

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

**Думанский Станислав Александрович**

**Решение задач устойчивости элементов из сплавов с памятью  
формы**

Специальность 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023



## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Сплавы с памятью формы (СПФ) относятся к классу функциональных материалов, демонстрирующих сильную связь между термомеханическим поведением и внешними как механическими, так и немеханическими воздействиями. Тела, изготовленные из данных материалов, в определенных температурных диапазонах проявляют термомеханическую реакцию на сообщение им и отведение от них тепла. Также некоторые СПФ при температурах, не превосходящих определяемых составом сплава критических значений, проявляют ферромагнитные свойства. В данной работе рассматриваются элементы, изготовленные из термомеханически активируемых СПФ. Уникальное макромеханическое поведение данных материалов, включающее эффект памяти формы, сверхупругость, мартенситную неупругость, накопление деформаций прямого перехода и перекрестное упрочнение, является следствием твердотельных бездиффузионных кристаллографически обратимых термоупругих мартенситных переходов, открытых Г.В. Курдюмовым и Л.Г. Хандросом в 1948 году.

Широкое распространение СПФ начали получать после того, как в 1961 году наличие эффекта памяти формы было установлено у интерметаллидов, близких по составу к равноатомному никелиду титана, который на настоящий момент, является одним из наиболее широко применяемых термически активируемых СПФ. В простейшем случае никелид титана или нитинол может находиться в двух фазовых состояниях: аустенитном (высокотемпературном) и мартенситном (низкотемпературном), которым соответствуют типы строения кристаллической решетки  $B2$  и  $B19'$ , соответственно. Фазовые переходы из аустенитного состояния в мартенситное называются *прямыми*, а из мартенситного в аустенитное *обратными*. С термодинамической точки зрения прямые и обратные фазовые переходы относятся к *фазовым переходам первого рода*, поскольку они сопровождаются выделением и поглощением латентного тепла, соответственно. Практически все термомеханические свойства СПФ различны для мартенситного и аустенитного состояний. В частности, значения модуля Юнга никелида титана в мартенситном  $E_M$  и аустенитном  $E_A$  фазовых состояниях равны 28 и 84 [ГПа], соответственно. Благодаря уникальному набору термомеханических характеристик, высокому сопротивлению износу, хорошей коррозионной стойкости и биосовместимости, никелид титана и сплавы на его основе находят свое применение в аэрокосмических, медицинских, железнодорожных, автомобильных и строительных приложениях.

Вопросам моделирования термомеханического поведения СПФ посвящены работы Мовчана А.А., Рогового А.А., Волкова А.Е., Гаврюшина С. С., Мишустина И.В., Show J.A., Kyriakides S., Lagoudas D.C., LExcellent C., Auricchio F., Ziolkowski A.

Экспериментальные и теоретические исследования явления потери устойчивости элементов из сплавов с памятью формы проводились Малыгиным Г.

А., Нуштаевым Д.В., Шкутиным Л.И., Хусаиновым М.А., Мовчаном А.А., Сильченко Л.Г., Janez K., Jiang D., Michailidis P.A., Nemat-Nasser S., Amini M.R., Rahman M.A., Tani J., Richter F., Kastner E., Eggeler G., Tang Z., Urushiyama Y., Choi J.Y., Isaacs J.B., Lischer D.W. Подавляющее большинство исследований в данной области посвящено анализу устойчивости для активных процессов нагружения в режимах сверхупругости и мартенситной неупругости, при помощи методов аналогичных тем, которые применяются для анализа устойчивости упруго-пластических тел. Результаты экспериментальных исследований, проведенных Мовчаном А.А., Сильченко Л.Г. и Сильченко А.Л. показывают, что причиной потери устойчивости элементов из СПФ могут являться термоупругие мартенситные фазовые переходы, происходящие при постоянных напряжениях. Авторами было установлено, что упругий анализ устойчивости элементов из СПФ, проводимый с использованием наименьших, соответствующих полностью мартенситному фазовому состоянию значений упругих констант, для рассматриваемых процессов термомеханического нагружения дает кратно завышенные значения критических нагрузок. Первые попытки дать теоретическое объяснение наблюдаемого несоответствия были предприняты в работах Мовчана А.А. и Сильченко Л.Г., в которых применялись однократно связанная постановка задачи устойчивости и актуальные на тот момент модели термомеханического деформирования СПФ.

Разработка методов моделирования потери устойчивости элементов из СПФ, вызванной фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных напряжений, которые учитывают дважды термомеханически связанное поведение СПФ и взаимное влияние между различными механизмами нелинейного деформирования, характерное для данных материалов, а также количественно правильно описывают чрезвычайно низкое сопротивление такому типу потери устойчивости, является актуальной проблемой.

**Цель** данной работы заключается в получении аналитических и численно-аналитических решений задач устойчивости стойки Шенли на стержнях из никелида титана, стержня и пластины из никелида титана при фазовых переходах, происходящих под действием постоянных нагрузок, учитывающих особенности нелинейного деформирования и дважды термомеханически связанного поведения СПФ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Определить особенности термомеханического поведения СПФ, оказывающие наибольшее влияние на процесс потери устойчивости элементов из данных материалов в рассматриваемых процессах, и выбрать модели термомеханического деформирования, способные корректно описывать данные явления.
2. Сформулировать постановки задачи устойчивости элементов из СПФ во время фазовых переходов, происходящих под действием постоянных нагрузок, учитывающих наличие внутренних, описываемых в рамках

- определяющих соотношений, и внешних, определяемых граничными условиями, связей, в рамках которых можно получить аналитические и численно-аналитические решения данной задачи.
3. Провести исследование потери устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ, вызванной прямым и обратным фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепций фиксированной (ФН) и варьированной (ВН) внешней нагрузки.
  4. Выполнить анализ устойчивости стержня из СПФ при прямом и обратном фазовых переходах, происходящих под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепций ФН и ВН.
  5. Провести исследование устойчивости прямоугольной пластины из СПФ при прямом фазовом переходе, происходящем под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепции ВН.

