭМИ



ω_v , рад/с	Zxy		Zyx	
	RE	IM	RE	IM
99.58	1.14%	3.50%	2.34%	2.95%
44.48	1.23%	1.93%	1.87%	2.47%
19.87	1.40%	1.75%	1.34%	2.55%
8.875	1.41%	1.11%	1.14%	1.46%
3.964	0.94%	1.22%	1.03%	1.24%
1.771	1.80%	1.87%	1.04%	1.43%
0.791	4.86%	1.84%	1.67%	1.56%
0.353	9.65%	1.62%	2.67%	1.10%

Рис.6.1.10. Сопоставление решения обратной задачи АНС методом (верхний разрез) с результатами независимой интерпретации Центра ЭМИ (нижний разрез) на выделенных подобластях 3б, 4б Участка 2.

Подобласть 3б: протяженность по профилю 100 км, 125 точек профиля; средняя локальная невязка по подобласти 8.41%

Подобласть 4б: протяженность по профилю 75 км, 95 точек профиля; средняя локальная невязка по подобласти 2.03%.

6.2. Северо-Пясинский регион

В качестве примера полевых данных были взяты результаты съемки МТЗ на участках Северо-Пясинского региона Красноярского края (рис. 6.2.1), расположенных в пределах Енисей-Хатангского прогиба. Результаты съемки предоставлены генеральным директором Центра ЭМИ И.С. Фельдманом. Измеренные данные предварительно обрабатывались по методике И.С. Фельдмана [Фельдман и др. 2008]. На основе этих данных были решены:

- обратная 2D задача МТЗ; профиль ПР-3 03АII-D протяженностью 130 км (крайний слева на рис. 6.2.1);
- обратная 3D задача МТЗ, площадные данные на детальном участке размером 9500×10000 м, отмеченном прямоугольником на рис. 6.2.1.

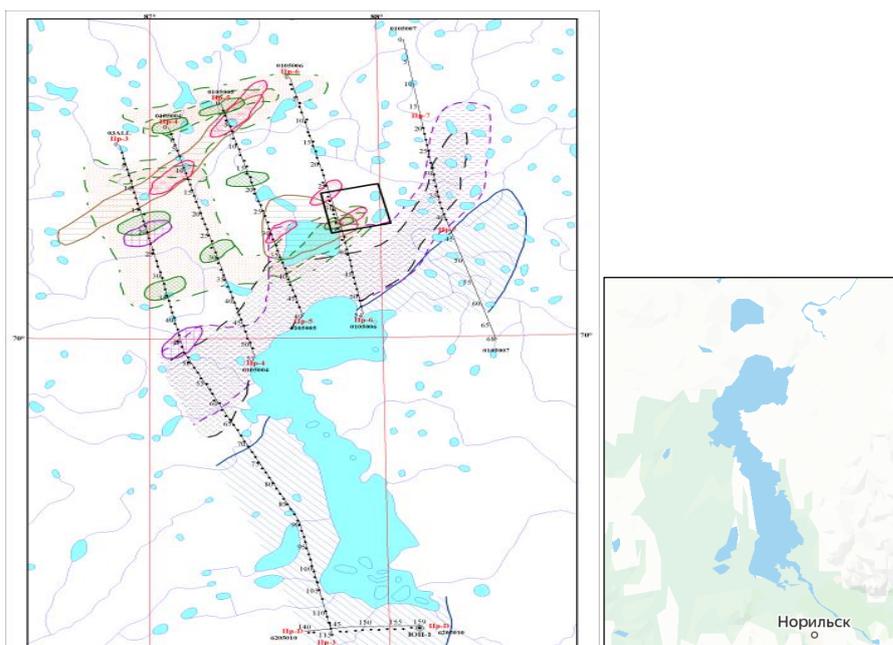


Рис.6.2.1. Площадь исследований, Северо-Пясинский регион, Красноярский край.

Представлена схема профилей прямоугольником обозначен участок детальных исследований. Рисунок справа определяет привязку к г. Норильск.

6.2.1. Профиль ПР-3 03АII-D. 2D задача

Решается двухкритериальная EH обратная 2D задача МТЗ вида (1.3.33) при совместном использовании импедансов $Z_{xy}(y, \omega)$, $Z_{yx}(y, \omega)$, которая методом общей инверсии сводится к объединенному уравнению (1.3.35). Обратная задача решалась, также, как в предыдущем пункте на основе профильных данных в квазидвумерном приближении в классе 2D сред G_2^{2D} АНС и АИНС методами. Для решения задачи также использовался аппроксиматор Ψ_{2D}^2 , который применялся путем перемещения по профилю. Первое приближение не задавалось.

На рис. 6.2.2аб представлен результат решения обратной 2D задачи АНС и АИНС1 (1-я итерации) методами на основе полевых данных. Абсолютная с весом невязка δ АНС решения составляет 17.65% и понижается на итерации АИНС1 метода (б) до величины $\delta = 13.93\%$. При этом визуальные различия в решениях незначительные. На полученный геоэлектрический разрез нанесены независимые данные сейсморазведки (белые кривые). Видно, что границы геоэлектрических структур в левой нижней части разреза, выделенные АНС методом и особенно АИНС1 методом во многом повторяют сейсмические границы. В правой части разреза также наблюдается подобие выделенных АНС и АИНС1 методами геоэлектрических структур с сейсмическими границами.

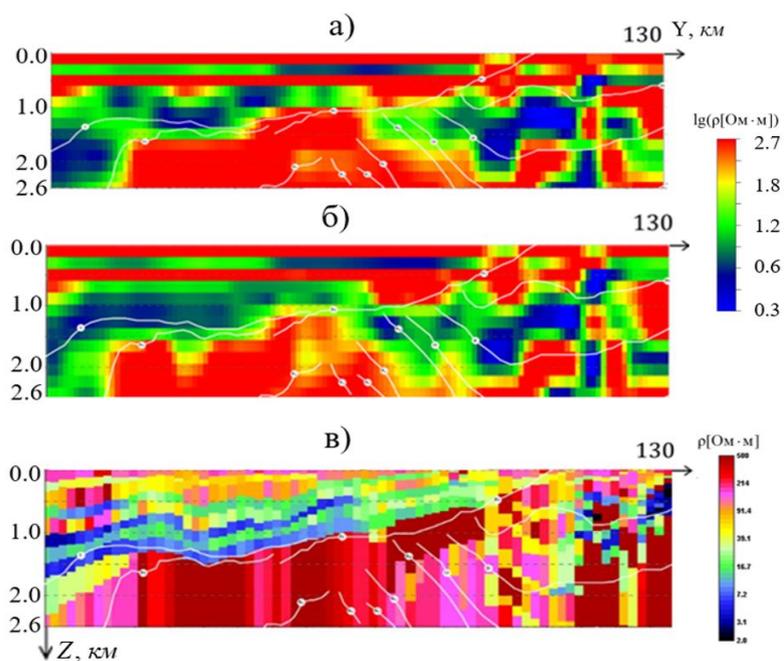


Рис.6.2.2. Геоэлектрические разрезы по профилю ПР-3 03АII-D Северо-Пясинского региона (участок 25–130 км); а), б) – решения АНС и АИНС1 методами соответственно; белыми кривыми обозначены сейсмические границы; в) независимая интерпретация Центра ЭМИ.

На рис. 6.2.2в представлен результат интерпретации, полученный Центром ЭМИ. Сопоставление этих результатов с АНС решением показывает, что границы и порядок чередования хорошо проводящих (синий и зеленый цвет) и плохо проводящих (красный цвет) структур примерно совпадают, хотя в деталях имеются значительные различия.

Отметим, что время получения решения обратной задачи АНС методом на полевых данных составило первые десятки секунд. Для получения первой итерации АИНС метода требуется дополнительное время для обучения нового аппроксиматора в окрестности решения, найденного АНС методом.

6.2.2. Участок детальной съемки. 3D задача

На рис. 6.2.3 представлена схема расположения профилей на детальном участке, для которого проводилась съемка МТ поля.

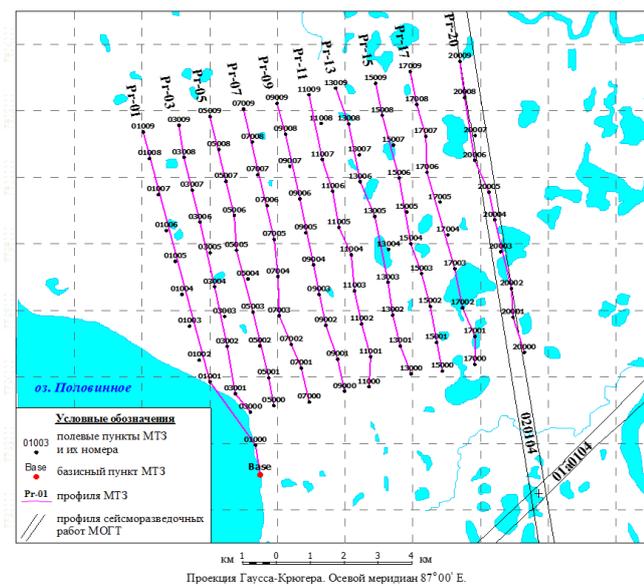


Рис. 6.2.3. Схема расположения профилей на детальном участке.

Характеристики съемки detailного участка Северо-Пясинской площади: размер участка 9500×10000 м; количество профилей 10, расстояние между профилям ≈ 1000 м, расстояние между пикетами ≈ 1000 м.

На основе этих данных решается однокритериальная обратная 3D задача геоэлектрики (1.3.28) при использовании всех компонент тензора импеданса \hat{Z} в качестве входных данных. Компонентами векторной функции данных $f(x, y, \omega) = (f^1, \dots, f^4)$ являются компоненты тензора импеданса $Z_{xx}(x, y, \omega)$, $Z_{xy}(x, y, \omega)$, $Z_{yx}(x, y, \omega)$, $Z_{yy}(x, y, \omega)$.

Решение обратной задачи ищется в классе сред G_2^{3D} (см. раздел 5.2.2.2) АНС СП методом по схеме, изложенной в разделе 4.2.5. Используется НС аппроксиматор Ψ_{3D}^2 , с помощью которого находится АНС решение (без задания 1-го приближения); это решение уточняется методом АИНС СП. Время получения АНС решения составило первые десятки секунд.

Расчет невязки. При расчетах использовались следующие нормы: в пространстве решений – норма вида (1.3.25), в пространстве данных – норма вида (1.3.31) при $M_Z = 4$; абсолютная и относительная невязки с весом вычислялись на

основе формул (3.1.36) и (3.1.37) соответственно. При этом для рассматриваемой 3D задачи весовые множители α^j в указанных формулах определялись с учетом особенностей исследуемой области Северо-Пясинского региона: уровень значений и чувствительность дополнительных импедансов Z_{xx} , Z_{yy} существенно меньше, чем главных Z_{xy} , Z_{yx} . Вследствие этого относительные невязки по дополнительным импедансам оказываются существенно больше невязок по основным импедансам, поэтому полная невязка как средняя невязка по всем компонентам объективно не отражает степени близости измеренных и синтезированных данных. В таких случаях полную невязку (абсолютную и относительную) целесообразно определять с весами, учитывающими значимость различных компонент [Дмитриев, 2005]. Зададим весовые множители α^j , определяющие вклад j -й компоненты импеданса, по формуле:

$$\alpha^j = \frac{\bar{\alpha}^j}{\alpha}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \alpha = \sum_1^4 \bar{\alpha}^j,$$

где $\bar{\alpha}^j$ – величина, определяющая уровень измеренных значений j -й компоненты импеданса по площади измерений

$$\bar{\alpha}^j = \sqrt{\sum_{k=1}^{M_\omega} \frac{1}{M_\omega} \sum_{m=1}^M |f_{m,k}^j|^2},$$

$f_{m,k}^j$ – измеренная j -я компонента тензора импеданса в m -й точке на k -й частоте;

