

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**МИХАЙЛОВ Евгений Александрович**

**ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ТИПА ДЛЯ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ**

Специальность 1.3.3 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:

д.ф.-м.н., профессор Соколов Д.Д.

Москва – 2023

## Оглавление

Введение.....	3
Глава I. Магнитные поля в проводящей среде и их описание.....	15
§1. Исследования различных процессов в магнитной гидродинамике и роль двумерных моделей.....	16
§2. Основные уравнения магнитной гидродинамики средних полей.....	34
§3. Возникновение нелинейности в эволюции магнитного поля и магнитная спиральность ..	45
Глава II. Планарное приближение в теории динамо.....	65
§1. Генерация магнитного поля в тонком диске.....	66
§2. Анализ уравнений планарного приближения и их решений в локальном приближении ...	79
§3. Решение уравнений планарного приближения в осесимметричной постановке.....	109
§4. Исследование решений уравнений планарного приближения в неосесимметричном случае.....	127
§5. Подавление роста магнитного поля за счет потоков спиральности магнитного поля.....	155
Глава III. Некоторые приложения планарного приближения.....	159
§1. Моделирование инверсий магнитных полей в рамках планарного приближения.....	160
§2. Генерация магнитных полей в окраинных областях галактик и во внешних кольцах.....	178
§3. Генерация полей в галактических объектах с активным звездообразованием.....	187
§4. Магнитные поля аккреционных дисков.....	196
Глава IV. Модель динамо в торе.....	200
§1. Основные уравнения.....	200
§2. Магнитное поле в торе кругового сечения.....	206
§3. Динамо в прямоугольном торе.....	218
Глава V. Модели промежуточного типа для электровихревых течений.....	234
§1. Общие вопросы.....	234
§2. Электровихревое течение в полусферическом сосуде.....	237
§3. Электровихревое течение между двумя плоскостями.....	253
Глава VI. Генерация магнитных полей с помощью движений специальной структуры.....	263
§1. Общие вопросы.....	263
§2. Бирмановский механизм и магнитное поле.....	265
§3. Генерация магнитных полей с помощью конвективных движений.....	271
Заключение.....	278
Список литературы.....	281

# Введение

## Актуальность темы

Исследование эволюции магнитных полей в проводящей среде представляет собой достаточно важную задачу с точки зрения теоретической физики [1] [2]. Особенно серьезную роль подобные процессы играют в различных астрофизических приложениях при исследовании магнитных полей галактик [3] [3] [4], аккреционных дисков [5], Солнца [6] [7], звезд [8], планет [9] и т.д. Для этого требуется разработка новых математических методов теории поля, которые в случае космического магнетизма обычно связаны с механизмом динамо [6] [10] [11] [12]. Она описывает процесс генерации магнитных полей, основываясь на совместном действии альфа-эффекта, являющегося характеристикой турбулентности, и дифференциального вращения, суть которого заключается в нетвердотельном характере вращения астрофизических объектов. Им противодействует турбулентная диффузия, стремящаяся размыть регулярные структуры магнитного поля [12]. Таким образом, при их исследовании необходимо изучение неравновесных процессов, связанных с турбулентностью в космической среде. На начальном этапе изучения строились сугубо качественные модели, которые позволяли описать процесс генерации с помощью грубых оценок на уровне характерных масштабов и времен [2]. Вполне очевидно, что в современных условиях подобный подход недостаточен: результаты данных оценок имеют недостаточную точность даже по сравнению с возможностями наблюдений. В настоящий момент все большую популярность приобретают методы, связанные с прямым численным моделированием [13]. Тем не менее, подобный подход тоже очевидно имеет ряд проблем. Так, до сих пор нет возможности провести трехмерные расчеты, которые бы обладали достаточной степенью детализации и описывали все необходимые особенности решения. Кроме того, каждый результат подобного численного расчета является по сути итогом эксперимента при данном наборе параметров, и понять, каким образом решение зависит от тех или иных величин является затруднительным. Кроме того, параметры, которые необходимо включать в трехмерные модели теории поля, часто неизвестны. По этой причине весьма актуальными являются эволюционные модели для магнитного поля промежуточного типа, которые используют ряд свойств симметрии задачи (которые, как правило, выполнены в случае астрофизических приложений). Они дают возможность, с одной стороны, построить решение задачи для базовых примеров с помощью аналитических методов, с другой – компьютерное моделирование требует достаточно умеренных вычислительных ресурсов. Вместе с тем, решения оказываются достаточно точными и соответствуют физической природе объектов. Таким образом, подобные эволюционные модели промежуточного типа сочетают в себе целый ряд достоинств, делающих их достаточно

эффективными. В данном направлении, например, можно выделить работы Мосса с соавторами [14] про поля галактик работы Дейнцера, Гроссера и Шмитта [15], посвященные моделированию магнитных полей в торах и т.д.

Похожим образом обстоит дело и в случае процессов, происходящих в жидких металлах. Особую роль играют так называемые электровихревые течения. Их возникновение связано с распространением тока меняющейся плотности в среде с высокой проводимостью [16] [17]. Существуют различные примеры данного процесса, привязанные к различной геометрии и играющие важную роль в приложениях [18] [19] [20]. В наши дни существует большое число работ, посвященных изучению эволюции течения путем численного моделирования (чаще всего – с использованием стандартных вычислительных пакетов) [21]. Вместе с тем, они не дают ответа на большое число вопросов, связанных с характерной зависимостью параметров электровихревого течения от различных внешних факторов. К сожалению, в настоящий момент существует крайне небольшое число работ, посвященных исследованию соответствующих процессов [22] [23], поэтому возникает необходимость построения моделей промежуточного типа, использующих свойства симметрии задачи, но при этом позволяющих достаточно точно описывать происходящие процессы.

### **Цель и задачи**

Основной целью работы является создание моделей промежуточного типа для эволюции магнитных полей в проводящей среде, которые сочетают возможность аналитического решения и высокую точность результатов. Также предполагается использование данных моделей для ряда приложений

Это достигается путем решения следующих задач:

1. Построение модели эволюции магнитного поля в дисковых объектах. Разработка математических методов для расчета поля в рамках данного подхода и сравнение полученных результатов с данными численного моделирования. Изучение вопроса о том, возможно ли существование решений той или иной симметрии.

2. Исследование с помощью модели для генерации магнитных полей в дисках магнитных полей в различных астрофизических объектах: галактиках и аккреционных дисках. Изучение поведения магнитного поля на внутренней границе аккреционного диска, возникновения инверсий магнитного поля в галактиках, его распространения во внешние области галактик, влияния процессов звездообразования.

3. Построение модели для эволюции магнитного поля в объектах тороидальной формы. Для этого необходимо изучение вертикальной структуры магнитного поля, опирающееся на современные представления о динамо.



4. Построение двумерных моделей для электровихревого течения. Отдельную важность представляют течение в полусферическом сосуде, а также электровихревое течение между двумя плоскостями. Необходима разработка математических методов для его исследования.

5. Исследование вопроса о возникновении «затравочных» магнитных полей в галактиках на больших красных смещениях, разработка математической модели для структуры поля.

6. Изучение процесса усиления магнитного поля с помощью конвективных ячеек при использовании моделей двумерного типа.

### **Научная новизна**

В настоящей работе построен новый класс моделей, которые описывают эволюцию магнитных полей в проводящих средах, сочетая преимущества как численных, так и полуаналитических методов. достаточно полная модель эволюции магнитного поля в дисковых объектах.

Для дисков галактик с помощью спектральных методов показывается, что неосесимметричные конфигурации поля, которые рассматривались в некоторых предшествующих работах, являются неустойчивыми. Вопреки предположениям ряда авторов о том, что активное звездообразование может приводить к усилению крупномасштабного магнитного поля, показано, что подобные процессы за счет диффузии приводят к разрушению регулярных структур поля. Построена модель динамо в торе для внешних колец галактик, в рамках которой возможна генерация магнитных полей дипольного типа.

Показано, что механизм динамо в аккреционных дисках действует принципиально иначе, нежели в дисках галактик, что связано с радиальными потоками среды при аккреции. С учетом данного факта разработана модель глобального строения поля, эволюция которого обусловлена действием динамо в аккреционных дисках, окружающих белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры.

Разработаны математические методы решения магнитогидродинамических задач для электровихревых течений. Получены асимптотические модели для течений между плоскостями и в полусферическом сосуде. Важно, что данные приближения согласуются как с численными расчетами, так и с экспериментом.

Создана математическая модель возникновения магнитного поля галактики на больших красных смещениях с помощью механизма Бирмана, которая, в отличие от более ранних работ, учитывает его структуру в пространстве. Изучено, как конвективные течения проводящей среды влияют на поведение магнитного поля, исследована возможность коллапса в магнитной гидродинамике. Показано, что несмотря на несжимаемость среды, конвективные потоки приводят к сжатию линий поля и его быстрому нарастанию.

По сравнению с более ранними работами, посвященных решению уравнений для полей в трехмерном пространстве методами прямого численного моделирования, а также качественными оценками о порядках величин полей, удалось построить модели промежуточного типа, которые совмещают в себе простоту реализации и высокую точность. Подобные модели дают возможность как теоретического исследования решений, так и компьютерного моделирования при умеренных потребностях в вычислительных ресурсах.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

В рамках настоящей работы построен качественно новый тип моделей эволюции магнитных полей в аккреционных и галактических дисках. Данные представления позволяют в деталях исследовать генерацию магнитного поля и получить его пространственную структуру, при этом они не требуют чрезмерных объемов вычислений. Теоретическое исследование дифференциальных операторов, которые описывают действие динамо в тонких дисках, дает возможность изучить устойчивость структур поля различного типа. Изучены важные астрофизические приложения данных моделей, связанные с возникновением инверсий магнитного поля, влияния звездообразования на его поведение, генерации полей во внешних галактических кольцах.

Получено, что эволюция магнитных полей аккреционных дисков происходит существенно иначе, нежели в галактиках. Показана важная роль радиальных потоков среды и накопления магнитного поля на внутренней границе объекта.

Результаты исследования электровихревых течений важны для приложений, связанных с электрометаллургией: электросваркой и электрошлаковым переплавом металлов.

Изучено влияние конвекции на структуру магнитного поля и возможность коллапса в проводящей среде. Исследовано, как истечение потока плазмы из центрального объекта приводит к генерации магнитных полей галактик на больших красных смещениях.

В диссертации разработаны модели промежуточного типа для процессов в магнитной гидродинамике, которые сочетают простоту, аккуратность теоретического анализа, а также высокую точность, которая дает возможность воспроизводить данные экспериментов и астрономических наблюдений.

### **Методология исследования**

При изучении процессов использовались различные подходы, опирающиеся как на физическую природу явления, так и на современные математические методы. Ключевым моментом являлось выделение различных видов симметрии, которые позволяли определенным образом упростить процесс решения возникающих задач и построить модели промежуточного типа. После этого проводились аналитические оценки решений (с использованием различных спектральных методов), а также численное решение возникающих уравнений.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Построен ряд моделей промежуточного типа для эволюции магнитного поля в проводящей среде, которые сочетают возможность теоретического анализа и высокую точность решений.

2. Сформулирована модель динамо в тонком диске, основанная на представлениях о P-неинвариантности альфа-эффекта и учитывающая современные представления о галактических объектах. Исследованы различные приближения, получены спектральные разложения решений. Показана устойчивость осесимметричных структур магнитного поля

3. Рассмотрены приложения планарного приближения. Показано, что в случае учета радиальных потоков и исключения концентрации магнитного поля на внутренней границе аккреционного диска, поле в плоскости диска не превышает уровня равномерного распределения и не приводит к его разрушению. В рамках нелинейной модели динамо в тонком диске получена реалистичная структура магнитного поля, соответствующая инверсиям. Для внешних колец галактик построены оценки как с помощью планарного приближения, так и в рамках модели динамо в торе, учитывающей более сложную вертикальную структуру магнитного поля. Показана принципиальная возможность возникновения квадрупольных и дипольных структур магнитного поля в рамках данной модели.

4. Построены аналитические модели для электровихревых течений в полусфере с центральным электродом конечных размеров и между двумя плоскостями.

5. Предложен метод, позволяющий на основе батарейного механизма Бирмана описать начальное магнитное поле в галактике. С помощью обобщения уравнений движения в предположении быстрой релаксации построена модель, позволяющая найти детальную структуру магнитного поля.

6. Показано, что при наличии конвективных потоков магнитное поле экспоненциально растет на границах конвективных ячеек. Построены аналитические и численные модели для эволюции поля.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность результатов, представленных в диссертации, обеспечивается аккуратностью постановок задач и учетом влияния всех основных физических процессов. Теоретические результаты подтверждаются численными расчетами, экспериментальными и наблюдательными данными.

Основные результаты работы представлялись на следующих международных и всероссийских конференциях:

– RAMIR International Conference: Fundamental and Applied MHD (2014, Рига, Латвия; 2016, Кальяри, Италия; 2019, Реймс, Франция);

- Serbian-Bulgarian Astronomical Conference (Белград, Сербия, 2016; Белоградчик, Болгария, 2018);
  - 2nd Conference on Natural Dynamos (Вальтице, Чехия, 2017);
  - MREP-2017/UKMHD (Кембридж, Великобритания, 2017);
  - Instability Phenomena and Evolution of the Universe (Бюракан, Армения, 2018);
  - Compact White Dwarf Binaries (Ереван, Армения, 2019);
  - EAS-2020 (Лейден, Нидерланды, 2020 – в дистанционной форме);
  - Space Sciences and Technologies (Бюракан, Армения, 2022);
  - Electromagnetic Processing of Materials (Рига, Латвия, 2021 – в дистанционной форме);
  - Российская конференция по магнитной гидродинамике (Пермь, 2015, 2018, 2021 – в дистанционной форме);
  - НеЗаТеГиУс-2018 (Звенигород, 2018);
  - Волны и вихри в сложных средах (Москва, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021);
  - Всероссийская Астрономическая Конференция (Санкт-Петербург, 2013; Москва, 2021 – в дистанционной форме);
  - Актуальные проблемы внегалактической астрономии (Пушино, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019);
  - Современная звездная астрономия (Ростов-на-Дону, 2014; Екатеринбург, 2017; Карачаево-Черкесия, 2019);
  - Школа-семинар академика А.И.Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» (Санкт-Петербург, 2017; Москва, 2019);
  - XI Семинар ВУЗов по теплофизике и энергетике (Санкт-Петербург, 2019);
  - Современные проблемы теплофизики и энергетики (Москва, 2017, 2021);
  - Российская национальная конференция по теплообмену (Москва, 2022);
  - Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко (Москва, 2019);
  - Астрономия – 2015 (Москва, 2015);
  - Астрономия – 2018 (Москва, 2018);
  - Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (Москва, 2019)
- а также других конференциях.

Результаты работы также представлялись на различных научных семинарах: семинаре «Космическая электродинамика и теория динамо» (НИВЦ МГУ), семинаре НИИ механики МГУ, семинаре «Нелинейные волны» (Сколковский институт науки и технологий), семинаре отдела релятивистской астрофизики ГАИШ МГУ, семинаре «Математический коллоквиум МГТУ имени Н.Э.Баумана», семинаре лаборатории физической гидродинамики (Институт механики

сплошной среды УрО РАН), научном семинаре ИТПЗ РАН, семинаре Научно-исследовательской лаборатории гидроаэродинамики (СПбГПУ Петра Великого), семинаре Главной (Пулковской) Астрономической обсерватории, семинаре кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета СПбГУ, семинаре кафедры математики физического факультета МГУ.

На докладах по результатам работы присутствовали такие признанные специалисты, как Д.Д.Соколов, А.Г.Куликовский, В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, Н.И.Шакура, К.А.Постнов, В.О.Мантуров, К.Ю.Федоровский, А.В.Филиновский, П.Г.Фрик, В.А.Желиговский, Е.М.Смирнов, Е.В.Кустова, С.Е.Холодова, С.Ю.Маламанов, Н.Р.Ихсанов, А.Т.Байкова, Н.Н.Нефёдов, А.Н.Боголюбов и другие.

### Публикации

По результатам работы был опубликован ряд статей в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных «Scopus» и «Web of Science Core Collection»:

A1. Mikhailov E., Sokoloff D., Zasov A., Kasparova A., Moss D., Beck R. Magnetic fields near the peripheries of galactic discs // *Astronomy and Astrophysics*. – 2014. – V. 568. – A66. [«Web of Science Core Collection», IF=6.240]

A2. Moss D., Mikhailov E., Sokoloff D., Silchenko O., Horellou C., Beck R. Magnetic fields in ring galaxies // *Astronomy and Astrophysics*. – 2016. – V.592. – A44 [«Web of Science Core Collection», IF=6.240]

A3. Boneva D.V., Mikhailov E.A., Pashentseva M.V., Sokoloff D.D. Magnetic fields in the accretion discs for various inner boundary conditions. *Astronomy and Astrophysics*. – 2021. – V.652. – A38. [«Web of Science Core Collection», IF=6.240]

A4. Mikhailov E.A. Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches // *Magnetohydrodynamics*. – 2016. – V.52, No.1. – P. 117 – 124. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A5. Mikhailov E.A. Galactic magnetic field reversals and vorticity of transition layers // *Magnetohydrodynamics*. – 2017. – V. 53, No.2. – P. 357-363 [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A6. Mikhailov E.A., Sibgatullin I.N. Magnetic fields in the outer rings of galaxies and turbulent motions // *Magnetohydrodynamics*. – 2019. – V.55, No.1-2. – P. 133 – 140. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A7. Mikhailov E., Pushkarev V. Influence of star formation on galactic magnetic fields in a model with vertical structure // *Magnetohydrodynamics*. – 2020. – V.56, No.2-3. – P.81 – 87. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A8. Mikhailov E. A. Symmetry of the magnetic fields in galactic dynamo and the material arms // *Magnetohydrodynamics*. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 403–414. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A9. Mikhailov E.A., Khokhryakova A.D. Torus dynamo in the outer rings of galaxies // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. — 2019. — V.113, No.1-2. — P. 199 – 207. [«Web of Science Core Collection», IF=1.590]

A10. Кузнецов Е.А., Михайлов Е.А. Заметки о коллапсе в магнитной гидродинамике // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2020. — Т.158, №3. — С.561 – 572. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.111]

A11. Михайлов Е.А., Чудновский А.Ю. Асимптотическое разложение решения уравнения для медленного осесимметричного электровихревого течения между двумя плоскостями // *Сибирский журнал индустриальной математики*. — 2020. — Т.23, №4. — С. 88 – 100. [переводная версия индексируется в «Scopus», IF=0.391]

A12. Михайлов Е.А. Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. — 2015. — №2. — С.27 – 31. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=0.536]

A13. Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. — 2018. — №2. — С.39 – 44. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=0.536]

A14. Михайлов Е.А. Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. — 2020. — №5. — С.40 – 45. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=0.536]

A15. Mikhailov E. A., Elistratov S. A., Grachev D. A. The magnetic correlation tensor in the dynamo theory // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2021. — Vol. 32, no. 1. — P. 45–51. [«Scopus», SJR=0.191]

A16. Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Construction asymptotic solution while studying electrovortex flow in hemispherical container using Stokes approximation // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2017. — V.891. — 012060. [«Scopus», SJR=0.210]

A17. Mikhailov E. A., Teplyakov I. O., Fedotov I. A. Research of the electro-vortex flows in the liquid metals at different currents // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — Vol. 1565. — 012076. [«Scopus», SJR=0.210]

A18. Georgievskaya E.P., Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Simulation of the electrovortex flow in a linear approximation under the action of the external magnetic field // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2020. – V.1683. – 022039. [«Scopus», SJR=0.210]

A19. Михайлов Е.А. Галактическое динамо с учетом потоков спиральности. // *Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика*. – 2013. – Т.39, №7. – С.474 – 480. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.194]

A20. Михайлов Е.А. Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности // *Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика*. – 2014. – Т.40, №7. – С.398 – 405. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.194]

A21. Михайлов Е.А. Динамо в торе для описания магнитных полей во внешних кольцах галактик // *Астрономический журнал*. – 2017. – Т.94, №9. – С.741 – 748. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.192]

A22. Андреасян Р.Р., Михайлов Е.А., Андреасян А.Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля // *Астрономический журнал*. – Т.64, №3. – С.189 – 198. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.192]

A23. Михайлов Е. А., Андреасян Р. Р. Батарейный механизм Бирмана и структура начального магнитного поля в галактиках // *Астрономический журнал*. — 2021. — Т. 98, № 10. — С. 795–803. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.192]

A24. Михайлов Е.А., Пушкарев В.В. Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля // *Астрофизический бюллетень*. – 2018. – Т.73, №4. – С. 451 – 456. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.022]

A25. Mikhailov E.A., Pushkarev V.V. Fluctuating governing parameters in galaxy dynamo // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. – 2018. – V.30, No.3. – P.343 – 350 [«Scopus», SJR=0.125]

A26. Mikhailov E.A. Torus dynamo model for study of magnetic fields in the outer rings of galaxies // *Astrophysics*. – 2018. – V. 61, No. 2. – P. 147 – 159. [«Web of Science Core Collection», IF=0.673]

A27. Mikhailov E., Khasaeva T. Evolution of the magnetic field reversals in galaxies // *Bulgarian Astronomical Journal*. – 2019. V. 31, No.2. – P.39 – 50. [«Scopus», SJR=0.138]

A28. Mikhailov E., Boneva D., Pashentseva M. No-z model for magnetic fields of different astrophysical objects and stability of the solutions // *Data*. — 2021. — Vol. 6, no. 1. — 4. [«Scopus», SJR=0.560]

Так же часть материалов диссертационного исследования вошла в книгу: Е.А.Михайлов. Магнитная гидродинамика и теория динамо. М.: Физический факультет МГУ, 2018 (ISBN 978-5-8279-0157-0).

### **Личный вклад автора**

Роль автора в получении всех основных результатов, вошедших в диссертацию, была определяющей. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад автора был основополагающим.

Роль автора в получении всех основных результатов, вошедших в диссертацию, была определяющей. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад автора был основополагающим. Автор принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений.

При этом необходимо отметить следующее. В работе [A1] модельные представления о магнитном поле формулировались совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, А.В.Каспаровой и А.В.Засовым были представлены данные о скоростях среды, использованные автором для построения моделей, Р.Беком составлен обзор наблюдений. В работе [A2] модельные представления формулировались совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, О.К.Сильченко были представлены данные о внешних кольцах галактик, использованные для построения моделей, К.Орелу был представлен обзор наблюдательных перспектив в данной области. В работе [A3] модельные представления формулировались совместно с Д.Д.Соколовым, Д.В.Боневой был написан обзор астрономических данных, М.В.Пашенцевой получен ряд численных результатов на основе уравнений, сформулированных автором. В работе [A6] И.Н.Сибгатуллиним было проведено численное исследование течений на основе модельных представлений о магнитном поле, подготовленных автором диссертации. В работе [A7], [A24] и [A25] В.В.Пушкаревым был получен ряд численных решений уравнений, сформулированных автором на основе разработанных им модельных представлений для магнитных полей в галактиках и их внешних кольцах. В работе [A9] А.Д.Хохряковой получен ряд численных решений уравнений, сформулированных в рамках разработанных им модельных представлений для торов прямоугольного течения. В работе [A10] теоретические оценки для магнитного поля были получены совместно с Е.А.Кузнецовым, также ему принадлежит общая идея данной статьи. В работе [A11] основные вопросы, связанные с постановкой задачи, обсуждались с А.Ю.Чудновским. В работах [A13] и [A16] модельные представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым. В работе [A15] общие вопросы, связанные с постановкой задачи, обсуждались с Д.А.Грачевым, С.А.Елистратову принадлежит ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных автором. В работе [A17] модельные представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым, И.А.Федотову принадлежит ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных автором. В работе [A18] модельные



представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым, Е.П.Георгиевской был получен ряд численных решений уравнений, сформулированных автором. В работе [A22] Р.Р.Андреасяном и А.Р.Андреасян были представлены данные астрономических наблюдений, полностью подтверждающих результаты, полученные в рамках модели, сформулированной автором, также проводилось общее обсуждение всех основных вопросов. В работе [A23] формулировка модельных представлений проводилась совместно с Р.Р.Андреасяном. В работе [A27] Т.Т.Хасаевой был получен ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных автором в рамках разработанных им модельных представлений. В работе [A28] общая проблема была сформулирована совместно с Д.В.Боневой, М.В.Пашенцевой был проведен ряд вычислений на основе модельных представлений, сформулированных автором.

Важно отметить, что все результаты, вошедшие в диссертацию, получены автором лично.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из 6 глав, Введения, Заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 302 страницы, включая 47 рисунков и список литературы из 252 наименований

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую признательность своему учителю – профессору Дмитрию Дмитриевичу Соколову, благодаря которому он смог состояться в науке и на протяжении многих лет чувствовал поддержку в своих начинаниях.

Автор также благодарен своим коллегам, с которыми он подготовил совместные работы и у которых смог многому научиться: Е.А.Кузнецову (ФИАН), Р.Р.Андреасяну (БАО, Армения), Д.Моссу (Манчестерский университет, Великобритания), А.В.Засову (ГАИШ МГУ), О.К.Сильченко (ГАИШ МГУ), А.Ю.Чудновскому (Латвийский университет, Латвия), Р.Беку (Радиоастрономический институт Макса Планка, Германия), К.Орелу (Уппсальская обсерватория, Швеция).

Хотелось бы поблагодарить соавторов, многие из которых стали за это время добрыми друзьями: А.Р.Андреасян (БАО, Армения), К.И.Смирнову (УрФУ), Д.А.Грачева (физический факультет МГУ), И.О.Теплякова (ОИВТ РАН), А.В.Каспарову (ГАИШ МГУ), И.Н.Сибгатуллина (Институт океанологии РАН), Д.В.Боневу (ИКИТ БАН, Болгария).

Автор хотел бы выразить благодарность людям, чья поддержка в разное время сыграла для него важную роль: Н.Н.Нефедову, А.Н.Боголюбову, Н.Е.Шапкиной, Н.И.Шакуре, Р.В.Шамину, К.А.Постнову.

Наконец, автор не может не упомянуть своих более молодых коллег и учеников: Т.Т.Хасаеву, В.В.Пушкарева, М.В.Пашенцеву, Е.П.Георгиевскую, И.А.Федотова, С.А.Елистратова, К.Ю.Мальшеву, А.Д.Хохрякову, М.Г.Сердюкова, А.А.Таранюка, А.П.Степанову, Е.Н.Жихареву.

# Глава I. Магнитные поля в проводящей среде и их описание

Настоящая глава содержит общий обзор вопросов, связанных с моделями промежуточного типа для эволюции магнитных полей в проводящей среде. Приводятся как исторические данные, так и результаты ранних работ автора. Описан вывод усредненных уравнений, которые могут быть получены с учетом того, что в течении можно выделить крупномасштабный «фон» и мелкомасштабные возмущения скорости, что также приведет к расщеплению магнитного поля на регулярную и турбулентную составляющие. Уравнение для эволюции регулярной части поля выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle \Delta t^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \langle v_x^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \langle v_y^2 \rangle \Delta t^2 + \\ + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \langle v_z^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \Delta t. \end{aligned}$$

После этого продемонстрировано, как в случае короткокоррелированного течения и при условии достаточно малой вязкости данное уравнение переходит в уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \nu \Delta \mathbf{B}.$$

где  $\alpha \sim \langle \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \rangle$ .

Данное уравнение играет принципиальную роль в теории динамо и описывает рост магнитного поля. Тем не менее, оно выведено в линейном случае, и необходимо учесть подавление альфа-эффекта. В простейшем случае можно использовать алгебраический закон  $\alpha \sim (1 - B^2 / B^{*2})$ , где  $B^*$  характеризует равномерное распределение по энергии между турбулентными движениями среды и магнитным полем. Более точную форму закона для подавления роста магнитного поля можно записать, используя уравнение для эволюции магнитной спиральности  $\chi$ , представляющей собой скалярное произведение магнитного поля и его векторного потенциала, а также являющейся интегралом движения:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \chi = 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot} \mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi + \eta \Delta \chi.$$

После этого автор показывает, что магнитные поля индуцируют возникновение течений, обладающих кинематической спиральностью:

$$\langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle \approx \frac{1}{4\pi l^2} \langle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle,$$

что позволяет рассмотреть влияние магнитной спиральности как поправки к коэффициенту, отвечающего за альфа-эффект

## **§1. Исследования различных процессов в магнитной гидродинамике и роль двумерных моделей**

Магнитные поля играют важную роль при исследовании процессов, которые происходят в таких астрофизических объектах, как Солнце, другие звезды, галактики и т.д. Они оказывают большое влияние на протекание различных космических явлений и процессов, которые в настоящий момент хорошо исследованы специалистами как с теоретической, так и с наблюдательной точки зрения.

По-видимому, первым свидетельством существования космического магнетизма стало обнаружение солнечных пятен на Солнце, которые связаны с выходом магнитных полей на поверхность светила. Наиболее ранние данные о солнечных пятнах относятся к глубокой древности. Так, в древнекитайской «Книге перемен», которая была создана задолго до нашей эры, упоминается о том, как на Солнце были видны затемнения [24]. Впоследствии этот вопрос серьезно интересовал китайских и корейских астрономов, которые пишут о том, что видели на Солнце нечто подобное яйцам и различным птицам [25]. В античные времена о солнечных пятнах упоминал один из учеников Аристотеля Феофраст [25]. Про солнечные пятна было известно и в средневековой Европе. Так, Эйнгарт, один из самых знаменитых биографов Карла I Великого, короля франков в период с 768 по 814 год, упоминает в своей книге «Жизнь Карла Великого», что незадолго до смерти император «на Солнце в течение семи дней видел черное пятно» [26]. Один из первых рисунков на эту тему был сделан, судя по всему, Иоанном Вустерским в 1128 году [25], который изобразил в своем труде Солнце, на котором видны два крупных пятна [27]. Упоминание об этом явлении содержится также и в древнерусских источниках, таких как Никоновская летопись, в которой говорится про «места черны по солнцу, аки гвозди» [28]. Тем не менее, все указанные наблюдения проводились не сколько из научных, сколько из мистических или астрологических целей.

Первые систематические наблюдения солнечных пятен были проведены Галилеем – это один из основных результатов, полученных им с помощью его знаменитой зрительной трубы. В его «Письмах о солнечных пятнах», которые он издал в 1613 году, приводятся зарисовки пятен, которые наблюдались им на протяжении нескольких дней [25]. Кроме него, примерно в то же

время эти пятна были открыты Шейнером [27], который писал о них в 1612 году в виде нескольких писем под псевдонимом «Апелль», направленных Марку Уэлсеру, известному аугсбургскому меценату и покровителю науки тех времен [27]. Однако в отличие от Галилея, он не сразу осознал, что они являются частью структуры самого Солнца, и считал, что они являются проходящими перед солнечным диском планетами, которые расположены ближе к Солнцу, чем Меркурий. Тем не менее, спустя два десятилетия он признал, что открытые им объекты действительно находятся на поверхности Солнца [27].

Открытие Галилея вызвало большое внимание в различных кругах. Так, они вызвали сопротивление со стороны инквизиции: еще со времен Аристотеля считалось, что Солнце является «идеальным» небесным телом, и поэтому наличие на нем пятен входило в противоречие с данной точкой зрения. Кроме того, на протяжении нескольких десятилетий в семнадцатом веке во Франции правил король Людовик XIV, который был прозван «Королем – Солнцем», в связи с чем все, что было связано с ближайшей к нам звездой, вызывало у него огромный интерес. В том числе для этого им была создана в 1667 году Парижская обсерватория, одной из основных целей которой стало изучение солнечных пятен. Интересно, что именно к этому периоду относится так называемый Маундеровский минимум – длительный период, в течение которого число пятен на Солнце было заметно меньшим, чем обычно [29]. (Это время иногда ассоциируют с так называемым «малым ледниковым периодом».) Так или иначе, наблюдения за солнечными пятнами можно считать одними из старейших наблюдений в истории астрономии, проводившимися систематически. Так, довольно быстро было обнаружено наличие цикличности в количестве и расположении пятен. Их число увеличивается и уменьшается с периодом около 10 – 11 лет.

Тем не менее, на протяжении довольно долгого промежутка времени природа солнечных пятен была не вполне понятной. Лишь в середине XIX века Генри и Александер показали, что области пятен излучают меньше, чем окружающие их части поверхности Солнца. Впоследствии измерения температуры солнечных пятен проводились Лэнгли в 1875 – 1874 годах, Уилсоном в 1893 – 1894 и другими авторами [30]. Лишь заметно позже стало очевидно взаимосвязь между солнечными пятнами и солнечным магнитным полем. Первые наблюдения магнитных полей солнечных пятен были проведены в начале прошлого века Хейлом [31]. Они показали, что Солнце в реальности имеет не 11-летний, а 22-летний цикл активности. Хотя число пятен и повторяется каждые 11 лет, эта картина соответствует противоположной направленности солнечного магнитного поля. Если же говорить про направленность магнитных полей, то она совершает колебания именно с двадцатидвухлетней периодичностью [32].

Хотя вклад указанных выше работ в изучение космических магнитных полей, несомненен, важно отметить, что в начале XX века солнечные магнитные поля изучались скорее с

описательной точки зрения. Идеи о том, что они могут быть как-то связаны с характером течений проводящей среды, возникли на несколько десятилетий позднее, когда были разработаны представления об эволюции магнитных полей в проводящих средах. В 1950-е годы Паркер предположил, что генерация магнитного поля Солнца может быть связана с действием так называемого механизма динамо, и предложил основные модельные уравнения, которые составляют суть хорошо известной в настоящее время модели динамо Паркера [33]. Его основная суть (как и практически любого динамо, действующего в различных объектах) состоит в переходе энергии турбулентных движений проводящей среды в энергию магнитного поля. Данный переход связан с совместным действием дифференциального вращения (астрофизические тела или, по крайней мере, их части, вращаются не твердотельно) и альфа-эффекта, который характеризует закрученность турбулентных движений исследуемой среды.

Модели для солнечного магнитного поля составили одну из первых теорий, которая достаточно полно – как с точки зрения соответствия наблюдениям, так и с позиций теоретической непротиворечивости – описывали генерацию магнитных полей за счет течений проводящей среды. Тем не менее, они были не единственными в своем роде.

Примерно в то же самое время вышел ряд работ, посвященных объяснению возникновения земного магнитного поля. Напомним, что проявления земного магнетизма были известны еще с древних времен, став основой для работы компаса и других навигационных приборов. В ранние исторические эпохи в науке господствовала точка зрения о том, что действие компаса связано с тем, что его стрелка притягивается Полярной звездой (которая также использовалась путешественникам для определения направления на север). Тем не менее, во время знаменитого плавания Колумба, во время которого был открыт Американский континент, было замечено, что при пересечении Атлантического океана стрелка повернулась на несколько градусов в западную сторону. Это породило первые сомнения в том, что стрелка компаса показывает в точности на север. Спустя два десятилетия немецкий специалист Гартман совершил еще более ошеломляющее открытие: подвесив магнитную стрелку за ее центр масс, он обнаружил, что она стремится встать под некоторым углом к горизонтальной поверхности! Указанные «аномалии» дали толчок как к наблюдательному изучению структуры магнитного поля, так и к попытке ее теоретического объяснения. В 1600 году британский естествоиспытатель Гильберт предположил [34], что внутри Земли находится крупнейший магнит, полюса которого совпадают с географическими полюсами нашей планеты. Он связывал это с тем, что Земля представляет собой огромный металлический шар, который является намагниченным, и даже изготовил в своей лаборатории небольшую модель, наглядно демонстрирующий предложенный им механизм. То, что магнитная стрелка показывала не в точности с юга на север, он объяснял тем, что материи каким-то образом ее «притягивают» и искажают картину. Несмотря на

очевидную наивность этой модели и не всегда оправдывавшиеся предсказания, стоит отметить, что принципиальная идея была правильной: земное магнитное поле обусловлено не притяжением к какой-либо звезде, а внутренним строением нашей планеты. Через несколько десятилетий британский исследователь Геллибрандт впервые обнаружил проявления вековых вариаций земного магнитного поля, показав, что его направление меняется со временем [35].

Тем не менее, существовавшие в те времена приборы не могли дать данных о напряженности магнитного поля Земли, показывая лишь его направление. Ситуация несколько изменилась лишь спустя два столетия, когда были разработаны первые представления об электромагнитных полях [36]. В первой половине XIX начались систематические изучения земного магнитного поля. Так, в 1824 году профессором Казанского университета Купфером была создана первая в России магнитная обсерватория. Примерно в то же время были построены похожие обсерватории в Санкт-Петербурге, Париже и других городах в различных странах [37]. К середине XIX века английские мореплаватели открыли северный и южный магнитные полюса Земли, добравшись до мест, где магнитная стрелка направлена вертикально.

Одна из первых работ, реалистично описывающих земное магнитное поле с теоретических позиций, принадлежит известному немецкому математику Гауссу, который смог представить различные компоненты магнитного поля как функции географических координат. Эти данные до сих пор представляют собой определенный научный интерес, поскольку дают достаточно реалистичную картину для магнитного поля.

Однако, точно так же, как и в случае с солнечным магнитным полем, систематическое описание эволюции земного магнитного поля было создано лишь спустя столетие, когда были сформулированы базовые уравнения и положения новой на тот момент области науки – магнитной гидродинамики. Одной из первых таких работ была статья Эльсассера, которая описывала с магнитогидродинамических позиций эволюцию земного магнитного поля, и позволяла описывать различные эффекты, связанные с его наблюдательными проявлениями [38]. Впоследствии теория земного магнетизма была существенно развита в работах специалистов, дав объяснение большому количеству интересных явлений, таких как, например, инверсии магнитного поля. В настоящее время практически не вызывает сомнений, что земной магнетизм теснейшим образом связан с действием механизма динамо, в чем-то аналогичном солнечному.

Исследование магнитных полей других важнейших с точки зрения теории классических полей объектов – галактик – началось несколько позже [39], что связано с несколько более высокими требованиями к наблюдательным инструментам. (Если в случае с Солнцем для наблюдения пятен достаточно простого телескопа, а компас есть в хозяйстве у любого уважающего себя человека, то проявления галактического магнетизма намного менее очевидны с точки зрения обывателя.)