### **Научная новизна**

В существующих работах, посвященных исследованию потери устойчивости элементов из СПФ, вызванной фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных нагрузок, используются модели нелинейного однократно связанного деформирования СПФ, которые не учитывают взаимного влияния между процессами накопления неупругих деформаций, обусловленных фазовыми и структурными механизмами. К настоящему моменту Мовчаном А.А. предложен ряд моделей объединенного деформирования СПФ, которые позволяют описывать как эффекты двойной термомеханической связанности, обусловленные выделением или поглощением латентного тепла и диссипацией энергии в результате упругого, фазового и структурного деформирования, так и взаимное влияние процессов деформирования по фазовым и структурным механизмам.

В рамках данной работы:

- Впервые выполнен анализ устойчивости элементов из СПФ с использованием *объединенных моделей фазового и структурного деформирования в дважды термомеханически связанной постановке для концепций фиксированной нагрузки (ФН) и варьированной нагрузки (ВН)*.
- Предложена модификация объединенной модели фазового и структурного деформирования СПФ, в рамках которой, в отличие от прототипа, приращение деформаций СПФ за счет фазовых механизмов зависит от девиатора тензора напряжений, а не от девиатора тензора активных напряжений.
- Впервые установлено, что для рассматриваемых моделей деформирования СПФ, во время фазовых переходов, вызванных монотонным охлаждением или нагревом и происходящих при постоянных напряжениях, структурное деформирование не имеет места.

- Дано теоретическое объяснение эффекта зависимости величин критических нагрузок от способа предварительной подготовки элемента в случае потери устойчивости при обратном фазовом переходе, происходящем под действием фиксированных напряжений.

### **Практическая значимость**

Полученные результаты могут применяться для анализа устойчивости элементов из СПФ, претерпевающих прямые и обратные фазовые переходы, происходящие при мягком нагружении. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-01-00216 А и 20-01-00240 А).

### **Методология и методы исследования**

Определяющие соотношения формулируются в рамках феноменологического подхода, основанного на применении математического аппарата механики деформируемого твердого тела. При постановке задач устойчивости в малом применяется статический метод Эйлера. Для получения решений поставленных задач используются аналитические и численно-аналитические методы, которые задействуют аппарат математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Вычислительные алгоритмы реализованы в виде программ, написанных на языке C++. Для построения графиков используется библиотека Matplotlib языка программирования Python.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Установлено, что термомеханически связанным постановкам соответствуют существенно меньшие значения критических параметров по сравнению с несвязанной постановкой, причем решения, полученные в рамках дважды связанной постановки и концепции ФН превосходят аналогичные значения, найденные для однократно связанной постановки и концепции ВН, соответственно.
2. Доказано, что при потере устойчивости, вызванной прямым фазовым переходом, дополнительное структурное деформирование не имеет места.
3. Установлено, что при потере устойчивости, вызванной обратным фазовым переходом, критическая нагрузка уменьшается с ростом абсолютных величин фазово-структурных деформаций, накопленных перед началом данного перехода.
4. Установлено, что с увеличением гибкости элемента, которая может выражаться в росте длины стержня или уменьшении толщины пластины, при фиксированных значениях остальных геометрических размеров влияние дополнительного фазового перехода на процесс потери устойчивости существенно снижается.

**Достоверность** теоретически полученных результатов подтверждается использованием классического математического аппарата механики деформируемых твердых тел, теорий упругости и пластичности, согласованностью с

выводами, полученными другими авторами, и качественным соответствием явлениям, наблюдаемым в экспериментах.

### **Апробация работы**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных ”Ломоносов”, МГУ, г. Москва, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 и 2021 гг.
- Всероссийской научной конференции ”Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред” им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, ИПРИМ РАН, г. Москва, 2017, 2018, 2019 и 2021 гг.
- Международной конференции ”Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”, ИМАШ РАН, г. Москва, 2018 г.
- Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 2019 г.
- Международном форуме ”Ключевые тренды в композитах: наука и технологии”, МГТУ, г. Москва, 2019 г.
- Международной инновационной конференции молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС, ИМАШ РАН, г. Москва, 2019 г.
- Международной научно-технической конференции ”Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении”, г. Севастополь, 2021 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 29 мая 2023 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 5 июня 2023 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 5 июня 2023 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 7 июня 2023 г.
- Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, г. Санкт-Петербург, 22 августа 2023 г.

### **Личный вклад**

В совместных работах А. А. Мовчану принадлежат постановки задач и общее научное руководство. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены непосредственно автором.

## Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 7 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus и RSCI, 3 опубликованы в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Scopus, 1 в прочих изданиях.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы, посвященной изучаемой проблеме, формулируются цели, излагаются научная новизна и практическая значимость представляемых результатов.

Первая глава посвящена краткому описанию структуры равноатомного никелида титана, феноменологии уникальных процессов нелинейного термомеханического деформирования тел, изготовленных из этого материала, и основных функциональных свойств СПФ.

В разделе 1.1. на различных масштабных уровнях рассматриваются твердотельные фазовые переходы и структурные превращения, которые являются причиной уникального поведения, демонстрируемого телами из СПФ.

Раздел 1.2. содержит описание процессов термомеханического деформирования элементов из нитинола, строящееся на результатах экспериментальных данных и являющееся основой для формулировки моделей нелинейного деформирования СПФ, а также определения материальных функций и констант, требуемых при их идентификации.

