

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

Прохоров Андрей Александрович

**ПРОЦЕССЫ С ОБРАЗОВАНИЕМ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОНИЕВ И  
КАЛИБРОВОЧНЫХ БОЗОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ**

Специальность 1.3.15 — Физика атомных ядер и элементарных частиц,  
физика высоких энергий

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Липатов Артем Владимирович

Москва — 2023

# Содержание

Введение	4
<b>1 Уравнения эволюции партонных функций распределения</b>	<b>13</b>
1.1 Глубоконеупругое рассеяние и партонная модель . . . . .	13
1.2 Уравнение эволюции DGLAP . . . . .	16
1.3 Уравнение эволюции BFKL . . . . .	19
1.4 Уравнение эволюции CCFM . . . . .	23
1.5 Подход $k_T$ -факторизации в КХД . . . . .	26
1.6 Амплитуды вне массовой поверхности и калибровочная инвариантность	27
1.7 TMD функции распределения глюонов в протоне . . . . .	29
<b>2 Теоретические подходы для вычисления сечений процессов рождения тяжелых кваркониев</b>	<b>31</b>
2.1 Формализм нерелятивистской КХД . . . . .	31
2.1.1 Сечения процессов одиночного рождения чармониев . . . . .	35
2.1.2 Непертурбативные матричные элементы для чармониев . . . . .	36
2.2 Фрагментационный механизм . . . . .	37
2.2.1 Фрагментация очарованного кварка в чармонии . . . . .	38
2.2.2 Фрагментация глюона в чармоний . . . . .	41
2.2.3 Эволюция функций фрагментации . . . . .	43
<b>3 Процессы парного рождения <math>J/\psi</math> мезонов на LHC</b>	<b>47</b>
3.1 Механизмы парного рождения чармониев . . . . .	47
3.2 Роль неколлинеарной эволюции для фрагментационных вкладов . . . . .	50
3.2.1 Парное рождение чармониев с учетом фрагментационных вкладов	54
3.3 Механизм двойного партонного рассеяния . . . . .	56
3.3.1 Фрагментационные механизмы в двойном партонном рассеянии	58
3.4 Выбор параметров и теоретические неопределенности . . . . .	60
3.4.1 Выбор факторизационного масштаба . . . . .	61
3.5 Результаты расчетов . . . . .	65
3.5.1 Роль множественных глюонных излучений . . . . .	65
3.5.2 Парное рождение $J/\psi$ мезонов в передней области быстрот . . . . .	70
3.5.3 Парное рождение $J/\psi$ мезонов в центральной области быстрот . . . . .	77
<b>4 Процессы ассоциативного рождения калибровочных <math>Z</math> бозонов и струй тяжелых кварков</b>	<b>83</b>
4.1 Партонные подпроцессы . . . . .	83
4.1.1 Полные и дифференциальные сечения . . . . .	85
4.2 Расчеты в NLO приближении коллинеарной КХД . . . . .	86

4.3	Выбор параметров и теоретические неопределенности . . . . .	87
4.4	Результаты расчетов . . . . .	87
4.4.1	Распределения по поперечным импульсам для процессов ассоциативного рождения $Z$ бозона и тяжелых $c, b$ струй . . . . .	88
4.4.2	Проверка гипотезы внутреннего очарования . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Процессы ассоциативного рождения <math>J/\psi</math> мезонов и калибровочных бозонов <math>Z/W^\pm</math></b>	<b>97</b>
5.1	Фрагментационные вклады в сечение рождения $J/\psi + Z/W^\pm$ . . . . .	98
5.1.1	Полные и дифференциальные сечения . . . . .	101
5.2	Выбор параметров и теоретические неопределенности . . . . .	101
5.3	Результаты расчетов . . . . .	102
5.3.1	Распределения по поперечному импульсу $J/\psi$ мезонов для процессов ассоциативного рождения $J/\psi + Z/W^\pm$ . . . . .	102
5.3.2	Роль множественных глюонных излучений . . . . .	105
	<b>Заключение</b>	<b>107</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>110</b>

# Введение

Диссертация посвящена исследованию процессов парного рождения чармониев, а также процессов рождения калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  в сопровождении  $J/\psi$  мезонов или тяжелых кварков в столкновении протонов при высоких энергиях. Экспериментальные данные для этих процессов, полученные недавно на Большом Адронном Коллайдере (ЛHC), до сих пор не получили удовлетворительного теоретического описания. Основное внимание уделяется фрагментационным вкладам, в том числе от множественных глюонных излучений в начальном состоянии. Данные излучения могут быть учтены в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода квантовой хромодинамики (КХД) с помощью уравнения эволюции Катани-Чиафалони-Фиорани-Маркезини (CCFM) для глюонных распределений в протоне, зависящих от поперечного импульса (transverse momentum dependent, TMD).

В основе диссертации лежат результаты, полученные автором во время обучения в аспирантуре физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в 2018 - 2022 годах. Исследования проведены в рамках реализации проектов по грантам РФФИ № 20-32-90105, РНФ № 22-22-00119 и фонда “БАЗИС” № 18-2-6-129-1.

## Актуальность темы и степень ее разработанности

В настоящее время теоретическое описание экспериментальных данных для процессов инклюзивного и ассоциативного рождения связанных состояний тяжелых кварков — тяжелых кваркониев — является одним из актуальных и важных направлений современной физики высоких энергий. В ранних работах для вычисления сечений таких процессов использовалась модель цветowych синглетов (CSM) [1–3]. В данной модели предполагается, что образованная в результате жесткого партонного взаимодействия пара тяжелых кварков  $Q\bar{Q}$  формирует связанное состояние только в том случае, если она находится в синглетном по цвету состоянии и обладает квантовыми числами наблюдаемого кваркония. Однако, экспериментальные данные процессов рождения чармониев коллаборации CDF [4] показали, что предсказания в рамках CSM значительно (более чем на порядок) недооценивают измеренные сечения. Было сделано предположение, что расхождение может быть связано с отсутствием в модели цветowych синглетов механизмов образования тяжелых кваркониев через октетные по цвету состояния пары  $Q\bar{Q}$ . Такие промежуточные состояния учитываются в формализме нерелятивистской КХД (NRQCD) [5–7], где предполагается их переход в наблюдаемый кварконий посредством испускания мягкого глюона. В рамках данной модели было получено описание экспериментально измеренных распределений по поперечному импульсу некоторых чармониев [8–10]. Однако поляризационные свойства тяжелых кваркониев (в частности,  $J/\psi$  мезонов) долгое время не удавалось описать

в рамках данного подхода. Согласно предсказаниям нерелятивистской КХД,  $J/\psi$  мезон должен быть преимущественно поперечно-поляризованным в области средних и больших поперечных импульсов, поскольку доминирующие вклады в этой области определяются фрагментацией глюона в  $c\bar{c}[^3S_1^{(8)}]$  октетное состояние пары очарованных кварков (см. например, [11]). Этот результат не согласуется с данными, полученными на коллайдере LHC, которые указывают на неполяризованные мезоны [12]. Кроме того, результаты недавних расчетов в следующем за лидирующим приближении нерелятивистской КХД [13] находятся в противоречии с экспериментальными данными коллаборации LHCb для распределений по поперечному импульсу  $\eta_c$  мезонов [14].

Не так давно был предложен новый механизм перехода октетных состояний в наблюдаемый кварконий [15], который позволил решить актуальную проблему деполяризации для  $J/\psi$  и  $\psi'$  мезонов в области больших поперечных импульсов. Более того, в недавних работах [16, 17] впервые удалось достичь самосогласованного описания всех экспериментальных данных для процессов инклюзивного одиночного рождения семейства чармониев ( $J/\psi, \psi', \chi_{cJ}, \eta_c$ ) в рамках нерелятивистской КХД. При этом для описания процесса пертурбативного рождения пары тяжелых кварков в различных цветовых состояниях использовался  $k_T$ -факторизационный подход КХД, что позволило эффективно учесть значительную часть поправок высших порядков теории возмущений КХД в форме TMD распределений глюонов в протоне. Аналогичные расчеты были проведены для семейства боттомониев [18–20], в которых было достигнуто самосогласованное описание всех экспериментальных данных как для сечений процессов инклюзивного одиночного рождения S- и P-волновых боттомониев, так и их поляризационных наблюдаемых. Тем самым было предложено возможное решение упомянутых выше трудностей нерелятивистской КХД.

В последнее время наблюдается высокий интерес к процессам парного рождения тяжелых кваркониев, в частности, к процессу парного рождения  $J/\psi$  мезонов. Такие процессы обеспечивают возможность дополнительной проверки механизмов образования связанных состояний тяжелых кварков. Были проведены вычисления синглетных и октетных вкладов в сечения процесса парного рождения кваркониев в лидирующем порядке КХД [21]. Помимо этого, были вычислены поправки к синглетному механизму в следующем за лидирующим (NLO) порядке теории возмущений [22]; рассчитаны частичные NLO-поправки на древесном уровне (NLO\*) к синглетным и октетным вкладам [23]. Как было показано в последних работах, эти поправки играют существенную роль как в области малых, так и больших поперечных импульсов. Следует подчеркнуть, что аккуратный учет всех NLO-вкладов значительно затруднен ввиду большой сложности вычислений. Тем не менее, результаты проведенных расчетов демонстрируют значительное (в некоторых случаях, более чем на порядок) расхождение с последними экспериментальными данными коллаборации ATLAS [24]

и CMS [25] в центральной области быстрот.

Аналогичная ситуация наблюдается для процессов ассоциативного рождения калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  и  $J/\psi$  мезонов. В рамках нерелятивистской КХД были вычислены вклады в сечения таких процессов в следующем за лидирующим порядке нерелятивистской КХД [26–28]. Было найдено, что NLO-поправки являются весьма существенными при вычислении дифференциальных сечений. Однако, экспериментальные данные [29, 30] указывают на значительно более пологую форму распределений по поперечному импульсу  $J/\psi$  мезонов в сравнении с предсказаниями нерелятивистской КХД (расхождение при больших поперечных импульсах достигает 5-10 раз).

Таким образом, в настоящее время проблема описания сечений процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов и ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$  в рамках нерелятивистской КХД остается нерешенной.

Кроме этого, отдельный интерес вызывают процессы двойного партонного рассеяния (ДПР) [31], в которых происходит два партонных взаимодействия в одном адронном столкновении. Поскольку вероятности однопартонных событий сами по себе можно считать малыми, то естественно предполагать значительное подавление для вкладов ДПР. Однако, при высоких энергиях, доступных на коллайдере ЛНС, открывается возможность исследования областей с очень малыми значениями долей импульсов  $x$ , переносимых партонами в протоне, где партонные плотности значительно растут. Это приводит к увеличению роли механизма двойного партонного рассеяния. Одни из первых доказательств их существования было обнаружено в ранних экспериментах CERN [32] и экспериментах Tevatron [33]. В последнее время такие процессы являются объектом интенсивных исследований [34–37].

Изучение механизма ДПР в процессах с образованием тяжелых кваркониев является важной и актуальной задачей. Такие вклады необходимы, например, для описания экспериментальных данных процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов, а в некоторых случаях они, вообще, играют ключевую роль [38, 39]. Помимо этого, извлекаемая из экспериментальных данных величина эффективного сечения ДПР для ряда процессов с образованием тяжелых кваркониев значительно меньше [24, 39–43], чем для других конечных состояний [38, 44–49]. В настоящее время данный вопрос остается открытым.

## Цели и задачи работы

Целью работы является теоретическое изучение новых механизмов, дающих вклад в сечения процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов и процессов ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  при энергиях ЛНС. Эти механизмы связаны с учетом эффектов множественных глюонных эмиссий в начальном состоянии и их последующей фрагментации в адроны. Такие вычисления могут быть

проведены в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода с использованием уравнения эволюции CCFM.

Для достижения цели были решены следующие задачи:

1. Вычисление функций фрагментации кварков и глюонов в S- и P-волновые чармонии ( $J/\psi, \psi', \chi_{cJ}$ ) при различных масштабах  $\mu^2$  в ведущем порядке теории возмущений с помощью уравнения эволюции DGLAP. В расчетах учитывались дополнительные (нелидирующие) вклады в начальные функции фрагментации, а также впервые использовались положительно определенные выражения для этих функций, предложенные недавно [50].
2. Вычисление сечений парного рождения  $J/\psi$  мезонов в протон-протонных столкновениях в различных кинематических областях при энергиях ЛНС. В расчетах были учтены синглетные и октетные по цвету вклады; при этом учет поправок высших порядков теории возмущений осуществляется с помощью TMD распределений глюонов в протоне в рамках подхода  $k_T$ -факторизации. Выяснение роли глюонных эмиссий в начальном состоянии для механизмов одиночного и двойного партонного рассеяния. Сравнение с экспериментальными данными коллабораций ATLAS и LHCb.
3. Определение величины эффективного сечения двойного партонного рассеяния из экспериментальных данных LHCb для процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов.
4. Вычисление дополнительных вкладов, связанных с фрагментацией кварков и глюонов в чармонии, в сечения процессов ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  в центральной области быстрот в подходе  $k_T$ -факторизации при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ. Сравнение с экспериментальными данными ATLAS.
5. Вычисление сечений ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй при энергиях ЛНС. Сравнение с экспериментальными данными коллабораций ATLAS и CMS. Исследование применимости подхода  $k_T$ -факторизации для изучения данных процессов. Проверка возможности обнаружения внутреннего очарования в этих процессах.

### **Объект и предмет исследования**

Объектом исследования являлись процессы рождения чармониев и калибровочных бозонов при высоких энергиях. В качестве предмета исследования были рассмотрены различные дифференциальные сечения парного рождения  $J/\psi$  мезонов и

ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов (или тяжелых кварков) и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$ .

### Положения, выносимые на защиту

1. Учет фрагментационных вкладов от множественных излучений глюонов, возникающих в процессе эволюции глюонных распределений, играет существенную роль при описании экспериментальных данных для сечений процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов в центральной области быстрот. В передней области быстрот при малых поперечных импульсах, что соответствует кинематике эксперимента ЛНСб, эти вклады пренебрежимо малы, так что сечение рассматриваемого процесса определяется главным образом вкладом от синглетного механизма и механизма двойного партонного рассеяния.
2. Значение эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 15$  мбн, полученное из анализа экспериментальных данных ЛНСб для различных наблюдаемых в процессе парного рождения  $J/\psi$  мезонов при энергиях  $\sqrt{s} = 7$  и 13 ТэВ хорошо согласуется с результатами измерений этого параметра во многих других процессах, изучаемых на коллайдере Tevatron и ЛНС.
3. Учет новых механизмов, связанных с фрагментацией кварков и глюонов в чармонии, позволяет существенно улучшить согласие результатов расчетов в рамках нерелятивистской КХД с экспериментальными данными ЛНС для процессов ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$ .
4. Учет фрагментационных механизмов образования чармониев существенно (до 2 раз) увеличивает величину вклада двойного партонного рассеяния в сечения парного рождения  $J/\psi$  мезонов в центральной области быстрот и, тем самым, влияет на значение параметра  $\sigma_{\text{eff}}$ , извлекаемого из экспериментальных данных.

### Научная новизна работы

Научная новизна связана с применением подхода  $k_T$ -факторизации КХД для вычисления сечений процессов, рассматриваемых в данной работе. В рамках этого подхода впервые были предложены и учтены фрагментационные вклады в сечения процессов рождения чармониев от множественных глюонных излучений в начальном состоянии, которые описываются уравнением эволюции ССФМ. В расчетах впервые использовались дополнительные (нелидирующие), положительно определенные выражения для функций фрагментации глюонов в тяжелые кварконии, полученные недавно в работе [50]. Впервые был предложен метод вычисления дополнительных вкладов в механизм ДПР, связанных с фрагментационным механизмом рождения чармониев, которые оказывают существенное влияние на величину эффективного



сечения ДПР. Показано, что эффекты множественных глюонных излучений играют существенную роль для описания экспериментальных данных для процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов в области центральных быстрот. Также продемонстрировано, что учет новых механизмов ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  значительно сокращает (до 2-3 раз) расхождения между экспериментальными данными коллаборации ATLAS и существующими теоретическими предсказаниями NLO NRQCD.

Была определена величина эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}}$  ДПР из наилучшего описания экспериментальных данных для процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов в передней области быстрот, которая согласуется с большинством оценок данного параметра, полученных из анализа других конечных состояний. Предыдущие оценки, полученные для этого состояния, указывали на значительно меньшую величину  $\sigma_{\text{eff}}$ .

### **Теоретическая и практическая значимость**

Предложенные методы учета вкладов множественных партонных эмиссий в начальном состоянии в сечения процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов и ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов при высоких энергиях могут быть использованы коллаборациями ATLAS, CMS и LHCb в анализе новых экспериментальных данных. Более того, данный метод может также найти применение для описания систем с образованием других тяжелых кваркониев и с образованием большего количества кваркониев, когда такого рода процессы станут доступны для изучения на ЛНС или на коллайдерах будущих поколений. Кроме того, разработанный подход может также применяться при определении величин эффективного сечения ДПР  $\sigma_{\text{eff}}$  для процессов с участием тяжелых кваркониев.

Полученные в работе результаты могут применяться для различных феноменологических исследований как теоретическими, так и экспериментальными группами в НИИЯФ МГУ, ОИЯИ, ФИАН, ИФВЭ, ИЯИ, ПИЯФ и других российских и международных научных центрах, а также в студенческих курсах.

### **Методология и методы исследования**

Для вычисления различных сечений партонных подпроцессов используется  $k_T$ -факторизационный подход КХД, позволяющий эффективно учитывать поправки высших порядков в виде TMD глюонных распределений в протоне, подчиняющихся уравнениям эволюции BFKL или CCFM. В численных расчетах использовались несколько таких распределений, подчиняющихся CCFM эволюции: A0, JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2 [51, 52]. Кроме того, применялся алгоритм генерации TMD партонных ливней, встроенный в Монте-Карло генератор событий CASCADE [53]. Для моделирования эффектов партонных ливней в конечном состоянии, проводились вы-

числения функций фрагментации кварков и глюонов в чармонии в широкой кинематической области, согласно уравнению эволюции DGLAP.

### **Личный вклад автора**

Все представленные результаты были получены либо самим автором, либо при его определяющем участии. Во всех опубликованных работах вклад автора является основополагающим.

### **Достоверность и обоснованность результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью используемых в работе методов, которые успешно применяются в современной теоретической физике высоких энергий. В процессе проведения вычислений проводилось как сравнение с уже известными результатами вычислений других авторов, так и с различными экспериментальными данными.

### **Апробация работы**

Результаты, полученные в данной работе были опубликованы в 4 печатных работах в рецензируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus [54–57]:

1. A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, M.A. Malyshev, A.A. Prokhorov, S.M. Turchikhin, “Hard production of a Z boson plus heavy flavor jets at LHC and the intrinsic charm content of a proton” // Physical Review D - 2018 - Т.97 - С. 114019 (IF = 5.296)
2. A.A. Prokhorov, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, S.P. Baranov, “Revisiting the production of  $J/\psi$  pairs at the LHC” // The European Physical Journal C - 2020 - Т. 80 - С. 1046 (IF = 4.59)
3. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, A.A. Prokhorov, “Charm fragmentation and associated  $J/\psi + Z/W^\pm$  production at the LHC” // Physical Review D - 2021 - Т. 104 - С. 034018 (IF = 5.296)
4. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, A.A. Prokhorov, “Role of initial gluon emission in double  $J/\psi$  production at central rapidities” // Physical Review D - 2022 - Т.106 - С. 034020 (IF = 5.296)

Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. Прохоров А.А., Липатов А.В., Малышев М.А., Баранов С.П. “Ломоносовские чтения 2020”, подсекция “Физика высоких энергий”, онлайн, Москва, 23 октября 2020
2. Прохоров А.А., Липатов А.В., Малышев М.А., Баранов С.П., “Resummation, Evolution, Factorization 2020”, онлайн, Великобритания, 7-11 декабря 2020
3. Прохоров А.А., Липатов А.В., Баранов С.П., “50th International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2021)”, онлайн, Швейцария, 12-16 июля 2021
4. Прохоров А.А., Липатов А.В., Баранов С.П., “Resummation, Evolution, Factorization 2021”, онлайн, Германия, 15 - 19 ноября 2021
5. Прохоров А.А., Липатов А.В., Баранов С.П., “Ломоносовские чтения 2022”, подсекция “Физика высоких энергий” Москва, НИИЯФ, 18 апреля 2022
6. Прохоров А.А., Липатов А.В., Баранов С.П., “International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology”, Дубна, ОИЯИ, 18 - 21 июля 2022

## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка цитированной литературы. Общий объем диссертации составляет 124 страницы, включая 42 рисунка и 2 таблицы. Список литературы содержит 152 наименований.

В первой главе описаны основные уравнения эволюции, определяющие динамику партонных функций распределения, изложены основные идеи  $k_T$ -факторизационного подхода КХД и представлены TMD глюонные функции распределения, используемые в дальнейших численных расчетах.

Вторая глава посвящена теоретическим подходам к описанию процессов рождения тяжелых кваркониев. Рассмотрен формализм нерелятивистской КХД, а также различные фрагментационные механизмы, которые могут быть использованы в рамках этого подхода.

В третьей главе рассмотрены основные механизмы парного рождения  $J/\psi$  мезонов. Предложены методы учета ряда процессов парного рождения мезонов с помощью фрагментационного механизма в рамках подхода  $k_T$ -факторизации, а также проведена апробация данного метода на процессе парного рождения  $J/\psi$  мезонов. Рассмотрены дополнительные фрагментационные вклады в механизм двойного партонного рассеяния. Представлены результаты вычислений сечений парного рождения  $J/\psi$  мезонов, в рамках описанных механизмов и проведено сравнение с экспериментальными данными. Получена оценка эффективного сечения ДПР.

В четвертой главе рассмотрены процессы ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых кварков. Проведено сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчетами в коллинеарном и  $k_T$ -факторизационном подходах КХД. Исследована граница применимости последнего для изучения данных процессов. Проверена возможность обнаружения внутреннего очарования в этих процессах.

В пятой главе описаны фрагментационные процессы, дающие вклады в сечение ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$ . Приведены результаты вычислений фрагментационных вкладов в дифференциальные сечения изучаемых процессов и сравнение с имеющимися предсказаниями нерелятивистской КХД и экспериментальными данными. Сделаны выводы о роли фрагментационных вкладов.

В заключении кратко сформулированы основные результаты работы.

# 1 Уравнения эволюции партонных функций распределения

## 1.1 Глубоконеупругое рассеяние и партонная модель

В квантовой теории каждая частица имеет определенную длину волны, поэтому частица, имеющая достаточно малую длину волны (и, соответственно, достаточно большую энергию) может быть использована для исследования структуры частицы-мишени. В процессе глубоконеупругого рассеяния (ГНР) лептона на нуклоне фотон, испускаемый лептоном, может исследовать внутреннюю структуру этого нуклона. В экспериментах по ГНР лептона на протоне, проводимых на Стэнфордском линейном ускорителе (SLAC), было обнаружено, что нуклон состоит из нескольких упругих центров рассеяния. Такая составная структура нашла свое объяснение в партонной модели. В ней предполагается, что нуклон состоит из партонов (валентных кварков), на которых и происходит упругое рассеяние электронов. Помимо валентных кварков, в нуклоне находятся еще и глюоны — кванты сильного взаимодействия; однако их нельзя обнаружить напрямую в процессе ГНР лептона на нуклоне. Однако, глюоны могут образовывать кварк-антикварковые пары, которые участвуют в таком взаимодействии.

Рассмотрим процесс глубоконеупругого рассеяния лептона  $l$  на протоне  $p$ :

$$l(k) + p(p) \rightarrow l'(k') + X(p'), \quad (1)$$

где  $k$  и  $k'$  - 4-векторы начального и конечного лептонов, а  $p$  и  $p'$  - 4-векторы начального протона и конечного адронного состояния  $X$ . Лептон в результате взаимодействия отклоняется на угол  $\theta$  и детектируется. Виртуальность фотона обозначим:

$$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 = 4EE' \sin^2 \theta / 2, \quad (2)$$

где  $E$  и  $E'$  энергия начального и конечного лептона. Введем также  $\nu = E - E'$ .

Квадрат инвариантной массы  $W$  конечной адронной системы:

$$W^2 = (q + p)^2 = -Q^2 + 2pq + M^2 = -Q^2 + \frac{Q^2}{x_B} + M^2, \quad (3)$$

где  $x_B = Q^2/(2pq)$  - переменная Бьеркена, которая в партонной модели связана с долей импульса начального протона, уносимой партоном.

Дифференциальное сечение ГНР можно представить в виде [58]:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 E'}{Q^4 E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (4)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi$  - постоянная тонкой структуры,  $d\Omega$  - телесный угол рассеяния, а  $L^{\mu\nu}$  и  $W_{\mu\nu}$  - лептонный и адронный тензоры. Лептонный тензор для неполяризованных

электронов имеет симметричный вид:

$$L^{\mu\nu} = 2(k^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu}(kk') + k^\nu k'^\mu), \quad (5)$$

а адронный тензор  $W_{\mu\nu}$  с помощью адронного тока  $J_\mu$  можно представить в виде:

$$W_{\mu\nu} = \sum_X \langle p | J_\nu(-q) | X \rangle \langle X | J_\mu(q) | p \rangle 2\pi \delta(p + q - p'), \quad (6)$$

суммируя по промежуточным состояниям  $X$ .

В случае, если неполяризован и протон, то адронный тензор можно выразить с помощью скаляров  $W_1(\nu, Q^2)$  и  $W_2(\nu, Q^2)$ , зависящих только от инвариантных переменных  $\nu$  и  $q^2$  (здесь также был учтен закон сохранения тока  $\partial_\mu J^\mu = 0 \rightarrow q_\mu W^{\mu\nu} = 0$ ):

$$W^{\mu\nu} = W_1(\nu, Q^2) \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \frac{W_2(\nu, Q^2)}{M^2} \left( p^\mu - \frac{pq}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{pq}{q^2} q^\nu \right). \quad (7)$$

Сворачивая лептонный и адронный тензоры, получим дифференциальное сечение в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{(2\alpha E')^2}{Q^4} \times \left[ 2W_1(\nu, Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(\nu, Q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (8)$$

Заметим, что полученное выражение содержит в себе дифференциальное сечение Мотта, которое описывает упругое рассеяние частицы со спином  $1/2$  на точечной мишени:

$$\left( \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \right)_{\text{Мотт}} = \frac{(2\alpha E')^2}{Q^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

Обычно вводятся структурные функции вида  $F_1(x, Q^2) = MW_1(\nu, Q^2)$  и  $F_2(x, Q^2) = \nu W_2(\nu, Q^2)$ , тогда сечение можно переписать в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left( \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \right)_{\text{Мотт}} \times \left[ \frac{2}{M} F_1(x, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\nu} F_2(x, Q^2) \right] \quad (10)$$

Для структурных функций  $F_1$  и  $F_2$  экспериментально наблюдался приблизительный скейлинг [59], при котором для фиксированных значений величины  $2M\nu/Q^2$  структурные функции не будут зависеть от  $Q^2$ , т.е. справедливо  $F_{1,2}(x, Q^2) \simeq F_{1,2}(x)$ . Это подтверждает идею о том, что протон состоит из партонов, на которых и происходит упругое рассеяние электронов. При этом второе слагаемое в (10) описывает составную природу протона.

Таким образом, при рассмотрении ГНР можно перейти к процессу взаимодействия фотона с партоном, который уносит долю импульса  $x$  начального протона. Схематичный процесс изображен на Рис. 1 слева. Введем партонную функцию распределения (PDF)  $f_i(x)$ , которая определяет плотность вероятности нахождения партона (кварка или глюона) в адроне, несущего долю  $x$  импульса протона. Для них можно сформулировать закон сохранения энергии-импульса:

$$\sum_i \int dx x f_i(x) = 1, \quad (11)$$

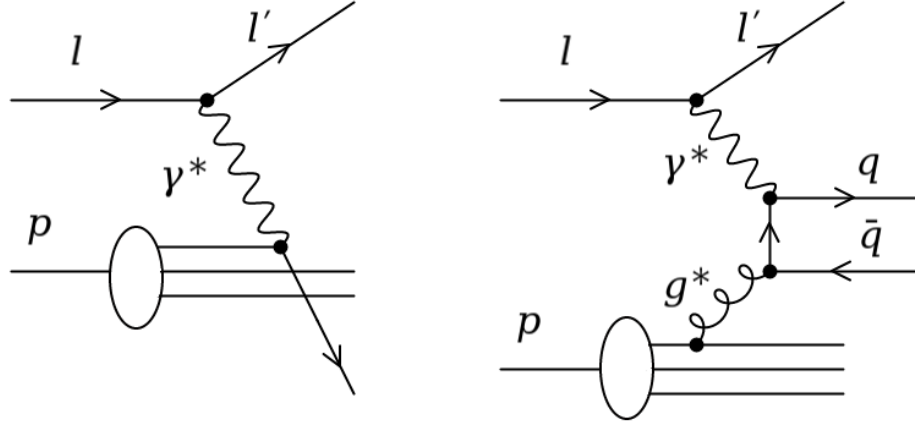


Рис. 1: Диаграмма Фейнмана для ГНР в лидирующем порядке (слева) и поправки к ГНР в следующем за лидирующим порядке, ведущие к нарушению скейлинга (справа).

где суммирование осуществляется по всем партонам в протоне.

Пренебрегая массой партона, можно получить выражения для структурных функций в виде [58]:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_{q,\bar{q}} \int d\xi q(\xi) x e_q^2 \delta(x - \xi) = \sum_{q,\bar{q}} e_q^2 x q(x). \quad (12)$$

В общем случае структурная функция  $F_2$  имеет вид:

$$F_2(x) = x \left[ \frac{4}{9}(u + \bar{u} + c + \bar{c}) + \frac{1}{9}(d + \bar{d} + s + \bar{s} + b + \bar{b}) \right], \quad (13)$$

где  $u, \bar{u}, \dots$  -кварковые функции распределения. При этом для валентных кварков в протоне справедливы соотношения:

$$\int_0^1 dx u_v(x) = 2, \quad \int_0^1 dx d_v(x) = 1. \quad (14)$$

Используя выражения для структурных функций нейтрона  $F_2^{en}$  и протона  $F_2^{ep}$  из уравнения энергии-импульса можно получить:

$$\int_0^1 dx x (u + \bar{u} + d + \bar{d}) \sim \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Проблема недостающего импульса протона решается введением глюонов (и соответствующей глюонной функции распределения  $g(x)$ ) — квантов сильного взаимодействия, которые не могут быть исследованы с помощью электромагнитного взаимодействия. Согласно партонной модели, кварки в нуклоне окружены “облаком” из глюонов и виртуальных кварк-антикварковых пар.

## 1.2 Уравнение эволюции DGLAP

Экспериментально было обнаружено, что скейлинг структурных функций выполняется только приближенно. Наличие глюонов позволяет объяснить логарифмическое нарушение скейлинга  $\ln \mu^2$  в поведении структурной функции  $F_2$ . При увеличении переданного импульса  $\mu^2$  фотон разрешает структуру протона при все больших и больших масштабах. Благодаря возможности расщепления глюона на морские кварки, фотон будет упруго рассеиваться и на них. Диаграмма данного процесса изображена на Рис. 1 (справа). Основной вклад определяется процессами, для которых каждый порядок малости  $\alpha_s$  константы сильной связи (возникающей в результате расщепления глюона) усиливается большими логарифмами вида  $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ . Для таких диаграмм выполняется условие сильного упорядочивания по виртуальности испущенных глюонов:

$$q_{nT} \gg \dots \gg q_{2T} \gg q_{1T}. \quad (16)$$

Условия упорядоченности определяют доступный для эмиссий фазовый объем. Такие процессы приводят к росту структурной функции  $F_2$  с увеличением  $Q^2$ .

Вклады, пропорциональные  $\sim \alpha_s^n \ln^n \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ , могут быть учтены во всех порядках теории возмущений с помощью уравнений эволюции Докшицера-Грибова-Липатова-Альтарелли-Паризи (DGLAP) [60–63], которые для кварковых и глюонных распределений принимают вид:

$$\frac{dq_i(x, \mu^2)}{d \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[ q_i(\xi, \mu^2) P_{qq} \left( \frac{x}{\xi} \right) + g(\xi, \mu^2) P_{qg} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right], \quad (17)$$

$$\frac{dg(x, \mu^2)}{d \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[ \sum_i q_i(\xi, \mu^2) P_{gq} \left( \frac{x}{\xi} \right) + g(\xi, \mu^2) P_{gg} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right]. \quad (18)$$

Эволюция DGLAP может быть представлена в виде лестничных диаграмм, для которых выполняется условие упорядоченности, как схематично изображено для  $ep$  взаимодействий на Рис. 2.

Функции расщепления  $P_{ij}(z)$  описывают вероятность того, что партон  $j$  испускает (коллинеарно) партон  $i$ , несущий долю импульса  $z$  начального партона, и могут быть представлены в виде ряда теории возмущений:

$$P_{ij}(z) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} P_{ij}^{(0)}(z) + \left( \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \right)^2 P_{ij}^{(1)}(z) + \dots \quad (19)$$

В ведущем порядке теории возмущений функции  $P_{ij}^{(0)}(z)$  описывают процессы, пред-



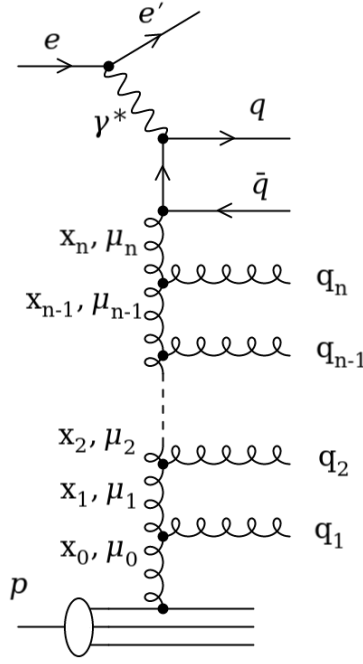


Рис. 2: Схематичное изображение эволюции DGLAP.

ставленные на Рис. 3 и имеют следующий аналитический вид:

$$P_{qq}^{(0)}(z) = C_F \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (20)$$

$$P_{gq}^{(0)}(z) = C_F \left[ \frac{1+(1-z)^2}{z} \right], \quad (21)$$

$$P_{qg}^{(0)}(z) = T_R [z^2 + (1-z)^2], \quad (22)$$

$$P_{gg}^{(0)}(z) = 2C_A \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \right] + \frac{11C_A - 4n_f T_R}{6} \delta(1-z), \quad (23)$$

где  $C_A = N_c$  - количество цветов,  $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$ ,  $T_R = 1/2$ ,  $n_f$  - количество кварковых ароматов.

Выражение вида  $1/(1-z)_+$  определяется согласно функционалу:

$$\int_0^1 dz g(z) \left[ \frac{f(z)}{1-z} \right]_+ = \int_0^1 dz f(z) \frac{g(z) - g(1)}{1-z}. \quad (24)$$

Функции расщепления (20)-(23) удовлетворяют закону сохранения барионного числа (независимость барионного числа от выбранного масштаба  $\mu^2$ ):

$$\int_0^1 dz q(z, \mu^2) = 1 \longrightarrow \int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0, \quad (25)$$

и также законам сохранения энергии-импульса:

$$\int_0^1 dz z (P_{qq}(z) + P_{gq}(z)) = 0, \quad (26)$$

$$\int_0^1 dz z (2n_f P_{qg}(z) + P_{gg}(z)) = 0. \quad (27)$$

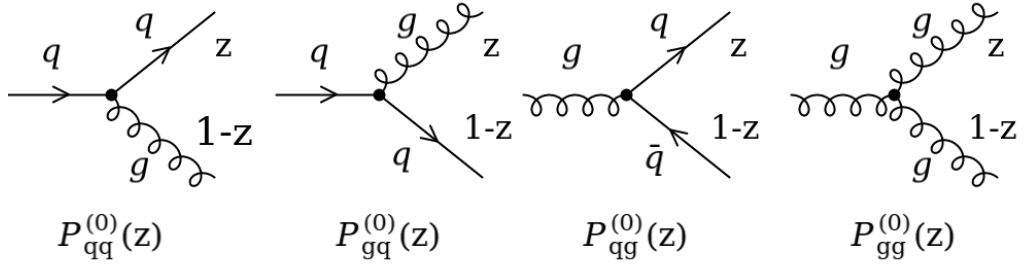


Рис. 3: Диаграммы процессов расщепления партонов в лидирующем порядке КХД.

В ведущем порядке теории возмущений бегущая константа связи  $\alpha_s(\mu^2)$  вычисляется из уравнения ренормгруппы в однопетлевом приближении:

$$\frac{d\alpha_s}{d \ln(\mu^2/\Lambda^2)} = -\frac{b}{4\pi}\alpha_s^2 \implies \alpha_s(\mu^2) = \frac{4\pi}{b \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (28)$$

где  $b = 11 - 2n_f/3$ .

Используя выражения для функций расщепления (20)-(23) и определение функционала (24), можно решить уравнения эволюции DGLAP (17)-(18) и определить кварковые  $q(x, \mu^2)$  и глюонные  $g(x, \mu^2)$  плотности при любом масштабе  $\mu^2$ . Например, в дваждылогарифмическом приближении можно получить асимптотическое поведение глюонных функций в области малых  $x$ , удерживая в функции расщепления  $P_{gg}(z)$  только расходящееся слагаемое  $\sim 1/z$ . Тогда, уравнение эволюции запишется в виде интегрального уравнения:

$$xg(x, \mu^2) = xg(x, \mu_0^2) + \frac{3\alpha_s}{\pi} \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \xi g(\xi, \mu'^2), \quad (29)$$

которое может быть решено методом последовательных приближений. Его асимптотическое решение имеет вид [60–63]:

$$xg(x, \mu^2) \sim \exp \left( 2 \sqrt{\frac{3\alpha_s}{\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \ln \frac{1}{x}} \right). \quad (30)$$

и приводит к быстрому росту плотности глюонов при малых  $x$  и, соответственно, сечению процессов рассеяния. Естественно, такой неограниченный рост сечения является нефизическим и приводит к нарушению условия унитарности [64]. Для устранения этой проблемы необходим учет поправок высших порядков. Так, с помощью уравнения DGLAP, учитывающего поправки следующего за лидирующим порядком, были успешно описаны экспериментальные данные для структурных функций протона, полученные на коллайдере HERA [59].

Устранить расходимости, возникающие от реальных вкладов мягких излучений глюонов, возникающих от слагаемых вида  $\sim 1/(1-z)$  при  $z \rightarrow 1$  в функции расщепления  $P_{gg}(z)$ , можно также с помощью форм-фактора Судакова, который суммирует

виртуальные поправки всех порядков. Его можно представить следующим образом:

$$\ln \Delta_s(\mu^2, \mu_0^2) = - \int dz \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} P_{gg}(z) \simeq - \int dz \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \frac{3\alpha_s(\mu'^2)}{\pi(1-z)}. \quad (31)$$

Здесь в функции расщепления  $P_{gg}(z)$  были удержаны только расходящиеся слагаемые  $1/(1-z)$  и  $N_c = 3$ . Тогда уравнение эволюции DGLAP можно записать в виде:

$$f_g(x, \mu^2) = f_g(x, \mu_0^2) \Delta_s(\mu^2, \mu_0^2) + \int \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \Delta_s(\mu^2, \mu'^2) \frac{\alpha_s(\mu'^2)}{2\pi} \int dz P_{gg}(z) f(x/z, \mu'^2), \quad (32)$$

где введены обозначения  $xg(x, \mu^2) = f_g(x, \mu^2)$ . Из полученного выражения видно, что форм-фактор Судакова  $\Delta_s(\mu^2, \mu_0^2)$  определяет вероятность отсутствия реальных излучений между двумя последующими актами излучения в процессе эволюции при характерных масштабах  $\mu_0^2$  и  $\mu^2$ , соответственно.

### 1.3 Уравнение эволюции BFKL

Уравнения эволюции DGLAP позволяют эффективно просуммировать вклады от слагаемых, пропорциональных большим логарифмам  $\sim \alpha_s^n \ln^n \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2$ . Однако, при высоких энергиях  $\sqrt{s}$  можно достичь областей, в которых суммарная энергия частиц во взаимодействии существенно больше передаваемых импульсов, то есть выполняется соотношение  $\mu^2/s \ll 1$ . В этих областях вклады, пропорциональные  $\alpha_s^n \ln^n s / \Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \alpha_s^n \ln^n 1/x$ , становятся существенными. Процедура суммирования таких слагаемых может быть выполнена в рамках подхода Балицкого-Фадина-Кураева-Липатова (BFKL) [65–67], что приводит к TMD функциям распределения партонов. Использование этого подхода позволяет получить уравнение эволюции в области малых  $x$ .

В основе подхода BFKL лежит гипотеза о реджезации глюонов. Рассмотрим процесс  $qq$  - рассеяния в пределе высоких энергий с обменом  $t$ -канальным глюоном, которое определяется условиями:

$$s \gg |t|, \quad u \simeq -s. \quad (33)$$

Аналитическое вычисление амплитуды данного процесса в ведущем порядке теории возмущений задает следующую энергетическую зависимость:

$$A^{(0)}(s, t) \sim 8\pi\alpha_s \frac{s}{t}. \quad (34)$$

Для вычисления этой амплитуды было использовано эйкональное приближение для  $qqg$  - вершины, соответствующее обмену мягким глюоном ( $q \ll p$ ):

$$V^\mu = -ig_s \bar{u}(p+q)\gamma^\mu u(p) \implies V^\mu \simeq -ig_s \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) = -2ig_s p^\mu \quad (35)$$

Учет вкладов виртуальных поправок высших порядков, которые представляются в виде петлевых диаграмм с октетным по цвету обменом несколькими глюонами, позволяет представить амплитуду в лидирующем логарифмическом приближении через борновскую амплитуду рассеяния:

$$A(s, t) = A^{(0)}(s, t) \left( 1 + \ln \left( \frac{s}{|t|} \right) \omega(t) + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{s}{|t|} \right) \omega^2(t) + \dots \right) = A^{(0)}(s, t) \left( \frac{s}{|t|} \right)^{\omega(t)} \quad (36)$$

Второе слагаемое в этой формуле отвечает за суммирование возникающих в виртуальных диаграммах больших логарифмов  $\ln s$  во всех порядках теории возмущений, причем:

$$\omega(t) = \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int -\mathbf{q}^2 \frac{d^2 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{k}, \mathbf{q}$  - виртуальности обменных глюонов.

Аналогичное выражение для амплитуды может быть получено в модели Редже [68] с обменом полюсом Редже в  $t$ -канале  $A(s, t) \sim (s/t)^{\alpha(t)}$ . Положение этих полюсов определяется траекторией Редже  $\alpha(t)$ , зависящей от переданных импульсов, при этом  $\alpha(0)$  называется интерсептом, а производная  $\alpha'(0)$  - наклоном траектории Редже. Таким образом, вместо обмена виртуальных глюонов можно рассматривать процесс рассеяния с  $t$ -канальным реджезованным глюоном, или Реджеоном ( $R$ ), для которого справедливо:

$$\alpha_g(t) = 1 + \omega(t), \quad (38)$$

при этом в калибровке Фейнмана пропагатор реджезованного глюона должен иметь вид:

$$D_{\mu\nu}(s, t) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{t} \left( \frac{s}{|t|} \right)^{\omega(t)}, \quad (39)$$

который содержит в себе виртуальные поправки всех порядков теории возмущений. Гипотеза реджезации глюонов в настоящее время доказана [69] как в главном логарифмическом, так и в следующем за ним приближениях.

Используя такое поведение амплитуд в подходе ВФКЛ можно представить амплитуду множественного рождения частиц  $2 \rightarrow 2 + n$  в так называемой мультiredжевской кинематике [70], в которой переданные импульсы значительно меньше энергии рождаемых частиц и характерно сильное упорядочивание по доле продольного импульса:

$$x_1 \gg x_2 \gg \dots \gg x_n. \quad (40)$$

Такой процесс можно представить в виде глюонной лестницы с испусканием  $n$  реальных глюонов и обменом  $t$ -канальными реджезованными глюонами, а амплитуды

выражаются через эффективные вершины взаимодействия  $RRg$  и пропагаторы реджезованных глюонов:

$$A_{\nu_1 \dots \nu_n}^{2 \rightarrow 2+n} \sim p_1^{\mu_1} \times \left\{ \prod_{i=1}^n \Gamma_{\mu_i \mu_{i+1}}^{\nu_i}(k_i, -k_{i+1}) \frac{1}{t_i} \left( \frac{s_i}{|t_i|} \right)^{\omega(t_i)} \right\} \times \frac{1}{t_{n+1}} \left( \frac{s_{n+1}}{|t_{n+1}|} \right)^{\omega(t_{n+1})} \times p_2^{\mu_{n+1}}, \quad (41)$$

где  $s_i = (k_{i-1} - k_{i+1})^2$ , а  $t_i = k_i^2$ ,  $\Gamma_{\mu_i \mu_{i+1}}^{\nu_i}(k_i, -k_{i+1})$  - эффективная вершина взаимодействия  $RRg$  [71] (эффективная вершина Липатова), а константы связи и цветовые факторы были опущены для простоты выражения.

Рассматривая все возможные лестничные диаграммы, описываемые амплитудами (41), можно получить уравнение ВФКЛ в лидирующем логарифмическом приближении для глюонных функций распределения  $f_g(x, k_T^2)$ :

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = f_g^0(x, \mathbf{k}_T^2) + \frac{3\alpha_s \mathbf{k}_T^2}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \int_{\mu_0^2}^{\infty} \frac{dq^2}{q^2} \left( \frac{f(x/z, q^2) - f(x/z, \mathbf{k}_T^2)}{|q^2 - \mathbf{k}_T^2|} + \frac{f(x/z, \mathbf{k}_T^2)}{\sqrt{4q^4 + \mathbf{k}_T^4}} \right), \quad (42)$$

где  $f_g^0(x, \mathbf{k}_T^2)$  - начальная функция распределения глюонов.