Наиболее очевидные свидетельства существования крупномасштабных магнитных полей в галактиках появились тогда, когда ученые стали исследовать космические лучи, приходящие к нам из дальних уголков галактики. Нетрудно оценить, что при характерной скорости около 10 км/с и толщине галактического диска около 1000 пк заряженные частицы будут покидать нашу галактику за времена порядка 100 млн лет. При этом, пространственное распределение тех лучей, которые были детектированы в середине прошлого века, говорит об обратном, что позволило предположить существование крупномасштабных магнитных полей, которые заметно «искривляют» траектории частиц и заставляют их оставаться в пределах нашей Галактики [40]. Другим очевидным свидетельством наличия магнитного поля в Млечном Пути стало исследование нетеплового излучения, которое получали несколько десятилетий назад радиотелескопы. Академиком Гинзбургом было показано, что оно представляет собой синхротронное излучение, спектр которого на высоких частотах свидетельствует о наличии в Галактике магнитных полей с индукцией порядка микрогаусса [41]. Чуть позже для исследования магнитных полей галактик был использован метод, являющийся в настоящий момент основным для изучения подобных структур, связанный с измерением меры фарадеевского вращения радиоволн, имеющих поляризацию [42]. Дело в том, что проходя через среду, радиоволна заставляет электроны совершать колебания в определенном направлении. Если там присутствует магнитное поле, то оно начинает воздействовать на электроны с помощью силы Лоренца, «поворачивая» плоскость их колебаний. Это вызывает последующий поворот плоскости поляризации. Таким образом, проходя через среду, электромагнитная волна меняет направление поляризации. Измеряя поляризационный угол (желательно делать это для возможно большего числа длин волн) возможно восстановить структуру магнитного поля в Галактике. В случае с Млечным Путем наблюдения ведутся, как правило, с помощью пульсаров, от которых распространяется поляризованное излучение. В настоящий момент известно порядка  $10^3$  объектов [43], которые могут служить для определения как направления, так и величины магнитного поля, параллельного лучу зрения. Постоянно растущее число источников позволяет получать все более точные данные для галактических магнитных полей, проводя анализ их мер фарадеевского вращения [44] [45] [46].

С теоретической точки зрения генерация галактического магнитного поля, так же как и в случае солнечных и земных магнитных полей, также описывается с помощью механизма динамо [47]. Тем не менее, его описание несколько отличается от того, что было характерно для звезд и планет, имеющих несколько иную симметрию, нежели галактические диски. Опишем его работу в данном случае немного подробнее, поскольку он будет составлять существенную часть настоящего диссертационного исследования.



Магнитное поле галактики состоит из двух основных частей. Первая связана с турбулентностью, и имеет примерно те же пространственные масштабы, что и турбулентные ячейки. В случае Млечного Пути и большинства других галактик характерные линейные размеры составляют величину порядка 50 – 100 пк. Их генерация объясняется за счет структуры турбулентности, и они достаточно быстро (естественно, в галактических масштабах) достигают своего максимального значения. Магнитное поле в данных ячейках ориентировано случайным образом, и при бесконечном количестве турбулентных ячеек можно было бы говорить о нулевом среднем значении. Однако, в реальности число ячеек является конечным. Так, при характерных линейных размерах галактического диска около 10000 пк и размере турбулентных ячеек около 100 пк типичное число этих ячеек составляет порядка  $10^4$ . В таком случае, согласно известным в теории вероятностей и математической статистике закономерностям, характерное стандартное отклонение для магнитного поля составляет величину, обратно пропорциональную корню из числа ячеек, и прямо пропорциональную индукции магнитного поля в каждой из них. Это среднее магнитное поле может послужить «затравкой» для роста крупномасштабной части [47].

Что касается крупномасштабного магнитного поля, то оно имеет типичные линейные масштабы изменения, сопоставимые со всей галактикой. Генерация данного поля обусловлена одновременным действием альфа-эффекта и дифференциального вращения. Дифференциальное вращение позволяет «переработать» радиальную составляющую поля в азимутальную, одновременно вызывая ее увеличение по модулю. В свою очередь, альфа-эффект, который связан с закрученностью турбулентных движений, превращает азимутальную компоненту магнитного поля в радиальную. Их совместное действие позволяет обойти теоремы запрета (сформулированные для плоских течений, для которых невозможно действие динамо) и допускает генерацию крупномасштабных магнитных полей [2]. Их работе противодействует турбулентная диффузия, которая стремится «размыть» все крупномасштабные структуры поля. По этой причине механизм динамо является пороговым эффектом: генерация магнитного поля возможна только в том случае, если совокупная интенсивность альфа-эффекта и дифференциального вращения выше, чем «соперничающей» с ними турбулентной диффузии. По этой причине механизм динамо является пороговым: генерация магнитного поля характеризуется безразмерным динамо-числом. Оно состоит из непосредственно наблюдаемых характеристик галактического диска (его полутолщины, угловой скорости вращения и скорости турбулентных движений), и имеет критическое значение. В том случае, если динамо-число выше критического, то происходит рост магнитного поля, в противном случае оно может лишь затухать [47].

Магнитные поля в галактиках чаще всего описываются с помощью так называемого планарного приближения, которое было разработано для тонких дисков [14]. Оно исходит из того факта, что магнитное поле в основном лежит в плоскости, а производные магнитного поля вдоль

направления, перпендикулярного к плоскости галактического диска, можно заменить на алгебраические выражения или восстановить из условия бездивергентности. Это позволяет свести задачу изучения магнитного поля к решению уравнений для двух компонент магнитного поля, зависящих от двух (или даже одной – в осесимметричном случае) переменных [48]. Это с одной стороны, заметно облегчает процесс численного решения уравнений (требуются меньшие вычислительные ресурсы), с другой – дает возможность сделать простые аналитические оценки для магнитного поля.

Подобный подход является общим для всех моделей динамо, популярных при изучении различных процессов, происходящих в астрофизических и иных объектах. Конечно, в настоящее время уровень развития вычислительной техники намного выше, чем 2 – 3 десятилетия назад, и вполне возможно проводить прямое численное решение имеющихся уравнений. Тем не менее, степень поучительности полученных результатов не вполне понятна. С одной стороны, решение полных трехмерных уравнений требует задания параметров течения, которые для большинства небесных тел известны весьма неточно. Это требует рассмотрения тех или иных моделей для них, которые содержат в себе большой «произвол», могущий обернуться возможностью получить практически любое наперед заданное решение, не очень значительно варьируя те или иные параметры. Наконец, даже если эти проблемы будут как-то решены, серия численных экспериментов не позволяет оценить, каким образом магнитные поля и характер их роста принципиально зависят от входящих в систему уравнений параметров. Все это говорит о том, что в настоящий момент для магнитного поля в проводящей среде весьма востребованными являются эволюционные модели промежуточного типа, такие, как, например, динамо Паркера в случае солнечного динамо [6] или планарное приближение [14] при изучении магнитных полей галактик. Они позволяют построить решения уравнений для задач, имеющих определенную степень симметрии, причем это оказывается весьма полезным как с позиций численного моделирования, так и при аналитическом исследовании происходящих процессов.

Кроме существующих моделей, описанных выше, значительный интерес представляют другие объекты, при исследовании которых модели промежуточного типа также должны представлять весьма существенный интерес. Они связаны как с астрофизическими задачами, так и с научными проблемами, с которыми мы можем столкнуться, работая в лаборатории.

Так, большой интерес представляют магнитные поля во внешних галактических кольцах [49]. Они расположены на некотором расстоянии от основной части галактики, в ряде случаев лежат в плоскости, перпендикулярной к галактическому диску. Внутри данных объектов также присутствует ионизованная компонента межзвездного газа, можно предполагать наличие закрученности турбулентных движений, которая обуславливает действие альфа-эффекта. В связи с этим вполне логично рассмотреть процесс генерации магнитных полей в подобных объектах.

Данный процесс может быть исследован с помощью планарного приближения. Тем не менее, в отличие от основной части галактики, базовые предположения данной модели могут не выполняться. В частности, уже нельзя говорить о том, что размеры в вертикальном направлении существенно меньше радиальных. Это ставит нас перед необходимостью разработки модели, которая бы исследовала среди прочего вертикальную структуру магнитного поля. К таким моделям можно отнести модель динамо в торе, которая должна исходить из несколько иных соображений о структуре магнитных полей [15].

Так, в отличие от планарного приближения, в рамках которого можно считать, что поле описывается в рамках цилиндрической системы координат с помощью радиальной и угловой компоненты, для которых предполагается косинусоидальная зависимость от расстояния до экваториальной плоскости, в данном случае разумно использовать другой подход, который бы с одной стороны сохранил прозрачность уравнений (это важно с точки зрения экономии вычислительных ресурсов), с другой – дал бы возможность описывать вертикальную составляющую магнитного поля. Этого можно добиться, предполагая, что магнитное поле представляется в виде комбинации тороидальной составляющей, вычисляемой в явном виде, а также части векторного потенциала, которая соответствует направлению вращения кольца [6] [15]. Это дает возможность изучить полоидальную часть магнитного поля: результат взятия ротора для данной части векторного потенциала даст как компоненту, направленную в сторону центра, так и вертикальную составляющую.

При составлении уравнений необходимо учитывать, что полоидальная компонента магнитного поля заметно меньше тороидальной – в таком случае удастся избавиться от ряда слагаемых, которые не несут в себе большой информации о поведении решения. (Впрочем, конечно, вполне можно решать и полную задачу – но это не вполне рационально и затрудняется аналитическое исследование возникающих уравнений.) Модель в результате также сводится к системе из двух уравнений [15], которые имеют параболическую природу и допускают как численное решение при использовании довольно скромных ресурсов, так и аналитические оценки поведения магнитного поля в зависимости от времени. Точно также можно построить выражения для критических чисел, порога возбуждения динамо и т.д. Немаловажно отметить, что в случае использования модели динамо в торе, исходящей из таких соображений, несколько изменятся граничные условия для магнитного поля. Так, в случае модели динамо в диске на границе ставились в простейшем случае условия Дирихле, которые предусматривали нулевое значение магнитного поля на большом удалении от центра. В случае модели динамо в торе условие для векторного потенциала превращается в условие Неймана – которое говорит о том, что производная векторного потенциала (например, по нормали к границе) будет нулевой, что позволяет обеспечить нулевые поля на границе области. Важно также отметить, что если

говорить о тех случаях, когда в случае планарного приближения рассматриваются условия Неймана (что может характеризовать «непротекание» поля через границу), то их аналог в случае тороидального динамо выглядит намного интереснее [15]. Для явно находимой угловой компоненты поля, конечно, будут записываться примерно те же условия, а для компоненты векторного потенциала придется ставить условия на вторые производные, что представляет интерес не только с точки зрения моделирования магнитного поля, но и в плане изучения свойств решений подобных задач с позиций математической физики. Важно отметить, что в таком случае спектр собственных значений и собственные функции будут заметно меняться, что может изменить порог возбуждения и характерные зависимости поля от пространственных координат.

Подобные соображения, связанные с явным использованием векторного потенциала, всегда широко использовались при изучении магнитных полей на Солнце: в силу геометрии разумно использовать именно такую структуру поля. Тем не менее, в галактиках и подобных им объектах подобный подход практически не встречается. Конечно, можно отметить работы Дейнцера и других авторов [15] [50], в которых обсуждались общие вопросы, связанные с динамо в торе. Тем не менее, данные работы, вышедшие более 20 лет назад, использовали тороидальные координаты. Хотя это и разумно с чисто математической точки зрения, результаты оказываются достаточно непрозрачными, и для перехода к координатам, с которыми привыкли работать специалисты по астрономии, необходимо выполнить довольно громоздкие преобразования. Это послужило одной из причин того, что подобный подход казался научному сообществу неоправданным, и такие работы не получили большой популярности. Кроме того, в тот момент была не вполне понятна область применимости подобных моделей – внешние кольца галактик не были широко известны, не являлись очевидными и другие возможные применения, такие как, к примеру, исследование магнитных полей при различных аккреционных процессах. Предложенные в данной работе идеи [51] [52] [53] [54] [55] могут вызвать возрождение интереса к подобным подходам, и быть широко использованы при моделировании магнитных полей.

Можно ожидать, что подобная модель окажется намного более эффективной для исследования магнетизма внешних колец и других космических объектов подобной структуры, чем планарное приближение. С одной стороны, она изначально построена «для их геометрии», с другой – в ее рамках предусматривается намного более богатый спектр характеристик магнитного поля, который может быть исследован. В частности, планарное приближение принципиально предполагает квадрупольную структуру магнитного поля (когда магнитное поле имеет одинаковые знаки по обе стороны от экваториальной плоскости), в то время как модель динамо в торе при активных турбулентных движениях и быстром вращении может давать и возникновение полей дипольной симметрии (соответствующей противоположным знакам по разные стороны от экваториальной плоскости) [51].

Положения, которые должны являться основополагающими для модели динамо в торе, могут использоваться также для исследования магнитных полей в основной части галактики. Так, ряд галактических дисков имеет достаточно большую толщину (размеры в вертикальном направлении не являются пренебрежимо малыми по сравнению с радиальными), поэтому далеко не факт, что для них разумно было бы использовать планарное приближение в галактическом динамо. Конечно, в таком случае нужно существенно доработать основные положения модели динамо в торе, но основные идеи в таком случае окажутся достаточно близкими. Точно также необходимо переработать граничные условия, которые, кстати говоря, могут влиять на порог возбуждения магнитного поля. Хотя в настоящий момент принято считать, что галактики обладают магнитными полями квадрупольной симметрии, интересно было бы изучить возможность генерации структур дипольного типа. С одной стороны, это представляет самостоятельный математический интерес, с другой – вполне возможно, что в пока не обнаруженных объектах могут присутствовать настолько интенсивные движения, которые дадут возможность создать дипольные структуры.

Кроме того, разрабатываемые в рамках данного приближения представления могут быть исключительно актуальны при изучении процессов генерации магнитных полей в диске переменной толщины. Так, в настоящее время хорошо известно, что полутолщина галактического диска увеличивается по мере удаления от центра к краям. В случае основной части галактического диска данным эффектом можно пренебречь, поскольку он не оказывает существенного влияния на генерацию магнитного поля. Тем не менее, при удалении от центра, при рассмотрении возможности возбуждения магнитного поля на расстояниях 15 – 20 килопарсек от центра, изменение полутолщины, входящей в уравнения для магнитного поля, может оказаться существенным. В частности, это может повлиять на значение порога генерации. В связи с этим планарное приближение, хотя и может использоваться для получения простейших размерных оценок, оказывается не вполне применимым для данной ситуации, поскольку оно не отвечает на вопрос о том, как именно ведет себя магнитное поле около верхней и нижней границы. В связи с этим представляется исключительно актуальным рассмотрение процесса генерации с позиций, аналогичных тому, что было использовано при построении модели динамо в торе.

На протяжении нескольких десятилетий большое внимание научного сообщества привлекают процессы аккреции [56] [57] [58]. Аккреционные диски образуются в двойных системах около белых карликов, при падении вещества на черную дыру, необходимо также упомянуть и протопланетные диски. Вполне понятно, что в таких объектах присутствуют достаточно быстрые движения, которые могут инициировать действие динамо и связанный с ним рост магнитного поля. Кроме того, неоднократно отмечался тот факт, что магнитное поле может

объяснять большое количество различных процессов в аккреционных дисках [56]. Так, с ним, скорее всего, связан перенос момента количества движения. Все это ставит нас перед необходимостью изучения явления генерации полей в подобных объектах.

Можно отметить ряд работ, которые связаны с прямым численным моделированием процессов, которые происходят в аккреционных дисках [59] [60]. Для этого необходимо совместно решать уравнения Навье – Стокса и уравнения магнитной гидродинамики. Подобная задача будет принципиально трехмерной, поскольку от нее требуется явное описание турбулентных движений. Решение этих уравнений с приемлемой точностью требует исключительно высоких вычислительных ресурсов, и даже при использовании суперкомпьютера процесс расчета будет занимать крайне большое время. Кроме того, получаемые результаты будут не вполне прозрачны для анализа, поскольку зависят от большого количества параметров, и мы по сути имеем лишь серию вычислений, полученных при характеристиках, заданных различным путем.

В случае применения эволюционных моделей промежуточного типа можно построить решение принципиально иначе. Если воспользоваться одной из моделей, описанных выше, то процесс задачи оказывается намного менее затратным с точки зрения вычислений, и допускает асимптотический анализ. Таким образом, можно сделать в том числе и качественную оценку того, в каких случаях возможна генерация магнитных полей.

Так, ранее было показано, что магнитное поле может моделироваться с использованием планарного приближения, которое обсуждалось выше относительно галактик [5]. В случае, если мы пользуемся безразмерными переменными, составленными из характерных значений коэффициента турбулентной диффузии, полутолщины диска, и его радиуса, возможно получить крайне схожую картину для уравнений, описывающих процесс генерации магнитного поля. Естественно, нужно учитывать несколько иные параметры, входящие в систему уравнений. В частности, в случае галактических дисков их вращение, как правило, описывается с помощью брандтовского закона, в рамках которого угловая скорость описывается при помощи отношения некоторого характерного значения и квадратного корня из многочлена второй степени от расстояния до центра диска. В случае аккреционного диска имеет смысл говорить о кеплеровском законе вращения, когда все определяется притяжением центрального объекта (обратно пропорционального второй степени расстояния до центра) [56], что дает угловую скорость вращения, обратно пропорциональную степени  $3/2$  до расстояния от центра. Это приводит к постоянному значению динамо-числа по всему аккреционному диску, что может быть связано с иным поведением магнитного поля. Кроме того, нельзя не отметить того, что в случае с данными объектами граничные условия могут быть другими. Так, имеет смысл рассматривать условия специального вида на внутреннем радиусе диска. В отличие от галактических дисков,

для аккреционных гораздо более существенно влияние центрального объекта. Кроме того, тело, находящееся в центре (например, белый карлик), может само обладать достаточно существенным магнитным полем, и заметно влиять на эволюцию поля в диске. Это требует нас быть особо внимательными, исследуя процессы вблизи от границы.

Кроме планарного приближения, весьма востребованным может оказаться и модель динамо в торе. С одной стороны, в ряде случаев около массивных объектов образуются объекты тороидальной формы – в частности, результаты моделирования показывают, что около центральной черной дыры в галактиках вполне могут существовать вращающиеся торы. Вполне логично предполагать, что в них также образуются регулярные магнитные поля. Наконец, даже если считать, что мы имеем дело с аккреционным диском, важно учитывать, что его полутолщина может зависеть от расстояния до центрального тела по некоторому сложному закону, что делает незаменимыми подходы, которые ранее были предложены в рамках модели динамо в торе. Данная модель учитывает вертикальную структуру поля, и также позволяет учесть влияние граничных эффектов на верхней и на нижней грани диска аккуратно и достаточно точно.

Достаточно очевидно, что магнитные поля могут оказывать влияние на турбулентные движения. С ними связано действие силы Лоренца, которая заметно влияет на движение проводящей среды в таких объектах, как галактики, их внешние кольца, аккреционные диски и т.д. Особенно важно отметить, что их влияние носит «закручивающий» характер. Таким образом, к примеру, магнитные поля галактик могут очень существенно влиять на поведение турбулентности в межзвездном газе, менять ее характерные масштабы, приводить к сглаживанию определенных пиков [54] [55]. Построенные выше модели для магнитного поля могут помочь объяснить целый ряд эффектов. Так, в случае «основной части» галактики достаточно очевидно, что возникновение турбулентности связано с взрывами сверхновых и другими подобными эффектами, которые заметно влияют на характер мелкомасштабных движений. Тем не менее, если говорить о внешних кольцах, то там влияние сверхновых заметно снижено, но при этом вполне наблюдаются турбулентные движения. Возможным объяснением их существования вполне могут являться магнитные поля, которые сгенерированы в рамках теории динамо. Очевидным достоинством наших простых моделей является то, что они дают возможность сделать принципиальные аналитические оценки такого влияния. Даже если речь идет о численном моделировании, оно окажется менее затруднительным с точки зрения требований к вычислительным ресурсам.

Нельзя также не отметить и влияние магнитного поля на другие эффекты, например, на движение пыли в галактике [61]. В частности, она может быть связана с механизмом выноса заряженных пылинок на большие расстояния за пределы галактического диска. Пылинки «наматываются» на линии магнитного поля, и можно говорить о том, что они в целом двигаются

вдоль его направления. При их исследовании также крайне важно иметь простые и сводимые к несложным аналитическим закономерностям модели для магнитного поля, которые позволят достаточно быстро вычислить траектории пылинок.

На протяжении многолетнего изучения процесса генерации магнитных полей за счет механизма динамо, у научного сообщества в соответствующей области неоднократно возникал вопрос о том, ограничиваются ли описываемые ей закономерности лишь астрофизическими приложениями, или возможно воспроизведение происходящих на Солнце или в галактиках процессов в земных условиях?

Основные сложности связаны с тем фактом, что возможность генерации магнитного поля определяется магнитным числом Рейнольдса, которое представляет собой отношение произведения характерного линейного масштаба и характерной скорости к типичному значению коэффициента турбулентной диффузии. Оценки показывают, что для того, чтобы была возможна генерация магнитных полей даже в самых легко реализуемых в земных условиях конфигурациях, необходимо значение магнитного числа Рейнольдса порядка нескольких десятков [11]. В то же время, в астрофизике за счет больших расстояний достаточно распространены магнитные числа Рейнольдса, имеющие порядок  $10^3$  и более.

Реализовать в земных условиях хотя бы минимально необходимые числа возможно при выполнении достаточно специфических требований [11]. Как правило, для этого используют жидкие металлы, которые могут двигаться под действием различных механических воздействий. Они обладают высокой проводимостью, поэтому можно ожидать, что они будут хотя бы в какой-то степени воспроизводить процессы, происходящие в космическом пространстве.

Способы возбуждения магнитного поля в лабораторных условиях предлагались еще с середины XX века. В простейшем случае можно попытаться реализовать так называемое униполярное динамо, которое, по сути, является даже не вполне гидродинамическим (в простейшем случае оно не требует того, чтобы в установке присутствовала жидкость). Впервые подобный механизм был предложен в работах Булларда [62]. Оно представляет из себя замагниченный диск, внешняя граница которого соединена посредством катушки с осью его вращения. За счет индукционных эффектов в катушке возникает возрастающий ток, который вызывает возникновение дополнительного магнитного поля. Данный механизм воспроизводит практически все основные требования к динамо – так, покоящийся контакт между диском и контактом катушки по сути является проявлением дифференциального вращения. Несколько модифицированный гидродинамический вариант униполярного динамо была реализована в ходе экспериментов в Лионе. Поскольку там использовались течения Кармана в жидком металле, то данное динамо иногда называют в литературе динамо Булларда – Кармана [63].



Другим возможным механизмом динамо, которые потенциально возможно реализовать в лабораторных условиях, был предложен Герценбергом [64]. Он рассмотрел в своих работах два шара, которые вращаются вокруг своих осей, причем данные оси не совпадают друг с другом. В таком случае возникают турбулентные потоки, которые могут вызывать действие механизма динамо. Впоследствии одна из модификаций такого механизма получила и экспериментальное выражение [65]. Правда, стоит отметить, что он был «твердотельным», и не использовал гидродинамических эффектов. Поверхность используемых шаров была покрыта ферромагнетиками, что обеспечивало генерацию магнитного поля.

Еще один, изначально также твердотельный, механизм динамо, допускающий экспериментальную реализацию, был предложен Пономаренко [66]. В рамках его модели можно взять бесконечный цилиндр, который при вращении будет вызывать возникновение винтового магнитного поля. Достаточно быстро возникли идеи, согласно которым можно заменить вращение твердотельного цилиндра похожей на него струей жидкости. Одним из очевидных преимуществ, которые привлекали внимание исследователей, было то, что при подобной структуре течения необходимо брать одно из самых низких магнитных чисел Рейнольдса среди всех подобных моделей. При определенных условиях оно могло опускаться даже ниже 18.

Динамо Пономаренко послужило основой для создания установки, которую начали создавать в Институте физики Латвийского университета в 1980-е годы. Работы проводились на протяжении более чем десяти лет, и в конечном итоге увенчались успехом. В 1999 году впервые в истории удалось получить генерацию магнитного поля в созданной установке [67]. Всего лишь на несколько недель позже успех был достигнут и на немецкой установке в Карлсруэ. Все это дало основание говорить о том, что механизм динамо действительно может описывать генерацию магнитных полей, и вполне возможно воспроизвести процессы, аналогичные тем, что происходят на Солнце, в галактиках и других космических объектах.

Примеры, описанные выше, говорят об исключительной важности течений жидких металлов с точки зрения исследования действия динамо, что говорит о необходимости изучения соответствующих процессов. Кроме того, подобные явления имеют важность и с чисто прикладной точки зрения. В частности, они представляют интерес с точки зрения металлургии, поскольку соответствующие магнитогидродинамические эффекты могут играть определенную роль (как позитивную, так и негативную) при переплаве и в других случаях.

Одним из примеров, тесно связанных с этим, является электровихревое течение [16] [17] [68]. Оно возникает при прохождении электрического тока, имеющего меняющуюся плотность, через проводящую среду. В таком случае возникает магнитное поле, которое взаимодействует посредством силы Лоренца с жидким металлом. Это провоцирует возникновение закрученных движений в среде. Этот процесс чем-то подобен известному еще из школы примеру, когда

проводники, по которым протекает ток одного и того же направления, притягиваются друг к другу [69].

Процессы, связанные с электровихревыми течениями, представляют большой интерес для самых разных областей науки и техники [17]. Так, они возникают в металлургии, когда речь идет о движении расплавленного металла в случае электродугового и электрошлакового переплава. Кроме того, они характерны для электросварки, если говорить о процессах в полостях деталей, которые свариваются [70].

С практической точки зрения достаточно эффективно изучение электровихревых течений, которые возникают в полусферическом сосуде. Он заполнен жидким металлом, обладающим высокой проводимостью. Одним из самых популярных в данном отношении является сплав индий-галлий-олово [68]. В центр помещается электрод (как правило, также полусферической формы), от которого распространяется электрический ток. Вторым электродом служит внешняя поверхность сосуда. Ввиду увеличения расстояния от электрода можно говорить о том, что плотность тока уменьшается, и поэтому выполняется одно из основных условий возникновения ЭВТ.

Электровихревые течения изучаются различными группами на протяжении нескольких десятилетий как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения. Одними из первых работы по решению соответствующих уравнений были проведены Созоу и Пикерингом в 1970-е годы [22] [23]. Первоначально ими было рассмотрено электровихревое течение в полусферическом сосуде, в центре которого располагался точечный электрод. Затем были построены решения для случая, когда центральный электрод, хотя и является протяженным, но имеет плоскую форму. Результаты представлялись в виде рядов по специальным функциям математической физики, и на первый взгляд могло показаться, что даже в такой простой постановке они являются достаточно сложными для понимания и интерпретации. Возможно, именно это предопределило тот факт, что в дальнейшем большинство исследователей концентрировали свое внимание только на численных решениях.

Можно отметить обширный объем работ, который был выполнен в Институте физики Латвийского университета начиная с 1970-х годов [16] [71]. В настоящий момент исследования процессов, связанных с электровихревыми течениями, активно ведутся в Магнитогорском техническом университете имени Г.И.Носова [19], Институте механики сплошных сред Уральского отделения РАН (г.Пермь) [18], Объединенном институте высоких температур РАН (г.Москва) [17]. Из зарубежных коллективов можно отметить группы, работающие в немецком исследовательском центре имени Гельмгольца «Дрезден-Розендорф» [20], а также в австрийском Университете Леобена [21].

Как уже говорилось выше, большая часть теоретических работ по ЭВТ в настоящий момент проводится с использованием численных методов [21]. Это в каком-то смысле оправдано – особенно с учетом возросших мощностей персональных компьютеров и повышением доступности современных суперкомпьютерных систем. Большое количество как стандартных пакетов для расчета, так и создаваемых в исследовательских лабораториях программных комплексов позволяют проводить изучение течений с большой точностью, добиваясь хорошего пространственного разрешения [72]. Тем не менее, нельзя не отметить целый ряд очевидных недостатков подобного подхода.

Решение уравнений для подобных течений зависит от большого количества входных параметров. К ним можно отнести параметры тока, размеры сосуда, свойства самого расплава, граничные условия для входящих в систему уравнений функций и т.д. Хотя они известны и лучше, чем для астрофизических объектов, также существует некоторый произвол в их определении, что позволяет достаточно заметно варьировать решение в зависимости от выбора той или иной модели. Кроме того, совокупность решений, полученных в результате компьютерного моделирования, не позволяет ответить на целый ряд вопросов. Так, крайне затруднительно понять, от каких основных параметров зависит возникновение тех или иных эффектов, которые имеют большое значение для исследователей. Практически невозможно сделать разумные оценки того, при каких значениях входящих в систему величин можно будет достичь той или иной скорости, закрученности движений и т.д. Наконец, нельзя сбрасывать со счетов и определенную вычислительную сложность возникающих задач – хотя современные ресурсы и превышают те, что были несколько десятилетий назад, они не являются бесконечными.

Все это ставит нас перед необходимостью решения уравнений в рамках определенных приближений. Модели промежуточного типа являются в данном случае наиболее предпочтительным вариантом: с одной стороны, они дают возможность описать решение достаточно точно, поскольку не являются чересчур упрощенными (что неизбежно приведет к большим ошибкам). С другой стороны, они допускают довольно логичные аналитические решения [22] [23] (например, в виде хорошо сходящихся рядов), а также дают возможность сделать простые для понимания оценки поведения жидкого металла, позволяют вычислить критические значения, связанные с возникновением тех или иных эффектов и т.д.

В случае магнитной гидродинамики жидких металлов достаточно популярно представление решения в виде комбинации двух векторных функций: векторного потенциала и завихренности [73]. Так, поскольку с большой точностью допустимо считать жидкий металл несжимаемым, уравнение неразрывности для него переходит в условие бездивергентности. В таком случае, подобно тому, как это делается для магнитного поля, можно ввести векторный

потенциал скорости, ротор которого будет равен скорости. С другой стороны, можно воспользоваться завихренностью, которая представляет собой ротор скорости [20] [74].

Уравнение для эволюции завихренности можно получить, взяв ротор от обеих частей уравнения Навье – Стокса. Дополнительным преимуществом использования подобного подхода является то, что в таком случае можно исключить из рассмотрения давление, нахождение которого является в случае жидких металлов достаточно затруднительным [75].

Отдельный интерес представляет так называемое стоксово приближение. Оно исходит из того факта, что движения жидкости являются достаточно медленными, а также практически не меняются со временем. Это означает, что производными по времени можно пренебречь. Кроме того, слагаемые, содержащие степень скорости выше первой являются достаточно малыми, и могут быть также отброшены. В таком случае можно исключить члены, связанные с левой частью уравнения Навье – Стокса [76].

В таком случае уравнения для течения жидкости могут быть представлены в виде пары векторных уравнений для завихренности и векторного потенциала. Они будут являться эллиптическими [77], где в случае с завихренностью источником будет служить ротор силы (в данном случае – силы Лоренца, связанной с воздействием порожденного током переменной плотности магнитного поля на жидкость), а для векторного потенциала такую роль будет играть сама завихренность (если дважды взять ротор от векторного потенциала, то мы с очевидностью получим завихренность с обратным знаком).

Ввиду того, что мы рассматриваем осесимметричные течения, можно отметить, что как для завихренности, так и для векторного потенциала скорости существенными являются только компоненты, соответствующие азимутальному углу. Это означает, что система из шести скалярных уравнений (к которой сводятся два векторных) вырождается в пару скалярных соотношений для основных компонент интересующих нас векторов.

Данный факт может значительно упростить процесс решения уравнений. Так, для завихренности мы получаем обычное уравнение Пуассона с известным источником, для которого решение может быть построено в виде ряда по собственным функциям полушарового слоя [78]. В случае с векторным потенциалом скорости будет получаться уравнение примерно той же структуры, исследование которого возможно проводить с использованием аналогичного подхода. После этого, взяв производные от соответствующей компоненты векторного потенциала, мы можем получить компоненты скорости, которая будет иметь полоидальный характер.

Отдельный интерес в данном контексте представляют граничные условия. Так, в простейшем случае на границе исследуемой области можно поставить условия Дирихле, характеризующие нулевые значения как для завихренности, так и для векторного потенциала.

Тем не менее, хотя подобная ситуация и является довольно прозрачной с точки зрения математической физики, она не вполне хорошо описывает физическую сторону явления. Так, для уравнения Навье – Стокса естественным является условие прилипания. Если в случае с векторным потенциалом скорости можно считать, что его значение на границе действительно является нулевым, то с завихренностью все обстоит сложнее. Для нее необходимо использовать приближенные условия, обеспечивающие прилипание. Одним из таких примеров является формула Тома, связывающая значение завихренности на границе области и векторный потенциал на некотором небольшом расстоянии от нее [79]. Подобные условия известны в теории дифференциальных уравнений как нелокальные [80] [81]. Тем не менее, важно помнить, что это является следствием определенного приближения.

Другим вариантом решения уравнений является приведение системы из двух равенств к единственному соотношению для векторного потенциала скорости. В таком случае мы будем иметь дело с уравнением четвертого порядка, для которого возможно поставить краевые условия на границе. К таковым можно отнести нулевое значение функции, а также нулевое значение производной по направлению нормали к поверхности, ограничивающей область решения. Это позволяет также представить решение в виде комбинации определенных собственных функций, однако для их построения нужно использовать некоторые специальные соображения.

Отметим, что использование описанной модели промежуточного типа может быть полезно и для построения численного решения. Подобные уравнения имеют более низкую размерность, поэтому они дают возможность экономить вычислительные ресурсы по сравнению с полным уравнением Навье – Стокса. Так, как и для большого количества других эллиптических уравнений и их систем, здесь можно воспользоваться методом счета на установление [82].

При исследовании электровихревого течения возникает также ряд других задач, интересных как с точки зрения фундаментальной науки, так и приложений. Так, при распространении электрического тока возникает магнитное поле, которое в области около электрода стремится опустить поверхность жидкого металла ниже. Ввиду этого, особенно при больших токах, возникает прогиб поверхности, существование которого было неоднократно подтверждено в экспериментах, проводимых на базе Объединенного института высоких температур РАН и в других лабораториях [68] [83]. При дальнейшем росте тока жидкость начинает «сползать», и по этой причине сокращается площадь поверхности соприкосновения между жидкостью и электродом. В таком случае растет плотность тока, и данный эффект усиливается еще больше. В какой-то момент при достаточной силе тока пятно контакта стягивается в точку, и происходит отрыв жидкости от электрода и зажигание разряда [84].

Возникновение разряда представляет большую важность. Важно оценить, при каком значении тока будет происходить отрыв поверхности. Можно предполагать, что на нее будут

оказывать существенное влияние свойства самой жидкости, а также размеры электрода. Отметим, что исследования данного процесса можно проводить не только для жидких металлов, но и для других проводящих жидкостей, например для растворов солей.

Ранее этот вопрос исследовался при помощи прямого численного моделирования и явного решения уравнений Навье – Стокса. Тем не менее, степень поучительности результатов таких исследований является не вполне понятной, поскольку не до конца ясен характер возникновения разряда в зависимости от параметров задачи. Все это ставит нас перед необходимостью изучения данного процесса при помощи более простых моделей, которые позволяют, с одной стороны, получать несложные оценки для критических величин, с другой – дадут правдоподобную картину того, что происходит в нашем процессе. Отметим, что логично ожидать того, что подобные оценки будут подтверждаться и в ходе экспериментальных исследований электровихревых течений как жидких металлов, так и других веществ с достаточно хорошей проводимостью [84].

В дальнейшем мы опишем основные уравнения, которые характеризуют явления, после чего перейдем к анализу их решений. Кроме того, важно указывать возможность экспериментальной или наблюдательной проверки полученных теоретических результатов.

## **§2. Основные уравнения магнитной гидродинамики средних полей**

Большинство процессов, описанных в предыдущем разделе, описываются с помощью различных моделей магнитной гидродинамики. Напомним основные уравнения, которые составляют основу данной области науки, а также опишем, каким образом они могут быть использованы при моделировании явлений в астрофизических и других задачах.

В случае изучения процессов, связанных с теорией динамо, ключевую роль играет разделение магнитного поля на случайную составляющую, и регулярную, которую также называют средней. Поэтому важнейшую роль с точки зрения магнитной гидродинамики представляют так называемые уравнения для средних полей.

Эволюция магнитного поля в жидкости может быть описана при помощи основного уравнения магнитной гидродинамики [85]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \eta_m \Delta \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{H}$  - напряженность магнитного поля,  $\mathbf{v}$  – скорость движений среды,  $\eta_m$  – так называемая магнитная вязкость, которая может быть представлена с помощью следующего выражения

$$\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\lambda},$$

где  $c$  - скорость света,  $\lambda$  – проводимость среды. Отметим, что при достаточно хорошей проводимости (что особенно характерно для случая, к примеру, для случая межзвездного газа в

астрофизике) магнитная вязкость является крайне малой величиной, и поэтому в ряде ситуаций вполне можно пренебречь лапласианом в основном уравнении магнитной гидродинамики.