Заключительный раздел 1.3. посвящен краткому обзору свойств СПФ, играющих определяющую роль при разработке приложений, в которых используются функциональные элементы, изготовленные из материалов данного класса.

Вторая глава посвящена формулировке феноменологической системы определяющих соотношений для СПФ, идентификации значений материальных функций и констант, используемых при проведении расчетов, и решению модельных задач.

В разделе 2.1. приводятся гипотезы, используемые при построении модели нелинейного термомеханического деформирования СПФ, которые заключаются в следующем:

1. Элементы из поликристаллических СПФ на макроуровне являются однородными деформируемыми твердыми телами, для которых справедлива гипотеза сплошности.
2. Состояние представительного объема СПФ можно описать при помощи конечного набора внутренних параметров состояния, которые в каждый момент времени удовлетворяют термомеханически связанной системе определяющих уравнений и термодинамическим ограничениям.

3. Процессы, включающие фазовые переходы и структурные превращения, являются *равновесными* и *термодинамически необратимыми*.
4. Зависимость свойств СПФ от времени, в рассматриваемом диапазоне скоростей деформирования, не проявляется.
5. Существует односвязная область в пространстве напряжений с границей, зависящей от актуального состояния материала, внутри которой эволюцией свойств СПФ из-за изменений структуры, вызванных накоплением необратимых деформаций и/или повреждений, можно пренебречь.

**Раздел 2.2.** посвящен формулировке дважды термомеханически связанной системы определяющих соотношений для СПФ, основанной на моделях предложенных А.А. Мовчаном.

Для моделирования линейного деформирования СПФ используются классические уравнения термоупругости, в которых модули упругости и коэффициенты теплового расширения предполагаются материальными функциями, зависящими от объемной доли мартенситной фазы.

Неупругое, кристаллографически обратимое, деформирование описывается при помощи тензора фазово-структурных деформаций. Поскольку данный тип деформирования демонстрирует существенную зависимость от истории термомеханического нагружения, соотношения, описывающие эволюцию компонент тензора фазово-структурных деформаций, должны включать дифференциальные, в общем случае неинтегрируемые, или интегральные зависимости. Используемые в данной работе определяющие соотношения для приращений фазово-структурных деформаций, происходящих по структурным и фазовым механизмам, являются аналогами инкрементальных уравнений теории пластического течения и дифференциальных соотношений теории вязкоупругости, соответственно.

Эволюция полных деформаций, происходящая за счет фазовых механизмов, описывается уравнениями<sup>1</sup>:

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon^0 dq \delta_{ij} + d\varepsilon_{ij}^{ph'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}(q, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{phst'}) dq \quad (1)$$

$$\omega_{ij}^f = \frac{3}{2} \rho_D^f(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} [1 - qf(q)] \varphi_f(\sigma_i, \mu_\sigma) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad dq > 0 \quad (2)$$

$$\omega_{ij}^r = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}, \quad dq < 0 \quad (3)$$

$q$  – объемная доля мартенситной фазы;  $\varepsilon^0$  – деформация, определяющая объемный эффект реакции, которым сопровождаются мартенситные фазовые переходы;  $\mu_\sigma$  – параметр вида напряженного состояния;  $\varphi_f$  – материальная функция,

<sup>1</sup> Индексы  $f$  и  $r$  относятся к прямому и обратному фазовым переходам, соответственно.

аппроксимирующая диаграмму прямого перехода;  $f$  – материальная функция, определяющая отношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов.

Приращения полных деформаций, связанные с структурными механизмами, удовлетворяют соотношениями:

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma'_{ij} - a_{ij} \quad (4)$$

$$f_s = s_i - s^* = 0, \quad s_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (5)$$

$d\lambda \geq 0$  – бесконечно малый скалярный множитель;  $s_{ij}$  – тензор активных напряжений;  $s^*$  – радиус поверхности упрочнения;  $a_{ij}$  – тензор остаточных напряжений или трансляции.

Рассматриваются три *Модели* эволюции радиуса поверхности нагружения и тензора трансляции:

1.

$$\rho_D^m(\mu_\sigma) q \varphi_m(\sigma^*, \mu_\sigma) = \int d\chi, \quad d\chi = \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'} \quad (6)$$

$$da_{ij} \equiv 0 \quad (7)$$

2.

$$q\varphi(s^*, \mu_s) = \max \left\{ \frac{\varepsilon_i^{phst}}{\rho_D^m(\mu_\varepsilon)} \right\} \quad (8)$$

$$q da_{ij} = g(\mu_s) d\varepsilon_{ij}^{st} \quad (9)$$

3.

$$\rho_D^m(\mu_s) \varphi(s^*, \mu_s) = \max \{ \varepsilon_i^M \} \quad (10)$$

$$da_{ij} = g(\mu_s) d\varepsilon_{ij}^M \quad (11)$$

$\varphi_m$  – материальная функция, аппроксимирующая диаграмму мартенситной неупругости;  $\varphi$  – материальная функция, определяющая радиус поверхности нагружения в моделях с комбинированным упрочнением;  $\varepsilon_{ij}^M = \varepsilon_{ij}^{phst'}/q$  – девиатор собственной фазово-структурной деформации мартенсита;  $g$  – функция кинематического упрочнения.