Поскольку неинтегрированная функция распределения  $f_g(x, \mathbf{k}_T^2)$  связана с коллинеарной функцией  $xg(x, \mu^2)$  соотношением:

$$xg(x, \mu^2) \simeq \int \frac{d\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{k}_T^2} f_g(x, \mathbf{k}_T^2) \Theta(\mu^2 - \mathbf{k}_T^2), \quad (43)$$

можно получить асимптотическое поведение глюонной функции в области малых  $x$  эволюции ВФКЛ:

$$xg(x, \mu^2) \sim x^{-\Delta}, \quad (44)$$

где  $\Delta = 4 \frac{3\alpha_s}{\pi} \ln 2 \simeq 0.53$  при  $\alpha_s = 0.2$ , что приводит к зависимости сечений процессов рассеяния как  $\sigma \sim s^\Delta$  [65–67, 72]. Данная зависимость соответствует результатам, получаемым в теории полюсов Редже при высоких энергиях. Заметим, что полученная величина  $\Delta$  связана с интерсептом Померона<sup>1</sup>:  $\alpha_P(0) = 1 + \Delta$ . Таким образом, можно связать пертурбативную КХД и теорию Редже, при этом обмен Помероном между кварками может рассматриваться как обмен двумя реджезованными глюонами с возникновением глюонных лестниц.

Получаемый из уравнения ВФКЛ в главном логарифмическом приближении степенной рост сечения асимптотически нарушает условие унитарности. Следовательно, вычисление поправок к главному логарифмическому приближению очень важно. Расчеты уравнения ВФКЛ в следующем за главным логарифмическим приближении

<sup>1</sup>Померон отвечает полюсу Редже, обладающему квантовыми числами вакуума и интерсептом, близким к единице. Обмен Помероном обеспечивает равенство полных сечений рассеяния частица-частица и частица-античастица в пределе высоких энергий.

были выполнены в работах [73–75]. В этом приближении возникают слагаемые, соответствующие дваждылогарифмическим вкладам в уравнениях эволюции DGLAP. Их учет в фиксированном порядке теории возмущений приводит к осцилляциям функции Грина уравнения VFKL. Это, в свою очередь, может привести к отрицательным сечениям и значительным поправкам величины  $\Delta$  (см. например, [75]). Однако такие вклады могут быть эффективно просуммированы с помощью метода ренормгруппы во всех порядках, как было показано в [76–78].

На определенном этапе резкий рост глюонных плотностей должен измениться (чтобы сохранить условие унитарности) из-за учета дополнительных факторов, таких как конечный поперечный размер партонов или их нелинейное взаимодействие, которые приведут к эффектам насыщения (замедлению роста данных плотностей). Для последних была разработана модель Color Glass Condensate (CGC), которая описывает насыщенную равновесную партонную систему как Бозе-конденсат глюонов с достаточно медленным изменением полей [79].

Отметим, что из уравнения вида (32) можно получить поведение (44) для глюонных распределений в области  $t/s \ll 1$ , переходя к TMD глюонным функциям распределения  $f(x, \mathbf{k}_T^2)$ . Для этого рассмотрим лестницу эволюции глюонных распределений, изображенную на Рис.4. Условие упорядочивания (40), согласно условию связи  $z = x_i/x_{i-1}$ , отвечает пределу  $z \rightarrow 0$  при каждом испускании глюона, т.е. испущенный глюон уносит основную часть энергии. При этом сильное упорядочивание по виртуальности исчезает, что позволяет свободно изменяться поперечным импульсам обменных глюонов  $\mathbf{k}_T^2$ .

Расходимости вида  $1/z$  при  $z \rightarrow 0$  в функции расщепления  $P_{gg}(z)$  могут быть эффективно устранены, по аналогии с форм-фактором Судакова (31) для расходимостей  $z \rightarrow 1$ , суммированием виртуальных вкладов с помощью так называемого несудаковского форм-фактора, который задается в виде:

$$\ln \Delta_{ns} = -\frac{3\alpha_s}{\pi} \int \frac{dq'^2}{q'^2} \int_z^1 \frac{dz'}{z'} \Theta(k_T - q') \Theta(q' - \mu_0). \quad (45)$$

Здесь, в функции расщепления были удержаны только расходящиеся слагаемые  $\sim 1/z$  в пределе  $z \rightarrow 0$ . Проводя интегрирование в формуле, можно записать:

$$\Delta_{ns} = \exp \left[ -\frac{3\alpha_s}{\pi} \ln \frac{1}{z} \ln \frac{\mathbf{k}_T^2}{\mu_0^2} \right] = z^\omega, \text{ где } \omega = \frac{3\alpha_s}{\pi} \ln \frac{\mathbf{k}_T^2}{\mu_0^2}. \quad (46)$$

Можно ввести функцию расщепления  $\tilde{P}_{gg}(x, \mathbf{k}_T)$ , явно зависящую от поперечного импульса  $\mathbf{k}_T$ :

$$\tilde{P}_{gg}(z, q, \mathbf{k}_T) = \frac{6}{z} \Delta_{ns} = 6z^{-1+\omega}. \quad (47)$$

Тогда, уравнение эволюции VFKL можно записать в форме, аналогичной (32):

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = f_g^0(x, \mathbf{k}_T^2) + \frac{3\alpha_s}{\pi} \int \frac{dz}{z} z^\omega \int \frac{dq'^2}{q'^2} f_g(x/z, q'^2), \quad (48)$$

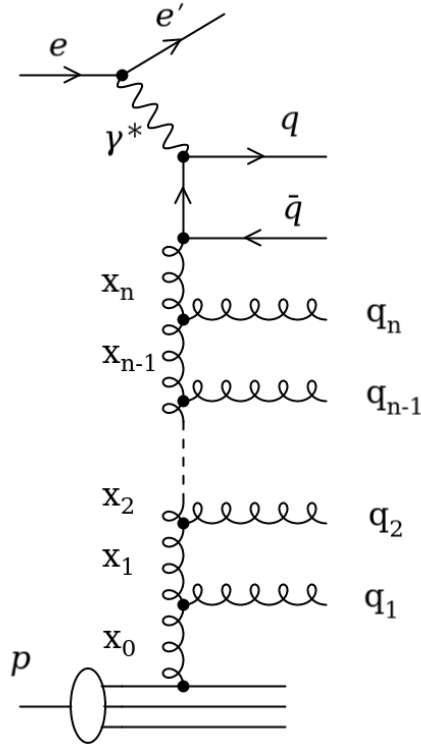


Рис. 4: Схематичное изображение эволюции BFKL.

где учитывалось  $\Delta_s = 1$ , потому что в пределе BFKL эмиссии при  $z \rightarrow 1$  подавлены.

Из данного уравнения, интегрируя по поперечным импульсам, согласно (43), можно получить аналогичное с (44) асимптотическое поведение глюонной функции в области малых  $x$  эволюции BFKL.

#### 1.4 Уравнение эволюции CCFM

В работах [80–83] был предложен метод суммирования дополнительных вкладов пропорциональных  $\sim \alpha_s^n \ln^n 1/(1-x)$ , которые могут играть важную роль в области промежуточных энергий (области промежуточных  $x$ ), помимо больших логарифмов  $\alpha_s^n \ln^n 1/x$ . Такое суммирование может быть выполнено с помощью уравнения глюонной эволюции Катани-Чиафалони-Фиорани-Маркезини (CCFM). В этом уравнении партонные эмиссии подчиняются условию угловой упорядоченности, которая следует из эффекта цветовой когерентности.

Для объяснения этого эффекта рассмотрим процесс расщепления немассового глюона на пару глюонов. Если в момент испускания очередного глюона пространственное разделение пары вторичных глюонов окажется меньше поперечной длины волны испущенного глюона, то последний будет чувствовать только полный цвет пары глюонов (или, что то же самое, цвет изначального глюона). Это приводит к тому, что амплитуда таких процессов будет равняться амплитуде процесса, где последний

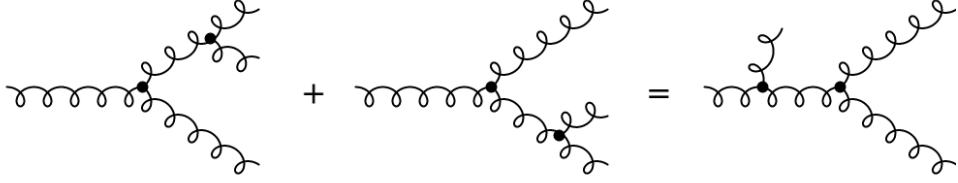


Рис. 5: Иллюстрация условия угловой упорядоченности испускания глюонов, основанной на эффекте цветовой когерентности.

глюон испускается из первоначального глюона, как это показано на Рис. 5. Вводя углы разлета глюонов  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$ , условие угловой упорядоченности можно записать в виде  $\tilde{\theta}_2 < \tilde{\theta}_1$  (подробнее см. [84]).

Покажем, как данный эффект влияет на условия упорядочивания эволюции. Для этого рассмотрим пару последовательных актов испускания глюонов с 4-импульсами  $q_i$  и  $q_{i+1}$  под углами  $\theta_i$  и  $\theta_{i+1}$  относительно движения начального протона, соответственно. Данный процесс изображен на Рис. 6. Переменные расщепления  $z_i$  определяются как  $z_i = E_i/E_{i-1}$  и  $z_{i+1} = E_{i+1}/E_i$ . Поперечные импульсы испускаемых глюонов могут быть получены из соотношения:

$$E_{i-1} = E_i + q_0 = z_i E_{i-1} + q_0 \implies q_T = (1 - z_i) E_{i-1} \theta_i. \quad (49)$$

Введем переменную, связанную с поперечным импульсом испущенного глюона:  $q_i = q_T/(1 - z_i)$ . Тогда углы можно выразить как  $\theta_i = q_i/E_{i-1}$ ,  $\theta_{i+1} = q_{i+1}/E_i$ . Из условия иерархии углов получим:

$$\theta_{i+1} > \theta_i \implies q_{i+1} > \frac{E_i}{E_{i-1}} q_i = z_i q_i. \quad (50)$$

Обобщая рассмотрение на все эмиссии, получим условие углового упорядочивания:

$$q > z_n q_n > z_{n-1} q_{n-1} > \dots > q_1 > q_0, \quad (51)$$

где  $q$  будет играть роль характерного параметра эволюции, определяющегося углом рассеяния кварк-антикварковой пары, образованной на последнем этапе эволюции. Отметим, что в пределе  $z \rightarrow 0$  условие углового упорядочивания (51) приводит к ослаблению ограничений на  $q_i$ , а следовательно к поперечным импульсам  $k_T$  обменных и  $q_T$  испущенных глюонов, что характерно для эволюции ВФКЛ. В пределе  $z \rightarrow 1$  условие углового упорядочивания сводится к упорядочиванию по виртуальности, что соответствует эволюции DGLAP.

В лидирующем логарифмическом приближении уравнение эволюции ССФМ может быть записано в виде:

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2, q^2) = f_g(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2) \Delta_s(q, q_0) + \int dz \int \frac{dq'^2}{q'^2} \Theta(q - zq') \times \quad (52)$$

$$\times \Delta_s(q, zq') \tilde{P}_{gg}(z, q', \mathbf{k}_T) f_g(x/z, \mathbf{k}_T^2, q'^2),$$



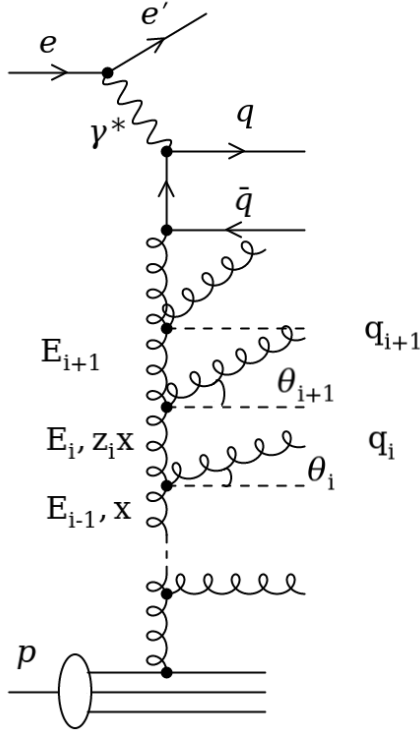


Рис. 6: Схематичное представление последовательного испускания глюонов, подчиняющихся условию углового упорядочивания.

где  $\mathbf{k}'_T = \mathbf{k}_T + (1 - z)\mathbf{q}$  и  $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$  — начальная TMD функция распределения глюонов.  $\Theta(q - zq')$  представляет собой условие углового упорядочивания (51).

Используя выражение (23) и разделив расходимости при  $z \rightarrow 1$  и  $z \rightarrow 0$ , функцию расщепления  $\tilde{P}_{gg}(z, q, \mathbf{k}_T)$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{gg}(z, q, \mathbf{k}_T) = & \frac{3\alpha_s((1-z)^2q^2)}{\pi} \left[ \frac{z}{1-z} + \frac{z(1-z)}{2} \right] + \\ & + \frac{3\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{\pi} \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z(1-z)}{2} \right] \Delta_{ns}(z, q^2, \mathbf{k}_T^2). \end{aligned} \quad (53)$$

Судаковский форм-фактор, согласно (31), задается формулой:

$$\ln \Delta_s(q, q_0) = -\frac{3}{\pi} \int_{q_0^2}^{q^2} \frac{dq'^2}{q'^2} \int_0^{1-\frac{q_0}{q}} dz \frac{\alpha_s((1-z)^2q'^2)}{1-z}, \quad (54)$$

а несудаковский (45):

$$\begin{aligned} \ln \Delta_{ns}(z, q^2, \mathbf{k}_T^2) = & -\frac{3\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{\pi} \int \frac{dq'^2}{q'^2} \int_z^1 \frac{dz'}{z'} \Theta(k_T - q') \Theta(q' - zq) = \\ = & -\frac{3\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{\pi} \ln \left( \frac{z_0}{z} \right) \ln \left( \frac{\mathbf{k}_T^2}{z_0 z q^2} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

где величина  $z_0$ , согласно ограничениям из функций  $\Theta$ , определяется как:

$$z_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } k_T/q > 1 \\ k_T/q, & \text{если } z < k_T/q \leq 1 \\ z, & \text{если } k_T/q \leq z. \end{cases} \quad (56)$$

Нетрудно заметить, что в асимптотике  $z \rightarrow 0$  судаковский фактор  $\Delta_s \rightarrow 1$  и уравнение эволюции ССФМ (52) переходит в уравнение ВФКЛ (48), а в пределе  $z \rightarrow 1$  исчезает несудаковский фактор  $\Delta_{ns} = 0$  и уравнение ССФМ переходит (при интегрировании по поперечному импульсу  $\mathbf{k}_T^2$ ) в уравнение DGLAP (32). Таким образом, уравнение эволюции ССФМ объединяет в себе оба предельных случая эволюции и является своего рода интерполяцией между ними.

Как говорилось ранее, верхний предел эволюции  $q$  определяется максимальным углом разлета кварк-антикварковой пары  $q\bar{q}$ , образованной в жестком взаимодействии. Характерный масштаб  $q^2$  можно связать с кинематикой кварков и представить в виде:

$$q^2 \simeq \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2, \quad (57)$$

где  $\hat{s} = (p_q + p_{\bar{q}})^2$  - энергия партонного подпроцесса, а  $\mathbf{Q}_T = \mathbf{p}_{qT} + \mathbf{p}_{\bar{q}T}$  - поперечный импульс пары кварков. Выражение (57) обычно выбирается в роли факторизационного масштаба  $\mu_F$  в феноменологических расчетах при использовании TMD партонных функций, подчиняющихся уравнению эволюции ССФМ.

## 1.5 Подход $k_T$ -факторизации в КХД

В коллинеарном подходе, основанном на уравнении эволюции DGLAP (17), (18), функции распределения партонов зависят только от доли импульса протона  $x$  и масштаба  $\mu^2$ . Условие сильного упорядочивания по виртуальности (16) приводит к тому, что поперечный импульс партонов мал,  $\mathbf{k}_T^2 \ll \mu^2$ , и им можно пренебречь в расчетах. Сечение рождения частиц в коллинеарном пределе может быть представлено в факторизованном виде, т.е. в виде свертки сечений партонного подпроцесса и функций распределения партонов [85]:

$$d\sigma(pp \rightarrow H + X) = \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} f_1(x_1, \mu_F^2) f_2(x_2, \mu_F^2) \hat{\sigma}(k_1, k_2, \mu_R^2), \quad (58)$$

где  $\hat{\sigma}$  - сечение партонного подпроцесса,  $\mu_F^2$  и  $\mu_R^2$  - факторизационные и ренормализационные масштабы,  $f_1(x_1, \mu_F^2)$ ,  $f_2(x_2, \mu_F^2)$  - коллинеарные функции распределения партонов, подчиняющиеся уравнению эволюции DGLAP, а  $k_1$  и  $k_2$  - векторы 4-импульсов сталкивающихся партонов, которые в безмассовом пределе имеют вид:

$$k_1 = \left\{ \frac{x_1\sqrt{s}}{2}, 0, \frac{x_1\sqrt{s}}{2} \right\}, \quad k_2 = \left\{ \frac{x_2\sqrt{s}}{2}, 0, -\frac{x_2\sqrt{s}}{2} \right\}. \quad (59)$$

Однако, предположения о коллинеарной факторизации функций распределения партонов и сечений подпроцессов должны нарушаться при переходе в область больших энергий (и, соответственно, малых  $x$ ), поскольку становится необходимо учитывать зависимость функций распределения и сечений партонных подпроцессов от поперечного импульса. Как уже было сказано, возникающие вклады  $\sim \alpha_s^n \ln^n 1/x$  можно эффективно учесть с помощью уравнений эволюции BFKL или CCFM. При этом факторизация сечений партонных подпроцессов и функций распределения партонов может быть обобщена за коллинеарное приближение:

$$d\sigma = \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} f_1(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu_F^2) f_2(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2) d\hat{\sigma}^*(k_1, k_2, \mu_R^2), \quad (60)$$

где  $\hat{\sigma}^*$  - сечение партонного подпроцесса вне массовой поверхности,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — азимутальные углы начальных партонов,  $f_1(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu_F^2)$ ,  $f_2(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2)$  — TMD функции распределения партонов, подчиняющиеся уравнению эволюции BFKL или CCFM, а  $k_1$  и  $k_2$  в безмассовом пределе имеют вид:

$$k_1 = \left\{ \frac{x_1 \sqrt{s}}{2}, \mathbf{k}_{1T}, \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} \right\}, \quad k_2 = \left\{ \frac{x_2 \sqrt{s}}{2}, \mathbf{k}_{2T}, -\frac{x_2 \sqrt{s}}{2} \right\}, \quad (61)$$

причем  $k^2 = -\mathbf{k}_T^2$ . Такое обобщение факторизации называют  $k_T$ -факторизацией или TMD-факторизацией [86, 87].

Теоретическое обоснование  $k_T$ -факторизации было приведено для процессов полуйнклюзивного глубоконеупругого рассеяния, процессов рождения адронов и струй в противоположных направлениях в  $e^+e^-$  — аннигиляции и для процессов Дрелла-Яна в адронных столкновениях [88–91]. В настоящее время этот подход достаточно широко применяется для расчетов сечений различных процессов, таких как рождение тяжелых кварков, калибровочных бозонов и бозонов Хиггса, чармониев и т.д. (см. например [16–20, 92–100] и ссылки в них).

Вычисление сечений различных процессов в подходе  $k_T$ -факторизации КХД имеет техническое преимущество по сравнению с коллинеарным подходом, которое заключается в учете значительной части поправок высших порядков коллинеарной КХД в форме TMD функций распределения партонов. При этом, в настоящее время большинство расчетов сечений партонных подпроцессов вне массовой поверхности ограничены ведущим порядком. Действительно, учет следующих порядков может приводить к известной проблеме двойного счета. Тем не менее, недавно были предложены процедуры исключения двойного счета (см. обсуждения в [101, 102]).

## 1.6 Амплитуды вне массовой поверхности и калибровочная инвариантность

При вычислении сечений в подходе  $k_T$ -факторизации возникает вопрос о выполнении условия калибровочной инвариантности амплитуд подпроцессов, зависящих

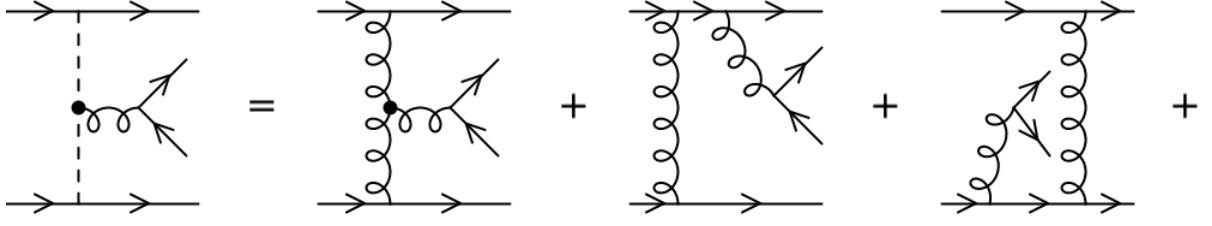


Рис. 7: Представление суммы факторизуемой и нефакторизуемых диаграмм, в которых кварковая пара рождается от одного глюона, в виде эффективной вершины Липатова.

от виртуальности начальных частиц. Для этого необходимо явно учитывать, что партоны вне массовой поверхности должны быть излучены другими партонами, находящимися на массовой поверхности, что приводит к расширению набора диаграмм, часть из которых имеет не факторизованный вид. Например, для процессов с участием пары начальных глюонов вне массовой поверхности, калибровочно-инвариантный набор фейнмановских диаграмм приведен на Рис.7. Вычисление таких подпроцессов может быть выполнено в рамках формализма, основанного на эффективной теории поля в мультиреджевской кинематике [70]. При этом калибровочная инвариантность во всех порядках теории возмущений будет обеспечиваться использованием эффективных вершин взаимодействия.

Действительно, рассмотрим соответствующий подпроцесс:

$$q(p_1) + q(p_2) \rightarrow q(p'_1) + q(p'_2) + g(k). \quad (62)$$

Амплитуды для всех диаграмм на Рис.7 не сложно вычислить, используя эйкональное приближение (35). Тогда, суммируя все вклады, полную амплитуду можно представить в виде:

$$iA_{2 \rightarrow 3} = (-2ig_s p_1^\mu t^a) \left( -\frac{i}{k_1^2} \right) \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2) \epsilon_c^\lambda(k) \left( -\frac{i}{k_2^2} \right) (-2ig_s p_2^\nu t^b), \quad (63)$$

где  $k = k_1 + k_2$ , а  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2)$  - эффективная вершина Липатова, которая в калибровке Фейнмана принимает вид [71]:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2) = -g_s f^{abc} \frac{2p_1^\nu p_2^\mu}{s} \left[ (k_2 - k_1)_\lambda + \left( \frac{k_1^2}{\beta s} + \alpha \right) 2p_{1\lambda} - \left( \frac{k_2^2}{\alpha s} + \beta \right) 2p_{2\lambda} \right], \quad (64)$$

где  $s = (p_1 + p_2)^2$ , а для импульсов глюонов были использованы соотношения  $k_1^\mu = \alpha p_1^\mu + k_{1T}^\mu$  и  $k_2^\mu = \beta p_2^\mu + k_{2T}^\mu$ . Можно проверить, что выражение (64) удовлетворяет условию калибровочной инвариантности:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2)(k_1 + k_2)^\lambda = 0. \quad (65)$$

Отметим, что выбирая выражение для поляризационного тензора начальных глюонов в аксиальной калибровке:

$$d_{\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + k_\mu n_\nu}{nk} - n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(nk)^2}, \quad (66)$$

$$n^\mu = ap_1^\mu + bp_2^\mu \quad (67)$$

получим, что его свертка с эйкональными вершинами дает следующие соотношения:

$$p_1^\mu d_{\mu\nu}(k_1) = \frac{k_{1T\nu}}{\alpha}, \quad p_2^\mu d_{\mu\nu}(k_2) = \frac{k_{2T\nu}}{\beta}, \quad (68)$$

что приводит к нулевым амплитудам всех нефакторизуемых диаграмм, представленных на Рис. 7, поскольку для t-канального глюона выполняется соотношение  $p_1^\mu d_{\mu\nu}(k)p_2^\nu = 0$ .

Аналогичного результата можно добиться, выбирая вектор поляризации для начальных глюонов в виде  $\epsilon^\mu(k) = k_T^\mu/|\mathbf{k}_T|$ . В этом случае эффективная вершина взаимодействия (64) может быть заменена обычной трехглюонной вершиной. Таким образом, связывая  $\alpha$  и  $\beta$  с долями импульса протона  $x_1$  и  $x_2$ , можно перейти к подпроцессу глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow g^*(k), \quad (69)$$

где для глюонов вне массовой поверхности используется поляризационный тензор:

$$\sum \epsilon^\mu(k) \epsilon^{*\nu}(k) = \frac{k_T^\mu k_T^\nu}{\mathbf{k}_T^2}, \quad (70)$$

а сечение рассчитывается по формуле (60). При этом выполняется условие калибровочной инвариантности амплитуд. В коллинеарном пределе  $|\mathbf{k}_T| \rightarrow 0$  выражение (70) переходит в стандартное выражение поляризационного тензора  $(-g^{\mu\nu}/2)$ .

## 1.7 TMD функции распределения глюонов в протоне

При проведении расчетов сечений в подходе  $k_T$ -факторизации используются TMD распределения партонов в протоне, которые получаются с помощью аналитических или численных решений уравнений эволюции BFKL или CCFM<sup>2</sup>. Большая часть таких распределений включена в библиотеку TMDLIB [106]. Приведем краткое описание TMD распределений глюонов, используемых в данной работе, а именно наборы распределений A0, JH'2013 set 1 и set 2.

В работе [51] было получено численное решение уравнения эволюции CCFM (52) с помощью метода Монте-Карло, учитывающее только сингулярные слагаемые ( $z \rightarrow 0$

---

<sup>2</sup>Также TMD распределения кварков и глюонов могут быть вычислены в рамках подхода KMR (Kimber-Martin-Ryskin) в ведущем [103, 104] или следующим за ним приближении [105], см. также [100]

и  $z \rightarrow 1$ ) в функции расщепления (53). Начальная функция распределения глюонов в протоне имела общий вид, с учетом гауссова распределения по поперечному импульсу:

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2) = N x^{p_0} (1-x)^{p_1} \exp(-\mathbf{k}_T^2/k_0^2), \quad (71)$$

где  $p_1 = 4$  был зафиксирован, а свободные параметры  $N$ ,  $p_0$  и  $k_0$  были определены из условия наилучшего описания экспериментальных данных коллабораций H1 и ZEUS для структурной функции протона  $F_2(x, Q^2)$  в области  $x < 5 \cdot 10^{-3}$  и  $Q^2 > 4.5 \text{ ГэВ}^2$ . Для избежания расходимостей, возникающих при  $z \rightarrow 1$  в функции расщепления (53) и форм-факторе Судакова (54), было введено ограничение для области интегрирования, задающееся параметром мягкого обрезания  $q_{\text{soft}} = 1.3 \text{ ГэВ}$ . Кроме этого, постулировалось отсутствие эмиссий при  $|\mathbf{k}_T| < k_T^{\text{cut}}$ .

Функция распределения  $A_0$ , предложенная в этой работе, была получена с параметрами  $p_0 = 0$ ,  $k_0 = k_T^{\text{cut}} = 1.3 \text{ ГэВ}$ . В расчетах использовалось выражение для константы сильного взаимодействия в однопетлевом приближении с параметрами  $n_f = 4$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}} = 250 \text{ МэВ}$ . Для факторизационного масштаба использовалось определение (57). Также были получены вариации данной TMD глюонной функции, отвечающие изменению масштаба ренормализации:  $\mu_R \rightarrow 2\mu_R (A_0+)$  и  $\mu_R \rightarrow \mu_R/2 (A_0-)$ .

Как было отмечено выше, при решении уравнения эволюции в [51] были учтены только сингулярные части функции расщепления (53). Однако для промежуточных значений переменной  $x$  становятся важны также несингулярные компоненты. Учет таких слагаемых был осуществлен в работе [52], в которой были представлены два новых набора TMD глюонных функций: JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2. В качестве начального выражения использовалось то же самое начальное распределение в виде (71). Численные значения соответствующих параметров были определены из данных коллаборации H1 и ZEUS для структурных функций протона. Для функции JH'2013 set 1 параметры были получены из описания данных для  $F_2(x, Q^2)$  в области  $x < 5 \cdot 10^{-3}$  и  $Q^2 > 5 \text{ ГэВ}^2$  ( $p_0 = -0.18074$ ,  $p_1 = 6.5732$ ,  $k_0 = k_T^{\text{cut}} = 2.2 \text{ ГэВ}$ ). Для функции JH'2013 set 2 дополнительно были использованы данные для  $F_2^c(x, Q^2)$  при  $Q^2 > 2.5 \text{ ГэВ}^2$  ( $p_0 = -0.14739$ ,  $p_1 = 11.431$ ,  $k_0 = k_T^{\text{cut}} = 2.2 \text{ ГэВ}$ ). В расчетах использовалось выражение для константы сильного взаимодействия в двухпетлевом приближении с параметрами  $n_f = 4$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}} = 200 \text{ МэВ}$ . Помимо этого, были получены вариации TMD глюонных распределений JH'2013 mur+ (muf+) и JH'2013 mur-(muf-), соответствующие измененным масштабам:  $\mu_R \rightarrow 2\mu_R$  ( $\mu_F \rightarrow 2\mu_F$ ) и  $\mu_R \rightarrow \mu_R/2$  ( $\mu_F \rightarrow \mu_F/2$ ).

## 2 Теоретические подходы для вычисления сечений процессов рождения тяжелых кваркониев

### 2.1 Формализм нерелятивистской КХД

Процессы образования тяжелых кваркониев включают различные энергетические масштабы. Наиболее важный масштаб связан с массой тяжелых кварков  $m_Q$ . Он описывает характерные расстояния, на которых образуется кварк-антикварковая пара  $Q\bar{Q}$ . Такой процесс может быть рассчитан пертурбативными методами КХД, поскольку константа связи на таких масштабах мала  $\alpha_s(m_Q)^2 \ll 1$ . Следующие масштабы связаны с импульсом кваркония  $m_Q v$  и его кинетической энергией  $m_Q v^2$ , где  $v$  — скорость кварков в системе покоя кваркония. Параметр  $v$  считается малым; его значение может быть определено из потенциальной модели. Кинетическая энергия кварков должна быть скомпенсирована потенциальной энергией взаимодействия  $U \sim -\alpha_s(1/r)/r$ , взятой в виде цветового кулоновского потенциала, где  $r \sim 1/(m_Q v)$  — характерный размер связанного состояний. Отсюда можно получить зависимость  $v \sim \alpha_s(m_Q v)$ , которая позволяет оценить величины скоростей  $v$ . Так, для чармониев  $v_c^2 \sim 0.23$  [5]. Это приводит к иерархии масштабов:  $m_Q v^2 \ll m_Q v \ll m_Q$ ; при этом движение кварков с хорошей точностью можно считать нерелятивистским. Кроме этого, процессы на малых и больших расстояниях могут быть разделены, так как происходят на различных энергетических масштабах. Для описания таких процессов была предложена теоретико-полевая модель нерелятивистской КХД (NRQCD) [5–7], которая основана на разложении ряда теории возмущений по степеням малого параметра  $v$  и константы связи КХД  $\alpha_s$ . В формализме NRQCD сечение процесса образования тяжелого кваркония  $\mathcal{H}$  в столкновении партонов  $a + b \rightarrow \mathcal{H} + X$  может быть представлено в виде:

$$d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow \mathcal{H} + X) = \sum_n d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow Q\bar{Q}[n] + X) \langle \mathcal{O}^{\mathcal{H}}(n) \rangle, \quad (72)$$

где  $a$  и  $b$  обозначают начальные взаимодействующие партоны. Сечение рождения пары тяжелых кварков  $Q\bar{Q}$  в Фоковском состоянии  $n = {}^{2S+1}L_J^{(a)}$  (с определенным значением спина  $S$ , орбитального  $L$  и полного  $J$  углового моментов и цветовым представлением  $a$ : синглетным,  $a = 1$ , и октетным,  $a = 8$ ) описывает взаимодействие на малом расстоянии ( $\mu \sim m_Q$ ). Взаимодействие на больших расстояниях имеет непертурбативную природу и описывается с помощью непертурбативных матричных элементов (NME)  $\langle \mathcal{O}^{\mathcal{H}}[n] \rangle$ . Они определяют переход промежуточного состояния  $Q\bar{Q}[n]$  в физический кварконий посредством испускания одного или нескольких мягких глюонов и подчиняются разложению по малому параметру  $v$ . Помимо этого, предполагается, что они не зависят от типа процесса, энергии, и могут быть извлечены из экспериментальных данных.

Рассмотрим разложение волновых функций  $S$ -волновых чармониев  $\psi = J/\psi$ ,  $\psi'$  и  $P$ -волновых чармониев  $\chi_{cJ}$  ( $J = 0, 1, 2$ ) по малому параметру  $v$  и Фоковским состояниям:

$$|\psi\rangle = O(v^0)|c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]\rangle + O(v^1)|c\bar{c}[{}^3P_J^{(8)}]g\rangle + O(v^2)|c\bar{c}[{}^3S_1^{(1,8)}]gg\rangle + \\ + Q(v^2)|c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}]g\rangle, \quad (73)$$

$$|\chi_{cJ}\rangle = O(v^0)|c\bar{c}[{}^3P_J^{(1)}]\rangle + O(v^1)|c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]g\rangle. \quad (74)$$

Первые слагаемые в формулах (73)-(74) соответствуют синглетным вкладам.

Для того, чтобы вычислить полную амплитуду процесса рождения тяжелого кваркония  $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ , необходимо проинтегрировать амплитуду образования пары  $Q\bar{Q}$  с соответствующей волновой функцией  $\Psi^{(a)}(q)$  связанного состояния по импульсу относительного движения  $q = m_Q v$ . Учитывая разложение амплитуды по малому параметру  $v$ , можно получить:

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{A}(q) \Psi^{(a)}(q) = \mathcal{A}|_{q=0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi^{(a)}(q) + \\ + \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^\mu} \right) \Big|_{q=0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^\mu \Psi^{(a)}(q) + \dots, \quad (75)$$

при этом:

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi^{(a)}(q) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{R}^{(a)}(0), \quad \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^\mu \Psi^{(a)}(q) = -i\epsilon^\mu(L_z) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{R}'^{(a)}(0), \quad (76)$$

где  $\mathcal{R}^{(a)}(x)$  - пространственная часть волновой функции кваркония в координатном представлении [107], а  $\epsilon(L_z)$  - 4-вектор поляризации, описывающий состояния с различными проекциями орбитального момента. Первое слагаемое разложения амплитуды отвечает образованию  $S$ -волновых состояний и не участвует в образовании  $P$ -волновых кваркониев, поскольку  $\mathcal{R}^{(a)}(0) = 0$  для  $P$ -волн. Второе слагаемое в разложении отвечает только рождению  $P$ -волновых кваркониев, поскольку  $\mathcal{R}'^{(a)}(0) = 0$  для  $S$ -волн.

Первые части слагаемых в разложении (75), как говорилось выше, являются амплитудами рождения кварк-антикварковых пар в определенных квантовых состояниях,  $\mathcal{A}(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^{2S+1}L_J^{(a)}])$ , и могут быть рассчитаны методами пертурбативной КХД. Учет поправок следующих порядков теории возмущений может быть выполнен с помощью подхода  $k_T$ -факторизации с использованием ТМД распределений глюонов. В рамках этого подхода, основной вклад в сечение рождения пары тяжелых кварков  $c\bar{c}[n]$  в различных Фоковских состояниях  $n$  дает процесс глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}](p) + g(k), \quad (77)$$

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(1,8)}, {}^1S_0^{(8)}](p), \quad (78)$$



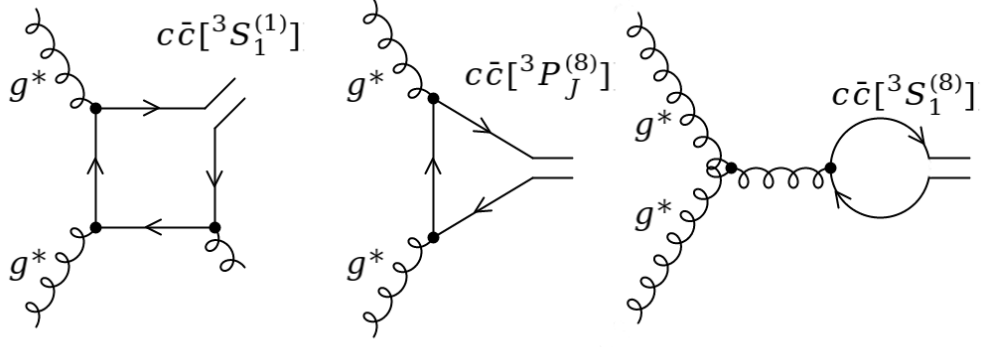


Рис. 8: Образование пар очарованных кварков  $c\bar{c}[^{2S+1}L_J^{(a)}]$  в процессе немассового глюон-глюонного слияния, соответствующие подпроцессам (77)-(78).

примеры диаграмм которых представлены на Рис. 8. Выражения для амплитуд данных подпроцессов могут быть получены с помощью проекционных операторов:

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} (p_{\bar{c}} - m_c) \gamma_5 (p_c + m_c), \quad (79)$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} (p_{\bar{c}} - m_c) \hat{\epsilon}(S_z) (p_c + m_c), \quad (80)$$

для состояний со спином  $S = 0$  и  $S = 1$ , соответственно, где  $\epsilon(S_z)$  - 4-вектор поляризации. Учитывая, что импульсы кварков связаны с полным импульсом системы и движением кварков относительно чармония, можно записать  $p_c = p/2 + q$  и  $p_{\bar{c}} = p/2 - q$ . Тогда полное выражение для амплитуд, учитывая разложение (75), будут иметь вид:

$$\mathcal{A}(a + b \rightarrow c\bar{c}[^1S_0^{(1,8)}]) = \text{Tr}[C_{1,8} \mathcal{P}_0 \mathcal{A}(a + b \rightarrow c + \bar{c})_{q=0}], \quad (81)$$

$$\mathcal{A}(a + b \rightarrow c\bar{c}[^3S_1^{(1,8)}]) = \text{Tr}[C_{1,8} \mathcal{P}_1^\mu \mathcal{A}(a + b \rightarrow c + \bar{c}) \epsilon_\mu(p)]_{q=0}, \quad (82)$$

$$\mathcal{A}(a + b \rightarrow c\bar{c}[^3P_J^{(1,8)}]) = \frac{d}{dq_\nu} \text{Tr}[C_{1,8} \mathcal{P}_1^\mu \mathcal{A}(a + b \rightarrow c + \bar{c}) \epsilon_{\mu\nu}(p)]_{q=0}, \quad (83)$$

где  $\epsilon_\mu(p)$  и  $\epsilon_{\mu\nu}(p)$  - 4-вектор и тензор поляризации чармония, а  $C_{1,8}$  - проекционные операторы для синглетных и октетных цветовых состояний:

$$C_1 = \frac{I}{\sqrt{N_c}}, \quad C_8 = \sqrt{2}t^a, \quad (84)$$

где  $t^a$  - генераторы группы  $SU(N_c)$ ,  $I$  - единичная матрица.

Суммирование по поляризациям в амплитудах обычно выполняется согласно правилам:

$$\sum_{J_z} \epsilon^\mu(p) \epsilon^{*\nu}(p) = d^{\mu\nu}(p) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}, \quad (85)$$

$$\epsilon_{(0)}^{\mu\nu}(p) \epsilon_{(0)}^{*\alpha\beta}(p) = \frac{1}{3} d^{\mu\nu}(p) d^{\alpha\beta}(p), \quad (86)$$

$$\sum_{J_z} \epsilon_{(1)}^{\mu\nu}(p) \epsilon_{(1)}^{*\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2} [d^{\mu\alpha}(p) d^{\nu\beta}(p) - d^{\mu\beta}(p) d^{\nu\alpha}(p)], \quad (87)$$

$$\sum_{J_z} \epsilon_{(2)}^{\mu\nu}(p) \epsilon_{(2)}^{*\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2} [d^{\mu\alpha}(p) d^{\nu\beta}(p) + d^{\mu\beta}(p) d^{\nu\alpha}(p)] - \frac{1}{3} d^{\mu\nu}(p) d^{\alpha\beta}(p), \quad (88)$$

где  $m^2 = p^2$  и нижний индекс в тензорах поляризации определяет полный угловой момент  $J = 0, 1$ , и  $2$ .

Выражения для непертурбативных матричных элементов могут быть получены из (76) и для  $S$ -волновых кваркониев  $\mathcal{H}$  будут иметь вид [7]:

$$\langle \mathcal{O}^{\mathcal{H}} [{}^{2S+1}L_J^{(a)}] \rangle = 2N_c(2J+1) \frac{|\mathcal{R}^{(a)}(0)|^2}{4\pi}, \quad (89)$$

а для  $P$ -волновых кваркониев:

$$\langle \mathcal{O}^{\mathcal{H}} [{}^{2S+1}L_J^{(a)}] \rangle = 6N_c(2J+1) \frac{|\mathcal{R}'^{(a)}(0)|^2}{4\pi}. \quad (90)$$

Численные значения синглетных волновых функций кваркониев  $|\mathcal{R}^{(1)}(0)|^2$ , а также их производных  $|\mathcal{R}'^{(1)}(0)|^2$ , могут быть получены из решения нерелятивистского уравнения Шредингера в рамках потенциальных моделей (см. подробнее, например [108, 109]). Кроме того, непертурбативные матричные элементы удовлетворяют соотношениям:

$$\langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle = (2J+1) \langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle, \quad (91)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle = (2J+1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle, \quad (92)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle = (2J+1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \quad (93)$$

в силу симметрии между состояниями с различным спином в нерелятивистской КХД (соотношения Heavy Quark Spin Symmetry (HQSS) [5–7]).

Данные непертурбативные матричные элементы определяют вероятности перехода кварковых пар  $c\bar{c}$  из октетных промежуточных состояний в синглетные. При этом предполагается, что испущенный непертурбативный глюон, изменяющий квантовые числа этих состояний на квантовые числа физического кваркония, имеет пренебрежимо малую энергию. Однако, испускание цветной частицы с бесконечно малой энергией очевидным образом противоречит принципу конфайнмента в КХД, который запрещает такие переходы. Соответственно, энергия испущенного глюона должна быть, по крайней мере, порядка характерного масштаба КХД —  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Пренебрежение данным фактом в расчетах выражений для амплитуды чармониев приводит к

значительной поляризации  $S$ -волновых кваркониев ( $J/\psi, \psi'$ ) с ростом поперечных импульсов [11]. Как упоминалось ранее, это противоречит данным коллаборации CMS [12], которые указывают на неполяризованные состояния.

Возможное решение данной проблемы приведено в работе [15], где был предложен деполяризационный механизм, основанный на классической теории мультипольного разложения. В рамках этого механизма предполагалось, что промежуточное октетное состояние кваркония имеет достаточно большое время жизни, чтобы рассматривать его как физическое состояние с определенным моментом  $J$  и его проекцией  $J_z$ . Тогда, при хромо-электрическом переходе (испускании мягкого глюона), необходимым для перехода в синглетное состояние, проекция спина  $S_z$  и орбитального момента  $l_z$  не сохраняются, что приводит к существенной деполяризации конечного кваркония. При этом энергия испущенного глюона полагается  $E \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ . Процесс перехода промежуточного октетного  ${}^3P_J^{(8)}$  состояния в синглетное  ${}^3S_1^{(1)}$  будет описываться доминирующим дипольным  $E1$  переходом, амплитуда которого запишется в виде [15]:

$$\mathcal{A}(c\bar{c}[{}^3P_0^{(8)}] \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g) \sim q_\mu p^\mu \epsilon^\nu(k) \epsilon_\nu(q), \quad (94)$$

$$\mathcal{A}(c\bar{c}[{}^3P_1^{(8)}] \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g) \sim \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\mu \epsilon_\nu(p) \epsilon_\alpha(k) \epsilon_\beta(q), \quad (95)$$

$$\mathcal{A}(c\bar{c}[{}^3P_2^{(8)}] \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g) \sim p^\mu \epsilon^{\alpha\beta}(p) \epsilon_\alpha(k) [q_\mu \epsilon_\beta(q) - q_\beta \epsilon_\mu(q)], \quad (96)$$

где  $p, k$ , и  $q = p - k$  — 4-импульсы начального  ${}^3P_J^{(8)}$ , конечного  ${}^3S_1^{(1)}$  состояний и испущенного глюона,  $\epsilon(p), \epsilon(k)$  и  $\epsilon(q)$  — их 4-векторы поляризации соответственно и  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты. Переход от октетного  ${}^3S_1^{(8)}$  в синглетный  ${}^3S_1^{(1)}$  требует двух последовательных дипольных переходов:

$${}^3S_1^{(8)} \rightarrow {}^3P_J^{(8)} + g, \quad {}^3P_J^{(8)} \rightarrow {}^3S_1^{(1)} + g, \quad (97)$$

которые осуществляются через любое из трех промежуточных октетных состояний  ${}^3P_0^{(8)}, {}^3P_1^{(8)}$  или  ${}^3P_2^{(8)}$ . Для этих переходов справедливы соотношения (94)-(96).

Вычисления данных амплитуд в рамках подхода  $k_T$ -факторизации КХД представлено в ряде работ, например [16–20, 110], и реализовано в Монте-Карло генераторе PEGASUS [111]. Данный механизм деполяризации позволил решить не только поляризационную проблему для  $J/\psi$  и  $\psi'$  мезонов, но также и получить самосогласованное описание данных для семейства чармониев ( $J/\psi, \psi', \chi_{cJ}, \eta_c$ ).