M – число точек измерения; M_ω – число используемых частот. При такой

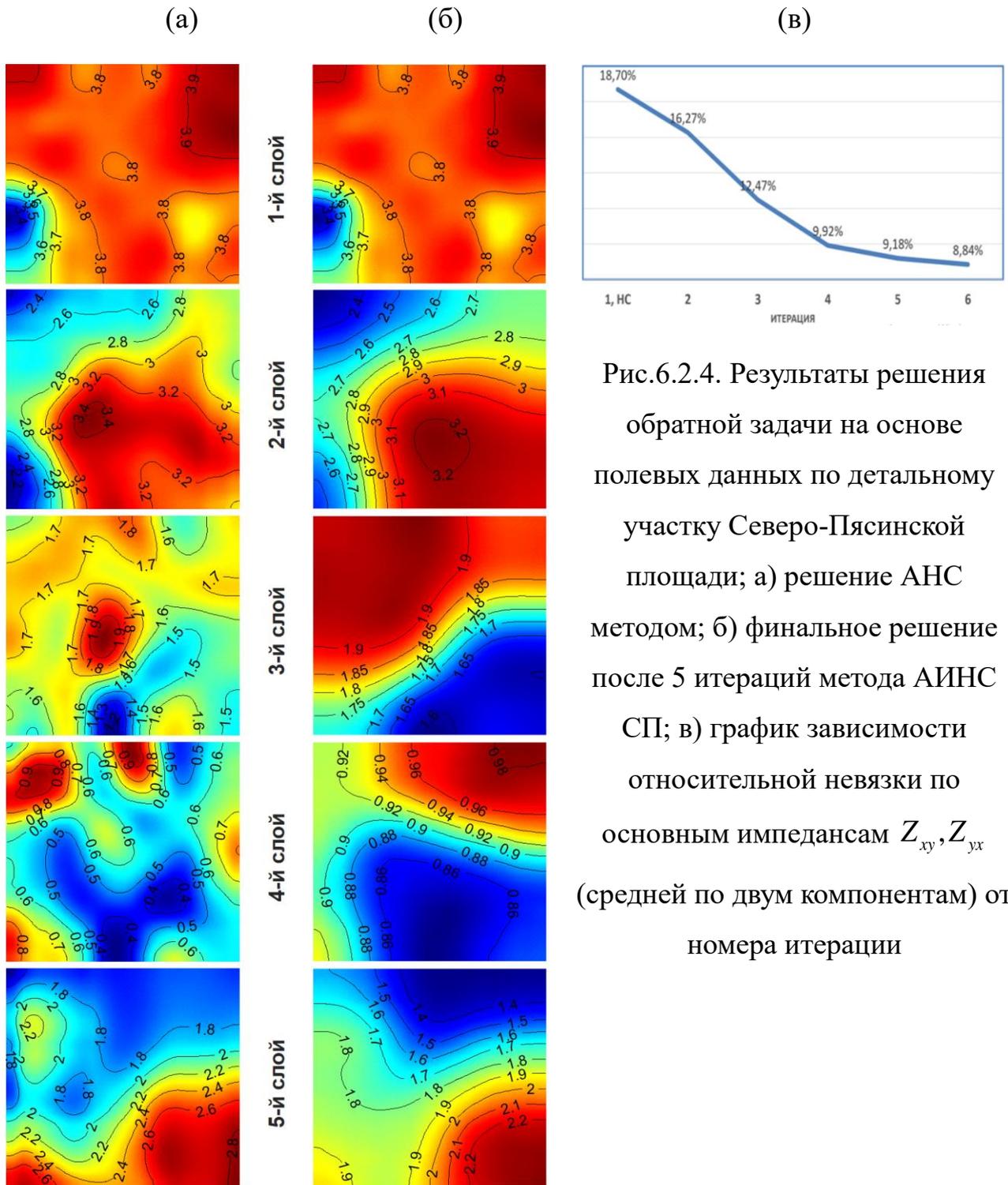
нормировке $\sum_1^4 \alpha^j = 1$, а вклад каждой компоненты α^j в общую невязку

корректируется в соответствии с уровнем ее значений. Невязки вида (3.1.36) и (3.1.37), рассчитанные с указанными нормировками по компонентам, будем называть средневзвешенными (абсолютными и относительными) невязками по всем компонентам импеданса Z_{ij} , $i, j = x, y$.

Обсуждение результатов. В табл.6.2.1 и на рис. 6.2.4 представлены результаты решения данной обратной задачи АНС (а) и АИНС СП (б) методами в виде горизонтальных сечений и изолиний $\lg \rho$. Средневзвешенные абсолютные и относительные невязки, приведены в табл. 6.2.1 и составляют 19.7% и 32.7% на АНС метода. После 5 итераций метода АИНС СП они убывают до 17% и 24.7% соответственно. Убывание полных невязок в основном обусловлено довольно быстрым убыванием совокупной невязки по главным импедансам Z_{xy}, Z_{yx} с 18.7 % до 8.84% (рис. 6.2.4в).

Таблица 6.2.1. Невязки решения. Числитель – абсолютная невязка с весами, знаменатель – относительная невязка.

Невязки решения				
	АНС решение	АИНС СП финальное решение	Центр ЭМИ первичное решение	Центр ЭМИ сглаженное решение
Средневзвешенная по всем компонентам $Z_{ij}, i = x, y$	$\frac{19.7}{32.7}$	$\frac{17.0}{24.7}$	$\frac{19.8}{41.3}$	$\frac{19.6}{41.2}$



На рис. 6.2.5 представлен пример визуального сопоставления изображений в цветовой палитре измеренных и синтезированных величин данных $|Z_{xy}|, |Z_{yx}|$, соответствующих финальному решению, по площади измерений на различных периодах.

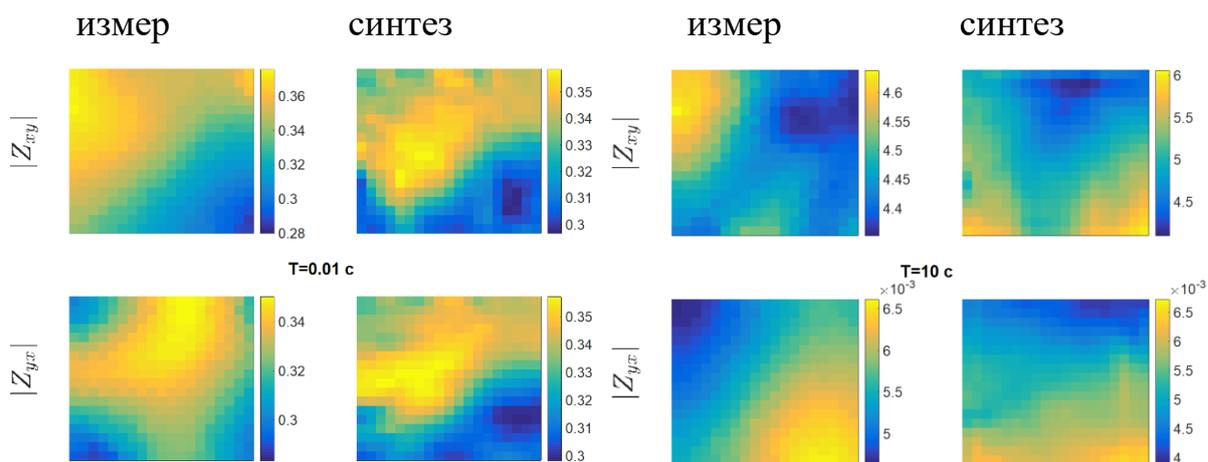


Рис.6.2.5. Пример сопоставления измеренных и синтезированных данных по площади измерений для компонент $|Z_{xy}|, |Z_{yx}|$ на периодах $T=0.01\text{с}, 10\text{с}$.

На рис. 6.2.6 для сравнения с НС решением (а) показаны результаты интерпретации, полученные Центром ЭМИ: первичное (б) и сглаженное (в) решения.

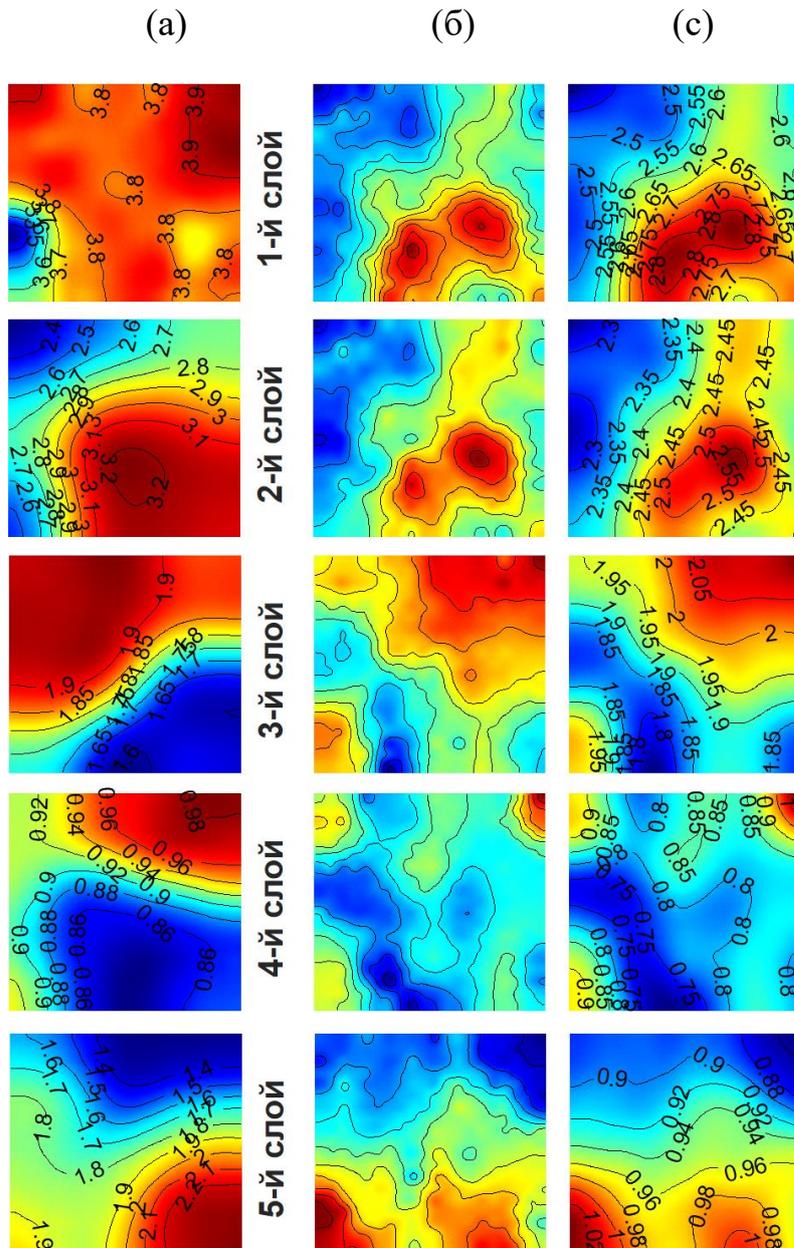


Рис.6.2.6. Результаты решения обратной задачи на основе полевых данных по детальному участку Северо-Пясинской площади; а) финальное АИНС СП решение; б), в) результаты независимой интерпретация Центра ЭМИ: первичное и сглаженное решения соответственно.

Из рисунка видно, что наблюдается некоторая «похожесть» расположения плохо проводящих (красных) и хорошо проводящих (синих) областей для 2-го, 4-го и 5-го ярусов; наибольшие несоответствия строения среды наблюдается для 1-го и 3-го ярусов.

В табл. 6.2.1 представлены невязки решений Центра ЭМИ. Первичное и сглаженное решения можно считать δ -эквивалентными, так как невязки обоих типов для этих решений практически одинаковы. Поэтому мелкие детали строения среды, показанные в первичном решении, не могут считаться гарантированно

достоверными, а отражают лишь один из возможных вариантов решения обратной задачи для полученной невязки при заданных априорных ограничениях решаемой обратной задачи.

Невязки финального АИНС СП решения 17%/24.7% меньше невязок 19.6%/41.2% результатов интерпретации Центра ЭМИ, что, по-видимому, обусловлено недостаточным учетом трехмерности среды при проведении интерпретации. С позиций «интерпретатора Центра ЭМИ» найденное НС решение можно считать возможным δ -эквивалентным решением обратной задачи с меньшей невязкой.

Апостериорные оценки неоднозначности. Для полученного финального АИНС СП решения и достигнутых невязок были построены локальные апостериорные оценки $\beta_1^i, i=1, \dots, 5$, неоднозначности решения по i -ым ярусам сетки параметризации двух типов: на основе средневзвешенной абсолютной невязки $\delta = 17\%$ и на основе средневзвешенной относительной невязки $\delta = 24.7\%$.

На рис. 6.2.7 приводится иллюстрация расчета локальной апостериорной характеристики неоднозначности β_1^5 на примере 5-го яруса сетки параметризации на основе средневзвешенной относительной невязки $\delta = 24.7\%$; точками показано имитирующее множество $\tilde{Q}_{\Delta,i}$; горизонтальная линия соответствует невязке $\delta = 24.7\%$. Среди всех точек имитирующего множества $Q_{\Delta,i}$ 5-го яруса, удовлетворяющих условию $\|\Delta f\| \leq \delta$, находится точка с максимальной абсциссой $\|\Delta s\|^{\max}$, которая принимается за приближенную оценку неоднозначности определения параметров для данного яруса (показана вертикальной линией $\beta_1^5 = 14.4\%$).

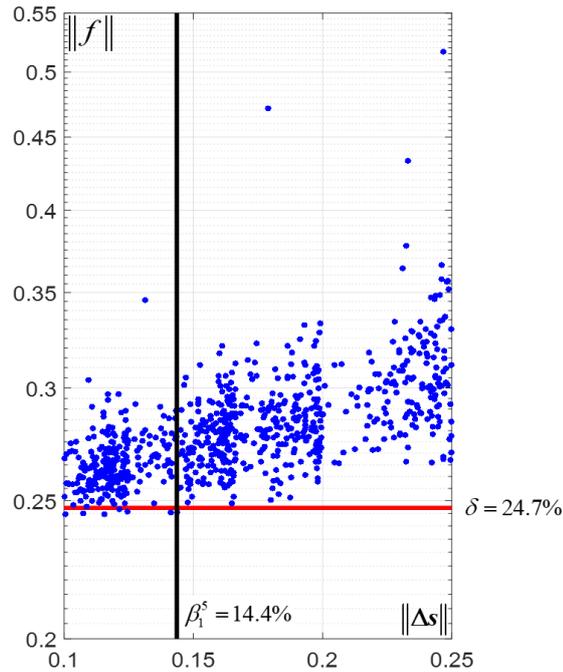


Рис. 6.2.7. Иллюстрация расчета локальной апостериорной характеристики неоднозначности β_1^5 для 5-го яруса сетки параметризации; точками показаны имитирующее множество $\tilde{\mathcal{Q}}_{\Delta,i}$; горизонтальная линия соответствуют относительной невязке $\delta = 24.7\%$, вертикальная линия определяет величину $\beta_1^5 = 14.4\%$.