Первое слагаемое в правой части (содержащее ротор векторного произведения скорости и магнитного поля) может быть с учетом соотношений, широко известных из векторного анализа, переписано в виде следующей комбинации:

$$\text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{v} \text{div} \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{div} \mathbf{v}.$$

Можно воспользоваться тем фактом, что магнитное поле является соленоидальным [85]:

$$\text{div} \mathbf{H} = 0.$$

Кроме того, в большинстве изучаемых нами прикладных задач допустимо считать жидкость или газ несжимаемым, поэтому уравнение неразрывности, входящее в систему уравнений гидродинамики, может быть представлено в следующем виде [86]:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0.$$

Тогда ротор векторного произведения скорости и напряженности магнитного поля будет выглядеть так:

$$\text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H}.$$

Тогда для эволюции магнитного поля мы можем получить такое векторное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H} + \eta_m \Delta \mathbf{H}.$$

Учтем описанные выше соображения о том, что при высокой проводимости магнитная вязкость является пренебрежимо малой (отметим, что при дальнейшем рассмотрении слагаемое с лапласианом вновь возникнет по другим причинам, связанным со свойствами течения). Тогда уравнение для эволюции магнитного поля можно представить в форме [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v}.$$

Слагаемые в правой части сводятся к лагранжевой производной поля по времени:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H}.$$

В таком случае, раскрывая комбинацию в правой части уравнения, учитывая различные пространственные переменные, мы получим:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + H_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + H_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.$$

В целом магнитное поле ведет себя почти так же, как и пассивная примесь, с учетом того, что речь идет о векторной величине, а также нужно учесть процессы, связанные с производными магнитного поля по различным пространственным переменным [2]. В таком случае при

перемещении на некоторое достаточно малое расстояние  $\Delta \mathbf{r}$  (за время, соответствующее столь же малому изменению времени  $\Delta t$  магнитное поле будет преобразовываться по следующему закону):

$$\mathbf{H}(\xi, t + \Delta t) = \mathbf{H}(\xi - \Delta \mathbf{r}, t) + \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Delta t.$$

Малое перемещение можно также представить и в покомпонентном представлении:

$$\Delta \mathbf{r} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

Для малого перемещения можно записать следующую формулу [2]:

$$\Delta \mathbf{r} \cong \mathbf{v} \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{a} \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} \mathbf{w}_{\Delta t},$$

где  $\mathbf{a}$  – ускорение жидкости в данной точке,  $\eta$  – коэффициент турбулентной диффузии, который характерен для данной жидкости. В этой формуле учтены слагаемые вплоть до второй степени малого промежутка времени, что может быть необходимо в дальнейшем при рассмотрении короткокоррелированного случайного течения. Для ускорения жидкости в рамках установившегося течения можно получить следующее выражение:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}.$$

Кроме того, в данном равенстве учтен так называемый винеровский случайный процесс [87]. Он описывает многие процессы, связанные с броуновским движением и другими эффектами, которые встречаются в том числе в гидродинамических задачах. Он обладает следующими статистическими свойствами:

$$\langle \mathbf{w}_t \rangle = 0;$$

$$\langle (w_t)_x^2 \rangle = \langle (w_t)_y^2 \rangle = \langle (w_t)_z^2 \rangle = t;$$

$$\langle (w_t)_x (w_t)_y \rangle = \langle (w_t)_x (w_t)_z \rangle = \langle (w_t)_y (w_t)_z \rangle = 0.$$

Определим теперь значение магнитного поля в точке, которая соответствует предшествующему положению частицы:

$$\mathbf{H}(\xi - \Delta \mathbf{r}, t) \cong \mathbf{H}(\xi, t) - (\Delta \mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H}(\xi, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \Delta z^2 \right) + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta z + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z \right).$$

Тогда для магнитного поля в следующий момент времени можно получить следующее выражение:



$$\mathbf{H}(\xi, t + \Delta t) \cong \mathbf{H}(\xi, t) - (\Delta \mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H}(\xi, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \Delta z^2 \right) + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta z + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z \right).$$

Представляя производную по времени с помощью соответствующего уравнения, и переписывая все для отдельных компонент, соответствующих различным пространственным переменным, мы можем получить следующее выражение:

$$\mathbf{H}(\xi, t + \Delta t) \cong \mathbf{H}(\xi, t) - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \Delta z + H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Delta t + H_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \Delta t + H_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Delta t + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \Delta z^2 \right) + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta z + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z \right).$$

После этого необходимо провести усреднение уравнений по соответствующим областям с учетом характеристик соответствующих случайных процессов. Раскрывая соответствующие слагаемые, мы можем получить следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\xi, t + \Delta t) - \mathbf{H}(\xi, t) \cong & -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \left( v_x \Delta t - \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_x \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x \right) - \\ & -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \left( v_y \Delta t - \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_y \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y \right) - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \left( v_z \Delta t - \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_z \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \right) + \\ & + H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Delta t + H_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \Delta t + H_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \left( v_x \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_x \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \left( v_y \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_y \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \left( v_z \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_z \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \right)^2 + \\ & + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \left( v_x \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_x \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x \right) \left( v_y \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_y \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y \right) + \\ & + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \left( v_x \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_x \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x \right) \left( v_z \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_z \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \right) + \\ & + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \left( v_y \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_y \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y \right) \left( v_z \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_z \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \right). \end{aligned}$$

Перепишем левую часть с помощью производной:

$$\mathbf{H}(\xi, t + \Delta t) - \mathbf{H}(\xi, t) \cong \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Delta t.$$

В левой части оставим только те слагаемые, которые имеют порядок не выше, чем  $\Delta t$ . Здесь необходимо учесть, что в теории динамо нередко рассматриваются потоки, для которых  $v^2 \sim \frac{1}{\Delta t}$ , поэтому слагаемые, квадратичные по скорости, должны быть оставлены:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Delta t \cong -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \left( v_x \Delta t - \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_x \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x \right) - \\
& -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \left( v_y \Delta t - \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_y \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y \right) - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \left( v_z \Delta t - \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \nabla) v_z \Delta t^2 + \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \right) + \\
& + H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Delta t + H_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \Delta t + H_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} v_x^2 \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} (w_{\Delta t})_x^2 + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x v_x \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} v_y^2 \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} (w_{\Delta t})_y^2 + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y v_y \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} v_z^2 \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} (w_{\Delta t})_z^2 + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} v_x v_y \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} v_x \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_y \Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} v_y \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_x \Delta t + \\
& + 2\eta \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_y + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} v_x v_z \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} v_x \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \Delta t + \\
& + 2\eta \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_z + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} v_y v_z \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} v_y \sqrt{2\eta} (w_{\Delta t})_z \Delta t + \\
& + 2\eta \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_z.
\end{aligned}$$

Усредним обе части уравнения по промежутку времени  $\Delta t$ , учитывая корреляционные свойства для винеровского случайного процесса, которые обсуждались выше [2]. Кроме того, будем предполагать, что корреляции для произведений «расщепляются», т.е.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} v_x \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle \langle v_x \rangle; \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} v_y \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle \langle v_y \rangle; \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} v_z \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle \langle v_z \rangle; \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} (\mathbf{v}, \nabla) v_x \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle; \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} (\mathbf{v}, \nabla) v_y \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle; \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} (\mathbf{v}, \nabla) v_z \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle; \\
\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} v_x^2 \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \langle v_x^2 \rangle;
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} v_y^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \langle v_y^2 \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} v_z^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \langle v_z^2 \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} v_x v_y \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \right\rangle \langle v_x v_y \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} v_x v_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \right\rangle \langle v_x v_z \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} v_y v_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \right\rangle \langle v_y v_z \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} (w_{\Delta t})_x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_x^2 \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} (w_{\Delta t})_y^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_y^2 \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} (w_{\Delta t})_z^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_z^2 \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_y \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_y \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_x (w_{\Delta t})_z \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} (w_{\Delta t})_y (w_{\Delta t})_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_y (w_{\Delta t})_z \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} v_x (w_{\Delta t})_x \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \langle v_x \rangle \langle (w_{\Delta t})_x \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} v_y (w_{\Delta t})_y \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \langle v_y \rangle \langle (w_{\Delta t})_y \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} v_z (w_{\Delta t})_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \langle v_z \rangle \langle (w_{\Delta t})_z \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} v_x (w_{\Delta t})_y \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \right\rangle \langle v_x \rangle \langle (w_{\Delta t})_y \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} v_x (w_{\Delta t})_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} \right\rangle \langle v_x \rangle \langle (w_{\Delta t})_z \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} v_y (w_{\Delta t})_z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y \partial z} \right\rangle \langle v_z \rangle \langle (w_{\Delta t})_z \rangle.$$

Будем считать, что смешанные корреляции для скорости проводящей среды равны нулю:

$$\langle v_x v_y \rangle = 0;$$

$$\langle v_x v_z \rangle = 0;$$

$$\langle v_y v_z \rangle = 0.$$

Кроме того, необходимо принимать в расчет, что смешанные корреляции для винеровского процесса также должны быть нулевыми. Тогда в результате учета соотношений для используемых нами случайных процессов, после усреднения мы получим уравнения для эволюции со временем усредненной производной магнитного поля по времени:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\rangle \Delta t \cong - \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle \langle v_x \rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle \Delta t^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle \langle v_y \rangle \Delta t + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle \Delta t^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle \langle v_z \rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle \Delta t^2 + \langle H_x \rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\rangle \Delta t + \\ & + \langle H_y \rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right\rangle \Delta t + \langle H_z \rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \langle v_x^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_x^2 \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \langle v_y^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_y^2 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \langle v_z^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \langle (w_{\Delta t})_z^2 \rangle. \end{aligned}$$

Учтем выражения для винеровского случайного процесса, который мы рассматривали ранее:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\rangle \Delta t \cong - \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle \langle v_x \rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle \Delta t^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle \langle v_y \rangle \Delta t + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle \Delta t^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle \langle v_z \rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle \Delta t^2 + \langle H_x \rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\rangle \Delta t + \\ & + \langle H_y \rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right\rangle \Delta t + \langle H_z \rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \langle v_x^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle \Delta t + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \langle v_y^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle \Delta t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \langle v_z^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle \Delta t. \end{aligned}$$

Введем средние значения для скорости и магнитного поля [88]:

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle;$$

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle;$$

Кроме того, будем считать, что процесс усреднения и взятия частных производных для магнитного поля можно менять местами:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z};$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \right\rangle = \frac{\partial^2 \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2};$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right\rangle = \frac{\partial^2 \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2};$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right\rangle = \frac{\partial^2 \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2}.$$

То же самое можно сказать и про среднее значение скорости:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y};$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}.$$

Уравнение для эволюции среднего магнитного поля в проводящей среде с учетом сделанных предположений можно в таком случае представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong & -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} V_x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle \Delta t^2 - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} V_y \Delta t + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle \Delta t^2 - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} V_z \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle \Delta t^2 + B_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \Delta t + \\ & + B_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \Delta t + B_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \langle v_x^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \Delta t + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \langle v_y^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \langle v_z^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \Delta t. \end{aligned}$$

Объединим ряд слагаемых в виде скалярных произведений:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} V_x - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} V_y - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} V_z = -(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{B};$$

$$B_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + B_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{V}.$$

Если учесть бездивергентность поля скоростей и магнитного поля, то сумма этих величин превратится в ротор векторного произведения скорости и магнитного поля:

$$-(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{V} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}].$$

Уравнение тогда записывается с учетом слагаемого со средней скоростью в таком формате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong & \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle \Delta t^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \langle v_x^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \langle v_y^2 \rangle \Delta t^2 + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \langle v_z^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \Delta t. \end{aligned}$$

Конкретизируем теперь течение, для которого записано данное уравнение. Представим скорость в виде суммы:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u};$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость мелкомасштабных течений. Будем полагать, что она может принимать достаточно большие значения, поэтому для квадратичных комбинаций все определяется именно ей:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle & \cong \langle u_x^2 \rangle; \\ \langle v_y^2 \rangle & \cong \langle u_y^2 \rangle; \\ \langle v_z^2 \rangle & \cong \langle u_z^2 \rangle. \end{aligned}$$

То же самое можно сказать и про комбинации, содержащие комбинацию скорости и ее производной:

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_x \rangle & \cong \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_x \rangle; \\ \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_y \rangle & \cong \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_y \rangle; \\ \langle (\mathbf{v}, \nabla) v_z \rangle & \cong \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_z \rangle. \end{aligned}$$

Тогда в уравнении отдельно выделяются мелкомасштабные скорости течения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong & \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_x \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_y \rangle \Delta t^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_z \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \langle u_x^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \langle u_y^2 \rangle \Delta t^2 + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \langle u_z^2 \rangle \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \Delta t. \end{aligned}$$

Для мелкомасштабных течений рассмотрим приближение так называемого короткокоррелированного течения, которое было рассмотрено впервые Казанцевым [89]:

$$\langle u_x(\mathbf{r}_1, t_1) u_x(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{2l}{u} \delta(t_1 - t_2) V_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2);$$

$$\langle u_y(\mathbf{r}_1, t_1) u_y(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{2l}{u} \delta(t_1 - t_2) V_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2);$$

$$\langle u_z(\mathbf{r}_1, t_1) u_z(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{2l}{u} \delta(t_1 - t_2) V_{zz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2);$$

где  $u$  – характерное значение скорости,  $l$  – типичный линейный размер мелкомасштабных движений,  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$  и  $V_{zz}$  – компоненты тензора, характеризующего течение. Также можно ввести характерное корреляционное время:

$$\tau = \frac{l}{u}.$$

Напомним, что в соответствии с тем, что говорилось ранее:

$$\langle u_x(\mathbf{r}_1, t_1) u_y(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 0;$$

$$\langle u_x(\mathbf{r}_1, t_1) u_z(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 0;$$

$$\langle u_y(\mathbf{r}_1, t_1) u_z(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 0.$$

Для подобных течений можно показать, что компоненты среднеквадратичной скорости могут быть представлены с помощью такой формулы [2]:

$$\langle u_x^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{lu}{\Delta t};$$

$$\langle u_y^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{lu}{\Delta t};$$

$$\langle u_z^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{lu}{\Delta t}.$$

Тогда производная магнитного поля по времени представляется с помощью закона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong & \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_x \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_y \rangle \Delta t^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_z \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{3} lu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \Delta t + \frac{1}{3} lu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \Delta t^2 + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} \Delta t + \frac{1}{3} lu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \Delta t^2 + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \Delta t. \end{aligned}$$

Введем теперь «объединенную» вязкость, которая будет содержать в себе коэффициент диффузии и слагаемое, которое отвечает за мелкомасштабные движения:

$$v = \eta + \frac{1}{3}lu.$$

Тогда можно выделить в данном равенстве оператор Лапласа от магнитного поля:

$$\frac{1}{3}lu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{1}{3}lu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{1}{3}lu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} = v\Delta \mathbf{B}.$$

Уравнение для эволюции поля тогда представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_x \rangle \Delta t^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_y \rangle \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_z \rangle \Delta t^2 + v\Delta \mathbf{B} \Delta t. \end{aligned}$$

Наконец, нужно выразить слагаемые, содержащие производные от скорости и магнитного поля. В данном случае удобно ввести так называемый коэффициент, отвечающий за альфа-эффект [2]:

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle.$$

Тогда для усредненной комбинации, включающей в себя производные магнитного поля, можно получить следующее:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_x \rangle + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_y \rangle + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \langle (\mathbf{u}, \nabla) u_z \rangle = \frac{2}{\Delta t} \text{rot}(\alpha \mathbf{B}).$$

В таком случае, равенство для изменения магнитного поля может быть представлено в форме:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cong \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] \Delta t + \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) \Delta t + v\Delta \mathbf{B} \Delta t.$$

Если перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то приближенное равенство станет точным, и можно разделить обе части уравнения на приращение временной переменной [10] [90]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + v\Delta \mathbf{B}.$$

Данное соотношение носит название уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера, или уравнение динамо средних полей [10]. Оно играет центральную роль при теоретическом исследовании практически всех процессов, связанных с генерацией крупномасштабных магнитных полей, связанных с действием турбулентности. Большинство моделей в теории динамо являются так или иначе результатом использования некоторых представлений о течениях в контексте того или иного астрофизического или земного объекта, интересующего нас с позиции магнетизма.

Отметим, что в данном случае уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера было выведено при наличии определенных упрощающих предположений – однако, оно остается принципиально



верным и при других условиях. Так, возможно рассматривать более сложные течения, а также брать сжимаемую жидкость, что описывает намного более широкий класс явлений.

Важно отметить, что уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера в своем изначальном представлении является достаточно сложным для решения как с теоретической, так и с численной точки зрения. В связи с этим большую важность играют двумерные модели, которые являются в том или ином отношении результатом использования соображений о симметрии объекта и течений в нем.

### §3. Возникновение нелинейности в эволюции магнитного поля и магнитная спиральность

Выше было выведено уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера, которое описывает эволюцию магнитного поля. Принципиальную роль в возбуждении генерации магнитного поля играет альфа-эффект, который характеризует закрученность турбулентных движений. Таким образом, возникновение магнитных структур объясняется с помощью перехода кинетической энергии турбулентности в энергию магнитного поля. Это означает, что при увеличении поля интенсивность турбулентности снижается, а значит, что и магнитное поле генерируется менее активно. Данный процесс можно учесть с помощью введения нелинейного подавления альфа-эффекта.

Опишем это на качественном уровне. Плотность энергии турбулентных движений составляет величину:

$$E_K = \frac{1}{2} \rho u^2.$$

Плотность энергии магнитного поля может быть записана так [91]:

$$E_M = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Суммарная плотность двух данных энергетических величин, согласно закону сохранения энергии, должна быть неизменной величиной и не зависеть от времени:

$$E_K + E_M = E_0 = \text{const.}$$

Если считать, что в начальный момент магнитное поле равно нулю, то для начального значения энергии можно записать выражение, включающее в себя начальную скорость:

$$E_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2.$$

В таком случае энергетическое равенство может быть представлено в таком формате:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \rho u_0^2.$$

Вспомним, что коэффициент, характеризующий альфа-эффект, зависит от скорости таким образом [2]:

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle.$$

Это означает, что альфа-эффект зависит от скорости по квадратичному закону. Грубо это можно представить так:

$$\alpha = ku^2;$$

а в начальный момент:

$$\alpha_0 = ku_0^2.$$

Смысл коэффициента  $k$  в данном случае не очень важно, куда как более существенна взаимосвязь между скоростью и альфа-эффектом, как в начальный момент, так и в дальнейшем:

$$u^2 = \frac{\alpha}{k};$$

$$u_0^2 = \frac{\alpha_0}{k}.$$

Тогда равенство для энергии будет таким:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{k} \alpha + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{k} \alpha_0.$$

Для коэффициента, характеризующего альфа-эффект, можно записать такое выражение:

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{kB^2}{4\pi\rho}.$$

Подставим значение для коэффициента:

$$k = \frac{\alpha_0}{u_0^2}$$

в выражение для альфа-эффекта:

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 B^2}{4u_0^2 \pi \rho}.$$

Введем магнитное поле, которое будет соответствовать уровню равномерного распределения:

$$B_0 = 2u_0 \sqrt{\pi\rho}.$$

В таком случае, коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, может быть представлен в качестве величины, зависящей от крупномасштабного магнитного поля:

$$\alpha = \alpha_0 \left( 1 - \frac{B^2}{B_0^2} \right).$$

Таким образом, можно говорить о насыщении альфа-эффекта, и соответственно – снижении интенсивности роста магнитного поля (а в дальнейшем – его полного прекращения).

Данный процесс был описан с точки зрения простых оценок, но тем не менее, можно подтвердить это и с помощью более точных рассуждений.

Для этого необходимо ввести так называемую спиральность магнитного поля [1], которая представляет из себя скалярное произведение магнитного поля и его векторного потенциала:

$$\chi = (\mathbf{A}, \mathbf{H}).$$

Опишем эволюцию данной величины [92], вычислив ее производную по времени:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{H} \right) + \left( \mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right).$$

Производную векторного потенциала можно представить с помощью электрического поля. Так, оно выражается через скалярный электрический потенциал и векторный магнитный [93]:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -c(\mathbf{E} + \text{grad}\phi).$$

В таком случае первое слагаемое в выражении для эволюции спиральности может быть записано так:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{H} \right) = -c(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - c(\text{grad}\phi, \mathbf{H}).$$

Для второго слагаемого можно воспользоваться первым уравнением Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

приводящее нас к следующему:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \text{rot}\mathbf{E}.$$

Для второго слагаемого мы можем получить такое выражение:

$$\left( \mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{\mu} (\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{E}).$$

В таком случае полное уравнение для эволюции спиральности магнитного поля может быть представлено так:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -c(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - c(\text{grad}\phi, \mathbf{H}) - \frac{c}{\mu} (\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{E}).$$

Представим слагаемые в правой части в так называемой дивергентной форме. Для скалярного произведения градиента электрического потенциала и магнитного поля можно записать следующее выражение, связанное с дивергенцией:

$$(\text{grad}\phi, \mathbf{H}) = (\text{grad}\phi, \mathbf{H}) - \phi \text{div}\mathbf{H}.$$

Дивергенция магнитного поля обращается в нуль, поэтому данное слагаемое можно представить в форме:

$$(\text{grad}\phi, \mathbf{H}) = \text{div}(\phi\mathbf{H}).$$

Перепишем теперь последнее слагаемое в уравнении для эволюции магнитной спиральности. Для этого необходимо вспомнить следующее соотношение, дающее возможность преобразовать дивергенцию произведения, хорошо известное в векторном анализе:

$$\text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}] = (\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \text{rot}\mathbf{A}),$$

или, учитывая, что магнитное поле будет выражаться как ротор векторного потенциала,

$$\text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}] = (\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Тогда можно выразить указанное слагаемое в правой части следующим образом:

$$(\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{E}) = \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}] + (\mathbf{E}, \text{rot}\mathbf{A}).$$

В таком случае уравнение для эволюции спиральности можно записать в следующей форме [94]

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -2c(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - c \text{div}(\phi\mathbf{H}) - c \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}].$$

Изучим эволюцию полной спиральности, представляющей из себя интеграл от спиральности магнитного поля:

$$X = \iiint_W \chi dV,$$

где  $W$  – некоторая область, на границе которой магнитное и электрические поля обращаются в нуль:

$$\mathbf{E}|_{\partial W} = 0;$$

$$\mathbf{H}|_{\partial W} = 0.$$

Вычислим теперь производную полной спиральности магнитного поля по времени:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_W \chi dV.$$

Согласно известным правилам для дифференцирования интеграла по параметру, с учетом бездивергентности поля и неизменности границ области можно переписать производную от интеграла по времени таким образом:

$$\frac{dX}{dt} = \iiint_W \frac{\partial \chi}{\partial t} dV.$$

Подставим в подынтегральное выражение значение производной, найденное выше [94]:

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{\partial \chi}{\partial t} dV &= -\iiint_W \{2c(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + \operatorname{div}(\phi \mathbf{H}) + \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}]\} dV = \\ &= -c \iiint_W 2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) dV - c \iiint_W \operatorname{div}(\phi \mathbf{H}) dV - c \iiint_W \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}] dV. \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы, стоящие в правой части выражения, по отдельности. Второй из них может быть преобразован согласно теореме Остроградского – Гаусса к поверхностному:

$$\iiint_W \operatorname{div}(\phi \mathbf{H}) dV = \oiint_{\partial W} (\phi \mathbf{H})_n dS = \oiint_{\partial W} \phi H_n dS,$$

где  $\partial W$  – поверхность, ограничивающая область  $W$ ,  $H_n$  – нормальная составляющая магнитного поля. Учитывая граничное условие, на границе также  $H_n = 0$ , поэтому данный интеграл обращается в нуль:

$$\oiint_{\partial W} \phi H_n dS = 0.$$

Для третьего интеграла, характеризующего изменение полной спиральности, согласно теореме Остроградского – Гаусса можно записать следующее выражение:

$$\iiint_W \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}] dV = \oiint_{\partial W} [\mathbf{E}, \mathbf{A}]_n dS,$$

где  $[\mathbf{E}, \mathbf{A}]_n$  – нормальная составляющая векторного произведения электрического поля и векторного потенциала магнитного поля. Ввиду нулевого условия на величину электрического поля на границе области, можно говорить, что  $[\mathbf{E}, \mathbf{A}]_n = 0$  на границе данной области, и поэтому соответствующий интеграл также обратится в нуль:

$$\oiint_{\partial W} [\mathbf{E}, \mathbf{A}]_n dS = 0.$$

Таким образом, для эволюции полной спиральности магнитного поля мы получаем уравнение следующего вида:

$$\frac{dX}{dt} = -2c \iiint_W (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dV.$$

Значение электрического поля может быть выражено с учетом закона Ома в движущейся среде:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}',$$

где  $\mathbf{E}'$  – электрическое поле, соответствующее системе отсчета, связанной с движущимся веществом:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Тогда можно записать, что

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}],$$

или, выражая электрическое поле через ток и магнитное поле,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Эволюцию спиральности магнитного поля можно в таком случае представить так:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -2c \iiint_w \left( \left\{ \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right\}, \mathbf{H} \right) dV.$$

Представим этот интеграл в виде суммы двух различных слагаемых:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -2c \iiint_w \left( \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}, \mathbf{H} \right) dV + c \iiint_w \left( \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \mathbf{H} \right) dV.$$

Если взять второе слагаемое в правой части, то оно содержит векторное произведение скорости движений и магнитного поля. Ввиду этого очевидно, что согласно правилам векторного произведения, результат умножения будет перпендикулярен обоим слагаемым, и в частности

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \perp \mathbf{H}.$$

Это означает, что скалярное произведение данного вектора и напряженности магнитного поля будет обращаться в нуль:

$$\left( \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \mathbf{H} \right) = 0,$$

поэтому второй интеграл в выражении для эволюции спиральности также будет нулевым:

$$c \iiint_w \left( \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \mathbf{H} \right) dV = 0.$$

Тогда уравнение для изменения спиральности со временем преобразуется к форме:

$$\frac{dX}{dt} = -2c \iiint_w \left( \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}, \mathbf{H} \right) dV.$$

Ток может быть представлен с помощью ротора напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H},$$

а уравнение для эволюции поля – в такой форме:

$$\frac{dX}{dt} = -2 \frac{c^2}{4\pi\lambda} \iiint_w (\text{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}) dV.$$

Учитывая, что коэффициент перед интегралом представляет из себя магнитную вязкость  $\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\lambda}$ , формула для эволюции полной спиральности переписывается в форме [92] [94]:

$$\frac{dX}{dt} = -2\eta_m \iiint_W (\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}) dV.$$

Если мы рассматриваем хорошо проводящую среду, для которой магнитная вязкость стремится к нулю  $\eta_m \rightarrow 0$ , то производная по времени от полной спиральности магнитного поля также будет стремиться к нулю:

$$\frac{dX}{dt} \rightarrow 0,$$

и можно говорить о том, что полная магнитная спиральность сохраняется неизменной.

Опишем теперь эволюцию средней спиральности мелкомасштабного магнитного поля. Тогда для него в качестве области, в которой локализовано магнитное поле, можно выбрать турбулентную ячейку. Это означает, что можно ввести среднее значение спиральности, которая будет вычисляться следующим образом:

$$\langle \chi \rangle = \frac{X}{V}.$$

Для производной средней спиральности по времени в таком случае можно записать:

$$\frac{d\langle \chi \rangle}{dt} = -\frac{2\eta_m}{V} \iiint_V \langle (\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}) \rangle dV.$$

Учитывая, что усреднение ведется по масштабам, соответствующим мелкомасштабным флуктуациям магнитного поля, вполне допустимо заменить процесс интегрирования по объему на умножение усредненной величины:

$$\iiint_V \langle (\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}) \rangle dV \cong \langle (\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}) \rangle V.$$

В таком случае для уравнения эволюции средней спиральности поля получим:

$$\frac{d\langle \chi \rangle}{dt} = -2\eta_m \langle (\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}) \rangle.$$

Проведем процесс усреднения. Будем при дальнейшем рассмотрении отдельно выделять крупномасштабную составляющую магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle,$$

где усреднение ведется по размерам турбулентных ячеек. Аналогичным образом можно представить часть магнитного поля, которая ассоциируется непосредственно с данными ячейками:

$$\mathbf{b} = \mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Отметим, что при возникновении необходимости усреднения в дальнейшем можно полагать, что

$$\langle \mathbf{b} \rangle = 0.$$

То же самое можно утверждать и в том случае, когда нам необходимо усреднять соответствующие токи, векторные потенциалы и т.д.

Несомненно, что полное магнитное поле может быть с учетом сделанных ранее предположений относительно крупномасштабной и мелкомасштабной компонент представлено с помощью выражения:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b}.$$

Представим ротор магнитного поля в виде следующей суммы.

$$\text{rot}\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{B} + \mathbf{b}) = \text{rot}\mathbf{B} + \text{rot}\mathbf{b}.$$

Ротор магнитного поля можно представить с помощью тока – как в случае крупномасштабной, так и мелкомасштабной компоненты:

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

$$\text{rot}\mathbf{b} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

где  $\mathbf{J}$  – плотность крупномасштабного электрического тока, а  $\mathbf{j}$  – его мелкомасштабная часть.

Тогда уравнение для эволюции средней спиральности возможно переписать так:

$$\frac{d\langle \chi \rangle}{dt} = -2\eta_m \left\langle \left( \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{j}), \mathbf{H} \right) \right\rangle.$$

Перепишем также магнитное поле в правой части в виде суммы мелкомасштабного и крупномасштабного слагаемого:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b}.$$

В таком случае уравнение для эволюции магнитной спиральности представимо в форме:

$$\frac{d\langle \chi \rangle}{dt} = -\frac{8\pi\eta_m}{c} \langle ((\mathbf{J} + \mathbf{j}), (\mathbf{B} + \mathbf{b})) \rangle.$$

Рассмотрим отдельно слагаемое в угловых скобках, и определим результат усреднения:

$$\langle ((\mathbf{J} + \mathbf{j}), (\mathbf{B} + \mathbf{b})) \rangle = \langle (\mathbf{J}, \mathbf{B}) \rangle + \langle (\mathbf{J}, \mathbf{b}) \rangle + \langle (\mathbf{j}, \mathbf{B}) \rangle + \langle (\mathbf{j}, \mathbf{b}) \rangle.$$

Согласно тому, что было сказано выше, можно утверждать, что среднее от произведения крупномасштабной характеристики магнитного поля и его мелкомасштабной части можно обнулить:



$$\langle\langle \mathbf{J}, \mathbf{b} \rangle\rangle = 0;$$

$$\langle\langle \mathbf{j}, \mathbf{B} \rangle\rangle = 0.$$

Для крупномасштабной части плотности электрического тока и магнитного поля усреднение уже не является необходимым:

$$\langle\langle \mathbf{J}, \mathbf{B} \rangle\rangle = (\mathbf{J}, \mathbf{B}).$$

Тогда для среднего произведения плотности тока и магнитного поля мы можем получить следующее:

$$\langle\langle (\mathbf{J} + \mathbf{j}), (\mathbf{B} + \mathbf{b}) \rangle\rangle = (\mathbf{J}, \mathbf{B}) + \langle\langle \mathbf{j}, \mathbf{b} \rangle\rangle.$$

Представим теперь крупномасштабную компоненту электрического тока согласно закону Ома в проводящей среде, используя коэффициент, отвечающий за проводимость:

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{E}.$$

В таком случае уравнение для магнитного поля можно представить по следующей формуле [95] [96]:

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{dt} = -\frac{8\pi\eta_m}{c} \left\{ \lambda (\mathbf{E}, \mathbf{B}) + \langle\langle \mathbf{j}, \mathbf{b} \rangle\rangle \right\}.$$

Подставив выражение для коэффициента магнитной вязкости  $\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\lambda}$ , получим для эволюции спиральности формулу:

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{dt} = -2c (\mathbf{E}, \mathbf{B}) - \frac{8\pi\eta_m}{c} \langle\langle \mathbf{j}, \mathbf{b} \rangle\rangle.$$

Определим теперь, что из себя представляет мелкомасштабный ток, фигурирующий в уравнениях. Его можно выразить с помощью ротора мелкомасштабного магнитного поля:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{b}.$$

В свою очередь, само мелкомасштабное магнитное поле может быть выражено при помощи мелкомасштабного векторного потенциала магнитного поля  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{b} = \text{rot} \mathbf{a}.$$

В таком случае, ток может быть выражен в виде следующей дифференциальной комбинации:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \mathbf{a},$$

которая, согласно формулам векторного анализа, выражается так:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} (\text{grad} \text{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}),$$

что с учетом известного условия бездивергентности векторного потенциала магнитного поля позволяет связать ток с лапласианом от мелкомасштабного векторного потенциала:

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \Delta \mathbf{a}.$$

Мелкомасштабный векторный потенциал магнитного поля может быть представлен в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля в пределах ячейки, в которой сосредоточено магнитное поле:

$$\Delta \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = 0,$$

где граничные условия соответствуют тому, что обычно ставится для векторного потенциала магнитного поля. Можно построить набор собственных значений  $\gamma_n$ , каждому из которых соответствует собственная функция  $\mathbf{w}_n$ . Тогда векторный потенциал представляется в виде следующей бесконечной суммы:

$$\mathbf{a} = \sum_n a_n \mathbf{w}_n,$$

а оператор Лапласа может быть выражен так:

$$\Delta \mathbf{a} = -\sum_n \gamma_n a_n \mathbf{w}_n.$$

Разумной оценкой будет использование главной (старшей) моды решения:

$$\Delta \mathbf{a} \cong -\gamma_1 a_1 \mathbf{w}_1 \cong -\gamma_1 \mathbf{a}.$$

Если характерный линейный масштаб локализации мелкомасштабного магнитного поля (а это будет и размером области, для которой решается задача Штурма – Лиувилля) составляет величину  $l$ , то старшее собственное значение можно приблизительно оценить так:

$$\gamma_1 \approx \frac{1}{l^2}.$$

В таком случае для тока получаем следующее выражение:

$$\mathbf{j} \approx \frac{c}{4\pi l^2} \mathbf{a}.$$

Скалярное произведение тока и магнитного поля может, в таком случае, быть представлено в следующей форме:

$$\langle (\mathbf{j}, \mathbf{b}) \rangle = \frac{c}{4\pi l^2} \langle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle.$$

Полагая, что магнитная спиральность обусловлена в первую очередь влиянием мелкомасштабной составляющей, мы можем выразить данное слагаемое так:

$$\langle (\mathbf{j}, \mathbf{b}) \rangle = \frac{c}{4\pi l^2} \langle \chi \rangle.$$

Эволюция средней спиральности мелкомасштабного поля будет описываться формулой:

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{dt} = -2c(\mathbf{E}, \mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2}\langle\chi\rangle.$$

Ранее нами было показано, что для среднего магнитного поля выполняется уравнение:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot}(\alpha\mathbf{B}) + \eta\Delta\mathbf{B}.$$

Учитывая, что

$$\Delta\mathbf{B} = \text{grad div}\mathbf{B} - \text{rot rot}\mathbf{B} = -\text{rot rot}\mathbf{B};$$

при постоянном значении коэффициента турбулентной диффузии  $\eta$  можно сказать, что

$$\eta\Delta\mathbf{B} = \text{rot}(-\eta\text{rot}\mathbf{B}).$$

Частную производную крупномасштабного магнитного поля можно представить с помощью ротора:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}\{[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \alpha\mathbf{B} - \eta\text{rot}\mathbf{B}\}.$$

По сути, слагаемые, стоящие под знаком ротора, с точностью до множителя, численно равного скорости света, представляют собой напряженность электрического поля в движущейся среде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}\{[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \alpha\mathbf{B} - \eta\text{rot}\mathbf{B}\}.$$

Оценим теперь первое слагаемое в правой части уравнения для спиральности:

$$-2c(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = -2([\mathbf{V}, \mathbf{B}], \mathbf{B}) + 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}).$$

Результат векторного произведения  $[\mathbf{V}, \mathbf{B}]$  является перпендикулярным как к вектору скорости, так и к вектору индукции магнитного поля. Поэтому скалярное произведение данной величины на индукцию магнитного поля обращается в нуль:

$$([\mathbf{V}, \mathbf{B}], \mathbf{B}) = 0.$$

Тогда можно записать, что

$$-2c(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}).$$

Производная по времени от спиральности магнитного поля будет выглядеть так (для удобства для соответствующих величин были опущены знаки усреднения):

$$\frac{d\chi}{dt} = 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2}\chi.$$

Оценим теперь то, каким образом будет изменяться значение спиральности магнитного поля при переходе от момента времени  $t$  к следующему моменту времени  $t + \Delta t$ :

$$\chi(\xi, t + \Delta t) = \chi(\xi - \Delta \mathbf{r}, t) + \frac{d\chi}{dt} \Delta t;$$

где приращение координаты можно представить так:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{V} \Delta t + \sqrt{2\eta} \mathbf{w}(\Delta t),$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость,  $\mathbf{w}(\Delta t)$  – винеровский случайный процесс, связанный с диффузионными явлениями. Покомпонентно это будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta x = V_x \Delta t + \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t);$$

$$\Delta y = V_y \Delta t + \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t);$$

$$\Delta z = V_z \Delta t + \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t).$$

Учитывая, что среднее для винеровского процесса является нулевым, а среднеквадратичное пропорционально  $\Delta t$ , для спиральности магнитного поля разумно использовать разложение по формуле Тейлора с точностью до вторых производных:

$$\begin{aligned} \chi(\xi - \Delta \mathbf{r}, t) &\cong \chi(\xi, t) - \frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \chi}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \chi}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \Delta z^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta z + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Покомпонентно значение спиральности магнитного поля может быть представлено с помощью следующего выражения:

$$\begin{aligned} \chi(\xi - \Delta \mathbf{r}, t) &= \chi(\xi, t) - \frac{\partial \chi}{\partial x} (V_x \Delta t + \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t)) - \frac{\partial \chi}{\partial y} (V_y \Delta t + \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t)) - \\ &- \frac{\partial \chi}{\partial z} (V_z \Delta t + \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} (V_x \Delta t + \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} (V_y \Delta t + \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} (V_z \Delta t + \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t))^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} (V_x \Delta t + \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t))(V_y \Delta t + \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t)) + \\ &+ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} (V_x \Delta t + \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t))(V_z \Delta t + \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t)) + \\ &+ \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} (V_y \Delta t + \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t))(V_z \Delta t + \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t)). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{aligned}
 \chi(\xi - \Delta \mathbf{r}, t) = & \chi(\xi, t) - \frac{\partial \chi}{\partial x} V_x \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial x} \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) - \frac{\partial \chi}{\partial y} V_y \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial y} \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t) - \\
 & - \frac{\partial \chi}{\partial z} V_z \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial z} \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} V_x^2 \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} V_x \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \\
 & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} w_x^2(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} V_y^2 \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} V_y \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} w_y^2(\Delta t) + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} V_z^2 \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} V_z \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} w_z^2(\Delta t) + \\
 & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_x V_y \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_x \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t) \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_y \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \\
 & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} w_x(\Delta t) w_y(\Delta t) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_x V_z \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_x \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) \Delta t + \\
 & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_z \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} w_x(\Delta t) w_z(\Delta t) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} V_y V_z \Delta t^2 + \\
 & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} V_y \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_z \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} w_x(\Delta t) w_z(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Добавим в выражение для спиральности магнитного поля слагаемое, связанное с полной производной по времени:

$$\begin{aligned}
 \chi(\xi, t + \Delta t) = & \chi(\xi, t) - \frac{\partial \chi}{\partial x} V_x \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial x} \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) - \frac{\partial \chi}{\partial y} V_y \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial y} \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t) - \\
 & - \frac{\partial \chi}{\partial z} V_z \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial z} \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} V_x^2 \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} V_x \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \\
 & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} w_x^2(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} V_y^2 \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} V_y \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} w_y^2(\Delta t) + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} V_z^2 \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} V_z \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} w_z^2(\Delta t) + \\
 & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_x V_y \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_x \sqrt{2\eta} w_y(\Delta t) \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_y \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \\
 & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} w_x(\Delta t) w_y(\Delta t) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_x V_z \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_x \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) \Delta t + \\
 & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_z \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} w_x(\Delta t) w_z(\Delta t) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} V_y V_z \Delta t^2 + \\
 & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} V_y \sqrt{2\eta} w_z(\Delta t) \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_z \sqrt{2\eta} w_x(\Delta t) \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} w_x(\Delta t) w_z(\Delta t) + \\
 & + 2\alpha (\mathbf{B}, \mathbf{B}) \Delta t - 2\eta (\mathbf{B}, \text{rot} \mathbf{B}) \Delta t - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi \Delta t.
 \end{aligned}$$

Проведем процедуру усреднения, учитывая, что для спиральности магнитного поля, самого магнитного поля и для скорости движений сплошной среды ранее были записаны уже усредненные выражения, поэтому можно учитывать следующие соотношения:

$$\langle \chi \rangle = \chi;$$

$$\langle V_x \rangle = V_x;$$

$$\langle V_y \rangle = V_y;$$

$$\langle V_z \rangle = V_z;$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}.$$

Кроме того, в используемых нами соотношениях для изменения спиральности магнитного поля в дальнейшем можно пренебречь слагаемыми, которые пропорциональны степени малого промежутка времени  $\Delta t$  выше, чем первая:

$$\begin{aligned} \chi(\xi, t + \Delta t) = & \chi(\xi, t) - \frac{\partial \chi}{\partial x} V_x \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial x} \sqrt{2\eta} \langle w_x(\Delta t) \rangle - \frac{\partial \chi}{\partial y} V_y \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial y} \sqrt{2\eta} \langle w_y(\Delta t) \rangle - \\ & - \frac{\partial \chi}{\partial z} V_z \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial z} \sqrt{2\eta} \langle w_z(\Delta t) \rangle + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} V_x \sqrt{2\eta} \langle w_x(\Delta t) \rangle \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \langle w_x^2(\Delta t) \rangle + \\ & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} V_y \sqrt{2\eta} \langle w_y(\Delta t) \rangle \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \langle w_y^2(\Delta t) \rangle + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} V_z \sqrt{2\eta} \langle w_z(\Delta t) \rangle \Delta t + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \langle w_z^2(\Delta t) \rangle + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_x \sqrt{2\eta} \langle w_y(\Delta t) \rangle \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} V_y \sqrt{2\eta} \langle w_x(\Delta t) \rangle \Delta t + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \langle w_x(\Delta t) w_y(\Delta t) \rangle + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_x \sqrt{2\eta} \langle w_z(\Delta t) \rangle \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} V_z \sqrt{2\eta} \langle w_x(\Delta t) \rangle \Delta t + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \langle w_x(\Delta t) w_z(\Delta t) \rangle + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} V_y \sqrt{2\eta} \langle w_z(\Delta t) \rangle \Delta t + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} V_z \sqrt{2\eta} \langle w_y(\Delta t) \rangle \Delta t + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} \langle w_y(\Delta t) w_z(\Delta t) \rangle + 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) \Delta t - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) \Delta t - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi \Delta t. \end{aligned}$$

Учитывая используемые раньше соотношения для винеровского случайного процесса и его корреляций, можно получить:

$$\begin{aligned} \chi(\xi, t + \Delta t) \cong & \chi(\xi, t) - \frac{\partial \chi}{\partial x} V_x \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial y} V_y \Delta t - \frac{\partial \chi}{\partial z} V_z \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \Delta t + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \Delta t + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \Delta t + 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) \Delta t - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) \Delta t - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi \Delta t. \end{aligned}$$

Данное выражение можно переписать таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\chi(\xi, t + \Delta t) - \chi(\xi, t)}{\Delta t} \cong & -\frac{\partial \chi}{\partial x} V_x - \frac{\partial \chi}{\partial y} V_y - \frac{\partial \chi}{\partial z} V_z + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \\ & + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} = & -\frac{\partial \chi}{\partial x} V_x - \frac{\partial \chi}{\partial y} V_y - \frac{\partial \chi}{\partial z} V_z + 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi + \\ & + \eta \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

В более компактной форме это можно переписать так [97] [98]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \chi = 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi + \eta \Delta \chi.$$

Таким образом, мы получили уравнение для эволюции спиральности магнитного поля. Оно может быть использовано для описания замедления роста магнитного поля, которое будет давать намного более точные результаты, чем простая модель, связанная с кубической нелинейностью, которая была описана раньше.