### 2.1.1 Сечения процессов одиночного рождения чармониев

Сечение процессов рождения чармония  $\mathcal{H}$  в протон-протонных столкновениях при энергии  $\sqrt{s}$  в подходе  $k_T$ -факторизации определяется сверткой сечений партонных подпроцессов, вычисленных вне массовой поверхности, и ТМД функций глюонных распределений  $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ . Для процессов  $2 \rightarrow 2$ , соответствующих (77), оно может

быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow \mathcal{H} + X) &= \int \frac{1}{8\pi(x_1x_2s)F} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ &\times |\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g)|^2 \langle \mathcal{O}^{\mathcal{H}}({}^3S_1^{(1)}) \rangle d\mathbf{p}_T^2 d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy dy_g \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (98)$$

а для  $2 \rightarrow 1$ , соответствующих (78):

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow \mathcal{H} + X) &= \int \frac{2\pi}{x_1x_2sF} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ &\times |\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow c\bar{c}[n])|^2 \langle \mathcal{O}^{\mathcal{H}}(n) \rangle d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (99)$$

где  $n$  обозначает состояния  ${}^3S_1^{(8)}$ ,  ${}^3P_J^{(1,8)}$ . Здесь  $\mathbf{k}_{1T}^2 = -k_1^2 \neq 0$  и  $\mathbf{k}_{2T}^2 = -k_2^2 \neq 0$  — поперечные импульсы начальных виртуальных глюонов,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — их азимутальные углы,  $y$  и  $y_g$  — быстроты чармония  $\mathcal{H}$  и конечного глюона в системе центра масс сталкивающихся протонов. Величины  $x_1$  и  $x_2$  могут быть выражены через переменные интегрирования, согласно законам сохранения энергии-импульса:

$$x_1\sqrt{s} = m_T e^y + |\mathbf{k}_T| e^{y_g}, \quad x_2\sqrt{s} = m_T e^{-y} + |\mathbf{k}_T| e^{-y_g}, \quad (100)$$

для кинематики  $2 \rightarrow 2$  и

$$x_1\sqrt{s} = m_T e^y, \quad x_2\sqrt{s} = m_T e^{-y}, \quad (101)$$

для кинематики  $2 \rightarrow 1$ , где  $m_T^2 = m^2 + \mathbf{p}_T^2$  — поперечная масса чармония.

Потоковый фактор  $F$  определяет скорость немассовой промежуточной частицы и, обычно, выбирается в виде  $F = 2x_1x_2s$  (например, см. [112]). Однако такое определение не является однозначным для подпроцессов  $2 \rightarrow 1$  с немассовыми начальными глюонами, для которых величина  $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2 = m^2$  мала и значительно отличается от классического выражения  $x_1x_2s = m^2 + p_T^2$ , что значительно влияет на поведение спектров по  $p_T$ . Немассовый потоковый фактор может быть определен как  $F = 2\lambda^{1/2}(\hat{s}, k_1^2, k_2^2)$ , где  $\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz$ . При этом для многих процессов  $2 \rightarrow 2$  выполняется приближение  $\lambda^{1/2}(\hat{s}, k_1^2, k_2^2) \simeq \hat{s} \simeq x_1x_2s$ . Выбор такого потока основан на результатах вычисления процесса рождения  $\chi_{cJ}$  в фотонном слиянии:  $e + e \rightarrow e' + e' + \chi_{cJ}$  с различными определениями  $F$  в работе [113].

### 2.1.2 Непертурбативные матричные элементы для чармониев

Как говорилось ранее, величины синглетных непертурбативных матричных элементов определяются из потенциальной модели, в то время как величины октетных матричных элементов должны быть извлечены из экспериментальных данных по рождению чармониев. Соответствующие непертурбативные матричные элементы  $\langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ ,  $\langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'}[{}^3P_J^{(8)}] \rangle$  для  $J/\psi$ ,  $\psi'$ , а также  $\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3P_J^{(8)}] \rangle$  и  $\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$

для  $\chi_{cJ}$  были получены из условий наилучшего описания доступных экспериментальных данных ЛНС по инклюзивному рождению чармониев в протон-протонных столкновениях  $pp \rightarrow \mathcal{H} + X$ . Подробное описание процедуры фитирования и извлечения непертурбативных элементов приведено в работах [16, 17]. Расчеты проводились в подходе  $k_T$ -факторизации КХД согласно уравнениям, приведенным в разделе 2.1 с учетом соотношений спиновой симметрии HQSS (91)-(93) и деполяризационного механизма для ряда TMD глюонных распределений. В таблице приведены значения непертурбативных матричных элементов для TMD глюонных функций JH'2013 set 1, JH'2013 set 2 и A0, которые использовались для численных расчетов в данной работе. Следует отметить, что для этих TMD распределений величина  $\langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'} [^1S_0^{(8)}] \rangle \sim 0$ , поэтому данное промежуточное состояние в работе не упоминается.

	A0	JH'2013 set 1	JH'2013 set 2
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^3$	1.16	1.16	1.16
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^3$	$2.5 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^5$	$1.2 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c1}} [^3P_1^{(1)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^5$	0.6	0.95	0.95
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c2}} [^3P_2^{(1)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^5$	0.23	0.49	0.44
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^3$	$2.8 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-4}$	$2.9 \times 10^{-4}$
$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^3$	0.7038	0.7038	0.7038
$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^3$	$2.3 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma \text{эВ}^5$	$3.0 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$

Таблица 1: Непертурбативные матричные элементы чармониев для разных глюонных распределений.

## 2.2 Фрагментационный механизм

В рамках фрагментационного подхода предполагается, что процесс рождения партонов в жестком партонном взаимодействии и их последующий переход в адронное состояние осуществляются на различных характерных масштабах: масштаб, соответствующий рождению партона,  $\mu_F$ , и масштаб, соответствующий переходу в наблюдаемый адрон,  $\mu_{\text{fragm}}$ . Поэтому соответствующие физические процессы могут быть факторизованы аналогично факторизации сечений партонного подпроцесса и партонных распределений. Только определенные диаграммы Фейнмана, для которых будет выполняться условие факторизации, будут давать вклады в соответствующую амплитуду рождения адронов. Таким образом, ключевым моментом понятия фрагментации является универсальность, как в своем качественном описании процессов рождения частиц, так и в своем количественном описании с помощью функций фрагментации. Благодаря факторизованности процесса несущественной становится

идентификация процесса, в котором возникает кварк или глюон, влекущий за собой цепочку событий, заканчивающуюся образованием адрона.

Функция фрагментации  $D_{a \rightarrow A}(z, \mu^2)$  описывает переход партона  $a$  в адрон  $A$  и зависит только от характерного масштаба фрагментации  $\mu^2 = \mu_{\text{fragm}}^2$  и переменной светового конуса:

$$z = \frac{p_A^+}{p_a^+} = \frac{E_A + p_{zA}}{E_a + p_{za}}, \quad (102)$$

где  $E$  и  $p_z$  - энергия и продольный импульс частиц. Однако, переменную  $z$  с большой точностью можно считать долей импульса в пределе  $p_A \gg m_A$ , что соответствует кинематике большинства процессов, изучаемых на ЛНС. Фрагментационное сечение процесса рождения адрона  $A$  может быть представлено в виде [114]:

$$\sigma(pp \rightarrow A + X) = \sum_a \int \hat{\sigma}(pp \rightarrow a + X) D_{a \rightarrow A}(z, \mu^2) \delta\left(z - \frac{p_A^+}{p_a^+}\right) dz, \quad (103)$$

где суммирование ведется по всем возможным промежуточным партонам  $a$ .

Согласно формализму нерелятивистской КХД, фрагментационные функции для тяжелых кваркониев могут быть представлены в факторизованном виде в виде суммы слагаемых, отвечающих различным промежуточным состояниям  $Q\bar{Q}[n]$  (см. например, [115]):

$$D_{g/q}^{\mathcal{H}}(z, \mu_0^2) = \sum_{|Q\bar{Q}(n)|} \pi \alpha_s \left( d_{g/q \rightarrow |Q\bar{Q}(n)|}^{(1)}(z, \mu_0^2) + \frac{\alpha_s}{\pi} d_{g/q \rightarrow |Q\bar{Q}(n)|}^{(2)}(z, \mu_0^2) + O(\alpha_s^2) \right) \frac{\langle \mathcal{O}_{|Q\bar{Q}(n)|}^{\mathcal{H}} \rangle}{m_Q^{2L+3}}, \quad (104)$$

взятых при начальном масштабе  $\mu_0^2$ , который обычно выбирается равным массе образованного кваркония,  $\mu_0^2 = m_{\mathcal{H}}^2$ . Согласно (72), функция  $d_{g/q \rightarrow |Q\bar{Q}(n)|}(z, \mu^2)$  описывает формирование кварк-антикварковой пары из партона и может быть рассчитана пертурбативными методами КХД, по аналогии с процессами (81) - (83), а  $\langle \mathcal{O}_{|Q\bar{Q}(n)|}^{\mathcal{H}} \rangle$  — непертурбативные матричные элементы, которые описывают переход в наблюдаемый кварконий. Величины этих элементов приведены в Таблице 1.

### 2.2.1 Фрагментация очарованного кварка в чармонии

Рассмотрим процесс фрагментации очарованного кварка в чармонии  $\psi$ :

$$c^* \rightarrow \psi + c \quad (105)$$

в лидирующем порядке  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  теории возмущений. Для этого обратимся к процессу:

$$g(k_1) + g(k_2) \rightarrow c^*(p) + \bar{c}(p_3) \rightarrow \psi(p_\psi) + c(p_2) + \bar{c}(p_3), \quad (106)$$

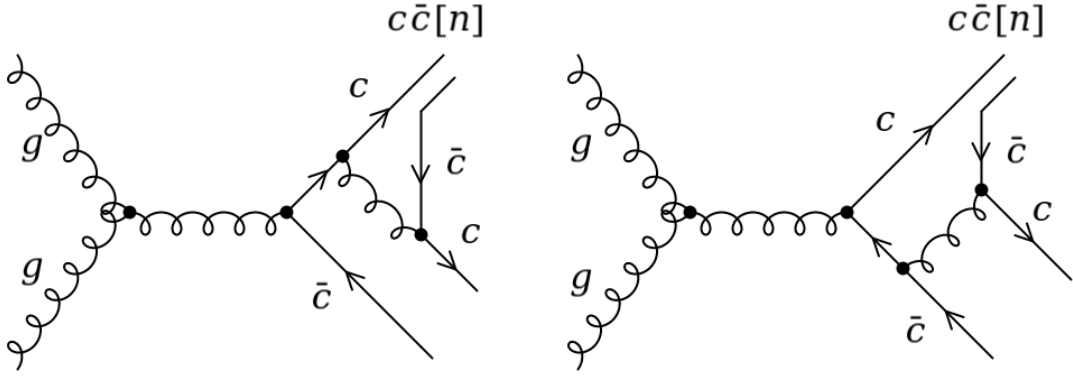


Рис. 9: Примеры диаграмм Фейнмана с образованием пары  $c\bar{c}[n]$  в состоянии  $n = [{}^{2S+1}L_J^{(a)}]$ , факторизуемого (слева) и нефакторизуемого (справа) типов.

примеры диаграмм Фейнмана которого изображены на Рис. 9. Сечение процесса, описываемое левой диаграммой Рис. 9, может быть представлено в факторизованном виде: процесс рождения пары очарованных кварков и процесс рождения чармония из очарованного кварка, т.е. процесс фрагментации (105), в то время как сечение правой диаграммы не может быть факторизовано. Отметим, что дальнейшее рассмотрение справедливо как для чармониев  $J/\psi, \psi'$ , образованных через промежуточные состояния  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(1,8)}, {}^3P_J^{(8)}, {}^1S_0^{(8)}] \rightarrow J/\psi, \psi'$ , так и для  $\chi_{cJ}$ , идущих через  $c\bar{c}[{}^3P_J^{(1)}, {}^3S_1^{(8)}] \rightarrow \chi_{cJ}$ , поскольку во всех случаях процессу фрагментации отвечает одна и та же диаграмма Фейнмана.

Вклад факторизуемых диаграмм в дифференциальное сечение процесса (106) может быть представлен в виде:

$$d\sigma(gg \rightarrow \psi c\bar{c}) = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2\hat{s}} |\mathcal{A}(gg \rightarrow g^*)|^2 \frac{1}{\hat{s}^2} |\mathcal{A}(g^* \rightarrow \psi c\bar{c})|^2 \frac{\lambda^{1/2}(\hat{s}, p^2, m_c^2)}{8\hat{s}} \times \frac{\lambda^{1/2}(p^2, m_\psi^2, m_c^2)}{8p^2} d\Omega dp^2 d\phi d\cos\theta, \quad (107)$$

где  $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2 = (p + p_3)^2$ ,  $p = p_\psi + p_2$ ,  $d\Omega$  — телесный угол частицы  $c(p_3)$  в системе покоя сталкивающихся глюонов, а  $d\phi d\cos\theta$  — телесный угол мезона  $\psi(p_\psi)$  в системе покоя частицы  $c(p)$ .

Аналогичным образом, вклад факторизуемых диаграмм в дифференциальное сечение рождения пары очарованных кварков  $c$  и  $\bar{c}$  может быть представлен в виде:

$$d\sigma(gg \rightarrow c\bar{c}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\hat{s}} |\mathcal{A}(gg \rightarrow g^*)|^2 \frac{1}{\hat{s}^2} |\mathcal{A}(g^* \rightarrow c\bar{c})|^2 \frac{\lambda^{1/2}(\hat{s}, p^2, m_c^2)}{8\hat{s}} d\Omega. \quad (108)$$

Функцию фрагментации можно извлечь из фрагментационного сечения процесса рождения чармониев, которое, в свою очередь, может быть представлено в виде свертки партонного сечения рождения пары очарованных кварков  $gg \rightarrow c\bar{c}$  с функ-

цией фрагментации  $D_{c \rightarrow \psi}(z, \mu^2)$  согласно формуле (103):

$$d\sigma(gg \rightarrow \psi c \bar{c}) = \int_0^1 d\hat{\sigma}(gg \rightarrow c \bar{c}) D_{c \rightarrow \psi}(z, \mu^2) \delta\left(z - \frac{p_\psi^+}{p^+}\right) dz. \quad (109)$$

Таким образом, используя (107) и (108), можно получить дифференциальное выражение для функции фрагментации:

$$dD(c^* \rightarrow \psi c) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{A}(g^* \rightarrow \psi c \bar{c})|^2}{|\mathcal{A}(g^* \rightarrow c \bar{c})|^2} \frac{\lambda^{1/2}(p^2, m_\psi^2, m_c^2)}{8p^2} dp^2 d\phi d\cos\theta. \quad (110)$$

Последнее выражение может быть сведено к обычному виду функции фрагментации с помощью:

$$D_{c \rightarrow \psi}(z, \mu_0^2) = \int D(c^* \rightarrow \psi c) \delta\left(z - p_\psi^+/p^+\right) dp^2 d\phi d\cos\theta, \quad (111)$$

где интегрирование осуществляется в пределах:  $\phi \in [0; 2\pi]$ ,  $\cos\theta \in [-1; 1]$  и  $p^2 \in [m_\psi^2; \infty]$ .

Исследование вкладов от факторизованных и нефакторизованных диаграмм, дающих вклад в полное и дифференциальные сечения процессов, а также влияние на них кинематических ограничений, позволяет выяснить области применимости фрагментационного подхода. Для такого анализа достаточно заменить в формуле (107) амплитуду факторизуемых диаграмм на полную амплитуду  $|\mathcal{A}(gg \rightarrow \psi c \bar{c})|^2$ , которая, естественно, будет содержать также все вклады от нефакторизуемых диаграмм, и сравнить получаемые дифференциальные спектры с рассчитанными с помощью функции фрагментации, согласно формуле (109). Так, при достаточно малых поперечных импульсах  $p_T$  значительную роль играют вклады от нефакторизуемых диаграмм, следовательно фрагментационные вклады не будут доминирующими. Отметим, что вопрос применимости фрагментационного механизма к описанию того или иного процесса, в общем случае, должен рассматриваться независимо для каждого случая. В работе [116] были проведены исследования применимости фрагментационного подхода для процесса  $gg \rightarrow \psi + c + \bar{c}$ .

Согласно формуле (104), функции фрагментации очарованных кварков в чармонии, учитывая основные вклады промежуточных состояний  ${}^{2S+1}L_J^{(1,8)}$ , можно представить в виде:

$$D_{c \rightarrow J/\psi}(z, \mu_0^2) = \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^3} d_{c \rightarrow {}^3S_1^{(1)}}(z) \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle + \sum_{J=0}^2 \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^5} d_{c \rightarrow {}^3P_J^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle, \quad (112)$$

$$D_{c \rightarrow \psi'}(z, \mu_0^2) = \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^3} d_{c \rightarrow {}^3S_1^{(1)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle + \sum_{J=0}^2 \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^5} d_{c \rightarrow {}^3P_J^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle, \quad (113)$$

$$D_{c \rightarrow \chi_{cJ}}(z, \mu_0^2) = \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^5} d_{c \rightarrow {}^3P_J^{(1)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3P_J^{(1)}] \rangle + \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^3} d_{c \rightarrow {}^3S_1^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle \quad (114)$$



Аналитические выражения для пертурбативных частей функций фрагментации  $d_{c \rightarrow 2S+1L_J^{(1,8)}}(z)$  в лидирующем порядке КХД были получены в ряде работ, например [115, 117]:

$$d_{c \rightarrow 3S_1^{(1)}}(z) = \frac{16}{243} \frac{z(1-z)^2}{(2-z)^6} (16 - 32z + 72z^2 - 32z^3 + 5z^4), \quad (115)$$

$$d_{c \rightarrow 3P_0^{(1)}}(z) = \frac{16}{729} \frac{z(1-z)^2}{(2-z)^8} (192 + 384z + 528z^2 - 1376z^3 + 1060z^4 - 376z^5 + 59z^6), \quad (116)$$

$$d_{c \rightarrow 3P_1^{(1)}}(z) = \frac{64}{729} \frac{z(1-z)^2}{(2-z)^8} (96 - 288z + 496z^2 - 408z^3 + 202z^4 - 54z^5 + 7z^6), \quad (117)$$

$$d_{c \rightarrow 3P_2^{(1)}}(z) = \frac{182}{3645} \frac{z(1-z)^2}{(2-z)^8} (48 - 192z + 480z^2 - 668z^3 + 541z^4 - 184z^5 + 23z^6), \quad (118)$$

$$d_{c \rightarrow 3P_J^{(8)}}(z) = \frac{2N_c}{(N_c^2 - 1)^2} d_{c \rightarrow 3P_J^{(1)}}(z). \quad (119)$$

### 2.2.2 Фрагментация глюона в чармониях

Рассмотрим процессы фрагментации глюонов в чармониях. Среди них можно выделить два основных вклада. Первый из них описывает образование  $J/\psi, \psi'$  или  $\chi_{cJ}$  мезонов через октетное промежуточное состояние  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]$ . Для этого обратимся к подпроцессу<sup>3</sup>:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow g^*(p) \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}](p_1), \quad c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}] \rightarrow \psi. \quad (120)$$

с последующим непертурбативным переходом в наблюдаемый чармоний  $J/\psi, \psi'$ . Диаграмма данного подпроцесса изображена на Рис. 10 слева. Заметим, что такие подпроцессы с рождением глюона  $g^*(p)$  факторизуемы всегда. Из данного подпроцесса, проводя вычисления, аналогичные (107)-(111), и учитывая (99), можно записать соответствующую функцию фрагментации, которая принимает простую форму:

$$D(g^* \rightarrow \psi) = \frac{\pi\alpha_s}{24m_c^3} \langle \mathcal{O}^\psi[{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \quad D_{g \rightarrow \psi}(z) = D(g^* \rightarrow \psi)\delta(1-z). \quad (121)$$

В данном уравнении учтено, что вся энергия и импульс фрагментирующего глюона переходит в импульс очарованной пары кварков.

Второй вклад описывает образование  $\chi_{cJ}$  мезонов через синглетное промежуточное состояние  $c\bar{c}[{}^3P_J^{(1)}]$  состояние:

$$g^* \rightarrow \chi_{cJ} + g \quad (122)$$

в лидирующем порядке  $O(\alpha_s^2)$  теории возмущений. Рассмотрим процесс:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow g^*(p) \rightarrow \chi_{cJ}(p_\chi) + g(p_2), \quad (123)$$

<sup>3</sup>Естественно, выражение для функции фрагментации также можно было получить, рассматривая подпроцесс  $g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}] + g$  с начальными глюонами, лежащими на массовой поверхности.

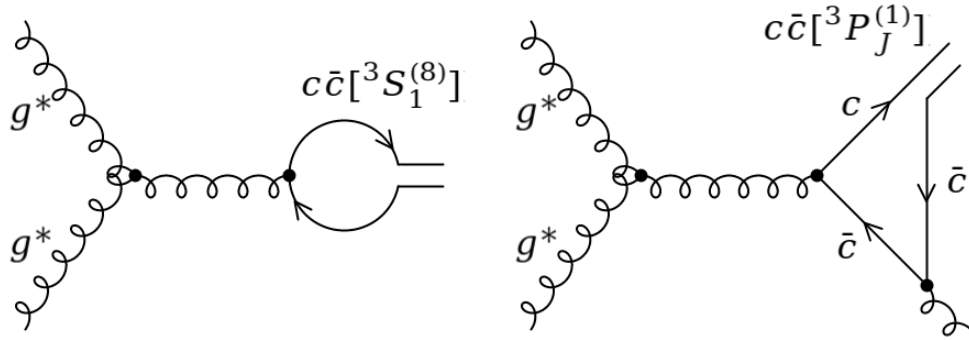


Рис. 10: Примеры диаграмм Фейнмана с образованием пары  $c\bar{c}$  в октетном состоянии  ${}^3S_1^{(8)}$  (слева), и синглетном  ${}^3P_J^{(1)}$  (справа).

диаграмма которого изображена на Рис. 10 справа.

Дифференциальное сечение данного процесса может быть представлено в виде:

$$d\sigma(g^*g^* \rightarrow \chi g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\mathcal{A}(g^*g^* \rightarrow \chi g)|^2}{2\lambda^{1/2}(\hat{s}, k_1^2, k_2^2)} \frac{\lambda^{1/2}(p^2, m_\chi^2, p_2^2)}{8p^2} d\Omega, \quad (124)$$

где  $\hat{s} = p^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_\chi + p_2)^2$ ,  $d\Omega$  - телесный угол частицы  $\chi_{cJ}(p_\chi)$  в системе покоя сталкивающихся глюонов. Учитывая возможность факторизовать амплитуду:

$$|\mathcal{A}(g^*g^* \rightarrow \chi g)|^2 = |\mathcal{A}(g^*g^* \rightarrow g^*)|^2 \frac{1}{\hat{s}^2} |\mathcal{A}(g^* \rightarrow \chi g)|^2, \quad (125)$$

выражение для дифференциальной функции фрагментации запишется в форме:

$$dD(g^* \rightarrow \chi g) = \frac{1}{(2\pi)^3} |\mathcal{A}(g^* \rightarrow \chi g)|^2 \frac{\lambda^{1/2}(p^2, m_\chi^2, p_2^2)}{8p^2} \frac{dp^2}{p^4} d\phi d\cos\theta. \quad (126)$$

Следовательно, обычный вид функции фрагментации  $D_{g \rightarrow \chi_{cJ}}(z, \mu_0^2)$  может быть получен аналогично формуле (111). Соответствующие численные расчеты были выполнены в работе [50]. Полученные функции фрагментации являются гладкими, положительно определенными во всей области определения  $z$  и удовлетворяют условиям  $D_{g \rightarrow \chi_{cJ}}(0) = D_{g \rightarrow \chi_{cJ}}(1) = 0$ , в отличие от функций фрагментации, представленных в работах [118, 119], которые дают отрицательную интегральную вероятность рождения чармониев через эти промежуточные состояния. Следует отметить зависимость интегральной вероятности фрагментации полученных выражений от фиктивной массы  $m_g$  испущенного глюона, которая играет роль свободного регуляторного параметра. Данный параметр, естественно, должен быть больше минимального энергетического масштаба  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . При этом, согласно идее факторизации в нерелятивистской КХД, процесс испускания глюона должен протекать на характерных расстояниях образования кварковой пары  $c\bar{c}$ , поэтому в данной работе параметр был выбран в виде  $m_g = m_c$ .

Согласно формуле (104), функции фрагментации глюонов в чармонии, учитывая основные вклады промежуточных состояний  $^{2S+1}L_J^{(1,8)}$ , можно представить в виде:

$$D_{g \rightarrow J/\psi}(z, \mu_0^2) = \frac{\pi \alpha_s(\mu_0^2)}{m_c^3} d_{g \rightarrow {}^3S_1^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle + \sum_{J=0}^2 \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^5} d_{g \rightarrow {}^3P_J^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle, \quad (127)$$

$$D_{g \rightarrow \psi'}(z, \mu_0^2) = \frac{\pi \alpha_s(\mu_0^2)}{m_c^3} d_{g \rightarrow {}^3S_1^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle + \sum_{J=0}^2 \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^5} d_{g \rightarrow {}^3P_J^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle, \quad (128)$$

$$D_{g \rightarrow \chi_{cJ}}(z, \mu_0^2) = \frac{\alpha_s^2(\mu_0^2)}{m_c^5} d_{g \rightarrow {}^3P_J^{(1)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3P_J^{(1)}] \rangle + \frac{\pi \alpha_s(\mu_0^2)}{m_c^3} d_{g \rightarrow {}^3S_1^{(8)}}(z) \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \quad (129)$$

где в лидирующем порядке КХД:

$$d_{g \rightarrow {}^3S_1^{(8)}}(z) = \frac{1}{24} \delta(1-z), \quad (130)$$

$$d_{g \rightarrow {}^3P_J^{(8)}}(z) = \frac{N_c(N_c^2 - 4)}{N_c^2 - 1} d_{g \rightarrow {}^3P_J^{(1)}}(z). \quad (131)$$

Выражения для  $d_{g \rightarrow {}^3P_J^{(1)}}(z)$  были получены численно, согласно (126) с  $m_g = m_c$ , в связи с чем здесь не представлены.

### 2.2.3 Эволюция функций фрагментации

Согласно (103), дифференциальное сечение рождения чармониев  $\mathcal{H}$  может быть представлено в виде свертки партонных сечений рождения глюонов и очарованных кварков с соответствующими функциями фрагментации,  $D_{g \rightarrow \mathcal{H}}(z, \mu^2)$  и  $D_{c \rightarrow \mathcal{H}}(z, \mu^2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(pp \rightarrow \mathcal{H} + X)}{dp_T} &= \sum_n \int \frac{d\sigma(pp \rightarrow g + X)}{dp_T^g} D_{g \rightarrow \mathcal{H}}(z, \mu^2) \delta(z - p^+/p_g^+) dz + \\ &+ \sum_m \int \frac{d\sigma(pp \rightarrow c + X)}{dp_T^c} D_{c \rightarrow \mathcal{H}}(z, \mu^2) \delta(z - p^+/p_c^+) dz, \end{aligned} \quad (132)$$

где  $p_g, p_c$  и  $p$  — импульсы глюона, очарованного кварка и чармония  $\mathcal{H}$ , соответственно. Суммирование осуществляется по всем возможным партонам, образованным в процессе столкновения протонов  $pp \rightarrow g + X$  и  $pp \rightarrow c + X$ . Заметим, что для расчета сечений нужны функции фрагментации, определенные при масштабе фрагментации  $\mu^2 \gg m_{\mathcal{H}}^2$ . Возникающие при увеличении масштаба вклады, содержащие большие логарифмы, пропорциональные  $\sim \ln(\mu^2/m_{\mathcal{H}}^2)$ , могут быть эффективно просуммированы с помощью уравнения эволюции DGLAP. Уравнения эволюции для функций фрагментации могут быть записаны в виде, аналогичном уравнению эволюции пар-

тонных распределений (17)-(18) с перестановками функций расщепления:

$$\frac{dD_{g \rightarrow \mathcal{H}}(x, \mu^2)}{d \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[ 2P_{cg} \left( \frac{x}{\xi} \right) D_{c \rightarrow \mathcal{H}}(\xi, \mu^2) + P_{gg} \left( \frac{x}{\xi} \right) D_{g \rightarrow \mathcal{H}}(\xi, \mu^2) \right], \quad (133)$$

$$\frac{dD_{c \rightarrow \mathcal{H}}(x, \mu^2)}{d \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[ P_{cc} \left( \frac{x}{\xi} \right) D_{c \rightarrow \mathcal{H}}(\xi, \mu^2) + P_{gc} \left( \frac{x}{\xi} \right) D_{g \rightarrow \mathcal{H}}(\xi, \mu^2) \right], \quad (134)$$

где  $P_{ij}(z)$  - функции расщепления, взятые в виде (20)-(23). Дополнительно в уравнении эволюции перед функцией фрагментации  $P_{cg}(z)$  стоит фактор 2, что учитывает возможность фрагментации как очарованного кварка  $c$ , так и антикварка  $\bar{c}$  в чармоний в процессе  $g \rightarrow c\bar{c}$ , поскольку вероятности этих событий одинаковы  $D_{c \rightarrow \mathcal{H}}(z, \mu^2) = D_{\bar{c} \rightarrow \mathcal{H}}(z, \mu^2)$ .

Уравнения эволюции (133)-(134) в данной работе были решены численно для чармониев  $J/\psi, \chi_{cJ}, \psi'$  в пространстве  $(x, \mu^2)$ . Представим здесь кратко схему вычислений. Для этого разобьем интервал  $x \in [0; 1]$  равномерно по  $x$  с шагом  $\epsilon \ll 1$  и  $\mu^2 \in [\mu_0^2; \mu_{max}^2]$  по геометрической прогрессии, согласно формулам:

$$x_i = \frac{i}{n_x} = \epsilon i, \quad \mu_j^2 = \mu_0^2 \left( \frac{\mu_{max}^2}{\mu_0^2} \right)^{\frac{j}{n_\mu}}. \quad (135)$$

Величины  $n_x$  и  $n_\mu$  выбираются из соображений хорошей сходимости интегралов в уравнениях эволюции. Значение функции  $D(x, \mu_{j+1}^2)$  на  $j+1$  слое будут определяться значениями функций  $D(x, \mu_j^2)$  на предыдущем слое  $j$ . Проводя интегрирование уравнений (133)-(134) по  $\mu^2$  в пределах слоя  $[\mu_j^2; \mu_{j+1}^2]$  и используя выражение:

$$A_\mu = \int_{\mu_j^2}^{\mu_{j+1}^2} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} d \ln \mu^2 = \frac{6}{33 - 2n_f} \ln \left[ \frac{\ln(\mu_{j+1}^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu_j^2/\Lambda^2)} \right], \quad (136)$$

уравнения эволюции можно представить в виде:

$$D_g^{\mathcal{H}}(x_i, \mu_{j+1}^2) = D_g^{\mathcal{H}}(x_i, \mu_j^2) + A_\mu \int_{x_i}^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[ 2P_{cg} \left( \frac{x_i}{\xi} \right) D_c^{\mathcal{H}}(\xi, \mu_j^2) + P_{gg} \left( \frac{x_i}{\xi} \right) D_g^{\mathcal{H}}(\xi, \mu_j^2) \right], \quad (137)$$

$$D_c^{\mathcal{H}}(x_i, \mu_{j+1}^2) = D_c^{\mathcal{H}}(x_i, \mu_j^2) + A_\mu \int_{x_i}^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[ P_{cc} \left( \frac{x_i}{\xi} \right) D_c^{\mathcal{H}}(\xi, \mu_j^2) + P_{gc} \left( \frac{x_i}{\xi} \right) D_g^{\mathcal{H}}(\xi, \mu_j^2) \right]. \quad (138)$$

Функции расщепления (20)-(23) содержат расходимости при  $z \rightarrow 1$ , которые в аналитических расчетах устраняются с помощью функционала (24). Чтобы использовать эти функции расщепления в численных расчетах, необходимо провести дополнительные преобразования. Перепишем выражение (24) в более удобном виде и перейдем от переменных  $(z, x)$  к  $(\xi, x)$ , полагая  $x = z\xi$ :

$$\begin{aligned} \int_x^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} D \left( \frac{x}{z} \right) &= \int_x^1 \frac{dz}{1-z} \left[ f(z) D \left( \frac{x}{z} \right) - f(1) D(x) \right] - f(1) D(x) \int_0^x \frac{dz}{1-z} \\ &\implies \int_x^1 \frac{d\xi x}{\xi(\xi-x)} \left[ f \left( \frac{x}{\xi} \right) D(\xi) - f(1) D(x) \right] - f(1) D(x) \int_0^x \frac{d\xi}{1-\xi}. \end{aligned} \quad (139)$$

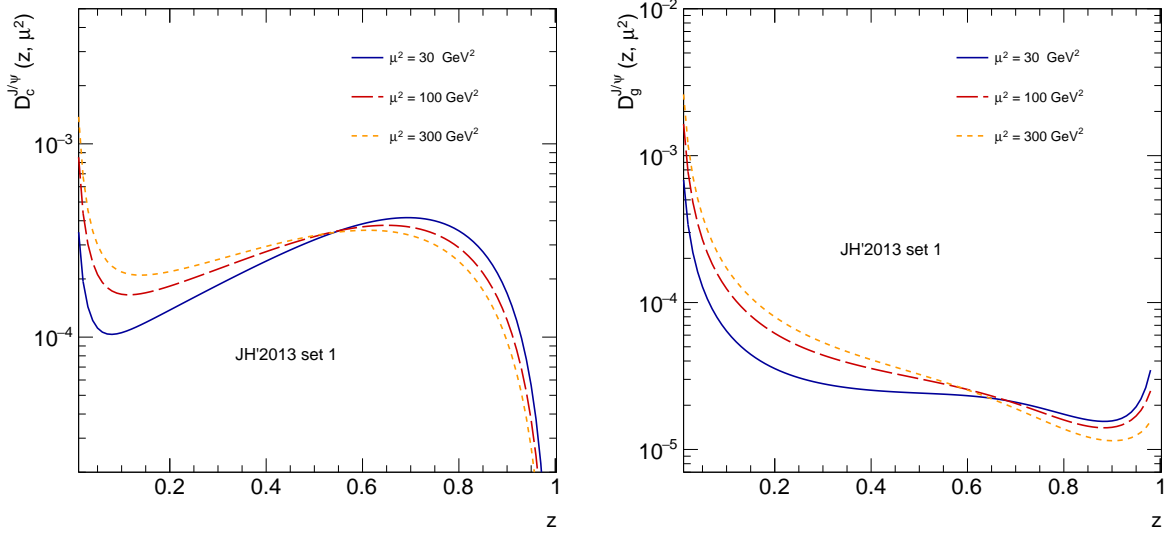


Рис. 11: Функции фрагментации очарованных кварков  $D_c^{J/\psi}(z, \mu^2)$  (слева) и глюонов  $D_g^{J/\psi}(z, \mu^2)$  (справа), рассчитанные как функции переменной  $z$  при различных масштабах  $\mu^2$ . Вычисления были выполнены для (112) и (127) с однопетлевой константой сильного взаимодействия  $\alpha_s$ ,  $n_f = 4$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}} = 200$  МэВ и соответствующими NME для JH'2013 set 1 (см. Таблица 1).

Для функций расщепления  $P_{gg}(z)$  и  $P_{qq}(z)$  возникающие расходящиеся выражения вида  $1/(\xi - x)$  можно явно устранить, линейно интерполируя выражение  $D(\xi)$  между значениями в соседних узловых точках  $x < \xi < x + \epsilon$ :

$$D(\xi) = \frac{D(x)(x + \epsilon - \xi) - D(x + \epsilon)(\xi - x)}{\epsilon}, \quad (140)$$

и далее преобразуя первый интеграл в выражении (139).

Еще одна сложность в численных расчетах возникает со слагаемым, описывающим  ${}^3S_1^{(8)}$  октетную компоненту глюонной функции фрагментации, которая содержит в себе дельта функцию. Дельта функция может быть представлена как  $\delta(1 - x) = 1/\epsilon$  при  $x > 1 - \epsilon$ . При свертке дельта функции с расходящейся частью функции расщепления  $P_{gg}(z) \sim z/(1 - z)_+$ , согласно определению (139), возникает интеграл вида:

$$I = \int_x^1 \frac{d\xi x}{\xi(\xi - x)} [\delta(1 - \xi) - \delta(1 - x)] - \int_0^x \frac{d\xi}{1 - \xi} \delta(1 - x), \quad (141)$$

который можно аппроксимировать следующим образом:

$$I = \begin{cases} \frac{x}{1 - x}, & x \leq 1 - \epsilon \\ \ln(\epsilon)\delta(1 - x), & x > 1 - \epsilon. \end{cases} \quad (142)$$

В итоге, после указанных выше преобразований, уравнения (137)-(138) будут содержать только конечные выражения и сходящиеся интегралы, которые могут

быть вычислены, например, с помощью метода Монте-Карло, для повышения точности расчетов. В качестве начальных функций используются функции фрагментации (112)-(114) и (127)-(129) при  $\mu_0^2 = m_{\mathcal{H}}^2$ .

На Рис. 11 приведены результаты описываемых выше расчетов для функций фрагментации очарованных кварков и глюонов в  $J/\psi$  мезоны. Отметим, что полученные результаты для эволюции глюонной функции фрагментации  $D_g^{J/\psi}(z, \mu^2)$  отличаются от представленных ранее (например, см. работу [120]). Одной из причин отличия является дополнительный вклад от положительно определенного слагаемого глюонной функции фрагментации  $g \rightarrow [{}^3P_J^{(8)}] + g$ . Помимо этого, в нашей работе уравнения эволюции решались совместно для очарованных кварков и глюонов. Наиболее ярко последний эффект проявляется в эволюции функций фрагментации очарованного кварка  $D_c^{J/\psi}(z, \mu^2)$  при малых  $z$ , где видны значительные глюонные вклады от расщепления  $c \rightarrow g + c$ . Если решать уравнение эволюции (137), оставив только глюонное слагаемое, содержащее только  ${}^3S_1^{(8)}$ , то наши численные расчеты хорошо согласуются с результатом [120].

### 3 Процессы парного рождения $J/\psi$ мезонов на ЛНС

Исследование процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов представляет значительный интерес в свете проверки нерелятивистской КХД, поскольку включает в себя более сложные механизмы образования связанных состояний тяжелых кварков при неизменных непертурбативных матричных элементах. На данный момент теоретические предсказания в рамках нерелятивистской КХД получены в следующем за лидирующим порядке только частично и имеют значительные расхождения с последними экспериментальными данными ATLAS [24], в особенности при больших поперечных импульсах  $p_T(J/\psi, J/\psi)$ , инвариантных массах  $m(J/\psi, J/\psi)$  и разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  пары  $J/\psi$  мезонов. Соответственно, необходим более полный учет поправок высших порядков, расчет которых очень сложен, а также учет дополнительных механизмов рождения.

В области больших инвариантных масс  $m(J/\psi, J/\psi)$  процессы с большим разделением по быстроте между двумя  $J/\psi$  мезонами могут играть значительную роль. В этой области можно ожидать значительный фрагментационный вклад от множественных глюонных излучений, возникающих в результате неколлинеарной эволюции КХД глюонных распределений. Последнее может быть эффективно учтено в подходе  $k_T$ -факторизации с помощью уравнения эволюции CCFM.

#### 3.1 Механизмы парного рождения чармониев

Процессы парного рождения чармониев представляют собой образование в жестком партонном взаимодействии двух пар очарованных кварков  $c\bar{c}$  в определенных квантовых состояниях  $n, m = [{}^{2S+1}L_J^{(1,8)}]$  с последующим непертурбативным переходом в физические кварконии  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}'$  и в лидирующем порядке теории возмущений могут быть представлены в виде:

$$p + p \rightarrow c\bar{c}[n] + c\bar{c}[m] \rightarrow \mathcal{H} + \mathcal{H}'. \quad (143)$$

Разложение волновых функций S-волновых (73) и P-волновых (74) чармониев по относительной скорости движения кварков в кварконии,  $v$ , позволяет нам оценить иерархию сечений рождения одиночных кваркониев через различные промежуточные (синглетные и октетные) состояния пары тяжелых кварков. Для процессов парного рождения тяжелых кваркониев можно составить аналогичную иерархию, опираясь на информацию о процессах одиночного рождения. Зависимость дифференциального сечения  $d\sigma/dp_T^2$  от поперечного импульса  $p_T$  и параметра  $v$  для различных комбинаций промежуточных состояний  $n$  и  $m$  представлена в Таблице 2.

Доминирующий вклад в сечение парного рождения  $J/\psi$  мезонов вносит механизм синглетного рождения чармониев, протекающий с образованием двух пар очарованных кварков  $c\bar{c}$  в промежуточных состояниях  ${}^3S_1^{(1)}$ . В подходе  $k_T$ -факторизации синглетный вклад в процессы парного рождения  $J/\psi$  мезонов в лидирующем порядке

$n \setminus m$	${}^3S_1^{(1)}$	${}^3S_1^{(8)}$	${}^1S_0^{(8)}$	${}^3P_J^{(8)}$	${}^3P_J^{(1)}$
${}^3S_1^{(1)}$	$1/p_T^8$	$v^4/p_T^6$	$v^4/p_T^8$	$v^2/p_T^8$	0
${}^3S_1^{(8)}$	...	$v^8/p_T^4$	$v^8/p_T^6$	$v^6/p_T^6$	$v^4/p_T^6$
${}^1S_0^{(8)}$	...	...	$v^8/p_T^8$	$v^6/p_T^8$	$v^4/p_T^8$
${}^3P_J^{(8)}$	...	...	...	$v^4/p_T^8$	$v^2/p_T^8$
${}^3P_J^{(1)}$	...	...	...	...	$1/p_T^8$

Таблица 2: Зависимость дифференциального сечения  $d\sigma/dp_T^2$  от поперечного импульса  $p_T$  и скорости относительного движения кварков внутри кваркония  $v$  для различных промежуточных состояний в процессе парного рождения  $pp \rightarrow c\bar{c}[n]c\bar{c}[m] \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{H}'$ , где  $n, m = [{}^{2S+1}L_J^{(1,8)}]$  обозначают Фоковские состояния пары  $c\bar{c}$ .

может быть описан подпроцессом глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности порядка  $\sim O(\alpha_s^4)$ :

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}] (p_1) + c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}] (p_2), \quad (144)$$

с последующим непертурбативным переходом  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]$  в  $J/\psi$  или  $\psi'$  мезоны. Соответствующие диаграммы Фейнмана, приведены на Рис. 12(а). Амплитуды вне массовой поверхности для подпроцессов (144) вычисляются с применением проекционных операторов (79)-(80). В данной работе используются калибровочно инвариантные выражения, полученные в работе [121]. Соответствующее сечение рождения может быть записано аналогично выражению (98):

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow J/\psi + J/\psi) &= \int \frac{1}{8\pi(x_1x_2s)F} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ &\times |\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}])|^2 \langle \mathcal{O}^\psi({}^3S_1^{(1)}) \rangle^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \end{aligned} \quad (145)$$

Несмотря на то, что данный процесс дает наибольший вклад в интегральное сечение, он имеет зависимость  $\sim 1/p_T^8$  и быстро спадает с ростом поперечных импульсов рождающихся чармониев. При этом экспериментальные данные указывают на намного более пологую форму распределений по инвариантной массе  $m(J/\psi, J/\psi)$  и разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  [24]. В этих областях могут оказаться важными следующие синглетные механизмы рождения чармониев:

$$g^* + g^* \rightarrow c\bar{c} [{}^3P_J^{(1)}] + c\bar{c} [{}^3P_J^{(1)}], \quad (146)$$

$$g^* + g^* \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}] + c\bar{c} [{}^3P_J^{(1)}] + g, \quad (147)$$

$$g^* + g^* \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}] + c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}] + g + g, \quad (148)$$

несмотря на их подавленность по константам связи  $\alpha_s$ , вероятностям радиационного распада  $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$  и меньшим величинам волновых функций для Р-волновых кваркониев.



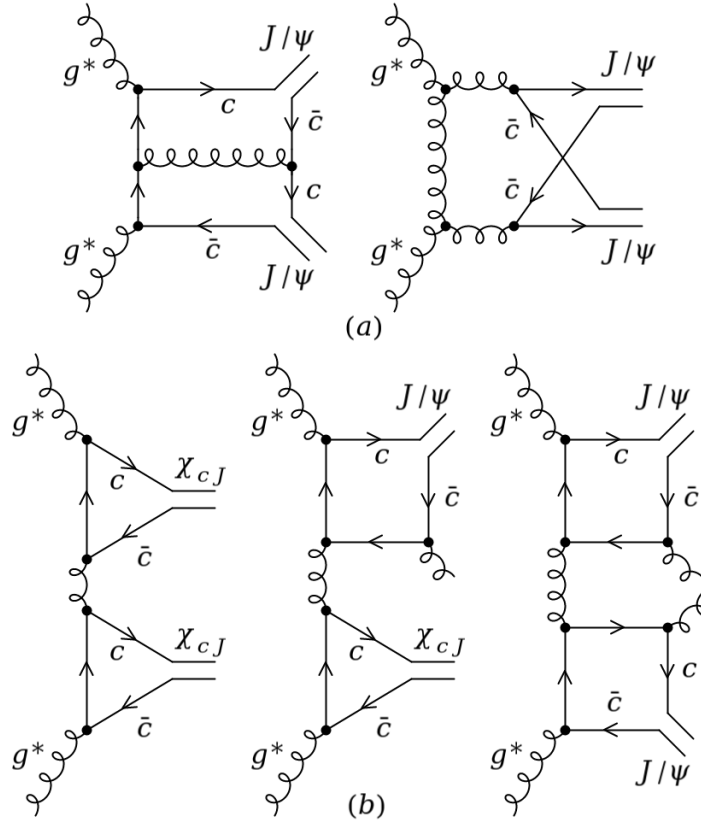


Рис. 12: Примеры диаграмм Фейнмана, описывающих синглетные механизмы рождения: а) пары  $J/\psi, \psi'$  мезонов (подпроцесс (144)); б) пары  $\chi_{cJ}$  и  $J/\psi, \psi'$  мезонов (подпроцессы (146)-(148)).

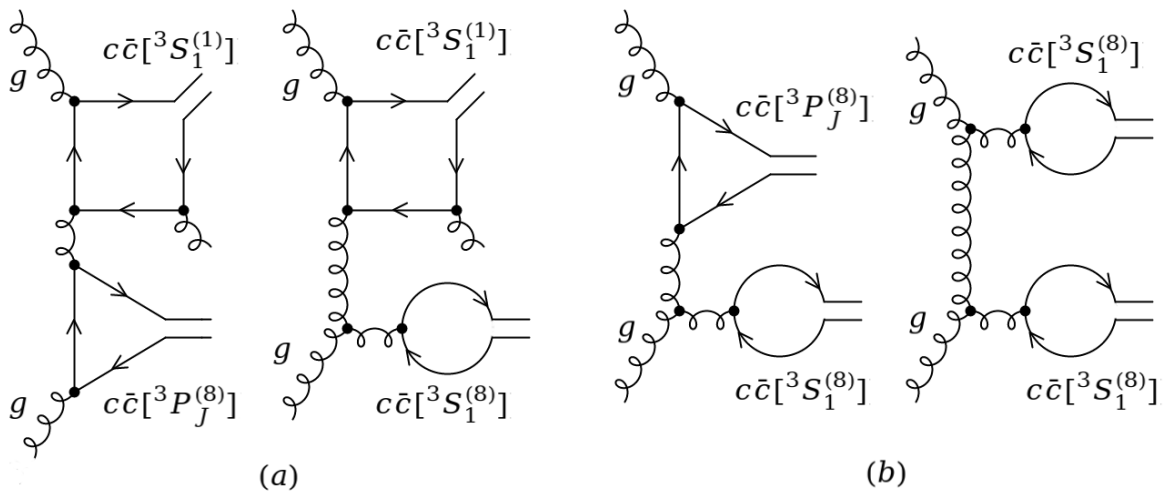


Рис. 13: Примеры диаграмм Фейнмана, описывающие: а) синглет-октетные механизмы; б) октет-октетные механизмы парного рождения  $J/\psi$  мезонов.