На рис. 6.2.8а,б представлены найденное финальное решение (а) и наиболее удаленное (на величину β_1^i по каждому ярусу) от него решение. В колонке 6.2.8в приведены локальные апостериорные оценки β_1^i неоднозначности АИНС СП решения по ярусам сетки параметризации, определяющие максимальное возможное отклонение δ -эквивалентного решения по норме (1.3.25) от найденного, для каждого i -го яруса при достигнутых невязках: абсолютной 17.0% (числитель) и относительной 24.7% (знаменатель).

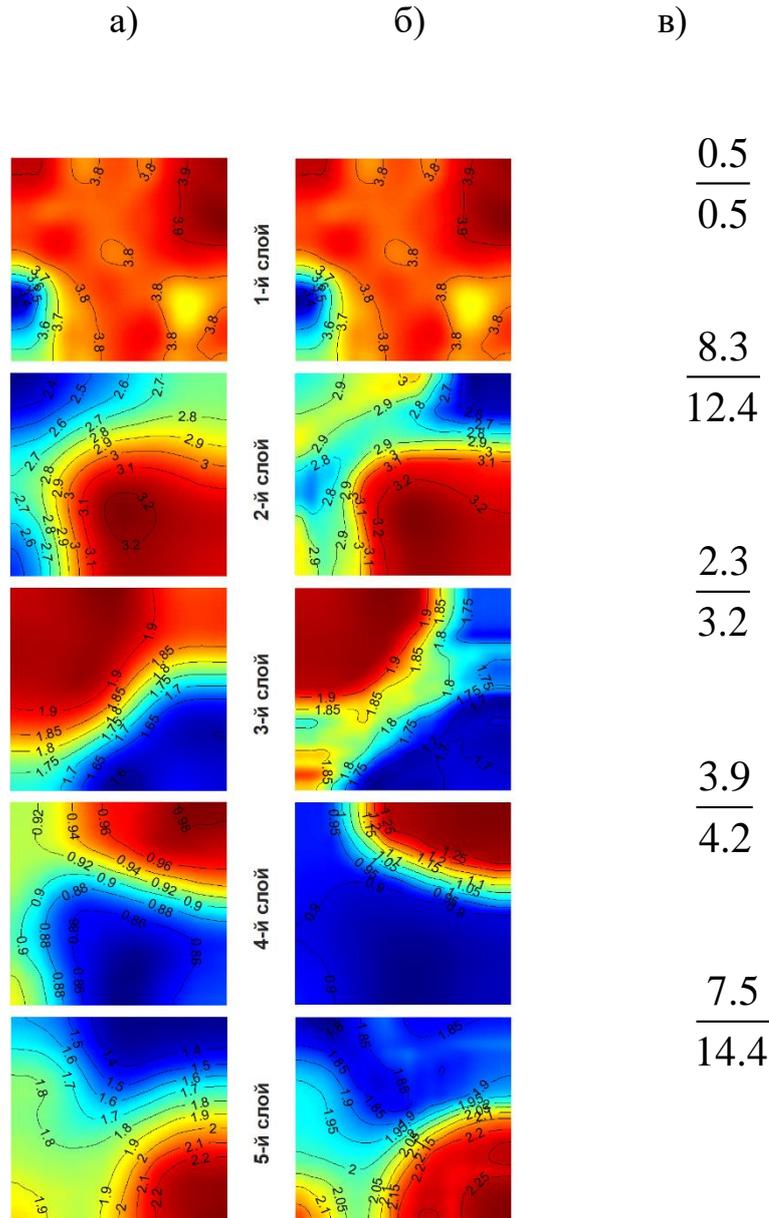


Рис. 6.2.8. Финальное АИНС СП решение (а) и решение, наиболее удаленное от финального (б); в) локальные апостериорные оценки β_1^i неоднозначности НС решения для всех ярусов сетки параметризации для абсолютной с весом невязки 17.0% (числитель) и относительной 24.7% (знаменатель).

6.3. Выводы к Главе 6

1. На полевых данных продемонстрирована возможность решать обратные 2D, 3D задачи геоэлектрики в классах сред с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления с помощью АНС метода в режиме реального времени, без задания первого приближения, с приемлемой для практики точностью.

2. На полевых данных проиллюстрирована возможность АНС метода проводить локальную 2D инверсию данных геоэлектрики, измеряемых на региональных профилях большой протяженности $n \cdot 10^3$ км.

3. Приведенные примеры решений обратных 2D-3D задач геоэлектрики на основе полевых профильных и площадных данных иллюстрируют возможность определения $\sim n \cdot 10^3$ искомым параметров среды, что существенно превышает известные результаты, получаемые нейросетевыми методами для обратных задач.

4. На полевых данных показана работа АИНС метода, позволяющего (при необходимости) уменьшить невязку решений, получаемых АНС методом и тем самым повысить эффективность метода в целом.

5. Для приближенных решений обратной задачи, полученных на основе полевых данных, вычислены апостериорные оценки неоднозначности (погрешности); эти оценки не зависят от применяемого метода инверсии, и определяют устойчивость, достоверность и объективность решений, получаемых нейросетевым «роботом».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы получены по двум направлениям:

I. Разработка современных методов оценки объективности, достоверности и состоятельности результатов интерпретации данных геоэлектрики на основе расчета априорных и апостериорных оценок неоднозначности (погрешности) получаемых приближенных решений обратной задачи геоэлектрики.

II. Развитие аппроксимационно-интерполяционных формализованных методов решения нелинейных многокритериальных 2D и 3D обратных задач геоэлектрики с использованием нейронных сетей.

I направление (1-3 Главы)

1. Исследованы свойства характеристик неоднозначности (погрешности) условно-корректных нелинейных обратных задач в классах кусочно-постоянных решений; доказано, что характеристики неоднозначности монотонно не возрастают с уменьшением размерности (детальности) сетки параметризации.

2. Исследована практическая некорректность условно-корректной нелинейной обратной задачи геоэлектрики в классах кусочно-постоянных решений на основе анализа априорных характеристик, определяемых локальным модулем непрерывности обратного оператора.

3. Разработан новый метод адаптивной практической регуляризации, основанный на построении оптимальной сетки параметризации, которая обеспечивает компромисс между детальностью аппроксимации среды и устойчивостью решений *дифференцированно по глубине исследований* при заданной априорной информации.

4. Разработан метод и алгоритмы расчета априорных и апостериорных характеристик неоднозначности решений нелинейных 2D, 3D обратных задач геоэлектрики (в том числе многокритериальных) с использованием алгоритмов Монте-Карло; исследована сходимость метода.

5. Приведены примеры численного расчета априорных характеристик неоднозначности для типовых задач интерпретации данных геоэлектрики.

6. Приведены численные примеры регуляризации обратных 2D, 3D задач геоэлектрики на основе построения оптимальной сетки параметризации с максимальной детальностью, при заданном ограничении на неоднозначность решений.

II направление (4-6 Главы)

7. Разработан новый регуляризованный АНС метод решения обратной задачи геоэлектрики, основанный на нейросетевой аппроксимации обратного оператора задачи и минимизирующий ошибку решения дифференцированно по глубине исследований; метод позволяет решать обратную задачу большой размерности в режиме реального времени без задания первого приближения.

8. Разработан новый АИНС метод уточнения решения, полученного АНС методом.

9. Разработан метод НС электромагнитного мониторинга (НСЭМ) электропроводности среды в сейсмоактивных зонах на основе локальных и/или разреженных сетей наблюдения в режиме реального времени.

10. Разработаны алгоритмы АНС, АИНС, НСЭМ методов для решения нелинейных многокритериальных обратных задач геоэлектрики и обратных задач ЭМ мониторинга в заданных классах сред с кусочно-постоянным распределением удельного сопротивления; в алгоритмах используется авторская нейросеть сверточного типа.

11. Проведен расчет трех новых банков опорных решений в классах сред с кусочно-постоянной удельной электропроводностью среды, с использованием технологий массивных вычислений и расчетов на суперкомпьютерных кластерах и графических ускорителях графических ускорителях Nvidia CUDA.

12. Разработан единый комплекс алгоритмов АНС, АИНС, НСЭМ методов, позволяющий формализовано решать нелинейные многокритериальные 2D, 3D обратные задачи геоэлектрики и обратные задачи ЭМ мониторинга.

13. Проведена серия численных экспериментов по тестированию комплекса алгоритмов на аналитических и синтезированных модельных данных задач прикладной геоэлектрики.

14. Получены решения обратных задач для полевых данных геоэлектрики, полученных методами МТЗ и АМТЗ на профильных и площадных данных; результаты подтверждают эффективность и состоятельность развиваемого аппроксимационного НС подхода к решению обратных задач геоэлектрики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдеев Д.Б.* Метод интегральных уравнений для решения прямых задач геоэлектрики. Электромагнитные исследования земных недр. М.: Научный мир. 2005. С. 11–32.
2. *Александров П. Н., Кризский В. Н.* Моделирование электромагнитного поля в горизонтально-слоистых радиально-неоднородных анизотропных средах // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование. 2020. Том 13. № 2. с. 93-107.
3. *Александров П. Н., Кризский В. Н.* Прямая и обратная задача геоэлектрики бианизотропных сред на основе объемных интегральных уравнений // Физика Земли. № 3, 2022б. С 92 - 107.
4. *Александров П.Н., Кризский В.Н.* Решение линейной коэффициентной обратной задачи геофизики на основе интегральных уравнений // Физика Земли. 2022а. № 2. 136-143
5. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1977. 368 с.
6. *Андреева Е.В., Бобачев А.А., Варенцов И.М., Верецагина М.П., Куликов В.А., Яковлев А.Г., Яковлев Д.В.* Комплексование геофизических методов при поисках медно-никелевых руд на объектах ГМК «Норильский никель» // Разведка и охрана недр. 2006. №8. С. 71–79.
7. *Аронов В.И.* Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризации залежей нефти и газа на ЭВМ. М.: Недра. 1990. 300 с.
8. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука. 1965. 408 с.
9. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.; Л: Гостехиздат, 1947. 323 с.

10. *Бабкин И.В.* Применение метода нейронных сетей для определения текущей газонасыщенности по данным ГИС // *«Каротажник»*. 2010. 5. С. 52–60.
11. *Бакушинский А.Б.* Апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // *Доклады Академии Наук*. 2011. Т. 437. № 4. С. 439–440.
12. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения: учебное пособие. М.: Изд-во Моск. Ун-та. 1989. 197 с.
13. *Бакушинский А.Б., Леонов А.С.* Новые апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. Т. 15. С. 359–367.
14. *Балк П.И.* О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*. 1980. № 6. С. 65–83.
15. *Балк П.И.* Содержательная оценка ε -эквивалентности в нелинейных обратных задачах гравиметрии // *Геофизический журнал*. 2009. Т. 31. № 6. С. 55–61.
16. *Балк П.И., Долгаль А.С.* Детерминированный подход к проблеме достоверности результатов интерпретации гравиметрических данных // *Доклады Академии наук*. 2010. Т. 431. № 1. С. 1–5.
17. *Балк П.И., Долгаль А.С.* Обратные задачи гравиметрии как задачи извлечения достоверной информации в условиях неопределенности // *Физика Земли*. 2012. № 5. С. 85–101. DOI: 10.1134/S1069351312050011.
18. *Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А.* Синтез линейной и нелинейной постановок обратной задачи в гравиразведке и магниторазведке магниторазведке // *Геофизический журнал*. 2011. Т. 33. № 5. С. 51–65.
19. *Балк Т.В.* О разрешающих способностях гравиметрического метода разведки на примере линейной обратной задачи // *Геофизический журнал*. 1981б. Т. 3, № 4. С. 18–27.

20. Балк Т.В. Об оценке надежности результатов интерпретации гравитационных аномалий по методу призм при переменной плотности // *Геология и геофизика*. 1981а. № 4. С. 119–125.
21. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука. 1983. 336 с.
22. Белявский В.В. Геоэлектрическая модель Алтае-Саянской складчатой области. Часть I Методология магнитотеллурических исследований и построение стартовой геоэлектрической модели. LAP–LAMBERT. Academic Publishing Saarbrücken, Deutschland. 2014. 251 с.
23. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И., Мерицкова Н.А. Об обратной задаче зондирования с использованием магнитотеллурических и магнитовариационных данных. М.: МАКС Пресс. 2000. 68 с.
24. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Об обратных задачах геоэлектрики. В книге: Светов Б.С. Основы геоэлектрики. М.: Издательство ЛКИ. 2008. 656 с.
25. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Обратные задачи магнитотеллурики в современной постановке // *Физика Земли*. 2004. № 4. С. 12–29.
26. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир. 2009. 680 с.
27. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И., Новиков Д.Б., Пастуцан В.В. Анализ и интерпретация магнитотеллурических данных. М.: Диалог-МГУ. 1997. 161 с.
28. Бердичевский М.Н., Жданов М.С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля земли. М.: Недра. 1981. 327 с.
29. Бердичевский М.Н., Фельдман И.С., Берзин Р.Г., Сулейманов А.К., Яковлев А.Г., Яковлев Д.В., Андреева Е.В., Сборщиков И.М., Пушкарев П.Ю. Магнитотеллурические исследования на опорном геофизическом профиле 2–ДВ // Пятые геофизические чтения имени В.В. Федынского. Москва, ГЕОН. 2003. С. 9–10.

