

**ОТЗЫВ официального оппонента  
на диссертацию на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
Давыдова Александра Вадимовича  
на тему: «Спектральный анализ интегродифференциальных операторов,  
возникающих в теории вязкоупругости»  
по специальности 1.1.1 – «Вещественный, комплексный и  
функциональный анализ»**

Диссертационная работа Давыдова Александра Вадимовича «Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в теории вязкоупругости» посвящена исследованию вольтерровых интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. Исследование указанных уравнений автором осуществляется с помощью спектрального анализа оператор-функций, которые являются символами исходных уравнений. Указанные уравнения появляются во многих задачах современной механики и теплофизики. Интегро-дифференциальное уравнение Гуртина-Пипкина, возникающее в качестве модели теплопроводности с конечной скоростью распространения тепла, имеет приложения в теории вязкоупругости, кинетической теории газов и других разделах механики и физики. С помощью таких уравнений моделируются, например, колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа в рамках поршневой модели. Отметим, что исследованию вольтерровых интегродифференциальных посвящена обширная литература. Для указанных уравнений изучались вопросы их разрешимости (см. работы В.В. Власова, Н.А. Раутиан и соавторов, Н.Д. Копачевского, Д.А. Закоры, М. Fabrizio) рассматривались задачи управления и обратные задачи (см. работы С.А. Авдонин, L. Pandolfi, С.А. Иванова, J.E. Munoz Rivera, С.М. Dafermos, М. Fabrizio), проводился спектральный анализ (см. работы В.В. Власова, Н.А. Раутиан, С.А. Иванова, Н.Д. Копачевского и Д.А. Закоры). Таким образом, диссертационное исследование посвящено современной и актуальной тематике, имеющей приложения в задачах современной механики.

Рассмотрим подробнее основное содержание диссертации. Диссертация общим объемом 121 стр. состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении даётся общая характеристика работы, постановка задачи, а также проводится обзор исследований, проводившихся ранее по теме диссертации.

Первая глава диссертации посвящена уравнению колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа. Данное уравнение представляет собой уравнение Гуртина-Пипкина, возмущенное относительно компактным оператором.

В первом параграфе первой главы поставлена задача Коши для абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, вводятся необходимые для дальнейшего исследования определения и обозначения, а также приводятся используемые в дальнейшем результаты из теории пространств Соболева и Харди.

Во втором параграфе первой главы приводится уравнение колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа из теории вязкоупругих сред. Данное уравнение записывается в операторном виде при условии шарнирного закрепления края пластины. Автор исследует конкретный вид дифференциальных операторов с граничными условиями, а также приводит важные свойства данных операторов, служащие основой для исследования уравнения в операторном виде в дальнейшем.

В третьем параграфе первой главы приводятся результаты, касающиеся корректной разрешимости задачи Коши, ассоциируемой с данным уравнением в пространствах Соболева. С помощью анализа резольвенты символа уравнения было найдено решение уравнения в слабом смысле в пространствах Соболева с экспоненциальным весом в зависимости от начальных данных. Кроме того, получено условие асимптотической устойчивости решений, а также оценка снизу критической скорости потока, при которых колебания перестают быть устойчивыми в зависимости от конкретных физических параметров изначальной задачи.

В четвертом параграфе первой главы изучается асимптотика спектра символа уравнения. Используя операторный аналог теоремы Руше, автор находит асимптотику спектра символа уравнения и показывает связь с асимптотикой спектра символа немодифицированного уравнения Гуртина-Пипкина.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию уравнения Гуртина-Пипкина. В данной главе представлены следующие результаты исследования: вычисление асимптотики невещественного спектра символа данного уравнения в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стильтьеса, исследования разрешимости данного уравнения в шкале пространств, а также доказательство возможности наличия бесконечного невещественного спектра при учете трения Кельвина-Фойгхта.