Опишем теперь характер взаимосвязи между спиральностью магнитного поля и кинематической спиральностью, характеризующей закрученность турбулентных движений [99] [100] [101] [102]. Для этого нам потребуется провести усреднение уравнения Навье – Стокса, описывающего изменение скорости движений проводящей среды (отметим, что токи состоят из двух компонент – крупномасштабной и мелкомасштабной, которые участвуют в силе Лоренца, влияющей на течения):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c} [(\mathbf{J} + \mathbf{j}), \mathbf{H}].$$

Учтем тот факт, что скорость также состоит из крупномасштабной и мелкомасштабной компонент, и точно также на две различные составляющие можно разложить и магнитное поле. Тогда уравнение движения жидкости можно представить в такой форме:

$$\frac{\partial(\mathbf{V} + \mathbf{u})}{\partial t} + ((\mathbf{V} + \mathbf{u}), \nabla)(\mathbf{V} + \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c} [(\mathbf{J} + \mathbf{j}), (\mathbf{B} + \mathbf{b})].$$

Раскроем скобки в данном выражении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{b}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{b}]. \end{aligned}$$

Определим главные слагаемые в данном выражении. Отметим, что крупномасштабные компоненты меняются достаточно медленно (как в пространстве, так и во времени), т.е. можно сказать, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= 0; \\ (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} &= 0; \\ (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{V} &= 0.\end{aligned}$$

В таком случае уравнение для эволюции скорости возможно записать в форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{b}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{b}].$$

Будем рассматривать установившиеся течения. Отметим, что конечно, под действием меняющегося магнитного поля скорость также будет меняться. Однако, будем предполагать, что типичное время изменения скорости достаточно большое, поэтому производную по времени вполне можно считать достаточно малой, т.е. приближенно допустимо предполагать, что производная скорости по времени будет околонулевой:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0;$$

что позволяет еще несколько упростить уравнение, описывающего эволюцию течения под действием магнитного поля, исключив отсюда явную зависимость от времени и сделав уравнение стационарным – используемые в нем функции зависят теперь только от пространственных координат:

$$(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{b}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{b}].$$

Кроме того, усредним теперь обе части уравнения по масштабам, соответствующим характерным пространственным размерам турбулентных движений, происходящих в среде:

$$\langle (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{u} \rangle + \langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{B}] \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{J}, \mathbf{b}] \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{b}] \rangle.$$

Компоненты, содержащие только мелкомасштабную компоненту магнитного поля, скорости или плотности электрического тока, при усреднении будут давать нулевой результат:

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{u} \rangle &= 0; \\ \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{B}] \rangle &= 0; \\ \frac{1}{c} \langle [\mathbf{J}, \mathbf{b}] \rangle &= 0.\end{aligned}$$



В таком случае уравнение для мелкомасштабной части скорости будет выглядеть так [102]:

$$\langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{b}] \rangle.$$

Давление достаточно быстро меняется с координатами, поэтому значение его градиента при усреднении даст околонулевое значение, и уравнение еще немного упростится:

$$\langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{c} \langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{b}] \rangle.$$

Преобразуем теперь выражение для векторного произведения вектора плотности крупномасштабного тока и крупномасштабного магнитного поля, учитывая, что

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{B}.$$

Тогда можно записать, что

$$[\mathbf{J}, \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi} \left\{ (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (B^2) \right\}.$$

Усредним теперь данную величину:

$$\langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{c}{8\pi} \langle \nabla (B^2) \rangle.$$

Среднее значение производной квадрата магнитного поля будет околонулевым:

$$\langle \nabla (B^2) \rangle = 0.$$

В таком случае векторное произведение плотности крупномасштабного электрического тока и крупномасштабного магнитного поля при усреднении будет давать следующий простой результат:

$$\langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{B} \rangle.$$

В правой части стоит производная магнитного поля вдоль его же направления, и можно считать, что она также будет иметь близкое к нулю значение:

$$\langle (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Это означает, что выражение для векторного произведения также несколько упростится:

$$\langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle = 0.$$

В таком случае можно записать следующее выражение:

$$\langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{b}] \rangle.$$

В таком случае:

$$(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(u^2) - [\mathbf{v}, \text{rot} \mathbf{v}].$$

Усредним обе части данного равенства:

$$\langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla(u^2) \rangle - \langle [\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}] \rangle.$$

Будем считать, что при переходе от одной турбулентной ячейки к другой скорость меняется мало, поэтому:

$$\frac{1}{2} \langle \nabla(u^2) \rangle = 0.$$

Тогда можно получить, что для средней конвективной производной скорости:

$$\langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = -\langle [\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}] \rangle.$$

Это означает, что

$$-\langle [\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}] \rangle = \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{b}] \rangle.$$

Напомним, что плотность мелкомасштабного электрического тока может быть приближенно (при рассмотрении основной моды) представлена через лапласиан векторного потенциала магнитного поля следующим образом (с учетом размера турбулентной ячейки  $l$ ) [102]:

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \Delta \mathbf{a} \approx \frac{c}{4\pi l^2} \mathbf{a}.$$

Тогда выражения для среднего векторного произведения будут преобразованы к форме:

$$-\langle [\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}] \rangle = \frac{1}{4\pi l^2} \langle [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rangle.$$

Можно видеть, что векторное произведение скорости и ее ротора и векторное произведение векторного потенциала магнитного поля и поля в среднем направлены в одну и ту же сторону. Это означает, что приближенно можно считать, что вектор скорости, ротор скорости, векторный потенциал магнитного поля и магнитное поле лежат в одной плоскости.

$$-\langle |\mathbf{u}| \cdot |\text{rot} \mathbf{u}| \cdot \cos \psi \rangle = \frac{1}{4\pi l^2} \langle |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \mathcal{G} \rangle;$$

где  $\psi$  – угол между направлением скорости и ее ротором, а  $\mathcal{G}$  – угол между мелкомасштабным магнитным полем и соответствующим ему векторным потенциалом.

Если считать, что величины векторов и их взаимное расположение независимы друг от друга, то можно записать, что

$$-\langle |\mathbf{u}| \cdot |\text{rot} \mathbf{u}| \rangle \cdot \langle \cos \psi \rangle = \frac{1}{4\pi l^2} \langle |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \rangle \cdot \langle \cos \mathcal{G} \rangle.$$

Поскольку речь идет о движениях, индуцированных магнитным полем, довольно грубо можно считать, что ротор скорости будет сонаправлен с направлением магнитного поля, а скорость – направлена противоположно векторному потенциалу. В таком случае для угла между данными векторами можно записать следующее:

$$\psi \approx -\mathcal{G}.$$

Тогда как для синуса, так и для косинуса можно записать аналогичные выражения:

$$\cos \psi \approx \cos \mathcal{G};$$

$$\sin \psi \approx -\sin \mathcal{G}.$$

Для усредненных произведений в таком случае можно будет записать такое соотношение:

$$-\langle |\mathbf{u}| \cdot |\text{rot} \mathbf{u}| \rangle \cdot \langle \sin \psi \rangle \approx -\frac{1}{4\pi l^2} \langle |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \rangle \cdot \langle \sin \mathcal{G} \rangle.$$

Каждую из частей уравнения можно представить с помощью скалярного произведения:

$$\langle |\mathbf{u}| \cdot |\text{rot} \mathbf{u}| \rangle \cdot \langle \sin \psi \rangle = \langle |\mathbf{u}| \cdot |\text{rot} \mathbf{u}| \cdot \sin \psi \rangle = \langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle;$$

$$\langle |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \rangle \cdot \langle \sin \mathcal{G} \rangle = \langle |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \mathcal{G} \rangle = \langle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle.$$

В таком случае эти два усредненных скалярных произведения связаны такой формулой:

$$-\langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle \approx -\frac{1}{4\pi l^2} \langle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle.$$

Домножим обе части на  $\frac{\tau}{3}$ :

$$-\frac{\tau}{3} \langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle \approx -\frac{\tau}{12\pi l^2} \langle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle.$$

Выражение в левой части представляет из себя коэффициент, отвечающий за альфа-эффект [96]:

$$\alpha \approx -\frac{\tau}{12\pi l^2} \langle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle.$$

С другой стороны, в правой части можно заметить спиральность магнитного поля:

$$\alpha \approx -\frac{\tau}{12\pi l^2} \chi.$$

Таким образом, получается, что альфа-эффект и магнитная спиральность связаны друг с другом. Если в задаче играют роль не только магнитное поле, но и другие силы (например, гравитационные, сила Кориолиса и т.д.), то можно говорить о том, что они дают независимый вклад в альфа-эффект, и тогда выражение для альфа-эффекта будет можно представить с помощью следующей суммы [96] [97] [98]:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m;$$

где  $\alpha_0$  – часть альфа-эффекта, обусловленная «механическими» воздействиями, а второе слагаемое относится к магнитной составляющей:

$$\alpha_m \approx -\frac{\tau}{12\pi l^2} \chi.$$

Отметим, что в простейшем случае это переходит к предыдущему выражению, которое мы вывели из простейших соображений. Если считать, что мелкомасштабное магнитное поле пропорционально крупномасштабному:

$$b \sim B;$$

и то же самое можно сказать и про векторный потенциал мелкомасштабного магнитного поля, которое также пропорционально крупномасштабной составляющей поля:

$$a \sim B;$$

то и для спиральности мелкомасштабного магнитного поля можно сказать, что оно будет приблизительно пропорционально квадрату крупномасштабной составляющей поля:

$$\chi \sim B^2.$$

Для добавки к альфа-эффекту можно в таком случае показать, что она также пропорциональна квадрату магнитного поля:

$$\alpha_m \sim -B^2.$$

Это означает, что как простая модель, так и более аккуратная, учитывающая потоки спиральности магнитного поля, дают близкие результаты для насыщения его роста при механизме динамо.

В настоящей главе были сформулированы основные уравнения теории динамо, описывающие эволюцию крупномасштабных полей в проводящей среде. В качестве выводов можно сказать, что принципиальную роль играет турбулентность, выражаемая с помощью коэффициента альфа-эффекта, и находящаяся в тесной взаимосвязи с величиной магнитного поля. Роль магнитного поля сводится к тому, что по мере его роста турбулентность подавляется, а параметр, описывающий альфа-эффект – уменьшается. Ключевую роль в данном случае играет спиральность магнитного поля, являющаяся интегралом движения. Для нее была сформулирована модель, позволяющая описать ее эволюцию в ходе изменения магнитного поля с учетом вертикальных потоков и диссипативных процессов.

Результаты, связанные со спиральностью магнитного поля, вошедшие в настоящую главу, были опубликованы в работах [97] и [98]. В данных работах соискатель был единственным автором.

# Глава II. Планарное приближение в теории динамо

Настоящая глава посвящена описанию планарного приближения, которое позволяет находить магнитное поле в тонких дисках при определенных характеристиках течения. Основные уравнения с граничными условиями выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\phi - R_\omega \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \varphi} \right\};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = & R_\omega B_r - R_\omega \Omega \frac{\partial B_\phi}{\partial \varphi} + R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\phi}{4} + \\ & + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}; \end{aligned}$$

$$0 < r < R; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$B_r|_{r=0} = B_r|_{r=1} = B_\phi|_{r=0} = B_\phi|_{r=1} = 0.$$

Также рассматривается нелинейная модификация данной системы уравнений, использующей  $R_\alpha = R_{\alpha 0} \left( 1 - \frac{B^2}{B^2} \right)$ .

Для данной задачи в линейном случае исследуется набор собственных функций и собственных значений в осесимметричном и неосесимметричном случаях, в нелинейном — изучается устойчивость стационарных решений.

Также изучается задача с потоками спиральности, являющейся интегралом движения:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha (1 + \alpha) B_\phi - \left( R_U + \frac{\pi^2}{4} \right) B_r + \lambda^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) \right);$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \left( R_U + \frac{\pi^2}{4} \right) B_\phi + \lambda^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) \right);$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -R_U \alpha - C \left\{ (1 + \alpha) B^2 + \frac{3 B_r B_\phi}{8 R_\alpha} \sqrt{-\pi R_\alpha R_\omega (1 + \alpha)} + \frac{\alpha}{R_m} \right\} + \lambda^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \right).$$

$$B_r|_{r=0} = B_r|_{r=1} = B_\phi|_{r=0} = B_\phi|_{r=1} = \alpha|_{r=0} = \alpha|_{r=1} = 0;$$

$$B_r|_{t=0} = 0; \quad B_\phi|_{t=0} = B_0 \sin(\pi r); \quad \alpha|_{t=0} = -\alpha_0 \sin(\pi r).$$

## §1. Генерация магнитного поля в тонком диске

Среди космических объектов, для которых характерно наличие магнитного поля, можно выделить большое количество тех, которые обладают осевой симметрией. Наличие такого факта дает возможность заметно упростить процесс вывода уравнений и анализа их решений. Также это позволяет сократить объем вычислений в тех случаях, когда мы прибегаем к численным расчетам. Большой интерес с этой точки зрения представляют объекты, форма которых близка к дискам. К ним очевидным образом относятся галактики, аккреционные диски и ряд других небесных тел. Ввиду их особенностей можно считать, что магнитное поле в целом сосредоточено в плоскости диска. Очевидно, что в таком случае есть возможность определять лишь две компоненты магнитного поля и использовать одну из наиболее эффективных моделей промежуточного типа, которые были разработаны для решения задач магнитной гидродинамики и теории динамо – планарное приближение, известное в англоязычной литературе также как “no-z model” или “no-z approximation”. Впервые данная модель была предложена Д.Моссом, К.Субраманианом, Л.Местелем и другими авторами в середине 1990-х годов [14] [103]. Она исходит из достаточно логичных предположений о структуре магнитного поля и движениях межзвездной среды, которые могут быть положены в основу уравнений, описывающих механизм динамо. Данная модель сочетает в себе сразу несколько достоинств. Так, она является достаточно простой для того, чтобы проводить асимптотический анализ ее решений, определять ее собственные функции и раскладывать по ним решения. С другой стороны, в отличие от чисто качественных моделей, она дает возможность строить достаточно точные и близкие к астрономическим наблюдениям решения. По этой причине в настоящий момент подход, связанный с планарным приближением, можно считать самым перспективным с точки зрения различных приложений.

В первых работах уравнения планарного приближения выводились из простых эмпирических соображений. Авторами предпринимались попытки построить модель для магнитного поля, которая бы наилучшим образом соответствовала измерениям вращения плоскости поляризации радиоволн [104], которые в случае галактик являются основным свидетельством существования магнитного поля. Целью настоящей работы является не только развитие применяемых в рамках планарного приближения уравнений, но и их строгое теоретическое обоснование, которое позволяет выстроить четкую взаимосвязь между уравнением динамо средних полей (уравнением Штеенбека – Краузе – Рэдлера) и соотношениями, характеризующими планарное приближение [48].

Поскольку речь идет об объектах, которые имеют форму диска (тонкого цилиндра), разумно применять цилиндрические координаты  $r-\varphi-z$ . Задача должна решаться внутри области, представляющей собой цилиндр:

$$0 < r < R;$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$-h < z < h;$$

где  $R$  – радиус объекта (галактики, аккреционного диска и т.д.),  $h$  – полутолщина диска. Отметим, что можно говорить и о незначительных изменениях формы объекта: возможно рассматривать объекты с внутренней границей, соответствующей ненулевому радиусу, расширяющиеся по мере удаления от оси диска и т.д.

Магнитное поле может быть представлено в виде следующей комбинации:

$$\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi + B_z \mathbf{e}_z.$$

Будем предполагать (и это подтверждается астрономическими наблюдениями, связанными с измерениями магнитных полей галактик), что вертикальная компонента магнитного поля достаточно мала по сравнению с двумя другими:

$$|B_z| \ll |B_r|;$$

$$|B_z| \ll |B_\varphi|.$$

Поэтому можно сказать, что это позволяет рассматривать лишь уравнения для двух компонент магнитного поля. Выражение для вертикальной компоненты поля, там где это необходимо, возможно восстановить из условия бездивергентности магнитного поля.

Опираясь на базовые математические утверждения (такие, как теорема Стеклова [105]), нетрудно показать, что магнитное поле может быть представлено в виде следующей линейной комбинации:

$$B_r(r, \varphi, z, t) = \sum_n Z_n(z) X_n(r, \varphi);$$

$$B_\varphi(r, \varphi, z, t) = \sum_n Z_n(z) Y_n(r, \varphi);$$

где  $Z_n(z)$  – определяются из разложения в ряд Фурье:

$$Z_1(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right);$$

$$Z_2(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right);$$

$$Z_3(z) = \cos\left(\frac{3\pi z}{2h}\right);$$

...;

$$Z_n(z) = \cos\left(\frac{\pi n(z+h)}{2h}\right);$$

...

Будем предполагать, что решение с достаточной степенью точности описывается с помощью старшей моды, т.е.:

$$B_r(r, \varphi, z, t) = X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right);$$

$$B_\varphi(r, \varphi, z, t) = Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).$$

Кроме того, опишем принципиальное поведение альфа-эффекта. Он должен представлять из себя функцию, симметричную относительно экваториальной плоскости, и обращающуюся в нуль при  $z = 0$ . Простейшей функцией, удовлетворяющей таким условиям, может являться синусоидальное выражение следующего вида [48]:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right),$$

где  $\alpha_0$  – характерное значение альфа-эффекта, которое можно определить по такой формуле [48]:

$$\alpha_0 = \frac{\Omega l^2}{h},$$

где  $l$  – характерный масштаб турбулентности.

Можно отметить, что угловая скорость вращения галактики вокруг своей оси ввиду нетвердотельности ее вращения меняется в зависимости от расстояния до ее центра:

$$\Omega = \Omega(r).$$

Таким образом, получается, что для альфа-эффекта выполняется следующее выражение:

$$\alpha = \alpha(r, z) = \frac{\Omega(r)l^2}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right).$$

Крупномасштабная составляющая скорости в таком случае определяется вращением галактики (или другого объекта подобной геометрии) со скоростью  $\Omega$ :

$$V = r\Omega\mathbf{e}_\varphi.$$

Выведем уравнения для эволюции компонент магнитного поля в рамках планарного приближения. Для этого будем рассматривать магнитное поле в виде комбинации:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \varphi, z, t) = X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\mathbf{e}_r + Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\mathbf{e}_\varphi + B_z(r, \varphi, z, t)\mathbf{e}_z.$$

В тех случаях, когда компонента магнитного поля, перпендикулярная к экваториальной плоскости, стоит под знаком производной по независимой переменной  $z$ , ее планируется восстановить с помощью условия соленидальности производной, в противном случае данной составляющей поля мы будем пренебрегать.



Возьмем уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера, которое описывает эволюцию крупномасштабной компоненты магнитного поля исследуемого объекта:

$$\frac{\partial \mathbf{B}(r, \varphi, z, t)}{\partial t} = \text{rot}(\alpha(r, z)\mathbf{B}(r, \varphi, z, t)) + \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}(r, \varphi, z, t)] + \eta \Delta \mathbf{B}(r, \varphi, z, t).$$

Раскроем роторы в правой части уравнения:

$$\text{rot}(\alpha(r, z)\mathbf{B}(r, \varphi, z, t)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha(r, z)B_r(r, \varphi, z, t) & r\alpha(r, z)B_\varphi(r, \varphi, z, t) & \alpha(r, z)B_z(r, \varphi, z, t) \end{vmatrix}.$$

Нам будет важно представить это покомпонентно. Интерес представляет радиальная и азимутальная составляющие ротора данного произведения альфа-эффекта и магнитного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r(\alpha(r, z)\mathbf{B}(r, \varphi, z, t)) &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} [\alpha(r, z)B_z(r, \varphi, z, t)] - \frac{\partial}{\partial z} [r\alpha(r, z)B_\varphi(r, \varphi, z, t)] \right\}; \\ \text{rot}_\varphi(\alpha(r, z)\mathbf{B}(r, \varphi, z, t)) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\alpha(r, z)B_r(r, \varphi, z, t)] - \frac{\partial}{\partial r} [\alpha(r, z)B_z(r, \varphi, z, t)] \right\}; \end{aligned}$$

Перепишем производные произведения альфа-эффекта на компоненты поля по координатам:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [\alpha(r, z)B_z(r, \varphi, z, t)] = \alpha(r, z) \frac{\partial B_z(r, \varphi, z, t)}{\partial \varphi}.$$

Поскольку здесь стоит производная  $z$ -компоненты поля по азимутальному углу, то ей можно пренебречь, и тогда данное выражение примет нулевое значение:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [\alpha(r, z)B_z(r, \varphi, z, t)] = 0.$$

Запишем следующее слагаемое, входящее в  $r$ -компоненту ротора, с учетом использованных ранее выражений для старшей моды, с помощью которой можно представить магнитное поле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [r\alpha(r, z)B_\varphi(r, \varphi, z, t)] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ r\alpha_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right] = \\ &= r\alpha_0 \left[ \frac{\pi}{2h} Y_1(r, \varphi, t) \cos^2\left(\frac{\pi z}{2h}\right) - \frac{\pi}{2h} Y_1(r, \varphi, t) \sin^2\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right]. \end{aligned}$$

Если мы будем рассматривать данное выражение в экваториальной плоскости, которой соответствует значение  $z = 0$ , то тогда оно значительно упростится:

$$\frac{\partial}{\partial z} [r\alpha(r, z)B_\varphi(r, \varphi, z, t)] = r \frac{\pi\alpha_0}{2h} Y_1(r, \varphi, t).$$

Для радиальной компоненты ротора произведения коэффициента, отвечающего за альфа-эффект и магнитного поля, в таком случае можно будет записать:

$$\text{rot}_r (\alpha(r, z) \mathbf{B}(r, \varphi, z, t)) = -\frac{\pi\alpha_0}{2h} Y_1(r, \varphi, t).$$

Рассмотрим теперь азимутальную компоненту ротора произведения альфа-эффекта и магнитного поля. Первое слагаемое в данном выражении записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [\alpha(r, z) B_r(r, \varphi, z, t)] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right] = \\ &= \frac{\pi\alpha_0}{2h} X_1(r, \varphi, t) \left[ \cos^2\left(\frac{\pi z}{2h}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right]. \end{aligned}$$

В случае, когда мы говорим об экваториальной плоскости ( $z = 0$ ), данная формула будет такой:

$$\frac{\partial}{\partial z} [\alpha(r, z) B_r(r, \varphi, z, t)] = \frac{\pi\alpha_0}{2h} X_1(r, \varphi, t).$$

Другое слагаемое, входящее в данную компоненту ротора, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} [\alpha(r, z) B_z(r, \varphi, z, t)] = \frac{\partial \alpha(r, z)}{\partial r} B_z(r, \varphi, z, t) + \alpha(r, z) \frac{\partial B_z(r, \varphi, z, t)}{\partial r}$$

Учитывая, что  $z$ -компонента магнитного поля и ее производная по расстоянию до центра пренебрежимо малы, мы можем в данном случае полагать, что:

$$\frac{\partial}{\partial r} [\alpha(r, z) B_z(r, \varphi, z, t)] = 0.$$

Тогда азимутальная составляющая ротора магнитного поля представляется так:

$$\text{rot}_\varphi (\alpha(r, z) \mathbf{B}(r, \varphi, z, t)) = \frac{\pi\alpha_0}{2h} X_1(r, \varphi, t).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое из уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера. Сначала необходимо определить компоненты векторного произведения скорости и индукции магнитного поля, которые стоят под знаком оператора ротора. Их можно представить с помощью следующего символического определителя:

$$[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ 0 & r\Omega & 0 \\ B_r & B_\varphi & B_z \end{vmatrix}.$$

Это означает, что составляющие данного векторного произведения будут таковыми:

$$[\mathbf{V}, \mathbf{B}]_r = r\Omega B_z;$$

$$[\mathbf{V}, \mathbf{B}]_\varphi = 0;$$

$$[\mathbf{V}, \mathbf{B}]_z = -r\Omega B_r.$$

Запишем теперь с помощью похожего символического определителя, который будет содержать операторы дифференцирования, ротор от данного векторного произведения

$$\text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r\Omega B_z(r, \varphi, z, t) & 0 & -r\Omega B_r(r, \varphi, z, t) \end{vmatrix}.$$

Представим это покомпонентно (нас интересуют только первые два слагаемых):

$$\text{rot}_r[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-r\Omega B_r(r, \varphi, z, t));$$

$$\text{rot}_\varphi[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \frac{\partial}{\partial z} (r\Omega B_z(r, \varphi, z, t)) - \frac{\partial}{\partial r} (-r\Omega B_r(r, \varphi, z, t)).$$

Раскроем производные, учитывая, что расстояние до центра и угловая скорость вращения объекта не зависит от азимутального угла и расстояния до экваториальной плоскости:

$$\text{rot}_r[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \frac{1}{r} (-r\Omega) \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_r(r, \varphi, z, t)) = -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_r(r, \varphi, z, t));$$

$$\text{rot}_\varphi[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = r\Omega \frac{\partial}{\partial z} (B_z(r, \varphi, z, t)) + r\Omega \frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, \varphi, z, t)) + B_r(r, \varphi, z, t) \frac{\partial}{\partial r} (r\Omega);$$

Частную производную вертикальной компоненты магнитного поля по соответствующей пространственной координате можно вывести из условия бездивергентности его индукции, которое в данном случае может быть представлено в следующей форме:

$$\text{div}\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial z} (B_z(r, \varphi, z, t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r(r, \varphi, z, t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)) = 0.$$

Из данного выражения можно выразить данную производную таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} (B_z(r, \varphi, z, t)) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r(r, \varphi, z, t)) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)).$$

Тогда для компоненты ротора векторного потенциала можно будет записать формулу такого вида:

$$\begin{aligned} \text{rot}_\varphi[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = r\Omega \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r(r, \varphi, z, t)) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)) \right\} + \\ + r\Omega \frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, \varphi, z, t)) + B_r(r, \varphi, z, t) \frac{\partial}{\partial r} (r\Omega); \end{aligned}$$

Раскроем теперь имеющиеся в правой части производные от произведений по стандартным правилам:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_\varphi [\mathbf{V}, \mathbf{B}] &= r\Omega \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, \varphi, z, t)) - \frac{1}{r} B_r(r, \varphi, z, t) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)) \right\} + \\
 &+ r\Omega \frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, \varphi, z, t)) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r(r, \varphi, z, t) + \Omega B_r(r, \varphi, z, t) = \\
 &= -r\Omega \frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, \varphi, z, t)) - \Omega B_r(r, \varphi, z, t) - \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)) + \\
 &+ r\Omega \frac{\partial}{\partial r} (B_r(r, \varphi, z, t)) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r(r, \varphi, z, t) + \Omega B_r(r, \varphi, z, t) = \\
 &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r(r, \varphi, z, t).
 \end{aligned}$$

Учитывая представление для магнитного поля через старшую моду решения, можно записать для компонент ротора следующее:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_r [\mathbf{V}, \mathbf{B}] &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right) = -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right); \\
 \text{rot}_\varphi [\mathbf{V}, \mathbf{B}] &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi(r, \varphi, z, t)) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r(r, \varphi, z, t) = \\
 &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).
 \end{aligned}$$

В случае экваториальной плоскости (когда вертикальная координата обращается в нуль, а косинус принимает единичное значение), данное выражение представляется так:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_r [\mathbf{V}, \mathbf{B}] &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_1(r, \varphi, t)); \\
 \text{rot}_\varphi [\mathbf{V}, \mathbf{B}] &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_1(r, \varphi, t)) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} X_1(r, \varphi, t).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь оператор Лапласа от компонент магнитного поля. Он представляется в такой форме (как и раньше, для нас представляют интерес только две первые составляющие):

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{B})_r &= \Delta B_r - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}; \\
 (\Delta \mathbf{B})_\varphi &= \Delta B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Если мы представим магнитное поле с помощью старшей моды, то компоненты оператора Лапласа от его индукции будут выражаться следующим образом:

$$(\Delta \mathbf{B})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (X_1(r, \varphi, t)) \right) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (X_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\pi^2}{4h^2} X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) - \frac{1}{r^2} X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right). \\
 (\Delta \mathbf{B})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (Y_1(r, \varphi, t)) \right) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Y_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) - \\
 & -\frac{\pi^2}{4h^2} Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) - \frac{1}{r^2} Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим также случай экваториальной плоскости, когда косинус обращается в единицу, и выражения для оператора Лапласа могут быть заметно упрощены:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{B})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (X_1(r, \varphi, t)) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (X_1(r, \varphi, t)) - \\
 & -\frac{\pi^2}{4h^2} X_1(r, \varphi, t) - \frac{1}{r^2} X_1(r, \varphi, t) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_1(r, \varphi, t)); \\
 (\Delta \mathbf{B})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (Y_1(r, \varphi, t)) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Y_1(r, \varphi, t)) - \\
 & -\frac{\pi^2}{4h^2} Y_1(r, \varphi, t) - \frac{1}{r^2} Y_1(r, \varphi, t) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_1(r, \varphi, t)).
 \end{aligned}$$

Теперь осталось выразить аналогичным образом частные производные компонент магнитного поля по времени, учитывая имеющиеся выражения для старшей моды:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_r}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (X_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right); \\
 \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (Y_1(r, \varphi, t)) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).
 \end{aligned}$$

Точно так же, если мы говорим об экваториальной плоскости, можно считать, что расстояние до нее обращается в нуль, а косинусы в правых частях – в единицу:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_r}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (X_1(r, \varphi, t)); \\
 \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (Y_1(r, \varphi, t)).
 \end{aligned}$$

В таком случае можно записать уравнения для старшей моды решения в такой несложной форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (X_1(r, \varphi, t)) &= -\frac{\pi \alpha_0}{2h} Y_1(r, \varphi, t) - \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_1(r, \varphi, t)) + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (X_1(r, \varphi, t)) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (X_1(r, \varphi, t)) - \frac{\pi^2}{4h^2} X_1(r, \varphi, t) - \frac{1}{r^2} X_1(r, \varphi, t) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_1(r, \varphi, t)) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Y_1(r, \varphi, t)) &= \frac{\pi\alpha_0}{2h} X_1(r, \varphi, t) - \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}(Y_1(r, \varphi, t)) + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} X_1(r, \varphi, t) + \\ &+ \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (Y_1(r, \varphi, t)) \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Y_1(r, \varphi, t)) - \\ &- \frac{\pi^2}{4h^2} Y_1(r, \varphi, t) - \frac{1}{r^2} Y_1(r, \varphi, t) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_1(r, \varphi, t)) \end{aligned}$$

В рамках планарного приближения удобно обозначать старшие моды решения с помощью компонент индукции магнитного поля, которым они соответствуют:

$$X_1(r, \varphi, t) = B_r;$$

$$Y_1(r, \varphi, t) = B_\varphi.$$

Тогда система уравнений в рамках планарного приближения запишется в такой сокращенной форме, несколько упрощающей дальнейший анализ соответствующих решений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{\pi\alpha_0}{2h} B_\varphi - \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\eta\pi^2 B_r}{4h^2} + \eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\pi\alpha_0}{2h} B_r - \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\eta\pi^2 B_\varphi}{4h^2} + \\ &+ \eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Уравнения планарного приближения достаточно часто решают с применением безразмерных переменных [14]. Будем измерять расстояние до центра в некоторых характерных единицах. Например, в качестве такой единицы можно использовать радиус  $R$  галактики, аккреционного диска и т.д. Тогда можно использовать расстояние с тильдой сверху:

$$\tilde{r} = \frac{r}{R};$$

В таком случае уравнения будут записываться в такой, похожей на изначальную форме [94]

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{\pi\alpha_0}{2h} B_\varphi - \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\eta\pi^2 B_r}{4h^2} + \\ &+ \eta \left\{ \frac{1}{R\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} R \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{R^2 \tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{R^2 \tilde{r}^2} - \frac{2}{R^2 \tilde{r}^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\pi\alpha_0}{2h} B_r - \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + R\tilde{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{r}} B_r - \frac{\eta\pi^2 B_\varphi}{4h^2} + \end{aligned}$$

$$+\eta \left\{ \frac{1}{R\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( R\tilde{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{R^2\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{R^2\tilde{r}^2} + \frac{2}{R^2\tilde{r}^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}.$$

Немного иначе это можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{\pi\alpha_0}{2h} B_\varphi - \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\eta\pi^2 B_r}{4h^2} + \\ &+ \eta \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\pi\alpha_0}{2h} B_r - \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{r}} B_r - \frac{\eta\pi^2 B_\varphi}{4h^2} + \\ &+ \eta \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Домножим теперь обе части обоих уравнений на  $\frac{h^2}{\eta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{\eta} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta} B_\varphi - \Omega \frac{h^2}{\eta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \\ &+ \frac{h^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{h^2}{\eta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta} B_r - \Omega \frac{h^2}{\eta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{h^2}{\eta} \tilde{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{r}} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \\ &+ \frac{h^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

В данном случае удобно измерять времена в уравнениях в следующих единицах [14]:

$$T = \frac{h^2}{\eta}.$$

Время будет характеризоваться с учетом вышесказанного безразмерным параметром:

$$\tilde{t} = \frac{t}{T}.$$

Уравнение тогда запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{t}} &= -\frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta} B_\varphi - \Omega \frac{h^2}{\eta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \frac{h^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta} B_r - \Omega \frac{h^2}{\eta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{r}} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{h^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}.$$

Точно также можно ввести новые единицы для измерения угловой скорости, обратные единицам для измерения времени:

$$\Omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{\eta}{h^2}.$$

Для угловой скорости можно также ввести безразмерный параметр  $\Omega_0$ , который будет ее характеризовать [14]:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_0}.$$

Уравнения приближения тогда запишутся в такой, несколько более простой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{t}} &= -\frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta} B_\varphi - \frac{h^2 \Omega_0}{\eta} \tilde{\Omega} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \frac{h^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta} B_r - \frac{h^2 \Omega_0}{\eta} \tilde{\Omega} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{h^2 \Omega_0}{\eta} \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{r}} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \\ &+ \frac{h^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Достаточно удобно ввести здесь так называемые управляющие параметры динамо, которые будут характеризовать интенсивность различных процессов, влияющих на эволюцию магнитного поля.