Примеры диаграмм Фейнмана для этих процессов представлены на Рис. 12(b). В нашей работе такие вклады также будут учтены в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода. Выражение для полных и дифференциальных сечений могут быть получены аналогично (145). Стоит отметить, что синглетный подпроцесс рождения  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + c\bar{c}[{}^3P_J^{(1)}]$  отсутствует в лидирующем порядке теории возмущений из-за закона сохранения  $CP$ -инвариантности и появляется только в следующем порядке малости  $O(\alpha_s^5)$ .

Кроме того, с ростом поперечного импульса  $p_T$  становятся важными синглет-октетные и октет-октетные механизмы рождения чармониев. Такие процессы подавлены по малому параметру  $v$  (по значениям непертурбативных матричных элементов), однако эта малость компенсируется более слабой зависимостью от поперечного импульса. Так, например, для процессов рождения  $J/\psi$  мезонов в промежуточной области по поперечным импульсам начнут играть роль подпроцессы, ведущие себя как  $\sim 1/p_T^6$ :

$$g + g \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}] + c\bar{c} [{}^3S_1^{(8)}] + g, \quad (149)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c} [{}^3P_J^{(8)}] + c\bar{c} [{}^3S_1^{(8)}], \quad (150)$$

а в области больших  $p_T$  сечение полностью определяется подпроцессом  $\sim 1/p_T^4$ :

$$g + g \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(8)}] + c\bar{c} [{}^3S_1^{(8)}]. \quad (151)$$

Типичные диаграммы таких процессов в коллинеарном подходе представлены на Рис. 13. Однако, как было показано в работах [21, 22], учет таких вкладов в лидирующем порядке недостаточен для описания данных ЛНС для сечений парного рождения  $J/\psi$  мезонов. Более того, в настоящее время аккуратный учет всех вкладов высших порядков в сечения процесса парного рождения чармониев представляется достаточно трудоемкой задачей и только частично выполнен в следующем за лидирующим порядке. Тем не менее, учет основных поправок высших порядков, которые играют определяющую роль при высоких энергиях, может быть проведен в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода. Кроме того, крайне громоздкие расчеты на основании пертурбативной КХД могут быть упрощены при использовании фрагментационного подхода для описания сечений рассматриваемых процессов. Применение данного подхода для описания синглет-октетных и октет-октетных механизмов рождения  $J/\psi$  мезонов подробно разбирается в следующем разделе.

### 3.2 Роль неколлинеарной эволюции для фрагментационных вкладов

Как было сказано ранее, подход  $k_T$ -факторизации позволяет эффективно учитывать поправки высших порядков коллинеарной КХД в виде TMD глюонных распределений в протоне, которые подчиняются уравнению эволюции CCFM. Рассмотрим

важность поправок, связанных с реальным излучением глюонов в начальном состоянии.

Возникающие в результате неколлинеарной эволюции глюонные эмиссии могут быть рассмотрены в виде дополнительного источника рождения чармониев. Согласно уравнению CCFM (52) и условию углового упорядочивания (51), испущенные глюоны (глюонный каскад) имеют ненулевые поперечные импульсы  $\mathbf{k}_T \neq 0$ . Каждый такой глюон может превратиться в физический чармоний с ненулевым поперечным импульсом  $p_T^H$  с помощью механизма фрагментации, описанного в разделе (2.2), и давать вклад в различные дифференциальные сечения, измеряемые в экспериментах по рождению чармониев.

Следует еще раз подчеркнуть, что механизм фрагментации подразумевает факторизацию жесткого взаимодействия и процесса превращения партона в чармоний. Это приводит к тому, что процесс фрагментации глюонного каскада не зависит от сложности расчетов процесса жесткого взаимодействия и уже для амплитуд, рассчитанных в лидирующем порядке, можно эффективно учесть большую часть вкладов высших порядков коллинеарной КХД с помощью уравнения эволюции CCFM. Соответственно, трудоемкий процесс расчета матричных элементов для парного рождения тяжелых кваркониев в высших порядках теории возмущений в коллинеарном подходе может быть эффективно заменен расчетами в подходе  $k_T$ -факторизации.

Кроме того, для одних и тех же партонных взаимодействий (одних и те же амплитуд взаимодействия) можно рассчитать фрагментационные вклады в сечения рождения как одиночного чармония  $\mathcal{H}$ , так и парного ( $\mathcal{H}\mathcal{H}'$ ) или, даже, тройного ( $\mathcal{H}\mathcal{H}'\mathcal{H}''$ ), причем они не обязательно должны быть одного типа. Таким образом, представленный подход может быть с легкостью расширен на любые процессы с участием чармониев и боттомониев.

Процесс расчета фрагментационных вкладов в сечения рождения чармониев можно условно разбить на три этапа. На первом этапе происходит моделирование событий, соответствующих определенному партонному подпроцессу, сечение которого рассчитывается в подходе  $k_T$ -факторизации с TMD глюонными функциями распределения, подчиняющимися уравнению эволюции CCFM. Сгенерированные события записываются в файл стандартного формата Les Houches Events (\*.lhe). На втором этапе для каждого смоделированного события восстанавливается глюонный каскад согласно обратной эволюции CCFM (восстановление глюонных излучений по известной кинематике начальных глюонов, непосредственно участвующих в жестком взаимодействии). Для восстановления этих эмиссий в данной работе использовалась специальная подпрограмма TMD партонных ливней<sup>4</sup>, встроенная в Монте-Карло генератор событий CASCADE [53]. По входному lhe файлу в каждом событии вос-

<sup>4</sup>Отметим, что аналогичный метод был использован при вычислении сечений ассоциативного рождения прямых фотонов и струй адронов [122], а также бозона Хиггса и струй [123]

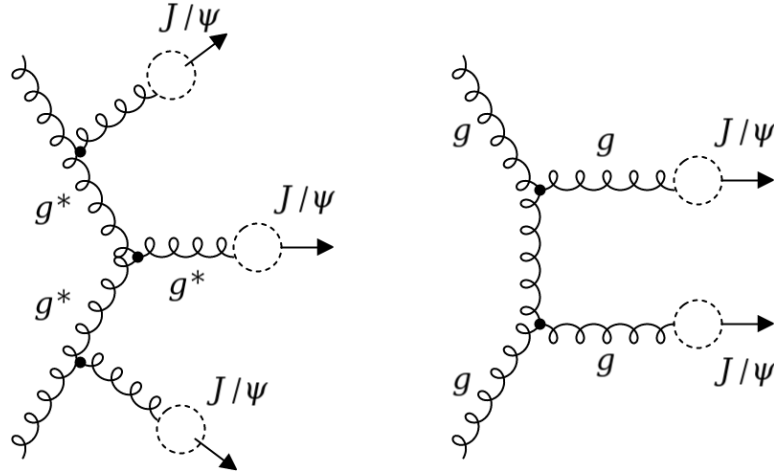


Рис. 14: Процесс фрагментационного рождения  $J/\psi$  мезонов в подходе  $k_T$ -факторизации, соответствующий подпроцессу (152) с глюонным каскадом (слева) и в коллинеарном подходе, соответствующий подпроцессу (153) (справа). Пунктирными кругами обозначены возможные каналы фрагментации глюонов в  $J/\psi$  мезоны.

становливаются глюонные эмиссии и на выходе CASCADE создается файл HerMC. На третьем этапе, для каждого события, записанного в файл HerMC, отбираются соответствующие партоны как из жесткого взаимодействия, так и из восстановленного глюонного каскада, после чего осуществляется их фрагментация в физические кварконии, согласно формуле (103). После этого вычисляются различные дифференциальные сечения.

Рассмотрим применение данного метода на реальных процессах. Наиболее вероятным подпроцессом в подходе  $k_T$ -факторизации является подпроцесс глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности  $2 \rightarrow 1$  порядка  $\sim O(\alpha_s)$ :

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow g^*(p). \quad (152)$$

Образованный виртуальный глюон  $g^*(p)$  будет сопровождаться излучением каскадных глюонов, как изображено на диаграмме Фейнмана (см. Рис. 14 слева). В рамках фрагментационного механизма, каждый из рассматриваемых глюонов может превратиться в чармоний. Здесь и далее на диаграммах Фейнмана потенциальные каналы фрагментационного рождения чармониев отмечаются пунктирными кругами.

Проведем сравнение со схожим подпроцессом глюонного слияния  $2 \rightarrow 2$  в коллинеарном подходе КХД, который в лидирующем порядке пропорционален  $\sim O(\alpha_s^2)$ :

$$g(k_1) + g(k_2) \rightarrow g(p_1) + g(p_2). \quad (153)$$

Пример диаграммы Фейнмана приведен на Рис. 14 (справа). В данном процессе только два глюона  $g(p_1)$  и  $g(p_2)$  могут превратиться в чармонии.

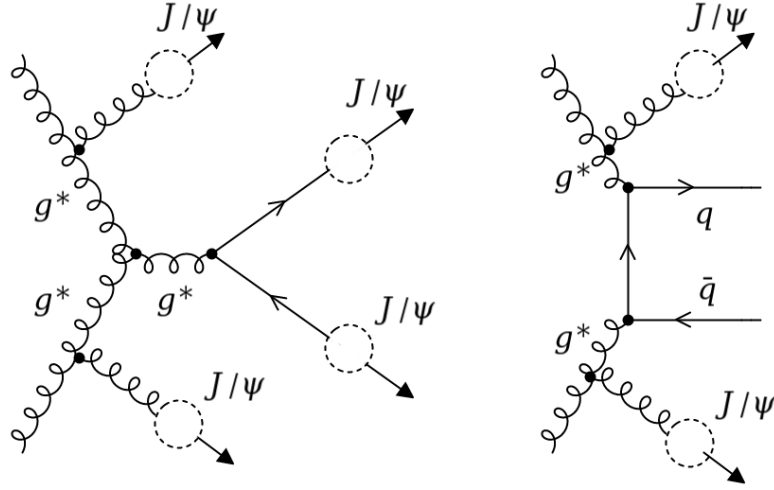


Рис. 15: Процесс фрагментационного рождения  $J/\psi$  мезонов в подходе  $k_T$ -факторизации, соответствующий подпроцессам (154) с глюонным каскадом. Пунктирными кругами обозначены возможные каналы фрагментации глюонов и очарованных кварков в  $J/\psi$  мезоны.

Наглядно продемонстрируем важность учета множественных глюонных излучений. Допустим, что в подпроцессе, рассчитываемом в подходе  $k_T$ -факторизации, только три рожденных глюона имеют достаточный поперечный импульс (скажем, условие  $p_T \geq p_T^{min}$  следует из экспериментальных ограничений), в то время как для подпроцесса в коллинеарном подходе оба глюона удовлетворяют этому условию. Для случая одиночного рождения чармония  $\mathcal{H}$ , подпроцесс  $2 \rightarrow 1$  создает три возможных канала рождения по сравнению с двумя каналами для подпроцесса  $2 \rightarrow 2$ . В случае парного рождения  $\mathcal{H}\mathcal{H}'$  первый подпроцесс создает три возможных канала/комбинации (далее будем называть такие вклады комбинаторными), в то время как в коллинеарном подходе будет возникать всего лишь одна пара чармониев.

Согласно соотношению  $\mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T} = \mathbf{p}_T$  для подпроцесса (152), увеличение поперечного импульса конечного глюона приводит к росту поперечного импульса одного из начальных глюонов, что, в свою очередь, увеличивает угол допустимой эмиссии глюонов при эволюции (57). Увеличение угла напрямую приводит к увеличению количества испускаемых глюонов. Поэтому ожидается, что возникающий комбинаторный эффект будет наблюдаться в широкой кинематической области. Таким образом, с помощью подпроцесса (152) вне массовой поверхности в подходе  $k_T$ -факторизации можно учесть не только вклады подпроцесса (153), но и эффективно включить поправки высших порядков коллинеарной КХД в широкой кинематической области.

Аналогичным образом можно рассмотреть подпроцессы глюонного слияния в подходе  $k_T$ -факторизации следующего порядка малости  $\sim O(\alpha_s^2)$  с образованием очаро-

ванных кварков  $c$  или других кварков  $q = (u, d, s, b)$ :

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow c(p_1) + \bar{c}(p_2), \quad g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2), \quad (154)$$

с сопутствующим излучением каскадных глюонов. На Рис. 15 представлены типичные диаграммы Фейнмана для этих процессов, где учтена фрагментация очарованных кварков в чармонии.

Важно отметить, что для избежания двойного счета следующий подпроцесс порядка  $\sim O(\alpha_s^2)$  в подходе  $k_T$ -факторизации не рассматривается:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow g(p_1) + g(p_2), \quad (155)$$

поскольку диаграммы такой топологии эффективно учитываются в подпроцессе (152).

Сечения всех вышеуказанных процессов могут быть рассчитаны согласно формулам (98)-(99) с заменой амплитуд в выражениях на  $\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow c + \bar{c}, q + \bar{q})$  и  $\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow g^*)$ , соответственно.

### 3.2.1 Парное рождение чармониев с учетом фрагментационных вкладов

Подход  $k_T$ -факторизации и учет множественных глюонных излучений позволяет не только включить фрагментационные вклады в парное рождение чармониев, как было показано для подпроцессов (152) и (154), но и упростить вычисление (в рамках фрагментационного подхода) синглет-октетных и октет-октетных вкладов, таких как (149)-(151). При этом будут эффективно учитываться не только вклады в лидирующем порядке коллинеарной КХД, но и поправки высших порядков. Остановимся на этом подробнее.

Подпроцесс (151) может быть заменен подпроцессом (152) в широкой кинематической области, поскольку функции фрагментации глюонов (127)-(129) учитывают переход через промежуточное октетное состояние  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]$ . Как было показано в разделе 2.2.2, выражение для этой компоненты получается непосредственно из амплитуды прямого рождения чармония, порядка  $\sim O(\alpha_s^2)$ , через промежуточное состояние  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]$  (78) в пределе  $s \gg t, u$ , когда искомая амплитуда рождения может быть представлена в факторизованном виде, т.е. справедлива замена:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(8)}] \implies g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow g^*(p) \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{(8)}]. \quad (156)$$

Вторая пара очарованных кварков в состоянии  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]$  образуется от одного из глюонов начального каскада, сопровождающего процесс жесткого взаимодействия (см. Рис. 14). При этом возникают комбинаторные вклады, с помощью которых эффективно учитываются поправки высших порядков.

Отметим также, что другие компоненты функций фрагментации, отвечающие промежуточным состояниям  $n = {}^{2S+1}L_J^{(1,8)}$ , получаются из диаграмм высших порядков  $\sim O(\alpha_s^3)$  и, вследствие этого, являются лишь поправками к прямому рождению

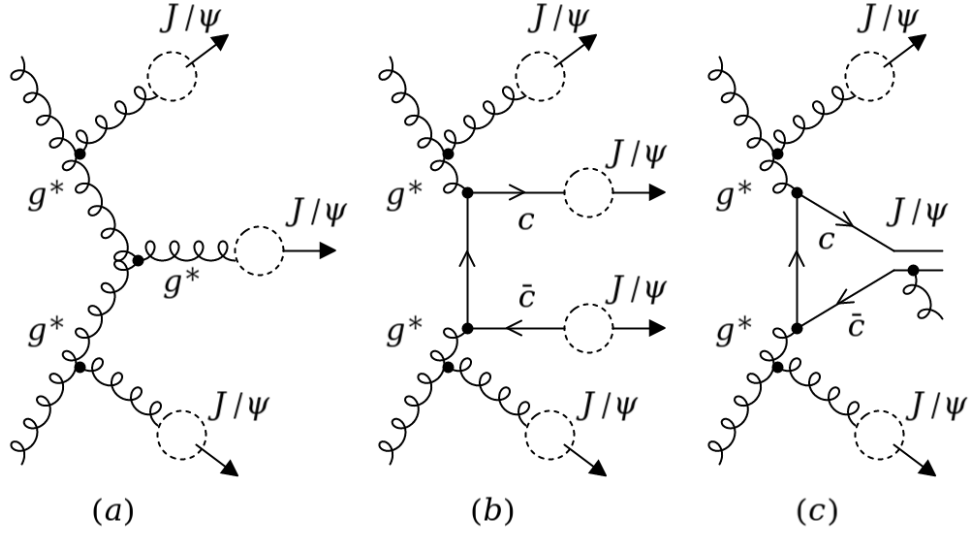


Рис. 16: Подпроцессы рождения  $J/\psi$  мезонов, сопровождающийся множественным испусканием глюонов. Пунктирными кругами обозначены возможные каналы фрагментации глюонов/очарованных кварков в  $J/\psi$  мезоны.

чармониев через эти промежуточные состояния  $n$ . Таким образом, в расчетах также учитываются дополнительные (нелидирующие) фрагментационные вклады, которые ранее в работах не рассматривались.

Подпроцессы (149), (150) могут быть эффективно учтены в подпроцессах прямого рождения одиночных чармониев в жестком взаимодействии:

$$g^* + g^* \rightarrow c\bar{c} \left[ {}^3S_1^{(1)} \right] + g, \quad g^* + g^* \rightarrow c\bar{c} \left[ {}^3P_J^{(8)} \right], \quad (157)$$

которые будут сопровождаться множественными глюонными излучениями с последующей фрагментацией. Схематичное изображение данных процессов с указанием возможных каналов для фрагментации партонов в  $J/\psi$  мезоны представлено на Рис.16.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены подпроцессы, приводящие к рождению  $\chi_{cJ}$  мезонов, такие как:

$$g^* + g^* \rightarrow c\bar{c} \left[ {}^3P_J^{(1)} \right]. \quad (158)$$

Отметим, что вычисление амплитуд вне массовой поверхности в лидирующем порядке для приведенных выше подпроцессов не вызывает больших затруднений, что позволяет значительно упростить вычисление синглет-октетных и октет-октетных вкладов в рамках фрагментационного механизма. Таким образом, полное сечение процесса парного рождения чармониев, эффективно учитывающих такие вклады,

может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow \mathcal{H} + \mathcal{H}' + X) &= \sum_a \int \sigma(pp \rightarrow \mathcal{H}' + X) \mathcal{D}_a^{\mathcal{H}}(z, \mu^2) \delta\left(z - \frac{p^{\mathcal{H}}}{p^a}\right) dz + \\ &+ \sum_{a,b} \iint \sigma(pp \rightarrow g^*/c\bar{c}/q\bar{q}) \mathcal{D}_a^{\mathcal{H}}(z, \mu^2) \mathcal{D}_b^{\mathcal{H}'}(z', \mu'^2) \delta\left(z - \frac{p^{\mathcal{H}}}{p^a}\right) \delta\left(z' - \frac{p^{\mathcal{H}'}}{p^b}\right) dz dz', \end{aligned} \quad (159)$$

где суммирование осуществляется по всем глюонам и очарованным кваркам, образованным как в результате неколлинеарной эволюции глюонов, так и жестком взаимодействии;  $p^a$  и  $p^b$  ( $a \neq b$ ) - импульсы глюонов и очарованных кварков,  $p^{\mathcal{H}}$  и  $p^{\mathcal{H}'}$  - импульсы образованных чармониев.

### 3.3 Механизм двойного партонного рассеяния

Процессы одиночного партонного рассеяния являются наиболее известным механизмом рождения частиц, когда во взаимодействии участвуют по одному партону сталкивающихся протонов. Однако существуют и другие механизмы рождения частиц, такие как механизм двойного партонного рассеяния (ДПР), которое в последнее время стало объектом интенсивных исследований [34–37]. ДПР возникает из двух независимых партонных взаимодействий в одном адрон-адронном взаимодействии. Несмотря на небольшое сечение таких процессов, их исследование важно, поскольку является неотъемлемой частью как в изучении и выделении различных фонов для большого числа коллайдерных экспериментов, так и структуры самого протона, в частности, корреляций между партонами в протоне. Вклады от ДПР растут при уменьшении поперечных импульсов рождаемых частиц (и, соответственно, уменьшении  $x$ ), поскольку полное сечение пропорционально  $\sim x^4$  из-за четырех взаимодействующих партонов. Следовательно, роль ДПР увеличивается при увеличении энергии сталкивающихся частиц, т.к. открывается возможность исследовать области меньших  $x$  (больших партонных плотностей). Кроме того, для некоторых процессов, например с участием кваркониев,  $J/\psi + \Upsilon$  или  $J/\psi + D$ , где вклады одиночного партонного рассеяния появляются только в высших порядках КХД и, следовательно, подавлены по константе связи  $\alpha_s$ , ДПР начинает играть ключевую роль в описании экспериментальных данных.

В общем случае, для протон-протонных столкновений факторизационная формула сечения ДПР содержит два сечения партонных подпроцессов и может быть представлена в виде [124]:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}^{DPS} &= \frac{1}{1 + \delta_{AB}} \sum_{i,j,k,l} \int \mathcal{F}^{ij}(x_1, x_2, \mathbf{b}, \mu_A^2, \mu_B^2) \mathcal{F}^{kl}(x'_1, x'_2, \mathbf{b}, \mu_A^2, \mu_B^2) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{ik}^A(x_1, x'_1) \hat{\sigma}_{jl}^B(x_2, x'_2) dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 d^2b, \end{aligned} \quad (160)$$



где  $A$  и  $B$  обозначают конечные состояния, образованные при взаимодействии партонов,  $\mathcal{F}^{ij}$  обозначает двухпартонное распределение, которое можно рассматривать как вероятность найти партоны  $i$  и  $j$  с продольными долями импульса  $x_1$  и  $x_2$ , разделенными расстоянием  $|\mathbf{b}|$  в плоскости, поперечной к движению сталкивающихся протонов (прицельный параметр),  $\mu_A^2$  и  $\mu_B^2$  характерные масштабы партонных взаимодействий,  $\hat{\sigma}_{ik}^A$  и  $\hat{\sigma}_{jl}^B$  — сечения соответствующих партонных подпроцессов. Коэффициент перестановок  $1/(1 + \delta_{AB})$  необходим для правильной нормировки в случае идентичных конечных состояний  $A$  и  $B$ .

В областях  $x \ll 1$ , характерных для столкновений протонов на ЛНС, можно пренебречь партонными корреляциями и интерференцией, что позволяет разделить двойное партонное распределение на две независимые партонные функции распределения  $f(x, \mu^2)$  и поперечную компоненту  $G(\mathbf{b})$  [125]:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \mathbf{b}, \mu_A^2, \mu_B^2) = f(x_1, \mu_A^2) f(x_2, \mu_B^2) G(\mathbf{b}) \quad (161)$$

Проинтегрируем  $G(\mathbf{b})$  по  $d^2b$  и определим величину  $\sigma_{\text{eff}}$  как:

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{1}{\int d^2b G^2(\mathbf{b})}. \quad (162)$$

Она носит название эффективного сечения ДПР и определяет эффективное поперечное перекрытие партонных взаимодействий, которые составляют ДПР. Таким образом, полное сечение ДПР можно представить в компактном виде [36]:

$$\sigma_{AB}^{DPS} = \frac{1}{1 + \delta_{AB}} \sum_{i,j,k,l} \frac{\sigma_{ik}^A \sigma_{jl}^B}{\sigma_{\text{eff}}} \quad (163)$$

как произведение двух однопартонных взаимодействий, которые вычисляются с помощью обычных методов пертурбативной КХД. Эффективное сечение играет роль нормирующего множителя, включающего в себя неопределенности, связанные с ДПР. Данный параметр зачастую используется в качестве свободного параметра; его величина может быть извлечена из экспериментальных данных.

Исследование ДПР в процессах с образованием чармониев вызывает дополнительный интерес с точки зрения величин эффективного сечения. Обычно величина  $\sigma_{\text{eff}}$  лежит в пределах 12 - 20 мбн, что продемонстрировано на Рис. 17, где представлены результаты измерений для процессов с различными конечными состояниями. Однако, процессы с участием чармониев обычно дают значительно меньшие значения. Так, величина  $\sigma_{\text{eff}} = 8.8 - 12.5$  мбн была извлечена из последних данных коллаборации ЛНСб по парному рождению  $J/\psi$  мезонов в рамках нерелятивистской КХД [40]. Более того, величины  $\sigma_{\text{eff}} = 8.2 \pm 2.2$  мбн [41],  $\sigma_{\text{eff}} = 6.3 \pm 1.9$  мбн [24],  $\sigma_{\text{eff}} = 4.8 \pm 2.5$  мбн [42] и даже  $\sigma_{\text{eff}} = 2.2 \pm 1.1$  мбн [39],  $\sigma_{\text{eff}} = 2.2 - 6.6$  мбн [43] были получены из данных экспериментов Tevatron и ЛНС.

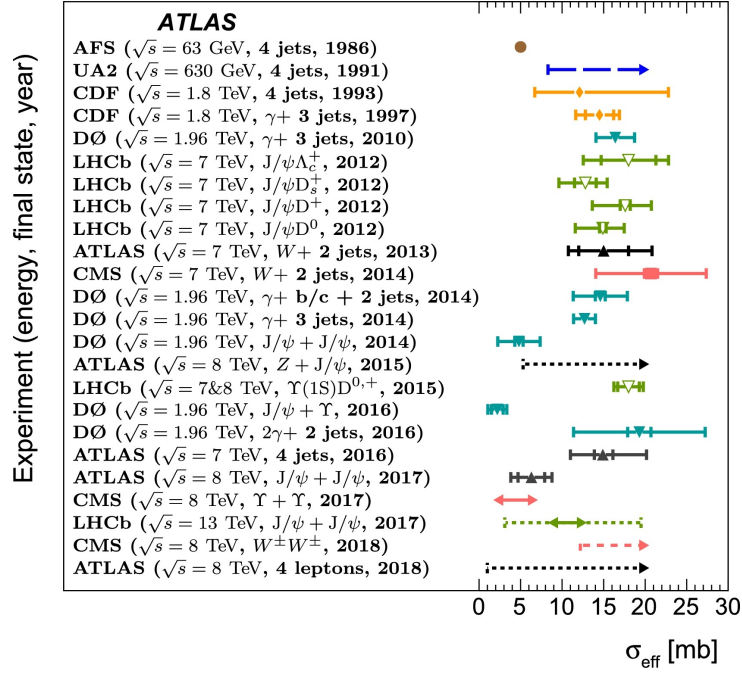


Рис. 17: Измерения эффективного сечения ДПР,  $\sigma_{\text{eff}}$ , для различных конечных состояний, полученные в различных коллайдерных экспериментах. Рисунок взят из работы [126].

Для процессов парного рождения чармониев  $\mathcal{H}\mathcal{H}'$  формула (163) запишется в виде:

$$\sigma^{DPS}(pp \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{H}' + X) = \frac{1}{1 + \delta_{\mathcal{H}\mathcal{H}'}} \frac{\sigma_1(pp \rightarrow \mathcal{H} + X)\sigma_2(pp \rightarrow \mathcal{H}' + X)}{\sigma_{\text{eff}}}, \quad (164)$$

где сечения одиночного рождения могут быть вычислены в подходе  $k_T$ -факторизации согласно формулам (98)-(99). Раздел 3.5.2 посвящен определению величины  $\sigma_{\text{eff}}$  из имеющихся экспериментальных данных ЛHCb по парному рождению  $J/\psi$  мезонов.

### 3.3.1 Фрагментационные механизмы в двойном партонном рассеянии

При расчетах сечений в рамках механизма ДПР, согласно формуле (164), фрагментационные вклады в сечения процессов парного рождения чармониев не учитываются. Однако исследование роли фрагментационных механизмов, включающих эффекты множественных глюонных излучений, в процессах двойного партонного рассеяния представляется нам интересной и важной задачей. Как подчеркивалось ранее, существует несогласованность между величинами эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}}$ , получаемыми в некоторых процессах с участием тяжелых кваркониев и без них. Учет дополнительных фрагментационных вкладов может пролить свет на данную проблему.

Предложим метод, позволяющий учесть фрагментационные вклады от множественных глюонных излучений в процессах ДПР. Для краткости изложения рас-

смотрим детально процесс парного рождения  $J/\psi$  мезонов, опуская, без ограничения общности, вклады от радиационных распадов возбужденных состояний чармониев ( $\psi', \chi_{cJ}$ ). В стандартных расчетах сечений ДПР (164) необходимо провести суммирование по всем промежуточным состояниям, приводящим к образованию  $J/\psi$  мезонов, т.е. рассмотреть все возможные комбинации вида:

$$\left[ {}^3S_1^{(1,8)}, {}^3P_J^{(8)} \right]_1 \times \left[ {}^3S_1^{(1,8)}, {}^3P_J^{(8)} \right]_2, \quad (165)$$

где каждая из скобок соответствует одиночному рождению  $J/\psi$  мезонов. Все указанные процессы отвечают только прямому рождению пары очарованных кварков в определенном Фоковском состоянии. Однако, как было показано выше, один или оба  $J/\psi$  мезона могут быть образованы не только в результате жесткого взаимодействия, но и с помощью механизма фрагментации с учетом вкладов глюонных эмиссий в процессе эволюции глюонного каскада. Согласно иерархии подпроцессов по константе связи  $\alpha_s$ , рассчитываемых в подходе  $k_T$ -факторизации, в первую очередь следует добавить подпроцессы (152) и (154). Обозначим эти подпроцессы, которые будут включать в себя фрагментации от множественных глюонных излучений, как  $g$  и  $c$ , соответственно. Очевидным образом возникают ранее не рассматриваемые вклады вида  $[g, c]_1 \times [g, c, {}^3S_1^{(1)}, {}^3P_J^{(8)}]_2$ , учет которых может быть осуществлен с помощью предложенного метода в рамках фрагментационного подхода (см. раздел 3.2). При этом было исключено промежуточное состояние  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]$ , по аналогии с тем, как это было сделано в (156). На Рис. 18 приведен пример возникновения таких фрагментационных вкладов. Как и в случае одиночного партонного взаимодействия, благодаря множественности испущенных глюонов возникают дополнительные комбинаторные вклады в полное и дифференциальные сечения процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов.

Таким образом, модифицированная схема ДПР, которая включает в себя фрагментационные механизмы, в том числе и от множественных глюонных излучений, должна учитывать всевозможные промежуточные состояния вида:

$$\left[ g, c, {}^3S_1^{(1)}, {}^3P_J^{(8)} \right]_1 \times \left[ g, c, {}^3S_1^{(1)}, {}^3P_J^{(8)} \right]_2. \quad (166)$$

Количественное исследование данных эффектов обсуждается в разделе 3.5.3. Для подпроцессов, в которых  $J/\psi$  мезон образуется от радиационных распадов возбужденных состояний  $\psi', \chi_{cJ}$ , предложенная модификация расчетов ДПР применяется аналогичным образом. Более того, данная схема вычислений может быть расширена также на любые процессы с участием тяжелых кваркониев, в том числе для тройного партонного рассеяния, где три жестких партонных взаимодействия происходят одновременно. Такие механизмы были рассмотрены в работах [127, 128] и получены первые экспериментальные свидетельства в процессе тройного рождения  $J/\psi$  мезонов [129].

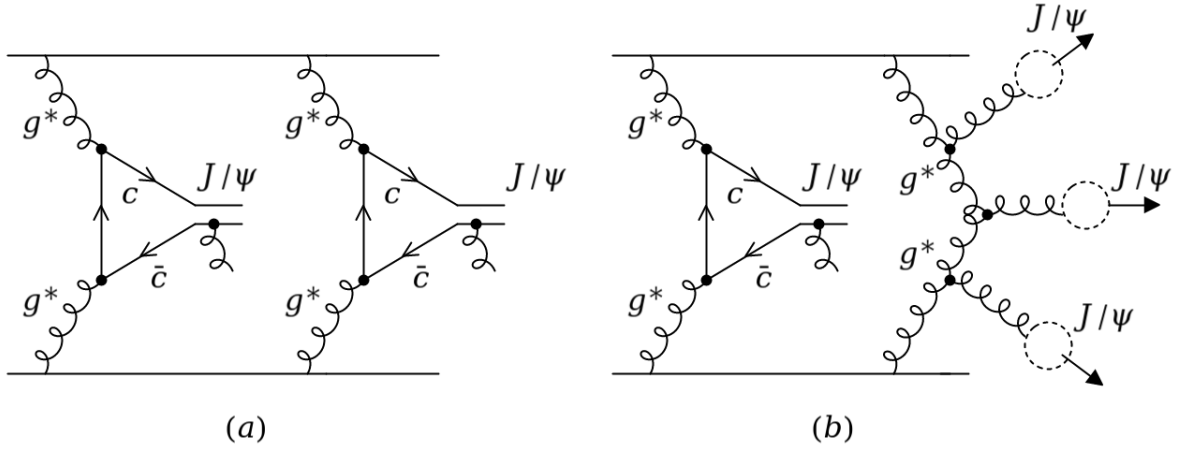


Рис. 18: Пример парного рождения  $J/\psi$  мезонов в процессе двойного партонного рассеяния в стандартной схеме расчетов (а) и модифицированной схеме, учитывающей множественные глюонные излучения (b). Пунктирные круги отображают превращение партонов в  $J/\psi$  мезоны с помощью фрагментационных механизмов.

### 3.4 Выбор параметров и теоретические неопределенности

Для вычисления сечений жестких взаимодействий в подходе  $k_T$ -факторизации была использована программа численного интегрирования VEGAS [130]. Данная программа позволяет проводить вычисления многократных интегралов в несколько итераций, создавая на первом шаге функции плотности подынтегрального выражения, что позволяет значительно улучшить их сходимость. Как было отмечено выше, для восстановления глюонного каскада использовалась специальная подпрограмма генерации TMD партонных ливней, встроенная в Монте-Карло генератор событий CASCADE, которая позволяет реконструировать цепочку глюонных эмиссий в начальном состоянии.

Для исследования чувствительности полученных результатов к выбору TMD функций распределений глюонов, все вычисления проводились с несколькими глюонными плотностями, подчиняющимися уравнению эволюции CCFM, а именно, A0, JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2. Основные теоретические неопределенности в расчетах связаны с выбором масштабов факторизации  $\mu_F$  и ренормализации  $\mu_R$  в жестком взаимодействии. Масштаб ренормализации выбирался в соответствии с подпроцессом, в то время как масштаб факторизации для любых подпроцессов выбирался в виде  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$ , согласно определению масштаба эволюции CCFM (57). Оценка таких неопределенностей осуществлялась путем изменения масштаба  $\mu_R$  (увеличением и уменьшением с коэффициентом 2) и одновременным изменением глюонных плотностей на A0+(-), JH'2013 set 1 mur+(mur-) и JH'2013 set 2 mur+(mur-), соответственно. При этом, масштаб  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$  остается неизменным. Подробнее см. раздел 1.7.

В численных расчетах использовались следующие значения:  $m_c = 1.5$  ГэВ,  $m_{J/\psi} = 3.097$  ГэВ,  $m_{\psi'} = 3.69$  ГэВ,  $m_{\chi_{c1}} = 3.51$  ГэВ,  $m_{\chi_{c2}} = 3.56$  ГэВ,  $Br(\psi' \rightarrow J/\psi + 2\pi) = 0.529$ ,  $Br(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.339$ ,  $Br(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.192$  [131].

### 3.4.1 Выбор факторизационного масштаба

В целом, выбор факторизационного масштаба является очень важным вопросом. В подходе  $k_T$ -факторизации поправки высших порядков коллинеарной КХД включены в ТМД глюонные функции, в которых данный параметр определяет максимальный угол глюонных эмиссий (57) и тем самым 'управляет' этими поправками. С одной стороны, кажется вполне естественным использовать одно и тоже определение  $\mu_F$  во всех вычислениях. Однако, для узкого ряда процессов в определенных кинематических областях, где вклады следующих за лидирующим порядков значительно превышают вклады лидирующего порядка, выбор  $\mu_F$  может играть ключевую роль. В данной работе таким специфичным процессом является процесс рождения пары  $J/\psi$  мезонов через синглетный механизм (144).

Своеобразным свойством партонного подпроцесса (144) является то, что его сечение резко падает с ростом  $\hat{s}$ , поэтому для такого процесса характерны малые  $\hat{s}$ . В то же самое время, спектры начальных глюонов по поперечному импульсу  $\mathbf{k}_T$  экспоненциально широкие. Это приводит к тому, что в произвольной паре взаимодействующих глюонов поперечный импульс  $|\mathbf{k}_T|$  одного из глюонов будет намного больше другого. В результате, обычное выражение факторизационного масштаба (57) сводится к линейной траектории  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q} \implies \mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$  уже при небольших поперечных импульсах  $J/\psi$  мезонов. Однако такое соотношение приводит к некоторому противоречию. Согласно общему определению, глюонная плотность  $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu_F^2)$  должна описывать вероятностное распределение по поперечному импульсу  $\mathbf{k}_T^2$  при любом заданном  $\mu_F^2$ . В то же время, вырождение масштаба  $\mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$  приводит к однозначному определению  $k_T$  для наперед заданного масштаба  $\mu_F$ . Условие  $\mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$  приводит к смещению фазового объема всех допустимых поперечных импульсов к узкой области, сконцентрированной около их верхнего предела. При этом верхний предел находится в неустойчивом положении, приводящем к значительному изменению глюонной плотности от больших значений при  $\mathbf{k}_T^2 < \mu_F^2$  до малых при  $\mathbf{k}_T^2 > \mu_F^2$ . Это продемонстрировано на Рис. 19, где приведены распределения глюонной плотности JH'2013 set 1 по поперечному импульсу  $k_T$  при определенных  $x$  и  $\mu_F^2$ . Данный факт делает вычисления нестабильными по отношению к даже небольшим изменениям в масштабе факторизации.

Эти свойства также проиллюстрированы на Рис. 20 и 21. На первом приведены дважды дифференциальные сечения парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции поперечных импульсов начальных глюонов  $d\sigma/d \log_{10} |\mathbf{k}_{1T}| d \log_{10} |\mathbf{k}_{2T}|$ . Поведение модельных амплитуд вне массовой поверхности партонного подпроцесса предпола-

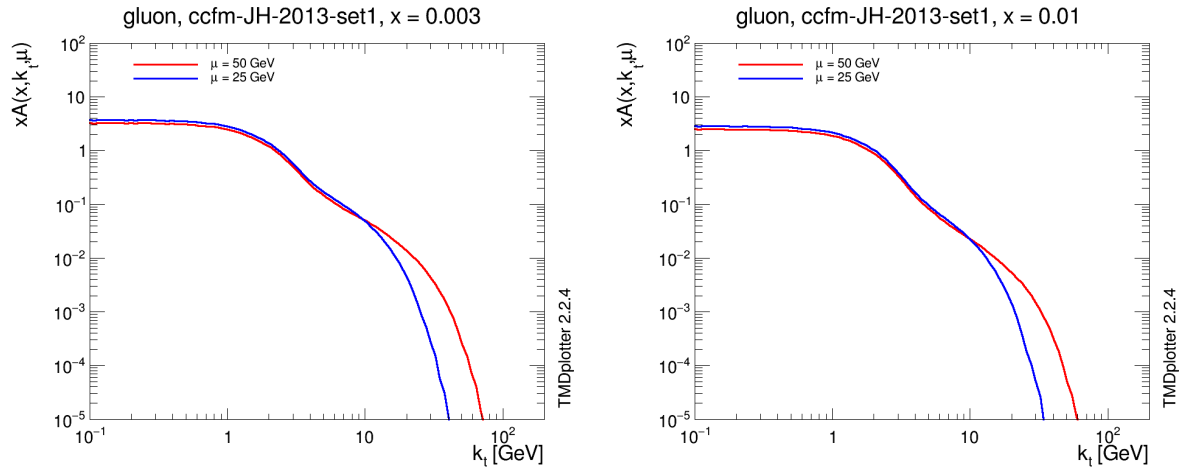


Рис. 19: Эффект вариации масштаба в TMD распределении глюонов JH'2013 set 1. Изменение факторизационного масштаба в 2 раза соответствует переходу между красным и синим распределением; в области  $\mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$  разница может достигать нескольких порядков.

галось равным  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1$ ,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1/\hat{s}^2$  и  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1/\hat{s}^4$ . Видно, что выбор масштаба в виде  $\mu_F^2 = \hat{s}/4$  ведет к устранению линейной зависимости  $\mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$ , обеспечивая нечувствительность формы распределения к свойствам матричного элемента и позволяя поперечным импульсам свободно изменяться в допустимом фазовом пространстве, согласно определению  $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu_F^2)$ . С другой стороны, выбор масштаба в виде  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$  приводит к существенному сдвигу распределения в область больших значений  $\mathbf{k}_T^2$  при изменении амплитуды  $|\mathcal{A}|^2$  (уменьшении характерных  $\hat{s}$ ).

Рис. 21 отражает такое поведение сечения на примере дифференциальных спектров по поперечному импульсу пары  $J/\psi$  мезонов  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  и инвариантной массе  $m(J/\psi, J/\psi)$ . Чем больше зависимость амплитуды  $|\mathcal{A}|^2$  от  $\hat{s}$ , тем сильнее происходит сдвиг к границе неустойчивости  $\mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$ , которая значительно влияет на форму распределений, как видно из полученных распределений. На самом деле, проблема является более общей и не относится только к подпроцессу (144) парного рождения  $J/\psi$  мезонов. Вне зависимости от поведения матричного элемента, всегда существует область, в которой выполняется условие  $p_T^2 \gg \hat{s}$ , что может привести к аналогичной неустойчивости. Однако, на данный момент такие области ни в экспериментах ATLAS и CMS, ни в эксперименте LHCb не достижимы для большинства процессов. Поэтому процесс парного рождения  $J/\psi$  мезонов является своего рода уникальным, так как для него данная проблема проявляется при меньших  $p_T$ , которые уже были измерены экспериментально [24].

Таким образом, с одной стороны, вырождение двумерного фазового пространства  $(\mu_F^2, \mathbf{k}_T^2)$  в одномерное  $\mu_F^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$  неизбежно при увеличении  $p_T$ , вне зависимости от свойств матричного элемента. Это приводит к значительной чувствительности ре-

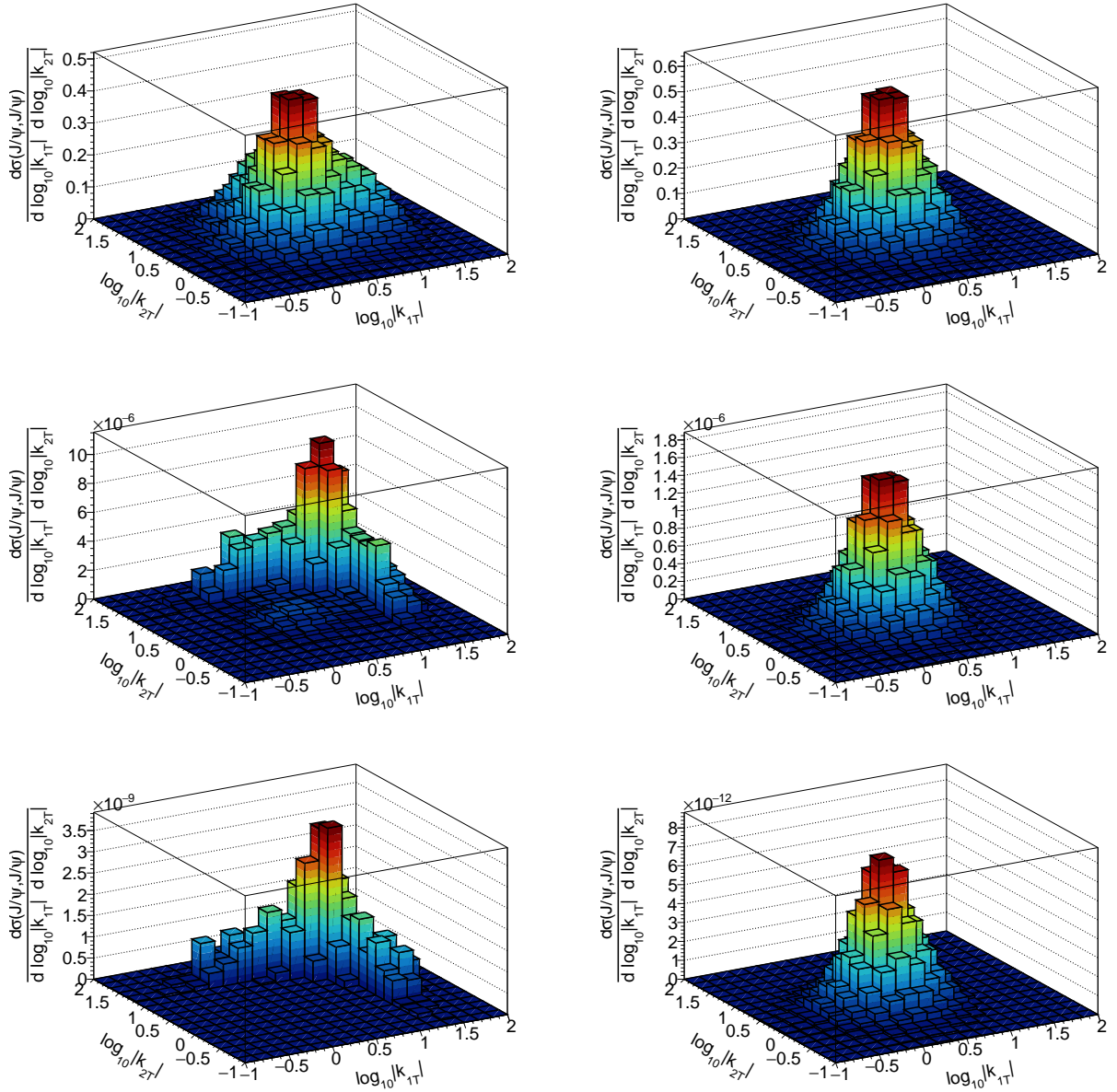


Рис. 20: Дважды дифференциальное сечение парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функция поперечных импульсов начальных глюонов  $d\sigma/d\log_{10}|\mathbf{k}_{1T}|d\log_{10}|\mathbf{k}_{2T}|$ . Вычисления выполнены с различными факторизационными масштабами и различными модельными матричными элементами  $|\mathcal{A}|^2$  для партонных подпроцессов. Левая колонка соответствует  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$ , правая -  $\mu_F^2 = \hat{s}/4$ . Верхний ряд,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1$ ; средний ряд,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1/\hat{s}$ ; нижний ряд,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1/\hat{s}^4$ . Вычисления приведены для глюонного распределения JH'2013 set 1.