Объемная доля мартенситной фазы определяется непрерывно дифференцируемыми соотношениями:

$$q = \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi t)] \quad (12)$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^f \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S}, \quad dq > 0 \quad (13)$$

$$t = 1 - \frac{T - A_s^\sigma}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^r \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S}, \quad dq < 0 \quad (14)$$

$$Z(\sigma_{ij}) = \frac{C}{2} \sigma_{kk}^2 + \frac{D}{2} \sigma_i^2, \quad C = \frac{1}{3} \frac{K_A - K_M}{K_A K_M}, \quad D = \frac{1}{3} \frac{G_A - G_M}{G_A G_M}$$

$M_s^\sigma$  и  $A_s^\sigma$  – температуры точных верхней и нижней граней начала прямого и обратного фазовых переходов, соответственно, происходящих под действием напряжений  $\sigma_{ij}$ ;  $\Delta S$  – изменение объемной плотности энтропии при осуществлении полного прямого или обратного фазового переходов;  $K_A$  и  $K_M$  – значения объемного модуля упругости в аустенитном и мартенситном фазовых состояниях;  $G_A$  и  $G_M$  – значения модуля сдвига в аустенитном и мартенситном фазовых состояниях.

Термодинамическое замыкание данной модели деформирования СПФ осуществляется путем включения в ее состав связанного уравнения энергетического баланса:

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + \alpha_q T \dot{\sigma}_{kk} - [\Delta U + \omega_{ij} \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}] \dot{q} - s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{st} \quad (15)$$

$k_q$  – коэффициент теплопроводности;  $C_\sigma$  – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении;  $\Delta U$  – изменение объемной плотности внутренней энергии при осуществлении полного прямого или обратного фазового переходов.

Следует отметить, что в уравнении энергетического баланса (15) свертка тензора приращений структурных деформаций производится с тензором *активных* напряжений, тогда как в остальных слагаемых данного выражения и соотношениях для приращений компонент фазово-структурных деформаций, обусловленных фазовыми механизмами, в случае прямого фазового перехода (2) используется тензор напряжений.

**В разделе 2.3.** приводятся характерные для равноатомного никелида титана значения материальных констант и аппроксимации материальных функций, используемые в данной работе.

**Раздел 2.4.** посвящен решению, в рамках сформулированной в разделе 2.2. системы определяющих соотношений, трех модельных задач по определению состояния представительного объема СПФ во время:

- Прямого фазового перехода, происходящего под действием постоянных напряжений.
- Изотермического нагружения из состояния хаотически ориентированного мартенсита.

- Обратного фазового перехода, происходящего под действием постоянных напряжений.

Полученные решения всех этих задач, независимо от используемой *Модели*, находятся в хорошем согласовании с экспериментальными данными, поскольку практически совпадают с диаграммами прямого перехода, мартенситной неупругости и обратного перехода.

В третьей главе приводится краткий обзор основных подходов к анализу устойчивости механических систем и дается формулировка *статического метода Эйлера*, в рамках которой можно проводить исследование устойчивости элементов из СПФ во время фазовых переходов, происходящих под действием постоянных нагрузок, с учетом их дважды термомеханически связанного поведения.

**Раздел 3.1.** содержит общее описание статического, энергетического и динамического методов анализа устойчивости упругих и неупругих элементов, подверженных действию консервативных и неконсервативных внешних нагрузок, а также границ их применимости.

**Раздел 3.2.** посвящен использованию статического метода Эйлера для решения задач устойчивости элементов из СПФ во время процессов, в которых появление смежной формы равновесия инициируется фазовыми переходами, происходящими при постоянных внешних нагрузках.

Историю термомеханических воздействий, которым подвергаются элементы из СПФ перед и непосредственно во время потери устойчивости, можно представить в виде последовательности, состоящей из следующих процессов:

0. *Подготовительного* – фазово-структурное деформирование, предшествующее началу обратного фазового перехода. При рассмотрении прямого фазового перехода данный этап отсутствует.
1. *Тривиального* – деформирование, вызванное монотонным изменением температуры, при котором элемент сохраняет первоначальную форму равновесия. Предполагается, что в каждый момент рассматриваемого процесса напряженно-деформированное состояние и распределение мартенситной и аустенитной фаз можно считать однородными по объему элемента.
2. *Возмущенного* – переход к смежной форме равновесия, предполагающийся достаточно медленным, чтобы влиянием сил инерции можно было пренебречь. В зависимости от учета внутренних, описываемых в рамках определяющих соотношений, и внешних, определяемых граничными условиями, связей рассматриваются различные постановки задачи устойчивости. Для классификации внешних связей используются *концепции*, а внутренних *термомеханические постановки*.

Состояние элемента из СПФ, в котором происходят фазовые переходы и структурные превращения, зависит от истории изменения термомеханических нагрузок. Поэтому определение возмущенного процесса, следует формулировать таким образом, чтобы критические нагрузки однозначным образом зависели

от граничных условий. В данной работе для этого используются два подхода, которые носят названия концепций фиксированных (ФН) и варьируемых (ВН) внешних нагрузок. При использовании концепции ФН предполагается, что нагрузки, действующие на элемент, не получают приращений при его переходе к смежной форме равновесия, а в рамках концепции ВН, напротив данные нагрузки могут получать некоторые приращения. Поскольку одним из типов воздействий, вызывающих потерю устойчивости в рассматриваемых процессах, является отведение от или сообщение элементу тепла, приводящее к монотонному изменению температуры в тривиальном процессе, наряду с концепциями ВН и ФН можно также рассматривать концепции фиксированной (ФТ) и варьируемой (ВТ) температуры. Чтобы решение задачи устойчивости было корректным при использовании концепций ВН/ВТ следует положить, что приращения компонент тензора напряжений/температуры являются величинами того же порядка малости, что и вариации напряжений/температуры, возникающие при переходе элемента к смежной форме равновесия в случае фиксированных граничных условий. Согласно данному определению значения критических параметров, найденных в рамках концепций ФН и ФТ, ограничены снизу аналогичными значениями, полученными при помощи концепций ВН и ВТ, соответственно.