Альфа-эффект характеризуется следующей величиной [48]:

$$R_\alpha = \frac{\pi\alpha_0 h}{2\eta}.$$

Для дифференциального вращения его интенсивность описывается коэффициентом [48]:

$$R_\omega = \frac{h^2 \Omega_0}{\eta}.$$

Также можно охарактеризовать активность диссипации магнитного поля в плоскости диска при помощи такого отношения:

$$\lambda = \frac{h}{R}.$$

В таком случае систему уравнений можно переписать в следующей форме, содержащей безразмерные управляющие параметры (тильды в дальнейшем будем опускать):

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - R_\omega \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\};$$



$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = R_\alpha B_r - R_\omega \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \phi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}.$$

Оценим теперь значения управляющих параметров для конкретного примера какой-либо галактики. Рассмотрим галактику, параметры которой близки к Млечному Пути и имеющую радиус:

$$R = 10 \text{ кпк} = 10 \cdot 3.09 \cdot 10^{21} \text{ см} = 3.09 \cdot 10^{22} \text{ см}.$$

Для полутолщины галактического диска можно считать, что его величина такова:

$$h = 300 \text{ пк} = 0.3 \text{ кпк} = 0.3 \cdot 3.09 \cdot 10^{21} \text{ см} = 0.927 \cdot 10^{21} \text{ см} = 9.27 \cdot 10^{20} \text{ см}.$$

Крупномасштабная компонента скорости в случае Млечного Пути составляет величину около 220 км/с [106]:

$$V = 220 \text{ км/с} = 220 \cdot 10^5 \text{ см} = 2.20 \cdot 10^7 \text{ см/с}.$$

Будем полагать, что эта скорость соответствует расстоянию до центра 8 кпк, т.е.:

$$r = 8 \text{ кпк} = 8 \cdot 3.09 \cdot 10^{19} \text{ см} = 2.47 \cdot 10^{20} \text{ см}.$$

Для угловой скорости вращения в таком случае можно получить следующую оценку:

$$\Omega_0 = \frac{V}{r} = \frac{2.20 \cdot 10^7 \text{ см/с}}{2.47 \cdot 10^{20} \text{ см}} = 8.91 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}.$$

Учтем, что размер турбулентной ячейки в галактике составляет величину около 100 пк [47]:

$$l = 100 \text{ пк} = 0.1 \text{ кпк} = 0.1 \cdot 3.09 \cdot 10^{21} \text{ см} = 3.09 \cdot 10^{20} \text{ см}.$$

Коэффициент, характеризующий альфа-эффект, может быть вычислен по такой формуле:

$$\alpha_0 = \frac{\Omega_0 l^2}{h} = \frac{8.91 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1} \cdot (3.09 \cdot 10^{20} \text{ см})^2}{8.27 \cdot 10^{20} \text{ см}} = 1.029 \cdot 10^5 \text{ см/с}.$$

Характерная скорость турбулентных движений для галактик будет следующей [106]:

$$u = 10 \text{ км/с} = 1.00 \cdot 10^6 \text{ см/с}.$$

Для коэффициента, отвечающего за турбулентную диффузию, можно тогда записать следующую формулу:

$$\eta = \frac{1}{3} l u = \frac{1}{3} \cdot 3.09 \cdot 10^{20} \text{ см} \cdot 1.00 \cdot 10^6 \text{ см/с} = 1.03 \cdot 10^{26} \text{ см}^2/\text{с}.$$

Тогда для коэффициента, характеризующего альфа-эффект, мы можем получить:

$$R_\alpha = \frac{\pi \alpha_0 h}{2 \eta} = \frac{3.14 \cdot 1.029 \cdot 10^5 \text{ см/с} \cdot 8.27 \cdot 10^{20} \text{ см}}{2 \cdot 1.03 \cdot 10^{26} \text{ см}^2/\text{с}} = 1.30.$$

Для коэффициента, характеризующего дифференциальное вращение, оценка выглядит так:

$$R_{\omega} = \frac{h^2 \Omega_0}{\eta} = \frac{(9.27 \cdot 10^{20} \text{ см})^2 \cdot 8.91 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1}}{1.03 \cdot 10^{26} \text{ см}^2/\text{с}} = 7.43.$$

Наконец, определим значение параметра, показывающего величину диссипации магнитного поля в плоскости диска:

$$\lambda = \frac{h}{R} = \frac{9.27 \cdot 10^{20} \text{ см}}{3.09 \cdot 10^{22} \text{ см}} = 0.03.$$

Таким образом, если говорить про значения параметров, то они имеют следующий порядок:

$$R_{\alpha} = O(1);$$

$$R_{\omega} = O(10);$$

$$\lambda = O(10^{-2}).$$

Отметим, что достаточно часто с учетом того, что коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, заметно меньше, чем аналогичная величина, характеризующая дифференциальное вращение, во втором из уравнений пренебрегают слагаемым, связанным с ростом азимутальной компоненты магнитного поля за счет альфа-эффекта, поэтому можно записывать уравнения в виде [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_{\alpha} B_{\varphi} - R_{\omega} \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} &= -R_{\omega} \Omega \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varphi} + R_{\omega} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_{\varphi}}{4} + \\ &+ \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{\varphi}}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что в случае учета насыщения альфа-эффекта в соответствии с тем, что было сказано выше, можно сделать замену соответствующего коэффициента [107]:

$$R_{\alpha} \rightarrow R_{\alpha} \left( 1 - \frac{B^2}{B^{*2}} \right);$$

где  $B^*$  – поле, соответствующее равномерному распределению, а  $B$  – модуль индукции магнитного поля:

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_{\varphi}^2};$$

т.е.:

$$R_\alpha \rightarrow R_\alpha \left( 1 - \frac{B_r^2 + B_\varphi^2}{B^{*2}} \right).$$

Удобно измерять магнитные поля в единицах равномерного распределения, тогда будет разумно использовать следующую замену для коэффициента альфа-эффекта:

$$R_\alpha \rightarrow R_\alpha (1 - B_r^2 - B_\varphi^2).$$

Для системы уравнений магнитного поля в таком случае можно получить следующую форму [107]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - R_\omega \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \\ &+ \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \\ &+ \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

В более сложных случаях, когда необходимо учесть процесс насыщения поля более аккуратно, данная система уравнений может быть дополнена уравнением для потоков спиральности магнитного поля, которое может решаться совместно с основными.

Что касается граничных условий, то их вид определяется спецификой задачи. Так, в случае галактик разумно считать, что при  $r = 1$  (внешняя граница) магнитное поле обращается в нуль. Иногда более правильно полагать, что выполняется условие обращения в нуль производной магнитного поля. Также возможны и другие граничные условия, отвечающие той или иной физической ситуации.

## §2. Анализ уравнений планарного приближения и их решений в локальном приближении

Представляет интерес, какие решения будут иметь уравнения планарного приближения. Отметим, что одним из основных достоинств данной модели является то, что она допускает возможность как аналитического решения, так и численного анализа. Впрочем, важно сказать, что аналитическое исследование возможно лишь в ряде упрощенных случаев.

Для начала рассмотрим так называемую локальную модель [108] [109] [110], которая основывается на обыкновенных дифференциальных уравнениях. Этого можно добиться, если пренебречь слагаемыми, входящими в оператор Лапласа (это возможно, если зависимость магнитного поля от координат достаточно слабая [96] [111]). Кроме того, будем полагать, что магнитное поле является осесимметричным. Затем, возьмем околонулевое значение магнитного поля, поэтому нелинейные слагаемые оказываются пренебрежимо малыми на фоне остальных.

Тогда система уравнений для индукции сведется к следующей несложной форме:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4};$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4}.$$

Будем искать зависимость магнитного поля от времени в экспоненциальной форме:

$$B_r(t) = B_{0r} \exp(\beta t);$$

$$B_\varphi(t) = B_{0\varphi} \exp(\beta t);$$

Тогда система уравнений для компонент индукции переписывается в следующей форме:

$$\beta B_{0r} \exp(\beta t) = -R_\alpha B_{0\varphi} \exp(\beta t) - \frac{\pi^2}{4} B_{0r} \exp(\beta t);$$

$$\beta B_{0\varphi} \exp(\beta t) = -R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_{0r} \exp(\beta t) - \frac{\pi^2}{4} B_{0\varphi} \exp(\beta t);$$

или, убрав экспоненциальные множители и перенеся все имеющиеся ненулевые слагаемые в одну из частей уравнения, мы можем получить такое соотношение для определения коэффициентов, характеризующих рост компонент магнитного поля:

$$\left( \beta + \frac{\pi^2}{4} \right) B_{0r} + R_\alpha B_{0\varphi} = 0;$$

$$-R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_{0r} + \left( \beta + \frac{\pi^2}{4} \right) B_{0\varphi} = 0.$$

Условие разрешимости данной системы уравнений состоит в равенстве нулю следующего определителя [112]:

$$\begin{vmatrix} \beta + \frac{\pi^2}{4} & -R_\alpha \\ R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} & \beta + \frac{\pi^2}{4} \end{vmatrix} = 0.$$

Оно будет сводиться к такому равенству:

$$\left( \beta + \frac{\pi^2}{4} \right)^2 + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0.$$

Тогда для скорости экспоненциального роста магнитного поля возможно будет получить:

$$\beta = -\frac{\pi^2}{4} \pm \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}};$$

Определим теперь, какие собственные векторы соответствуют данным собственным значениям. Рассмотрим первое из собственных значений:

$$\beta_1 = -\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}.$$

Первое из характеристических уравнений тогда запишется в следующем виде:

$$\sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} B_{0r} + R_\alpha B_{0\varphi} = 0.$$

Из данного равенства следует, что [113]

$$\frac{B_{0\varphi}}{B_{0r}} = -\sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}}.$$

Тогда коэффициенты, соответствующие первому из собственных значений, можно будет выразить так:

$$B_{0r} = C_1;$$

$$B_{0\varphi} = -C_1 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}};$$

где  $C_1$  – некоторая постоянная величина.

Для соответствующих компонент решения можно получить такие выражения:

$$B_{1r}(t) = C_1 \exp(\beta_1 t) = C_1 \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\}t\right);$$

$$B_{1\varphi}(t) = -C_1 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} \exp(\beta_1 t) = -C_1 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\}t\right).$$

Возьмем теперь второе собственное значение, которое соответствует данной задаче:

$$\beta_2 = -\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}.$$

Выражение для коэффициентов, характеризующих магнитное поле, в таком случае выражается с помощью следующей формулы:

$$-\sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} B_{0r} + R_\alpha B_{0\varphi} = 0.$$

Соотношение между данными коэффициентами выражается посредством следующего выражения:

$$\frac{B_{0\varphi}}{B_{0r}} = \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}}.$$

Таким образом для коэффициентов возможно будет получить такие формулы:

$$B_{0r} = C_2;$$

$$B_{0\varphi} = C_2 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}};$$

где  $C_2$  – также некоторая константа.

В таком случае зависимость компонент магнитного поля, соответствующих данному собственному значению, можно выразить так:

$$B_{2r}(t) = C_2 \exp(\beta_2 t) = C_2 \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\} t\right);$$

$$B_{2\varphi}(t) = C_2 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} \exp(\beta_2 t) = C_2 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\} t\right).$$

Полное решение для системы уравнений в локальном случае может быть получено путем сложения данных решений, связанных с различными собственными значениями [114] [115]:

$$B_r(t) = B_{1r}(t) + B_{2r}(t);$$

$$B_\varphi(t) = B_{1\varphi}(t) + B_{2\varphi}(t);$$

что сведется к таким соотношениям:

$$B_r(t) = C_1 \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\} t\right) + C_2 \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\} t\right);$$

$$B_\varphi(t) = -C_1 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\} t\right) +$$

$$+ C_2 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} \exp\left(\left\{-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}\right\} t\right).$$

Коэффициенты связаны с начальным значением магнитного поля путем следующего выражения:

$$B_r(0) = C_1 + C_2;$$

$$B_\varphi(0) = -C_1 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}} + C_2 \sqrt{-\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}}.$$

Тогда коэффициенты будут связаны с начальными условиями так:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( B_r(0) - \frac{B_\varphi(0)}{\sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}}} \right);$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( B_r(0) + \frac{B_\varphi(0)}{\sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}}} \right).$$

Можно отметить, что хотя бы одно из решений (очевидно соответствующее  $\beta_1$ ) будет расти со временем только в случае, если  $\beta_1 > 0$ , т.е.:

$$-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} > 0.$$

Это означает, что

$$-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} > \frac{\pi^4}{16},$$

или

$$R_\alpha R_\omega > -\frac{\pi^4}{16r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}.$$

Удобно ввести так называемое динамо-число [3] [14] [47] [48], которое будет характеризовать возможность генерации магнитного поля:

$$D = R_\alpha R_\omega.$$

Генерация поля возможна в случаях, когда

$$D > D_{cr}(r),$$

где  $D_{cr}(r)$  – критическое значение динамо-числа, вообще говоря, зависящее от расстояния до центра согласно неравенству, которое было записано нами чуть выше:

$$D_{cr}(r) = -\frac{\pi^4}{16r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}.$$

Тем не менее, приближенно можно считать, что в рамках используемых нами безразмерных переменных приблизительно выполняется следующее равенство (учтем, что

угловая скорость уменьшается по мере удаления от центра объекта, и поэтому ее производная по расстоянию должна иметь отрицательное значение) [47]:

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \approx -1.$$

Это означает, что для критического динамо-числа, характеризующего возможность генерации магнитного поля, можно записать следующую грубую оценку:

$$D_{cr} \approx -\frac{(3.14)^4}{16 \cdot (-1)} = 6.08.$$

Отметим, что более точные оценки для данной величины имеют возможность несколько увеличить этот порог (что планируется сделать в следующих разделах), однако характерные значения остаются практически такими же.

Рассмотрим теперь поведение соответствующих решений для магнитного поля для каких-то характерных значений параметров, описывающих действие динамо. Возьмем начальное магнитное поле, которое представляется в следующей форме:

$$B_r|_{t=0} = 1;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = 1.$$

Кроме того, возьмем такие значения параметров, которые характеризуют альфа-эффект и дифференциальное вращение:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 10.$$

Отметим, что это соответствует значению динамо-числа  $D = 10$ . Результат представлен на рисунке 2.2.1. На нем представлены результаты для компонент магнитного поля, а также для его модуля.

Можно отметить, что по мере роста магнитного поля азимутальная компонента магнитного поля начинает заметно доминировать над радиальной. Со временем соотношение между ними становится примерно как 3:1 (согласно теоретическим представлениям, описанным

выше, оно должно составлять величину около  $\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} = \sqrt{10} \approx 3.2$ ).



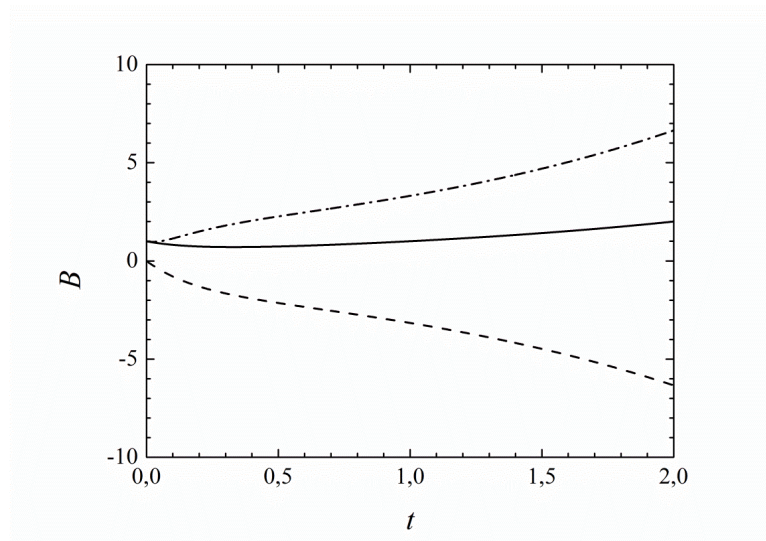


Рис. 2.2.1. Эволюция магнитного поля в линейном локальном случае при  $D = 10$ . Сплошная линия показывает радиальную компоненту  $B_r$ , пунктирная – азимутальную  $B_\phi$ , штрихпунктирная – модуль магнитного поля  $B$ .

Изучим теперь поведение магнитного поля в случае различных значений коэффициента, отвечающего за дифференциальное вращение (и соответственно, динамо-числа). При этом, будем полагать, что коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, имеет во всех случаях значение  $R_\alpha = 1$ . Это вполне соответствует тем оценкам, которые мы ранее получали при оценке типичных параметров, которые характеризуют эволюцию магнитного поля в случае действия динамо в диске.

Можно видеть (рис. 2.2.2), что магнитное поле растет при значениях динамо-числа, превышающих порог, который был описан нами ранее. В том случае, когда  $R_\omega = 5$ , мы имеем значение динамо-числа, равное  $D = 5$ . Оно ниже, чем пороговое значение, поэтому вполне логично, что магнитное поле в таком случае может лишь затухать. Если мы берем значение  $R_\omega = 8$ , то для динамо-числа можно получить величину  $D = 8$ , что превышает критическое значение, поэтому можно говорить о росте магнитного поля, которое и наблюдается согласно результатам численного моделирования. Если же мы берем более интенсивное дифференциальное вращение, соответствующее  $R_\omega = 10$ , то мы получим динамо-число  $D = 10$ . В таком случае также будет наблюдаться рост магнитного поля, однако скорость его роста превышает значения, которые были описаны ранее. Таким образом, аналитические результаты, полученные ранее, практически полностью соответствуют численным результатам. Отметим, что нам намного удобнее решать задачу в логарифмическом масштабе, что позволяет определить скорость экспоненциального роста магнитного поля. Можно отдельно обратить внимание на то,

что скорость роста не сразу выходит на какое-то постоянное значение. Это связано с тем, что решение не сразу выходит на «основной» собственный вектор, который характеризует решение.

Конечно, эволюция поля в линейном случае оказывается достаточно простой, и может быть исследована без каких-то существенных затруднений. Несколько иначе обстоит дело в нелинейном случае. Изучим поведение решения системы уравнений с учетом кубических слагаемых в формуле для частной производной радиальной компоненты магнитного поля по времени (пока также в локальном случае, пренебрегая какой-либо зависимостью от пространственных координат) [116]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2 B_r}{4};$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4}.$$

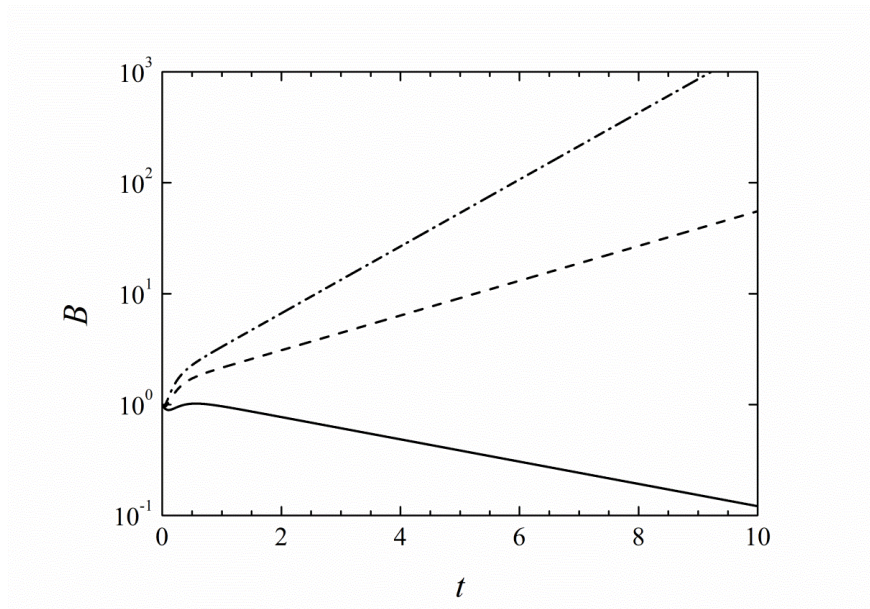


Рис. 2.2.2. Эволюция модуля магнитного поля в линейном локальном случае при различных значениях  $R_\omega$ . Сплошная линия показывает случай  $R_\omega = 5$ , пунктирная – азимутальную  $R_\omega = 8$ , штрихпунктирная – модуль магнитного поля  $R_\omega = 10$ .

В данном случае мы имеем простейший аттрактор. Исследуем его поведение [117]. Для этого нам необходимо найти неподвижные точки, которые определяются исходя из условия

$$\frac{dB_r}{dt} = \frac{dB_\varphi}{dt} = 0.$$

Таким образом, для этого необходимо решить систему алгебраических уравнений:

$$-R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2 B_r}{4} = 0;$$

$$R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} = 0.$$

Из второго уравнения можно выразить значение для азимутальной компоненты магнитного поля:

$$B_\varphi = \frac{4}{\pi^2} R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r.$$

Подставим его в первую из формул, описывающих неподвижную точку системы:

$$-\frac{4}{\pi^2} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r \left( 1 - B_r^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 B_r^2 \right) - \frac{\pi^2 B_r}{4} = 0;$$

Данное уравнение имеет очевидное решение, соответствующее нулевому значению радиальной компоненты магнитного поля:

$$B_r^{(0)} = 0.$$

Точно также можно сказать, что с ним тесно связано и значение для азимутальной части магнитного поля:

$$B_\varphi^{(0)} = 0.$$

Найдем теперь ненулевые решения для уравнения, описывающего радиальную компоненту магнитного поля, разделив обе его части на само значение данной компоненты:

$$-\frac{4}{\pi^2} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 - B_r^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 B_r^2 \right) - \frac{\pi^2}{4} = 0.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, мы можем получить следующее равенство:

$$\frac{4}{\pi^2} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r^2 \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Для квадрата радиальной компоненты магнитного поля мы можем получить следующее выражение, логичным образом следующее из равенства, приведенного выше:

$$B_r^2 = \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}.$$

Для самого магнитного поля мы можем получить такие неподвижные решения [107] [118]:

$$B_r^{(+)} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}};$$

$$B_r^{(-)} = - \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}}.$$

Найдем соответствующие им значения для азимутальной компоненты магнитного поля:

$$B_\varphi^{(+)} = \sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}};$$

$$B_\varphi^{(-)} = - \sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}}.$$

Проверим, всегда ли данные выражения будут приводить нас к действительным (а значит – физически обоснованным – результатам). Так, производная угловой скорости по расстоянию до оси вращения всегда будет отрицательной. Что касается выражения, стоящего в скобках в знаменателе всех подкоренных выражений, то оно в любом случае будет положительным, поскольку является суммой квадратов:

$$1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 > 0.$$

Таким образом, чтобы выражение для радиальной компоненты магнитного поля было действительным и положительным (иначе оно «солется» с нулевым стационарным значением), нужно потребовать положительности подкоренного выражения, что будет с неизбежностью приводить к следующему неравенству для выражения в скобках в числителе:

$$\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0.$$

Учитывая отрицательное значение производной угловой скорости, мы получим, что

$$R_\alpha R_\omega > - \frac{\pi^4}{16r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}.$$

Таким образом, данное условие будет практически равносильно условию возможности генерации магнитного поля. Это значит, что если допустима генерация, то радиальная компонента поля будет представлять из себя действительную величину.

Если говорить об азимутальной компоненте магнитного поля, то подкоренное выражение будет положительным тогда, когда отрицательно выражение, стоящее в скобках в числителе под корнем:

$$1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0.$$

Оно будет равносильно тому же неравенству, определяющему возможность генерации магнитного поля. Как видно, здесь также можно говорить о том, что стационарное значение для азимутальной составляющей поля будет действительным.

Исследуем теперь поведение решения в окрестности данных неподвижных точек и вид точек покоя. Для этого возможно рассмотреть уравнение в линейном приближении, изучив соответствующие ему собственные значения.

Проще всего обстоит дело с нулевой неподвижной точкой, для которой собственные значения были исследованы раньше, когда мы говорили о линейном приближении. Тогда мы имеем два действительных собственных значения, одно из которых является положительным, а второе – отрицательным. Тогда мы можем говорить о седловой точке, у которой затухание ведет вдоль собственного вектора, который соответствует отрицательному собственному значению (см. выше).

Исследуем теперь поведение решения в окрестности других неподвижных точек, соответствующих  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\phi^{(+)} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\phi^{(-)} \end{pmatrix}$ . Для этого введем вспомогательные функции:

$$F(B_r, B_\phi) = -R_\alpha B_\phi (1 - B_r^2 - B_\phi^2) - \frac{\pi^2 B_r}{4};$$

$$G(B_r, B_\phi) = R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\phi}{4}.$$

Тогда очевидно, что поведение решения будет описываться с помощью уравнения:

$$\frac{dB_r}{dt} = F(B_r, B_\phi);$$

$$\frac{dB_\phi}{dt} = G(B_r, B_\phi).$$

Тогда в окрестности неподвижных точек решение можно представить с помощью системы, состоящей из следующих приближенных уравнений, содержащих частные производные данных функций [117]:

$$\frac{dB_r}{dt} = \left. \frac{\partial F}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(\pm)} \\ B_\phi=B_\phi^{(\pm)}}} (B_r - B_r^{(\pm)}) + \left. \frac{\partial F}{\partial B_\phi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(\pm)} \\ B_\phi=B_\phi^{(\pm)}}} (B_\phi - B_\phi^{(\pm)});$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = \frac{\partial G}{\partial B_r} \Big|_{\substack{B_r=B_r^{(\pm)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(\pm)}}} (B_r - B_r^{(\pm)}) + \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \Big|_{\substack{B_r=B_r^{(\pm)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(\pm)}}} (B_\varphi - B_\varphi^{(\pm)}).$$

Определим выражения, связанные с частными производными, стоящими в данной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial B_r} &= 2R_\alpha B_\varphi B_r - \frac{\pi^2}{4}; \\ \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} &= -R_\alpha (1 - B_r^2 - 3B_\varphi^2); \\ \frac{\partial G}{\partial B_r} &= R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}; \\ \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} &= -\frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Вычислим значения данных производных, которые соответствуют неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$ . Здесь нам необходимо учитывать полученные ранее выражения для соответствующего решения, что приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial B_r} \Big|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} &= 2R_\alpha B_\varphi^{(+)} B_r^{(+)} - \frac{\pi^2}{4} = \\ &= 2R_\alpha \sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} - \frac{\pi^2}{4} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} - \frac{\pi^2}{4}; \\ \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} \Big|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} &= -R_\alpha \left(1 - \left(B_r^{(+)}\right)^2 - 3\left(B_\varphi^{(+)}\right)^2\right) = \\ &= -R_\alpha \left(1 - \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} - 3 \frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}\right); \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} = R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r};$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Отметим, что для неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\varphi^{(-)} \end{pmatrix}$  мы имеем точно такие же значения:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(-)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(-)}}} = \left. \frac{\partial F}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}};$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(-)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(-)}}} = \left. \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}};$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(-)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(-)}}} = \left. \frac{\partial G}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}};$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(-)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(-)}}} = \left. \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}}.$$

Изучим теперь собственные значения матрицы, характеризующей поведение решения в окрестности неподвижной точки (для примера возьмем неподвижную точку  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$ , учитывая тот факт, что для другой ненулевой точки результаты будут в целом аналогичны):

$$H = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} & \left. \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} \\ \left. \frac{\partial G}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} & \left. \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} \end{pmatrix}.$$

Тогда определим собственные значения  $\sigma$  для данной матрицы, которые определяются так:

$$\det(H - \sigma I) = 0,$$

где  $I$  – единичная матрица размером  $2 \times 2$ .

Левую часть характеристического уравнения можно переписать в следующем более подробном виде:

$$\begin{aligned}
 \det(H - \sigma I) &= \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} - \sigma & \left. \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} \\ \left. \frac{\partial G}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} & \left. \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} - \sigma \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} - \sigma \\ \left. \frac{\partial G}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial B_\varphi} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} \\ \left. \frac{\partial G}{\partial B_r} \right|_{\substack{B_r=B_r^{(+)} \\ B_\varphi=B_\varphi^{(+)}}} \end{pmatrix} = \\
 &= \left( \frac{\pi^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} - \frac{\pi^2}{4} - \sigma \right) \left( -\frac{\pi^2}{4} - \sigma \right) + \\
 &+ R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 - \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} - 3 \frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \right) = \\
 &= \left( \sigma + \frac{\pi^2}{4} \right)^2 - \left( \frac{\pi^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \right) \left( \sigma + \frac{\pi^2}{4} \right) + \\
 &+ R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 - \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} - 3 \frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \right) = \\
 &= \left( \sigma + \frac{\pi^2}{4} \right)^2 - \left( \frac{\pi^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \right) \left( \sigma + \frac{\pi^2}{4} \right) - \\
 &- \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}.
 \end{aligned}$$



В таком случае мы можем записать следующее уравнение для определения собственного значения:

$$\left(\sigma + \frac{\pi^2}{4}\right)^2 - \left( \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \right) \left(\sigma + \frac{\pi^2}{4}\right) - \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} = 0.$$

Для решения можно получить:

$$\left(\sigma + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}}.$$

Отдельно рассмотрим подкоренное выражение и проанализируем его значения:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} = \\ & = \frac{\pi^4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 8 \frac{R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} + \frac{\pi^4}{4} = \\ & = \frac{\pi^4}{4} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 2 \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Выражение перед фигурной скобкой представляет собой постоянный положительный коэффициент. Поэтому имеет смысл проанализировать возможные значения внутри фигурных скобок. Определим, при каких условиях оно будет отрицательным:

$$\frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 2 \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} + 1 < 0.$$

Домножим обе части на  $\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2$  (отметим, что в силу выполнения условия

генерации и того, что оно представляет собой квадрат, оно является положительным, поэтому знак неравенства не изменится), тогда мы получим:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 + 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right) + \\ + \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2 < 0; \end{aligned}$$

Раскроем скобки для дальнейшего анализа:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 + 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) + \\ 2 \left\{ \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \right\}^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) + 1 + 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 + \\ + \left\{ \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \right\}^2 < 0; \end{aligned}$$

Тогда исследуемое нами неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + 2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) \right\} \left\{ \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \right\}^2 + 1 + \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 + \\ + 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) < 0. \end{aligned}$$

Выражение в левой части обращается в нуль в том случае, если выполнено такое условие:

$$\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 = - \frac{\left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left\{ 1 + 2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) \right\}} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{\left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 - \left\{1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\} \left\{1 + \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right\}}{\left\{1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\}}$$

Отметим, что в данном случае все определяется знаком выражения  $1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)$ . В том случае, если

$$1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) > 0,$$

то исследуемое нами выражение может обратиться в нуль только при отрицательных значениях произведения  $\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2$ , что невозможно в силу его построения. В свою очередь, при его положительных значениях левая часть неравенства будет монотонно возрастать с ростом  $\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2$ , поэтому выполнение неравенства оказывается невозможным.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) < 0.$$

Это означает, что левая часть неравенства обратится в нуль при следующем значении произведения:

$$\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 = - \frac{\left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left\{1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\}} - \frac{\sqrt{\left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 - \left\{1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\} \left\{1 + \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right\}}{\left\{1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\}}$$

При больших значениях  $\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2$  она будет лишь уменьшаться, поэтому неравенство окажется выполненным при выполнении следующего соотношения:

$$\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 > - \frac{\left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left\{1 + 2\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\}}$$

$$\frac{\sqrt{\left(2 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 - \left\{1 + 2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\} \left\{1 + \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right\}}{\left\{1 + 2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)\right\}}$$

Это будет условием того, что подкоренное выражение в формуле, определяющее значение  $\sigma$ , будет отрицательным. Тогда можно записать, что

$$\left(\sigma + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \pm$$

$$\pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{4} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}}{}};$$

из чего следует, что

$$\sigma = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \pm$$

$$\pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{4} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}}{}}.$$

В силу того, что выполнено условие генерации магнитного поля, второе слагаемое в правой части будет отрицательным. В таком случае исследуемая нами неподвижная точка  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$  будет представлять собой устойчивый фокус [117].

Определим, что будет во всех остальных случаях. Тогда подкоренное выражение будет положительным, поэтому для  $\sigma$  мы можем получить, что

$$\sigma = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}}.$$

Преобразуем для начала слагаемые, которые стоят в правой части не под корнем, приведя их к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)} &= \frac{\pi^2}{4} \left\{ -1 + \frac{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} \right\} = \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{-1 - \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 + 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} \right\} = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} - R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}. \end{aligned}$$

Возьмем теперь подкоренное выражение и выделим там полный квадрат:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{4 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} &= \\ &= \frac{\pi^4}{4} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2}{\left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2} + 2 \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2 + 1 \right\} = \\ &= \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2} + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \right)^2 - \left(\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)^2 + 1 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} + \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 1 \right\} = \\
 &= \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 1 \right\} = \\
 &= \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} - 1 - \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 1 \right\} = \\
 &= \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) - \right. \\
 &\quad - 2 \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 + \\
 &\quad \left. + \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что в силу выполнения условия генерации магнитного поля  $-\frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} > 1$ ,

поэтому можно считать, что

$$-2 \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) < -2;$$

Это значит, что для подкоренного выражения мы можем записать следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2}{4 \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \left( 3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} < \\ & < \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 - 2 - \right. \\ & - 2 \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 + \\ & \quad \left. + \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 2 \right\} = \\ & = \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 + \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 - \right. \\ & - 2 \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - 2 \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \left. \right\} < \\ & = \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 + \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \left\{ \frac{\left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right\} = \\
 & = \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) - \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right) \right\}^2
 \end{aligned}$$

В том случае, если

$$\left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) > \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right),$$

ТО МОЖНО ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ ОЦЕНКОЙ:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi^4 \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2}{4 \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2} + 4 \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \left( 3 + \frac{32}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} < \\
 & < \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 = \frac{64}{\pi^4} \left( \frac{R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Тогда для параметра  $\sigma$  можно получить следующую оценку сверху:

$$\sigma < \frac{4}{\pi^2} \frac{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} - R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{64}{\pi^4} \left( \frac{R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2} < 0.$$

Определим, что будет в ситуации, когда

$$\left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right) < \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right).$$

Рассмотрим подкоренное выражение отдельно. Тогда для него, с учетом того, что



$$\frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} > 1,$$

можно получить, что

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} - 1 - \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 1 \right\} < \frac{\pi^4}{4} \left\{ \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 - \left( \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + 1 \right\} < \\ & < \frac{\pi^4}{4} < \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{\frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 = \frac{64}{\pi^4} \left( \frac{R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 - R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Далее очевидно, что это приводит к аналогичной оценке для обоих значений  $\sigma$  :

$$\sigma < 0.$$

Это означает, что неподвижная точка в данном случае представляет собой устойчивый узел.

Таким образом, мы показали, что в зависимости от значений параметров точка  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$  может являться либо устойчивым фокусом, либо устойчивым узлом [117]. Нетрудно продемонстрировать, что такие же условия будут выполнены и для неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\varphi^{(-)} \end{pmatrix}$  (это следует из того, что ситуация в данном случае оказывается полностью симметричной по отношению к другой ненулевой неподвижной точке). Это означает, что при условии выполнения генерации магнитного поля оно будет со временем стабилизироваться при определенных значениях.

Изучим численно, как будет вести себя решение данной системы нелинейных уравнений.

Также как и раньше, будем полагать, что  $r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \approx -1$ , поэтому система уравнений для нелинейного

динамо в локальном случае сведется к следующей форме:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_r;$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi.$$

Возьмем такие параметры, характеризующие эволюцию магнитного поля в диске:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 7.$$

Таким образом, мы можем сказать, что в данном случае мы имеем динамо-число  $D = 7$ . Это превышает значение критического динамо-числа, процесс вывода которого был подробно описан при линейном анализе данной задачи выше.

В качестве начальных условий можно выбрать следующие значения для компонент магнитного поля (отметим, что теперь имеет смысл брать значения, которые меньше единичных – потому что поле должно не превышать значения, соответствующего нелинейной стабилизации):

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = 0.01.$$

Результат представлен на рис. 2.2.3. Можно видеть, что в отличие от линейного случая, наблюдается нелинейное насыщение процесса роста магнитного поля при приближении его величины к значениям, соответствующим выведенным выше. В таком случае видно, что со временем магнитное поле выходит на стационарное решение  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$ . Оценим значения полей в

случае неподвижных точек:

$$B_\varphi^{(+)} = \frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{R_\alpha \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)} = \frac{7 \cdot (-1) \left( 1 + \frac{16}{3.14^4} 1 \cdot 7 \cdot (-1) \right)}{1 \cdot \left( 1 + \frac{16}{3.14^4} 7^2 (-1)^2 \right)} = 0.343.$$

$$B_r^{(+)} = - \frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)} = - \frac{\frac{3.14^4}{16} + 1 \cdot 7 \cdot (-1)}{1 \cdot 7 \cdot (-1) \left( 1 + \frac{16}{3.14^4} 7^2 (-1)^2 \right)} = -0.121.$$

Можно видеть, что предельное значение решения практически в точности соответствует данному значению.

Отдельный интерес в нелинейном случае представляет также эволюция магнитного поля на фазовой плоскости. Для этого интересно рассмотреть несколько различных начальных условий. Кроме уже приведенных начальных условий (обозначим их символически «1») рассмотрим также начальные условия «2»:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = 1;$$

«3»:

$$B_r|_{t=0} = -0.5;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = 0;$$

«4»:

$$B_r|_{t=0} = -0.5;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = 1.$$

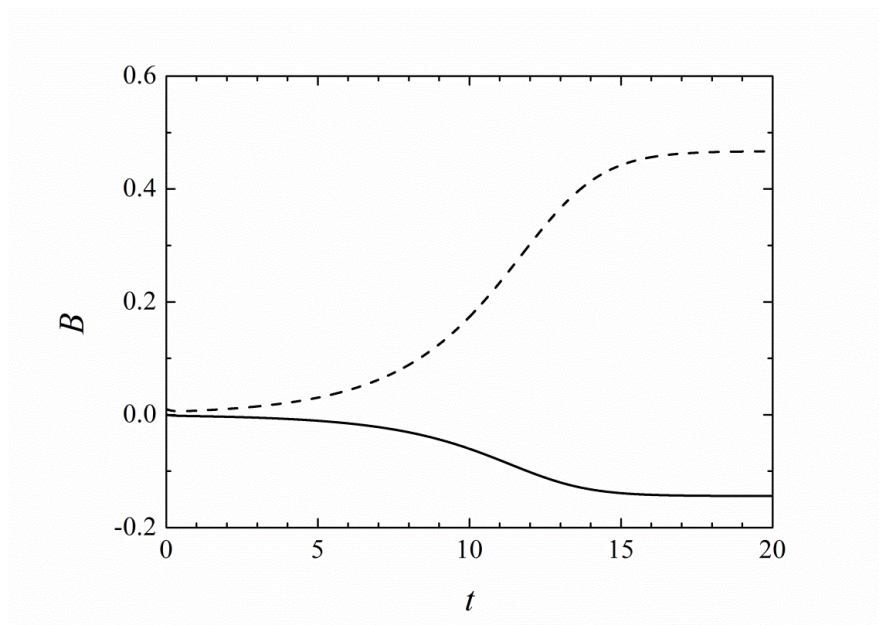


Рис. 2.2.3. Эволюция компонент магнитного поля при  $D = 8$ . Сплошная линия показывает радиальную компоненту поля, пунктирная – его азимутальную составляющую.