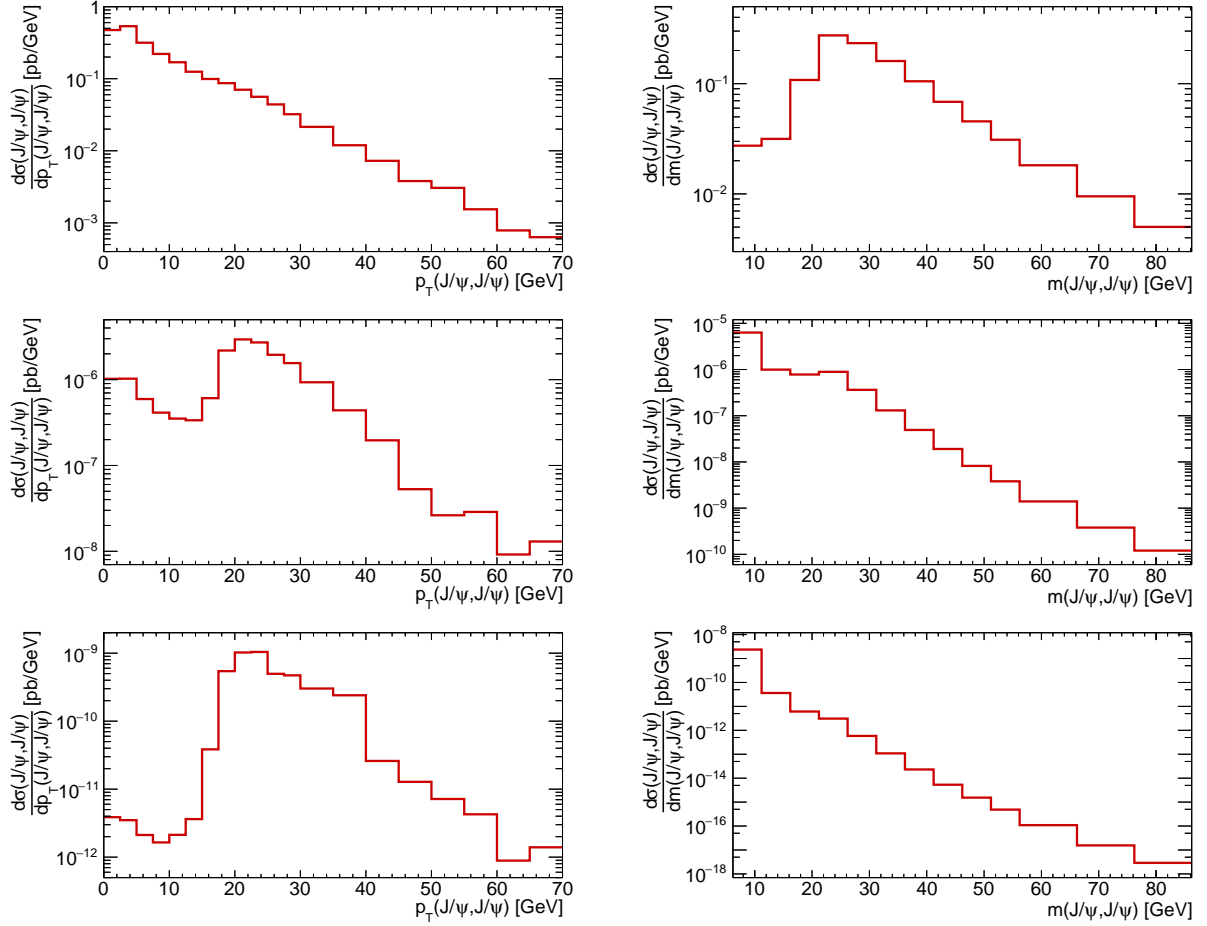


Рис. 21: Распределения по поперечному импульсу  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  (слева) и инвариантной массе  $m(J/\psi, J/\psi)$  (справа) пары  $J/\psi$  мезонов. Вычисления выполнены с факторизационным масштабом  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$  и модельными матричными элементами: верхний ряд,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1$ ; средний ряд,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1/\hat{s}$ ; нижний ряд,  $|\mathcal{A}|^2 \simeq 1/\hat{s}^4$ . Вычисления приведены для глюонного распределения JH'2013 set 1.



зультатов от выбора масштаба  $\mu_F$ . Поскольку такое поведение наблюдается только в достаточно редких случаях с участием подпроцессов с очень маленькими значениями  $\hat{s}$ , то можно просто переопределить масштаб  $\mu_F^2$  для последних. Определение  $\mu_F^2$  связано с максимальным углом разлета кварк-антикварковой пары, образованной в подпроцессе  $\gamma^* g^* \rightarrow q\bar{q}$ , следовательно процессы с другой топологией могут допускать другие виды зависимостей масштаба  $\mu_F^2$ .

С другой стороны, можно следовать устоявшейся парадигме, согласно которой определение  $\mu_F^2$  должно сохранять согласованность между процедурами фитирования (из которых были получены плотности глюонов) и вычислениями, в которых применяются полученные глюонные плотности. Соответственно, зависимость  $\mu_F^2 \sim \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$  должна сохраняться. Таким образом, выбор  $\mu_F$  является частью предложенной параметризации TMD функций распределения. Использование масштаба  $\mu_F^2 = (\hat{s} + \mathbf{Q}_T^2)/4$  позволяет решить проблему нестабильности вычислений и сохраняет согласованность с параметризацией, поскольку такому масштабу отвечают TMD распределения глюонов JH'2013 set 1 muf- и JH'2013 set 2 muf- (см. раздел 1.7). Указанные глюонные функции были использованы в численных расчетах, приведенных в данной работе, наряду с JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2.

Следует отметить, что численная неустойчивость расчетов при  $\mu^2 \simeq \mathbf{k}_T^2$ , вероятно, указывает на приближение к границам применимости подхода  $k_T$ -факторизации. Определенно, данные вопросы требуют более детального изучения, в том числе поиска других процессов, в которых проявлялись бы аналогичные свойства. Однако подобные вопросы выходят за рамки настоящей работы.

## 3.5 Результаты расчетов

В данном разделе представлены результаты наших расчетов сечений процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов в различных кинематических областях, отвечающих экспериментам ATLAS, CMS и LHCb. Проведено сравнение фрагментационных вкладов, рассчитываемых в подходе  $k_T$ -факторизации и в коллинеарном приближении. Изучена роль дополнительных фрагментационных вкладов в двойном партонном рассеянии. Проведено сравнение полученных предсказаний с экспериментальными данными коллабораций ATLAS и LHCb [24, 40, 132]. Определена величина эффективного сечения ДПР  $\sigma_{\text{eff}}$  из данных LHCb. Данные исследования представлены в работах [55, 57].

### 3.5.1 Роль множественных глюонных излучений

Как было показано ранее, в подходе  $k_T$ -факторизации с помощью фрагментационного механизма можно эффективно учесть синглет-октетные и октет-октетные вклады в процессы парного рождения  $J/\psi$  мезонов. Важным вопросом, требующим

детального исследования, является роль и место комбинаторных вкладов множественных глюонных излучений, возникающих в начальном состоянии, среди других вкладов в различных кинематических областях.

Для изучения этой роли в подходе  $k_T$ -факторизации были рассчитаны сечения ряда подпроцессов: подпроцесс (144) синглетного рождения  $J/\psi$  мезонов, как вклад, дающий основное интегральное сечение; подпроцессов (152) и (154), учитывающих множественные глюонные излучения для оценки комбинаторных фрагментационных вкладов, согласно методу, описанному в разделе 3.2. Кроме этого, был рассчитан вклад подпроцесса (153) в коллинеарном подходе для сравнения с комбинаторными вкладами. Для расчетов фрагментационных вкладов использовались функции фрагментации очарованных кварков (112) и глюонов (127), в которых были удержаны только главные слагаемые, отвечающие переходам через промежуточные состояния  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]$  и  $c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}]$ , соответственно. Для них было решено совместно уравнение эволюции (133)-(134). Остальные (нелидирующие) слагаемые в функциях фрагментации, также как и вклады от радиационных распадов  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$  были опущены, поскольку исследование проводилось на качественном уровне. Полные расчеты дифференциальных сечений будут представлены в следующих разделах.

В численных расчетах факторизационный и ренормализационный масштабы были выбраны в виде  $\mu_F^2 = \mu_R^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$ . Фрагментационный масштаб, содержащийся в  $D(z, \mu_{\text{fragm}}^2)$ , был выбран как  $\mu_{\text{fragm}}^2 = m_Q^2 + p_T^2$ , где  $m_Q$  и  $p_T$  — масса и поперечный импульс фрагментируемого партона.

На Рис. 22 представлены результаты вычислений вкладов указанных выше подпроцессов в дифференциальные сечения парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  пары  $J/\psi$  мезонов и разности быстрот между ними  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. При отборе событий требовалось, чтобы каждый  $J/\psi$  мезон имел поперечный импульс  $p_T(J/\psi) > 10$  ГэВ, что примерно соответствует общим критериям отбора, используемым в анализах данных коллабораций ATLAS и CMS. Для иллюстрации эффектов разных TMD плотностей глюонов, результаты были получены с двумя TMD глюонными функциями распределения: A0 и JH'2013 set 2.

Из полученных распределений видно, что аккуратный учет комбинаторных вкладов, образованных от фрагментации множественных глюонных излучений в  $J/\psi$  мезоны (отмечены как “Fragm. comb.” и соответствуют подпроцессу (152)), значительно (вплоть до 10 раз) увеличивает сечение по сравнению с вкладами, образованными в коллинеарном подпроцессе лидирующего порядка КХД (отмечены как “Fragm.coll.” и соответствуют (153)). Для того, чтобы подчеркнуть эффект учета поправок высших порядков в подходе  $k_T$ -факторизации, были рассмотрены вклады подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (152), в котором отбиралась только одна пара глюонов в каждом событии: глюон, образованный в жестком взаи-

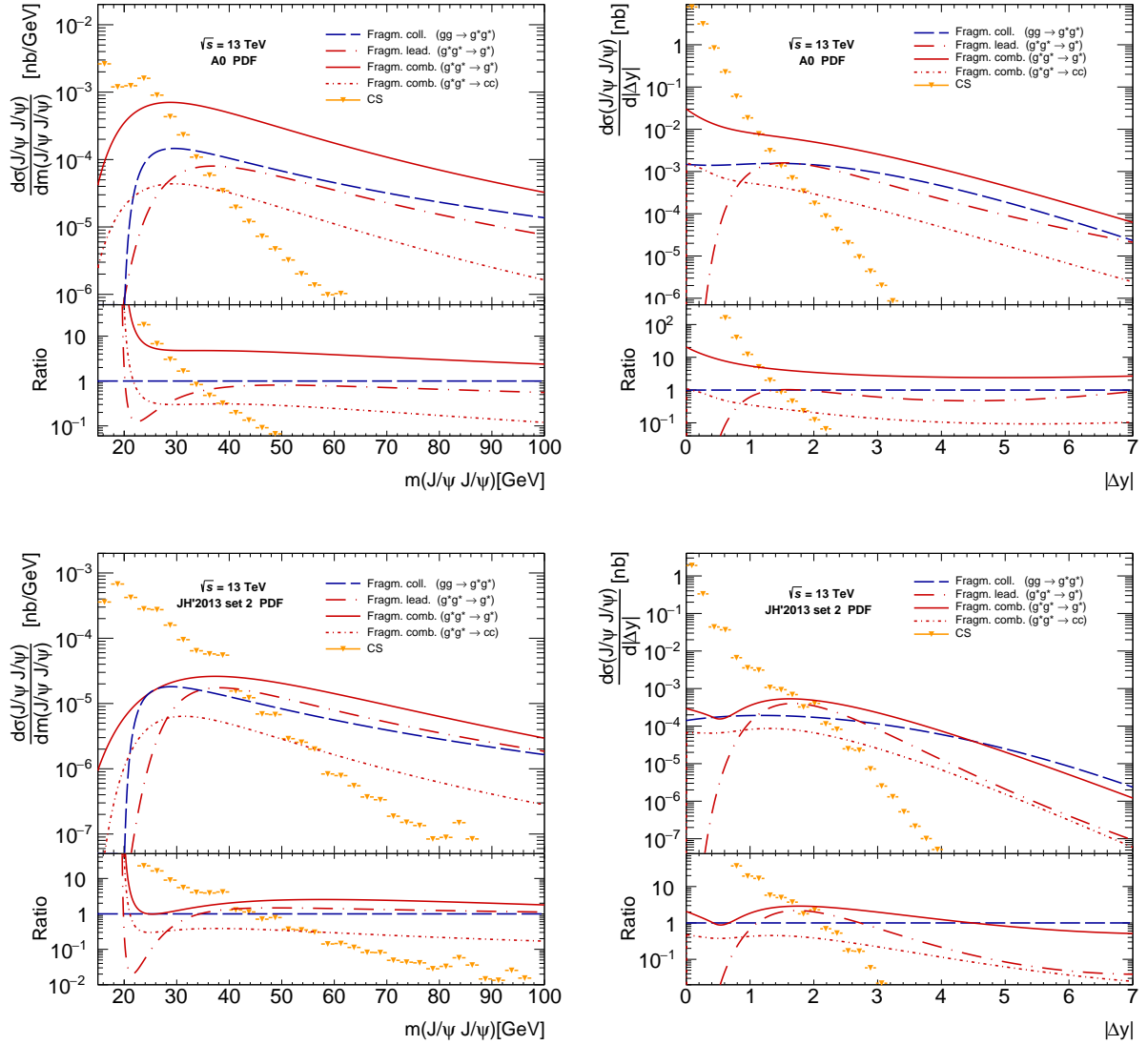


Рис. 22: Вклады различных подпроцессов в сечение парного рождения  $J/\psi$  мезонов, рассчитанные как функции инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  (слева) и разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  (справа) при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ для глюонных плотностей A0 (сверху) и JH'2013 set 2 (снизу). Каждый  $J/\psi$  мезон удовлетворяет условию:  $p_T(J/\psi) > 10$  ГэВ.

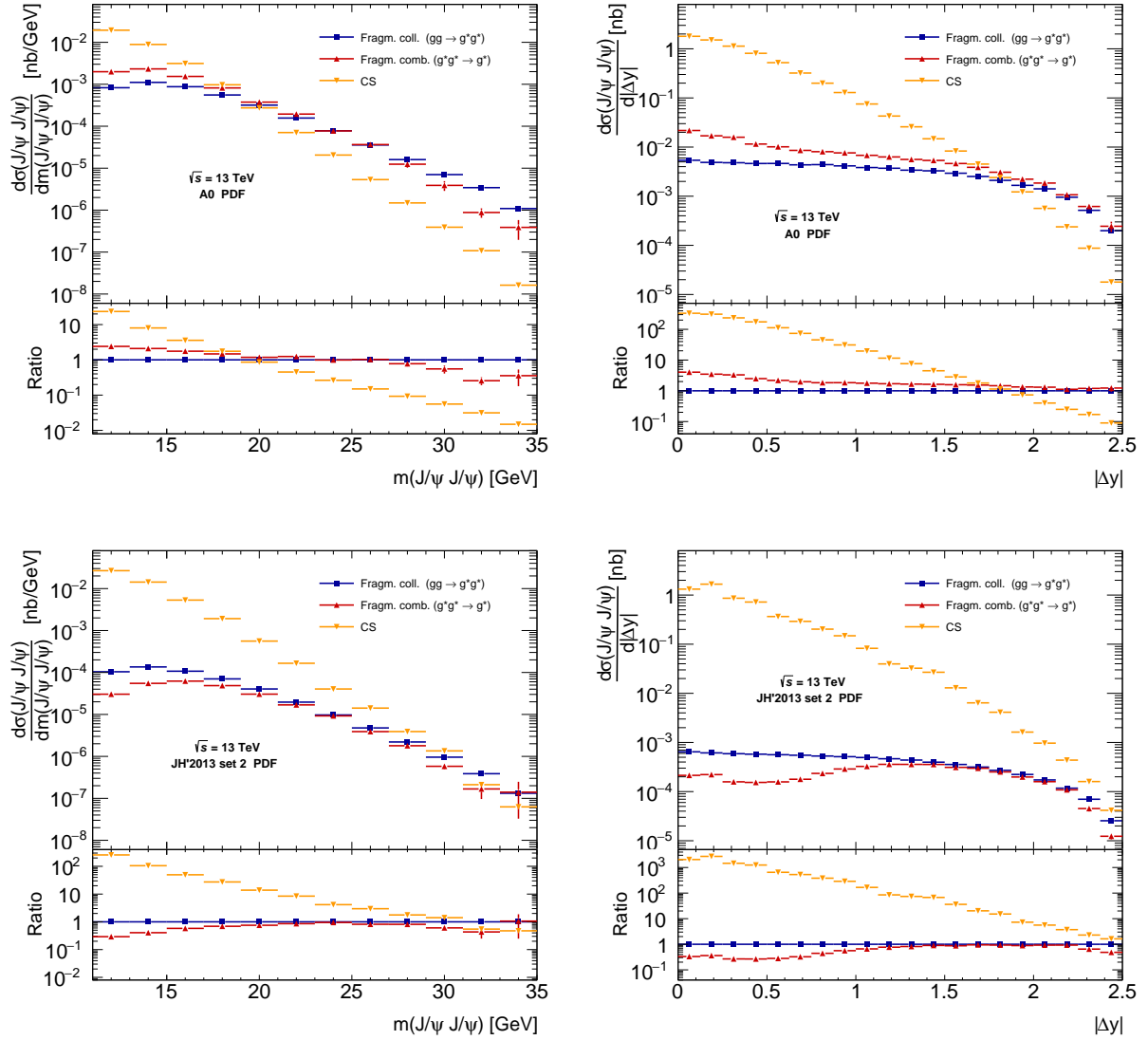


Рис. 23: Вклады различных подпроцессов в сечение парное рождение  $J/\psi$  мезонов, рассчитанные как функции инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  и разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ для глюонных плотностей A0 (сверху) и JH'2013 set 2 (снизу). Каждый  $J/\psi$  мезон удовлетворяет условиям:  $4.5 < p_T(J/\psi) < 10$  ГэВ и  $2 < y(J/\psi) < 4.5$ .

модействии и глюон из каскада с наибольшим поперечным импульсом (отмечены как “Fragm. lead.”). Хорошая согласованность данного распределения с коллинеарными расчетами в широкой кинематической области показывает, что отбор двух наиболее жестких глюонов примерно соответствует коллинеарному пределу в лидирующем порядке КХД. Это означает, что возникающая разница между полными сечениями, полученными в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода и обычным коллинеарным приближением, может быть, по большей части, отнесена к поправкам высших порядков, которую удастся эффективно учесть с помощью предложенных фрагментационных вкладов от множественных глюонных излучений.

Кроме того, было обнаружено, что комбинаторные вклады начинают играть доминирующую роль в областях инвариантных масс  $m(J/\psi, J/\psi) > 25$  ГэВ для TMD глюонного распределения A0 ( $m(J/\psi, J/\psi) > 35$  ГэВ для распределения JH’2013 set 2) и в областях  $|\Delta y(J/\psi, J/\psi)| > 1$ . Как и ожидалось, они начинают сильно превышать вклады синглетного механизма (обозначенного как “CS”). Следует отметить, что количественная разница в предсказаниях между TMD распределениями A0 и JH’2013 set 2 связана, в первую очередь, с различными значениями непертурбативных матричных элементов (см. Таблица 1). Кроме того, было получено, что вклады подпроцессов (154), включающих процессы фрагментации очарованных кварков, дают небольшой вклад по сравнению с (152) (порядка 5%), однако их также следует учитывать при полных расчетах.

Напротив, комбинаторный фрагментационный эффект мал в области передних быстрот, отвечающих кинематической области коллаборации LHCb. Для иллюстрации этого были проведены аналогичные вычисления, соответствующие следующим критериям отбора:  $4.5 < p_T(J/\psi) < 10$  ГэВ и  $2 < y(J/\psi) < 4.5$ . Полученные результаты для дифференциальных сечений по  $m(J/\psi, J/\psi)$  и  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  представлены на Рис. 23. Из полученных распределений видно, что комбинаторный эффект множественных глюонных излучений дает сравнительно небольшой вклад в сечение рождения  $J/\psi$  мезонов в области передних быстрот и сопоставим с фрагментационным вкладом коллинеарного подпроцесса. На фоне больших вкладов синглетного механизма рождения пары  $J/\psi$  мезонов фрагментационный механизм рождения может быть опущен. Отметим, что наблюдаемый эффект не является неожиданным, поскольку при больших быстротах (а, значит, при больших долях импульса  $x$  одного из взаимодействующих глюонов) глюонные эмиссии в начальном состоянии сильно подавлены.

Таким образом, легко видеть, что комбинаторные фрагментационные вклады играют существенную роль в области центральных быстрот, что соответствует кинематическим областям, исследуемым коллаборациями ATLAS и CMS. Учет множественных глюонных эмиссий в подходе  $k_T$ -факторизации для амплитуд вне массовой поверхности, вычисленных в лидирующем порядке, позволяет включить значитель-

ную часть поправок высших порядков коллинеарной КХД (превышение над коллинеарными расчетами в лидирующем порядке достигает 10 раз). При этом, в передней области быстрот при небольших поперечных импульсах, отвечающих эксперименту ЛНСб, эти вклады становятся намного менее существенными и в ряде случаев могут быть безопасно опущены. Однако следует отметить, что в целом ряде процессов с участием тяжелых кваркониев, таких как  $J/\psi + \Upsilon$  или  $J/\psi + D$ , синглетные вклады в ведущих порядках теории возмущений отсутствуют, а следовательно сечение, даже в области передних быстрот, будет определяться вкладами фрагментации и ДПР.

### 3.5.2 Парное рождение $J/\psi$ мезонов в передней области быстрот

В предыдущем разделе было показано, что комбинаторные вклады в процесс парного рождения  $J/\psi$  мезонов от множественных излучений глюонов пренебрежимо малы в передней области быстрот при небольших поперечных импульсах, поэтому экспериментальные данные коллаборации ЛНСб могут быть описаны только вкладами от синглетного механизма рождения и механизма двойного партонного рассеяния. Интерес к изучению данного процесса в передней области быстрот заключается как в определении эффективного сечения ДПР  $\sigma_{\text{eff}}$ , так и попытке самосогласованного описания процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов в подходе  $k_T$ -факторизации в рамках нерелятивистской КХД. Учитывая небольшое количество рассматриваемых подпроцессов в передней области быстрот, сама величина эффективного сечения может быть определена из доступных экспериментальных данных с наименьшими неопределенностями.

Экспериментальные данные для процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов в области передних быстрот были получены коллаборацией ЛНСб при энергиях  $\sqrt{s} = 7$  и 13 ТэВ [40, 132]. В обоих анализах отбирались события, удовлетворяющие условиям:  $p(J/\psi) < 10$  ГэВ и  $2 < y(J/\psi) < 4.5$ . Для энергии  $\sqrt{s} = 7$  ТэВ было измерено только распределение по инвариантной массе  $m(J/\psi, J/\psi)$  пары  $J/\psi$  мезонов, в то время как для энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ были получены распределения по поперечному импульсу и быстроте,  $p_T(J/\psi)$  и  $y(J/\psi)$ ,  $J/\psi$  мезона; по инвариантной массе и быстроте,  $m(J/\psi, J/\psi)$  и  $y(J/\psi, J/\psi)$ , пары  $J/\psi$  мезонов; разности быстрот и азимутальных углов,  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  и  $\Delta\phi(J/\psi, J/\psi)$ , между  $J/\psi$  мезонами; асимметрии поперечного импульса  $\mathcal{A}_T$ . Каждое из указанных распределений было определено в фазовых объемах, соответствующих поперечному импульсу пары  $J/\psi$  мезонов:  $p_T(J/\psi, J/\psi) > 1$  ГэВ,  $p_T(J/\psi, J/\psi) > 3$  ГэВ, а также без ограничений на  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  (для которого тоже было приведено соответствующее распределение). Асимметрия поперечного импульса определяется согласно:

$$\mathcal{A}_T = \left| \frac{p_T(J/\psi_1) - p_T(J/\psi_2)}{p_T(J/\psi_1) + p_T(J/\psi_2)} \right| \quad (167)$$

Для описания этих данных были рассчитаны сечения от подпроцесса синглетного

механизма рождения (144). В области малых инвариантных масс ( $m(J/\psi, J/\psi) < 15$  ГэВ) дополнительными вкладами от радиационных распадов  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$  в данный механизм можно пренебречь. Подавленность таких вкладов можно объяснить большим влиянием массы чармония в выделенном фазовом пространстве и меньшими значения синглетных непертурбативных матричных элементов для возбужденных состояний по сравнению с  $J/\psi$  мезоном. Кроме того, было вычислено сечение ДПР согласно (164), с учетом вкладов от  $\psi', \chi_{cJ}$ . Поскольку вклад двойного партонного рассеяния разбивается на два независимых партонных взаимодействия, то в каждом из них должен образовываться только один чармоний, неважно в жестком ли взаимодействии или с помощью фрагментационного механизма. Это означает отсутствие комбинаторных вкладов, роль которых была показана в предыдущем разделе. Соответственно, дополнительные фрагментационные вклады в ДПР от множественных глюонных излучений, безусловно, будут, однако они всегда будут меньше комбинаторных, вклад которых были найден малым в передней области быстрот при таких малых поперечных импульсах. В соответствии с этим, при расчете сечений двойного партонного рассеяния фрагментационные вклады в (166) были опущены, т.е. учитывались только промежуточные состояния (165). Факторизационный и ренормализационный масштабы были выбраны в виде  $\mu_F^2 = \mu_R^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$ , поскольку поперечные импульсы  $J/\psi$  мезонов недостаточно большие для перехода в “нестабильную” область  $p_T^2 \gg \hat{s}$  для синглетного механизма рождения, который детально обсуждался в разделе 3.4.1.

Отметим, что в расчетах дифференциальных сечений парного рождения  $J/\psi$  мезонов только синглетный вклад зависит от выбора ТМД глюонных распределений. Вклад ДПР, в котором не учитываются фрагментационные механизмы, практически не будет зависеть от выбора глюонной функции распределения, поскольку в сечениях одиночного рождения  $J/\psi$  мезонов изменение выбора ТМД плотности глюонов компенсируется изменением непертурбативных матричных элементов (см. раздел 2.1.2).

Таким образом, в наших расчетах остается неопределенным только величина эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}}$  двойного партонного рассеяния. Последнее рассматривается как независимый параметр и может быть напрямую определено из соображений наилучшего описания экспериментальных данных ЛНСб согласно формуле полного сечения парного рождения  $J/\psi$  мезонов в кинематической области ЛНСб:

$$\sigma(pp \rightarrow J/\psi J/\psi) = \sigma^{CS}(pp \rightarrow J/\psi J/\psi) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1(pp \rightarrow J/\psi X) \sigma_2(pp \rightarrow J/\psi X)}{\sigma_{\text{eff}}}. \quad (168)$$

Процедура фитирования была выполнена отдельно для различных кинематических распределений, с помощью алгоритма, встроенного в программный пакет GNUPLOT. Однако не все измерения коллаборации ЛНСб одинаково хорошо подходят для извлечения эффективного сечения. Учет распределений, где вклады ДПР

значительно меньше теоретических неопределенностей синглетных вкладов, приводит лишь к увеличению общей ошибки определения  $\sigma_{\text{eff}}$ . Поэтому процедура фитирования осуществлялась для всех распределений, приведенных выше, за исключением распределений в фазовой области, отвечающей  $p_T(J/\psi, J/\psi) > 3$  ГэВ (кроме, распределений по  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$ ). Помимо этого, из рассмотрения были исключены все распределения по  $\Delta\phi(J/\psi, J/\psi)$ .

В результате фитирования были получены среднеквадратичные значения эффективных сечений, которые составили  $\sigma_{\text{eff}} = 17.5 \pm 4.1$  мбн для глюонной плотности A0 и  $\sigma_{\text{eff}} = 13.8 \pm 0.9$  мбн для JH'2013 set 2. Соответствующие им неопределенности были рассчитаны с помощью t-распределения Стьюдента на уровне доверия  $P = 95\%$ . В пределах погрешностей данные значения совпадают друг с другом. Более того, было достигнуто значительное согласие с большинством оценок  $\sigma_{\text{eff}}$ , основанных на анализе процессов с различными конечными состояниями, такими как,  $W + 2$  струи [44, 45],  $2\gamma + 2$  струи [46],  $\gamma + 3$  струи [47], 4 струи [48],  $J/\psi + D^+$ ,  $J/\psi + D^0$ ,  $J/\psi + \Lambda_c^+$  [49],  $\Upsilon(1S) + D^0$  [38]. При этом, они значительно превышают предыдущие оценки, полученные для того же самого конечного состояния,  $J/\psi + J/\psi$ , а также ряда других процессов [24, 39–43].

Сравнение рассчитанных сечений с экспериментальными данными LHCb представлено на Рис. 24–27 для A0 и JH'2013 set 2 TMD глюонных распределений, при этом использовались определенные выше значения  $\sigma_{\text{eff}}$ . Теоретические неопределенности включают в себя не только изменения масштабов, но и ошибки, связанные с определением  $\sigma_{\text{eff}}$ . Как видно из распределений, было достигнуто хорошее согласие между результатами вычислений и экспериментальными данными, за исключением области малых инвариантных масс,  $m(J/\psi, J/\psi) < 9$  ГэВ, где наши предсказания значительно переоценивают данные LHCb. Это расхождение связано с особенностями подпроцесса (144), которому был посвящен раздел 3.4.1. Кроме того, из полученных распределений видно, что для описания данных LHCb необходимы как синглетные механизмы, так и механизмы ДПР. В частности, вклады последних существенны для описания распределений по  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  при  $\Delta y(J/\psi, J/\psi) > 1 - 1.5$ , что подтверждает ожидания [35, 133]. Также они важны для других распределений по быстрой  $J/\psi$  мезонов и формы распределения асимметрии поперечного импульса  $\mathcal{A}_T$  при  $\mathcal{A}_T < 0.4$ .

Таким образом, нами были описаны экспериментальные данные коллаборации LHCb по парному рождению  $J/\psi$  мезонов в передней области быстрой. Были определены величины эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}} \sim 15$  мбн, которые совпадают в пределах погрешностей с большинством оценок, основанных на анализе других процессов. Последнее может свидетельствовать в пользу меньшей зависимости данного параметра от типа рождающихся частиц.



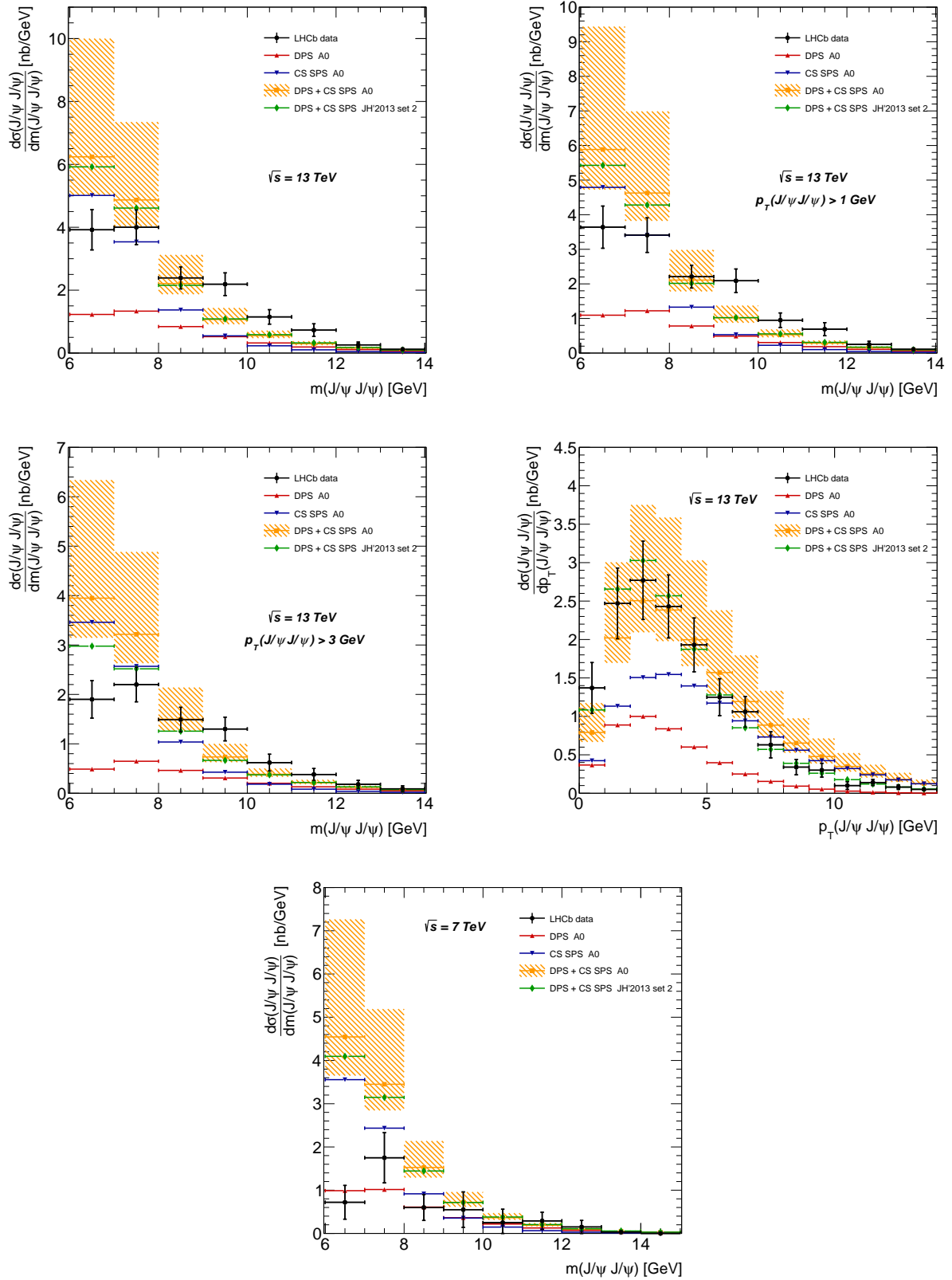


Рис. 24: Дифференциальные сечения процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  и поперечного импульса  $p_T(J/\psi, J/\psi)$ , вычисленных при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ (сверху); как функции инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  при энергии  $\sqrt{s} = 7$  ТэВ (снизу). Кинематические условия отбора приведены в тексте. Экспериментальные данные ЛHCb взяты из работ [40, 132].

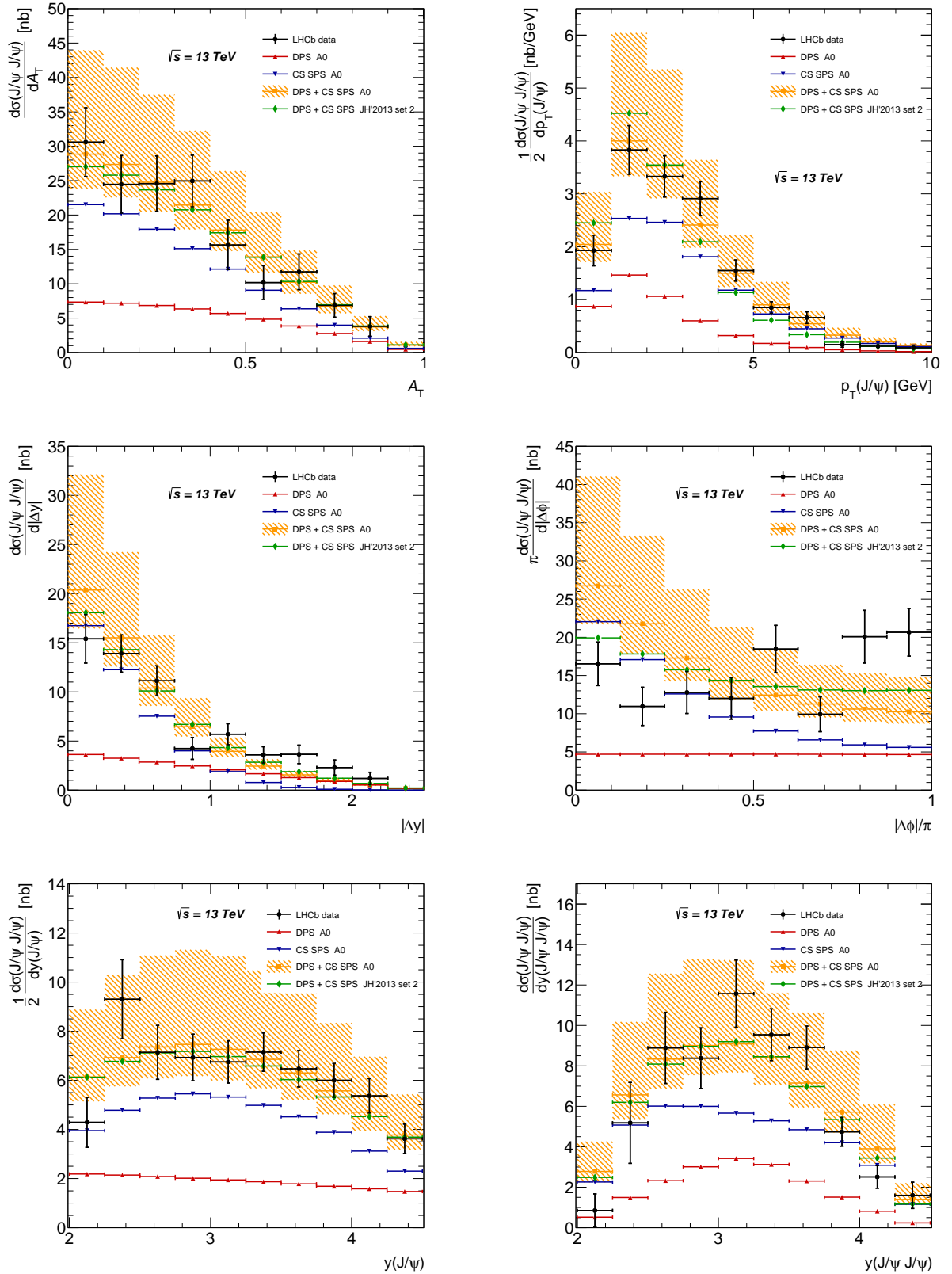


Рис. 25: Сечение процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции различных кинематических переменных, вычисленных при энергии  $\sqrt{s} = 13 \text{ ТэВ}$ . Кинематические условия отбора приведены в тексте. Экспериментальные данные ЛHCб взяты из работы [40].

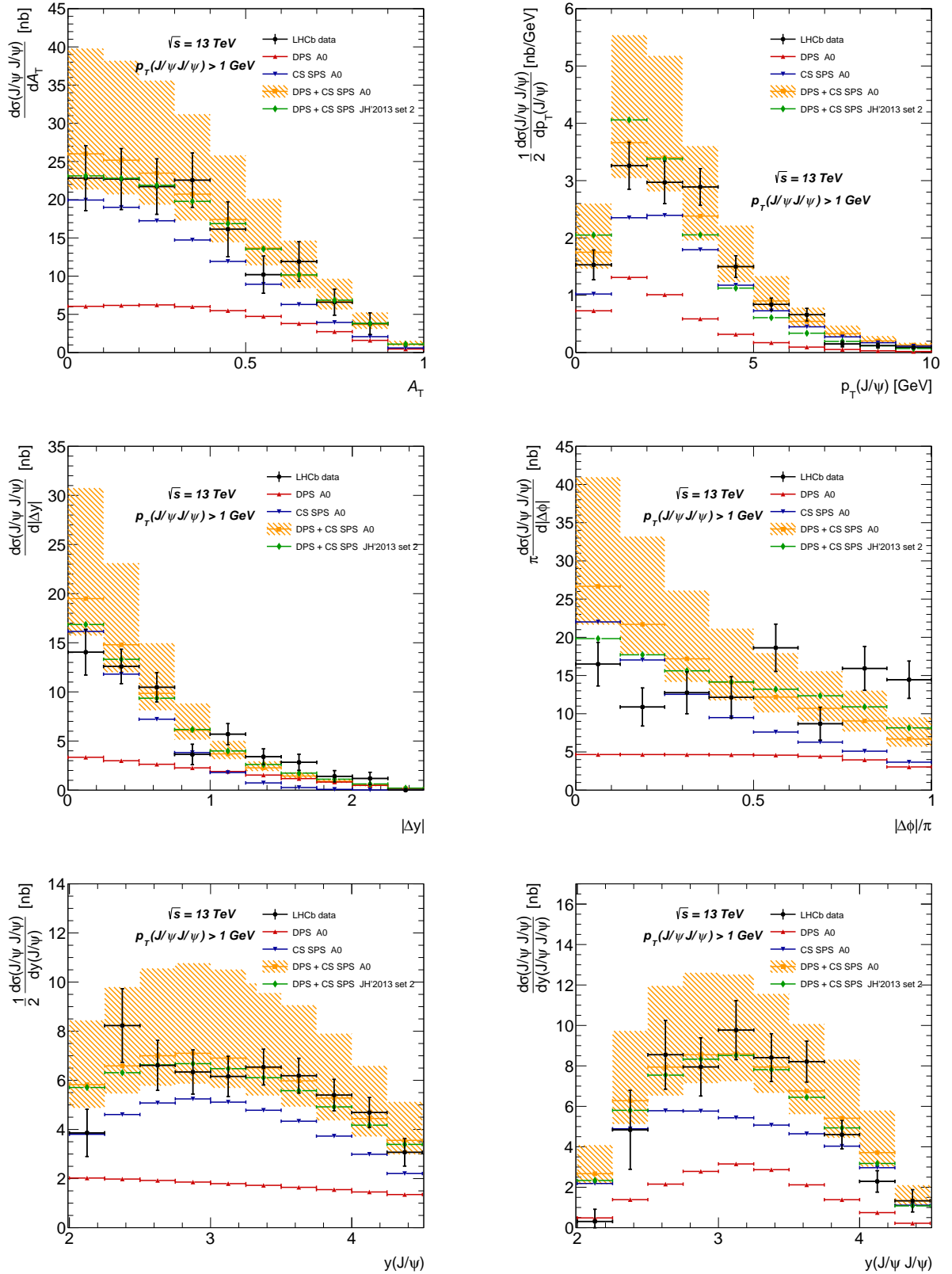


Рис. 26: Сечение процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции различных кинематических переменных, вычисленных при  $p_T(J/\psi, J/\psi) > 1$  ГэВ и энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Остальные кинематические ограничения приведены в тексте. Экспериментальные данные LHCb взяты из работы [40].

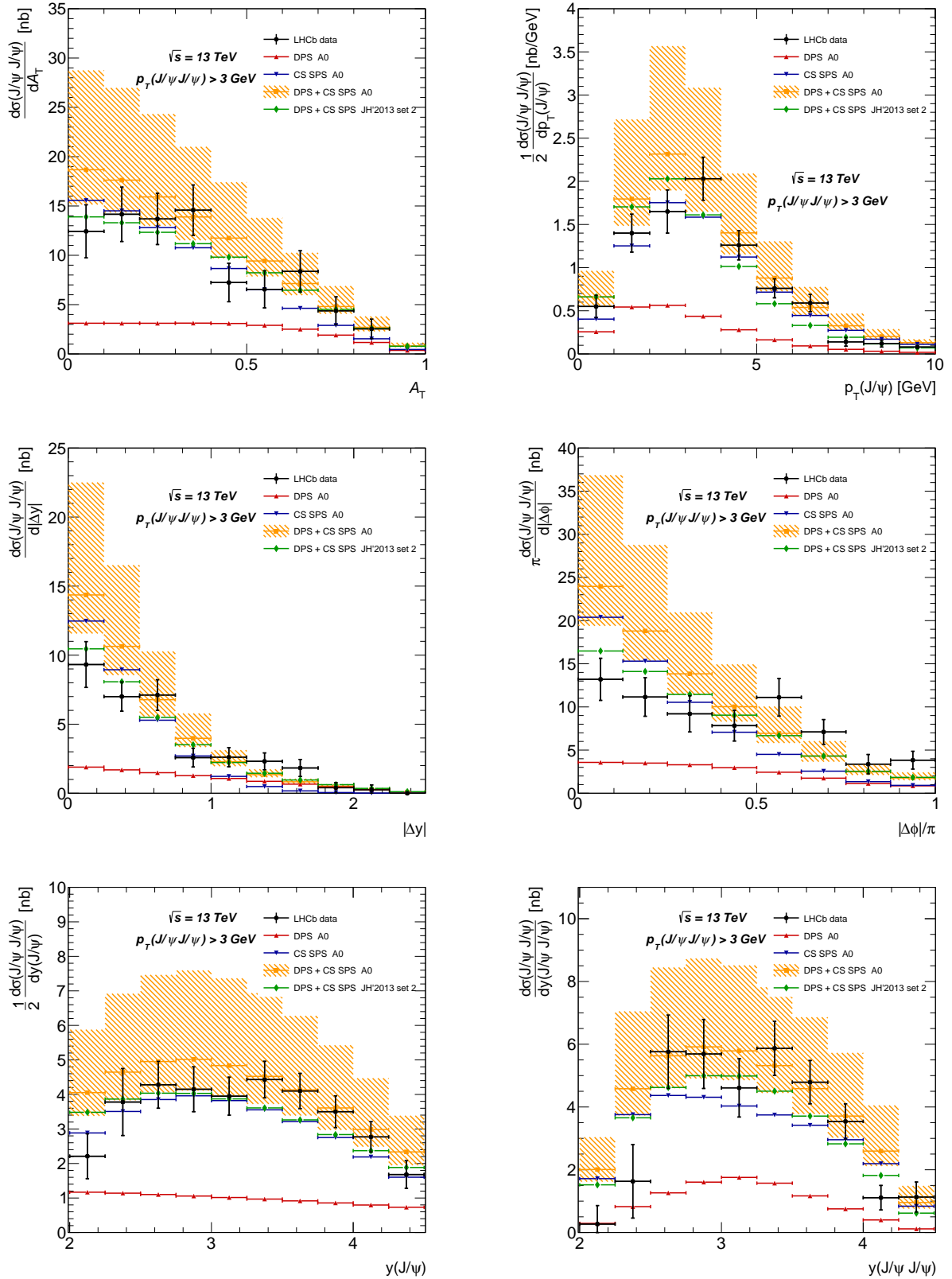


Рис. 27: Сечение процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции различных кинематических переменных, вычисленных при  $p_T(J/\psi, J/\psi) > 3$  ГэВ и энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Остальные кинематические ограничения приведены в тексте. Экспериментальные данные LHCb взяты из работы [40].