30. Бердышев В.И. Оценка модуля непрерывности оператора $\text{grad } F$ // *Матем. заметки*. 1974. Т 16 (2). С. 349–360.
31. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 (2-е изд.). М.: Физматлит, 1962. 464 с.
32. Блох Ю.И. Проблема адекватности интерпретационных моделей в гравиразведке и магниторазведке // *Геофизический вестник*. 2004. № 6. С. 10–15.
33. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Учебное пособие. М. МГРИ–РГГРУ. 1998. 239 с.
34. Бойченко Д.А., Пушкарев П.Ю., Алексанова Е.Д., Варенцов И.М., Куликов В.А., Лозовский И.Н., Рабочая группа KIROVGRAD Одномерная и двумерная инверсия магнитотеллурических данных на западном склоне Воронежской антеклизы // Электронное научное издание «Георазрез». 2014. № 1–2014(14).
35. Будума Н., Локашо Н. Основы глубокого обучения. Создание алгоритмов для искусственного интеллекта следующего поколения — М.: «Манн, Иванов и Фербер», 2019. 304 с.
36. Булах Е.Г. Об аппроксимационных построениях при решении интерпретационных задач разведочной гравиметрии и магнитометрии. Обзор // *Физика Земли*. 2007. № 7. С. 86–96.
37. Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев. Наук. думка. 2010. 463 с.
38. Бухаров А.Б., Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Совмещенная постановка обратной задачи электромагнитного зондирования // Тезисы докладов Четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. РУДН Москва 2013. С. 394–395.
39. В. А. Винокуров. О порядке погрешности вычисления функции с приближенно заданным аргументом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1973. Т. 13. № 5. С. 1112–1123.

40. Вагин С.А., Козлова А.В., Варданянц И.Л. Двумерная инверсия магнитотеллурических данных с учётом влияния рельефа поверхности // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 4: Физика. Химия.* 2013. № 3. С. 27–35.
41. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат. 1956. 344 с.
42. Вайсборд Э.М., Юдин Д.Б. Стохастическая аппроксимация для многоэкстремальных задач в гильбертовом пространстве // *ДАН СССР.* 1968. Т. 181. № 5. С. 1034–1037.
43. Ваньян Л. Л., Бутковская А.И. Магнитотеллурическое зондирование слоистых сред. М.: Недра. 1980. 228 с.
44. Варенцов И.М. Общий подход к решению обратных задач магнитотеллурики в кусочно-непрерывных средах // *Физика Земли.* — 2002. № 11. С. 11–33.
45. Варенцов И.М., Куликов В.А., Яковлев А.Г., Яковлев Д.В. Возможности методов магнитотеллурики в задачах рудной геофизики // *Физика Земли.* 2013. Т. 1. № 3. С. 9–29.
46. Варенцов Ив.М. Общий подход к решению обратных задач магнитотеллурики в кусочно-непрерывных средах // *Физика Земли.* 2002. №11. С. 11–33.
47. Варенцов Ив.М. Разрешающая способность современных ЭМ геофизических методов с естественным возбуждением поля // *Разведка и охрана недр.* 2006. № 8. С. 66–71.
48. Варенцов Ив.М. Робастные методы совместной инверсии МТ и МВ данных в кусочно-непрерывных средах // *Электромагнитные исследования земных недр.* Научный мир Москва. 2005. С. 54–75.
49. Варенцов Ив.М., Голубев Н.Г. Об одном алгоритме конечно-разностного моделирования электромагнитных полей // *Фундаментальные проблемы морских электромагнитных исследований.* М: ИЗМИРАН, 1980. С. 169–185.

50. *Варенцов Ив.М., Голубев Н.Г.* Применение асимптотических граничных условий в задачах моделирования ЭМП в неоднородных средах // *Проблемы морских электромагнитных исследований*. М.: ИЗМИРАН, 1980. С. 77–95.
51. *Варенцов Ив.М., Соколова Е.Ю., Мартанус Е.Р., Наливайко К.В.* Система передаточных операторов электромагнитного поля для массива синхронных зондирований BEAR // *Физика Земли*. 2003. №2. С. 30–61.
52. *Васильев А.Н.* Нейросетевое моделирование в математической физике: Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Санкт–Петербург: СПбПУ. 2007. 31 с.
53. *Васильев А.Н., Тархов Д.А.* Нейронные сети как новый универсальный подход к численному решению задач математической физики // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2004. №7–8. С. 111–118.
54. *Васин В.В.* К задаче вычисления значений неограниченного оператора в В-пространствах. *Изв. вузов. Математика*. 1972. №5. С. 22–28.
55. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука. 1969. 576с.
56. *Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржин А.В.* Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. М.: Физматгиз. 2010. 672с.
57. *Винокуров В.А., Гапоненко Ю.Л.* Апостериорные оценки решений некорректных обратных задач // *ДАН СССР*. 1982. Т. 263. № 2. С. 277–280.
58. *Власов А.А.* Макроскопическая электродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 240 с.
59. *Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике.* Справочник геофизика / Под ред. Дмитриева В.И. // М.: Недра. 1990. 498с.
60. *Гавурин М.К.* Лекции по методам вычислений. М.: Наука. 1971. 248 с.
61. *Галушкин А.И.* Синтез многослойных систем распознавания образов. М.: Энергия. 1974. 368 с.
62. *Геологический факультет ВГУ. Лекция 1. ВКМ (ВА) – объект и предмет изучения [Электронный ресурс]: Режим доступа:*

<http://www.geol.vsu.ru/ecology/ForStudents/4Graduate/VAGeodinamics/EGDV-A-Lecture-01.pdf> (дата обращения 18.06.2022).

- 63.** Гласко В. Б., Старостенко В. И. Регуляризирующий алгоритм решения системы нелинейных уравнений в обратных задачах геофизики // *Физика Земли*. 1976. № 3. С. 44–53.
- 64.** Гласко В.Б., Гуцин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации А.Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений // *ЖВМ И МФ*. 1976. Т. 16. №. 2. С. 283–292.
- 65.** Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: Издательство МГУ. 1984. 366 с.
- 66.** Гласко В.Б., Кулик Н.И., Тихонов А.Н. Об определении геоэлектрического разреза на основе метода регуляризации // *ЖВМ И МФ*. 1972. Т. 12. № 1. С. 139–149.
- 67.** Годунов С.К. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах /Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилук О.П. // . Новосибирск: Наука, 1992. С. 360.
- 68.** Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилук О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. М.: Наука. 1988. 456 с.
- 69.** Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М.: Наука. 1971. 327 с.
- 70.** Гончарский А.В. Ягола А.Г. О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач // *Доклады Академии наук СССР*. 1969. Т. 184, № 4. С. 771–773.
- 71.** Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Обратные задачи астрофизики. М.: Знание. 1987. № 2. 32 с.
- 72.** Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука. 1978. 336 с.

- 73.** Горбань А.Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // *Сиб. журнал выч. матем.* 1998. Т. 1. № 1. С. 12–24.
- 74.** Граничин О.Н. Рандомизированные алгоритмы в задачах обработки данных и принятия решений // *Системное программирование.* 2011. № 6. С. 141–162.
- 75.** Гужва А.Г., Доленко С.А., Оборнев Е.А., Персианцев И.Г., Шимелевич М.И., Шугай Ю.С. Использование адаптивных алгоритмов отбора существенных признаков при нейросетевом решении обратной задачи электроразведки // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение.* 2010. № 3. С. 46–54.
- 76.** Гурвич И.И., Боганик Г.Н. Сейсмическая разведка. М.: Недра. 1980. 551 с.
- 77.** Гусаров А.Л. К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред // В сб. "Математические модели задач геофизики". Под ред. В.И.Дмитриева, Е.В. Захарова. М., Изд-во МГУ. 1981. С. 31-61.
- 78.** Денчев Р. Об устойчивости линейных уравнений на компакте // *ЖВМ И МФ.* 1967. Т. 7, № 6. С. 1367–1370.
- 79.** Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений: пер. с англ. М.: Мир. 1984. 333 с.
- 80.** Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
- 81.** Дмитриев В.И. Многомерные и многокритериальные обратные задачи магнитотеллурического зондирования // *Электромагнитные исследования земных недр /* Под ред. В.В. Спичака. М.: Научный мир, 2005. С. 33-54.
- 82.** Дмитриев В.И. О двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования неоднородной среды // *Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.* Москва: ООО "МАКС Пресс". 2017. С. 5–17.

- 83.** *Дмитриев В.И.* О единственности решения трёхмерной обратной задачи электромагнитного зондирования // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва: ООО "МАКС Пресс". 2018. С. 5–20.
- 84.** *Дмитриев В.И.* Обратные задачи геофизики. Монография. М.: МАКС Пресс. 2012. 340 с.
- 85.** *Дмитриев В.И.* Обратные задачи электромагнитных методов геофизики // *Некорректные задачи естествознания*. М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 54–77.
- 86.** *Дмитриев В.И.* Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ. 1969. 134с.
- 87.** *Дмитриев В.И., Бердичевский М.Е., Кокотушкин Г.А.* Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ 1975. 101 с.
- 88.** *Дмитриев В.И., Кокотушкин Г.А.* Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ. 1971.
- 89.** *Дмитриева М.В.* Численное моделирование альфвеновского нагрева плазмы в торе / Дмитриева М.В. Елфимов А.Г., Иванов А.А. и др. // Препринт №51. М. ИПМ АН СССР. 1988.
- 90.** *Дмитриева М.В.* Численное моделирование физических процессов в плазме установок токамак при воздействии электромагнитных волн альфвеновского диапазона частот. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М. ИПМ АН СССР. 1985. 142 с.
- 91.** *Долгаль А.С.* Аппроксимационные преобразования естественного электрического поля / *Геофизика*. 2001. № 6. С. 53–58
- 92.** *Долгаль А.С., Балк Л.И., Деменев А.Г., Мичурин А.В., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Христенко Л.А., Шархимуллин А.Ф.* Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // *Вестник Краунц. Науки о земле*. 2012. № 1(19). С. 108–127.

93. Долгаль А.С. Аппроксимации геопотенциальных полей эквивалентными источниками при решении практических задач // *Геофизический журнал*. 1999. Т. 21. № 4. С. 71–80.
94. Дорофеев К. Ю., Титаренко В. Н., Ягола А. Г. Алгоритмы построения апостериорных погрешностей решения для некорректных задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2003. Т. 43. №1. С 12–25.
95. Дорофеев К.Ю. Метод решения некорректно поставленных задач при условии истокообразной представимости точного решения и его применение к задаче катодолюминесцентной микротомографии. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М. МГУ. 2003. 122 с.
96. Дорофеев К.Ю., Ягола А.Г. Апостериорная оценка решения некорректных задач при условии истокообразной представимости точного решения // Шестая конференция "Обратные и некорректно поставленные задачи". М.: МГУ. 2000. С. 26.
97. Дунин–Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М.: Гостехиздат. 1955. 556 с.
98. Емельянов С.О. Методы аугментации обучающих выборок в задачах классификации изображений / Емельянов С.О., Иванова А.А., Швец Е.А., Николаев Д.П. // *Сенсорные системы*. 2018. Т. 32. № 3.
99. Ермаков С.М. Метод Монте–Карло и смежные вопросы // М.: Наука. 1975. 472 с.
100. Ермаков С.М., Сипин А.С. Метод Монте–Карло и параметрическая разделимость алгоритмов. Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2014. 248 с.
101. Ершов Н.А., Попов В.В. Разрешающая способность геофизических методов исследования скважин // *Каротажник*. 2010. № 5. С. 150–158.
102. Жамалетдинов А.А. Магнитотеллурический метод изучения строения массивов горных пород. Учебное пособие. 2014. 104 с.

103. Жданов М.С. Геофизическая электромагнитная теория и методы // М.: Научный мир. 2012. 680 с.
104. Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике // М.: Научный мир. 2007. 712 с.
105. Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Крылов В.А. Методы моделирования электромагнитных полей (Материалы международного проекта СОММЕМІ). М.: Наука. 1990. 198 с.
106. Жданов М.С., Варенцов Ив.М. Интерпретация локальных геомагнитных аномалий методом стягивающихся поверхностей // *Геология и геофизика*. 1978. №7. С.54–63.
107. Жданов М.С., Варенцов Ив.М., Голубев Н.Г. Применение метода финитных функций для решения двумерной обратной задачи электромагнитной индукции. в кн. Алгоритмы и программы решения прямых и обратных задач электромагнитной индукции в Земле. М. ИЗМИРАН. 1983. С. 31–46.
108. Жданов М.С., Голубев Н.Г. Решение обратных задач геоэлектрики итерационным методом подбора. в кн. Фундаментальные проблемы морских электромагнитных исследований. М. ИЗМИРАН. 1980. С. 186–192.
109. Жданов М.С., Спичак В.В. Математическое моделирование электромагнитных полей в трехмерно–неоднородных средах. М: Наука. 1992. 188 с.
110. Жданов Э.Р., Маликов Р.Ф., Хисматуллин Р.К. Компьютерное моделирование физических явлений и процессов методом Монте–Карло: Учебно–метод. пособие. Уфа: Изд–во БГПУ. 2005. 124 с.
111. Зингер Б.Ш., Файнберг Э.Б. Электромагнитная индукция в неоднородных тонких слоях. М.: ИЗМИРАН. 1985. 324 с.
112. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2–е. М.: ФАЗИС. 1997. 554 с.
113. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. М.: Наука. 1984. 640 с.

114. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // *Математический сборник*. 1963. Т. 61(103). № 2. С. 211–223.
115. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 200 с.
116. *Иванов В.К., Королюк Т.И.* Об оценке погрешностей при решении линейных некорректно поставленных задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1969. Т. 9. № 1. С. 35–49.
117. *Иванов П.В.* Исследование глубинной электропроводности в окрестности Оршанской впадины: двухмерная инверсия синтетических и наблюдаемых магнитотеллурических данных методом REBOSS / П.В. Иванов, И.М. Варенцов, С.Ю. Колодяжный [и др.] // *Физика Земли*. 2022. Т. 68. № 5. С. 26–44. DOI 10.31857/S0002333722050179.
118. *Иванов П.В., Пушкарев П.Ю.* Возможности интерпретации магнитотеллурических данных, полученных на одиночном профиле, при изучении трехмерно–неоднородной среды // *Физика Земли*. 2010. № 9. С. 3–10.
119. *Иванов В. К.* О равномерной регуляризации неустойчивых задач // *Сибирский матем. ж.*, 1966. 7. № 3. С. 547–558.
120. *Ивахненко А. Г., Лапа В. Г.* Кибернетические предсказывающие устройства. К.: «Наукова думка», 1965. 216 с.
121. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: Учебник для вузов, часть II. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002. 648 с.
122. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд–во. 2009. 457 с.
123. *Каминский А.Е., Ерохин С.А., Шлыков А.А.* Совместная двумерная инверсия данных электротомографии и РМТ/АМТ // *Геофизика*. 2015. № 4. С. 32–39.

124. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский математический журнал*. 1962. Т.Ш. №5. С. 701–709.
125. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика // УМН. 1948. Т. 3. Вып.6(28). С. 89–185.
126. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1984. 408 с.
127. *Керимов И.А.* Метод F-аппроксимаций при решении задач гравиметрии и магнитометрии. М.: Физматлит. 2011. 262 с.
128. *Керимов И.А., Степанова И.Э., Раевский Д.Н.* Комбинированные аппроксимационные методы решения задач гравиразведки и магниторазведки // *Геология и геофизика Юга России*. 2018. № 3. С. 37–50
129. *Кобрунов А.И.* О проблеме параметризации в математических моделях геологических сред при решении обратных задач // *Геофизический журнал*. 2001. Т.23. № 5. С. 3–12.
130. Кобрунов, А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных [Текст]: учеб. пособие / А.И. Кобрунов. – Ухта: УГТУ, 2007. - 286 с.
131. *Ковтун А.А., Варданянц И.Л.* Мощность литосферной плиты и параметры астеносферы скандинавского щита по данным эксперимента BEAR // *Физика Земли*. 2015. № 4. С. 38–50.
132. Кокс А., Харт Р. Тектоника плит. Москва.Мир. 1989. 427 стр.
133. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // *Докл.АН СССР*. М. 1957. Т. 114. № 5. С. 953–956.
134. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов // *Теория информации и теория алгоритмов*. М.: Наука, 1987. 304 с.
135. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1972. 496 с.

136. *Кондратьев И.К., Лисицын П.А., Киссин Ю.М.* Детальность и точность решений в задаче сейсмической волновой инверсии / *Геофизика*. 2005. № 3. С. 19–25.
137. *Кондратьев О.К.* Разрешающая способность сейсморазведки МОВ–ОГТ/ *Геофизика*. 2006. № 6. С. 3–12.
138. *Корженевский А.В.* Использование искусственных нейронных сетей для решения обратных задач электроимпедансной и магнитоиндукционной томографии [Электронный ресурс] // *Журнал радиоэлектроники*. 2001. № 12. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/win/dec01/7/text.html>
139. *Коркина Л. Ф.* Об оценке погрешности при решении некорректно поставленных задач/ *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1974. Т. 14. № 3. С. 584–597
140. *Коркина Л.Ф.* Оценка модуля непрерывности обратного оператора. *Матем. зап. Уральск, ун–т*. 1969. 7. № 2. С. 76–87.
141. *Куликов В. А.* Геоэлектрическая модель Южного Приладожья по результатам 3D-инверсии магнитотеллурических данных /Куликов В. А., Ионичева А. П., Колодяжный С. Ю., Соколова Е. Ю., Пушкарев П. Ю., Яковлев А. Г// *Физика Земли*. 2022. № 5. С. 45–59.DOI 10.31857/S0002333722050192.
142. *Куликов В.А., Каминский А.Е., Яковлев А.Г.* Совместная двумерная инверсия данных электротомографии и аудиоманнитотеллурических зондирований при решении рудных задач // *Записки Горного института*. 2017. Т. 223. С. 9–19. DOI: 10.18454/PMI.2017.1.9.
143. *Куликов В.А., Яковлев А.Г.* Практическое применение магнитотеллурических методов в рудной геофизике // *Разведка и охрана недр*. Недра (М.). 2011. № 3. С. 26–33.
144. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд–во АН СССР. 1962. 92 с.

145. *Лаврентьев М.М. Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики. М.: Наука. 1980. 286 с.
146. *Лаврентьев М.М.* Условно–корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ. 1973. 71 с.
147. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 408 с.
148. *Ландсберг Г.С.* Общий курс физики. Оптика. М.: Наука. 1976. 928 с.
149. *Леонов А. С., Ягола А. Г.* Оптимальные методы решения некорректных задач с истокообразно представимыми решениями // *Журнал фундаментальной и прикладной математики*. 1998. Т. 4. № 5 С. 1029–1046.
150. *Леонов А.С.* Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризирующих алгоритмах // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. Т. 11. С. 14–24.
151. *Леонов А.С.* Экстраоптимальные методы решения некорректно поставленных задач: обзор теории и примеры // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020. Т. 60. № 6. – С. 985-1012. DOI: 10.31857/S004446692006006X.
152. *Леушканова К.А., Фельдман И.С.* Комплексование геолого–геофизических данных с целью выявления перспективных участков нефтегазоносности в пределах Непско–Ботуобинской антеклизы // *Сборник Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 41–й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского*. 2014. С. 134–136.
153. *Лисицын В.М., Юдаев А.В.* К вопросу решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом случайного поиска // *Проблемы случайного поиска (сб.), № 1, «Зинатне»*. Рига, 1972. С. 155–166.
154. *Лисковец О.А.* Некорректные задачи с замкнутым необратимым оператором // *Дифференц. ур-ния*. 1967. Т.3. № 4. С. 636—646.

155. Любушин А.А., Калаб З., Частова Н. Использование вейвлет-анализа для автоматической классификации трехкомпонентных сейсмических записей // *Физика Земли*. 2004. № 7. С. 50-56.
156. Любушин А.А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М. Наука, 2007. 228 с.
157. Любушин А.А. Кластерный анализ свойств низкочастотного микросейсмического шума // *Физика Земли*. 2011. № 6. С. 26–34.
158. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа. 1982. 271 с.
159. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.
160. Марков Г.Т., Чаплин, А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М–Л.: Изд-во Энергия. 1967. 376 с.
161. Матюков В.Е. Практические результаты электромагнитного мониторинга сейсмоактивных зон (обзор). Вестник КРСУ. 2011. Том 11. № 4. С.15-23.
162. Мороз Ю.Ф., Гонтовая Л.И. Глубинное строение Южной Камчатки по геофизическим данным. Геодинамика и вулканизм Курило-Камчатской островодужной системы. ИВГиГ ДВО РАН, Петропавловск -Камчатский, 2001 г., 428с.; УДК 551.21+552+550.34
163. Мороз Ю.Ф., Мороз Т.А., Мандельбаум М.М. и др. Мониторинг электромагнитного поля Земли в районе озера Байкал // Мат. конф. “Активный геофизический мониторинг литосферы Земли”. Новосибирск, 2005. С. 124-128.
164. Мороз Ю.Ф., Нурмухамедов А.Г. Магнитотеллурическое зондирование Петропавловского геодинамического полигона на Камчатке // *Вулканонология и сейсмология*. 1998. N 2. С.77-84.

165. Мороз Ю.Ф., Нурмухамедов А.Г., Лощинская Т.А. Магнитотеллурическое зондирование земной коры Южной Камчатки // Вулканология и сейсмология. 1995. №4-5. С.127-139.
166. *Неведрова Н.Н., Шалагинов А.Е.* Мониторинг электромагнитных параметров в зоне сейсмической активизации горного алтая // *Геофизика*. 2015. № 1. С. 31–40.
167. *Неведрова Н.Н., Эпов М.И., Дашевский Ю.Л.* Определение структуры массива горных пород и результаты активного электромагнитного мониторинга на Байкальском прогностическом полигоне // *Геомеханика, ФТПРПИ СО РАН*. №3.2004. С. 29-44.
168. *Никитин А.А.* Детерминированность и вероятность в обработке и интерпретации геофизических данных // *Геофизика*. 2004. № 3. С. 10–16.
169. *Никитин А.А.* Теоретические основы обработки геофизической информации. М.: Недра. 1986. 342 с.
170. *Никитин А.А., Хмелевской В.К.* Комплексирование геофизических методов. Учебник. М.: Изд-во ВНИИГеосистем, 2012. 344 с.
171. *Николаева Н.Н., Рычагов М.Н., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости в многоплоскостных измерительных модулях // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2004. Т. 44. № 1. С. 23–34.
172. *Николаева Н.Н., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2003. Т. 6. № 2. С. 171–180.
173. *Новик О. Б., Еришов С.В.* Электромагнитные и тепловые сигналы из недр земли (физика предвестников землетрясений). М.: Издат. дом "Круглый год". 2001. 255 с.

- 174.** *Новик О.Б.* Математические вопросы сокращения числовой геофизической информации при поисках нефти и газа. Деп в ВИЭМС РАН. 02.11.87. №485–МГ. М.: ВИЭМС РАН, 1987.
- 175.** *Новик О.Б., Ершов С.В., Волгин М.Н., Новик А.О., Смирнов Ф.А.* Элементы теории магнитной локации сейсмического очага // Сборник материалов II Школы–конференции Гординские чтения. Москва, ИФЗ РАН. 2012. С. 139–144.
- 176.** *Оборнев Е.А.* Инверсия двумерных магнитотеллурических данных на основе нейросетевой аппроксимации. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: РГГРУ, 2007. 141 с.
- 177.** *Оборнев И.Е.* Повышение эффективности интерпретации данных МТЗ на основе использования нейронных палеток. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: МГРИ-РГГРУ, 2013. 155 с.
- 178.** *Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А., Шимелевич М.И.* Применение нейронных сетей в нелинейных обратных задачах геофизики // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020. Т. 60. № 6. С. 1053–1065. DOI: 10.31857/S0044466920060071.
- 179.** *Оборнев Е.А., Шимелевич М.И., Доленко С.А., Шугай Ю.С.* Классификация магнитотеллурических данных с использованием нейросетевого метода // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 2007. № 5. С. 60–68.
- 180.** *Павлов Д.Ю.* Решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности с помощью нейросети // *Вест. МГУ, Серия 15 ВМК*. № 4. 1994. С. 51–56.
- 181.** *Пашкевич Р.И., Павлов К.А.* О размере, глубине залегания и свойствах магматического очага Авачинского вулкана // *ГИАБ*. 2014. №S2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-razmere-glubine-zaleganiya-i-svoystvah-magmaticheskogo-ochaga-avachinskogo-vulkana>.

- 182.** *Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Вагин Д.В., Симон Е.И., Шашкова Т.Г.* О сравнении двух подходов к 3D-инверсии данных электромагнитных зондирований во временной области [Электронный ресурс] // Материалы VI Всероссийской школы-семинара по электромагнитным зондированиям Земли имени М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна (ЭМЗ-2013). Новосибирск: ИНГГ СО РАН, 2013. Режим доступа: <http://ems2013.ipgg.sbras.ru>, свободный.
- 183.** *Персова М.Г.* Конечноэлементное моделирование электродинамических процессов в задачах геоэлектрики и электромеханики: Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Новосибирск: НГТУ. 2009. 42 с.
- 184.** *Потапов В.В.1, Поспеева Е.В.* Электромагнитный мониторинг методом МТЗ в эпицентральной зоне Чуйского землетрясения. ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ. 2017.Т.2. № 3 С.167-171.
- 185.** *Пугин А.В.* Компьютерные технологии интерпретации геопотенциальных полей на основе аналитических аппроксимаций и вейвлет-анализа. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург: Горный институт УрО РАН. 2007. 26 с.
- 186.** *Пьянков А.А.* Коэффициент разрешенности. Новые геотехнологии для старых провинций. Материалы международной научно-практической конференции. Тюмень. EAGE. 2013. С. 96–99.
- 187.** *Пьянков А.А.* Оценка разрешающей способности сейсмических изображений на основе применения нового атрибута // *Современные проблемы науки и образования*. 2013. №6. С.942–948.
- 188.** *Пьянков А.А.* Разрешенность сейсмических данных // Геология и нефтегазоносность Западно-Сибирского мегабассейна. Опыт, инновации: Материалы Восьмой Всероссийской научно-технической конференции

- (посвященной 100-летию со дня рождения Муравленко Виктора Ивановича), Тюмень, 24 декабря 2012 года. Тюмень: ТГНГУ. 2012. С. 84–87.
- 189.** Ревунова Е.Г. Восстановление сигналов, полученных косвенными измерениями, на основе усеченного сингулярного разложения и случайного проецирования // УСиМ.2016.№ 5.С.10-24.
- 190.** *Рокитянский И.И.* Моделирование в геоэлектрике.1. Неоднозначность // *Геофиз. журнал.* 1985. Т. 7. № 1. С. 15–24.
- 191.** *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука. 1991. 302 с.
- 192.** *Ротштейн А.П., Митюшкин Ю.И.* Идентификация нелинейных зависимостей нейронными сетями // Проблемы бионики. 1998. № 49. С. 168–174.
- 193.** *Сараев А.К., Антащук К.М., Никифоров А.Б., Прокофьев О.М., Романова Н.Е., Денисов Р.В.* Возможности аудиоманнитотеллурических зондирований при решении структурных и поисковых задач в алмазоносных районах // *Вопросы геофизики.* 2010. 443(43). С. 126–158.
- 194.** Сараев А.К., Никифоров А.Б., Романова Н.Е., Еремин И.С. Изучение геоэлектрического строения п–ова Рыбачий (мурманская обл.) по данным аудиоманнитотеллурических зондирований с бесконтактными электрическими антеннами // *Вопросы геофизики.* Вып. 44. СПб. (Ученые записки СПбГУ; № 444). 2011. С. 133–147.
- 195.** *Светов Б.С.* Основы геоэлектрики. М.: Издательство ЛКИ. 2008. 656 с.
- 196.** *Светов Б.С., Каринский С.Д., Кукса Ю.И., Одинцов В.И.* Магнитотеллурический мониторинг геодинамических процессов // *Изв. РАН, Физика Земли.* 1997. № 5. С. 36-46.
- 197.** *Светов Б.С., Шимелевич М.И.* Определение линейных связей между компонентами магнитотеллурического поля - основные принципы // *Известия Академии Наук СССР. Серия Физика Земли.* 1982. № 5. С. 59–67.