Конечно, они не вполне имеют физический смысл, но позволяют проанализировать характер неподвижной точки, которая присутствует в данной задаче. Фазовые траектории для данных начальных условий представлены на рисунке 2.2.4. Можно видеть, что данная точка покоя действительно является устойчивым узлом, в котором сходятся разные фазовые траектории, относящиеся к области влияния соответствующего корня.

Изучим также поведение решения, соответствующего  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\varphi^{(-)} \end{pmatrix}$ . Отметим, что значения

компонент магнитного поля, которые связаны с данным решением, выглядят так:

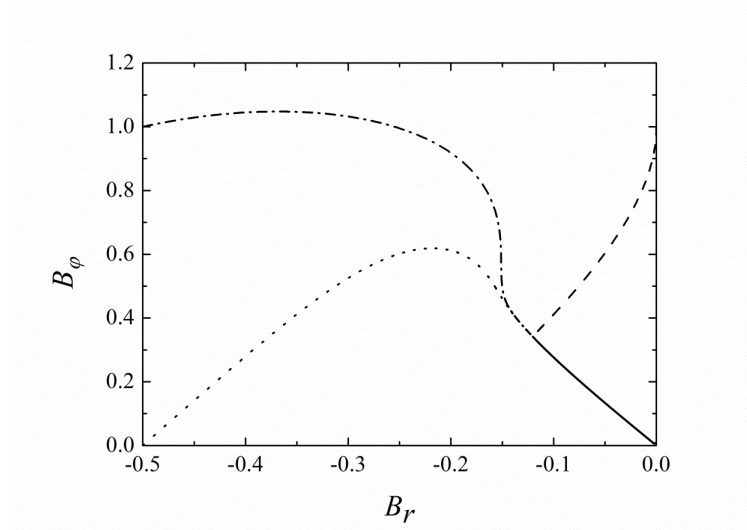


Рис. 2.2.4. Поведение решения на фазовой плоскости при  $D = 8$  в окрестности неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\phi^{(+)} \end{pmatrix}$ . Сплошная кривая показывает случай начальных условий «1», пунктирная – начальные условия «2», штриховая – начальные условия «3», штрихпунктирная – начальные условия «4».

$$B_\phi^{(-)} = -\sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} = -\sqrt{\frac{7 \cdot (-1) \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 1 \cdot 7 \cdot (-1)\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 7^2 (-1)^2\right)}} = -0.343.$$

$$B_r^{(-)} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{3.14^4}{16} + 1 \cdot 7 \cdot (-1)}{1 \cdot 7 \cdot (-1) \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 7^2 (-1)^2\right)}} = 0.121.$$

Для этого рассмотрим также начальные условия «5»:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\phi|_{t=0} = -0.01;$$

«6»:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\phi|_{t=0} = -1;$$

«7»:

$$B_r|_{t=0} = 0.5;$$

$$B_\phi|_{t=0} = 0;$$

«8»:

$$B_r|_{t=0} = 0.5;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = -1.$$

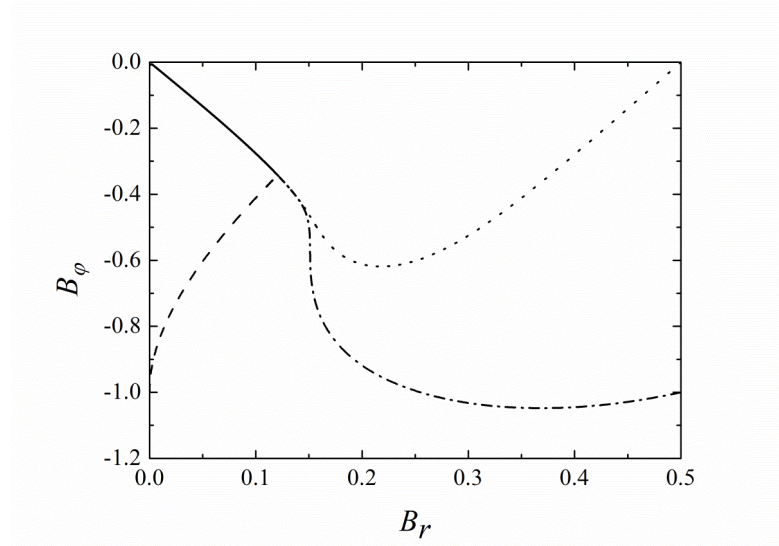


Рис. 2.2.5. Поведение решения на фазовой плоскости при  $D = 8$  в окрестности неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\varphi^{(-)} \end{pmatrix}$ . Сплошная кривая показывает случай начальных условий «5», пунктирная – начальные условия «6», штриховая – начальные условия «7», штрихпунктирная – начальные условия «8».

Результаты для данного случая представлены на рис.2.2.5. Можно видеть, что в данном случае точно так же значения компонент магнитного поля сходятся к неподвижной точке, которая соответствует параметрам, вычисленным нами выше.

Рассмотрим теперь другие значения управляющих параметров, характеризующих действие динамо:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 15.$$

Это соответствует значению  $D = 15$ . Определим положение первой неподвижной точки на фазовой плоскости:

$$B_\varphi^{(+)} = \sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{R_\alpha \left( 1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}} = \sqrt{\frac{15 \cdot (-1) \left( 1 + \frac{16}{3.14^4} 1 \cdot 15 \cdot (-1) \right)}{1 \cdot \left( 1 + \frac{16}{3.14^4} 15^2 (-1)^2 \right)}} = 0.761.$$

$$B_r^{(+)} = - \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} = - \sqrt{\frac{\frac{3.14^4}{16} + 1 \cdot 15 \cdot (-1)}{1 \cdot 15 \cdot (-1) \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 15^2 (-1)^2\right)}} = -0.125.$$

Результаты для начальных условий «1», «2», «3» и «4», относящихся к области влияния данного корня, показаны на рис. 2.2.6. Можно видеть, что решение приходит к значениям, которые соответствуют вычисленным выше параметрам неподвижной точки. Кроме того, из рисунка отчетливо видно, что в данном случае соответствующая неподвижная точка является устойчивым узлом.

То же самое можно сказать и про вторую неподвижную точку:

$$B_\varphi^{(-)} = - \sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} = - \sqrt{\frac{15 \cdot (-1) \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 1 \cdot 15 \cdot (-1)\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 15^2 (-1)^2\right)}} = -0.761.$$

$$B_r^{(-)} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{3.14^4}{16} + 1 \cdot 15 \cdot (-1)}{1 \cdot 15 \cdot (-1) \left(1 + \frac{16}{3.14^4} 15^2 (-1)^2\right)}} = 0.125.$$

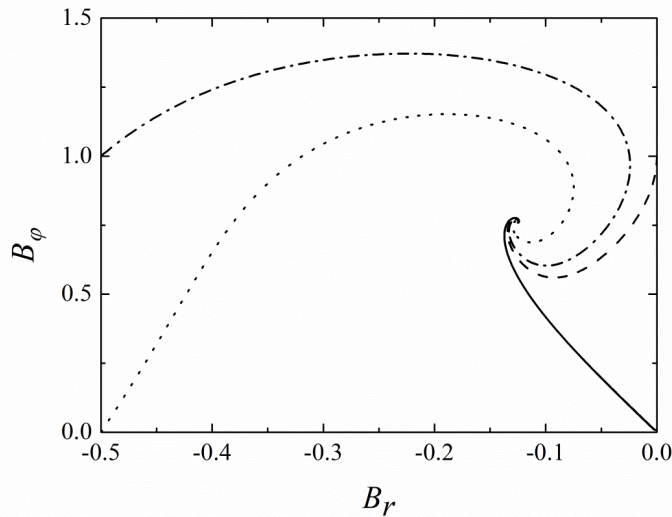


Рис. 2.2.6. Поведение решения на фазовой плоскости при  $D = 15$  в окрестности

неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$ . Сплошная кривая показывает случай начальных условий «1»,

пунктирная – начальные условия «2», штриховая – начальные условия «3», штрихпунктирная – начальные условия «4».

Точно так же, как и в прошлом случае, рассмотрим начальные условия «5», «6», «7» и «8», которые будут соответствовать полям из области влияния неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\varphi^{(-)} \end{pmatrix}$ .

Результаты представлены на рисунке 2.2.7. Можно видеть, что в таком случае значения точно также соответствуют решению, вычисленному выше. Кроме того, данная неподвижная точка будет очевидно являться устойчивым фокусом.

Таким образом, можно резюмировать, что мы исследовали поведение решения уравнения для магнитного поля в планарном приближении с учетом того, что речь идет о локальной модели, когда мы пренебрегаем производной поля по пространственным координатам.

Отметим, что хотя данные результаты были получены из соображений, связанных с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений, ряд подходов может быть эффективно применен и при исследовании задач с учетом зависимости от пространственных координат. Конечно, подобным задачам будут посвящены дальнейшие разделы настоящего исследования, однако отметим простейший пример [119] [120].

Так, каждому из собственных значений, полученных при разложении решения около неподвижных точек, можно сопоставить собственный вектор. Обозначим собственный вектор, соответствующий  $\sigma_1$ , за  $\mathbf{B}_1$ , а тот, который отвечает  $\sigma_2$ , за  $\mathbf{B}_2$ . Для удобства рассмотрим неподвижную точку  $\mathbf{B}^{(+)}$ .

В таком случае решение в окрестности данной точки можно будет описать при помощи такого выражения:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(+)} + \xi_1 \mathbf{B}_1 + \xi_2 \mathbf{B}_2,$$

где коэффициенты разложения подчиняются следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \sigma_1 \xi_1;$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \sigma_2 \xi_2.$$

В элементарном случае учет зависимости от координат может быть описан при помощи введения в правую часть второй производной по расстоянию до центра исследуемого нами объекта:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \sigma_1 \xi_1 + \lambda^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \sigma_2 \xi_2 + \lambda^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial r^2}.$$



В таком случае рассмотрим, как будут вести себя  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в зависимости от времени. Введем вспомогательную переменную [121] [122] [123] [124]:

$$\tau = \frac{x - x^*}{\lambda},$$

где  $x^*$  – некоторая точка (смысл которой будет подробно обсуждаться в следующей главе).

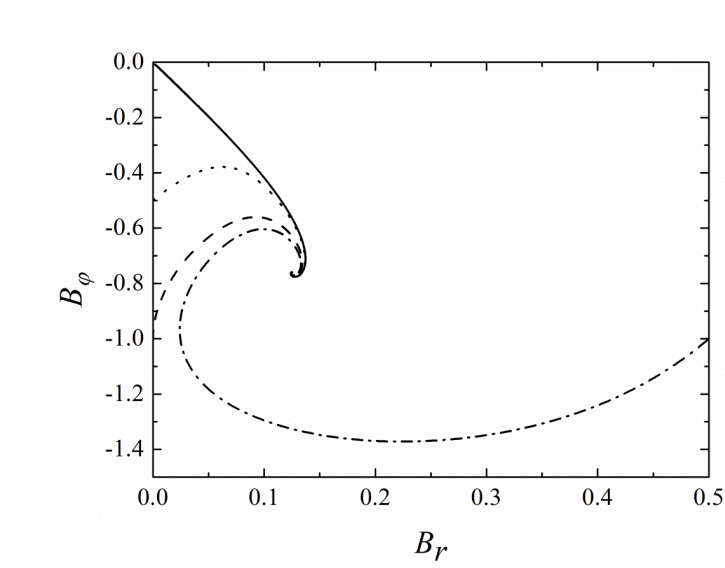


Рис. 2.2.7. Поведение решения на фазовой плоскости при  $D = 15$  в окрестности неподвижной точки  $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\varphi^{(-)} \end{pmatrix}$ . Сплошная кривая показывает случай начальных условий «5»,

пунктирная – начальные условия «6», штриховая – начальные условия «7», штрихпунктирная – начальные условия «8».

Тогда, если мы будем полагать, что  $\xi_1$  и  $\xi_2$  зависят только от  $\tau$ , они будут зависеть от времени по закону [123]:

$$-\lambda \frac{dx^*}{dt} \frac{d\xi_1}{d\tau} = \sigma_1 \xi_1 + \frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2};$$

$$-\lambda \frac{dx^*}{dt} \frac{d\xi_2}{d\tau} = \sigma_2 \xi_2 + \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2}.$$

Если  $x^*$  не зависит от времени или меняется достаточно медленно, то уравнения в приближительной форме станут выглядеть так:

$$0 = \sigma_1 \xi_1 + \frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2};$$

$$0 = \sigma_2 \xi_2 + \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2}.$$



Их решения можно оценить так:

$$\xi_1(\tau) \sim \exp(-\tau\sqrt{-\sigma_1});$$

$$\xi_2(\tau) \sim \exp(-\tau\sqrt{-\sigma_2}).$$

Характерный размер области, в пределах которой происходит выход на магнитное поле, соответствующее неподвижной точке, можно оценить в терминах переменной  $\tau$  таким образом:

$$\Delta = \max\left(\frac{1}{\sqrt{-\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{-\sigma_2}}\right).$$

При переходе к исходным переменным мы можем получить следующее выражение для ширины данной области [120]:

$$\delta = \lambda \max\left(\frac{1}{\sqrt{-\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{-\sigma_2}}\right).$$

### §3. Решение уравнений планарного приближения в осесимметричной постановке

Рассмотрим поведение решения в линейном случае, проведя его исследование более аккуратно. В такой ситуации имеет смысл использовать более точную модель для исследования механизма динамо. Для начала рассмотрим осесимметричное решение – в таком случае компоненты магнитного поля, если мы говорим об экваториальной плоскости, не зависят от азимутального угла, и являются функциями только от расстояния до центра и времени:

$$B_r = B_r(r, t);$$

$$B_\varphi = B_\varphi(r, t).$$

Также, как и ранее, предположим, что произведение расстояния до центра на производную угловой скорости имеет единичное значение. Тогда уравнения для планарного приближения сведутся к следующей системе, которая выглядит несколько более просто, чем исходные уравнения планарного приближения, записанные ранее [113]:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) - \frac{B_r}{r^2} \right\};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}.$$

В качестве граничных условий для уравнений, входящих в данную систему, можно взять нулевые значения компонент магнитного поля в центре объекта и на его внешней границе:

$$B_r|_{r=0} = B_r|_{r=1} = B_\varphi|_{r=0} = B_\varphi|_{r=1} = 0.$$

Удобно раскрыть частные производные, стоящие внутри фигурных скобок, и переписать данные уравнения в виде:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} \right\};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}.$$

С целью упрощения дальнейших рассуждений и построения решения, удобно ввести вектор-столбец, который будет включать в себя две составляющие магнитного поля, лежащие в экваториальной плоскости исследуемого нами объекта:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных может быть сведена к единственному векторному уравнению, описывающему эволюцию поля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} = -\hat{A} \mathbf{Q} - \frac{\pi^2}{4} \mathbf{Q} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{Q} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{Q} - \frac{1}{r^2} \mathbf{Q} \right\},$$

где оператор  $\hat{A}$  характеризуется с помощью матрицы, представимой в следующей форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & R_\alpha \\ R_\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения  $\mu$  для данного оператора, составив следующее алгебраическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\mu & R_\alpha \\ R_\omega & -\mu \end{vmatrix} = 0;$$

$$\mu^2 - R_\alpha R_\omega = 0.$$

Собственные значения в таком случае будут иметь следующий несложный вид:

$$\mu_1 = \sqrt{R_\alpha R_\omega};$$

$$\mu_2 = -\sqrt{R_\alpha R_\omega}.$$

Найдем собственные векторы, которые будут им соответствовать. Сначала возьмем первое из собственных значений:

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 & R_\alpha \\ R_\omega & -\mu_1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{R_\alpha R_\omega} & R_\alpha \\ R_\omega & -\sqrt{R_\alpha R_\omega} \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1 = 0.$$

Покомпонентно это приведет к следующему равенству для составляющих собственного вектора:

$$-Q_{1r}\sqrt{R_\omega} + Q_{1\varphi}\sqrt{R_\alpha} = 0.$$

В качестве решения для него можно использовать следующее несложное выражение:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{R_\alpha} \\ \sqrt{R_\omega} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь второе собственное значение, которое было получено ранее и дает следующее уравнение для собственного вектора, описывающего нашу задачу:

$$\begin{pmatrix} -\mu_2 & R_\alpha \\ R_\omega & -\mu_2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_2 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{R_\alpha R_\omega} & R_\alpha \\ R_\omega & \sqrt{R_\alpha R_\omega} \end{pmatrix} \mathbf{Q}_2 = 0;$$

Для составляющих собственного вектора это приводит к единственному равенству:

$$Q_{2r}\sqrt{R_\alpha R_\omega} + Q_{2\varphi}R_\alpha = 0.$$

Его решение в таком случае можно будет представить с помощью следующей формулы:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{R_\alpha} \\ \sqrt{R_\omega} \end{pmatrix}.$$

Удобно представить магнитное поле в виде линейной комбинации собственных векторов, которые были получены в ходе предшествующих рассуждений [113]:

$$\mathbf{B} = y(r,t)\mathbf{Q}_1 + z(r,t)\mathbf{Q}_2;$$

где функции  $y(r,t)$  и  $z(r,t)$  будут характеризовать поведение решения в зависимости от времени и пространственных координат. Покомпонентно данное равенство может быть тождественно переписано при помощи двух следующих сумм:

$$B_r(r,t) = -y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + z(r,t)\sqrt{R_\omega};$$

$$B_\varphi(r,t) = y(r,t)\sqrt{R_\omega} + z(r,t)\sqrt{R_\alpha}.$$

Обратная замена для функций может быть записана с помощью следующего выражения:

$$y(r,t) = \frac{B_\varphi(r,t)\sqrt{R_\alpha} - B_r(r,t)\sqrt{R_\omega}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}};$$

$$z(r,t) = \frac{B_r(r,t)\sqrt{R_\omega} + B_\varphi(r,t)\sqrt{R_\alpha}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}}.$$

Подставим данные выражения в уравнения для эволюции компонент магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( -y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + z(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) = -R_\alpha \left( y(r,t)\sqrt{R_\omega} + z(r,t)\sqrt{R_\omega} \right) - \\
 & \quad - \frac{\pi^2}{4} \left( -y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + z(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) + \\
 & + \frac{\lambda^2 \sqrt{R_\alpha}}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( -y(r,t) + z(r,t) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -y(r,t) + z(r,t) \right) - \frac{1}{r^2} \left( -y(r,t) + z(r,t) \right) \right\}; \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( y(r,t)\sqrt{R_\omega} + z(r,t)\sqrt{R_\omega} \right) = -R_\omega \left( -y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + z(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) - \\
 & \quad - \frac{\pi^2}{4} \left( y(r,t)\sqrt{R_\omega} + z(r,t)\sqrt{R_\omega} \right) + \\
 & + \frac{\lambda^2 \sqrt{R_\omega}}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( y(r,t) + z(r,t) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( y(r,t) + z(r,t) \right) - \frac{1}{r^2} \left( y(r,t) + z(r,t) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Домножим обе части второго уравнения на  $\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}$ , что приведет его к такому виду:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + z(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) = -R_\alpha \left( -y(r,t)\sqrt{R_\omega} + z(r,t)\sqrt{R_\omega} \right) - \\
 & \quad - \frac{\pi^2}{4} \left( y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + z(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) + \\
 & + \frac{\lambda^2 \sqrt{R_\alpha}}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( y(r,t) + z(r,t) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( y(r,t) + z(r,t) \right) - \frac{1}{r^2} \left( y(r,t) + z(r,t) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Сложим его с первым уравнением, описывающим эволюцию магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( 2z(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) = -2R_\alpha z(r,t)\sqrt{R_\omega} - \frac{\pi^2}{2} \cdot 2z(r,t)\sqrt{R_\alpha} + \\
 & + \frac{\lambda^2 \sqrt{R_\alpha}}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( 2z(r,t) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( 2z(r,t) \right) - \frac{1}{r^2} \left( 2z(r,t) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Разделим обе части данного уравнения на  $2\sqrt{R_\alpha}$ , что приведет его к форме:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -z\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} z + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \right\};$$

Вновь возьмем полученное нами уравнение и теперь вычтем из него первое из равенств для эволюции магнитного поля. Это приведет нас к такому результату:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( 2y(r,t)\sqrt{R_\alpha} \right) = 2R_\alpha y(r,t)\sqrt{R_\omega} - \frac{\pi^2}{2} \cdot 2y(r,t)\sqrt{R_\alpha} + \\
 & + \frac{\lambda^2 \sqrt{R_\alpha}}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( 2y(r,t) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( 2y(r,t) \right) - \frac{1}{r^2} \left( 2y(r,t) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Домножим обе части на  $\frac{2}{\sqrt{R_\alpha}}$ , тогда уравнение будет приведено к такому виду:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} y + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \right\}.$$

Отметим, что данные уравнения будут иметь те же нулевые граничные условия, что и для исходной системы уравнений, содержащей компоненты магнитного поля в явном виде:

$$y|_{r=0} = y|_{r=1} = z|_{r=0} = z|_{r=1} = 0.$$

Будем искать решение задачи для функции  $y(r, t)$  в экспоненциальной форме [113]:

$$y(r, t) = \tilde{y}(r) \exp(pt),$$

где

$$\tilde{y}(r) = y(r, 0).$$

Тогда дифференциальное уравнение для функции с тильдой переписывается в следующем виде:

$$p\tilde{y}(r) \exp(pt) = \tilde{y}(r)\sqrt{R_\alpha R_\omega} \exp(pt) - \frac{\pi^2}{4} \tilde{y}(r) \exp(pt) + \lambda^2 \left\{ \tilde{y}''(r) \exp(pt) + \frac{1}{r} \tilde{y}'(r) \exp(pt) - \frac{\tilde{y}(r)}{r^2} \exp(pt) \right\}.$$

Разделим обе части данного уравнения на экспоненциальный множитель  $\exp(pt)$ :

$$p\tilde{y}(r) = \tilde{y}(r)\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \tilde{y}(r) + \lambda^2 \left\{ \tilde{y}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{y}'(r) - \frac{1}{r^2} \tilde{y}(r) \right\}.$$

Разделим обе части на  $\lambda^2$  и перенесем все слагаемые в одну часть уравнения:

$$\tilde{y}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{y}'(r) + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{y}(r) \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\} - \frac{1}{r^2} \tilde{y}(r) = 0.$$

Домножим обе части на  $r^2$ , тогда уравнение для функции приведет к такому виду:

$$r^2 \tilde{y}''(r) + r \tilde{y}'(r) + r^2 \frac{1}{\lambda^2} \tilde{y}(r) \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\} - \tilde{y}(r) = 0.$$

Введем новую переменную [113]:

$$x = \frac{r}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{1/2}.$$

Тогда исходный аргумент для нашей функции представляется в такой форме:

$$r = x\lambda \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{-1/2}.$$

Для функции с тильдой производная выражается при помощи такого выражения:

$$\tilde{y}'(r) = \frac{d\tilde{y}}{dr} = \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{y}}{dx} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{1/2}.$$

Вторая производная данной функции может быть выражена посредством такой формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{y}''(r) &= \frac{d}{dr}(\tilde{y}'(r)) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{y}}{dx} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{1/2} \right) = \\ &= \frac{d^2\tilde{y}}{dx^2} \frac{dx}{dr} \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{1/2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\tilde{y}}{dx^2} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}. \end{aligned}$$

В таком случае мы можем записать уравнение уже для функции  $\tilde{y}(x)$ , зависящей от новой переменной  $x$ :

$$x^2 \frac{d^2\tilde{y}}{dx^2} + x \frac{d\tilde{y}}{dx} + (x^2 - 1)\tilde{y} = 0.$$

Решением данного уравнения будут функции Бесселя и Неймана первого порядка. Функция Неймана нас не устраивает по той причине, что стремится к бесконечности при приближении аргумента к нулю, и не удовлетворяет граничным условиям, которые должны выполняться для исходных компонент магнитного поля. Поэтому нас устраивают только решения в виде функции Бесселя, которая обращается в нуль в центральной точке (и те, которые прямо пропорциональны ему):

$$\tilde{y}(x) = YJ_1(x).$$

Зависимость функции  $\tilde{y}(x)$  от исходной переменной, связанной с расстоянием до центра исследуемого объекта, переписывается в такой несложной форме:

$$\tilde{y} = YJ_1 \left( \frac{r}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{1/2} \right).$$

Необходимо потребовать выполнения условия также и на правой границе, что означает следующее:

$$\tilde{y}|_{r=1} = 0,$$

что в случае имеющегося представления для решения уравнения в виде функции Бесселя сведется к следующему:

$$J_1 \left( \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right\}^{1/2} \right) = 0.$$

Таким образом, для удовлетворения граничному условию нужно потребовать выполнения следующего условия:

$$j_{1,n} = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_n \right\}^{1/2},$$

где  $j_{1,n}$  –  $n$ -ый нуль функции Бесселя [77] [125], определяемый по следующему простому правилу:

$$J_1(j_{1,n}) = 0;$$

$$j_{1,n} > 0;$$

$$j_{1,n} > j_{1,m} \text{ при } n > m.$$

Значения данных корней можно найти в таблицах специальных функций, запишем для примера два первых корня:

$$j_{1,1} \cong 3.8317;$$

$$j_{1,2} \cong 7.0156.$$

Однако для нас будет представлять интерес грубая оценка для данных корней. Возьмем следующую приближенную формулу для функции Бесселя, которая выполняется при больших значениях аргумента  $x \gg 1$ :

$$J_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Данное выражение обращается в нуль при стандартных условиях для тригонометрических функций:

$$x_n - \frac{3\pi}{4} = \pi n - \frac{\pi}{2};$$

$$x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Приблизительно можно считать, что [77]

$$j_{1,n} \approx x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n = \pi \left( n + \frac{1}{4} \right).$$

Выразим теперь показатель экспоненциального роста полученного решения  $p_n$ :

$$(j_{1,n})^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_n \right\};$$

$$\lambda^2 (j_{1,n})^2 = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_n;$$

$$p_n = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2.$$

Учитывая приведенное выше приближенное выражение, мы можем получить:

$$p_n = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right)^2.$$

Решения для функции с тильдой, соответствующие различным значениям  $n$ , можно представить так (будем полагать, что  $Y = 1$ ):

$$\tilde{y}_n(r) = J_1(r \cdot j_{1,n});$$

или, если говорить о приближенной формуле для показателей роста, это можно представить так:

$$\tilde{y}_n(r) = J_1\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)r\right).$$

Если мы запишем исходную функцию (с учетом экспоненциального роста), то решение будет таким:

$$y_n(r, t) = \tilde{y}_n(r) \exp(p_n t) = J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp\left\{\left[\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right] t\right\}.$$

Приближенно это можно выразить следующим образом:

$$y_n(r, t) = J_1\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)r\right) \exp\left\{\left[\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right] t\right\}.$$

Полное решение в таком случае можно представить в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} y(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n y_n(r, t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp\left\{\left[\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right] t\right\}. \end{aligned}$$

Приближенно данное решение для изучаемой функции  $y(r, t)$  можно представить так:

$$y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)r\right) \exp\left\{\left[\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right] t\right\}.$$

Найдем теперь коэффициенты  $Y_n$ , исходя из начальных условий, которые используются в данной задаче:

$$y(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r \cdot j_{1,n}).$$

Учитывая, что функции Бесселя первого порядка являются ортогональными друг по отношению к другу с весом  $r$ :

$$\int_0^1 J_1(r \cdot j_{1,n}) J_1(r \cdot j_{1,m}) r dr = 0, \quad m \neq n;$$

можно представить коэффициенты разложения с помощью такой стандартной формулы [77]:



$$Y_n = \frac{\int_0^1 y(r,0) J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr}{\int_0^1 [J_1(r \cdot j_{1,n})]^2 r dr}.$$

Запишем выражение для квадрата нормы функции Бесселя первого порядка, который стоит в знаменателе:

$$\int_0^1 [J_1(r \cdot j_{1,n})]^2 r dr = \frac{1}{2} [J_1'(j_{1,n})]^2.$$

Тогда для коэффициентов, определяющих разложение, мы получаем такое выражение:

$$Y_n = \frac{2 \int_0^1 y(r,0) J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr}{[J_1'(j_{1,n})]^2}.$$

Вычислим производную функции с учетом используемого нами приближенного выражения [77]:

$$J_1'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \right\} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Вычислим значение данной производной, соответствующее приближенному значению нуля функции Бесселя первого порядка:

$$J_1'(j_{1,n}) = J_1'\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi^2\left(n + \frac{1}{4}\right)}} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right) - \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi^2\left(n + \frac{1}{4}\right)}}.$$

Квадрат данного выражения будет таким:

$$[J_1'(j_{1,n})]^2 = \frac{2}{\pi^2\left(n + \frac{1}{4}\right)}.$$

Тогда для коэффициентов получим следующее приближенное выражение:

$$Y_n = \pi^2\left(n + \frac{1}{4}\right) \int_0^1 y(r,0) J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr.$$

Исследуем теперь функцию  $z(r,t)$ , которая характеризует вторую часть решения. Будем предполагать ее зависимость от времени в экспоненциальной форме:

$$z(r,t) = \tilde{z}(r) \exp(qt),$$

где  $\tilde{z}(r)$  – функция, описывающая взаимосвязь между данной составляющей решения и расстоянием до центра объекта, для которого мы исследуем магнитное поле. Ее возможно представить как значение данной функции в начальный момент времени:

$$\tilde{z}(r) = z(r, 0).$$

Перепишем дифференциальное уравнение для этой функции с учетом данного представления:

$$q\tilde{z}(r)\exp(qt) = -\tilde{z}(r)\sqrt{R_\alpha R_\omega}\exp(qt) - \frac{\pi^2}{4}\tilde{z}(r)\exp(qt) + \\ + \lambda^2 \left\{ \tilde{z}''(r)\exp(qt) + \frac{1}{r}\tilde{z}'(r)\exp(qt) - \frac{\tilde{z}(r)}{r^2}\exp(qt) \right\}.$$

Разделим обе части на экспоненциальный множитель  $\exp(qt)$ :

$$q\tilde{z}(r) = -\tilde{z}(r)\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4}\tilde{z}(r) + \lambda^2 \left\{ \tilde{z}''(r) + \frac{1}{r}\tilde{z}'(r) - \frac{\tilde{z}(r)}{r^2} \right\}.$$

Соберем все слагаемые в одной из частей уравнения и разделим обе части на  $\lambda^2$ :

$$\tilde{z}''(r) + \frac{1}{r}\tilde{z}'(r) - \frac{1}{\lambda^2} \left\{ q + \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \frac{\pi^2}{4} \right\} \tilde{z}(r) - \frac{\tilde{z}(r)}{r^2} = 0.$$

Умножив обе части на  $r^2$ , тогда уравнение может быть переписано в таком формате:

$$r^2\tilde{z}''(r) + r\tilde{z}'(r) + r^2 \left\{ -\frac{1}{\lambda^2} \left( q + \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \frac{\pi^2}{4} \right) \right\} \tilde{z}(r) - \tilde{z}(r) = 0.$$

Для того, чтобы было более удобно решать данное уравнение, можно ввести следующую переменную:

$$\xi = \frac{r}{\lambda} \left\{ -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}^{1/2}.$$

С другой стороны, исходная независимая переменная выражается таким образом:

$$r = \xi\lambda \left\{ -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}^{-1/2}.$$

Перепишем производную данной функции по координатам через новую переменную:

$$\tilde{z}'(r) = \frac{d\tilde{z}}{dr} = \frac{d\tilde{z}}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{z}}{d\xi} \left\{ -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}^{1/2}.$$

Для второй производной можно аналогично записать:

$$\tilde{z}''(r) = \frac{d}{dr}(\tilde{z}'(r)) = \frac{d}{d\xi}(\tilde{z}'(r)) \frac{d\xi}{dr} = \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{z}}{d\xi} \left( -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right)^{1/2} \right\} \frac{d\xi}{dr} = \\ = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\tilde{z}}{d\xi^2} \left\{ -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}.$$

В таком случае уравнение для данной функции в предположении зависимости от переменной  $\xi$  переписывается в таком виде:

$$\xi^2 \frac{d^2 \tilde{z}}{d\xi^2} + \xi \frac{d\tilde{z}}{d\xi} + (\xi^2 - 1) \tilde{z} = 0.$$

Решениями данного дифференциального уравнения являются функция Бесселя и функция Неймана первого порядка [78]. Чтобы выбрать одну из них, необходимо учесть граничные условия. Исходя из того, что предполагалось для самого магнитного поля, можно сказать, что данная функция должна обращаться в нуль при нулевом значении используемой нами переменной  $\xi$ . Это означает, что решение задачи представляется только лишь в виде функции Бесселя (в то время как функция Неймана, стремящаяся к бесконечности в нуле, нас не устраивает):

$$\tilde{z}(\xi) = ZJ_1(\xi).$$

Теперь необходимо переписать данную функцию в зависимости от исходной переменной:

$$\tilde{z}(\xi) = ZJ_1 \left( \frac{r}{\lambda} \left\{ -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}^{1/2} \right).$$

Чтобы удовлетворить второму граничному условию (согласно которому данная функция должна обращаться в нуль при  $r=1$ ), нужно потребовать следующее:

$$J_1 \left( \frac{1}{\lambda} \left\{ -q - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}^{1/2} \right) = 0.$$

Таким образом, можно сказать, что для параметра  $q$  можно использовать значения  $q_n$ , соответствующие нулям функции Бесселя первого порядка следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ -q_n - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\}^{1/2} = j_{1,n},$$

где  $j_{1,n}$  определены так же, как это и делалось выше. Возводя обе части в квадрат, мы можем получить:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -q_n - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} \right\} &= (j_{1,n})^2; \\ -q_n - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} &= \lambda^2 (j_{1,n})^2. \end{aligned}$$

Для коэффициента можно весьма просто получить, что

$$q_n = -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2.$$

Независимые друг от друга решения тогда будут представляться в форме (будем предполагать, что  $Z = 1$ ):

$$\tilde{z}_n(r) = J_1(r \cdot j_{1,n}).$$

Учитывая оценку для нулей функции Бесселя первого порядка, которую мы получили ранее, выражение для показателя роста решения может быть преобразовано к следующему:

$$q_n = -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2.$$

Тогда приближенно можно считать, что сами решения представляются в такой форме:

$$\tilde{z}_n(r) = J_1\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)r\right).$$

Тогда для составляющей исследуемой нами функции  $z_n(r, t)$ , учитывая сомножитель, связанный с ее экспоненциальным ростом, можно записать следующее выражение:

$$z_n(r, t) = J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp\left\{\left[-\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right]t\right\};$$

или, используя описанные выше приближительные выражения, можно приближенно записать:

$$z_n(r, t) = J_1\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)r\right) \exp\left\{\left[-\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right]t\right\}.$$

Полное решение для данной функции можно представить в следующей форме:

$$z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n z_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp\left\{\left[-\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right]t\right\}.$$

Аналогично, можно переписать это же выражение в приближенном варианте:

$$z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1\left(\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)r\right) \exp\left\{\left[-\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right]t\right\}.$$

Для коэффициентов мы можем аналогичным образом получить выражение, учитывающее начальные значения:

$$z(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r \cdot j_{1,n}).$$

Тогда [77]:

$$Z_n = \frac{\int_0^1 J_1(r \cdot j_{1,n}) z(r, 0) r dr}{\int_0^1 [J_1(r \cdot j_{1,n})]^2 r dr} = \frac{2 \int_0^1 J_1(r \cdot j_{1,n}) z(r, 0) r dr}{[J_1'(j_{1,n})]^2}.$$

Приближенное выражение для коэффициентов можно представить таким способом:

$$Z_n = \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right) \int_0^1 z(r, 0) J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr.$$

Отыщем теперь решение для компонент магнитного поля, которые связаны с данными функциями:

$$\begin{aligned} B_r(r, t) &= -\sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right] t \right\} + \\ &+ \sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[ -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right] t \right\}; \\ B_\varphi(r, t) &= \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right] t \right\} + \\ &+ \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[ -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right] t \right\}. \end{aligned}$$

Приближенное выражение для них будет таковым:

$$\begin{aligned} B_r(r, t) &= -\sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right)^2 \right] t \right\} + \\ &+ \sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \exp \left\{ \left[ -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right)^2 \right] t \right\}; \\ B_\varphi(r, t) &= \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right)^2 \right] t \right\} + \\ &+ \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \exp \left\{ \left[ -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right)^2 \right] t \right\}; \end{aligned}$$

Для начальных условий для функций мы можем учесть следующее выражение

$$\begin{aligned} y(r, 0) &= \frac{B_\varphi(r, 0) \sqrt{R_\alpha} - B_r(r, 0) \sqrt{R_\omega}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}}; \\ z(r, 0) &= \frac{B_r(r, 0) \sqrt{R_\omega} + B_\varphi(r, 0) \sqrt{R_\alpha}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}}. \end{aligned}$$

Тогда для коэффициентов в разложении мы можем получить такие формулы:

$$Y_n = \frac{2 \int_0^1 \frac{B_\varphi(r, 0) \sqrt{R_\alpha} - B_r(r, 0) \sqrt{R_\omega}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}} J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr}{[J_1'(j_{1,n})]};$$

$$Z_n = \frac{2 \int_0^1 \frac{B_r(r,0)\sqrt{R_\omega} + B_\phi(r,0)\sqrt{R_\alpha}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}} J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr}{[J_1'(j_{1,n})]}.$$

Приближенное выражение для коэффициентов можно записать таким образом:

$$Y_n = \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right) \int_0^1 \frac{B_\phi(r,0)\sqrt{R_\alpha} - B_r(r,0)\sqrt{R_\omega}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}} J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr;$$

$$Z_n = \pi^2 \left( n + \frac{1}{4} \right) \int_0^1 \frac{B_r(r,0)\sqrt{R_\omega} + B_\phi(r,0)\sqrt{R_\alpha}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}} J_1(r \cdot j_{1,n}) r dr.$$

Оценим теперь возможность роста магнитного поля. Отметим, что растущие решения могут соответствовать только лишь первой из экспонент в каждом из выражений. Условием их роста будет следующее

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 > 0.$$

Таким образом, учитывая, что ранее было введено динамо-число  $D = R_\alpha R_\omega$ , получается следующая оценка:

$$\sqrt{D} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 > 0.$$

В таком случае:

$$\sqrt{D} > \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 (j_{1,n})^2.$$

Возведем обе части данного равенства в квадрат. Тогда условие возможности генерации  $n$ -й моды магнитного поля запишется в следующей форме:

$$D > \left( \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right)^2.$$

Отметим, что для нас будет достаточно только лишь генерации старшей моды решения. Таким образом, если мы говорим о принципиальной возможности генерации магнитного поля, то данное условие для динамо-числа можно заменить на следующее:

$$D > \left( \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 (j_{1,1})^2 \right)^2.$$

Возьмем теперь приближенное выражение для нулей функции Бесселя, которое было приведено нами ранее. Тогда условие генерации магнитного поля может быть переписано в следующей форме:

$$D > \left( \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \left( \frac{5\pi}{4} \right)^2 \right)^2.$$

Проведя несложные преобразования в правой части данного неравенства, тогда можно получить, что:

$$D > \frac{\pi^4}{16} \left( 1 + \frac{25\lambda^2}{4} \right)^2.$$

Таким образом, можно сказать, что критическое значение динамо-числа, при котором еще возможен рост магнитного поля (а не только его затухание), определяется с помощью такого выражения:

$$D_{cr} = \frac{\pi^4}{16} \left( 1 + \frac{25\lambda^2}{4} \right)^2.$$

Оценим критическое значение динамо-числа для типичного значения  $\lambda = 0.03$ :

$$D_{cr} = \frac{(3.14)^4}{16} \left( 1 + \frac{25 \cdot (0.03)^2}{4} \right)^2 = 6.078 \cdot 1.011 = 6.15.$$

В ряде работ было показано, что в отдельных случаях (например, для относительно толстого диска) критическое значение динамо-числа может быть повышено до значений около 7.