Во время перехода элемента к смежной форме равновесия компоненты тензоров полных деформаций и напряжений получают приращения, которые зависят от принятых кинематических гипотез и концепции, соответственно. Значения других параметров состояния рассматриваемой механической системы в возмущенном процессе могут как оставаться неизменными, так и получать вариации. Поскольку используемая в данной работе система определяющих соотношений является замкнутой, величины вариаций объемной доли мартенситной фазы и температуры, а также компонент фазово-структурных деформаций не являются независимыми и должны определяться в соответствии с определяющими уравнениями. В данной работе используются три термомеханические постановки задачи устойчивости:

- *Несвязанная* – параметр фазового состава, фазово-структурные деформации и температура при переходе к смежной форме равновесия считаются неизменным.
- *Однократно связанная* – учитывает влияние действующих напряжений и накопленных фазово-структурных деформаций на параметр фазового состава, а также дополнительное фазово-структурное деформирование. Температура предполагается фиксированной и равной своему значению в момент времени, предшествующий потере устойчивости.
- *Дважды связанная* – обобщает однократно связанную, за счет учета выделения/поглощения латентного тепла и диссипации энергии.

С точки зрения термодинамики однократно и дважды связанная постановки соответствуют изотермическому и адиабатическому процессам перехода к смежной форме равновесия. Дважды связанная постановка отличается от более

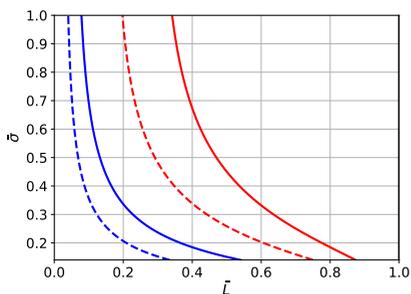
общей концепции ВТ тем, что в последней приращения температуры вызваны *внешними* по отношению к рассматриваемой термодинамической системе воздействиями и могут принимать произвольные значения, в то время как при использовании дважды связанной постановки теплообменом с внешней средой пренебрегают, а вариации температуры однозначным образом определяются из уравнения энергетического баланса (15).

**Четвертая глава** посвящена исследованию устойчивости элементов из СПФ во время прямых и обратных фазовых переходов, происходящих под действием постоянных напряжений.

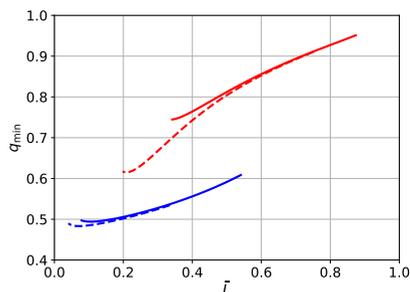
В **разделе 4.1** приводится вывод соотношений, определяющих значения параметров состояния и их приращений в тривиальном и возмущенном процессах, соответственно.

**Раздел 4.2** посвящен анализу потери устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ, вызванной прямыми и обратными фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепций ФН и ВН.

На рис. 1 представлены зависимости критических напряжений, нормированных относительно дислокационного предела текучести,  $\bar{\sigma}$  и параметра фазового состава  $q_{min}$  от фиктивной длины стойки, отнесенной к Эйлеровой критической длине,  $\bar{L}$ , полученные для процесса прямого фазового перехода. Да-



а) Зависимость критических напряжений от безразмерной длины.



б) Зависимость критических значений параметра фазового состава от безразмерной длины.

Рис. 1 — Красные и Синие линии – дважды и однократно связанные постановки, непрерывные и пунктирные линии – концепции ФН и ВН.

же при умеренных значениях напряжений, составляющих порядка одной пятой от величины дислокационного предела текучести никелида титана, фиктивная критическая длина, полученная при помощи нелинейного анализа устойчивости, может быть ниже критической длины, определяемой упругим решением,

на 40% и 80% в рамках дважды и однократно связанной постановок, соответственно. В связанных постановках независимо от рассматриваемой концепции увеличение гибкости стойки, характеризуемой отношением длины рамки стойки к ее ширине, приводит к снижению уровня напряжений, при котором возможно существование смежной с исходной формы равновесия. Несвязанной постановке соответствуют наибольшие значения критических нагрузок. Критические напряжения, получаемые в дважды связанной постановке или концепции ФН, превосходят аналогичные значения, найденные при использовании однократно связанной постановки или концепции ВН, соответственно. Так как для стойки фиксированной длины существуют напряжения, при которых согласно дважды связанной постановке она не теряет устойчивость, а согласно однократно связанной теряет, можно сделать вывод о том, что процессы выделения латентного тепла и диссипации энергии препятствуют появлению смежной формы равновесия. Из рис. 1 б) следует, что в однократно связанной постановке появление смежной формы равновесия происходит при более низких значениях параметра фазового состава или фазово-структурных деформаций, чем в дважды связанной постановке. При этом критическая величина параметра фазового состава увеличивается с ростом фиктивной длины стойки.