198. *Свешников А.Г.* Дифракция на ограниченном теле. // *ДАН СССР*. Т. 184. № 1. 1969. С. 63–65.
199. *Соболев А.Ю.* Компьютерная система для имитации и интерпретации данных высокочастотных электромагнитных каротажных зондирований. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Новосибирск.: ИНГГ СО РАН. 2008. 17 с.
200. *Соболев Г.А.* Основы прогноза землетрясения. М.: Наука, 1993. 313 с.
201. *Соболь И.М.* Численные методы Монте–Карло. М.: Наука. 1973. 312 с.
202. *Соколова Е.Ю.* Разработка новых методик анализа данных глубинных ЭМ зондирований и их приложение в регионах со сложным геоэлектрическим строением. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: ОИФЗ РАН. 2002. 205 с.
203. *Сорохтин О.Г.* Глобальная эволюция Земли, М.: Наука, 1974. 183 с.
204. *Стичак В.В.* Дифференциальные краевые условия для электрического и магнитного полей в неограниченной проводящей среде // *Электромагнитные зондирования Земли*. ИЗМИРАН Москва, 1985. С. 61–68.
205. *Стичак В.В.* Магнитотеллурические поля в трехмерных моделях геоэлектрики. М.: Научный мир. 1999. 204 с.
206. *Стичак В.В.* Оценка разрешающей способности МТЗ по отношению к поискам залежей углеводородов // *Геофизика*. 2006. № 1. С. 39 – 42.
207. *Стичак В.В.* Современные подходы к комплексной инверсии геофизических данных // *Геофизика*. 2009. № 5. С. 10–19.
208. *Стичак В.В.* Электромагнитная томография земных недр. М.: Научный мир. 2019. 374 с.
209. *Стичак В.В., Безрук И.А., Гойдина А.Г.* Построение трёхмерной геоэлектрической модели на основе комбинированной инверсии профильных и площадных МТ данных в Восточной Сибири // *Геофизика*. 2010. № 2. С. 54–59.

210. Спичак В.В., Гойдина А.Г. Нейросетевая оценка сейсмических скоростей и удельного сопротивления пород по данным электромагнитного и сейсмического зондирования // *Физика Земли*. 2016. № 3. С. 38-49.
211. Спичак В.В., Попова И.В. Методология нейросетевой инверсии геофизических данных // *Физика Земли*. 2004. № 3. С. 71–85.
212. Спичак В.В., Попова И.В. Применение нейросетевого подхода для реконструкции параметров трехмерной геоэлектрической структуры // *Физика Земли*. 1998. № 1. С. 39–45.
213. Спичак В.В. Инверсия электромагнитных данных с помощью искусственных нейросетей // *Электромагнитные исследования земных недр* (под ред. Спичака В.В.). М.: Научный мир. 2005а. С. 110–122.
214. Спичак В.В. Трехмерная байесовская инверсия // *Электромагнитные исследования земных недр* (под ред. Спичака В.В.). М.: Научный мир. 2005б. С. 91–109.
215. Спичак, В.В. Магнитотеллурические поля в трехмерных моделях геоэлектрики. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико–математических наук. М.: Ин–т геоэлектромагнит. исслед., ИФЗ РАН. 1996. 38 с.
216. Справочник геофизика. Гравиразведка. М.: Недра. 1981. 396 с.
217. Старостенко В.Н. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка. 1978. 227 с.
218. Степанова И. Э., Щепетиллов А. В., Сальников А. М. К вопросу об аналитическом продолжении аномальных потенциальных полей в сторону источников. // *Физика Земли*. 2022. № 1. 118-129.
219. Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетиллов А.В. Комбинированный метод F-, S- и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и геоморфологии // *Физика Земли*. 2018. № 1. С. 96–113

220. *Степанова И.Э., Керимов И.А., Ягола А.Г.* Аппроксимационный подход в различных модификациях метода линейных интегральных представлений // *Физика Земли*. 2019. № 2. С. 31–47.
221. *Страхов В.Н.* Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН. 1999в. 64 с.
222. *Страхов В.Н.* Главнейшая задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в начале XXI века – разрушение господствующего стереотипа мышления // *Геофизика*. 2001. № 1. С. 3–18.
223. *Страхов В.Н.* Критический анализ классической теории линейных некорректных задач // *Геофизика*. 1999б. № 3. С. 3–9.
224. *Страхов В.Н.* О применении теории регуляризации при решении линейных некорректных задач магнито– и гравиметрии // *Геофизические исследования на Украине*. Киев: Техника, 1971. С. 144–151.
225. *Страхов В.Н.* О проблеме параметризации в обратных задачах гравиметрии // *Физика Земли*. 1978. № 6. С. 39–49.
226. *Страхов В.Н.* Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач гравиметрии // *Электронный научно–информационный журнал "ВЕСТНИК ОГГТГН РАН"*. 2001. № 1(16). С. 1–26.
227. *Страхов В.Н.* Что делать? // *Геофизика*. 1999а. №1. С. 3–10.
228. *Страхов В.Н., Валяшко Г.М.* Алгоритмы адаптивной регуляризации линейных некорректных задач // *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 259. № 3. С. 546–548.
229. *Страхов В.Н., Лапина М.И.* Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // *Докл. АН СССР*. 1976. Т. 227. № 2. С. 344–347.
230. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ. 1948. 539 с.
231. *Табаринцева Е. В.* Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2018а. Т. 21. № 3. С. 293–313.

232. *Табаринцева Е.В.* Об оценке модуля непрерывности в обратной задаче с финальным переопределением // Тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва: РУДН, 2018. С. 308–309.
233. *Табаринцева Е.В.* Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи // Труды ИММ УрО РАН. 2013б. Т. 19, № 1. С. 253–257.
234. *Табаринцева Е.В.* Об оценке погрешности метода приближенного решения обратной задачи для полулинейного дифференциального уравнения // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2013а. Т. 6. № 3. С. 129–142.
235. *Табаровский Л.А.* Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука. 1975. 139 с.
236. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука. 1981. 156 с.
237. *Танана В.П.* Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 503–507.
238. *Танана В.П., Ерыгина А.А.* Двухсторонняя оценка модуля непрерывности одного интегрального оператора типа свертки // Вестник ЧелГУ. 2013. № 16. С. 88–93.
239. *Танана В.П., Табаринцева Е.В.* О методе приближения кусочно–непрерывных решений нелинейных обратных задач // Сибирский журнал вычислительной математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 221–228.
240. *Танана, В.П.* Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач // Доклады Академии наук. 1975. Т. 220. № 5. С. 1035–1037.
241. *Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 545–547.

242. Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода // *ДАН СССР*. 1965. Т. 161. № 5. С. 1023–1026.
243. Тихонов А.Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // *ДАН СССР*. 1950. Т. 73. № 2. С. 295–297.
244. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // *ДАН СССР*. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.
245. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 288 с.
246. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации // *Физика Земли*. 1975. № 1. С. 38–48.
247. Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Дмитриев В.И. Математические методы в разведке полезных ископаемых. М.: Изд-во Знание, Сер. Математика и кибернетика. 1983. № 12. 64 с.
248. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1990. 232 с.
249. Тригубович Г.М., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г. 3D-электроразведка становлением поля. Новосибирск: Наука. 2009. 218 с.
250. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. Л.: Изд-во АН СССР. 1948–52. 661с
251. Тюленева С.Г., Фишман В.М., Зюганов С.К. Построение достижимых границ области допустимых скоростных разрезов в рамках метода // *ДАН СССР*. 1989. Т. 308. № 5. С. 1107–1111.
252. Фельдман И. С., Окулесский Б.А., Сулейманов А.К., Николаев В.Н., Кунчеров В.А., Чамо С.С. Электроразведка методом МТЗ в комплексе региональных нефтегазопроисследовательских работ в европейской части России // *Записки Горного института*. СПб, 2008. Т. 176. С. 125–131.
253. Фельдман И.С. и др. Профиль 2ДВ Магадан – Остров Врангеля. 2004; 2005; 2008. Компания «Центр ЭМИ». Режим доступа <http://www.emgeo.ru/>.

254. Фельдман И.С. Технология интерпретации магнитотеллурических данных // VIII Всероссийская школа-семинар ЭМЗ-2021, Москва, 4-9 октября 2021.
255. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2–е издание: Пер. с англ. М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2006. 1104 с.
256. Хачай О.А., Хачай А.Ю., Хачай О.Ю. К вопросу об обратной задаче активного электромагнитного и акустического мониторинга иерархической геологической среды // Геофизические исследования. 2017. Т. 18. № 4. С. 71–84. DOI: 10.21455/gr2017.4-6
257. Хилтшиш Ив. Python для финансовых расчетов, 2-е изд. / пер. англ. И.В. Василенко. Киев.: Диалектика. 2021. 800 с.
258. Хмелевской В.К., Модин И.Н., Яковлев А.Г. Пособие по электроразведочной практике для студентов геофизических специальностей. М.: МГУ. 2005. 311 с.
259. Хромова Г.В. О модулях непрерывности неограниченных операторов // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. № 9 (532). С. 71–78.
260. Ченцов Н.Н. Псевдослучайные числа для моделирования марковских цепей // ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7. № 3. С. 45–48.
261. Шарден Б., Массарон Л., Боскетти А. Крупномасштабное машинное обучение вместе с Python. М.: ДМК Пресс. 2018. 358 с.
262. Шевчук Р.В., Маневич, А.И., Акматов Д.Ж., Урманов Д.И., Шакиров А.И. Современные методы, методики и технические средства мониторинга движений земной коры. Горная Промышленность. 2022. №5. С. 99-104.
263. Шепард, Дональд. Двумерная интерполяционная функция для данных с неравномерным интервалом. Материалы 23-й национальной конференции АСМ 1968 года. Январь 1968 года. Страницы 517-524 <https://doi.org/10.1145/800186.810616>.

264. Шимелевич М.И. Методы оценки количества информации о среде, содержащейся в геофизических полях // *Геоинформатика /Geoinformatika*. 2013б. № 4. С. 49–56.
265. Шимелевич М.И. Методы повышения устойчивости инверсии данных геоэлектрики на основе нейросетевого моделирования // *Геофизика*. 2013а. № 4. С. 49–55.
266. Шимелевич М.И. Методы решения обратных задач электромагнитных зондирований в двумерном приближении. Деп. в ВИЭМС 02.12.88 №670-МГ-88.
267. Шимелевич М.И. Некоторые оптимизационные алгоритмы решения обратных задач электромагнитных зондирований. Деп. в ВИЭМС. 16.10.89, №796-МГ-89.
268. Шимелевич М.И. О методе расчета модуля непрерывности обратного оператора и его модификаций с приложением к нелинейным задачам геоэлектрики // *Вычислительные методы и программирование*. 2020. Т. 21, № 4. С. 350–372. DOI: 10.26089/NUMMET.V21R430.
269. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // *Физика Земли*. 2009. № 12. С. 22–38.
270. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Нейросетевая инверсия МТ данных в классах параметризованных геоэлектрических разрезов // *Физика Земли*. 2007. № 3. С. 25–30.
271. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Нейросетевой метод магнитотеллурического мониторинга геоэлектрических параметров среды на основе неполных данных // *Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле*. 2008. № 11. С. 171–176.
272. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Применение метода нейронных сетей для аппроксимации обратных операторов в задачах электромагнитных

- зондирований // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 1999. № 2. С. 102–106.
- 273.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Применение оптимизационного подхода в методике интерпретации данных МТЗ // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 1997. № 2. С. 109–115.
- 274.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Гаврюшов С.А. Применение нейросетевой аппроксимации для решения задач мониторинга параметров геоэлектрических разрезов // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 2003. № 4. С. 70–71.
- 275.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Гаврюшов С.А. Техника построения нейронных сетей для решения многопараметрических обратных задач магнитотеллурического зондирования // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 2001. № 6. С. 129–137.
- 276.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Алгоритм решения обратной задачи геоэлектрики на основе нейросетевой аппроксимации // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2018. № 4. С. 437–452. DOI: 10.15372/SJNM20180408.
- 277.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Аппроксимационный нейросетевой метод решения многомерных нелинейных обратных задач геофизики // *Физика Земли*. 2017а. № 4. С. 100–109. DOI: 10.7868/S0002333717040093.
- 278.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Модифицированный нейросетевой метод решения обратной задачи МТЗ // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 2013б. № 3. С. 46–52.
- 279.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // *Физика Земли*. 2013а. № 3. С. 58–64. DOI: 10.7868/S0002333713030150.