### 3.5.3 Парное рождение $J/\psi$ мезонов в центральной области быстрот

В центральной области быстрот для процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов большую роль играют комбинаторные фрагментационные вклады. Вследствие этого, для точного количественного сравнения с экспериментальными данными коллаборации ATLAS необходимо учитывать все подпроцессы, приведенные в данной главе. Кроме того, важную роль будут играть вклады от радиационных распадов возбужденных состояний  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$ , которые, в том числе, могут быть образованы с помощью фрагментационных механизмов. Их учет позволяет включить дополнительные каналы для фрагментации, тем самым значительно усиливая комбинаторные вклады, возникающие от множественных глюонных излучений. Ожидается, что в данной кинематической области эти эффекты также будут существенно влиять на вклад ДПР, который может быть рассчитан по предложенной выше схеме (см. раздел 3.3.1).

Последние экспериментальные данные для процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов в области центральных быстрот были получены коллаборацией ATLAS при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ [24]. В данной работе были представлены измерения дифференциальных сечений как функций поперечного импульса  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  и инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  пары  $J/\psi$  мезонов, разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  и азимутальных углов  $\Delta\phi(J/\psi, J/\psi)$  в фазовом объеме, отвечающем следующим критериям отбора:  $p_T(J/\psi) > 8.5$  ГэВ и  $|y(J/\psi)| < 2.1$  для каждого  $J/\psi$  мезона,  $|\eta(\mu)| < 2.3$  для всех мюонов, образованных от распадов  $J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$ ,  $p_T(\mu) > 4$  ГэВ для мюонов от триггерного  $J/\psi$  мезона и  $p_T(\mu) > 2.5$  ГэВ для других мюонов. Также были приведены дифференциальные сечения как функции поперечного импульса  $p_T(J/\psi_2)$  следующего за лидирующим  $J/\psi$  мезона,  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  и  $m(J/\psi, J/\psi)$ , соответствующие отбору  $p_T(J/\psi) > 8.5$  ГэВ,  $|y(J/\psi)| < 2.1$  для каждого  $J/\psi$  мезона без ограничений на мюоны в конечном состоянии. Данные измерения были получены в двух интервалах по быстройте следующего за лидирующим  $J/\psi$  мезона:  $|y(J/\psi_2)| < 1.05$  и  $1.05 < |y(J/\psi_2)| < 2.1$ . В наших численных расчетах данные критерии отбора были воспроизведены в точности.

Для описания этих данных в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода были рассчитаны сечения от подпроцессов синглетного механизма рождения чармониев (144), (146), (147), (148); подпроцессов синглет-октетного и октет-октетного механизмов рождения, учитываемых в рамках фрагментационного подхода (поэтому, далее, будем называть их обобщенно фрагментационными подпроцессами), (152), (154), (157), (158), включающих множественные глюонные излучения и вычисляемых согласно формуле (159) (см. раздел 3.2.1); вклад механизма двойного партонного рассеяния, включающий в себя дополнительные фрагментационные вклады (166). Для всех вышеуказанных подпроцессов было учтено рождение возбужденных состояний  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$ , для которых моделировались радиационные распады  $\psi' \rightarrow J/\psi + 2\pi$  и  $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ . Для расчетов фрагментационных вкладов использовались соответствующие функ-

ции фрагментации очарованных кварков (112) - (114) и глюонов (127) - (129), содержащие в себе все указанные в данных формулах промежуточные состояния. Для каждого из чармониев были совместно решены уравнения эволюции (133) и (134).

Расчеты были выполнены со следующим выбором масштабов жесткого взаимодействия. Для подпроцессов синглетного рождения факторизационный и ренормализационный масштабы были выбраны в виде  $\mu_F^2 = \frac{1}{4}(\hat{s} + \mathbf{Q}_T^2)$  и  $\mu_R^2 = \frac{1}{4}(m_\psi^2 + \frac{1}{2}(p_{1T}^2 + p_{2T}^2))$ , соответственно, где  $p_{1T}$  и  $p_{2T}$  — поперечные импульсы образованных чармониев. Для этих процессов были использованы TMD глюонные плотности JH'2013 set 1 muf- и JH'2013 set 2 muf-, соответствующие данному  $\mu_F^2$ . Выбор такого масштаба был вызван особенностью подпроцесса (144), которая проявляется в кинематической области ATLAS (см. подробные рассуждения в разделе 3.4.1).

Для фрагментационных вкладов и вкладов ДПР были выбраны следующие масштабы:  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$ ,  $\mu_R^2 = m_\psi^2 + p_T^2$  для подпроцессов с образованием глюона вне массовой поверхности или пары очарованных кварков в определенных Фоковских состояниях;  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$ ,  $\mu_R^2 = m_c^2 + \frac{1}{2}(p_{1T}^2 + p_{2T}^2)$  для подпроцессов с образованием свободных кварков. Для этих процессов использовались TMD глюонные плотности JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2. Как и ранее, фрагментационные масштабы были выбраны в виде  $\mu_{\text{fragm}}^2 = m_Q^2 + p_T^2$ , где  $m_Q$  и  $p_T$  — масса и поперечный импульс фрагментируемого партона. Величина эффективного сечения ДПР была выбрана  $\sigma_{\text{eff}} = 13.8$  мбн, что соответствует значению, извлеченному из данных LHCb (см. раздел 3.5.2).

Сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными приведено на Рис. 28 и 29. Из полученных распределений видно, что предсказания, вычисленные с глюонной плотностью JH'2013 set 1 (для которой на рисунках также приведены распределения для каждого из вкладов) лежат достаточно близко к экспериментальным данным и согласуются со многими из них в пределах теоретических неопределенностей. Кроме того, отчетливо видно, что комбинаторные вклады от множественных глюонных излучений, а также вклады ДПР (включающие фрагментационные механизмы), дополняют друг друга в различных кинематических областях. В то время, как роль фрагментационных вкладов от подпроцессов (152), (154), (157), (158) убывает с увеличением быстроты образованных  $J/\psi$  мезонов (согласно тому, как это было показано в разделе 3.5.1), вклады ДПР начинают играть существенную роль. Сумма таких вкладов, обозначенная как “DPS + Fragm.” дает значительный вклад в распределения по инвариантной массе  $m(J/\psi, J/\psi)$  и разделению по быстротам  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$ . Это означает, что аккуратный учет всех фрагментационных вкладов чрезвычайно важен для описания экспериментальных данных ATLAS. Кроме того, была подтверждена качественная оценка роли множественных глюонных излучений, изложенная в разделе 3.5.1. Отдельно на Рис. 28 и 29 приведены распределения, идущие от подпроцессов (146)-(148) и отмеченные как “processes (2)-(4)”, однако, на фоне фрагментационных вкладов, их роль оказалась невелика в рассмат-

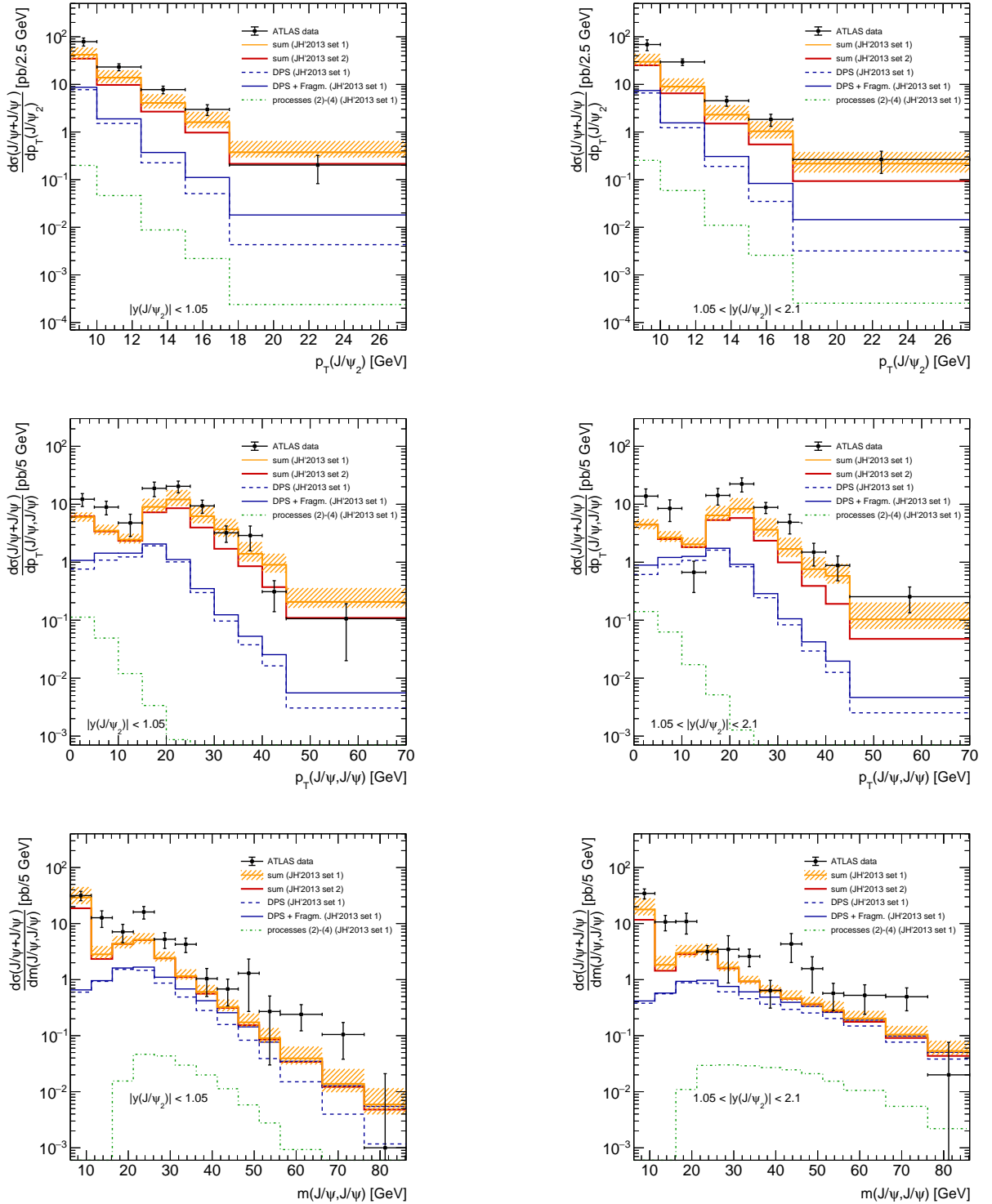


Рис. 28: Дифференциальное сечение процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ в областях быстрой  $|y(J/\psi_2)| < 1.05$  (левая колонка) и  $1.05 < |y(J/\psi_2)| < 2.1$  (правая колонка), как функции поперечного импульса,  $p_T(J/\psi_2)$ , следующего за лидирующим  $J/\psi$  мезона (верхний ряд); поперечного импульса,  $p_T(J/\psi, J/\psi)$ , пары  $J/\psi$  (центральный ряд); инвариантной массы,  $m(J/\psi, J/\psi)$ , пары  $J/\psi$  (нижний ряд). Полные теоретические предсказания показаны для JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2, а также отдельно представлены вклады ДПР и ДПР + фрагментации. Экспериментальные данные ATLAS взяты из работы [24].

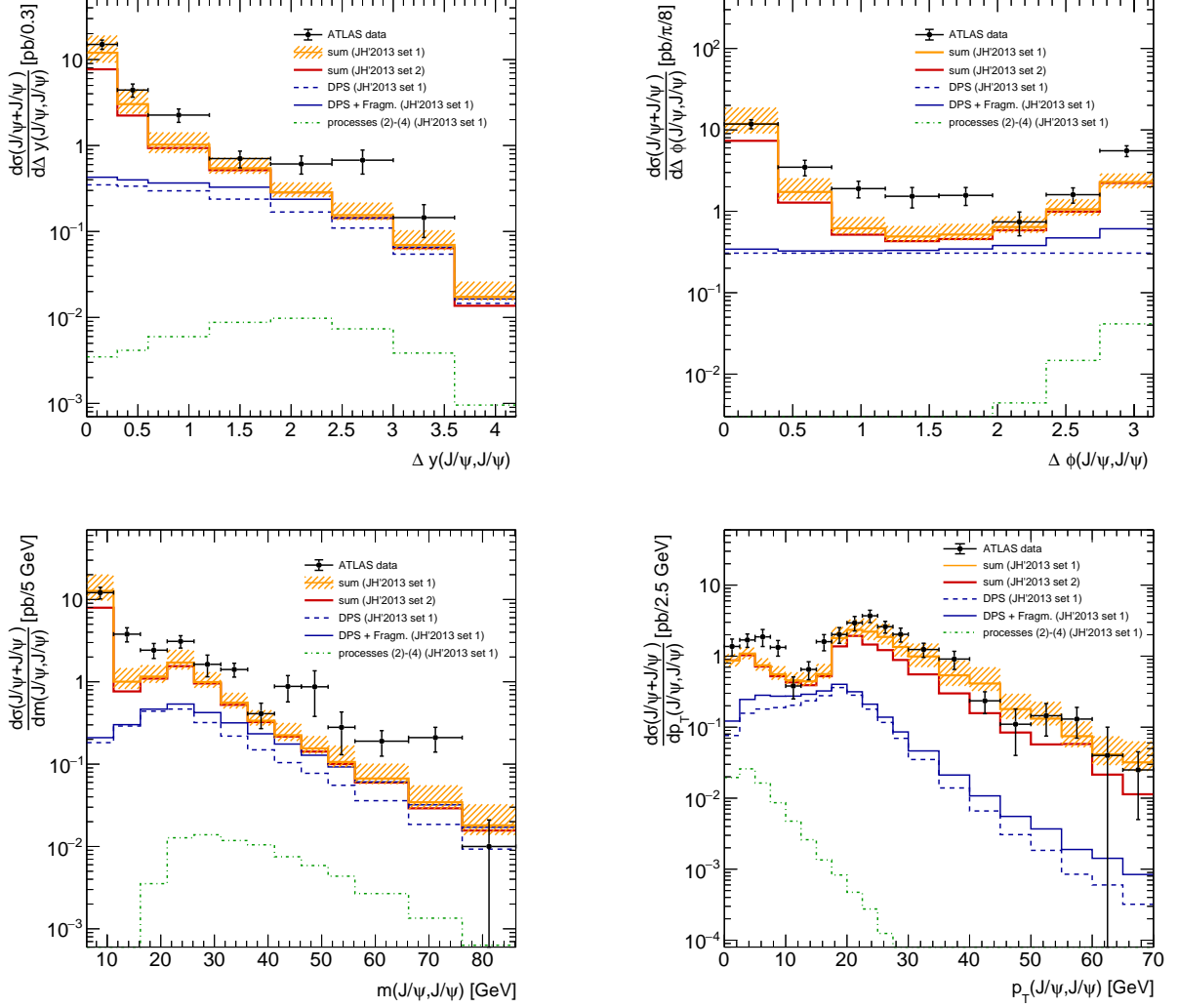


Рис. 29: Дифференциальное сечение процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ как функции разности быстрот,  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  (левое верхнее); азимутальному углу,  $\Delta\phi(J/\psi, J/\psi)$  (правое верхнее); инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  (левое нижнее); поперечного импульса,  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  (правое нижнее). Полные теоретические предсказания показаны для JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2, а также отдельно представлены вклады ДПР и ДПР + фрагментации. Экспериментальные данные ATLAS взяты из работы [24].



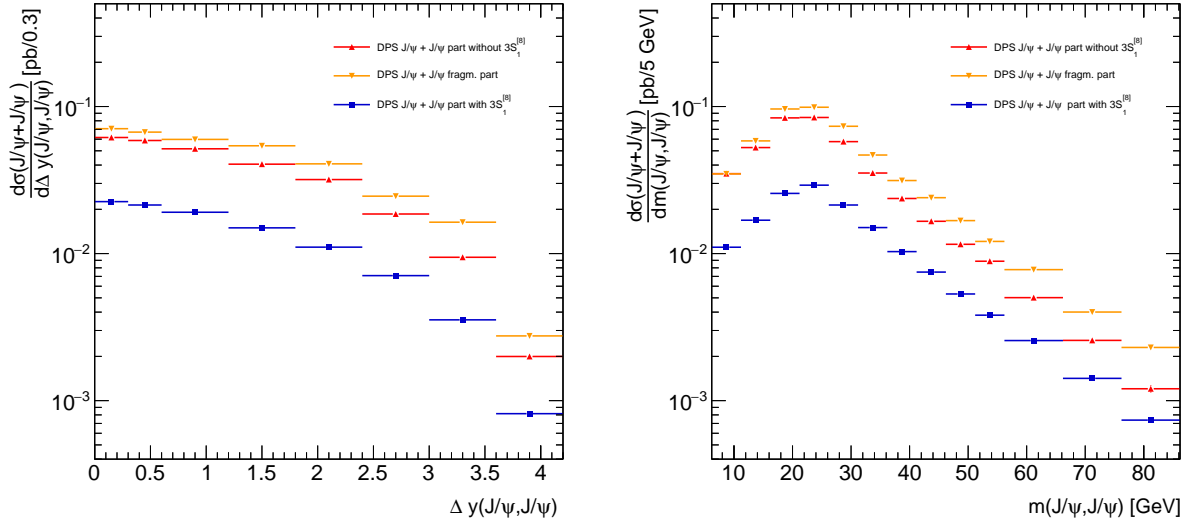


Рис. 30: Вклады ДПР в сечение процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов как функции разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$  (слева) и инвариантной массы  $m(J/\psi, J/\psi)$  пары  $J/\psi$  мезонов (справа). Стандартные и модифицированные вклады изображены раздельно.

риваемой кинематической области.

Для исследования чувствительности результатов к выбору TMD глюонной плотности, все вычисления были повторены с TMD глюонным распределением JH'2013 set 2. Полученные результаты указывают на хорошее согласие результатов с разными глюонными плотностями для большого количества наблюдаемых. Присутствует небольшое расхождение в областях больших  $p_T(J/\psi, J/\psi)$  и  $p_T(J/\psi_2)$ , которое связано с разницей в поведении двух глюонных распределений в области больших поперечных импульсов  $k_T$ .

Отдельное внимание стоит уделить схеме вычисления ДПР, предложенной в разделе 3.3.1 и учитывающей подпроцессы вида (166). Проведем сравнение с процессом рождения  $J/\psi$  мезонов в стандартной схеме расчета двойного партонного рассеяния, которое включает в себя промежуточные состояния (165) (для наглядности иллюстрации, здесь вклады от распадов  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$  были опущены). Расчеты удовлетворяют критериям отбора, содержащим кинематические ограничения на мюоны. Для того, чтобы подчеркнуть важность учета фрагментаций от множественных глюонных излучений, были рассмотрены три различных источника вкладов в  $J/\psi$  мезоны. Первый из них не содержит октетное промежуточное состояние  $[^3S_1^{(8)}]$ , т.е. содержит только комбинации вида  $[^3S_1^{(1)}, ^3P_J^{(8)}] \times [^3S_1^{(1)}, ^3P_J^{(8)}]$ . Второй включает подпроцессы вида  $[^3S_1^{(8)}] \times [^3S_1^{(1,8)}, ^3P_J^{(8)}]$ . Суммирование первого и второго вкладов приводит к стандартной схеме расчетов ДПР (165). Последний вклад пред-

ставляет собой модификацию второго и включает в себя комбинации подпроцессов  $[g, c] \times [g, c, {}^3S_1^{(1)}, {}^3P_J^{(8)}]$ , как это было описано в разделе 3.3.1.

Сравнение вкладов от трех обозначенных источников приведено на Рис. 30. Очевидно, что модифицированная часть ДПР, обозначенная как “DPS  $J/\psi + J/\psi$  fragm. part.” и содержащая в себе фрагментационные вклады в рождение  $J/\psi$  мезонов примерно в 3 раза превышает второй вклад (“DPS  $J/\psi + J/\psi$  part. with  ${}^3S_1^{(8)}$ “). Кроме того, она увеличивает полное сечение ДПР примерно в 2 раза. С нашей точки зрения, предложенный в данной работе метод расчета ДПР дает достаточно интересные результаты, которые могут быть важны в численных оценках.

Таким образом, нами были вычислены сечения процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов в центральной области быстрот при кинематических ограничениях, соответствующих экспериментальным данным коллаборации ATLAS. Учет основных механизмов рождения, в том числе фрагментационных, позволил значительно улучшить согласие теоретических предсказаний в рамках нерелятивистской КХД с экспериментальными данными при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ, особенно в областях больших  $m(J/\psi, J/\psi)$  и  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$ , где роль множественных глюонных излучений в начальном состоянии важна. Кроме того, был предложен метод включения фрагментационных вкладов в механизм ДПР, в том числе и от множественных глюонных излучений. Новые вклады существенно влияют на полное и дифференциальные сечения в области центральных быстрот. Это означает, что учет дополнительных механизмов в подпроцессах двойного рассеяния может играть важную роль при оценке эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}}$  для целого ряда процессов с образованием тяжелых кваркониев.

## 4 Процессы ассоциативного рождения калибровочных $Z$ бозонов и струй тяжелых кварков

Процессы ассоциативного рождения векторных бозонов и струй в адронных столкновениях играют значительную роль в физике высоких энергий, поскольку являются основными источниками фона для различных процессов Стандартной модели, в том числе при исследовании бозона Хиггса, а также за ее пределами. Теоретическое описание данных процессов служит важной оценкой для проверки применимости подходов пертурбативной КХД, поскольку измеряемые дифференциальные сечения чувствительны не только к процессу жесткого взаимодействия, но и к эволюции партонных распределений, а также вкладам высших порядков теории возмущений. Отдельный интерес вызывают процессы с участием струй тяжелых ароматов, сформированных  $c, b$  кварками, которые экспериментально с достаточно хорошей точностью могут быть отделены от струй, образованных легкими  $u, d, s$  кварками и глюонами. Исследование процессов ассоциативного рождения  $Z + b/c$ -струй в протон-протонных столкновениях при энергиях ЛHC может рассматриваться как дополнительный, наряду с процессами глубоконеупругого рассеяния, инструмент для изучения динамики партонных распределений в протоне. Сравнение предсказаний, получаемых в  $k_T$ -факторизационном и коллинеарном подходах КХД с экспериментальными данными по ассоциативному рождению  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй позволит изучить границы применимости первого подхода для изучения широкого ряда процессов с участием векторных бозонов и тяжелых кварков.

### 4.1 Партонные подпроцессы

В  $k_T$ -факторизационном подходе КХД основным источником вкладов в процесс ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $Q = (c, b)$  струй являются подпроцессы глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности порядка  $\sim \mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ :

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow Z(p) + Q(p_1) + \bar{Q}(p_2). \quad (169)$$

Полный набор фейнмановских диаграмм этих процессов представлен на Рис. 31, а вычисления соответствующих амплитуд вне массовой поверхности были проведены в работе [134]. Поскольку в экспериментальных анализах обычно накладываются кинематические ограничения на пары лептонов, образованные от распада  $Z$  бозонов, то во всех амплитудах учитывается распад  $Z \rightarrow l^+l^-$ . При этом пропагатор промежуточного бозона записывается в форме резонанса Брейта-Вигнера.

Поскольку процессы глюон-глюонного слияния доминируют в области малых  $x$  и, следовательно, небольших поперечных импульсов струй или калибровочных бозонов ( $p_T(Z, jet) < 100$  ГэВ), в то время как в последних экспериментальных анализах достигается область  $p_T(Z, jet) \sim 300 - 500$  ГэВ, то для более корректного сравнения

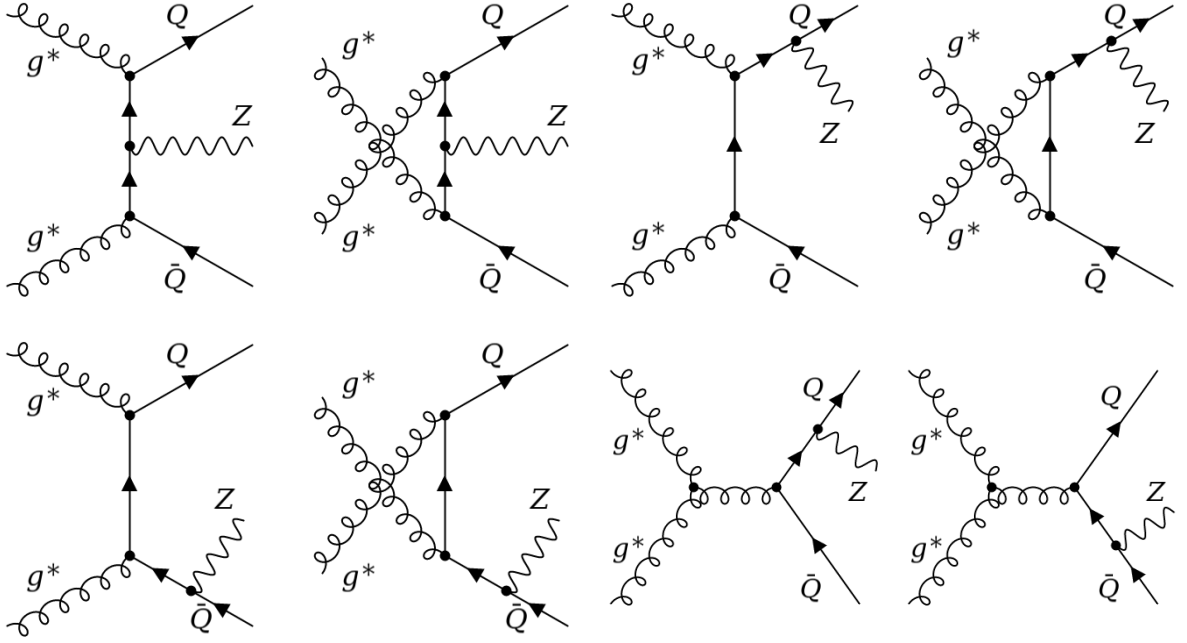


Рис. 31: Калибровочно-инвариантный набор диаграмм подпроцесса слияния глюонов вне массовой поверхности с образованием калибровочного  $Z$  бозона в сопровождении тяжелых кварков  $Q$ .

с экспериментальными данными необходимо учитывать также вклады от подпроцессов, включающих кварки и антикварки в начальном состоянии. В данной работе были рассмотрены следующие подпроцессы, примеры диаграмм которых представлены на Рис. 32:

рассеяния кварков порядка  $\sim \mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ :

$$q(k_1) + Q(k_2) \rightarrow Z(p) + q(p_1) + Q(p_2), \quad (170)$$

аннигиляции кварков  $\sim \mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ :

$$q(k_1) + \bar{q}(k_2) \rightarrow Z(p) + Q(p_1) + \bar{Q}(p_2) \quad (171)$$

и кварк-глюонного рассеяния  $\sim \mathcal{O}(\alpha\alpha_s^3)$ :

$$q(k_1) + g(k_2) \rightarrow Z(p) + q(p_1) + Q(p_2) + \bar{Q}(p_3). \quad (172)$$

Отметим, что подпроцесс кварк-глюонного рассеяния  $Q + g \rightarrow Z + Q$  порядка  $\sim \mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$  не рассматривается, так как он эффективно учитывается в подпроцессе слияния глюонов вне массовой поверхности, поскольку для используемых нами TMD распределений (A0 и JH'2013 set 1 и set 2) морские кварки образуются из расщепления глюонов только на последнем этапе эволюции, т.е. в подпроцессах необходимо явным образом учитывать вершину  $g^* \rightarrow Q + \bar{Q}$ , тем самым переходя к подпроцессу (169).

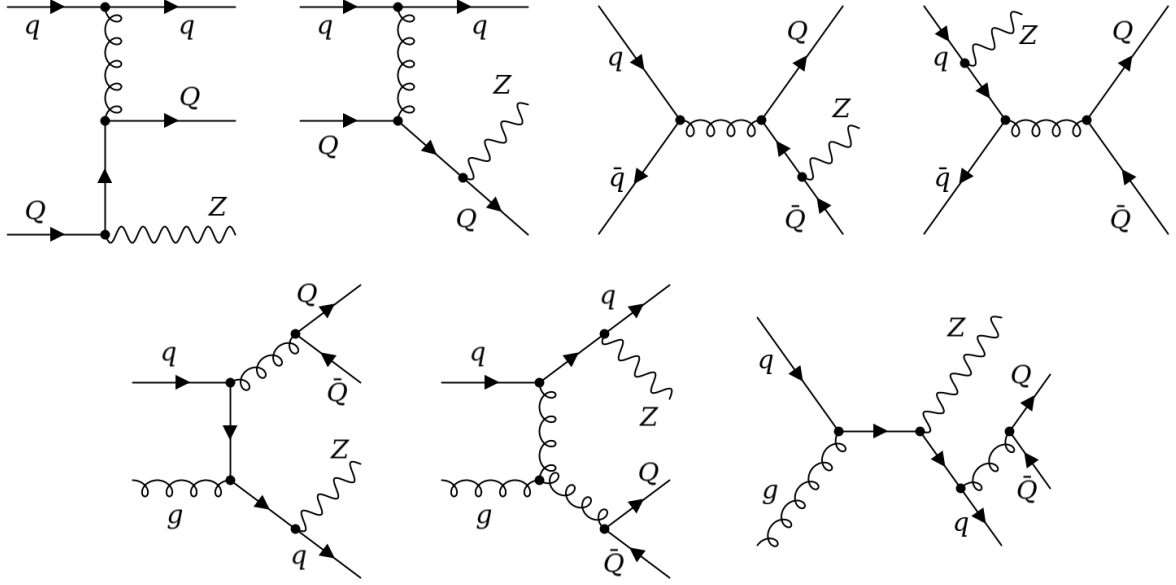


Рис. 32: Примеры диаграмм подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии с образованием калибровочного  $Z$  бозона в сопровождении тяжелого кварка  $Q$ .

Указанные кварковые подпроцессы (170)-(172) играют важную роль в областях больших поперечных импульсов (или, соответственно, в областях больших  $x$ ), где плотность кварковой материи значительно превосходит глюонную плотность. Соответственно, поперечными импульсами начальных частиц можно пренебречь, что обосновывает применение коллинеарной факторизации для расчета сечений этих процессов.

#### 4.1.1 Полные и дифференциальные сечения

Сечение подпроцесса (169) глюон-глюонного слияния  $2 \rightarrow 3$  может быть рассчитано в подходе  $k_T$ -факторизации согласно формуле:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow Z + Q + \bar{Q}) &= \int \frac{1}{128\pi^3(x_1x_2s)F} |\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow Z + Q + \bar{Q})|^2 \times \\ &\times f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 dy dy_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (173)$$

Здесь,  $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$  — TMD функции распределения глюонов в протоне,  $\mathbf{k}_{1T}^2 = -k_1^2 \neq 0$  и  $\mathbf{k}_{2T}^2 = -k_2^2 \neq 0$  — поперечные импульсы начальных виртуальных глюонов,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  - их азимутальные углы.

Для подпроцесса рассеяния кварков (170) в рамках коллинеарного приближения сечение  $2 \rightarrow 3$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow Z + q + Q) &= \sum_q \int \frac{1}{256\pi^3(x_1x_2s)^2} |\mathcal{A}(q + Q \rightarrow Z + q + Q)|^2 \times \\ &\times f_q(x_1, \mu^2) f_Q(x_2, \mu^2) d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 dy dy_1 dy_2 \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (174)$$

где  $f_q(x, \mu^2)$  — обычные (коллинеарные) функции распределения кварков в протоне (17). В обоих случаях,  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы конечных кварков,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — азимутальные углы этих кварков,  $y$ ,  $y_1$  и  $y_2$  — быстроты калибровочного бозона и конечных кварков, соответственно,  $\sqrt{s}$  — энергия столкновения протонов. При этом в сечении необходимо провести суммирование по всем ароматам кварков  $q$ . Величины  $x_1$  и  $x_2$  могут быть выражены через переменные интегрирования, согласно законам сохранения энергии-импульса:

$$x_1\sqrt{s} = m_T e^y + m_{1T} e^{y_1} + m_{2T} e^{y_2} \quad (175)$$

$$x_2\sqrt{s} = m_T e^{-y} + m_{1T} e^{-y_1} + m_{2T} e^{-y_2}, \quad (176)$$

где  $m_T$  — поперечные массы конечных частиц. Аналогичным образом может быть представлено сечение аннигиляции (171).

Сечение подпроцесса (172) кварк-глюонного рассеяния  $2 \rightarrow 4$  в коллинеарном приближении будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow Z + q + Q + \bar{Q}) = \sum_q \int \frac{1}{4096\pi^5 (x_1 x_2 s)^2} |\mathcal{A}(q + g \rightarrow Z + q + Q + \bar{Q})|^2 \times \\ \times f_q(x_1, \mu^2) f_g(x_2, \mu^2) d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{3T}^2 dy_1 dy_2 dy_3 dy \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi} \frac{d\psi_3}{2\pi}, \end{aligned} \quad (177)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  — импульсы конечных кварков,  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  — азимутальные углы этих кварков,  $y, y_1, y_2, y_3$  — быстроты калибровочного бозона и конечных кварков. Величины  $x_1$  и  $x_2$  могут быть выражены через переменные интегрирования, аналогично (175) и (176):

$$x_1\sqrt{s} = m_T e^y + m_{1T} e^{y_1} + m_{2T} e^{y_2} + m_{3T} e^{y_3} \quad (178)$$

$$x_2\sqrt{s} = m_T e^{-y} + m_{1T} e^{-y_1} + m_{2T} e^{-y_2} + m_{3T} e^{-y_3}. \quad (179)$$

## 4.2 Расчеты в NLO приближении коллинеарной КХД

Для расчетов сечений процессов ассоциативного рождения  $Z$  бозона и тяжелых струй в коллинеарном подходе КХД был использован Монте-Карло генератор SHERPA версии 2.2.1 [135], который использует матричные элементы, получаемые с помощью встроенных генераторов AMEGIC++ [136] и COMIX [137]. Кроме того, для вычисления дополнительных петлевых поправок в следующем за лидирующим порядке (NLO) используется OPENLOOPS [138]. В данной работе было проведено моделирование процессов:

$$p + p \rightarrow l^+ l^- + n \times jet, \quad (180)$$

где под  $n$  понимается количество образованных партонов (обозначены как  $jet$ ) в жестком взаимодействии, причем допускаются все возможные комбинации  $u, d, s, c, b$

кварков/антикварков и  $g$  глюонов. При этом используются две схемы вычислений, которые для краткости в дальнейшем будут обозначаться как LO и NLO.

В схеме LO матричные элементы рассчитываются в лидирующем порядке коллинеарной КХД, при этом учитывается вплоть до 4-х конечных партонов в процессах (180), т.е.  $n = \overline{0, 4}$ . Они объединяются с партонными ливнями [139] согласно схеме объединения ME+PS@LO [140], соответствующей вычислениям амплитуд жесткого взаимодействия в лидирующем порядке.

В схеме NLO матричные элементы рассчитываются в следующем за лидирующим порядке коллинеарной КХД для процессов (180), включающих в себя до 2-х конечных партонов ( $n = \overline{0, 2}$ ), и в лидирующем порядке для 3-х и 4-х конечных партонов ( $n = 3, 4$ ). Они объединяются с партонными ливнями согласно схеме ME+PS@NLO [141].

В обоих случаях используется схема 5 ароматов (5FS), согласно которой  $c$  и  $b$  кварки рассматриваются как безмассовые при вычислениях матричного элемента, но их масса учитывается в партонных ливнях. Кроме того, с помощью SHERPA была воспроизведена полная цепочка адронизации и распадов нестабильных частиц.

### 4.3 Выбор параметров и теоретические неопределенности

Для вычислений сечений жестких взаимодействий, была использована программа численного интегрирования VEGAS. В вычислениях использовались TMD глюонные распределения JH'2013 set 2 для расчетов в  $k_T$ -факторизационном подходе КХД; CTEQ 66 [142] и CT14nnlo [143] для расчетов в коллинеарном приближении. Неопределенности определялись аналогично алгоритму, представленному в 3.4. В расчетах использовались следующие значения параметров:  $m_{u/d/s} = 0$  ГэВ,  $m_c = 1.5$  ГэВ,  $m_b = 4.7$  ГэВ,  $m_Z = 91.2$  ГэВ,  $\Gamma_Z = 2.5$  ГэВ,  $\sin^2 \theta_W = 0.23116$  [131].

### 4.4 Результаты расчетов

В данном разделе представлены результаты расчетов дифференциальных сечений процессов ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй в протон-протонных столкновениях на ЛНС при различных энергиях. Проведено сравнение полученных предсказаний подхода комбинированной КХД, моделирования с помощью Монте-Карло генератора SHERPA и экспериментальных данных коллабораций ATLAS и CMS. Кроме этого изучена возможность обнаружения вкладов внутреннего внутреннего очарования в этих процессах. Были исследованы распределения по поперечному импульсу  $Z$  бозона и  $c, b$ -струй, поскольку такие наблюдаемые дают представление о применимости используемых моделей для описания широкого ряда процессов с участием тяжелых кварков и калибровочных бозонов. Данные исследования отражены в работе [54].

#### 4.4.1 Распределения по поперечным импульсам для процессов ассоциативного рождения $Z$ бозона и тяжелых $c, b$ струй

Экспериментальные данные для процесса ассоциативного рождения  $Z$  бозона и  $b$ -струи были получены коллаборацией ATLAS при энергии  $\sqrt{s} = 7$  ТэВ [144]. Были использованы следующие критерии отбора: лептоны, образованные от распада  $Z$  бозона, должны иметь поперечные импульсы  $p_T(l) > 20$  ГэВ и быстроты  $|y(l)| < 2.5$ , при этом их инвариантная масса должна лежать в диапазоне  $76 \text{ ГэВ} < m(ll) < 106$  ГэВ. Для событий, смоделированных с помощью генератора SHERPA, струи формируются из всех стабильных частиц за исключением пары лептонов, образованных от распада  $Z$  бозона. Реконструкция осуществляется с помощью anti- $k_T$  алгоритма [145] с радиусом конуса  $\Delta R = 0.4$ , который определяется как

$$\Delta R = \sqrt{\Delta\phi^2 + \Delta y^2}. \quad (181)$$

При этом струи должны иметь поперечный импульс  $p_T(jet) > 20$  ГэВ и быстроту  $|y(jet)| < 2.4$ , а также должно выполняться условие изолированности струи  $\Delta R(jet, l) > 0.5$  от каждого из вышеуказанных лептонов. Прошедшая данный отбор струя определяется как  $b$ -струя, если в конусе  $\Delta R(jet, B) = 0.3$  относительно направления струи находится хотя бы один слабораспадающийся прелестный  $B$  адрон с  $p_T(B) > 5$  ГэВ.

Для подпроцессов (169)-(172) адронизация не проводилась, поэтому в качестве  $b$ -струи рассматривается  $b$  кварк, который удовлетворяет ограничениям на поперечный импульс  $p_T(b) > 20$  ГэВ и быстроту  $|y(b)| < 2.4$ , а также условиям изолированности  $\Delta R(b, l) > 0.5$ .

Расчеты были выполнены с факторизационным и ренормализационным масштабам, выбранными в виде  $\mu_F^2 = \mu_R^2 = m_T^2(Z)$ , где  $m_T(Z)$  - поперечная масса  $Z$  бозона. Были использованы партонные функции распределения JH'2013 set 2 и CTEQ 66 для вычисления сечений подпроцессов в  $k_T$ -факторизационном и коллинеарном подходах, соответственно. Результаты, полученные с помощью генератора SHERPA, были рассчитаны по схеме вычислений NLO (см. раздел 4.2).

На Рис. 33 представлены результаты вычислений дифференциального сечения процесса  $Z + b$ -струя как функции поперечного импульса  $Z$  бозонов во всей доступной области по быстройте  $|y(Z)| < 2.5$ . Здесь и далее закрашенные области определяют неопределенности, связанные с выбором масштабов  $\mu_F$  и  $\mu_R$ . Как видно из полученных распределений, предсказания генератора SHERPA хорошо согласуются с экспериментальными данными во всей области  $p_T(Z)$ , в то время как суммарные предсказания подхода  $k_T$ -факторизации для подпроцессов (169) и коллинеарного подхода для кварковых подпроцессов (170-172), обозначенные как "combined QCD", начинают недооценивать данные при поперечных импульсах  $p_T(Z) > 100$  ГэВ. При этом можно наблюдать, что в области малых поперечных импульсов, где доминируют подпроцес-



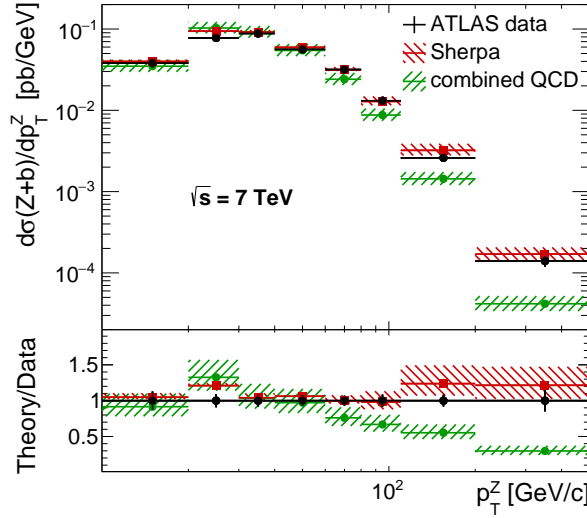


Рис. 33: Дифференциальное сечение процесса ассоциативного рождения  $Z$  бозона и  $b$ -струи как функции поперечного импульса  $Z$  бозонов в протон-протонных столкновениях при  $\sqrt{s} = 7$  ТэВ. Критерии отбора указаны в тексте. Экспериментальные данные ATLAS были взяты из работы [144]. Предсказания Монте-Карло генератора SHERPA были получены согласно схеме расчетов NLO.

сы глюон-глюонного слияния,  $k_T$ -факторизационный подход, эффективно суммируя поправки высших порядков и учитывая их в эволюции TMD глюонных распределений, позволяет добиться хорошего согласия как с экспериментальными данными, так и предсказаниями коллинеарного подхода КХД в NLO. При этом, в области больших поперечных импульсов, главную роль играют подпроцессы с участием кварков, которые учитываются только в лидирующем порядке коллинеарного приближения. Этим объясняется возникающее расхождение с предсказаниями генератора SHERPA, который учитывает подпроцессы в NLO, а также включает в себя эффекты партонных ливней, т.е. допускает образование  $b$  кварков не только в жестком взаимодействии, но в последующих партонных ливнях за счет излучения глюонов. Образовавшиеся таким образом кварки внутри струи будут формировать  $B$  адроны, и данная струя может быть экспериментально определена как  $b$ -струя.

Коллаборация CMS измерила спектры для процессов  $Z+c$ -струя и  $Z+b$ -струя при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ [146]. Для лептонов, образованных от распада  $Z$  бозона были использованы следующие критерии отбора: поперечный импульс  $p_T(l) > 20$  ГэВ и псевдобыстрота  $|\eta(l)| < 2.1$ , а также инвариантная масса  $71 \text{ ГэВ} < m(ll) < 111 \text{ ГэВ}$ . Для событий, смоделированных с помощью генератора SHERPA, реконструкция струй осуществляется с помощью anti- $k_T$  алгоритма с радиусом конуса  $\Delta R = 0.5$ , при этом каждая струя должна иметь  $p_T(jet) > 25$  ГэВ и  $|\eta(jet)| < 2.5$  и удовлетворять условию изолированности от лептонов  $\Delta R(jet, l) > 0.5$ . Прошедшая данный отбор

струя определяется как  $b$ -струя, если в конусе  $\Delta R(jet, B) = 0.5$  относительно направления струи находится хотя бы один слабораспадающийся прелестный  $B$  адрон. Если струя не определяется как  $b$ -струя, то она определяется как  $c$ -струя, если в конусе  $\Delta R(jet, C) = 0.5$  находится хотя бы один слабораспадающийся очарованный  $C$  адрон.

При расчетах в подходе  $k_T$ -факторизации, в качестве  $b$ - и  $c$ -струй рассматриваются  $b$  и  $c$  кварки соответственно. Общие условия отбора для струй сохраняются:  $p_T(c/b) > 25$  ГэВ,  $|\eta(c/b)| < 2.5$  и  $\Delta R(c/b, l) > 0.5$ . При этом струя определяется как  $c$ -струя, если в конусе  $\Delta R(c, b) = 0.5$  не находится  $b$  кварк. В противном случае струя определяется как  $b$ -струя.

На Рис. 34 представлены результаты вычислений дифференциальных сечений процесса  $Z + c$ -струя как функций поперечных импульсов  $Z$  бозона и  $c$ -струи, а также отношение сечений  $Z + c$  к  $Z + b$ . Расчеты были выполнены с тем же самым выбором масштабов и партонных функций распределения. Как и ранее, расхождение между экспериментальными данными, предсказаниями генератора SHERPA и подходом комбинированной КХД вызвано отсутствием эффектов партонных ливней и некоторых NLO вкладов в последнем.

Для исследования влияния партонных ливней и поправок высших порядков коллинеарной КХД было проведено сравнение предсказаний  $k_T$ -факторизации (с учетом дополнительных коллинеарных подпроцессов) и генератора SHERPA на партонном уровне (моделируется только процесс жесткого взаимодействия) в схемах LO и NLO для процесса ассоциативного рождения  $Z$  бозона и  $c$ -струи. Расчеты были выполнены при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ в передней области быстрот  $Z$  бозона  $1.5 < |y(Z)| < 2.5$ . При этом были выбраны следующие критерии отбора: лептоны, образованные от распада  $Z$  бозона, должны иметь  $p_T(l) > 27$  ГэВ,  $|y(l)| < 2.5$ , а их инвариантная масса  $76$  ГэВ  $< m(ll) < 106$  ГэВ. При этом очарованный кварк должен удовлетворять условиям:  $p_T(c) > 20$  ГэВ,  $|y(c)| < 2.5$ ,  $\Delta R(c, l) > 0.4$  и  $\Delta R(c, b) > 0.4$ . Результаты расчетов представлены на Рис. 35 в виде дифференциальных сечений по поперечным импульсам  $Z$  бозона и  $c$ -струи. Из полученных распределений видно, что в области небольших поперечных импульсов ( $p_T(Z/c) < 100$  ГэВ) подход  $k_T$ -факторизации хорошо согласуется с предсказаниями коллинеарной КХД в следующем за лидирующим порядке, а при увеличении поперечных импульсов переходит к пределу коллинеарной КХД в лидирующем порядке. Отметим, что в генераторе SHERPA при вычислении сечений жесткого взаимодействия массы  $c$  и  $b$  кварков полагаются равными нулю, что приводит к некоторому завышению результатов SHERPA на партонном уровне, приведенных на Рис.35, по сравнению с предсказаниями в подходе  $k_T$ -факторизации, где тяжелые кварки имеют ненулевую массу. Однако, это лишь усиливает вышесказанное утверждение.

