Отзыв официального оппонента на диссертацию Латы Александра Николаевича на тему «Производные структуры унарных алгебр», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)

Производные структуры как универсальных, так и классических алгебр — один из инструментов исследования строения и классификации этих алгебр. К наиболее распространенным производным структурам алгебр относятся их решетки подалгебр, конгруэнций, топологий, группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов и другие. Диссертация А.Н. Латы посвящена изучению решеток подалгебр (подалгебр) и решеток конгруэнций (конгруэнций) унарных алгебр и М–алгебр $\langle A, d, f\rangle$. М–алгеброй $\langle A, d, f\rangle$ автор называет унарную алгебру $\langle A, f\rangle$, с дополнительной тернарной операцией $d(x, y, z)$, определенной по одному из правил (1)–(4). Причем унарная операция f перестановочна с тернарной операцией d, т. е. $f\big(d(x, y, z)\big) = d(f(x), f(y), f(z))$.

Пусть $\langle A,\ f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x, y) = min\, M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \le k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \qquad (1)$$

$$s(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \qquad (2)$$

$$w(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) > k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \qquad (3)$$

$$m(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \ge k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \qquad (4)$$

Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра является полигоном над полугруппой. И, наоборот, всякий полигон над полугруппой является унарной алгеброй. Возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода (автомата Мура). Также унарную алгебру можно представить с помощью ориентированного графа. Унарные алгебры используются при изучении других алгебраических систем. Г. Гретцер и Е.Т. Шмидт доказали, что для любой универсальной алгебры A существует унарная алгебра B такая, что $\operatorname{Con} A \cong \operatorname{Con} B$. В отличие от произвольных универсальных алгебр, где конгруэнции подалгебры могут не продолжаться до конгруэнций алгебры, конгруэнции подалгебры унарной алгебры всегда продолжаются до конгруэнций унарной алгебры, и, вообще, решетка конгруэнций подалгебры унарной алгебры изоморфно вкладывается в решетку конгруэнций унарной алгебры. В.К. Карташов показал, что для произвольных коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, проблема описания решетки конгруэнций, обладающей заданным свойством, является гораздо более сложной. Д. Хобби и Р. Маккензи в своей монографии отмечают, что в теории конгруэнций часто удобнее работать с унарными алгебрами. Поскольку основные операции алгебры A определяют множество $\mathrm{Pol}_1 A$ всех унарных операций клона $\mathrm{Pol}\, A$, а этот моноид определяет решетку конгруэнции алгебры A.

В ходе исследования для доказательства утверждений А.Н. Лата использовал методы универсальной алгебры, теории решеток и теории графов.

В диссертации получены следующие основные результаты:

Описаны коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М–алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

Описаны М–алгебры $\langle A, d, f\rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками.

Описаны конгруэнц-когерентные унары, а также конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентные М–алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры.

Соискатель имеет 11 опубликованных работ, в том числе по теме диссертации 11 работ, из них 3 статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»). Работ с соавторами нет.

Работа неоднократно апробирована на конференциях и научных семинарах.

Диссертация А.Н. Латы состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 78 страниц. В списке литературы 122 наименования.

Первая глава диссертации является вводной и содержит основные определения, обозначения и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена изучению решеток конгруэнций М–алгебр $\langle A, d, f\rangle$. В разделе 2.1 приведено описание строения коатомов в решетках конгруэнций данных алгебр. В разделе 2.2 приводится описание М–алгебр $\langle A, d, f\rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с относительными дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками. Дается описание дополнений и копсевдодополнений в решетках конгруэнций рассматриваемых алгебр.

Третья глава диссертации посвящена изучению конгруэнц–когерентности алгебр и ее модификациям. В разделе 3.1 дается определение конгруэнц–когерентности алгебры, изложен краткий обзор вопроса. В разделе 3.2 приводятся определения локальной и слабой когерентности алгебры. Доказываются вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов работы. В разделе 3.3 доказываются основные результаты исследования конгруэнц–когерентности М–алгебр $\langle A, d, f\rangle$.

Четвертая глава диссертации посвящена алгебрам без собственных подалгебр. Дается краткий обзор результатов. В разделе 4.1 приводятся эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры. В разделе 4.2 описывается алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны. В разделе 4.3 вводится определение изотопии унарных алгебр. Получено полное описание конечных унаров, изотопных унару без собственных подунаров.

В заключении подводится итог диссертационного исследования и перечисляются полученные результаты. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют корректные формулировки и обоснованы строгими доказательствами.

К сожалению, диссертационная работа не лишена недостатков, к которым можно отнести следующие:

В доказательствах лемм 2.1.3, 2.1.8 и теоремы 2.1.9 ссылаться на лемму 2.1.2 нельзя поскольку лемма 2.1.2 в общем случае неверна. Имеется небольшое число незначительных опечаток.

Высказанное замечание о лемме 2.1.2, однако не является критическим. Ссылки на лемму 2.1.2 в доказательствах леммы 2.1.8 и теоремы 2.1.9, когда речь идет о неодноэлементном связном унаре, имеющем одноэлементный подунар, можно заменить ссылкой на лемму 1.3.8, а в доказательстве леммы 2.1.3, когда речь идет о единственности коатома решетки Con $\langle A, d, f\rangle$, можно сослаться на определение конгруэнции σ и лемму 1.3.4.

Указанные недостатки не снижают значимость полученных автором результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертации. Считаю, что диссертация представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, исследование вносит вклад в развитие универсальной алгебры.

Полученные диссертантом результаты в первую очередь имеют теоретическую значимость и могут быть использованы для дальнейшего изучения унарных алгебр (полигонов над полугруппами) и алгебр с операторами. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы. Считаю, что диссертационная работа Латы А.Н. «Производные структуры унарных алгебр» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени

М.В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

Доктор физико-математических наук, профессор А.А. Туганбаев

Подпись Туганбаева Аскара Акановича удостоверяю