- 280.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Численные методы оценки достоверности результатов интерпретации данных электромагнитных зондирований // *Записки Горного института*. 2015. Т. 212. С. 122–129.
- 281.** Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Фельдман И.С., Новиков В.А. Численное моделирование вариаций электромагнитных полей при формировании разрыва по разлому перед землетрясением // *Известия высших учебных заведений. Геология и разведка*. 2017б. № 6. С. 42–48.
- 282.** Шимелевич М.И., Родионов Е.А., Оборнев И.Е., Оборнев Е.А. Нейросетевая 3D инверсия полевых данных геоэлектрики с расчетом апостериорных оценок // *Физика Земли*. 2022. № 5. С. 3–13. DOI: 10.31857/S0002333722050246.
- 283.** Ширяев А. Н. Вероятность. М: Изд-во МЦНМО. 2007. 552 с.
- 284.** Шишленин М.А. Прямые и итерационные методы регуляризации многомерных обратных задач акустики и электродинамики. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск.- 2016, 2016. 226 с.
- 285.** Шолле Франсуа. Глубокое обучение на Python. СПб.: Питер. 2018. 400 с.
- 286.** Юдин М.Н. Альтернирующий метод численного решения задач геоэлектрики. // *Математические методы в геоэлектрике*. М: ИЗМИРАН. 1982. С. 47–52.
- 287.** Юдин М.Н. Математическое обеспечение численного решения прямых задач электромагнитных зондирований неоднородных сред. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва: МГРИ им. С. Орджоникидзе. 1985. 34 с.
- 288.** Юдин М.Н. О расчете производных по сеточной функции в геоэлектрике // *Изв. ВУЗов, Геология и разведка*. 1982б. № 7. С. 86–91.

- 289.** Юдин М.Н. Расчет магнитотеллурического поля методом конечных разностей в трехмерной неоднородной среде // Проблемы морских электромагнитных исследований. М: ИЗМИРАН. 1980. С. 96–103.
- 290.** Ягола А.Г. Идеи В.К. Иванова об использовании априорной информации при решении некорректно поставленных задач и их практическое применение [Электронный ресурс] // Тезисы докладов: Международной Конференции по Математическим Методам в Геофизике «ММГ–2008». Новосибирск, Академгородок. 2008. Режим доступа: <https://refdb.ru/look/1568330.html>.
- 291.** Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. 2–е изд. (эл.): учебное электронное издание. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014. 218 с.
- 292.** Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики. СПб.: Изд-во С.–Петерб. ун-та. 2004. 214 с.
- 293.** Япарова Н.М. Оценка модуля непрерывности в одной обратной задаче физики твердого тела [Электронный ресурс] // Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященная 75–летию академика М.М. Лаврентьева, 20–25 августа 2007 г. Новосибирск, Россия. Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/abstracts/Section3/Yaparova.pdf>
- 294.** Abedi M., Afshar A., Ardcstaiii V.E., Norouzi G.H., Lucas C. Application of various methods for 2D inverse modeling of residual gravity anomalies // *Acta Geophys*, 2010. Vol. 58. P. 317–336. DOI: 10.2478/s11600-009-0053-2.
- 295.** Alfarraj M., AlRegib G. Semisupervised sequence modeling for elastic impedance inversion // *Interpretation*, 2019. Vol. 7, Is. 3. P. SE237–SE249. DOI: 10.48550/arXiv.1908.07849.
- 296.** Al–Garni M.A. Inversion of residual gravity anomalies using neural network // *Arab J Geosci*, 2013. Vol. 6. P. 1509–1516. DOI: 10.1007/s12517-011-0452-y.

- 297.** Alimoradi A., Angorani S., Ebrahimzadeh M., Shariat Panahi M. Magnetic inverse modelling of a dike using the artificial neural network approach // *Near Surface Geophysics*, 2011. Vol. 9. P. 339–347. DOI: 10.3997/1873-0604.2011008.
- 298.** Backus G. E. Bayesian inference in geomagnetism // *Geophys. J. Int.* 1988. Vol. 92(1). P. 125–142.
- 299.** Becker R., Rannacher R. An Optimal Control Approach to a Posteriori Error Estimation in Finite Element Method // *Acta Numerica* 2001. Vol. 10. P. 1–102. DOI: 10.1017/S0962492901000010.
- 300.** Beilina L., Johnson C. A Posteriori Error Estimation in Computational Inverse Scattering, *Math.Models Methods Appl. Sci.* 2005. Vol. 15. Is. 1. P. 23–37. DOI: 10.1142/S0218202505003885.
- 301.** Beilina L., Klibanov M.V. A Globally Convergent Numerical Method for a Coefficient Inverse Problem // *SIAM J. Sci. Comput.* 2008. Vol. 31. Is. 1. P. 478–509. DOI: 10.1137/070711414.
- 302.** Beilina L., Klibanov M.V. A Posteriori Error Estimates for the Adaptivity Technique for the Tikhonov Functional and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem // *Inverse Probl.* 2010. Vol. 26. Is. 4. Article No. 045012. DOI: 10.1088/0266-5611/26/4/045012.
- 303.** Bengio Y. Learning Deep Architectures for AI // *Foundations and Trends in Machine Learning*. Vol. 2. Is. 1. P. 1–127. 2009. DOI:10.1561/22000000006.
- 304.** Bengio Y., Lamblin P., Popovici D., Larochelle H. Greedy layer-wise training of deep networks // *Proceedings of the 19th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'06)*. MIT Press, Cambridge, MA, USA. P. 153–160. DOI: 10.5555/2976456.2976476.
- 305.** Chen X., Du Y., Liu Z., Zhao W., Chen X. Inversion of Density Interfaces Using the Pseudo-Backpropagation Neural Network Method // *Pure Appl. Geophys.* 2018. V. 175, P. 4427–4447. DOI: 10.1007/s00024-018-1889-7.
- 306.** Connolly, P. Elastic impedance // *The Leading Edge*. 1999. Vol. 18. Is. 4. P. 438–452. DOI: 10.1190/1.1438307.

- 307.** Cybenko G. Approximation by superposition of a sigmoidal function // *Math. Control Signal Systems*. 1989. Vol. 2. P. 303 – 314. DOI: 10.1007/BF02551274.
- 308.** David Arthur & Sergei Vassilvitskii (2006). “How Slow is the k-means Method?” (PDF). *Proceedings of the 2006 Symposium on Computational Geometry (SoCG)*.
- 309.** Dolenko S., Guzhva A., Persiantsev I., Osbornev E., Shimelevich M. Comparison of adaptive algorithms for significant feature selection in neural network based solution of the inverse problem of electrical prospecting // *International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN-2009), Part 2*. Vol. 5769 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. P. 397–405. DOI: 10.1007/978-3-642-04277-5/_40.
- 310.** Dorofeev K.Yu., Yagola A.G. The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2004. Vol. 12. Is. 6. P. 627–636. DOI: 10.1515/1569394042545120.
- 311.** Eckart C., Young G. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, Volume 1, 1936, Pages 211–8. doi:10.1007/BF02288367.
- 312.** Egbert Gary D. *Processing and interpretation of electromagnetic induction array data // Surveys in Geophysics*. 2002. 23: 207–249.
- 313.** Eisenstat, S.C., Schultz M.H., Sherman A.H. Algorithms and data structures for sparse symmetric gaussian elimination // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1981. Vol. 2. Is. 2. P. 225–237. DOI: 10.1137/0902019.
- 314.** Epov M.I., Eltsov I.N., Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Combined formulation of the two inverse problems of geoelectrics // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2011. Vol. 8. P. C.394–C.399.
- 315.** Eshaghzadeh A., Hajian A. 2D inverse modeling of residual gravity anomalies from Simple geometric shapes using Modular Feed-forward Neural Network // *Annals of Geophysics*. 2018. Vol. 61. Is. 1. SE115. DOI: 10.4401/ag-7540.

- 316.** Fainberg E.B., Singer B.Sh. Electromagnetic induction in a non-uniform spherical model of the Earth // *Annales de Geophysique*. 1980. Vol. 36. P. 127–134.
- 317.** Fomenko E.Yu. MT and control source modeling algorithms for 3D media with topography and large resistivity contrasts // in *The Second International Symposium on Three-Dimensional Electromagnetics (3DEM-2)*, Salt Lake City, Utah, USA. *Extended Abstracts*, edited by P.Wannamaker and M. Zhdanov. 1999. P. 21–24.
- 318.** Fomenko E.Yu., Mogi T. A new computation method for a staggered grid of 3D EM field conservative modeling // *Earth Planets Space*. 2002. Vol. 54. P. 499–509. DOI: 10.1186/BF03353041.
- 319.** Gallardo L.A., Meju Max A. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research*. 2004. Vol. 109, B03311, DOI: 10.1029/2003JB002716.
- 320.** Gallardo L.A., Perez M.A., Treviño E.G. A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data. *Geophysics*. 2003 Vol. 68, Is. 3. P. 949–959. DOI: 10.1190/1.1581067.
- 321.** Gayer, A., Chernyshova, Y., & Sheshkus, A. (2019). Effective real-time augmentation of training dataset for the neural networks learning. *Proceedings of SPIE*, 11041, 110411I-110411I-8.
- 322.** Golubev N.G., Sokolova E.Yu., Varentsov Iv.M. On the resolution bounds of bimodal inversion and validity of 2D approach on the Lincoln Line (EMSLAB experiment) // XIV Workshop on EM induction in the Earth (Abstracts). Sinaia. Romania. 1998. P. 114.
- 323.** Guo J. et al. 3D geological structure inversion from Noddy-generated magnetic data using deep learning methods. *Computers & Geosciences*. 2021. 149. 104701.
- 324.** Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization. *BIT* 27, 1987.– P. 534–553.

- 325.** Haykin S. Neural networks. A comprehensive foundations. McMillan College Publ. Co. N.Y., 1994. 696 pp.
- 326.** *Hidalgo H., Gomez–Trevino E.* Application of constructive learning algorithms to the inverse problem // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 1996. Vol. 34. Is. 4. P. 874–885. DOI: 10.1109/36.508404.
- 327.** *Hidalgo H., Gomez–Trevino E., Swiniarski R.,* Neural network approximation of an inverse functional // Proceedings of 1994 IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN'94). 1994. Vol. 5. P. 3387–3392. DOI: 10.1109/ICNN.1994.374780.
- 328.** *Hohmann G.W.* Three–dimensional EM modeling // *Geophysical Surveys*. 1983. Vol. 6. P.27–53. DOI: 10.1007/BF01453994.
- 329.** *Hohmann G.W.* Three–dimensional induced polarization and electromagnetic modeling // *Geophysics*. 1975. Vol. 40. P. 309–324. DOI: 10.1190/1.1440527.
- 330.** *Hornik K., Stinchcombe M., White H.* Multilayer feedforward networks are universal approximators // *Neural Networks*. 1989. Vol. 2. Is. 5. P. 359 – 366. DOI: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
- 331.** Hu Z. et al. Inversion of magnetic data using deep neural networks. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2021. 311, 106653.

Institute of Mathematics and Statistics of the University of Tartu.

- 332.** *Jones F.B.* Perturbations of geomagnetic fields by two–dimensional and three– dimensional geomagnetic conductivity inhomogeneities // *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH*. 1974. Vol. 112. Is. 5. P.793–800. DOI: 10.1007/BF00876954.
- 333.** *Jones, F.W., Pascoe L.J.* The perturbation of alternating geomagnetic fields by three–dimensional conductivity inhomogeneities // *Geophysical Journal International*. 1972. Vol. 27. Is. 5. P.479–485. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1972.tb06103.x.