Таким образом, для процессов ассоциативного рождения  $Z$  бозона и тяжелых  $c, b$ -

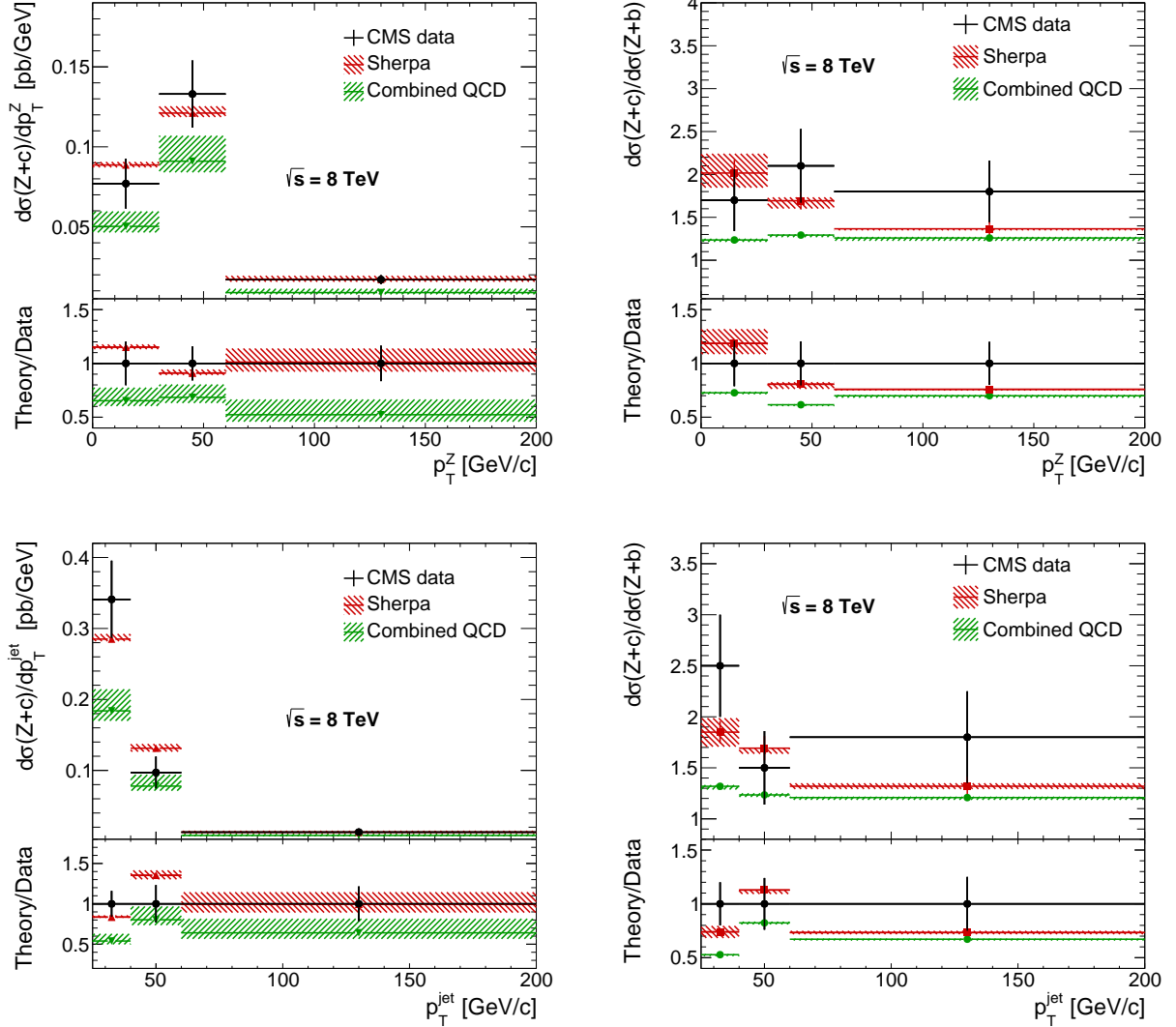


Рис. 34: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения  $Z$  бозона и  $c$ -струи (слева) и отношения сечений процессов рождения  $Z + c/Z + b$  (справа) как функции поперечного импульса  $p_T(Z)$  (сверху) и  $p_T(\text{jet})$  (снизу) в протон-протонных столкновениях при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ. Критерии отбора указаны в тексте. Экспериментальные данные CMS были взяты из работы [146]. Предсказания Монте-Карло генератора SHERPA были получены в NLO.

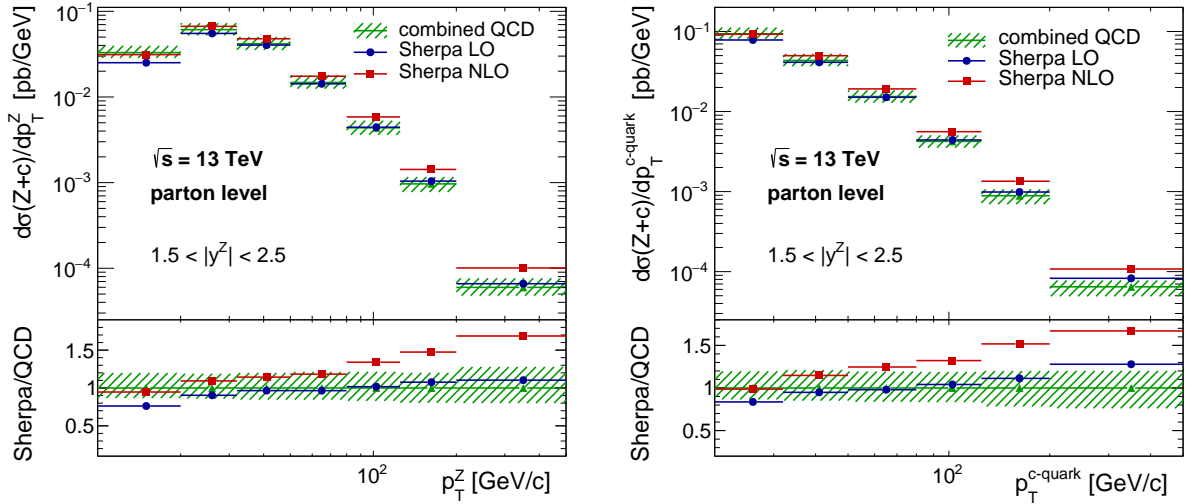


Рис. 35: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения  $Z$  бозона и  $c$ -струи как функции поперечного импульса  $Z$  бозона  $p_T(Z)$  (слева) и  $c$ -струи  $p_T(c)$  (справа) в протон-протонных столкновениях при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Критерии отбора указаны в тексте. Предсказания Монте-Карло генератора SHERPA были получены на партонном уровне в LO и NLO.

струй подход  $k_T$ -факторизации согласуется с предсказаниями коллинеарной КХД в следующем за лидирующим порядке и хорошо описывает экспериментальные данные в областях небольших поперечных импульсов, вплоть до  $p_T(Z, jet) < 100$  ГэВ. При увеличении поперечных импульсов становится необходимым учитывать также эффекты партонных ливней и вклады кварковых подпроцессов высших порядков. Следовательно, данный подход может применяться для описания широкого ряда процессов с участием  $Z$  бозонов и тяжелых  $b, c$  кварков, а также адронов, содержащих тяжелые кварки, в области  $p_T < 100$  ГэВ.

Отметим, что позднее стали доступны данные ATLAS и CMS для исследуемых процессов при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Сравнение этих данных с расчетами в подходе  $k_T$ -факторизации, представленное в работе [147], подтверждает выводы, сформулированные в данной работе.

#### 4.4.2 Проверка гипотезы внутреннего очарования

Как упоминалось ранее, процессы ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй дают возможность изучать кварк-глюонную структуру протона и, в том числе, проверить гипотезы существования внутреннего очарования (intrinsic charm, IC) и внутренней прелести (intrinsic beauty, IB) [148, 149]. В таких моделях предполагается существование “внутренних” пар тяжелых кварков в протоне, образующих связанные состояния с валентными кварками,  $|uudc\bar{c}\rangle$  и  $|uudb\bar{b}\rangle$ , причем время жи-

ни этих связанных состояний не зависит от масштаба жесткого взаимодействия. В отличие от механизмов рождения морских кварков, возникающих в пертурбативной КХД в результате расщепления глюонов  $g \rightarrow Q\bar{Q}$ , существование таких состояний обусловлено эффектами непертурбативной КХД. Конечно, в таких моделях могут образовываться внутренние пары легких кварков, однако переносимая ими доля импульса  $\langle x \rangle$  протона пренебрежимо мала по сравнению с долей импульса тяжелых кварков,  $\langle x_q \rangle \ll \langle x_Q \rangle$  и будет подавлена доминирующими в этой области глюонными вкладами. Кроме того, ожидается, что вероятность обнаружить ИВ будет подавлена по сравнению с ИС, поскольку при больших  $x$  плотность вероятности ведет себя как  $\sim 1/m_Q^2$ . Таким образом, наибольший интерес для изучения представляет поиск проявлений внутреннего очарования.

Плотность распределений очарованных кварков при некотором начальном масштабе  $\mu_0^2$  можно представить в виде:

$$c(x, \mu_0^2) = c_{sea}(x, \mu_0^2) + c_{int}(x, \mu_0^2), \quad (182)$$

где  $c_{sea}(x, \mu_0^2)$  - плотность распределений морских кварков, образующихся в результате эволюции, а  $c_{int}(x, \mu_0^2)$  - плотность распределений внутренних кварков. В модели ВНПС [148] распределение ИС было представлено в виде:

$$c_{int}(x, \mu_0^2) = c_0 w_{IC} x^2 [(1-x)(1+10x+x^2) + 6x(1+x) \ln(x)], \quad (183)$$

где  $w_{IC}$  - интегральная вероятность обнаружить внутреннее очарование в протоне,  $c_0$  - нормировочная константа. Согласно данной параметризации, средняя доля импульса, уносимая внутренним очарованным кварком при масштабе  $\mu_0^2$  равна  $\langle x_c \rangle = 2/7$ , что позволяет отделить ИС от глюонной компоненты.

В рамках глобального КХД анализа были получены наборы партонных функций распределения, учитывающих непертурбативные вклады от внутреннего очарования, например, STEQ66c и ST14nnloIC. Для этого использовалась параметризация ВНПС в качестве начального распределения. Оба набора содержат партонные функции распределения, в которых на компоненту внутреннего очарования приходится  $\langle x \rangle_{IC} = 0.6\%$  импульса протона, суммируя по всем состояниям протона, что соответствует  $w_{IC} = 1.1\%$  (модель ВНПС1) и  $\langle x \rangle_{IC} = 2.1\%$ , что соответствует  $w_{IC} = 3.5\%$  (модель ВНПС2), где доля импульса определяется из соотношения:

$$\langle x \rangle_{IC} = w_{IC} \int_0^1 x [c_{int}(x, \mu_0^2) + \bar{c}_{int}(x, \mu_0^2)] dx, \quad (184)$$

а начальный масштаб задается в виде  $\mu_0^2 = m_c^2$ .

В данной работе проверяется возможность наблюдения проявлений внутреннего очарования в спектрах ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй. Как было показано выше, если протон имеет конфигурацию с ИС в начальном состоянии, то внутренний очарованный кварк уносит долю импульса протона  $x > 0.1$ ,

что соответствует кинематическим областям  $p_T(Z, jet) > 100$  ГэВ, где подход  $k_T$ -факторизации работает хуже, чем коллинеарные расчеты с помощью генератора SHERPA. В связи с этим, в здесь приводятся только расчеты, полученные с помощью Монте-Карло генератора. В предыдущих работах (см. обзор [150] и ссылки внутри) было показано, что наиболее чувствительной областью для поиска проявлений IC является передняя область быстрот для кинематик экспериментов ATLAS и CMS,  $1.5 < |y| < 2.5$ . Однако в этих работах учитывалось только ограниченное количество подпроцессов и не учитывались эффекты, связанные с партонными ливнями.

В данной работе были вычислены дифференциальные сечения для процессов ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и  $c, b$ -струй при энергии  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ в передней области быстрот  $Z$  бозона  $1.5 < |y(Z)| < 2.5$ . При расчетах были использованы следующие критерии отбора: лептоны, образованные от распада  $Z$  бозона, должны иметь поперечный импульс  $p_T(l) > 27$  ГэВ и быстроту  $|y(l)| < 2.5$ , а их инвариантная масса должна лежать в диапазоне  $76 \text{ ГэВ} < m(ll) < 106 \text{ ГэВ}$ . Реконструкция струй осуществляется с помощью  $\text{anti-}k_T$  алгоритма с радиусом конуса  $\Delta R = 0.4$ , при этом каждая струя должна иметь  $p_T(jet) > 20$  ГэВ и  $|y(jet)| < 2.5$ , а также удовлетворять условиям изолированности от указанных выше лептонов  $\Delta R(jet, l) > 0.4$ . Прошедшая данный отбор струя определяется как  $b$ -струя, если в конусе  $\Delta R(jet, B) = 0.4$  относительно направления струи находится хотя бы один слабораспадающийся прелестный  $B$  адрон с поперечным импульсом  $p_T(B) > 5$  ГэВ. Если струя не определяется как  $b$ -струя, то она определяется как  $c$ -струя, если в конусе  $\Delta R(jet, C) = 0.4$  находится хотя бы один слабораспадающийся очарованный  $C$  адрон, имеющий поперечный импульс  $p_T(C) > 5$  ГэВ. Вычисления были выполнены с факторизационным и ренормализационным масштабами, выбранными в виде  $\mu_F^2 = \mu_R^2 = m_T^2(Z)$ , где  $m_T(Z)$  - поперечная масса  $Z$  бозона.

Результаты вычислений дифференциальных сечений процесса  $Z + c$ -струя как функций поперечных импульсов  $Z$  бозона и  $c$ -струи представлены на Рис. 36. В расчетах был использован набор партонных функций распределения CT14nnlo как содержащих компоненты внутреннего очарования (обозначены, как VHPS1 и VHPS2), так и без него (обозначены как "pert"). Эффекты IC становятся видимыми при  $p_T(Z, jet) > 200$  ГэВ для обоих распределений. В модели VHPS2, при поперечных импульсах  $p_T(Z, jet) \sim 300 - 500$  ГэВ, вклад внутреннего очарования в спектры достигает 20 - 25%. Подчеркнем, что полученные в данной работе оценки вкладов IC меньше, чем было получено в [150]. Подавление этих вкладов связано непосредственно с эффектами партонных ливней, которые ранее не учитывались. Детальное исследование этих эффектов представлено в [54]. Однако, теоретические неопределенности превышают величину вкладов внутреннего очарования во всей области поперечных импульсов, что, в совокупности с экспериментальными ошибками, сделает процедуру оценки верхнего предела для вероятности нахождения IC в протоне,

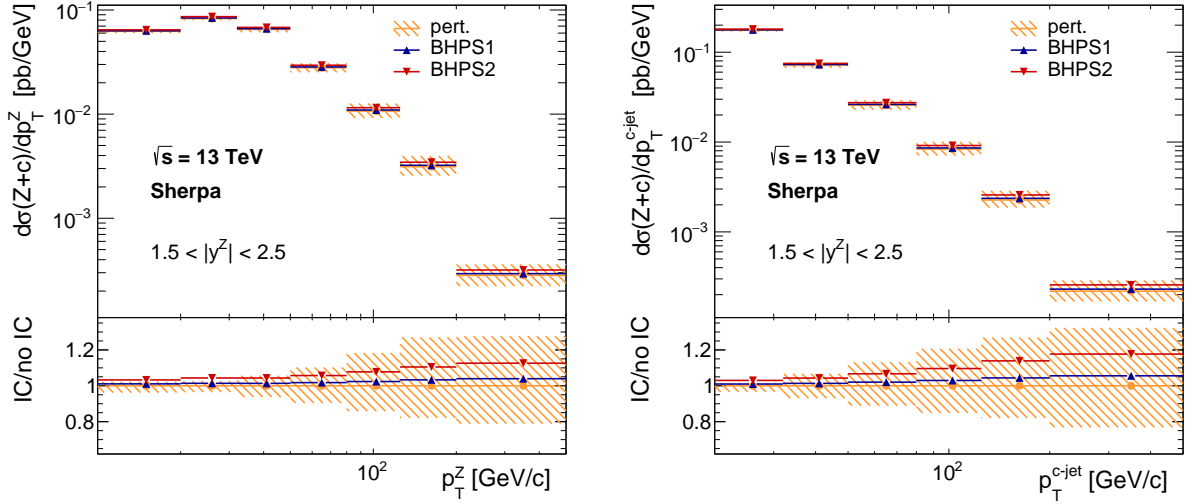


Рис. 36: Дифференциальные сечения процессов ассоциативного рождения  $Z$  бозона и  $c$ -струи как функции поперечного импульса  $Z$  бозона  $p_T(Z)$  (слева) и  $c$ -струи  $p_T(c)$  (справа) в протон-протонных столкновениях в передней области по быстрой  $Z$  бозона,  $1.5 < |y(Z)| < 2.5$ , при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Критерии отбора указаны в тексте. Предсказания Монте-Карло генератора SHERPA были получены в NLO с CT14nnlo PDF как со вкладом внутреннего очарования (BHPS1 и BHPS2), так и без него.

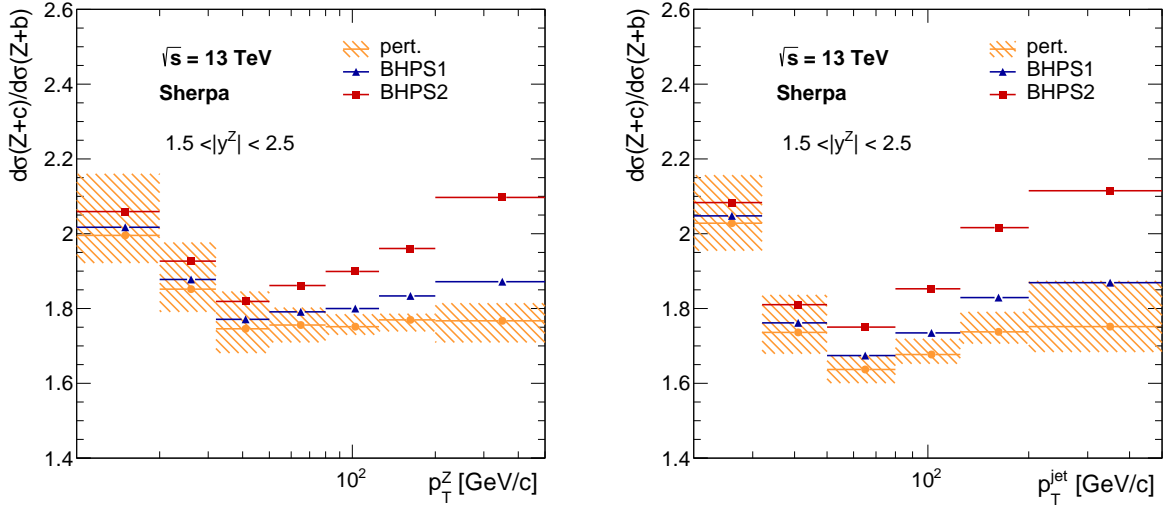


Рис. 37: Отношение дифференциальных сечений процессов рождения  $Z + c$ -струи и  $Z + b$ -струи как функции поперечного импульса  $Z$  бозона  $p_T(Z)$  (слева) и струи  $p_T(jet)$  (справа) в протон-протонных столкновениях в передней области по быстрой  $Z$  бозона,  $1.5 < |y(Z)| < 2.5$ , при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Критерии отбора указаны в тексте. Предсказания Монте-Карло генератора SHERPA были получены в NLO с CT14nnlo PDF как со вкладом внутреннего очарования (BHPS1 и BHPS2), так и без него.

$w_{IC}^{max}$ , из дифференциальных спектров процесса  $Z + c$ -струя весьма затруднительной. Следует отметить, что на данный момент экспериментальных данных для процесса  $Z + c$ -струя, достигающих кинематической области  $p_T(Z, jet) > 200$  ГэВ, нет.

Тем не менее, эффект внутреннего очарования проявляется сильнее в отношении дифференциальных сечений  $\sigma(Z + c)/\sigma(Z + b)$ , в том числе значительно сокращаются теоретические неопределенности, что делает данную кинематическую наблюдаемую намного более перспективной для обнаружения IC. Результаты вычислений таких распределений представлены на Рис. 37.

Таким образом, процессы ассоциативного рождения  $Z$  бозона и тяжелых  $c, b$ -струй могут использоваться для проверки гипотезы внутреннего очарования (например, оценки верхнего предела вероятности нахождения IC в протоне), поскольку распределения по поперечному импульсу  $Z$  бозонов и тяжелых струй чувствительны к таким вкладам при  $p_T(Z, jet) > 200$  ГэВ в областях передних быстрот,  $1.5 < |y(Z)| < 2.5$ , для кинематических областей экспериментов ATLAS и CMS. При этом, на данный момент, экспериментальных данных для процесса  $Z + c$ -струя, достигающих таких больших поперечных импульсов, нет. Однако, в ближайшем будущем можно ожидать, что данный физический анализ будет выполнен коллаборациями ATLAS и CMS.



## 5 Процессы ассоциативного рождения $J/\psi$ мезонов и калибровочных бозонов $Z/W^\pm$

Процессы ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов ( $Z$  или  $W^\pm$ ) включают в себя как сильное, так и слабое взаимодействия и могут служить комплексным тестом пертурбативной КХД и электрослабой теории. Более того, такие процессы предоставляют уникальную 'лабораторию' для исследования механизмов образования чармониев, предсказываемых нерелятивистской КХД. Помимо этого, данные процессы служат хорошим объектом для изучения фрагментационных механизмов, поскольку основываются на подпроцессах другой топологии, включающей новые жесткие масштабы  $\mu \sim m(Z, W^\pm)$  благодаря большой массе калибровочных бозонов. Это позволяет, независимо от процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов, исследовать роль множественных глюонных излучений в начальном состоянии, рассмотренных ранее в Главе 3.

Полные расчеты в следующем за лидирующим порядком теории возмущений в коллинеарном подходе в формализме нерелятивистской КХД для процессов прямого рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$  были выполнены в работах [26–28]. В этих работах было продемонстрировано, что дифференциальные сечения по поперечному импульсу  $J/\psi$  мезонов в лидирующем порядке значительно усиливаются поправками следующего за лидирующим порядком (полные вклады в NLO в 3-4 раза выше вкладов LO, особенно в области малых поперечных импульсов). Однако, несмотря на огромную роль поправок, полученные предсказания, в совокупности с экспериментально определенными вкладами ДПР, недооценивают экспериментальные данные, полученные коллаборацией ATLAS при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ в 2-5 раз (причем расхождение увеличивается с возрастанием поперечного импульса  $J/\psi$ ) [29]. Для процессов с рождением  $W^\pm$  [30] расхождение еще больше, поскольку отсутствуют синглетные вклады, появляющиеся только в следующих порядках теории возмущений КХД.

Естественно, такие расхождения между экспериментальными данными и теоретическими расчетами в рамках нерелятивистской КХД требуют объяснений, в том числе связанных с поиском новых механизмов и подпроцессов. Одним из них является механизм фрагментации очарованного кварка, ранее не учитываемый в расчетах [26–28]. В связи с этим, в данной работе рассматривались только фрагментационные вклады, в том числе от множественных глюонных излучений, в процесс ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$ . Такие процессы будут дополнять расчеты, проведенные другими научными группами [26–28], что позволит улучшить согласованность теоретических предсказаний в рамках NLO-приближения нерелятивистской КХД и имеющихся экспериментальных данных коллаборации ATLAS.

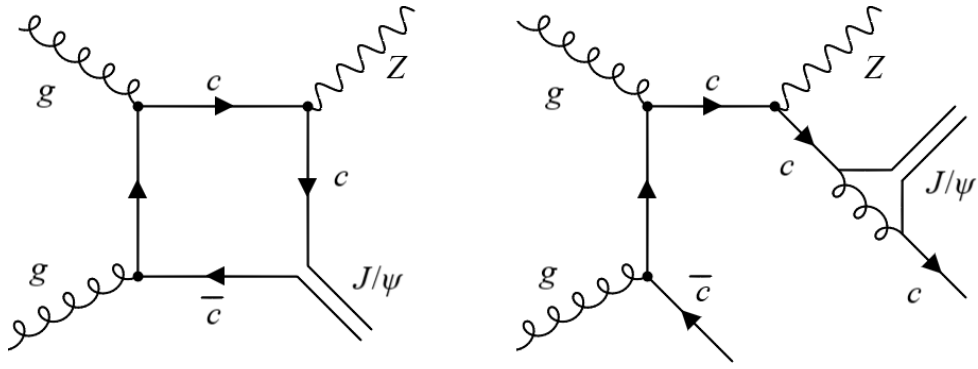


Рис. 38: Пример диаграммы Фейнмана для процессов, учитываемых в расчетах [26–28] (слева) и диаграммы возбуждения очарованного кварка с последующей фрагментацией этого кварка в  $J/\psi$  мезон (справа).

## 5.1 Фрагментационные вклады в сечение рождения $J/\psi + Z/W^\pm$

Основным источником фрагментационных вкладов в процессы ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  является подпроцесс возбуждения очарованного кварка для  $Z$  бозонов (или странного кварка для  $W^\pm$  бозонов) с последующей фрагментацией очарованного кварка,  $c \rightarrow J/\psi + c$ . Несмотря на то, что эти процессы подавлены по константе связи  $\alpha_s$ , они имеют энергетическую зависимость, отличную от процессов, рассматриваемых в работах [26–28]. Кроме того, при расчетах в  $k_T$ -факторизационном подходе возникают дополнительные фрагментационные вклады от глюонов, испущенных в результате неколлинеарной эволюции.

Вышеуказанные подпроцессы могут быть рассмотрены как возбуждение морских кварков (очарованных и странных) с последующей фрагментацией  $c$ -кварка:

$$g + c \rightarrow Z + c, \quad g + s \rightarrow W^- + c, \quad c \rightarrow J/\psi + c, \quad (185)$$

и аналогичные подпроцессы для антикварков  $\bar{c}, \bar{s}$ . Между этими процессами и процессами, рассматриваемыми в [26–28], которые основаны на подпроцессах кварк-антикварковой аннигиляции и глюон-глюонного слияния:

$$q + \bar{q} \rightarrow Z/W^\pm + J/\psi, \quad g + g \rightarrow Z/W^\pm + J/\psi, \quad (186)$$

не возникает двойного счета, поскольку подпроцессы (185) имеют другое конечное состояние, содержащее  $c$  кварк. Это наглядно видно из сравнения диаграмм Фейнмана, примеры которых изображены на Рис. 38. Несмотря на подавление по константе связи,  $O(\alpha_s^4)$  в сравнении с  $O(\alpha_s^2)$ , подпроцессы возбуждения аромата имеют некоторые преимущества в кинематике. Большая масса  $m_V$  испускаемого калибровочного бозона в (186) подавляет кварковые пропагаторы и ведет к следующей зависимости сечения  $\sigma \sim 1/m_V^8$ , в то время как сечение подпроцесса кваркового возбуждения (185) пропорционально  $\sigma \sim 1/m_V^4$ . Это компенсирует малость сечения процесса, обу-

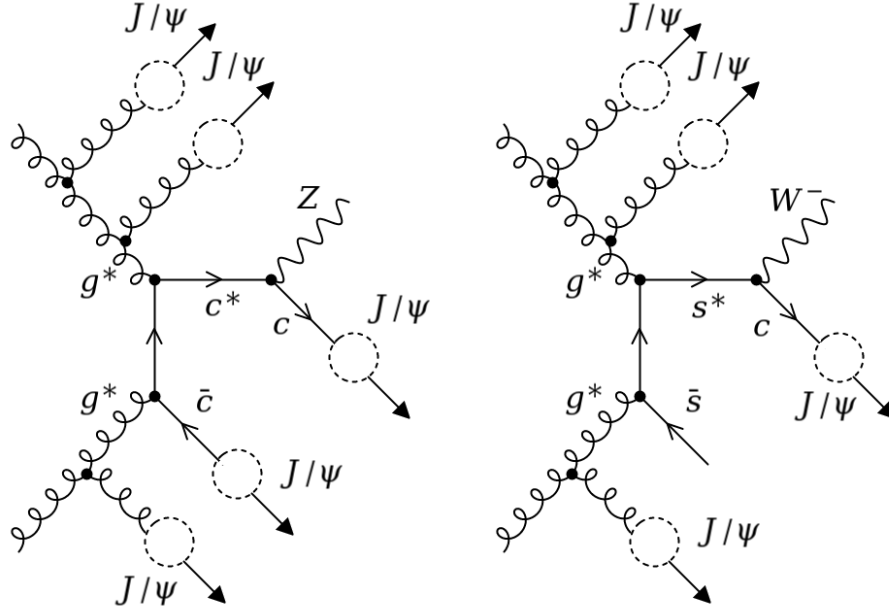


Рис. 39: Примеры диаграмм Фейнмана для процессов ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$ , учитывающих множественные испускания глюонов, в которых  $J/\psi$  мезон образуется с помощью фрагментационного механизма. Пунктирными кругами обозначены возможные каналы фрагментации партонов в  $J/\psi$  мезоны.

словленную дополнительными константами связи  $\alpha_s$ , идущими от процесса фрагментации.

Напомним, что для используемых TMD распределений, все морские кварки образуются из расщепления глюонов только на последнем этапе эволюции. Таким образом, включая явным образом вершину расщепления глюона в подпроцессы (185) мы переходим к подпроцессам глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности:

$$g^* + g^* \rightarrow Z + c + \bar{c}, \quad g^* + g^* \rightarrow W^- + c + \bar{s}, \quad c \rightarrow J/\psi + c. \quad (187)$$

Подпроцесс  $W^+ + \bar{c} + s$  может быть получен с помощью зарядового сопряжения. Как было показано в Главе 4, подобный подход позволяет получить реалистичные теоретические предсказания в области экспериментов ATLAS [29, 30]. Выражения для амплитуд вне массовой поверхности этих процессов были получены в работе [134]. Как было показано в разделе 3.2 данные подпроцессы тоже будут сопровождаться множественными глюонными излучениями в начальном состоянии, в которых испущенные глюоны могут образовывать  $J/\psi$  мезоны с помощью фрагментационного механизма.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены подпроцессы:

$$g^* + g^* \rightarrow Z + q + \bar{q}, \quad g^* + g^* \rightarrow W^\pm + q + \bar{q}', \quad (188)$$

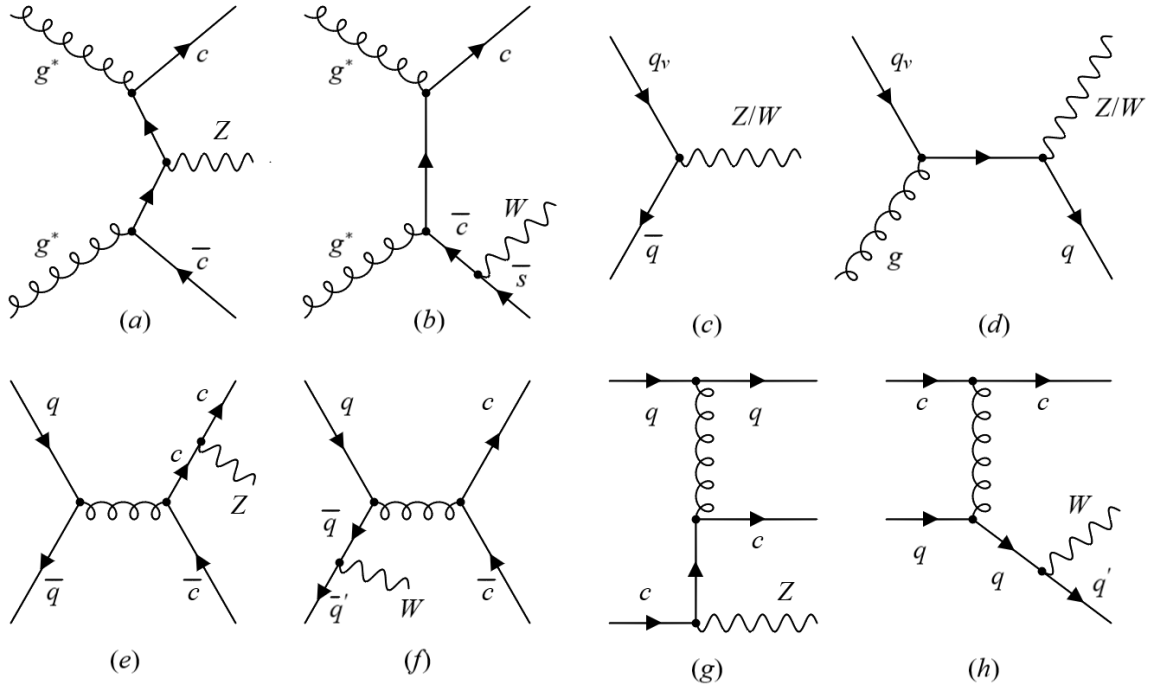


Рис. 40: Примеры диаграмм Фейнмана для subprocessов, учитываемых в расчетах фрагментационных вкладов в сечения процессов ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$ , соответствующие глюон-глюонному слиянию вне массовой поверхности (187),(188) и subprocessам, включающим кварки в начальном состоянии (189),(190).

где  $q$  означает легкий кварк любого аромата. В них образование  $J/\psi$  мезонов осуществляется только с помощью механизма фрагментации глюонного каскада. На Рис. 39 схематично представлены subprocessы (187)-(188) с учетом множественных глюонных излучений и указанием возможных каналов фрагментационного рождения  $J/\psi$  мезонов.

Для полноты рассмотрения необходимо также учесть subprocessы, включающие в себя кварки в начальном состоянии (по аналогии с тем, как это было сделано для процесса ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй):

$$q_v + \bar{q} \rightarrow Z/W^\pm, \quad q_v + g \rightarrow Z/W^\pm + q_v, \quad (189)$$

$$q + c \rightarrow Z + q + c, \quad q + q' \rightarrow W^\pm + q + c, \quad (190)$$

где для subprocessов (189) учитывались только валентные кварки, чтобы исключить двойной счет с subprocessами глюонного слияния (187)-(188). Subprocessы (190) следующего за лидирующим порядком КХД были включены в рассмотрение из-за дополнительных вкладов, возникающих от фрагментации очарованных кварков, несмотря на подавление по  $\alpha_s$ . Согласно соображениям, приведенным в разделе 4.1, subprocessы, включающие кварки в начальном состоянии, были рассчитаны в коллинеарном приближении. Для этих subprocessов начальное излучение также мо-

жет быть учтено с помощью Монте-Карло генератора партонных ливней. Примеры всех рассматриваемых в данной работе партонных подпроцессов изображены на Рис. 40.

### 5.1.1 Полные и дифференциальные сечения

Дифференциальные сечения партонных подпроцессов (187-190) могут быть записаны по аналогии с (173) и (174) с соответствующей заменой амплитуд. Отдельно отметим лишь сечение подпроцесса КХД Комптона  $q_v + g \rightarrow Z/W^\pm + q_v$ , которое в коллинеарном приближении будет иметь вид:

$$\sigma(pp \rightarrow Z/W^\pm + q_v) = \sum_{q_v, g} \int \frac{1}{16\pi(x_1 x_2 s)^2} |\mathcal{A}(q_v + g \rightarrow Z/W^\pm + q_v)|^2 \times \quad (191)$$

$$\times f_{q_v}(x_1, \mu^2) f_g(x_2, \mu^2) d\mathbf{p}_{1T}^2 dy_1 dy_2$$

Здесь,  $q_v$  обозначает валентные кварки, а  $f_{q_v}(x_1, \mu^2) = f_q(x_1, \mu^2) - f_{\bar{q}}(x_1, \mu^2)$  — соответствующую функцию распределения валентных кварков,  $p_1$  импульс кварка или бозона,  $y_1$  и  $y_2$  — быстроты кварка и бозона. Аналогичным образом может быть записано сечение подпроцесса  $pp \rightarrow Z \rightarrow l\bar{l}$ .

При этом полное фрагментационное сечение рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$  может быть представлено в виде:

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow J/\psi + Z/W^\pm)}{dp_T} = \sum_n \int \frac{d\sigma(pp \rightarrow g + Z/W^\pm)}{dp_T^g} D_{g \rightarrow J/\psi}(z, \mu^2) \delta(z - p^+/p_g^+) dz + \quad (192)$$

$$+ \sum_m \int \frac{d\sigma(pp \rightarrow c + Z/W^\pm)}{dp_T^c} D_{c \rightarrow J/\psi}(z, \mu^2) \delta(z - p^+/p_c^+) dz,$$

где суммирование осуществляется по всем партонным подпроцессам (187-190), в которых образуются очарованные кварки или глюоны, в том числе и в результате множественных глюонных излучений.

## 5.2 Выбор параметров и теоретические неопределенности

Для вычислений сечений жестких взаимодействий была использована программа численного интегрирования VEGAS. Для восстановления глюонного каскада в подпроцессах, рассчитываемых в подходе  $k_T$ -факторизации, использовалась специальная подпрограмма TMD партонных ливней, встроенная в Монте-Карло генератор событий CASCADE. В случае подпроцессов, рассчитанных в коллинеарном пределе, для моделирования партонных эмиссий в начальном состоянии был использован Монте-Карло генератор RUTHIA 8.2 [151].

Вычисления были выполнены с TMD глюонными распределениями JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2 в подходе  $k_T$ -факторизации и ММНТ'2014(LO) PDF в коллинеарном подходе [152]. Оценка неопределенностей осуществлялась аналогично алгоритму,

представленному в 3.4. В численных расчетах использовались следующие значения :  $m_c = 1.5$  ГэВ,  $m_{J/\psi} = 3.097$  ГэВ,  $m_{\psi'} = 3.69$  ГэВ,  $m_{\chi_{c1}} = 3.51$  ГэВ,  $m_{\chi_{c2}} = 3.56$  ГэВ,  $m_W = 80.4$  ГэВ,  $m_Z = 91.2$  ГэВ,  $\Gamma_W = 2.09$  ГэВ,  $\Gamma_Z = 2.5$  ГэВ,  $\sin^2 \theta_W = 0.23116$ ,  $Br(\psi' \rightarrow J/\psi + 2\pi) = 0.529$ ,  $Br(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.339$ ,  $Br(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.192$ , элементы матрицы Кабиббо-Кобаяси-Маскавы полагались равными  $V_{cs} = 0.97359$ ,  $V_{ud} = 0.97446$ ,  $V_{us} = 0.22452$ ,  $V_{cd} = 0.22438$  [131];

### 5.3 Результаты расчетов

В данном разделе представлены результаты расчетов фрагментационных вкладов в дифференциальные сечения процессов ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  в протон-протонных столкновениях на LHC в центральной области быстрот при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ. Проведено сравнение полученных предсказаний с экспериментальными данными коллаборации ATLAS и имеющимися теоретическими предсказаниями нерелятивистской КХД. Исследована роль вкладов, образованных фрагментацией множественных глюонных излучений в начальном состоянии. Данные исследования представлены в работе [56].

#### 5.3.1 Распределения по поперечному импульсу $J/\psi$ мезонов для процессов ассоциативного рождения $J/\psi + Z/W^\pm$

Коллаборация ATLAS измерила дифференциальные сечения ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$  как функции поперечного импульса  $J/\psi$  мезона при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ в центральной области быстрот [29, 30]. В случае рождения  $J/\psi + Z$  требуется, чтобы каждый  $J/\psi$  мезон имел поперечный импульс  $p_T(J/\psi) > 8.5$  ГэВ и быстроту  $|y(J/\psi)| < 2.1$ , в то время как мюоны, образованные от распада  $Z$  бозона ( $Z \rightarrow \mu^- \mu^+$ ) должны иметь псевдобыстроты  $|\eta(\mu)| < 2.5$  и обладать поперечными импульсами  $p_T(\mu) > 25$  ГэВ и  $p_T(\mu) > 15$  ГэВ для лидирующего и следующего за лидирующим лептонов, соответственно. Инвариантная масса мюонов  $m(\mu^+ \mu^-)$  должна находиться в диапазоне, удовлетворяющем условию  $|m(\mu^+ \mu^-) - m(Z)| < 10$  ГэВ, где  $m(Z)$  - масса  $Z$  бозона. В случае рождения  $J/\psi + W^\pm$  применяются следующие критерии отбора:  $p_T(J/\psi) > 8.5$  ГэВ и  $|y(J/\psi)| < 2.1$  для  $J/\psi$  мезона;  $p_T(\mu) > 25$  ГэВ и  $|\eta(\mu)| < 2.4$  для мюона и  $p_T(\nu) > 20$  ГэВ для нейтрино, образованных от распада  $W^\pm$  ( $W^\pm \rightarrow \mu\nu$ ). Кроме того, поперечная масса калибровочного бозона  $W^\pm$ , определяемая как:

$$m_T(W^\pm) = \sqrt{2p_T(\mu)p_T(\nu)[1 - \cos(\phi(\mu) - \phi(\nu))]}, \quad (193)$$

должна удовлетворять соотношению  $m_T(W^\pm) > 40$  ГэВ, где  $\phi(\mu)$  и  $\phi(\nu)$  - азимутальные углы мюона и нейтрино, соответственно.

Для оценки фрагментационных вкладов, в подходе  $k_T$ -факторизации были рассчитаны сечения от подпроцессов (187), (188) согласно критериям отбора, приведен-

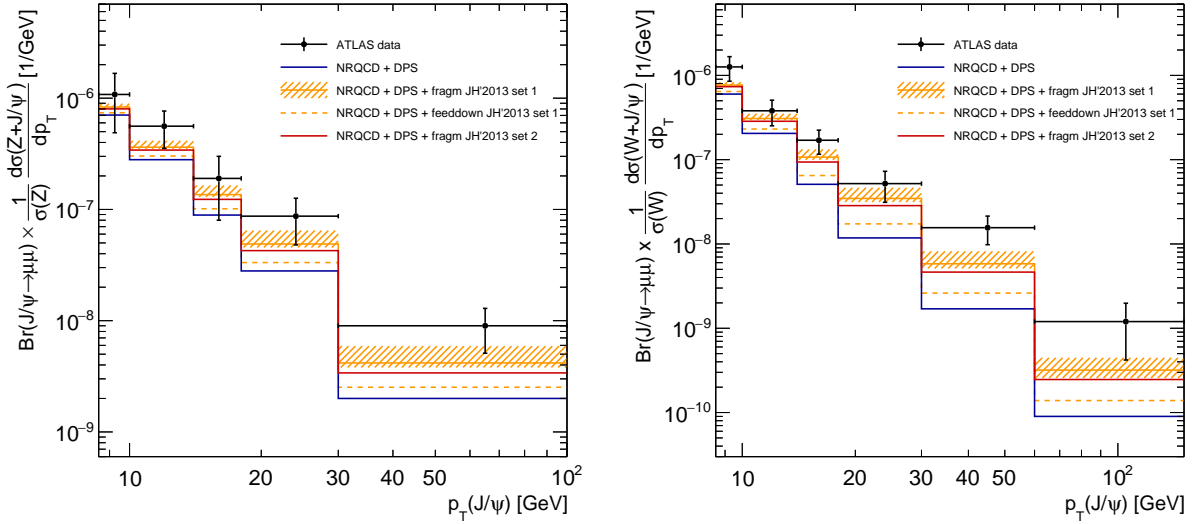


Рис. 41: Дифференциальные сечения процессов ассоциативного рождения  $J/\psi + Z$  (слева) и  $J/\psi + W^\pm$  (справа) как функции поперечного импульса  $J/\psi$  мезона в протон-протонных столкновениях при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ. Критерии отбора указаны в тексте. Экспериментальные данные ATLAS, предсказания нерелятивистской КХД в следующем за лидирующим порядке и ДПР (NRQCD + DPS) были взяты из работ [29,30]. Вклад ДПР взят с эффективным сечением  $\sigma_{\text{eff}} = 15$  мбн. Теоретические неопределенности, представленные в виде заштрихованных полос, получены только для фрагментационных вкладов от (187)-(190) и не включают неопределенности от (186) и ДПР.

ным выше. Дополнительно, в коллинеарном подходе были получены сечения подпроцессов (189), (190). В обоих случаях были учтены множественные глюонные излучения в начальном состоянии. Кроме того, для всех вышеуказанных подпроцессов были вычислены также сечения рождения возбужденных состояний  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$ , с последующим моделированием их распадов в наблюдаемый  $J/\psi$  мезон. Для расчетов фрагментационных вкладов использовались соответствующие функции фрагментации очарованных кварков (112) - (114) и глюонов (127) - (129), и учитывалась их совместная эволюция (133), (134).

Вычисления были выполнены со следующим выбором факторизационных и ренормализационных масштабов. Для подпроцессов глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности они были выбраны в виде  $\mu_F^2 = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2$  и  $\mu_R^2 = m_c^2 + \frac{1}{2}(p_{1T}^2 + p_{2T}^2)$ ; для подпроцессов с кварками —  $\mu_F^2 = \mu_R^2 = m_c^2 + \frac{1}{2}(p_{1T}^2 + p_{2T}^2)$ . В обоих случаях,  $p_{1T}$  и  $p_{2T}$  — поперечные импульсы образованных кварков. Фрагментационный масштаб, как и ранее, был выбран в виде  $\mu_{\text{fragm}}^2 = m_Q^2 + p_T^2$ , где  $m_Q$  и  $p_T$  — масса и поперечный импульс фрагментируемого партона.