Далее исследуется устойчивость стойки Шенли во время обратного фазового перехода, происходящего под действием постоянных напряжений, когда для описания нелинейного деформирования, ассоциированного с структурными механизмами, используется *Модель 3*. На рис. 2 представлены зависимости критических напряжений от фиктивной длины  $l = a_c L_c / b_c^2$ , где  $a_c$  – длина стержней стойки в недеформированном состоянии,  $b_c$  и  $L_c$  – ширина и длина рамки стойки. Фиктивная критическая длина стойки зависит от способа подготовки ее опорных

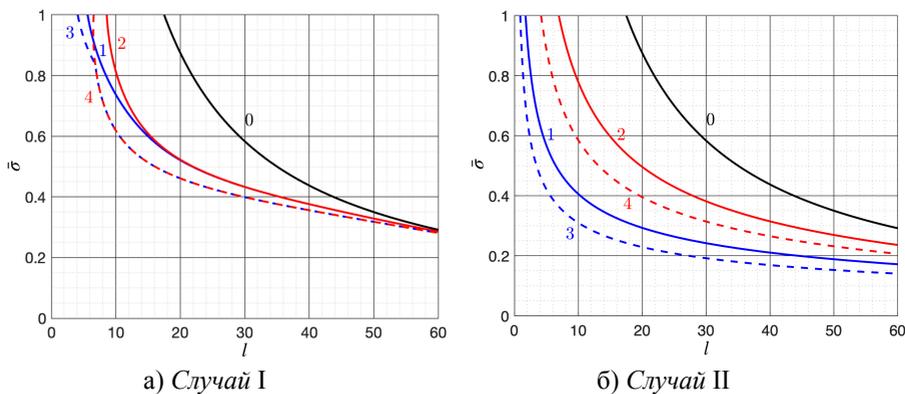


Рис. 2 — Зависимость безразмерных критических напряжений от фиктивной длины стойки. Черные линии – несвязанная постановка; Красные и Синие линии – дважды и однократно связанные постановки, непрерывные и пунктирные линии – концепции ФН и ВН.

стержней, которые названы *Случаями* I и II. В *Случае* I начальные деформации стержней стойки получены при помощи нагружения в режиме мартенситной неупругости, а в *Случае* II – в результате прямого превращения, происходящего под действием постоянных напряжений. При одинаковых величинах конечных напряжений фазово-структурные деформации имеют существенно меньшие значения, если они были получены при помощи мартенситной неупругости, а не в результате прямого фазового перехода. Дополнительное фазовое деформирование явным образом зависит от величин фазово-структурных деформаций, достигнутых в тривиальном процессе, оказывает существенно большее влияние на процесс потери устойчивости в *Случае* II, чем в *Случае* I. Максимальные значения критических параметров соответствуют решению задач устойчивости в несвязанной постановке. Решение, полученное для однократно связанной постановки в рамках концепции ВН, соответствует наименьшим значениям критических длин среди всех рассматриваемых постановок и концепций. Дважды связанной постановке, независимо от используемой концепции, отвечают более высокие значения критических нагрузок, чем однократно связанной. Различия между постановками и *Случаями* тем выше, чем меньше гибкость стойки.

**Раздел 4.3** посвящен анализу потери устойчивости стержня из СПФ, вызванной прямыми и обратными фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепций ФН и ВН.

На рис. 3 изображены зависимости критических длин, нормированных относительно Эйлеровой критической длины,  $\bar{l}_r$  стержня круглого поперечного сечения для прямого фазового перехода от безразмерных напряжений  $\bar{\sigma} = -\sigma/\sigma_0$ , где  $\sigma_0$  – параметр масштаба функции Лапласа, используемой для аппроксимации диаграммы прямого перехода. Из данного рисунка следует, что с увеличением параметра  $\sigma_0$  критическая длина стержня уменьшается. Критические нагрузки, полученные при решении задачи устойчивости в дважды связанной постановке, больше, чем при решении задачи в однократно связанной постановке, и меньше, чем при решении задачи с использованием несвязанной постановки. Качественно полученные выводы хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ.

В случае обратного фазового перехода при использовании связанных постановок задачи устойчивости величины приращений параметров состояния и, соответственно, критических параметров зависят от истории термомеханического деформирования стержня. К способам подготовки стержней, соответствующим *Случаям* I и II, рассмотренным в разделе 4.2., добавим еще два *Случая* (рис. 4):

- III. Растяжение в режиме мартенситной неупругости, за которым следует разгрузка и последующее нагружение сжимающими напряжениями.
- IV. Нагружение, повторяющее *Случай* III, за которым следует увеличение действующих напряжений.

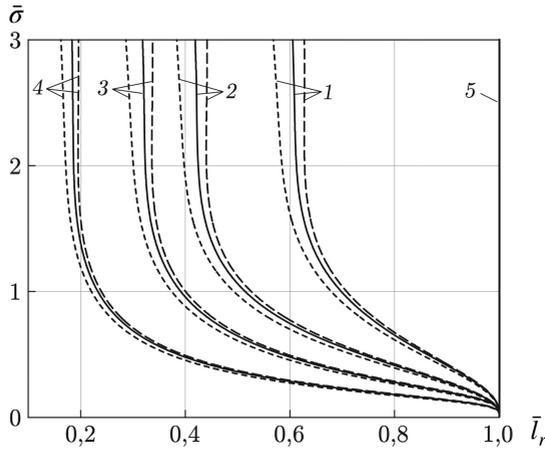


Рис. 3 —  $\bar{l}_r$  — критическая длина, отнесенная к Эйлеровой длине,  $\bar{\sigma}$  — безразмерные напряжения. Пунктирные/сплошные/штриховые линии —  $\sigma_0 = 340/170/85$  [МПа]; 1, 2 — дважды связанная постановка, 3, 4 — однократно связанная постановка; 1, 3 — ФН, 2, 4 — ВН, 5 — несвязанная постановка.