- 334.** Kabanikhin S. I., Sabelfeld K. K., Novikov N. S., Shishlenin M. A. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods // Monte Carlo Application. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 189–203.
- 335.** Kabanikhin, S. I. Regularization of the continuation problem for elliptic equations / S. I. Kabanikhin, S. Gasimov, D. B. Nurseitov, M. A. Shishlenin, B. B. Sholpanbaev and S. Kasenov // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21. No. 6. - P. 871 - 884.
- 336.** Kabanikhin, S.I. Inverse Problems for the Ground Penetrating Radar / S.I. Kabanikhin, D. B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21. No. 6. P. 885 - 892.
- 337.** *Kailai Xu, Eric Darve.* The neural network approach to inverse problems in differential equations [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 23.01.2019. Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1901.07758> (дата обращения: 13.06.2022).
- 338.** Larochelle H., Erhan D., Courville A., Bergstra J., Bengio Y. An empirical evaluation of deep architectures on problems with many factors of variation // Proceedings of the Twenty-fourth International Conference on Machine Learning (ICML '07). ACM. 2007. P. 473–480. DOI: 10.1145/1273496.1273556.
- 339.** *LeCun Y., Boser B., Denker J.S., Henderson D., Howard R.E., Hubbard W., Jackel L.D.* Backpropagation applied to handwritten zip code recognition // *Neural Computation*. 1989. Vol. 1. Is. 4. P. 541–551. DOI: 10.1162/neco.1989.1.4.541.
- 340.** *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* A posteriori error estimates for numerical solutions to inverse problems of elastography // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2017. Vol. 25. Is. 1. P. 114-128. DOI: 10.1080/17415977.2016.1138949.
- 341.** Liu B., Qian Guo, Shucui Li, Benchao Liu, Yuxiao Ren, Yonghao Pang, Lanbo Liu and Peng Jiang. Deep Learning Inversion of Electrical Resistivity Data // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2020 Vol. 58, Is. 8. P. 5715 5728. DOI: 10.1109/TGRS.2020.2969040.

- 342.** Liu Z.G. et al. Deep learning audio magnetotellurics inversion using residual-based deep convolution neural network. *J. Appl. Geophys.* 2021. 188. 104309.
- 343.** Lloyd S. (1957). Least square quantization in PCM's. Bell Telephone Laboratories Paper.
- 344.** Lönnblad L., Peterson C., Rögnvalsson T. Pattern recognition in high energy physics with artificial neural networks – JETNET 2.0 // *Computer Physics Communications.* 1992. Vol. 70. Is. 1, P. 167–182. DOI: 10.1016/0010-4655(92)90099-K.
- 345.** Mackie R.L., Madden T. R., Wannamaker P. E. Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - Theory and comparisons to integral equation solutions // *Geophysics.* Vol. 58. Is. 2. 1993. P. 215–226. DOI: 10.1190/1.1443407.
- 346.** MacQueen J. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, pages 281—297.
- 347.** Markovskiy I. Structured low-rank approximation and its applications, *Automatica*, Volume 44, Issue 4, April 2008, Pages 891–909. doi:10.1016/j.automatica.2007.09.011
- 348.** Miller K. Three circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. Vol. 16. P. 126–154. DOI: 10.1007/BF00281335.
- 349.** Mirsky L. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms, *Q.J. Math.* 11 (1960), 50-59. doi: 10.1093/qmath/11.1.50.
- 350.** Ortega, Joaquín Pérez, Ma Del Rocío Boone Rojas, and María J. Somodevilla. "Research issues on K-means Algorithm: An Experimental Trial Using Matlab".-2009.

- 351.** *Osman O., Albora A.M, Ucan O.N.* Forward modeling with forced neural networks for gravity anomaly profile // *Math Geol.* 2007. Vol. 39. P. 593–605. DOI: 10.1007/s11004-007-9114-8.
- 352.** *Poulton M., Birken R.* Estimating one–dimension models from frequency domain electromagnetic data using neural networks // *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing.* 1997. Vol. 36. Is. 2. P. 547–555. DOI: 10.1109/36.662737.
- 353.** *Poulton M., Glass C., Sternberg B.* Recognizing EM ellipticity patterns with neural networks // 59th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys. 1989. P. 208–212.
- 354.** *Poulton M., Sternberg B., Glass C.* Neural network pattern recognition of subsurface EM images // *Journal of Applied Geophysics,* 1992, Vol. 29. Is. 1. P. 21–36. DOI: 10.1016/0926-9851(92)90010-I.
- 355.** *Poulton M.M.* Neural networks as an intelligence amplification tool: A review of applications // *Geophysics.* 2002. Vol. 67. Is. 3. P. 979–993. DOI: 10.1190/1.1484539.
- 356.** *Pridmore D.F.* 3D–finite–element modeling of electric and electromagnetic methods // *Proc. Workshop on modelling of electrical and electromagnetic methods, Berkeley, Calif.* 1978. P. 27–35.
- 357.** *Pridmore D.F. Lee K.H.* A hybrid 3D electromagnetic modeling scheme // *Geophysics.* 1980. Vol. 45. Is. 4. P. 553.
- 358.** *Raiche A.* A pattern recognition approach to geophysical inversion using neural nets // *Geophysics J. Int.* 1991. Vol. 105. Is. 3. P. 629–648. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1991.tb00801.x.
- 359.** *Rodi W.L., Mackie R.L.* Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2–D magnetotelluric inversion // *Geophysics.* 2001. Vol. 66. Is. 1. P. 174– 187. DOI: 10.1190/1.1444893.

- 360.** Roth G., Tarantola A. Neural networks and inversion of seismic data // Journal of Geophysical Research. 1994. Vol. 99. Is. B4. P. 6753–6768. DOI: 10.1029/93JB01563.
- 361.** Salakhutdinov R., Hinton G.E. Using deep belief nets to learn covariance kernels for Gaussian processes // Proceedings of the 20th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'07). Curran Associates Inc., Red Hook, NY, USA, 2007. P. 1249–1256. DOI: 10.5555/2981562.2981719.
- 362.** Schmidhuber, J. Deep Learning in Neural Networks: An Overview // *Neural Networks*. 2015. Vol. 61. P. 85–117. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.09.003.
- 363.** Sen M.K. Bhattaeharya B.B. Stoffa P.L. Nonlinear inversion of resistivity sounding data // *Geophysics*. 1993. Vol. 58. P. 496-507.
- 364.** Shimelevich M.I., Osbornev E.A., Gavryushov S. Rapid neuronet inversion of 2D magnetotelluric data for monitoring of geoelectrical section parameters // *Annals of Geophysics*. 2007. Vol. 50, no. 1. P. 105–109. DOI: 10.4401/ag-3090.
- 365.** Shimelevich M.I., Osbornev E.A., Osbornev I.E., Rodionov E.A. The approximation neural-network method for solving nonlinear multi-criteria inverse problems of geophysics // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1715. IOP Publishing Ltd, 2021. P. 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/1715/1/012045.
- 366.** Shimelevitch M., Osbornev E. The method of neuron network in inverse problems MTZ // Abstracts of the 14-th workshop on Electromagnetic Induction in the Earth, Sinaia. Romania, 1998. P. 159.
- 367.** Shucaï Li, Bin Liu, Yuxiao Ren, Yangkang Chen, Senlin Yang, Yunhai Wang, Peng Jiang. Deep learning Inversion of Seismic Data // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2019. Vol. 58, No. 3, P. 2135-2149. DOI: 10.1109/TGRS.2019.2953473.
- 368.** Siripunvaraporn W. Three–Dimensional Magnetotelluric Inversion: An Introductory Guide for Developers and Users // *Surveys in Geophysics*. 2012. Vol. 33. P. 5–27. DOI: 10.1007/s10712-011-9122-6.

- 369.** *Siripunvaraporn W., Egbert G.* An efficient data–subspace inversion method for 2D magnetotelluric data // *Geophysics*. 2000. Vol. 65. Is. 3. P. 791–803. DOI: 10.1190/1.1444778.
- 370.** *Smith J.T., Booker J.R.* Rapid Inversion of Two and Three Dimensional Magnetotelluric Data // *J. Geophys.* 1991. Vol. 96. Is. B3. P. 3905–3922. DOI: 10.1029/90JB02416.
- 371.** *Spichak V., Popova I.* Estimation of the Parameters of three–dimensional Geoelectrical Structure using NeuroNet – based algorithm // Russian–German seminar "Actual problems in deep EM studies" (Extended Abstracts). M.: OIFZ RAS. 1997
- 372.** Spichak V., Popova, I.V., 2000. Artificial neural network inversion of MT - data in terms of 3D earth macro-parameters. *Geoph. J. Int.*, 142, 15-26.
- 373.** *Spichak V.V.* Computation geo-electromagnetics. Methods, models and forecasts/ Elsevier, 2020 г., 441pp. DOI: 10.1016/C2019-0-00349-4.
- 374.** Steinhaus H. (1956). Sur la division des corps materiels en parties. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, C1. III vol IV: 801—804.
- 375.** *Stone M.* An asymptotic equivalence of choice of model by cross-validation and Akaike's criterion // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*. 1977. Vol. 39. Is. 1. P 44–47.
- 376.** Stone M.N. The generalized Weierstrass approximation theorem // *Mathematics Magazine*. 1948. Vol. 21. No. 4. PP. 167–183. DOI: 10.2307/3029750.
- 377.** *Svetov B.S., Shimelevich M.I.* Magnetotelluric variation processing // *Surveys in Geophysics*. 1988. V.9. I.3-4. P. 259-285. DOI: 10.4401/AG-3090.
- 378.** Tanana V.P. *Methods for Solution of Nonlinear Operator Equations*. Utrecht, VSP. 1997. 241 p.
- 379.** *Tarantola A.* *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM. 2005. 342 P. DOI: 10.1137/1.9780898717921.

- 380.** Tarantola A., Necessian A. Three-Dimensional inversion without blocks // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1984. V. 50. P. 299–306.
- 381.** Tarantola A., Valette B. Inverse problem. Quest for information // *J. Geophys.* 1982. Vol. 50. P. 159–170.
- 382.** Tollenaere T. SuperSAB: Fast adaptive back propagation with good scaling properties // *Neural Networks.* 1990. Vol. 3. Is. 5. P. 561-573. DOI: 10.1016/0893-6080(90)90006-7.
- 383.** Varentsov I.M. *The selection of effective FD solvers in 3D EM modeling* // *Proc. of 3DEM-2 Int. Symposium. Univ. of Utah Salt Lake City, 1999. P. 201–204.*
- 384.** Varentsov I.M., Fomenko E.Y., Golubev N.G., Mehanee S., Hursán G., Zhdanov M.S. Comparative study of 3–D finite–difference and integral equation methods // *Annual Report of the Consortium on EM Modeling and Inversion (CEMI). Univ. of Utah Salt Lake City, 2000. P. 401–440.*
- 385.** Varentsov Iv. M. Modern trends in the solution of forward and inverse 3D electromagnetic induction problems // *Geophysical Surveys.* 1983. Vol. 6. P. 55–78. DOI: 10.1007/BF01453995.
- 386.** Varentsov Iv.M. Methods of joint robust inversion in MT and MV studies with application to synthetic datasets // *Electromagnetic Sounding of the Earth's Interior: Theory, Modeling, Practice*, ed. Spichak V.V., Elsevier. 2015. P. 191–229. DOI: 10.1016/B978-0-444-63554-9.00008-8.
- 387.** Vasin V.V., Ageev A.L. *Inverse and Ill–Posed Problems with a Prior Information.* Utrecht, VSP. 1995. 255 p.
- 388.** Vogel M.A., Wong A.K.C. PFS clustering method // *IEEE Trans. Pattern Analysis. Mach Intell.* 1978. Vol. PAMI-1. P. 237–245.
- 389.** Von Luxburg, Ulrike. *Clustering Stability.* Now Publishers Inc, 2010.
- 390.** Wannamaker P.E. Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations // *Geophysics.* 1991. Vol. 56. Is. 11. P. 1716–1728. DOI: 10.1190/1.1442984.

- 391.** Wannamaker P.E., Stodt J.A., Rijo L. Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements // *Geophysics*. 1986. Vol. 51. Is. 11. P. 2131–2144. DOI: 10.1190/1.1442065.
- 392.** Weidelt P. Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Inversion zweidimensionaler Leitfähigkeitsstrukturen in E-Polarisation. Göttingen, Georg-August-Universität. 1978. 161 p.
- 393.** Weidelt.P. Electromagnetic induction in three-dimensional structures // *J. Geophys.* 1975. Vol. 42. P. 85–109.
- 394.** Werbos P.J. Beyond regression: New tools for prediction and analysis in the behavioral sciences. Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, 1974.
- 395.** Widess M. Quantifying resolving power of seismic systems. // *Geophysics*. 1982. Vol. 47. Is. 8. P. 1160–1173. DOI: 10.1190/1.1441379.
- 396.** Xiong Z. Electromagnetic modeling of 3-D structures by the method of system iteration using integral equations // *Geophysics*. 1992. Vol. 57. Is. 12. P. 1556–1561. DOI: 10.1190/1.1443223.
- 397.** Yagola A. Error estimation for ill-posed problems with priori information // *Global Journal of Technology and Optimization*. 2010. Vol. 1. P. 88–92.
- 398.** Yagola A. A posteriori and a priori error estimates for solutions of ill-posed problems. Abstracts of MMA 2016, June 1–4, 2016, Tartu, Estonia
- 399.** Yagola A., Dorofeev K. Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // *Operator Theory and Its Applications*, 2000. Vol. 25. P. 543–550. DOI: 10.1090/fic/025/33.
- 400.** Yagola A., Titarenko V. Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2007. Vol. 15. Is. 1. P. 3–17. DOI: 10.1080/17415970600573809.
- 401.** Yoshifusa I. Approximation of continuous functions on \mathbb{R}^d by linear combination of shifted rotation of a sigmoid function with and without scaling //

Neural Networks. 1992. Vol. 5. Is. 1. P. 105–115. DOI: 10.1016/S0893-6080(05)80009-7.

- 402.** *Zhdanov M.S., Golubev N.G., Spichak V.V., Varentsov I.M.* The construction of effective methods for electromagnetic modeling // *Geophysical Journal International*. 1982. Vol. 68. Is. 3. P. 589–607. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1982.tb04917.x.