В первом параграфе второй главы автор определяет задачу Коши для уравнения Гуртина-Пипкина, доказывает связь данного уравнения с уравнением колебания вязкоупругой пластины, описанной в первой главе, вводит необходимые для дальнейшего изложения определения и обозначения.

Во втором параграфе второй главы исследуется асимптотика невещественного спектра символа уравнения в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стильтьеса. Данные ядра используются во многих моделях теории вязкоупругости и теории распространения тепла в средах с памятью. В работе рассмотрен класс ядер релаксации с полиномиальным стремлением к бесконечности в нуле и экспоненциальным убыванием на бесконечности. Автор приводит асимптотику невещественного спектра символа уравнения Гуртина-Пипкина для ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стильтьеса. Представленные в этом параграфе теоремы являются существенным развитием результатов, установленных А.Э. Ерёменко и С.А. Иванова.

В третьем параграфе второй главы приводятся результаты о разрешимости в шкале пространств уравнения Гуртина-Пипкина. Автор определяет и приводит основные свойства шкалы пространств, связанных с

неограниченным оператором уравнения. Далее с помощью анализа резольвенты символа уравнения автором найдено сильное решение уравнения для невесовых пространств Соболева. Для ядер релаксации, представляющих собой бесконечную сумму убывающих экспонент с полиномиальными коэффициентами, существенно ослабляются требования, предъявляемые к начальным данным для получения сильного решения. Кроме того, установлена теорема для нахождения слабого решения уравнения. На основании трех представленных выше результатов автор доказывает следствия, посвященные корректной разрешимости в шкале пространств уравнения Гуртина-Пипкина.

В четвертом параграфе второй главы рассмотрено уравнение Гуртина-Пипкина с внутренним трением, или трением Кельвина-Фойгхта. Проведен анализ не вещественного спектра символа данного уравнения — рассмотрены случаи, когда эта часть конечна и когда спектр содержит счётное число не вещественных собственных значений, приведены конкретные примеры ядер релаксации для данного оператора, когда не вещественный спектр бесконечен. Выполненные исследования позволяют констатировать, что ядро релаксации в данной задаче можно изменить так, что не вещественный спектр будет бесконечен, и при этом измененное ядро будет сколь угодно близко к изначальному в пространстве  $L_1$ . Данный результат может служить ответом на поставленный в работе А.Э. Ерёменко и С.А. Иванова вопрос о конечности не вещественной части спектра.

При работе над диссертацией автор продемонстрировал уверенное владение методами спектральной теории, комплексного анализа. Тематика диссертации является актуальной и тесно связана с приложениями.

Результаты диссертации обсуждались на ряде научно-исследовательских семинаров, а также излагались на международных конференциях. Данные результаты изложены в 5 научных статьях, опубликованных в рецензируемых журналах, входящих в базы данных Scopus и Web of Science.

В тексте диссертации имеется незначительное количество опечаток и неточностей, например, при оформлении списка литературы. Кроме того, следует дать определение понятия сильной разрешимости вектор-функций, используемое для определения пространства  $L_{2,\gamma}([0, +\infty), \mathbb{H})$ .

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Давыдов Александр Вадимович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,  
главный научный сотрудник  
лаборатории механики управляемых систем  
ФГУН «Институт проблем механики имени А.Ю.Ишлинского Российской академии наук»

Шамаев Алексей Станиславович

*подпись*

Дата подписания

Контактные данные:

тел.+7 (495) 433-80-33, e-mail: [sham@rambler.ru](mailto:sham@rambler.ru)

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Адрес места работы:

119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

ФГУН «Институт проблем механики имени А.Ю.Ишлинского Российской академии наук»

Тел: +7(495) 434-00-17; e-mail: ipm@ipmnet.ru

Подпись сотрудника

ФГУН «Институт проблем механики имени А.Ю.Ишлинского Российской академии наук»

А.С. Шамаева удостоверяю:

руководитель/кадровый работник

И.О. Фамилия

дата