Проверим данные результаты численно. Для начала возьмем простейшую задачу, для которой можно считать, что  $r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \approx -1$ . Для нее рассмотрим следующие значения управляющих параметров динамо:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 10.$$

В качестве начальных условий возьмем такие:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = B_0 \sin(\pi r);$$

где  $B_0 = 0.001$ . Эволюция магнитного поля со временем в целом соответствует тому, что было в локальном приближении. Гораздо больший интерес представляет пространственная зависимость магнитного поля, которая показана на рис. 2.3.1. Можно видеть, что здесь превалирует азимутальная компонента магнитного поля. Тем не менее, нельзя пренебрегать радиальной частью магнитного поля, которая также является достаточно существенной и имеет такой же порядок величины.

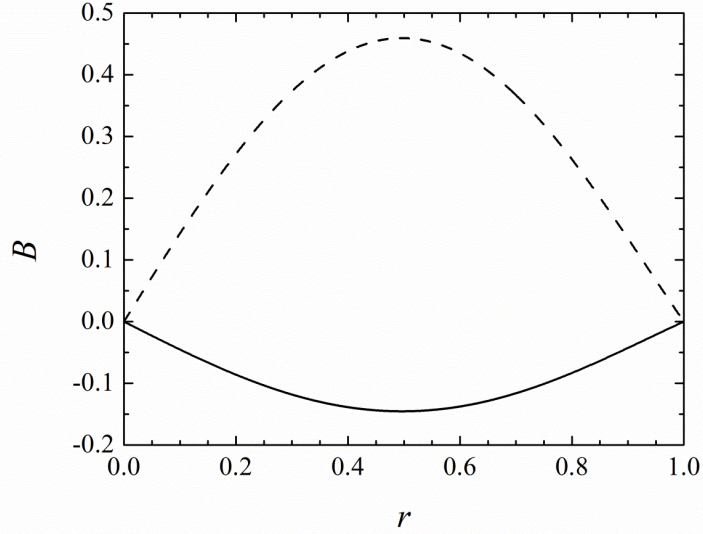


Рис. 2.3.1. Пространственная структура магнитного поля при  $t = 10$  в предположении  $r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \approx -1$ . Сплошной линией показана радиальная компонента магнитного поля, пунктирной – азимутальная.

Отметим, что представления о постоянном значении  $r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$  являются достаточно наивными и не очень точно выполняются для реальных объектов. В случае галактик достаточно разумно использовать более сложные кривые вращения. Одним из таких примеров является так называемая брандтовская кривая вращения [106]:

$$\Omega(r) = \frac{\Omega_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2}},$$

где  $\Omega_1$  – некоторое характерное значение угловой скорости вращения (естественно, в безразмерных единицах),  $r_\omega$  – некоторое значение расстояния, которое будет описывать уменьшение угловой скорости по мере удаления от оси вращения. В таком случае для производной угловой скорости вращения можно записать:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{r}{r_\omega^2} \frac{\Omega_1}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Система уравнений в таком случае может быть переписана в такой несложной форме:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} \right\};$$



$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = -R_\omega B_r \frac{r}{r_\omega^2} \frac{\Omega_1}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\pi^2 B_\phi}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial r} - \frac{B_\phi}{r^2} \right\}.$$

Рассмотрим решение в том случае, когда выбраны следующие значения параметров [14]:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 10;$$

$$\Omega_1 = 5;$$

$$r_\omega = 0.2.$$

Таким образом, можно считать, что динамо-число составляет величину  $D = 10$ . Результаты для момента времени  $t = 5$  продемонстрированы на рис. 2.3.2. Можно видеть, что в таком случае магнитное поле растет гораздо быстрее (при меньшем значении динамо-числа поле достигает тех же значений при меньшем времени). Кроме того, очевидно формируется достаточно узкий пик, расположенный в области около  $r \approx 0.3$ . Наконец, точно также можно заметить примерно то же соотношение между азимутальной и радиальной компонентами поля, которое было получено раньше. Можно заметить, что результаты в целом похожие на то, что было в более простой модели, однако добавились важные особенности.

Отдельного внимания заслуживает решение системы уравнений в нелинейном случае, когда мы учитываем насыщение роста магнитного поля по мере приближения к уровню равномерного распределения. Судя по всему, полноценно решение данной задачи можно осуществить лишь численно.

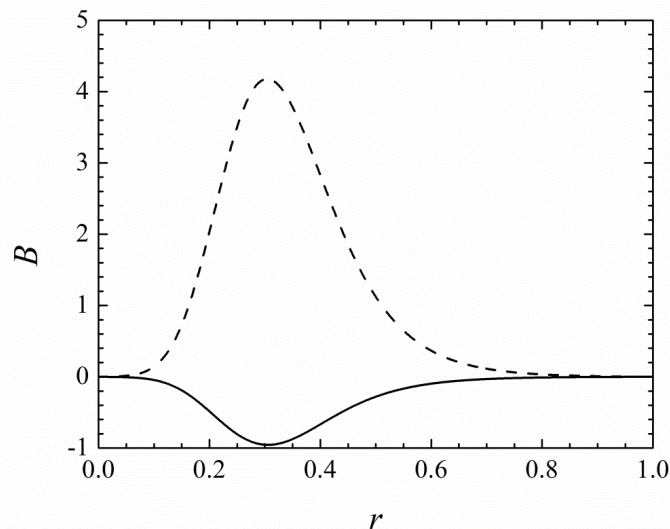


Рис. 2.3.2. Пространственная структура поля при  $t = 5$ . Радиальная компонента показана сплошной линией, азимутальная – пунктирной.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} \right\};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r \frac{r}{r_\omega^2} \frac{\Omega_1}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}.$$

Пространственная структура магнитного поля для момента времени  $t = 10$  представлена на рис. 2.3.3. Отметим, что в данном случае магнитное поле выглядит несколько иначе, чем в линейном приближении. Оно не превышает уровня равномерного (что вполне логично, учитывая то, для чего оно было введено), а также мало меняется по мере удаления от оси вращения.

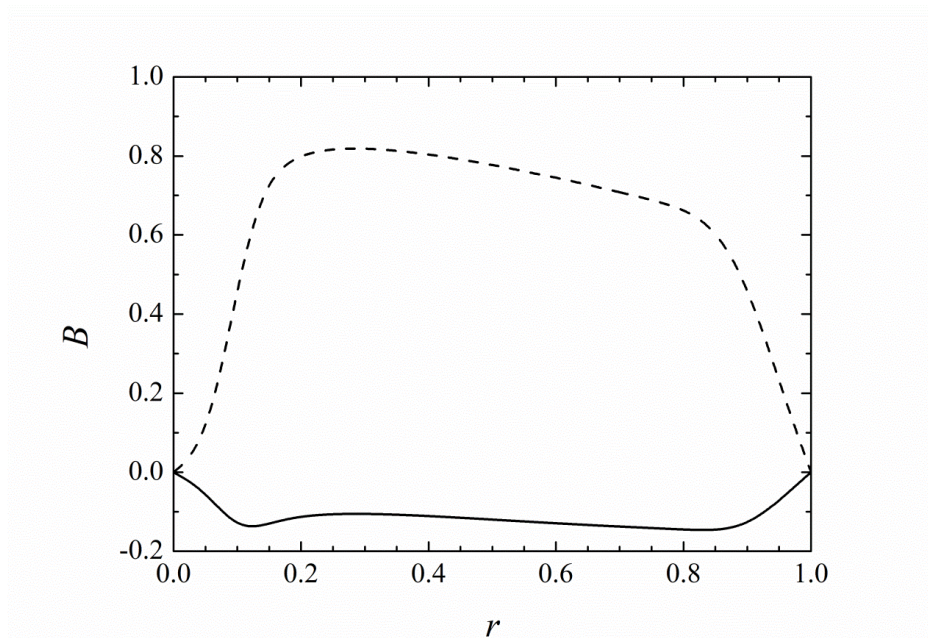


Рис. 2.3.3. Зависимость магнитного поля от расстояния до оси вращения в нелинейном случае с учетом зависимости от расстояния до оси. Радиальная составляющая поля показана сплошной кривой, азимутальная – пунктирной линией.

Также представляет интерес эволюция поля с течением времени, которая представлена на рис. 2.3.4. Отметим, что в данном случае наблюдается не экспоненциальный рост, который возможен в случае использования линейного приближения, а выход обеих компонент магнитного поля на плато. Отметим, что примерно то же самое наблюдалось и в случае использования локальной модели.

Таким образом, нами было исследовано поведение решений в линейном и нелинейном случае для модели магнитного поля с учетом зависимости магнитного поля от расстояния до оси

вращения изучаемого нами астрофизического объекта. Отметим, что данная модель достаточно полно описывает принципиальную структуру поля, характерную для большого числа галактик.

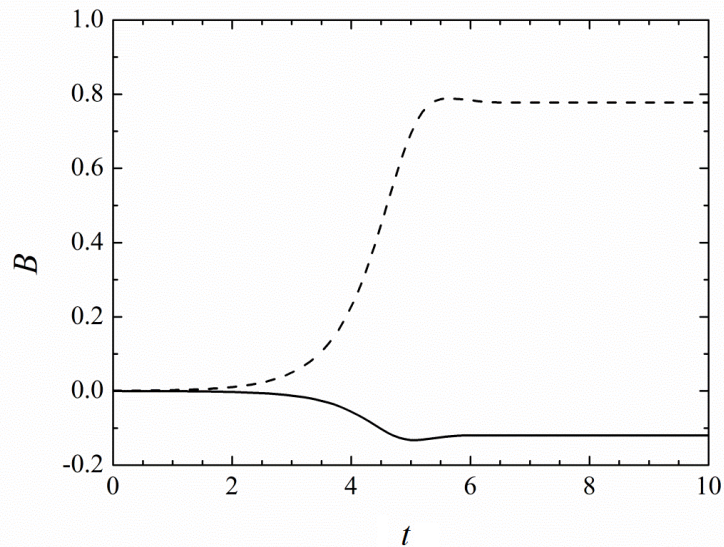


Рис. 2.3.4. Эволюция магнитного поля в нелинейном случае с учетом зависимости от расстояния до оси. Сплошная линия показывает радиальную компоненту магнитного поля, пунктирная – азимутальную.

#### §4. Исследование решений уравнений планарного приближения в неосесимметричном случае

В первых работах, посвященных процессу генерации магнитного поля в галактиках, часто упоминается, что магнитные поля могут быть ассоциированы с материальными рукавами в диске [126] [127] [128] [129] [130]. На первый взгляд, это вполне оправдано, поскольку генерация магнитного поля так или иначе связана с ионизованной компонентой межзвездного газа, которая присутствует в первую очередь в именно в этих областях. Тем не менее параметры межзвездной среды, влияющие на собственно рост магнитного поля (такие, как коэффициент турбулентной диффузии, полутолщина диска, скорость мелкомасштабных движений) в данных областях отличается не очень сильно, при этом есть другие проблемы, связанные с генерацией магнитного поля. Одна из них связана с принципиальной сложностью создать конфигурацию магнитного поля, которая бы была устойчива, и при этом обладала существенной зависимостью от азимутального угла. Покажем это, используя уравнения планарного приближения, сформулированные выше. Для этого нам нужно воспользоваться полной версией (не пренебрегающей зависимостью от какой-то из переменных) данных уравнений. Для упрощения будем считать, что угловая скорость меняется медленно и в безразмерных единицах можно

считать, что  $\Omega \approx 1$ . Также, как и выше, будем предполагать, что  $r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \approx -1$ . В таком случае уравнения для магнитного поля будут такими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha B_\varphi - R_\omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \\ &+ \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\}; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} - R_\omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \\ &+ \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Точно так же, как мы делали раньше, можно сделать переход к функциям, характеризующим эволюцию магнитного поля – естественно, предполагая их зависимость от азимутального угла [131]:

$$\begin{aligned} B_r(r, \varphi, t) &= -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha}; \\ B_\varphi(r, \varphi, t) &= y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений для поля может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) &= -R_\alpha \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) - \\ &- \frac{\pi^2}{4} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) - R_\omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) + \\ &+ \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) + \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) - \\ &- \lambda^2 \frac{1}{r^2} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) + \lambda^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) - \\ &- \lambda^2 \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) &= -R_\omega \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right) - \\ &- \frac{\pi^2}{4} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) - R_\omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) + \\ &+ \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) + \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) - \end{aligned}$$

$$-\lambda^2 \frac{1}{r^2} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) + \lambda^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) -$$

$$+ \lambda^2 \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\alpha} \right).$$

Домножим обе части первого уравнения на  $\left( -\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \right)$ , тогда оно будет выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) = \sqrt{R_\alpha R_\omega} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} + z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) -$$

$$-\frac{\pi^2}{4} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) - R_\omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) +$$

$$+ \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) + \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) -$$

$$-\lambda^2 \frac{1}{r^2} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) + \lambda^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( y(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} - z(r, \varphi, t) \sqrt{R_\omega} \right) +$$

$$+ \lambda^2 \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( y(r, \varphi, t) \frac{R_\omega}{\sqrt{R_\alpha}} + z(r, \varphi, t) \frac{R_\omega}{\sqrt{R_\alpha}} \right).$$

Сложим это уравнение со вторым из уравнений для магнитного поля. Тогда получится следующее равенство:

$$2\sqrt{R_\omega} \frac{\partial}{\partial t} y(r, \varphi, t) = 2R_\omega \sqrt{R_\alpha} y(r, \varphi, t) - \frac{\pi^2}{2} \sqrt{R_\omega} y(r, \varphi, t) - 2R_\omega \sqrt{R_\omega} \frac{\partial}{\partial \varphi} y(r, \varphi, t) +$$

$$+ 2\lambda^2 \sqrt{R_\omega} \frac{\partial^2}{\partial r^2} y(r, \varphi, t) + 2\lambda^2 \frac{\sqrt{R_\omega}}{r} \frac{\partial}{\partial r} y(r, \varphi, t) - 2\lambda^2 \frac{\sqrt{R_\omega}}{r^2} y(r, \varphi, t) +$$

$$+ 2\lambda^2 \frac{\sqrt{R_\omega}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} y(r, \varphi, t) + \lambda^2 \left( \frac{R_\omega}{\sqrt{R_\alpha}} - \sqrt{R_\alpha} \right) \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} y(r, \varphi, t) +$$

$$+ \lambda^2 \left( \frac{R_\omega}{\sqrt{R_\alpha}} + \sqrt{R_\alpha} \right) \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} z(r, \varphi, t).$$

Разделим обе части данного уравнения на  $2\sqrt{R_\omega}$ , получив уравнение для эволюции  $y(r, \varphi, t)$ :

$$\frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial t} = \sqrt{R_\alpha R_\omega} y(r, \varphi, t) - \frac{\pi^2}{4} y(r, \varphi, t) - R_\omega \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial r^2} +$$

$$+ \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial r} - \lambda^2 \frac{y(r, \varphi, t)}{r^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 \left( \frac{\sqrt{R_\omega}}{\sqrt{R_\alpha}} - \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} +$$

$$+\lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial z(r, \varphi, t)}{\partial \varphi}.$$

Ранее мы показали, что функция  $z(r, t)$ , использованная при изучении магнитного поля в осесимметричном случае, является затухающей при увеличении времени при любых значениях параметров. Естественно, надо понимать, что смысл функции  $z(r, \varphi, t)$  в случае учета зависимости от азимутального угла несколько иной, однако можно ожидать, что все собственные значения, соответствующие этой функции, будут также отрицательными. Поэтому она достаточно быстро затухнет, поэтому последнее слагаемое в данном равенстве будет достаточно малым, и им допустимо пренебречь (по крайней мере начиная с определенных значений времени):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial t} = & \sqrt{R_\alpha R_\omega} y(r, \varphi, t) - \frac{\pi^2}{4} y(r, \varphi, t) - R_\omega \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial r^2} + \\ & + \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial r} - \lambda^2 \frac{y(r, \varphi, t)}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r^2} \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Будем искать функцию  $y(r, \varphi, t)$  в специальном виде, который позволит несколько упростить процесс решения [131]:

$$y(r, \varphi, t) = R(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t),$$

где  $R(r)$ ,  $Y(\varphi)$  и  $T(t)$  – некоторые функции, которые зависят от одной переменной.

Перепишем производные, которые возникают в данной задаче. Для частной производной нашей основной функции по времени получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ R(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} = \\ = & R(r) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right\} T(t) + \\ & + R(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T'(t) = \\ = & \left\{ -R_\omega + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) \right\} R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\ & + R(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T'(t). \end{aligned}$$

Для производной функции по расстоянию до центра можно получить такую формулу:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ R(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} = \\
 &= R'(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 &+ R(r) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right\} T(t) = \\
 &= R'(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 &+ \left\{ -\frac{2\lambda^2}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right\} R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t).
 \end{aligned}$$

Для второй производной данной функции по координате можно получить следующее (ее можно получить, еще раз продифференцировав первую производную):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ R'(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} - \\
 &- \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{2\lambda^2}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} = \\
 &= R''(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 &+ R'(r) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right\} T(t) + \\
 &+ \frac{6\lambda^2}{r^4} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \\
 &- \frac{2\lambda^2}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R'(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \\
 &- \frac{2\lambda^2}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R(r) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} = \\
 &= R''(r)Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\lambda^2}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R'(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t)t - \\
 & -\frac{12\lambda^4}{r^7} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right)^2 R(r)Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t)t^2 - \\
 & -\frac{2\lambda^2}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R'(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t)t + \\
 & +\frac{4\lambda^4}{r^5} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right)^2 R(r)Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t)t^2.
 \end{aligned}$$

Вычислим теперь частную производную данной функции по азимутальному углу:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} = \\
 &= R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t).
 \end{aligned}$$

Для второй частной производной по азимутальному углу можно получить следующее:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) \right\} = \\
 &= R(r)Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t).
 \end{aligned}$$

Перепишем теперь имеющееся у нас уравнение для эволюции интересующей нас функции  $y(r, \varphi, t)$  с учетом всех сделанных преобразований и вспомогательных функций:

$$\begin{aligned}
 & -R_\omega \Omega R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 & +\frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 & +R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T'(t) = \\
 & =\sqrt{R_\alpha R_\omega} R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \\
 & -\frac{\pi^2}{4} R(r)Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) -
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -R_\omega \Omega R(r) Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 & + \lambda^2 R''(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \\
 & - \frac{2\lambda^4}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R'(r) Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) t - \\
 & - \frac{12\lambda^6}{r^7} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right)^2 R(r) Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) t^2 - \\
 & - \frac{2\lambda^4}{r^3} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R'(r) Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) t + \\
 & + \frac{4\lambda^6}{r^5} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right)^2 R(r) Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) t^2 + \\
 & + \frac{\lambda^2}{r} R'(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \\
 & - \frac{2\lambda^4}{r^5} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R(r) Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) t + \\
 & + \frac{\lambda^2}{r^2} R(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \\
 & - \frac{\lambda^2}{r^2} R(r) Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 & + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) R(r) Y' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t).
 \end{aligned}$$

Сократим одинаковые слагаемые, которые содержатся в обеих частях данного уравнения, что позволит несколько упростить дальнейший процесс решения (тогда можно будет исключить члены, которые содержат первые производные функции  $Y$ ):

$$\begin{aligned}
 & R(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T'(t) = \\
 & = \sqrt{R_\alpha R_\omega} R(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T'(t) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\pi^2}{4}R(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)+ \\
 & +\lambda^2R''(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)- \\
 & -\frac{2\lambda^4}{r^3}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)R'(r)Y'\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)t- \\
 & -\frac{12\lambda^6}{r^7}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)^2R(r)Y''\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)t^2- \\
 & -\frac{2\lambda^4}{r^3}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)R'(r)Y'\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)t+ \\
 & +\frac{4\lambda^6}{r^5}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)^2R(r)Y''\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)t^2+ \\
 & +\frac{\lambda^2}{r}R'(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)- \\
 & -\frac{2\lambda^4}{r^5}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)R(r)Y'\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)t- \\
 & -\frac{\lambda^2}{r^2}R(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)+ \\
 & +\frac{\lambda^2}{r^2}R(r)Y''\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t).
 \end{aligned}$$

Пренебрежем слагаемыми, которые содержат множители, пропорциональные степени параметра  $\lambda$  выше второй. Тогда уравнение будет преобразовано к следующей форме:

$$\begin{aligned}
 & R(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T'(t)= \\
 & =\sqrt{R_\alpha R_\omega}R(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)- \\
 & -\frac{\pi^2}{4}R(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)+ \\
 & +\lambda^2R''(r)Y\left(\varphi-R_\omega t+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}}+\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right)t\right)T(t)+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2}{r} R'(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) - \frac{\lambda^2}{r^2} R(r) Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t) + \\
 & + \frac{\lambda^2}{r^2} R(r) Y'' \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t).
 \end{aligned}$$

Отметим, что для функции  $Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right)$  с очевидностью выполнено

условие периодичности по углу  $\varphi$ :

$$Y \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) = Y \left( \varphi + 2\pi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right)$$

Это условие означает, что функция может быть представлена в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned}
 Y_m^1 \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) &= \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right); \\
 Y_m^2 \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) &= \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right).
 \end{aligned}$$

Соответствующие им функции  $y_m(r, \varphi, t)$  представимы в следующей простой форме [131]:

$$\begin{aligned}
 y_m^1(r, \varphi, t) &= R_m^1(r) Y_m^1 \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T_m^1(t) = \\
 &= R_m^1(r) \cos \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T_m^1(t); \\
 y_m^2(r, \varphi, t) &= R_m^2(r) Y_m^2 \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T_m^2(t) = \\
 &= R_m^2(r) \sin \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T_m^2(t).
 \end{aligned}$$

В таком случае можно представить полное решение в форме следующей суммы:

$$\begin{aligned}
 y(r, \varphi, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} F_m y_m^1(r, \varphi, t) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m y_m^2(r, \varphi, t) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} F_m R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} G_m R_m^2(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t),$$

где коэффициенты  $F_m$  и  $G_m$  определяются исходя из начальных условий, поставленных в задаче.

Рассмотрим уравнения для конкретных функций, входящих в данное разложение:

$$\begin{aligned} & R_m^1(r) \cos \left( n \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) = \\ & = \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) - \\ & - \frac{\pi^2}{4} R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) + \\ & + \lambda^2 R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) + \\ & + \frac{\lambda^2}{r} R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) - \\ & - \frac{\lambda^2}{r^2} R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t) - \\ & - \frac{m^2 \lambda^2}{r^2} R_m^1(r) \cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^1(t); \\ & R_m^2(r) \sin \left( n \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t) = \\ & = \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m^2(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t) - \\ & - \frac{\pi^2}{4} R_m^2(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t) + \\ & + \lambda^2 R_m^2(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2}{r} R_m'(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t) - \\
 & - \frac{\lambda^2}{r^2} R_m^2(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t) - \\
 & - \frac{m^2 \lambda^2}{r^2} R_m^2(r) \sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) T_m^2(t).
 \end{aligned}$$

Разделив обе части первого уравнения на  $\cos \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right)$ , а второго – на  $\sin \left( m \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right)$ . Тогда мы получим два идентичных уравнения в виде (здесь мы будем для удобства опускать верхний индекс) [131]:

$$\begin{aligned}
 R_m(r) T_m'(t) &= \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m(r) T_m(t) - \frac{\pi^2}{4} R_m(r) T_m(t) + \lambda^2 R_m''(r) T_m(t) + \\
 & + \frac{\lambda^2}{r} R_m'(r) T_m(t) - \frac{\lambda^2}{r^2} R_m(r) T_m(t) - \frac{m^2 \lambda^2}{r^2} R_m(r) T_m(t).
 \end{aligned}$$

Будем искать зависимость от времени для функции  $T_m(t)$  в виде экспоненты с показателем  $p_m$ :

$$T_m(t) = \exp(p_m t).$$

Тогда данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 p_m R_m(r) \exp(p_m t) &= \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m(r) \exp(p_m t) - \frac{\pi^2}{4} R_m(r) \exp(p_m t) + \\
 & + \lambda^2 R_m''(r) \exp(p_m t) + \frac{\lambda^2}{r} R_m'(r) \exp(p_m t) - \frac{\lambda^2}{r^2} R_m(r) \exp(p_m t) - \frac{m^2 \lambda^2}{r^2} R_m(r) \exp(p_m t).
 \end{aligned}$$

Разделим обе части на  $\exp(p_m t)$ , и получим уравнение для функции, зависящей от  $r$ :

$$\begin{aligned}
 p_m R_m(r) &= \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m(r) - \frac{\pi^2}{4} R_m(r) + \lambda^2 R_m''(r) + \frac{\lambda^2}{r} R_m'(r) - \\
 & - \frac{\lambda^2}{r^2} R_m(r) - \frac{m^2 \lambda^2}{r^2} R_m(r).
 \end{aligned}$$

Домножим обе части на  $\frac{r^2}{\lambda^2}$ , тогда для данного уравнения мы можем получить следующее выражение:

$$r^2 \frac{d^2 R_m}{dr^2} + r \frac{dR_m}{dr}(r) + \frac{r^2}{\lambda^2} \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m(r) - \frac{r^2}{\lambda^2} \frac{\pi^2}{4} R_m(r) - \frac{r^2}{\lambda^2} p_m R_m(r) - R_m(r) - m^2 R_m(r) = 0.$$

Введем теперь переменную  $\xi$ , аналогичную тому, что было введено ранее. Тогда для производных мы получим такие же соотношения:

$$\frac{dR_m(r)}{dr} = \frac{dR_m(r)}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{\lambda} \frac{dR_m(r)}{d\xi} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m \right\}^{1/2};$$

$$\frac{d^2 R_m(r)}{dr^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dR_m(r)}{d\xi} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 R_m(r)}{d\xi^2} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m \right\}.$$

Тогда уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\xi^2 \frac{d^2 R_m}{d\xi^2} + \xi \frac{dR_m}{d\xi} + (\xi^2 - 1 - m^2) R_m = 0.$$

Введем число  $N_m$ , которое определяется из следующих простых соотношений:

$$(N_m)^2 = 1 + m^2;$$

$$N_m = \sqrt{1 + m^2}.$$

Тогда уравнение для данной функции запишется в достаточно стандартном виде:

$$\xi^2 \frac{d^2 R_m}{d\xi^2} + \xi \frac{dR_m}{d\xi} + (\xi^2 - (N_m)^2) R_m = 0.$$

Решением данного уравнения являются функции Бесселя и Неймана. Тем не менее, функция Неймана обращается в бесконечность в нуле [77], что нас не устраивает, поскольку не удовлетворяет граничным условиям. По этой причине решение будет представляться только в виде функции Бесселя:

$$F_m(\xi) = J_{N_m}(\xi).$$

Потребуем теперь выполнения краевого условия на внешней границе при  $r = 1$ . Для переменной  $\xi$  это означает следующее:

$$\xi = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m \right\}^{1/2}.$$

Выражение для  $\tilde{F}_m(r)$  должно в таком случае обращаться в нуль:

$$R_m(1) = J_{N_m} \left( \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m \right\}^{1/2} \right) = 0.$$

Этого можно добиться, если аргумент функции Бесселя соответствует одному из ее корней [77]:

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m \right\}^{1/2} = j_{N_m, n}.$$

Возведем обе части в квадрат, тогда можно получить следующее соотношение:

$$\frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m \right\} = (j_{N_m, n})^2$$

Домножим обе части на  $\lambda^2$ , которая характеризует полутолщину диска нашего объекта:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_m = \lambda^2 (j_{N_m, n})^2.$$

Тогда мы получим соотношение, которое будет накладывать условие на показатель роста нашей функции:

$$p_m = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{N_m, n})^2.$$

Учитывая значение порядка используемой нами функции Бесселя, мы получим:

$$p_m = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{\sqrt{1+m^2}, n})^2.$$

Тогда зависимость функции от времени может быть представлена следующим образом:

$$T_{m, n}(t) = \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{\sqrt{1+m^2}, n})^2 \right\} t \right).$$

Отметим, что в данном случае решение зависит уже от двух индексов  $n$  и  $m$ , которые характеризуют его поведение. Имеет смысл записать приближенное выражение для данной функции. Для этого воспользуемся известной аппроксимацией для функции Бесселя [77], которая работает при больших значениях аргумента:

$$J_{N_m}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi N_m}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Данная функция обращается в нуль при значениях аргумента, соответствующих:

$$x - \frac{\pi N_m}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi \left( n - \frac{1}{2} - n_0 \right).$$

В таком случае корни будут равны соответствующим значениям аргумента функции Бесселя:

$$j_{N_m, n} \approx x = \pi \left( n + \frac{N_m}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right).$$

Отдельно стоит обсудить смысл параметра  $n_0$  и значения, которые для него являются допустимыми. В одномерном случае очевидно, что  $n_0 = 0$ . В данном случае значение данного индекса должно соответствовать второму положительному значению для числа  $x$  (для первого еще не выполнено условие большой величины аргумента функции Бесселя, для которого работает указанное нами разложение). Это означает, что выражение в скобках должно принимать

строго положительные значения при  $n=0,1,\dots$  (отсчет начинается с нуля, чтобы речь действительно шла о втором положительном значении, как и говорилось ранее):

$$\left( n + \frac{N_m}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) > 0$$

Очевидно, что достаточно потребовать выполнения данного условия для  $n=0$ , т.е. нам нужно обеспечить лишь верность следующего неравенства для параметров:

$$\left( 0 + \frac{N_m}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) > 0;$$

$$n_0 < \frac{N_m}{2} - \frac{1}{4}.$$

Поскольку значение параметра  $n_0$  должно быть целым, мы должны взять для него округление до целого числа с недостатком, поэтому формулу можно переписать таким образом:

$$n_0 = \left[ \frac{N_m}{2} - \frac{1}{4} \right].$$

Явно представляя выражение для параметра, характеризующего порядок функции Бесселя, мы можем записать:

$$n_0 = \left[ \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} \right].$$

Проверим, к чему будет приводить данное условие при  $m=0$  (это соответствует осесимметричному случаю, который подробно изучался нами ранее):

$$n_0 = \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = 0.$$

Таким образом, мы получили тот же самый результат, который был получен из более простых соображений. С учетом указанных соображений для порядка функции Бесселя можно переписать данное выражение следующим образом:

$$j_{N_m, n} \approx \pi \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right).$$

Это означает, что для показателя роста временного сомножителя мы можем получить:

$$p_{m, n} = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2.$$

Тогда для данной функции мы можем получить следующее приближенное выражение:

$$T_{m, n}(t) = \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right] t \right\}.$$



Для части, которая зависит от радиальной координаты, мы можем записать такое выражение:

$$R_{m,n}(r) = J_{\sqrt{1+m^2}}\left(r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n}\right).$$

Это означает, что независимые друг от друга решения можно представить в форме:

$$y_{m,n}^1(r, \varphi, t) = R_{m,n}(r) Y_m^1\left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right) t\right) T_{m,n}(t);$$

$$y_{m,n}^2(r, \varphi, t) = R_{m,n}(r) Y_m^2\left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right) t\right) T_{m,n}(t).$$

В более полной форме это можно представить с помощью таких выражений:

$$y_{m,n}^1(r, \varphi, t) = J_{\sqrt{1+m^2}}\left(r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n}\right) \cos\left(m\left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right) t\right)\right) \times \\ \times \exp\left(\left\{\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \left(j_{\sqrt{1+m^2},n}\right)^2\right\} t\right);$$

$$y_{m,n}^2(r, \varphi, t) = J_{\sqrt{1+m^2}}\left(r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n}\right) \sin\left(m\left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right) t\right)\right) \times \\ \times \exp\left(\left\{\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \left(j_{\sqrt{1+m^2},n}\right)^2\right\} t\right);$$

Полное решение можно представить в такой форме:

$$y(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} y_{n,m}^1(r, \varphi, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,m} y_{n,m}^2(r, \varphi, t);$$

где коэффициенты  $A_{n,m}$  и  $B_{n,m}$  определяются исходя из начальных условий нашей задачи.

