ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Емельянова Дмитрия Павловича на тему: «Построение решений краевых задач для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами» по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы.

Диссертация Д.П.Емельянова посвящена исследованию аналитичности решений краевых задач для эллиптического уравнения вида

$$u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), \ (x, y) \in \Omega \equiv (0, 1) \times (0, b), \quad (1)$$

с аналитическими коэффициентами и правой частью с вырождением на границе области (при $y = 0$). Точнее сказать, исследуются вопросы неаналитической зависимости решений краевых задач в окрестности отрезка вырождения $y = 0$, именно, вопросы описания особенностей решения вблизи отрезка вырождения. Актуальность темы обусловлена тем, что, для уравнений с вырождением, в основном, исследовалась задача Коши (С.В.Ковалевская, А.И.Янушаускас). Краевые задачи исследовались недостаточно. Отметим работы В.Н.Врагова, где изучалась краевая задача для уравнения (1) с $m = 1, c(0) \geq 1$ и в области с гладкой границей.

Научный руководитель диссертанта И.С.Ломов предложил метод «спектрального выделения особенностей», с помощью которого была рассмотрена одна из краевых задач для уравнения (1) при $m = 2$ и $c(y) = 0$. Вполне естественной и актуальной стала задача обобщить данные результаты на случай иных краевых задач и вырождений. что и было сделано диссертантом. Именно, в своей диссертационной работе Д. П. Емельянов, используя модифицированный метод «спектрального выделения особенностей», получил результаты для произвольных степеней вырождения $m \in [1, 2]$, для случая $c(y) \neq 0$, причем характер неаналитической зависимости решения от y при $y \to 0$ выписывается явно. При этом результат И.С.Ломова вошел как частный случай.

Краткая характеристика основного содержания работы и новизна полученных результатов.

Диссертационное исследование, изложенное на 150 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 93 наименований.

В *главе 1* изучается краевая задача для уравнения (1) с граничными условиями

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = 0, \ |u(x, 0)| < +\infty$$

(так называемая задача E в терминологии М.В.Келдыша) при условии, что степень вырождения уравнения (1) $m = 2$.

При условии, что коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются аналитическими функциями в комплексном круге $U = \{y \in \mathbb{C} : |y| < R\} \supset [0, b]$ при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ и ограничениях $a(y) \geq 0, c(y) \geq 0, c(0) = 0$ получена явная формула решения задачи E в виде ряда:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\eta_k(y) + (y/b)^{r_k}\varphi_k(y) + \ln\frac{y}{b}\chi_k(y)\Big)\sin(\pi k x), \ (x, y) \in \overline{\Omega},$$

где функции $\eta_k(y), \chi_k(y), \varphi_k(y)$ аналитические в области U и явно выписываются, константы r_k также выписываются явно. Данный результат обобщает указанный выше результат И.С.Ломова (получен для более широкого класса уравнений, кроме того, нет ограничения $r_k \notin \mathbb{N}$), что потребовало существенного изменения техники доказательства.

В *главе 2* изучается краевая задача E, а также краевая задача с граничными условиями

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = u(x, 0) = 0$$

(так называемая задача D) для уравнения (1) при условии, что степень вырождения уравнения (1) $m = 1$.

Задача D рассматривается в случае $c(0) < 1$, Задача E рассматривается в случае $c(0) \geq 1$. Для этих задач диссертантом получены явные формулы решения рассмотренных задач.

I. Если $c(0) \geq 1$, то решение краевой задачи E имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y)\sin(\pi k x), \ (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

II. Если $c(0) < 1, \ c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$, то решение краевой задачи D

имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k(y)+(y/b)^{k_1}\varphi_k(y)\right)\sin(\pi kx),\ k_1\equiv 1-c(0),\ (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

III. Если $c(0)=0,-1,-2,\ldots$, то решение краевой задачи D имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k(y)+\ln\frac{y}{b}\chi_k(y)\right)\sin(\pi kx),\ (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

Здесь следует отметить, что случай I повторяет результат В.Н. Врагова об аналитичности решения, но, в отличии от упомянутой работы, диссертантом получен явный вид функций $\eta_k(y)$. В случаях II и III результаты диссертанта не имеют аналогов.

В *главе 3* изучается краевая задача D, если степень вырождения уравнения (1) $m\in(1,2)$ и $c(0)=0$. Для такой задачи получены явные представления решения.

I. Если $m=p/q\in\mathbb{Q}$, то решение краевой задачи D имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_{k,0}(y)+\sum_{n=1}^{q-1}y^{n/q}\eta_{k,n}(y)+\ln\frac{y}{b}\chi_k(y)\right)\sin(\pi kx),\ (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

II. Если m не является рациональным числом, то решение краевой задачи D имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi_{k,0}(y)+\sum_{n=1}^{+\infty}y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y)\right)\sin(\pi kx),\ (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

Функции $\eta_{k,n}(y),\psi_{k,n}(y),\chi_k(y)$ являются аналитическими в U.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту.

Все выносимые на защиты положения сформулированы в виде теорем, каждая из которых снабжена строгим и полным математическим доказательством. По теме диссертации соискателем опубликовано 10 работ. Основные результаты диссертации изложены в 4 научных работах соискателя, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI и рекомендованных для защиты диссертаций в диссертационном совете МГУ. Достоверность полученных Д.П. Емельяновым результатов также подкрепляется многочисленными выступлениями на научных конференциях и научных семинарах.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им.

М.В.Ломоносова, Институте математики СО РАН им. С.Л.Соболева, Новосибирском государственном университете.

Замечания по диссертации.

1. В диссертации в явном виде строятся решения рассматриваемых краевых задач, но ничего не сказано об их единственности. Диссертант ссылается на результаты М.В. Келдыша, однако к рассматриваемым задачам они не применимы в силу наличия углов у области Ω.

2. В главе 3 в определении класса функций $\mathcal{A}_\gamma$ для комплекснозначной функции $\chi(y)$ используется запись $\chi(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \chi_n y^{n+\gamma}$ с нецелым γ. Такое вариант вызывает ненужные вопросы, связанные с выбором ветви у многозначной степенной функции при изменении n. Лучше ограничиться вариантом $\chi(y) = y^\gamma \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \chi_n y^n$ как это и написано на стр. 118.

3. В тексте использовано очень много различных обозначений, включая, в том числе, экзотические (см. например. стр. 88), что порой затрудняет чтение текста.

4. В качестве пожелания хотелось бы предложить автору в дальнейшем изучить задачи с другими степенями вырождения, а также исследовать другие случаи значений $c(0)$ при $m \neq 1$.

Отмечу, что указанные замечания никак не умаляют достоинств работы.

Общая оценка диссертационной работы.

Считаю, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (по физико-математическим наукам), а именно следующим её направлениям: начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, аналитическая теория дифференциальных уравнений, асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем. Диссертация отвечает критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, соискатель Емельянов Дмитрий Павлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Камынин Виталий Леонидович

Контактные данные:
тел. +7 916 614 47 81, e-mail: vlkamynin@mephi.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения».

Адрес организации:
115409, Москва, Каширское шоссе, 31,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Институт общей профессиональной подготовки, кафедра высшей математики
Тел. 495 788-56-99, e-mail: info@mephi.ru

Подпись удостоверяю
Заместитель начальника отдела
документационного обеспечния
НИЯУ МИФИ

В. М. Самородова