Результаты вычислений представлены на Рис. 41. Распределения, изображенные синей линией и отмеченные как “NRQCD + DPS”, отвечают сумме теоретических

предсказаний [26–28], рассчитанных в следующем за лидирующим порядке коллинеарной КХД, и вклада от ДПР, полученного с эффективным сечением  $\sigma_{\text{eff}} = 15$  мбн. Соответствующие значения ДПР были получены в самих экспериментальных работах [29, 30]. Оранжевая непрерывная линия, отмеченная как “NRQCD+DPS+fragm JH’2013 set 1”, представляет собой сумму “NRQCD + DPS” и всех вычисленных в данной работе фрагментационных вкладов в сечение рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$ . Теоретические неопределенности, представленные в виде оранжевой заштрихованной полосы, получены только для фрагментационных вкладов от всех указанных подпроцессов и не включают в себя неопределенности [26–28] и ДПР. Также отдельно приведены фрагментационные вклады от радиационных распадов возбужденных состояний чармониев  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$  (оранжевая пунктирная линия, отмеченная как “NRQCD+DPS+feeddown JH’2013 set 1”).

Как видно из полученных дифференциальных сечений, предложенные новые фрагментационные вклады играют значительную роль для процессов ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$ , особенно в областях больших поперечных импульсов  $J/\psi$  мезонов. Действительно, для процессов рождения  $J/\psi + Z$  уже при  $p_T^{J/\psi} > 20 - 30$  ГэВ они приблизительно равны сумме предсказаний нерелятивистской КХД в следующем за лидирующим порядке и ДПР. В случае рождения  $J/\psi + W^\pm$  фрагментационные вклады превышают предсказания нерелятивистской КХД почти во всей области  $p_T^{J/\psi}$ . Такой эффект вызван, по большей части, отсутствием синглетных вкладов в лидирующем и следующем за лидирующим порядках КХД для таких процессов. Кроме того, важную роль играют механизмы образования  $J/\psi$  мезонов от радиационных распадов  $\psi'$  и  $\chi_{cJ}$ , которые, в свою очередь, тоже рождаются с помощью фрагментационного механизма. Как показано на Рис. 41, такие вклады составляют порядка 30% от прямых вкладов фрагментационного рождения  $J/\psi$  в широкой области по  $p_T^{J/\psi}$ .

Для исследования чувствительности полученных результатов к выбору TMD глюонных распределений, аналогичные вычисления были проведены для глюонной функции JH’2013 set 2 и представлены красной линией. Полученные предсказания лежат достаточно близко к предсказаниям, полученным с JH’2013 set 1, и даже совпадают с ними в пределах теоретических неопределенностей.

Таким образом, предложенные дополнительные вклады, полученные от партонных подпроцессов (187)-(190) и учитывающие множественные глюонные излучения в начальном состоянии, позволяют значительно (до 2 — 3 раз) сократить расхождение между экспериментальными данными коллаборации ATLAS процессов ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$  и имеющимися теоретическими расчетами в рамках нерелятивистской КХД.



### 5.3.2 Роль множественных глюонных излучений

Поскольку важность роли множественных глюонных излучений сохраняется в процессах рождения чармониев с разной топологией, следует подробнее обсудить вклады фрагментационных механизмов, учитываемые в процессах рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$ . При этом, в отличие от процессов парного рождения  $J/\psi$  мезонов, в рассматриваемых процессах фрагментация очарованного кварка играет значительную роль. Выделим два качественно различных источника фрагментационных вкладов в  $J/\psi$  мезоны. Первый из них основан на фрагментации очарованных кварков, образованных в жестком взаимодействии, в то время как второй — на фрагментации глюонов, образованных в результате КХД эволюции партонных плотностей. Отметим, что для подпроцессов (190), рассчитываемых в коллинеарном подходе КХД, вклад от второго очарованного кварка или антикварка, возникающего в глюонном расщеплении в результате партонной эволюции, однако, не участвующего в жестком взаимодействии, был отнесен к фрагментационным вкладам очарованных кварков. Это позволило сохранить условия разделения источников фрагментации на очарованные кварки и глюоны. Напомним, что в процессах, рассчитываемых в подходе  $k_T$ -факторизации, это условие разделения выполняется автоматически, как это было показано для перехода от подпроцессов (185) к (187).

На Рис. 42 приведены фрагментационные вклады очарованных кварков и глюонов, отдельно для процессов глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (красные распределения) и для процессов с участием кварков в начальном состоянии (зеленое распределение). В случае глюон-глюонного слияния большой вклад при малых поперечных импульсах  $p_T(J/\psi)$  дают процессы фрагментации очарованных кварков, в то время как при увеличении поперечных импульсов  $p_T(J/\psi)$  начинают доминировать процессы глюонной фрагментации. Обратная картина наблюдается для процессов с участием кварков, где роль глюонной фрагментации уменьшается с увеличением  $p_T(J/\psi)$ . Тем не менее, очевидно, что в обоих случаях фрагментация множественных глюонных излучений значительно усиливает вклады фрагментации очарованных кварков и дает ощутимый рост полных и дифференциальных сечений.

Кроме того, полученные распределения в очередной раз подчеркивают два важных свойства. Одно из них можно наблюдать в поведении полученных спектров по поперечному импульсу  $p_T(J/\psi)$ . Согласно уравнению эволюции ССФМ, увеличение поперечного импульса рожденных в жестком взаимодействии частиц приводит к увеличению максимально возможного угла эмиссий, как это показано в (51), (57). Это способствует росту числа допустимых глюонных эмиссий, что приводит к увеличению роли множественных глюонных излучений в фрагментационном механизме рождения частиц. Второе свойство связано с тем, что подход  $k_T$ -факторизации позволяет учитывать большую часть поправок коллинеарной КХД, вычисляя амплитуды жесткого взаимодействия только в лидирующем порядке. Данный эффект наглядно

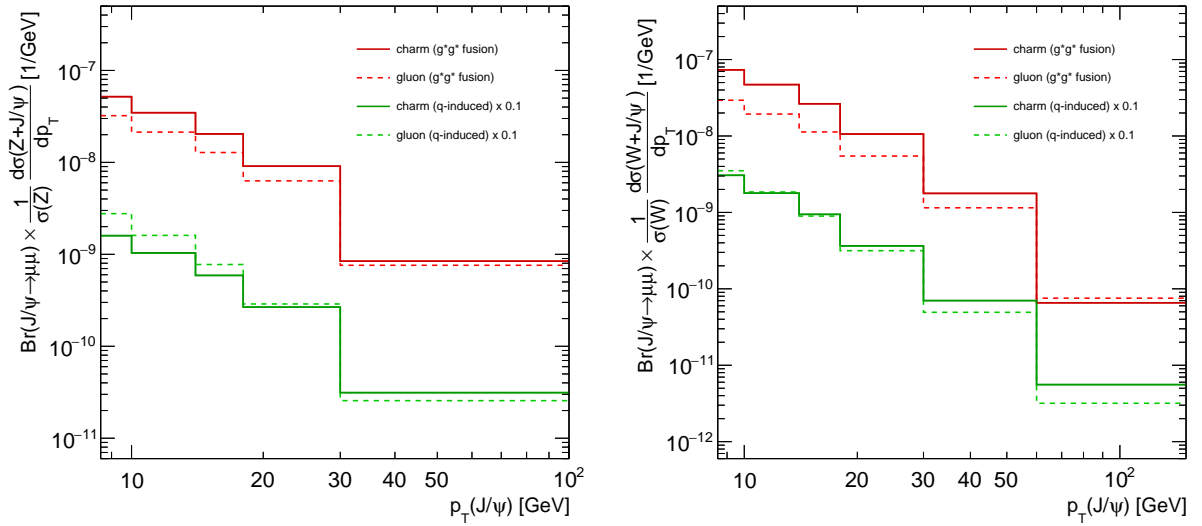


Рис. 42: Вклады, образованные фрагментацией очарованных кварков и глюонов в процессах ассоциативного рождения  $J/\psi + Z$  (слева) и  $J/\psi + W^\pm$  (справа) в протон-протонных столкновениях при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ. Результаты для процессов глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности получены с глюонной плотностью JH'2013 set 1.

виден при сравнении вкладов, образованных процессами глюон-глюонного слияния (учитывающий только амплитуды в лидирующем порядке) и процессов с кварками в начальном состоянии (учитывающие также поправки следующего порядка в виде подпроцессов (190)), а также при сравнении суммарных интегральных фрагментационных вкладов и предсказаний нерелятивистской КХД.

Таким образом, для процессов ассоциативного рождения  $J/\psi + Z/W^\pm$  важность эффектов множественных глюонных излучений сохраняется. Как и в случае парного рождения  $J/\psi$  мезонов, такие вклады необходимы для описания экспериментальных данных в центральной области быстрот и их роль будет только увеличиваться с ростом поперечного импульса рождаемых частиц и энергии столкновения протонов.

# Заключение

Основные результаты, полученные в данной работе:

1. Вычислены полные и дифференциальные сечения процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов в подходе  $k_T$ -факторизации в различных кинематических областях при энергиях ЛНС. Показано, что учет фрагментационных вкладов от множественных излучений глюонов, возникающих в процессе эволюции глюонных распределений, играет существенную роль при описании экспериментальных данных в центральной области быстрот, что соответствует кинематикам экспериментов ATLAS и CMS. Благодаря таким вкладам удалось значительно улучшить согласие теоретических предсказаний в рамках нерелятивистской КХД с экспериментальными данными ATLAS при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ в центральной области быстрот, особенно в областях больших инвариантных масс  $m(J/\psi, J/\psi)$  и разности быстрот  $\Delta y(J/\psi, J/\psi)$ . Показано, что в передней области быстрот при малых поперечных импульсах, что соответствует кинематике ЛНСб, фрагментационные вклады пренебрежимо малы, так что сечение рассматриваемого процесса определяется вкладами синглетного механизма и механизма двойного партонного рассеяния.
2. Из анализа экспериментальных данных коллаборации ЛНСб для процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов была получена оценка эффективного сечения двойного партонного рассеяния,  $\sigma_{\text{eff}} = 17.5 \pm 4.1$  мбн для глюонного распределения A0 и  $\sigma_{\text{eff}} = 13.8 \pm 0.9$  мбн для JH'2013 set 2. Полученные значения совпадают с большинством оценок этой величины, основанных на анализе других конечных состояний. Значительно меньшие величины  $\sigma_{\text{eff}}$ , полученные другими группами [24, 39–43], не подтверждены.
3. Предложен метод включения фрагментационных вкладов, в том числе от множественных глюонных излучений, в механизм двойного партонного рассеяния. Показано, что такие вклады значительно влияют на полное и дифференциальные сечения процесса парного рождения  $J/\psi$  мезонов в центральной области быстрот и на величину эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff}}$ .
4. Вычислены сечения ассоциативного рождения  $Z$  бозонов и тяжелых  $c, b$ -струй при энергиях ЛНС. Было показано, что подход  $k_T$ -факторизации согласуется с предсказаниями коллинеарной КХД, вычисленными в следующем за лидирующим порядке, и экспериментальными данными коллабораций ATLAS и CMS в областях небольших поперечных импульсов  $p_T(Z, jet) < 100$  ГэВ.
5. Рассчитаны фрагментационные вклады в процессы ассоциативного рождения  $J/\psi$  мезонов и калибровочных бозонов  $Z/W^\pm$  при энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ в подходе

$k_T$ -факторизации с учетом множественных глюонных излучений. Показано, что такие вклады значительно усиливают предсказания нерелятивистской КХД, вычисленные в следующем за лидирующим порядке коллинеарной теории возмущений, особенно в областях больших поперечных импульсов  $J/\psi$  мезонов. Учет фрагментационных механизмов позволил существенно сократить (до 2-3 раз) расхождения с экспериментальными данными коллаборации ATLAS. Продемонстрирована важность учета множественных глюонных излучений в данных процессах.

## Благодарности

Я глубоко благодарен своему научному руководителю Артему Владимировичу Липатову за предложенное направление исследования, терпение и всестороннюю поддержку в ходе выполнения научной работы и написания текста диссертации.

Я очень признателен С.П. Баранову за поддержку и готовность к обсуждению возникающих вопросов и М.А. Малышеву за ценные советы и полезные замечания.

Также я благодарен кафедре общей ядерной физики физического факультета МГУ и отделу теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ, в частности Д.Е. Ланскому и Е.Г. Боос за помощь в решении возникающих организационных вопросов, а также коллективу сектора элементарных частиц Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ, в частности С.М. Турчихину и Г.И. Лыкасову за обсуждения экспериментальных аспектов физики высоких энергий и их вклад в совместные работы.

Помимо этого, я также благодарен Фонду развития теоретической физики и математики 'БАЗИС', Российскому фонду фундаментальных исследований и Российскому научному фонду за финансовую поддержку обучения в аспирантуре.

## Список литературы

- [1] *Chao-Hsi Chang*. Hadronic production of  $J/\psi$  associated with a gluon // *Nuclear Physics B*. — 1980. — Vol. 172. — Pp. 425–434. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380901753>.
- [2] *Berger Edmond L., Jones D.* Inelastic photoproduction of  $J/\psi$  and  $\Upsilon$  by gluons // *Phys. Rev. D*. — 1981. — Apr. — Vol. 23. — Pp. 1521–1530. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.1521>.
- [3] *Baier R., Rückl R.* Hadronic production of  $J/\psi$  and  $\gamma$ : Transverse momentum distributions // *Physics Letters B*. — 1981. — Vol. 102. — Pp. 364–370. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381906365>.
- [4] *CDF Collaboration*. Quarkonia production at fermilab // *Il Nuovo Cimento*. — 1996. — Feb. — Vol. 109. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02731716>.
- [5] *Cho Peter, Leibovich Adam K.* Color-octet quarkonia production // *Phys. Rev. D*. — 1996. — Jan. — Vol. 53. — Pp. 150–162. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [6] *Cho Peter, Leibovich Adam K.* Color-octet quarkonia production. II // *Phys. Rev. D*. — 1996. — Jun. — Vol. 53. — Pp. 6203–6217. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.6203>.
- [7] *Bodwin Geoffrey T., Braaten Eric, Lepage G. Peter.* Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // *Phys. Rev. D*. — 1995. — Feb. — Vol. 51. — Pp. 1125–1171. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [8] *Ma Yan-Qing, Wang Kai, Chao Kuang-Ta.*  $J/\psi(\psi')$  Production at the Tevatron and LHC at  $\mathcal{O}(\alpha_s^4 v^4)$  in Nonrelativistic QCD // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Jan. — Vol. 106. — P. 042002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.042002>.
- [9] *Butenschoen Mathias, Kniehl Bernd A.* World data of  $J/\psi$  production consolidate nonrelativistic QCD factorization at next-to-leading order // *Phys. Rev. D*. — 2011. — Sep. — Vol. 84. — P. 051501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.051501>.
- [10] *Gong Bin, Li Xue Qian, Wang Jian-Xiong.* QCD corrections to  $J/\psi$  production via color-octet states at the Tevatron and LHC // *Physics Letters B*. — 2009. — Mar. — Vol. 673. — Pp. 197–200. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309001944>.

- [11] *Brambilla N., Eidelman S., Heltsley B.K. et al.* Heavy quarkonium: progress, puzzles, and opportunities // *The European Physical Journal C.* — 2011. — Feb. — Vol. 71. — P. 1534. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9>.
- [12] *CMS Collaboration.* Measurement of the prompt  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  polarizations in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // *Physics Letters B.* — 2013. — Dec. — Vol. 727. — Pp. 381–402. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313008629>.
- [13] *Butenschoen Mathias, He Zhi-Guo, Kniehl Bernd A.*  $\eta_c$  Production at the LHC Challenges Nonrelativistic QCD Factorization // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Mar. — Vol. 114. — P. 092004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.092004>.
- [14] *LHCb Collaboration.* Measurement of the  $\eta_c(1S)$  production cross-section in proton–proton collisions via the decay  $\eta_c(1S) \rightarrow p\bar{p}$  // *The European Physical Journal C.* — 2015. — Jul. — Vol. 75. — P. 311. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3502-x>.
- [15] *Baranov S. P.* Possible solution of the quarkonium polarization problem // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Mar. — Vol. 93. — P. 054037. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.054037>.
- [16] *Baranov S. P., Lipatov A. V.* Are there any challenges in the charmonia production and polarization at the LHC? // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Dec. — Vol. 100. — P. 114021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.114021>.
- [17] *Baranov S. P., Lipatov A. V.*  $\chi_{c1}$  and  $\chi_{c2}$  polarization as a probe of color octet channel // *The European Physical Journal C.* — 2020. — Nov. — Vol. 80. — P. 1022. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-08617-0>.
- [18] *Abdulov N. A., Lipatov A. V.* Bottomonia production and polarization in the NRQCD with  $k_T$ -factorization. I:  $\Upsilon(3S)$  and  $\chi_b(3P)$  mesons // *The European Physical Journal C.* — 2019. — Oct. — Vol. 79. — P. 830. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7365-4>.
- [19] *Abdulov N. A., Lipatov A. V.* Bottomonia production and polarization in the NRQCD with  $k_T$ -factorization. II:  $\Upsilon(2S)$  and  $\chi_b(2P)$  mesons // *The European Physical Journal C.* — 2020. — May. — Vol. 80. — P. 486. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8056-x>.
- [20] *Abdulov N. A., Lipatov A. V.* Bottomonium production and polarization in the NRQCD with  $k_T$ -factorization. III:  $\Upsilon(1S)$  and  $\chi_b(1P)$  mesons // *The European*

*Physical Journal C.* — 2021. — Dec. — Vol. 81. — P. 1085. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09880-5>.

- [21] *He Zhi-Guo, Kniehl Bernd A.* Complete Nonrelativistic-QCD Prediction for Prompt Double  $J/\psi$  Hadroproduction // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Jul. — Vol. 115. — P. 022002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.022002>.
- [22] *Sun Li-Ping, Han Hao, Chao Kuang-Ta.* Impact of  $J/\psi$  pair production at the LHC and predictions in nonrelativistic QCD // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Oct. — Vol. 94. — P. 074033. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.074033>.
- [23] *Lansberg Jean-Philippe, Shao Hua-Sheng.* Production of  $J/\psi+\eta_c$  versus  $J/\psi+J/\psi$  at the LHC: Importance of Real  $\alpha_s^5$  Corrections // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Sep. — Vol. 111. — P. 122001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.122001>.
- [24] *ATLAS Collaboration.* Measurement of the prompt  $J/\psi$  pair production cross-section in pp collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS detector // *The European Physical Journal C.* — 2017. — Feb. — Vol. 77. — P. 76. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4644-9>.
- [25] *CMS Collaboration.* Measurement of prompt  $J/\psi$  pair production in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // *Journal of High Energy Physics.* — 2014. — Sep. — Vol. 2014. — P. 94. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2014\)094](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)094).
- [26] *Kniehl Bernd A., Palisoc Caesar P., Zwirner Lennart.* Associated production of heavy quarkonia and electroweak bosons at present and future colliders // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Dec. — Vol. 66. — P. 114002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.114002>.
- [27] *Gang Li, Mao Song, Ren-You Zhang, Wen-Gan Ma.* QCD corrections to  $J/\psi$  production in association with a  $W$  boson at the LHC // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Jan. — Vol. 83. — P. 014001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.014001>.
- [28] *Mao Song, Wen-Gan Ma, Gang Li et al.* QCD corrections to  $J/\psi$  plus  $Z^0$ -boson production at the LHC // *Journal of High Energy Physics.* — 2011. — Feb. — Vol. 02. — P. 71. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2011\)071](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2011)071).
- [29] *ATLAS Collaboration.* Observation and measurements of the production of prompt and non-prompt  $J/\psi$  mesons in association with a  $Z$  boson in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS detector // *The European Physical Journal C.* — 2015. — May. — Vol. 75. — P. 229. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3406-9>.



- [30] *ATLAS Collaboration*. Measurement of  $J/\psi$  production in association with a  $W^\pm$  boson with pp data at 8 TeV // *Journal of High Energy Physics*. — 2020. — Jan. — Vol. 2020. — P. 95. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2020\)095](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2020)095).
- [31] *Bartalini P., Gaunt J.* Multiple Parton Interactions at the LHC // *Advanced Series on Directions in High Energy Physics*. — 2018. — Dec. — Vol. 29. — URL: <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/10646>.
- [32] *Collaboration The Axial Field Spectrometer*. Double parton scattering in pp collisions at  $\sqrt{s} = 63$  GeV // *Z. Phys. C*. — 1987. — Jun. — Vol. 34. — P. 163. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01566757>.
- [33] *CDF Collaboration*. Double parton scattering in  $\bar{p}p$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV // *Phys. Rev. D*. — 1997. — Oct. — Vol. 56. — Pp. 3811–3832. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.3811>.
- [34] *Blok B., Dokshitzer Yu., Frankfurt L., Strikman M.* Four-jet production at LHC and Tevatron in QCD // *Phys. Rev. D*. — 2011. — Apr. — Vol. 83. — P. 071501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.071501>.
- [35] *Baranov S.P., Snigirev A.M., Zotov N.P.* Double heavy meson production through double parton scattering in hadronic collisions // *Physics Letters B*. — 2011. — Nov. — Vol. 705. — P. 116. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311012068>.
- [36] *Diehl Markus, Schäfer Andreas*. Theoretical considerations on multiparton interactions in QCD // *Physics Letters B*. — 2011. — Mar. — Vol. 698. — P. 389. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311002863>.
- [37] *Ryskin M. G., Snigirev A. M.* Fresh look at double parton scattering // *Phys. Rev. D*. — 2011. — Jun. — Vol. 83. — P. 114047. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.114047>.
- [38] *LHCb Collaboration*. Production of associated  $\Upsilon$  and open charm hadrons in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  and 8 TeV via double parton scattering // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Jul. — Vol. 2016. — P. 52. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2016\)052](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2016)052).
- [39] *D0 Collaboration*. Evidence for Simultaneous Production of  $J/\psi$  and  $\Upsilon$  Mesons // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Feb. — Vol. 116. — P. 082002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.082002>.
- [40] *LHCb Collaboration*. Measurement of the  $J/\psi$  pair production cross-section in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV // *Journal of High Energy Physics*. — 2017. — Jun. — Vol. 2017. — P. 47. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2017\)047](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2017)047).

- [41] *Lansberg Jean-Philippe, Shao Hua-Sheng.*  $J/\psi$ -pair production at large momenta: Indications for double parton scatterings and large  $\alpha_s^5$  contributions // *Physics Letters B.* — 2015. — Dec. — Vol. 751. — Pp. 479–486. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269315008424>.
- [42] *D0 Collaboration.* Observation and studies of double  $J/\psi$  production at the Tevatron // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Dec. — Vol. 90. — P. 111101. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.111101>.
- [43] *CMS Collaboration.* Observation of  $\Upsilon(1S)$  pair production in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV // *Journal of High Energy Physics.* — 2017. — May. — Vol. 2017. — P. 13. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2017\)013](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2017)013).
- [44] *CMS Collaboration.* Study of double parton scattering using  $W + 2$ -jet events in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // *Journal of High Energy Physics.* — 2014. — Mar. — Vol. 2014. — P. 32. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2014\)032](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2014)032).
- [45] *ATLAS Collaboration.* Measurement of hard double-parton interactions in  $W(\rightarrow \ell\nu) + 2$ -jet events at  $\sqrt{s} = 7$  TeV with the ATLAS detector // *New Journal of Physics.* — 2013. — Mar. — Vol. 15, no. 3. — P. 033038. — URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/3/033038>.
- [46] *D0 Collaboration.* Study of double parton interactions in diphoton + dijet events in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Mar. — Vol. 93. — P. 052008. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.052008>.
- [47] *D0 Collaboration.* Double parton interactions in  $\gamma + 3$  jet and  $\gamma + b/c$  jet + 2 jet events in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Apr. — Vol. 89. — P. 072006. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.072006>.
- [48] *ATLAS Collaboration.* Study of hard double-parton scattering in four-jet events in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV with the ATLAS experiment // *Journal of High Energy Physics.* — 2016. — Nov. — Vol. 2016. — P. 110. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2016\)110](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2016)110).
- [49] *LHCb Collaboration.* Observation of double charm production involving open charm in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // *Journal of High Energy Physics.* — 2012. — Jun. — Vol. 2012. — P. 141. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2012\)141](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2012)141).
- [50] *Baranov S. P.* Positively defined color-singlet fragmentation function  $g \rightarrow \chi_{cJ}$  // *The European Physical Journal Plus.* — 2021. — Aug. — Vol. 136. — P. 836. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01836-8>.
- [51] *H. Jung.* Un-integrated PDFs in CCFM // *arXiv.* — 2004. — URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0411287>.

- [52] *Hautmann F., Jung H.* Transverse momentum dependent gluon density from DIS precision data // *Nuclear Physics B.* — 2014. — Jun. — Vol. 883. — Pp. 1–19. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321314000881>.
- [53] *Jung H., Baranov S., Deak M. et al.* The CCFM Monte Carlo generator CASCADE Version 2.2.03 // *The European Physical Journal C.* — 2010. — Dec. — Vol. 70. — P. 1237. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1507-z>.
- [54] *Lipatov A. V., Lykasov G. I., Malyshev M. A., Prokhorov A. A., Turchikhin S. M.* Hard production of a  $Z$  boson plus heavy flavor jets at LHC and the intrinsic charm content of a proton // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Jun. — Vol. 97. — P. 114019. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.114019>.
- [55] *Prokhorov A. A., Lipatov A. V., Malyshev M.A., Baranov S.P.* Revisiting the production of  $J/\psi$  pairs at the LHC // *The European Physical Journal C.* — 2020. — Nov. — Vol. 80. — P. 1046. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-08631-2>.
- [56] *Baranov S. P., Lipatov A. V., Prokhorov A. A.* Charm fragmentation and associated  $J/\psi + Z/W^\pm$  production at the LHC // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Aug. — Vol. 104. — P. 034018. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.034018>.
- [57] *Baranov S. P., Lipatov A. V., Prokhorov A. A.* Role of initial gluon emission in double  $J/\psi$  production at central rapidities // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Aug. — Vol. 106. — P. 034020. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.034020>.
- [58] *Клоуз Ф.* Кварки и Партоны. Введение в теорию. — М:Мир, 1982.
- [59] *Collaboration H1, ZEUS.* Combined measurement and QCD analysis of the inclusive  $e^\pm p$  scattering cross sections at HERA // *Journal of High Energy Physics.* — 2010. — Jan. — Vol. 2010. — P. 109. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2010\)109](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2010)109).
- [60] *В.Н. Грибов, Л.Н. Лунатов.* Глубоконеупругое  $ep$ -рассеяние в теории возмущений // *Ядерная физика.* — 1972. — Vol. 15. — Pp. 781–807.
- [61] *В.Н. Грибов, Л.Н. Лунатов.* Аннигиляция  $e^+e^-$ -пар и глубоконеупругое  $ep$ -рассеяние в теории возмущений // *Ядерная физика.* — 1972. — Vol. 15. — Pp. 1218–1237.
- [62] *Altarelli G., Parisi G.* Asymptotic freedom in parton language // *Nuclear Physics B.* — 1977. — Vol. 126. — Pp. 298–318. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844>.
- [63] *Ю.Л. Докшицер.* Вычисление структурных функций для глубоконеупругого рассеяния и  $e^+e^-$  аннигиляции в теории возмущений квантовой

- хромодинамики // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1977. — Vol. 73. — Pp. 1216–1241.
- [64] *Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G.* Semihard processes in QCD // *Physics Reports*. — 1983. — Vol. 100. — Pp. 1–150. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157383900224>.
- [65] Э.А. Кураев, Л.Н. Липатов, В.С. Фадин. Мульти-реджевские процессы в теории Янга-Миллса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1976. — Vol. 71. — Pp. 840–855.
- [66] Э.А. Кураев, Л.Н. Липатов, В.С. Фадин. Особенность Померанчука в неабелевых калибровочных теориях // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1977. — Vol. 72. — Pp. 377–389.
- [67] Я.Я. Балицкий, Л.Н. Липатов. О Померанчуковской особенности в квантовой хромодинамике // *Ядерная физика*. — 1978. — Vol. 28. — Pp. 1597–1611.
- [68] *Regge T.* Introduction to complex orbital momenta // *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*. — 1959. — Dec. — Vol. 14. — P. 951. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02728177>.
- [69] *Fadin V.S., Fiore R., Kotsky M.I., Papa A.* Strong bootstrap conditions // *Physics Letters B*. — 2000. — Dec. — Vol. 495. — Pp. 329–337. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300012600>.
- [70] *Lipatov L.N.* Gauge invariant effective action for high energy processes in QCD // *Nuclear Physics B*. — 1995. — Oct. — Vol. 452. — P. 369. — URL: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00390-E](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00390-E).
- [71] *Antonov E.N., Cherednikov I.O., Kuraev E.A., Lipatov L.N.* Feynman rules for effective Regge action // *Nuclear Physics B*. — 2005. — Aug. — Vol. 721. — P. 111. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.05.013>.
- [72] *Kovchegov Yuri V.* Unitarization of the BFKL Pomeron on a nucleus // *Phys. Rev. D*. — 2000. — Mar. — Vol. 61. — P. 074018. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.074018>.
- [73] *Fadin V.S., Fiore R., Flachi A., Kotsky M.I.* Quark-antiquark contribution to the BFKL kernel // *Physics Letters B*. — 1998. — Mar. — Vol. 422. — Pp. 287–293. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398000446>.
- [74] *Fadin V.S., Kotsky M.I., Lipatov L.N.* One-loop correction to the BFKL kernel from two gluon production // *Physics Letters B*. — 1997. — Mar. — Vol. 415. — Pp. 97–103. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397012100>.

- [75] *Fadin V.S., Lipatov L.N.* BFKL pomeron in the next-to-leading approximation // *Physics Letters B.* — 1998. — Jun. — Vol. 429. — Pp. 127–134. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398004730>.
- [76] *Ciafaloni M., Colferai D., Salam G. P.* Renormalization group improved small- $x$  equation // *Phys. Rev. D.* — 1999. — Nov. — Vol. 60. — P. 114036. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.114036>.
- [77] *Ciafaloni M., Colferai D.* The BFKL equation at next-to-leading level and beyond // *Physics Letters B.* — 1999. — Apr. — Vol. 452. — Pp. 372–378. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399002816>.
- [78] *Avsar E., Stařto A.M., Triantafyllopoulos D.N., Zaslavsky D.* Next-to-leading and resummed BFKL evolution with saturation boundary // *Journal of High Energy Physics.* — 2011. — Oct. — Vol. 452. — P. 138. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2011\)138](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2011)138).
- [79] *Gyulassy Miklos, McLerran Larry.* New forms of QCD matter discovered at RHIC // *Nuclear Physics A.* — 2005. — Mar. — Vol. 750. — Pp. 30–63. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947404011480>.
- [80] *Ciafaloni Marcello.* Coherence effects in initial jets at small  $Q^2/s$  // *Nuclear Physics B.* — 1988. — Jan. — Vol. 296. — Pp. 49–74. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138890380X>.
- [81] *Catani S., Fiorani F., Marchesini G.* QCD coherence in initial state radiation // *Physics Letters B.* — 1990. — Jan. — Vol. 234. — Pp. 339–345. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269390919388>.
- [82] *Catani S., Fiorani F., Marchesini G.* Small- $x$  behaviour of initial state radiation in perturbative QCD // *Nuclear Physics B.* — 1990. — May. — Vol. 336. — Pp. 18–85. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090342B>.
- [83] *Marchesini Giuseppe.* QCD coherence in the structure function and associated distributions at small  $x$  // *Nuclear Physics B.* — 1995. — Jul. — Vol. 445. — Pp. 49–78. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500149M>.
- [84] *Ellis R. K., Stirling W. J., Webber B. R.* QCD and Collider Physics. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. — Cambridge University Press, 1996.
- [85] *Collins John.* Foundation of perturbative QCD. — Cambridge University Press, 2011. — May. — URL: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592>.

- [86] *Е.М. Левин, М.Г. Рыскин, А.Г. Шуваев, Ю.М. Шабельский.* Рождение тяжелых кварков в полужестком взаимодействии нуклонов // *Ядерная физика.* — 1991. — Vol. 53. — Pp. 1059–1077.
- [87] *Catani S., Ciafaloni M., Hautmann F.* High energy factorization and small- $x$  heavy flavour production // *Nuclear Physics B.* — 1991. — Nov. — Vol. 366. — Pp. 135–188. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391900553>.
- [88] *Collins John C., Soper Davison E.* Parton distribution and decay functions // *Nuclear Physics B.* — 1982. — Vol. 194. — Pp. 445–492. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382900219>.
- [89] *Collins J.C., Soper Davison E., Sterman George.* Transverse momentum distribution in Drell-Yan pair and W and Z boson production // *Nuclear Physics B.* — 1985. — Vol. 250. — Pp. 199–224. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385904791>.
- [90] *Collins John C., Soper Davison E.* Back-to-back jets in QCD // *Nuclear Physics B.* — 1981. — Vol. 193. — Pp. 381–443. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321381903394>.
- [91] *Meng Ruibin, Olness Fredrick I., Soper Davison E.* Semi-inclusive deeply inelastic scattering at small  $q_T$  // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Aug. — Vol. 54. — Pp. 1919–1935. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.1919>.
- [92] *Martinez A. Bermudez, Connor P. L. S., Damiani D. Dominguez et al.* The transverse momentum spectrum of low mass Drell-Yan production at next-to-leading order in the parton branching method // *The European Physical Journal C.* — 2020. — Jul. — Vol. 80. — P. 598. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8136-y>.
- [93] *Bermudez Martinez A., Connor P. L. S., Dominguez Damiani D. et al.* Production of Z bosons in the parton branching method // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Oct. — Vol. 100. — P. 074027. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.074027>.
- [94] *Maciula Rafał, Szczurek Antoni.* Intrinsic charm in the nucleon and charm production at large rapidities in collinear, hybrid and  $k_T$ -factorization approaches // *Journal of High Energy Physics.* — 2020. — Oct. — Vol. 2020. — P. 135. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2020\)135](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2020)135).
- [95] *Cisek Anna, Schäfer Wolfgang, Szczurek Antoni.* Production of  $\chi_c$  pairs with large rapidity separation in  $k_T$  factorization // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Jun. — Vol. 97. — P. 114018. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.114018>.

- [96] *Islam Rashidul, Kumar Mukesh, Rawoot Vaibhav.*  $k_T$ -factorization approach to the Higgs boson production in  $ZZ^* \rightarrow 4\ell$  channel at the LHC // *The European Physical Journal C.* — 2019. — Feb. — Vol. 79. — P. 181. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6663-1>.
- [97] *Shabelski Yu. M., Shuvaev A. G., Surnin I. V.* Heavy quark production in kt factorization approach at LHC energies // *International Journal of Modern Physics A.* — 2018. — Vol. 33, no. 01. — P. 1850003. — URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X18500033>.
- [98] *Kotikov A. V., Lipatov A.V., Parente G., Zotov N.P.* The contribution of off-shell gluons to the structure functions  $F_2^c$  and  $F_L^c$  and the unintegrated gluon distributions // *The European Physical Journal C.* — 2002. — Vol. 26. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2002-01036-y>.
- [99] *Kotikov A. V., Lipatov A.V., Zotov N.P.* The contribution of off-shell gluons to the longitudinal structure function  $F_L$  // *The European Physical Journal C.* — 2003. — Vol. 27. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2002-01107-1>.
- [100] *Kotikov A. V., Lipatov A.V., Zhang P.* Transverse momentum dependent parton densities in a proton from the generalized DAS approach // *Journal of High Energy Physics.* — 2020. — Feb. — Vol. 2020. — P. 28. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2020\)028](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2020)028).
- [101] *Hentschinski Martin.* Transverse momentum dependent gluon distribution within high energy factorization at next-to-leading order // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Sep. — Vol. 104. — P. 054014. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.054014>.
- [102] *Karpishkov A. V., Nefedov M. A., Saleev V. A.*  $B\bar{B}$  angular correlations at the LHC in the parton Reggeization approach merged with higher-order matrix elements // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Nov. — Vol. 96. — P. 096019. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.096019>.
- [103] *Kimber M. A., Martin A. D., Ryskin M. G.* Unintegrated parton distributions // *Phys. Rev. D.* — 2001. — May. — Vol. 63. — P. 114027. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.114027>.
- [104] *Watt G., Martin A. D., Ryskin M.G.* Unintegrated parton distributions and inclusive jet production at HERA // *The European Physical Journal C.* — 2003. — Oct. — Vol. 31. — P. 73. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2003-01320-4>.
- [105] *Martin A. D., Ryskin M.G., Watt G.* NLO prescription for unintegrated parton distributions // *The European Physical Journal C.* — 2010. — Mar. — Vol. 66. — P. 163. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1242-5>.

- [106] *Abdulov N. A., Bacchetta A., Baranov S. et al.* TMDlib2 and TMDplotter: a platform for 3D hadron structure studies // *Phys. Rev. D.* — 2001. — May. — Vol. 63. — P. 114027. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09508-8>.
- [107] *Krasemann Hartmut.* Jets from  $Q\bar{Q}$  P waves // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields.* — 1979. — Jun. — Vol. 1. — P. 189. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01445410>.
- [108] *Eichten Estia J., Quigg Chris.* Quarkonium wave functions at the origin // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Aug. — Vol. 52. — Pp. 1726–1728. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [109] *Eichten E., Gottfried K., Kinoshita T. et al.* Charmonium: Comparison with experiment // *Phys. Rev. D.* — 1980. — Jan. — Vol. 21. — Pp. 203–233. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.21.203>.
- [110] *Kniehl B. A., Vasin D. V., Saleev V. A.* Charmonium production at high energy in the  $k_T$ -factorization approach // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Apr. — Vol. 73. — P. 074022. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.074022>.
- [111] *Lipatov A. V., Malyshev M. A., Baranov S. P.* Particle event generator: a simple-in-use system PEGASUS version 1.0 // *The European Physical Journal C.* — 2020. — Apr. — Vol. 80. — P. 330. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7898-6>.
- [112] *Byckling E., Kajantie K.* Particle kinematics // *John Wiley and Sons.* — 319 pp.
- [113] *Baranov S. P., Szczurek A.* Inclusive production of  $J/\psi$  meson in proton-proton collisions at BNL RHIC // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Mar. — Vol. 77. — P. 054016. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.054016>.
- [114] *Braaten Eric, Yuan Tzu Chiang.* Gluon fragmentation into heavy quarkonium // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Sep. — Vol. 71. — Pp. 1673–1676. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.1673>.
- [115] *Ma Yan-Qing, Qiu Jian-Wei, Zhang Hong.* Heavy quarkonium fragmentation functions from a heavy quark pair. I.  $S$  wave // *Phys. Rev. D.* — 2014. — May. — Vol. 89. — P. 094029. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.094029>.
- [116] *Baranov S. P., Kopeliovich B. Z.* Fragmentation of charm to charmonium in  $e^+e^-$  and  $pp$  collisions // *The European Physical Journal C.* — 2019. — Mar. — Vol. 79. — P. 241. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6700-0>.
- [117] *Kniehl Bernd A., Kramer Gustav.* Charmonium production via fragmentation at DESY HERA // *Phys. Rev. D.* — 1997. — Nov. — Vol. 56. — Pp. 5820–5833. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.5820>.



- [118] *Braaten Eric, Yuan Tzu Chiang.* Gluon fragmentation into P-wave heavy quarkonium // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Sep. — Vol. 50. — Pp. 3176–3180. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.3176>.
- [119] *Braaten Eric, Chen Yu-Qi.* Dimensional regularization in quarkonium calculations // *Phys. Rev. D.* — 1997. — Mar. — Vol. 55. — Pp. 2693–2707. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.2693>.
- [120] *Saleev V.A., Vasin D.V.* Direct  $J/\psi$  and  $\psi'$  hadroproduction via fragmentation in the collinear parton model and  $k_T$ -factorization approach // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Dec. — Vol. 68. — P. 114013. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.114013>.
- [121] *Baranov S. P.* Pair production of  $J/\psi$  mesons in the  $k_t$ -factorization approach // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Sep. — Vol. 84. — P. 054012. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.054012>.
- [122] *Lipatov A. V., Malyshev M. A., Jung H.* TMD parton shower effects in associated  $\gamma$  + jet production at the LHC // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Aug. — Vol. 100. — P. 034028. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.034028>.
- [123] *Lipatov A. V., Malyshev M. A.* Associated Higgs *boson* + jets production at the LHC and Catani-Ciafaloni-Fiorani-Marchesini gluon dynamics in a proton // *Phys. Rev. D.* — 2021. — May. — Vol. 103. — P. 094021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.094021>.
- [124] *Mekhfi M.* Multiparton processes: An application to the double Drell-Yan mechanism // *Phys. Rev. D.* — 1985. — Nov. — Vol. 32. — Pp. 2371–2379. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.2371>.
- [125] *Paver N., Treleani D.* Multiquark scattering and large-pT jet production in hadronic collisions // *Il Nuovo Cimento A.* — 1982. — Aug. — Vol. 70. — P. 215. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02814035>.
- [126] *ATLAS Collaboration.* Study of the hard double-parton scattering contribution to inclusive four-lepton production in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS detector // *Physics Letters B.* — 2019. — Mar. — Vol. 790. — Pp. 595–614. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319300875>.
- [127] *Snigirev A. M.* Triple parton scattering in collinear approximation of perturbative QCD // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Aug. — Vol. 94. — P. 034026. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.034026>.

- [128] *d'Enterria D., Snigirev A. M.* Triple Parton Scatterings in High-Energy Proton-Proton Collisions // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Mar. — Vol. 118. — P. 122001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.122001>.
- [129] *CMS Collaboration.* Observation of triple  $J/\psi$  meson production in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV. — 2021. — Nov. — URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.05370>.
- [130] *Lepage G.P.* A new algorithm for adaptive multidimensional integration // *Journal of Computational Physic.* — 1978. — Feb. — Vol. 27, no. 2. — P. 192. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999178900049>.
- [131] *Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K. et al.* Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Aug. — Vol. 98. — P. 030001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.
- [132] *LHCb Collaboration.* Observation of  $J/\psi$ -pair production in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // *Physics Letters B.* — 2012. — Jan. — Vol. 707, no. 1. — P. 52. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311014729>.
- [133] *Baranov S. P., Snigirev A. M., Zotov N. P. et al.* Interparticle correlations in the production of  $J/\psi$  pairs in proton-proton collisions // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Feb. — Vol. 87. — P. 034035. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.034035>.
- [134] *Baranov S. P., Lipatov A. V., Zotov N. P.* Production of electroweak gauge bosons in off-shell gluon-gluon fusion // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Jul. — Vol. 78. — P. 014025. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.014025>.
- [135] *Bothmann Enrico, Chahal Gurpreet Singh, Höche Stefan et al.* Event generation with Sherpa 2.2 // *SciPost Phys.* — 2019. — Vol. 7. — P. 034. — URL: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.7.3.034>.
- [136] *Krauss Frank, Kuhn Ralf, Soff Gerhard.* AMEGIC++ 1.0, A Matrix Element Generator In C++ // *Journal of High Energy Physics.* — 2002. — apr. — Vol. 2002, no. 02. — P. 044. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2002/02/044>.
- [137] *Gleisberg Tanju, Höche Stefan.* Comix, a new matrix element generator // *Journal of High Energy Physics.* — 2008. — dec. — Vol. 2008, no. 12. — P. 039. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/12/039>.
- [138] *Cascioli F., Maierhöfer P., Pozzorini S.* Scattering Amplitudes with Open Loops // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Mar. — Vol. 108. — P. 111601. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.111601>.

- [139] *Schumann S., Krauss F.* A parton shower algorithm based on Catani-Seymour dipole factorisation // *Journal of High Energy Physics*. — 2008. — mar. — Vol. 2008, no. 03. — P. 038. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/03/038>.
- [140] *Höche Stefan, Krauss Frank, Schumann Steffen, Siegert Frank.* QCD matrix elements and truncated showers // *Journal of High Energy Physics*. — 2009. — may. — Vol. 2009, no. 05. — P. 053. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/05/053>.
- [141] *Höche Stefan, Krauss Frank, Schönherr Marek, Siegert Frank.* QCD matrix elements + parton showers. The NLO case // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Apr. — Vol. 2013. — P. 27. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2013\)027](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2013)027).
- [142] *Nadolsky Pavel M., Lai Hung-Liang, Cao Qing-Hong et al.* Implications of CTEQ global analysis for collider observables // *Phys. Rev. D*. — 2008. — Jul. — Vol. 78. — P. 013004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.013004>.
- [143] *Hou Tie-Jiun, Dulat Sayipjamal, Gao Jun et al.* CT14 intrinsic charm parton distribution functions from CTEQ-TEA global analysis // *Journal of High Energy Physics*. — 2018. — Feb. — Vol. 2018. — P. 59. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2018\)059](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2018)059).
- [144] *ATLAS Collaboration.* Measurement of differential production cross-sections for a Z boson in association with b-jets in 7 TeV proton-proton collisions with the ATLAS detector. — 2014. — Oct. — Vol. 2014. — P. 141. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2014\)141](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2014)141).
- [145] *Cacciari Matteo, Salam Gavin P., Soyez Gregory.* The anti-kt jet clustering algorithm // *Journal of High Energy Physics*. — 2008. — apr. — Vol. 2008, no. 04. — P. 063. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/04/063>.
- [146] *CMS Collaboration.* Measurement of associated Z + charm production in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV. — 2018. — Apr. — Vol. 78. — P. 287. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5752-x>.
- [147] *Baranov S.P, Martinez A. Bermudez, Jung H. et al.* Discriminating the heavy jet production mechanisms in associated Z + heavy flavor events at the LHC // *The European Physics Journal C*. — 2022. — Feb. — Vol. 82. — P. 157. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10104-7>.
- [148] *Brodsky S.J., Hoyer P., Peterson C., Sakai N.* The intrinsic charm of the proton // *Physics Letters B*. — 1980. — Vol. 93, no. 4. — Pp. 451–455. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380903640>.

- [149] *Pumplin Jon.* Light-cone models for intrinsic charm and bottom // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Jun. — Vol. 73. — P. 114015. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.114015>.
- [150] *Brodsky S.J., Bednyakov V.A., Lykasov G.I. et al.* The physics of heavy quark distributions in hadrons: Collider tests // *Progress in Particle and Nuclear Physics.* — 2017. — Vol. 93. — Pp. 108–142. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641016300746>.
- [151] *Sjöstrand Torbjörn, Ask Stefan, Christiansen Jesper R. et al.* An introduction to PYTHIA 8.2 // *Computer Physics Communications.* — 2015. — Jun. — Vol. 191. — Pp. 159–177. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465515000442>.
- [152] *Harland-Lang L. A., Martin A. D., Motylinski P., Thorne R. S.* Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs // *The European Physical Journal C.* — 2015. — May. — Vol. 75. — P. 204. — URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3397-6>.