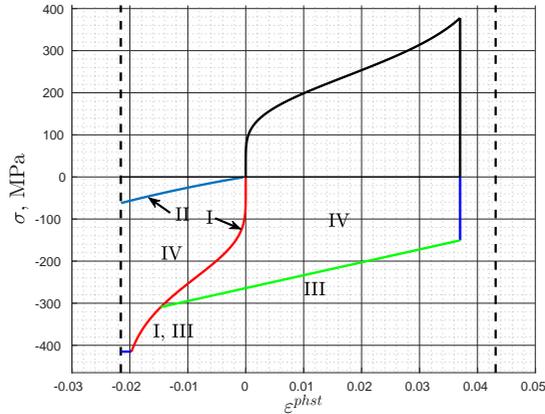
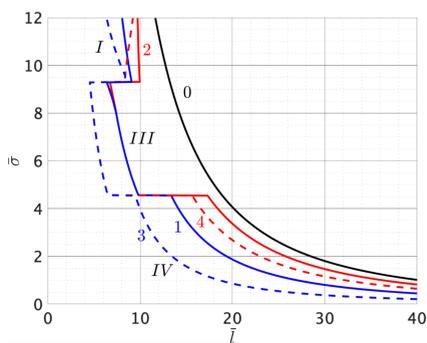


Рис. 4 — Способы подготовки стержня (Случаи).

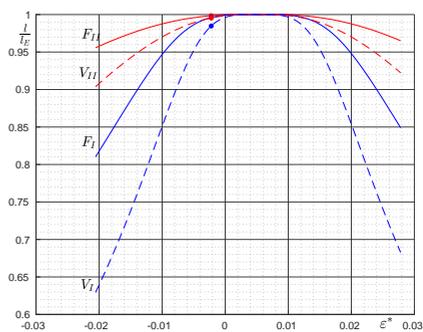
На рис. 5 а) представлены зависимости безразмерных критических длин стержня<sup>2</sup>  $\bar{l} = l_r/h$  от безразмерного напряжения  $\bar{\sigma} = \sigma/d$ ,  $d = 34.66$  [МПа], полученные в предположении, что дополнительное структурное деформирование, вызванное переходом к смежной форме равновесия, описывается в рамках *Модели 2*. Разрывы первого рода у критических кривых, полученных в рамках

<sup>2</sup> $h$  — характерный размер поперечного сечения стержня.

связанных постановок задачи устойчивости, обусловлены изменениями в механизмах дополнительного структурного деформирования. При переходе от *Случая IV* к *Случаю III* в возмущенном процессе наряду с дополнительным упругим деформированием, в той части поперечного сечения стержня, где выполняются условия активного нагружения, имеет место дополнительное структурное деформирование, во время которого происходит упрочнение по трансляционному механизму. При переходе от *Случая III* к *Случаю I* дополнительное трансляционное упрочнение сменяется на комбинированное. Качественно решения, найденные при рассмотрении *Случаев I* и *IV*, находятся в хорошем согласовании с результатами, полученными для стойки Шенли. При этом *Случай IV* эквивалентен *Случаю II*. Поскольку решения, полученные для *Случая III*, в связанных постановках при использовании концепций ФН и ВН практически неразличимы, можно сделать вывод о том, что потеря устойчивости для рассматриваемого способа задания начальных фазово-структурных деформаций в стержне происходит в результате дополнительного структурного деформирования, которое не сопровождается дополнительным фазовым переходом и соответствует полностью мартенситному фазовому состоянию. Также следует отметить, что наименьшие критические длины достигаются в *Случае III*.



а) *Случаи I-III-IV.*



б) *Случай IV.*

Рис. 5 — 0 – несвязанная постановка, 1 (непрерывная) и 3 (пунктирная) – однократно связанная постановка в концепциях ФН и ВН, 2 (непрерывная) и 4 (пунктирная) – дважды связанная постановка в концепциях ФН и ВН.

На рис. 5 б) изображены зависимости критических длин, полученных в связанных постановках задачи устойчивости и отнесенных к Эйлеровой критической длине, от начальных фазово-структурных деформаций стержня для *Случая IV* при  $\sigma = 173$  [МПа]. Из данного графика видно, что с ростом абсолютных величин предварительных фазово-структурных деформаций, накопленных в стержне перед началом обратного фазового перехода, критическая длина уменьшается, причем, данная зависимость является строго монотонной и существенно нелинейной.

Взаимное расположение кривых для различных постановок и концепций, практически не зависит от рассматриваемого *Случая*. Однократно связанная постановка и концепция ВН дают меньшие значения критических длин, чем дважды связанная постановка и концепция ФН, соответственно.

**Раздел 4.4** посвящен исследованию устойчивости пластины из СПФ при прямом фазовом переходе, происходящем под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепции ВН.

Пусть на двух параллельных боковых гранях пластины действуют одинаковые равномерно распределенные нормальные напряжения  $\sigma_{11}$ , а на других двух гранях  $\sigma_{22}$  подбираются таким образом, чтобы данные напряжения имели минимальные по модулю значения, для которых возможно существование смежной формы равновесия.

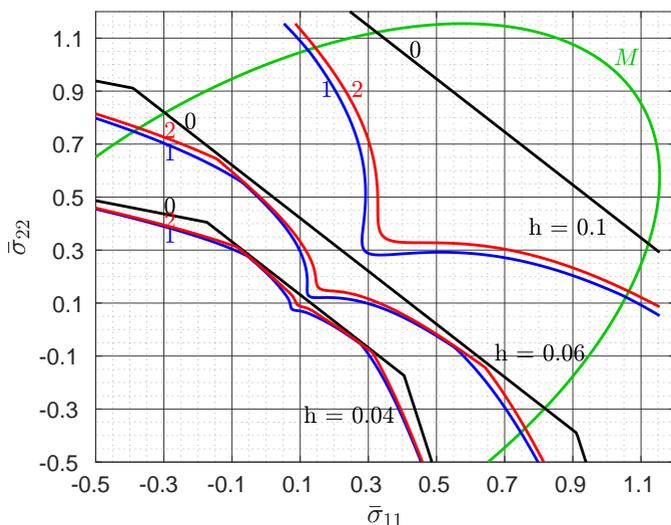


Рис. 6 — Критические поверхности в пространстве главных напряжений, отнесенных к дислокационному пределу текучести никелида титана, для пластин, обладающих толщинами  $\bar{h} = 0.04, 0.06, 0.1$ .

Черные линии – несвязанная (0) постановка (упругое решение),  
 Красные/Синие линии – дважды (2)/однократно (1) связанная постановка в концепции ВН,  
 Зеленая линия – поверхность текучести Мизеса.

Согласно рис. (6) область устойчивости пластины, полученная в рамках несвязанной постановки, является выпуклой и содержит аналогичные области для связанных постановок, границы которых не являются выпуклыми. Критическая поверхность, найденная при помощи однократно связанной постановки, соответствует наименьшей области устойчивости среди всех рассматриваемых

постановок. Увеличение толщины пластины приводит к росту различий между решениями, полученными в различных постановках, причем, данные различия существенно больше при сравнении несвязанной и однократно или дважды связанной постановками, чем между связанными постановками. Наибольшие отличия между решениями, полученными в различных постановках задачи устойчивости, достигаются в случае двухосного нагружения одинаковыми сжимающими напряжениями.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Термомеханически связанным постановкам соответствуют существенно меньшие значения критических параметров по сравнению с несвязанной постановкой.
2. Критические значения параметров, найденные при помощи дважды связанной постановки, превосходят аналогичные значения, полученные при использовании однократно связанной постановки.
3. Критические значения параметров, найденные для концепции ФН, превосходят аналогичные значения, полученные для концепции ВН.
4. При потере устойчивости, вызванной обратным фазовым переходом, дополнительное структурное деформирование не имеет места.
5. При потере устойчивости, вызванной обратным фазовым переходом, критическая нагрузка уменьшается с ростом абсолютных величин фазово-структурных деформаций, накопленных перед началом данного перехода.
6. С увеличением гибкости элемента, которая может выражаться в росте длины стержня или уменьшении толщины пластины, при сохранении остальных геометрических параметров неизменными, влияние дополнительного фазового перехода на процесс потери устойчивости существенно снижается.

Перспективными направлениями будущих исследований является решение задачи устойчивости пластины из СПФ при прямом и обратном фазовых переходах, происходящих при постоянных действующих напряжениях, в дважды термомеханически связанной постановке для концепции ФН.

## **Публикации автора по теме диссертации**

### **В рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI**

1. *Думанский, С. А.* Анализ устойчивости стойки Шенли на стержнях из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении в рамках объединенной модели фазово-структурного деформирования / С. А. Думанский // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 523—543. — Импакт-фактор РИНЦ: 0.603.

2. *Думанский, С. А.* Дважды связанная постановка задачи о потере устойчивости вызванной обратным термоупругим фазовым превращением в сплаве с памятью формы / С. А. Думанский, А. А. Мовчан // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2017. — № 5. — С. 37—48. — Impact factor (2022): 0.7.
3. *Думанский, С. А.* Потеря устойчивости стержня из сплава с памятью формы, вызванная обратным мартенситным превращением / С. А. Думанский, А. А. Мовчан // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2019. — № 4. — С. 94—108. — Impact factor (2022): 0.7.
4. *Мовчан, А. А.* Дважды связанная задача о потере устойчивости стойки Шенли на стержнях из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении в заневоленном состоянии / А. А. Мовчан, С. А. Думанский // Деформация и разрушение материалов. — 2017. — № 12. — С. 8—15. — Impact factor (2022): 0.4.
5. *Мовчан, А. А.* Связанная и дважды связанная задачи устойчивости для сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан, С. А. Думанский, С. А. Казарина // Деформация и разрушение материалов. — 2017. — № 6. — С. 2—8. — Impact factor (2022): 0.4.
6. *Мовчан, А. А.* Экспериментальные данные и результаты моделирования явления потери устойчивости, вызванной фазовыми и структурными превращениями в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, С. А. Думанский, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2019. — Т. 25, № 3. — С. 381—393. — Импакт-фактор РИНЦ: 0.603.
7. *Movchan, A. A.* Solution of the twice-coupled problem of instability of a rod of shape memory alloy caused by a direct thermo-elastic phase transformation / A. A. Movchan, S. A. Dumansky // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2018. — Vol. 59, issue 4. — P. 716—723. — Impact factor (2022): 0.6.

**В сборниках трудов международных конференций, входящих в международную базу цитирования Scopus**

8. *Dumanskiy, S. A.* Stability analysis of a round cross-section rod from Shape Memory Alloys at reverse phase transition / S. A. Dumanskiy // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — Krakow, 2020. — Vol. 747. — P. 012001.
9. *Dumanskiy, S. A.* Stability of Shape Memory Alloy rods under reverse phase transformation in case of initial tensile phase-structural strains / S. A. Dumanskiy // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — Krakow, 2020. — Vol. 934. — P. 012034—012034.

10. *Dumanskiy, S. A.* Stability of a Rectangular Shape Memory Alloy Plate during the Forward Phase Transition for Thermomechanically Coupled Statement / S. A. Dumanskiy // *Key Engineering Materials*. — 2022. — Vol. 910. — P. 1104—1114.

#### **В прочих изданиях**

11. *Мовчан, А. А.* Учет выделения и поглощения латентного тепла фазовых переходов и диссипативных эффектов при анализе устойчивости элементов из сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан, С. А. Думанский // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. — 2018. — Т. 23, № 123—1. — С. 454—458.

*Думанский Станислав Александрович*

Решение задач устойчивости элементов из сплавов с памятью формы

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 60 экз.

Типография \_\_\_\_\_