Полное выражение для решения задачи можно записать в следующей форме:

$$y(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} J_{\sqrt{1+m^2}}\left(r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n}\right) \cos\left(m\left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right) t\right)\right) \times \\ \times \exp\left(\left\{\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \left(j_{\sqrt{1+m^2},n}\right)^2\right\} t\right) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,m} J_{\sqrt{1+m^2}}\left(r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n}\right) \sin\left(m\left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}}\right) t\right)\right) \times \\ \times \exp\left(\left\{\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \left(j_{\sqrt{1+m^2},n}\right)^2\right\} t\right);$$

Если мы перейдем к приближенному представлению, то можно получить для радиального сомножителя следующее выражение:

$$R_{m,n}(r) = J_{\sqrt{1+m^2}} \left( \pi \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right).$$

Для линейно независимых функций, с помощью которых можно представить решение, мы тогда сможем получить следующие приближенные формулы:

$$y_{m,n}^1(r, \phi, t) = J_{\sqrt{1+m^2}} \left( \pi \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right) \times \cos \left( m \left( \phi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right] t \right\};$$

$$y_{m,n}^2(r, \phi, t) = J_{\sqrt{1+m^2}} \left( \pi \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right) \times \sin \left( m \left( \phi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right] t \right\}.$$

В таком случае выражение для решения может быть представлено в такой форме:

$$y(r, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( \pi \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right) \times \cos \left( m \left( \phi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right] t \right\} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( \pi \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right) \times \sin \left( m \left( \phi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right] t \right\}.$$

Составим теперь задачу для определения значений коэффициентов, отвечающих за поведение решения. Если мы имеем начальное условие, представимое в форме [77]:

$$y(r, \phi, 0) = f(r, \phi);$$

то нам необходимо потребовать выполнения данного условия и для разложения, описанного нами выше, при  $t = 0$ . В таком случае экспоненты, характеризующие временную зависимость решения, могут быть заменены на единицы, и тогда мы должны записать следующее:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \sin(m\varphi) = f(r, \varphi).$$

Учитывая ортогональность функций, входящих в данное разложение, мы можем представить входящие в него коэффициенты следующим очевидным образом:

$$A_{n,m} = \frac{\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \cos(m\varphi) rd\varphi}{\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \cos(m\varphi) \right]^2 rd\varphi};$$

$$B_{n,m} = \frac{\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \sin(m\varphi) rd\varphi}{\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \sin(m\varphi) \right]^2 rd\varphi}.$$

Определим значения интегралов, которые стоят в знаменателях данных выражений:

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \cos(m\varphi) \right]^2 rd\varphi = \int_0^1 \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2 r dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(m\varphi) d\varphi.$$

Сомножители-интегралы вычисляются достаточно просто [77]:

$$\int_0^1 \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} \left[ J'_{\sqrt{1+m^2}} \left( j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(m\varphi) d\varphi = \pi.$$

Таким образом:

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \cos(m\varphi) \right]^2 rd\varphi = \frac{\pi}{2} \left[ J'_{\sqrt{1+m^2}} \left( j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2.$$

Для второго интеграла точно также можно получить:

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left[ J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \sin(m\varphi) \right]^2 rd\varphi = \frac{\pi}{2} \left[ J'_{\sqrt{1+m^2}} \left( j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2.$$

Таким образом, коэффициенты в данном случае будут переписаны в такой несложной форме:

$$A_{n,m} = \frac{2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \cos(m\varphi) rd\varphi}{\pi \left[ J'_{\sqrt{1+m^2}} \left( j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2};$$

$$B_{n,m} = \frac{2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} J_{\sqrt{1+m^2}} \left( r \cdot j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \sin(m\varphi) rd\varphi}{\pi \left[ J'_{\sqrt{1+m^2}} \left( j_{\sqrt{1+m^2},n} \right) \right]^2}.$$

Можно отметить, что решения, не являющиеся осесимметричными, характеризуются значениями параметра  $m > 0$ . Оценим теперь, при каких условиях будет расти та или иная компонента. Этому можно добиться тогда, когда показатель роста экспоненты будет больше нуля:

$$p_m > 0;$$

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \left( j_{\sqrt{1+m^2}, n} \right)^2 > 0.$$

Переносим часть слагаемых в другую часть неравенства, мы можем получить следующее выражение:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} > \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \left( j_{\sqrt{1+m^2}, n} \right)^2.$$

Если мы возведем обе части в квадрат, то мы можем получить следующее выражение для динамо-числа, необходимого для роста той или иной моды:

$$D > \left\{ \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \left( j_{\sqrt{1+m^2}, n} \right)^2 \right\}^2.$$

Таким образом, мы можем записать «критические динамо-числа», которые необходимы для генерации решения  $y_{n,m}(r, \varphi, t)$ :

$$D_{n,m} = \left\{ \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \left( j_{\sqrt{1+m^2}, n} \right)^2 \right\}^2.$$

Тем не менее, полностью прозрачным данное выражение станет, если мы используем приближения для показателей роста, и наложим на них такое же условие положительности:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 > 0.$$

Тогда аналогичным образом мы можем переписать:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} > \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \pi^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2;$$

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} > \pi^2 \left\{ \frac{1}{4} + \lambda^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right\}.$$

Также возведем обе части в квадрат:

$$D > \pi^4 \left\{ \frac{1}{4} + \lambda^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right\}^2.$$

Для «критических динамо-чисел» мы можем получить такие формулы:

$$D_{n,m} = \pi^4 \left\{ \frac{1}{4} + \lambda^2 \left( n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right\}^2.$$

Отметим, что чем больше значение параметра  $n$ , тем выше критическое значение параметра  $D_{n,m}$ . Поэтому, если нас интересует, может ли быть сгенерировано поле, имеющее зависимость от координат, соответствующее данному  $m$ , мы можем взять наименьшее значение  $n = 1$ . Тогда для критического числа мы можем записать такое выражение (здесь мы ввели новое обозначение  $D_m = D_{1,m}$ ):

$$D_m = \pi^4 \left\{ \frac{1}{4} + \lambda^2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right\}^2 = \pi^4 \left\{ \frac{1}{4} + \lambda^2 \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} + \frac{3}{4} - n_0 \right)^2 \right\}^2.$$

Оценим, какое критического значение данного параметра для простейшего решения, не обладающего осевой симметрией и соответствующего значению  $m = 1$ :

$$y_{1,1}^1(r, \varphi, t) = J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} - n_0 \right) r \right) \cos \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \times \\ \times \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} - n_0 \right)^2 \right\} t \right).$$

Отметим, что для данных значений параметров можно записать следующее значение коэффициента:

$$n_0 = \left[ \frac{\sqrt{1+1^2}}{2} - \frac{1}{4} \right] = 0;$$

поэтому:

$$y_{1,1}^1(r, \varphi, t) = J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) r \right) \cos \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \times \\ \times \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 \right\} t \right).$$

Условием роста магнитного поля будет то, что показатель экспоненты – последнего множителя в выражении – является положительным. Это означает, что для выражения в квадратных скобках можно записать следующее несложное неравенство:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 > 0.$$

Из этого следует, что:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} > \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2.$$

Возведем обе части в квадрат, и тогда мы получим, что условие роста поля, имеющего косинусоидальную зависимость от азимутального угла, будет следующим:

$$R_\alpha R_\omega > \left\{ \frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 \right\}^2.$$

Учитывая то, что в левой части по сути стоит динамо-число  $D = R_\alpha R_\omega$ , можно переписать условие возможности генерации в следующей форме, похожей на предыдущие выражения:

$$D > D_1;$$

$$D_1 = \frac{\pi^4}{16} \left\{ 1 + \lambda^2 (3 + 2\sqrt{2})^2 \right\}^2.$$

Численно данное выражение будет примерно следующим [131]:

$$D_1 = \frac{(3.14)^4}{16} \left\{ 1 + \lambda^2 (3 + 2 \cdot 1.41)^2 \right\}^2 = 6.08 \cdot (1 + 33.9 \cdot \lambda^2)^2.$$

Можно видеть, что порог генерации для магнитного поля, которое имеет косинусоидальную структуру, выше чем для осесимметричных полей

$$D_1 > D_{cr}.$$

По этой причине в случаях, когда динамо-число лишь незначительно превышает порог генерации, можно говорить о том, что может генерироваться магнитное поле осесимметричной структуры, а поле косинусоидальной структуры будет лишь затухать. Тем не менее, тот факт, что неосесимметричные магнитные поля не будут устойчивы, объясняется несколько иными причинами. Представим функцию, описывающую эволюцию крупномасштабного магнитного поля, с начальными условиями:

$$y(r, \varphi, 0) = B_0 \left\{ J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) + J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) r \right) \cos \varphi \right\}.$$

Достаточно очевидно, что ненулевые коэффициенты в разложении будут следующими:

$$A_0 = B_0;$$

$$A_1 = B_0.$$

Можно отметить, что в таком случае максимальное значение неосесимметричной и осесимметричной части составляет величину порядка единицы. Вычислим численное значение соответствующего выражения в начальный момент:

$$M_0 = \frac{B_0 \max_{r,\varphi} \left\{ J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) r \right) \cos \varphi \right\}}{B_0 \max_{r,\varphi} \left\{ J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \right\}}.$$

Запишем максимальные значения для функций Бесселя, которые могут быть найдены аналитически:

$$\max_{r,\varphi} \left\{ J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \right\} = 0.273;$$

$$\max_{r,\varphi} \left\{ J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) r \right) \cos \varphi \right\} = 0.533.$$

В таком случае для соотношения между компонентами можно представить следующее [131]:

$$M_0 = \frac{B_0 \cdot 0.533}{B_0 \cdot 0.273} = 1.95.$$

Тогда для решения можно записать следующее:

$$y(r, \varphi, t) = B_0 J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \times \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{25}{16} \lambda^2 \pi^2 \right\} t \right) +$$

$$+ B_0 J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) r \right) \cos \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \times$$

$$\times \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 \right\} t \right).$$

Найдем значение соотношения между осесимметричной и неосесимметричными компонентами, которое будет в произвольный момент времени:

$$M_t = \frac{L_1}{L_0};$$

где коэффициенты описывают максимальное значение той или иной компоненты поля:

$$L_0 = \max_{r,\varphi} \left\{ B_0 J_1 \left( \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) r \right) \times \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{25}{16} \lambda^2 \pi^2 \right\} t \right) \right\} =$$

$$= 0.273 \cdot B_0 \times \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{25}{16} \lambda^2 \pi^2 \right\} t \right);$$

$$L_1 = \max_{r,\varphi} \left\{ B_0 J_{\sqrt{2}} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) r \right) \cos \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 \right\} t \right\} = \\ & = 0.533 \cdot B_0 \cdot \exp \left( \left\{ \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 \right\} t \right). \end{aligned}$$

Определим значение показателей экспонент, которые стоят в выражениях для максимальных величин функций. Будем предполагать, что коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, принимает значение  $R_\alpha = 1$ . Для коэффициента, характеризующего дифференциальное вращение, будем брать значение  $R_\omega = 10$ . Для параметра, который определяет диффузию в плоскости диска исследуемого объекта, возьмем величину  $\lambda = 0.1$ .

Тогда для первого показателя экспоненты мы можем получить следующую формулу:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{25}{4} \lambda^2 \pi^2 = \sqrt{1 \cdot 10} - \frac{(3.14)^2}{4} - \frac{25}{16} (0.1)^2 (3.14)^2 = 0.541.$$

Для второго показателя экспоненты мы можем использовать похожее выражение:

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 = \sqrt{1 \cdot 10} - \frac{(3.14)^2}{4} - (3.14)^2 (0.05)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right)^2 = 0.486.$$

Тогда для максимальных значений функции можно получить следующие выражения [131]:

$$L_0 = 0.273 \cdot B_0 \times \exp(0.541t);$$

$$L_1 = 0.533 \cdot B_0 \times \exp(0.486t).$$

Для соотношения между компонентами в произвольный момент времени мы можем получить:

$$M_t = \frac{0.533 \cdot B_0 \times \exp(0.486t)}{0.273 \cdot B_0 \times \exp(0.541t)} = 1.95 \cdot \exp(-0.055t).$$

Таким образом, со временем неосесимметричная компонента будет затухать на фоне осесимметричной. Характерное время для изменения соотношения между данными частями магнитного поля будет составлять нетрудно вычисляемую величину [131]:

$$T = \frac{1}{0.055} \approx 18.$$

Как видно, за время, составляющее около двух десятков характерных времен для эволюции магнитного поля, неосесимметричная часть затухнет. Конечно, может показаться, что это достаточно много, и за время существования объекта вполне можно ожидать, что магнитное поле, зависящее от азимутального угла по косинусоидальному закону, будет иметь на разумных



временных промежутках значимую величину. Кроме того, казалось бы, можно взять диск меньшей толщины, для которого различие в показателях роста будет не столь значимым.

Тем не менее, внимательное изучение структуры решения показывает, что «размыванию» неосесимметричного решения способствуют также другие эффекты. Так, угловая часть решения будет выглядеть следующим образом:

$$Y_1^1 \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) = \cos \left( \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right).$$

Нетрудно заметить, что в данном случае есть зависимость от достаточно сложной комбинации. Это означает, что решение, которое в начальный момент было пропорционально  $\cos \varphi$ , будет в реальности размываться.

Рассмотрим аргумент косинуса:

$$\Phi = \varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t.$$

Определим, как он будет меняться в тех случаях, когда мы используем разные значения расстояния до оси вращения исследуемого в рамках задачи объекта. Так, при  $r = 1$ :

$$\Phi_1 = \varphi - R_\omega t + \lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t;$$

а при  $r = 0.2$ :

$$\Phi_2 = \varphi - R_\omega t + 25\lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t;$$

Разность в значении аргументов составит величину:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 &= \varphi - R_\omega t + 25\lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t - \left( \varphi - R_\omega t + \lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) = \\ &= 24\lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t. \end{aligned}$$

Очевидно, что в начальный момент времени эта разница отсутствует. Тем не менее, по мере роста «сдвиг» увеличивается все больше. Очевидно, что говорить о разрушении изначальной неосесимметричной структуры поля можно начиная с того момента, когда сдвиг достигает величины  $\frac{\pi}{2}$ , т.е. когда максимум при одном значении расстояния до оси вращения соответствует минимуму для других значений. Таким образом, необходимо достичь выполнения следующего условия:

$$\Delta\Phi = \frac{\pi}{2};$$

$$24\lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t = \frac{\pi}{2}.$$

Для времени, за которое это может произойти, можно записать следующую формулу:

$$t = \frac{\pi}{48\lambda^2 \left( \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right)}.$$

Оценим данную величину для конкретных значений параметров, характеризующих эволюцию магнитного поля. Возьмем те же значения, что использовались ранее при оценке разницы между величинами показателей роста магнитного поля:

$$t = \frac{3.14}{48(0.1)^2 \left( \sqrt{\frac{10}{1}} + \sqrt{\frac{1}{10}} \right)} = 1.88.$$

Изучим этот процесс численно. Возьмем такие значения управляющих коэффициентов динамо:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 10.$$

Рассмотрим [131] следующее начальное магнитное поле при  $0 < r < 1$ :

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_r|_{t=0} = B_0 \cos \varphi;$$

$$B_0 = 0.001.$$

Отметим, что такие условия имеют скачок (рис. 2.4.1), но тем не менее они позволяют продемонстрировать важные аспекты решения (в данном случае начальное поле не зависит от расстояния до оси вращения). Со временем, действительно, магнитное поле в областях, близких к оси вращения, начинает заметно отличаться от поля вблизи окраины объекта для такого же азимутального угла (рис. 2.4.2 – 2.4.3).

Возьмем теперь начальное магнитное поле, которое обладает смешанной структурой (рис. 2.4.4):

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

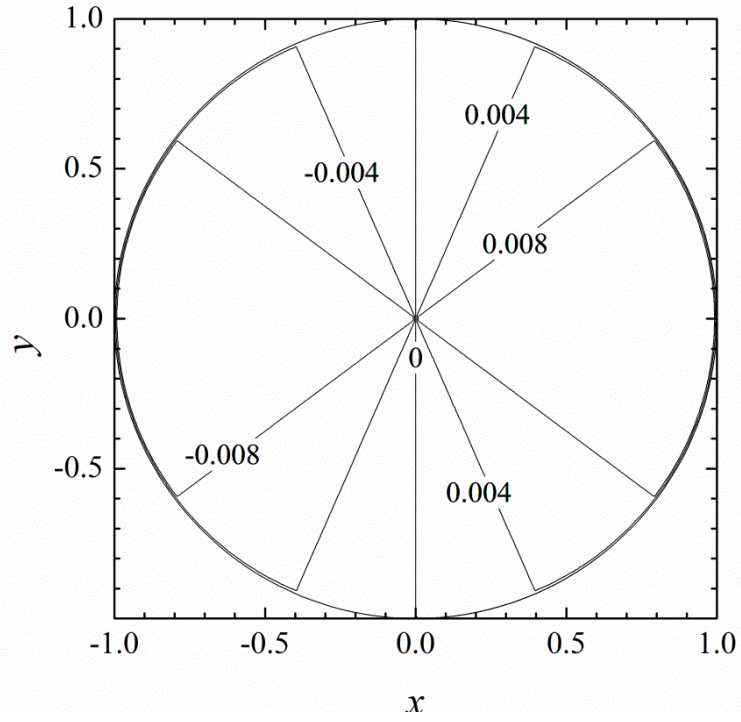


Рис. 2.4.1. Начальное азимутальное магнитное поле в полностью неосесимметричном случае

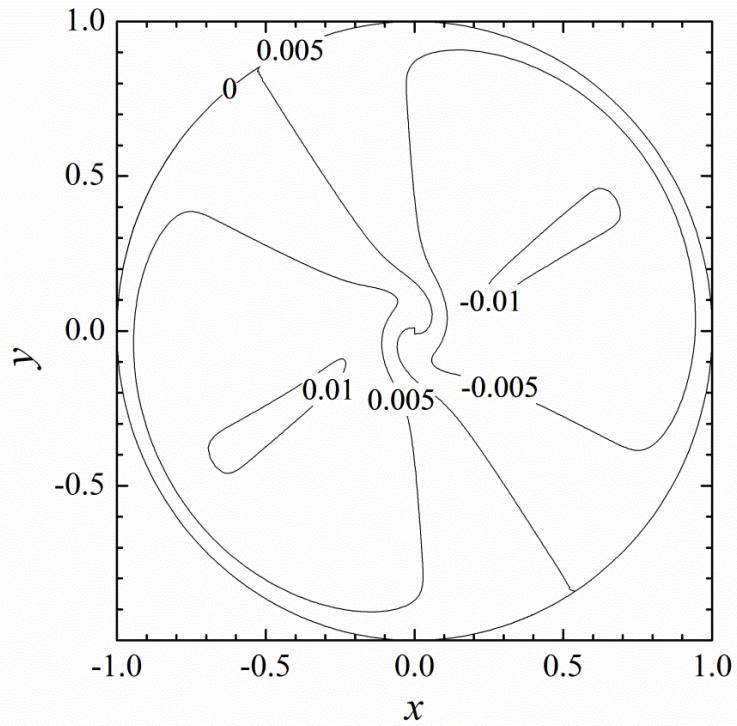


Рис. 2.4.2. Азимутальное магнитное поле при полностью неосесимметричных начальных условиях при  $t = 1$ .

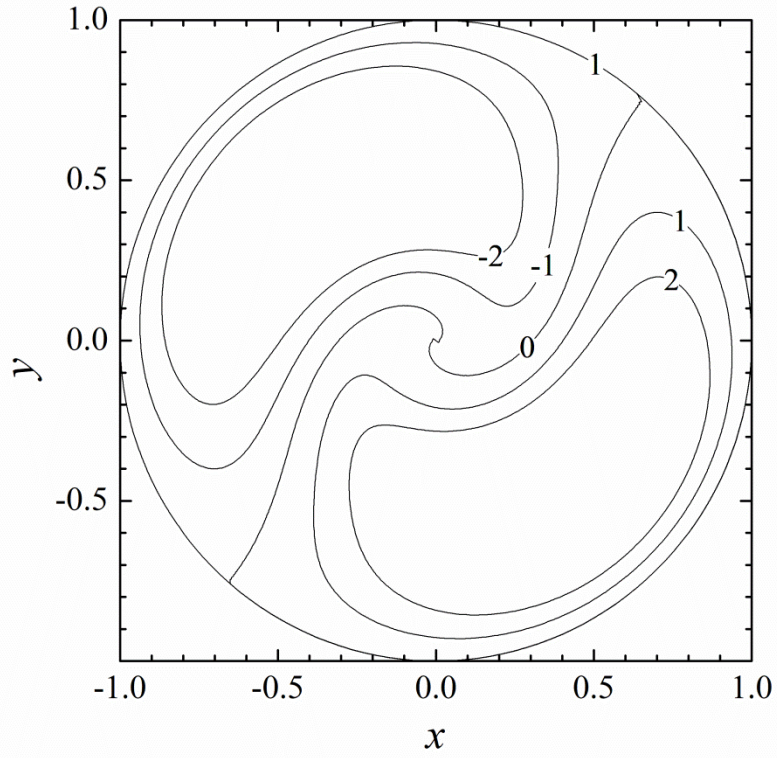


Рис. 2.4.3. Азимутальное магнитное поле при полностью неосесимметричных начальных условиях при  $t = 10$ .

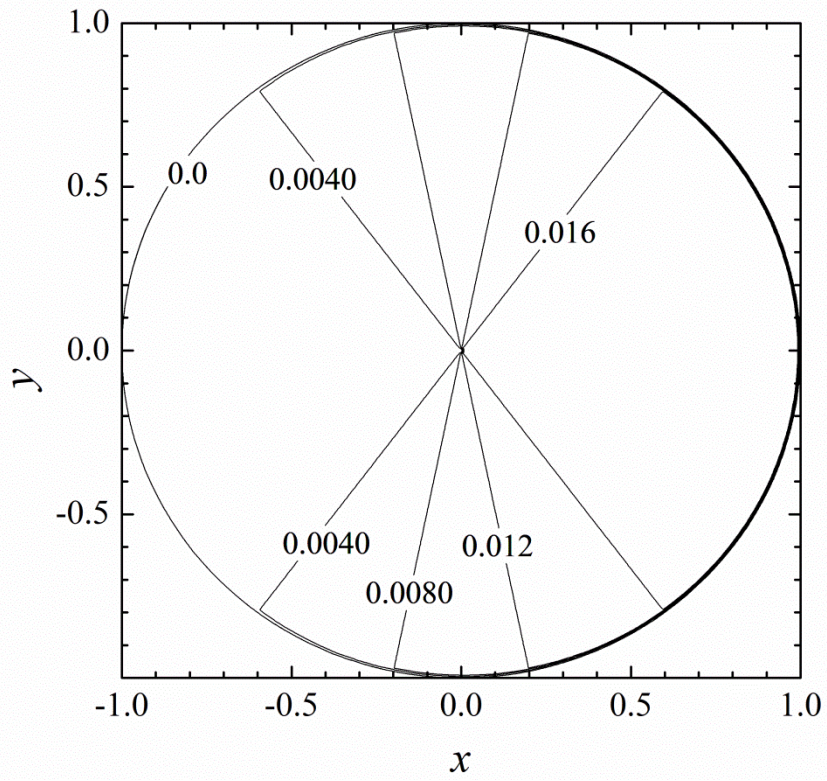


Рис. 2.4.4. Начальное азимутальное магнитное поле в смешанном случае



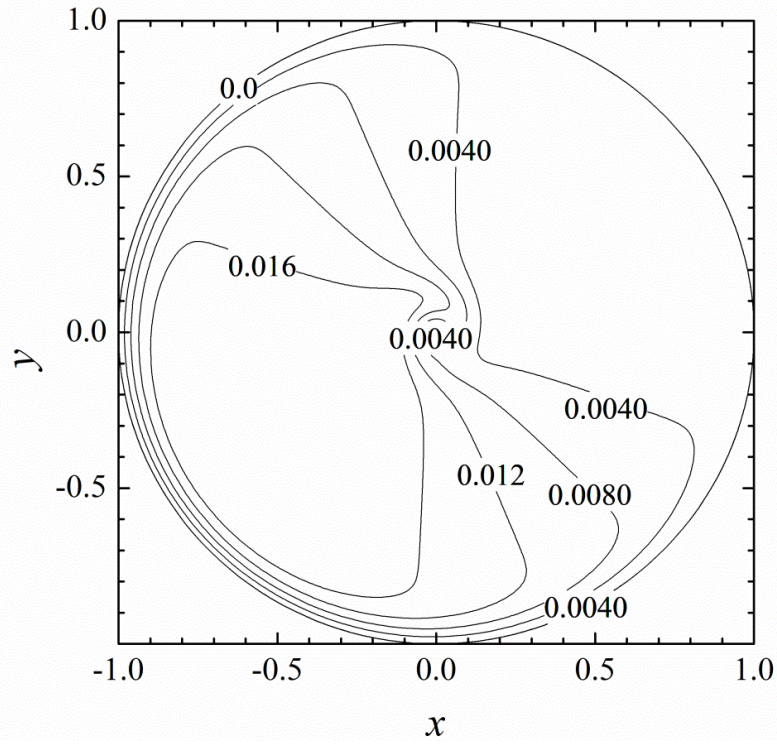


Рис. 2.4.5. Азимутальное магнитное поле при смешанных начальных условиях при  $t = 1$ .

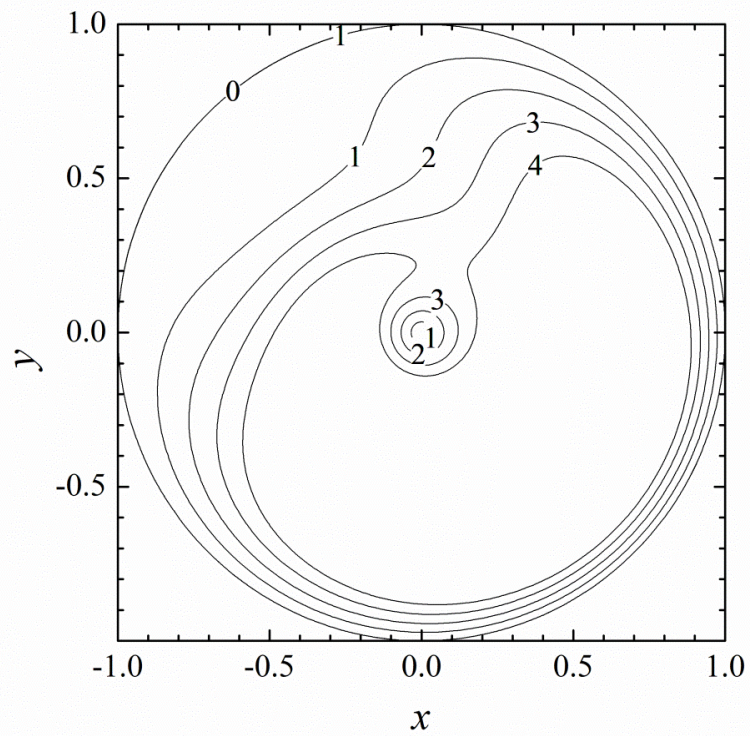


Рис. 2.4.6. Азимутальное магнитное поле при смешанных начальных условиях при  $t = 10$ .

$$B_r|_{t=0} = B_0(1 + \cos \varphi);$$

$$B_0 = 0.001.$$

Магнитное поле, которое будет генерироваться с ростом времени, показано на рис. 2.4.5 – 2.4.6. Можно отметить, что в таком случае осесимметричная компонента магнитного поля растет заметно быстрее неосесимметричной. В данной ситуации расплыванию способствует как различие между скоростью роста соответствующих мод, так и эффекты, которые были описаны в ходе предыдущих расчетов.

Таким образом, неосесимметричная структура начинает достаточно быстро размываться. Это показывает, что создание устойчивого косинусоидального магнитного поля будет невозможным. Поэтому нет смысла говорить о том, что неосесимметричные структуры могут существовать в течение долгого временного периода. Даже если мы каким-либо образом создадим такую специфическую структуру (причем физические причины этого еще нужно отдельно обсуждать), она достаточно быстро окажется размытой. Нетрудно показать, что для более высоких гармоник ( $m > 1$ ) создать устойчивые структуры магнитного поля будет еще затруднительнее. В таком случае пороговое значение для возможности генерации магнитного поля несколько повысится, поэтому соотношение между соответствующими модами решения будет меняться заметно быстрее, чем для самой простой неосесимметричной моды, которая описывается при помощи решения, меняющегося в зависимости от азимутального магнитного поля по закону  $\cos \varphi$  (или, как было показано ранее, для принципиально сходного с ним закона  $\sin \varphi$ ).

Кроме того, в случае уточнения модели возникнут дополнительные препятствия, которые также усложняют процесс генерации магнитных полей. Покажем, о чем идет речь с принципиальной точки зрения. Угловая составляющая магнитного поля при этом включает в себя также зависимость от коэффициента, характеризующего дифференциальное вращение. Данный коэффициент включает в себя производную угловой скорости вращения по расстоянию до центра галактики, которая, вообще говоря, зависит от данной величины. Конечно, если мы учтем изменение  $R_{\omega}$ , это несколько поменяет решение, но в целом можно говорить о том, что это внесет дополнительный вклад в  $\Delta\Phi$ . Тогда неосесимметричные структуры магнитного поля будут размываться даже быстрее. Вполне можно ожидать, что типичная скорость их «расплывания» будет даже больше, чем скорость роста соответствующей составляющей магнитного поля.

Таким образом, можно говорить о том, что магнитное поле, исследуемой с учетом зависимости от азимутального угла, как правило, будет достаточно быстро переходить в осесимметричное решение. Это означает, что в значительном большинстве практически значимых случаев, когда мы говорим о галактике в целом или об аккреционном диске [5], гораздо удобнее рассматривать задачу в осесимметричной постановке. Также нельзя не отметить, что это позволяет значительно сэкономить вычислительные ресурсы при численном решении, и

упростить процесс выкладок в том случае, когда мы ищем аналитическое решение или какие-то его асимптотические приближения. Конечно, нельзя не упомянуть ряд специфических примеров, которые планируется обсудить ниже и которые связаны с радиально-тонкими структурами (такими, как внешние кольца галактик), где ситуация несколько иная и вопрос об этом требует дополнительного исследования. Однако, можно резюмировать, что в подавляющем большинстве случаев эволюция магнитного поля будет вполне приемлемо описываться в рамках более простых представлений.

### §5. Подавление роста магнитного поля за счет потоков спиральности магнитного поля

Выше обсуждалось подавление роста магнитного поля, которое может происходить с учетом самых простых эмпирических соображений. Между тем, гораздо аккуратнее данный процесс может быть описан с учетом потоков спиральности магнитного поля. Напомним, что данная величина, как было показано в предыдущей главе, является интегралом движения и сохраняется в случае вмороженности магнитного поля в интересующую нас среду. Здесь мы опишем основные подходы, которые связаны с их влиянием на эволюцию галактического магнитного поля.

Напомним, что для компоненты альфа-эффекта, связанной с магнитной спиральности, можно записать выражение  $\alpha_m = \frac{\tau}{12\pi^2 l^2} \frac{\chi}{\rho}$ . Тогда уравнение для спиральности магнитного поля может быть записано в следующей форме [95]:

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} = -\frac{\eta_t (\mathbf{E}, \mathbf{B})}{8\pi^2 l^2 B^{*2}} - \frac{2\eta_m \alpha_m}{l^2} - \operatorname{div}(\alpha_m \mathbf{V});$$

где  $\eta_t$  — коэффициент турбулентной диффузии,  $\eta_m$  — коэффициент магнитной диффузии.

Если учесть, что в галактике (или другом объекте) могут быть вертикальные потоки, уносящие с собой спиральность магнитного поля, то при переходе к безразмерным переменным дивергенция может быть приблизительно переписана в следующей форме:

$$\operatorname{div}(\alpha_m \mathbf{V}) \approx \frac{\alpha_m V}{h},$$

где  $V$  — характерное значение скорости в вертикальном направлении (перпендикулярном к экваториальной плоскости).

Если мы учтем тот факт, что альфа-эффект состоит из двух частей, а также перейдем к безразмерным переменным, подобно тому, как это делалось ранее, то в осесимметричном случае мы получим следующую систему уравнений для эволюции крупномасштабной компоненты магнитного поля [96] [97] [98]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha (1 + \alpha) B_\varphi - \left( R_U + \frac{\pi^2}{4} \right) B_r + \lambda^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) \right); \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega B_r - \left( R_U + \frac{\pi^2}{4} \right) B_\varphi + \lambda^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) \right); \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= -R_U \alpha - C \left\{ (1 + \alpha) B^2 + \frac{3 B_r B_\varphi}{8 R_\alpha} \sqrt{-\pi R_\alpha R_\omega (1 + \alpha)} + \frac{\alpha}{R_m} \right\} + \lambda^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \right).\end{aligned}$$

В данном случае индекс «*m*» у коэффициента, отвечающего за магнитную часть альфа-эффекта, опущен. Кроме того, в данной системе уравнений введен ряд новых безразмерных величин, описывающих процесс генерации магнитного поля:

– магнитное число Рейнольдса, характеризующее соотношение между турбулентной и магнитной вязкостью [96]:

$$R_m = \frac{\eta_t}{\eta_m};$$

– число, характеризующее полутолщину диска [96]:

$$C = 2 \left( \frac{h}{l} \right)^2;$$

– число, описывающее процесс истечения межзвездного газа из плоскости галактического диска [96]:

$$R_U = \frac{Vh}{\eta_t}.$$

Рассмотрим решение данной задачи при следующих значениях управляющих параметров:

$$R_\alpha = 1;$$

$$R_\omega = 10;$$

$$R_m = 10000;$$

$$C = 50.$$

Значение параметра  $R_U$ , отвечающего за вертикальные потоки спиральности, варьировалось.

Мы также брали такие начальные условия [97]:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = B_0 \sin(\pi r);$$

$$\alpha|_{t=0} = -\alpha_0 \sin(\pi r);$$

где  $B_0 = 0.001$ ,  $\alpha_0 = 0.001$ .



Результат численного решения данной системы [97] уравнений в частных производных приведен на рис. 2.5.1. Можно видеть, что в зависимости от значения параметров, может наблюдаться либо рост магнитного поля с достижением некоторого максимума и его последующим затуханием, либо (при другой величине турбулентных потоков) его рост с выходом на постоянное значение.

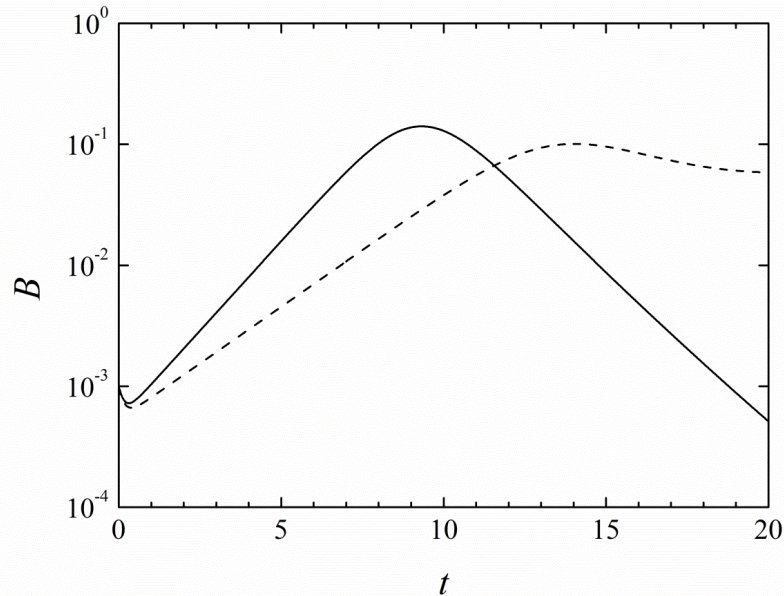


Рис. 2.5.1. Эволюция магнитного поля с учетом потоков спиральности. Сплошная линия показывает случай  $R_v = 0$ , пунктирная –  $R_v = 0.25$ .

Отметим, что даже в том случае, когда магнитное поле растет и выходит на постоянное значение, его поведение ощутимо смягчается, а скорость роста несколько меньше, чем в ситуации, когда учет потоков спиральности не проводится. Это связано с тем, что потоки спиральности подавляют действие альфа-эффекта, и как следствие – замедляют действие динамо.

Вместе с тем, для большого количества практически важных приложений оказывается вполне достаточно рассматривать процесс эволюции магнитного поля без учета потоков спиральности. Тем не менее, в тех задачах, где становятся важны явления, относящиеся к вертикальному переносу вещества, конвективные потоки, звездообразование [98] и т.д., гораздо более аккуратные результаты даются именно моделью, которая принимает во внимание тот факт, что магнитная спиральность является интегралом движения.

В данной главе изучена эволюция поля в тонком диске, заполненном проводящей средой. В качестве выводов можно отметить, что показана устойчивость решений для магнитного поля, соответствующих равнораспределению по энергии между турбулентностью и магнитным полем.

Продемонстрировано, что в зависимости от соотношения между параметрами эти решения могут показывать как монотонный выход на стационарный режим, так и сопряженный с колебаниями. Проведен спектральный анализ дифференциальных операторов, характеризующих эволюцию магнитного поля в данном случае. Продемонстрировано, что наиболее устойчивыми являются решения, являющиеся осесимметричными: неосесимметричные решения достаточно быстро подавляются. Отдельно рассмотрен вопрос о влиянии магнитного поля на турбулентность, что было сделано с помощью модели с учетом потоков спиральности поля.

Результаты, вошедшие в настоящую главу, были опубликованы в работах [113] [117] [119] [120] [131]. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад соискателя был основополагающим. Соискатель принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений. При этом, в работе [117] общая проблема была сформулирована соискателем совместно с Д.В.Боневой, М.В.Пашенцевой был проведен ряд вычислений на основе модельных представлений, сформулированных соискателем.

# Глава III. Некоторые приложения планарного приближения

Данная глава посвящена решению уравнений планарного приближения для различных приложений.

При исследовании инверсий магнитного поля задача сводится к поиску его азимутальной компоненты в виде функции, зависящей от автомодельной переменной:

$$B_{\varphi}(r, t) = u\left(x - \frac{c}{\lambda}t\right).$$

Задача для нее выглядит так:

$$u\sqrt{R_{\alpha}R_{\omega}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}}(1-u^2) - \frac{\pi^2}{4}u + \lambda^2\left\{\frac{1}{\lambda^2}u'' + \frac{1}{r}\frac{1}{\lambda}u' - \frac{u}{r^2}\right\} = 0;$$

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm U.$$

Отдельно исследуется вопрос о нахождении величины  $c$  с помощью методов теории контрастных структур.

После этого исследуется эволюция поля во внешних частях объекта, описываемое с помощью системы уравнений:

$$\frac{\partial B_r}{\partial \tau} = -A(r)B_{\varphi}(1 - B_r^2 - B_{\varphi}^2) - B_r + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \tau} = -B(r)B_r - B_{\varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 B_{\varphi}}{\partial r^2}.$$

с условиями:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_{\varphi}|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{при } r < r_1; \\ B_0, & \text{при } r_1 < r < r_2; \\ 0, & \text{при } r > r_2; \end{cases}$$

$$B_r|_{r=0} = B_{\varphi}|_{r=0} = 0; \quad B_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0; \quad B_{\varphi} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0;$$

Вопрос о возможности генерации поля во внешних кольцах изучается с помощью следующей математической постановки задачи:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_{\alpha}B_{\varphi}\left(1 - \frac{B_r^2 + B_{\varphi}^2}{B^{*2}}\right) - \frac{\pi^2}{4}B_r + \lambda^2 \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2}.$$

$$B^*(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } r < 0.5; \\ 10^{-1} & \text{при } 0.5 < r < R-a; \\ 1 & \text{при } R-a < r < R+a. \end{cases}$$

$$B_r|_{t=0} = 0; \quad B_\varphi|_{t=0} = \begin{cases} B_0 \sin 2\pi r, & \text{при } r < 0.5; \\ 0 & \text{при } r > 0.5. \end{cases}$$

$$B_r|_{r=R-a} = B_r|_{r=R+a} = B_\varphi|_{r=R-a} = B_\varphi|_{r=R+a} = 0.$$

Влияние звездообразования на магнитное поле изучается при помощи системы уравнений:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - kB_r;$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - kB_\varphi;$$

где коэффициент  $k$  описывается с помощью марковского случайного процесса с обновлением.

Также изучен вопрос о том, как будет происходить процесс генерации магнитного поля в дисках с кеплеровской кривой вращения (аккреционных дисках).

### §1. Моделирование инверсий магнитных полей в рамках планарного приближения

Современные астрономические наблюдения показывают, что магнитное поле в Млечном Пути демонстрирует так называемые инверсии [132] [133] [134] [135] [136] [137] [138] [139] [140]. Они характеризуются тем, что магнитные поля в различных частях Галактики имеют противоположные направления. Это подтверждается с помощью измерений фарадеевского вращения радиоволн, которые приходят к нам от пульсаров. Показано, что они имеют разные знаки, что связано с тем фактом, в одних частях Галактики поле направлено по часовой стрелки, а в других – в противоположную сторону. Эти части разделены достаточно узкими областями, в которых поле меняет свое направление.

Данное явление вполне может быть описано в рамках планарного приближения в теории динамо [141] [142] в том случае, если мы используем нелинейные уравнения. Выше было продемонстрировано [117], что в локальном приближении при выполнении условий генерации магнитного поля значения, соответствующие насыщению роста, обладают асимптотической устойчивостью (являясь устойчивыми фокусами или устойчивыми узлами [115]). В таком случае мы можем говорить о том, что при рассмотрении модели, учитывающей пространственную неоднородность поля, можно ожидать при определенных начальных условиях возникновения контрастных структур [121] [122] [123] [130] [143] [144] [145] [146] [147], которые будут

характеризовать магнитное поле, обладающее инверсиями и будут описывать смену его направления в определенных узких областях.

Рассмотрим для начала упрощенную модель для галактического магнитного поля [148]. В ходе изучения поведения поля в линейном приближении ранее нами было получено, что радиальная и азимутальная компоненты магнитного поля описываются с помощью следующего соотношения, включающего в себя управляющие параметры галактического динамо (если мы говорим о растущей моде решения) [149] [150]:

$$B_r \approx -B_\varphi \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}.$$

Конечно, в нелинейном случае выполнение данного равенства далеко не очевидно. Тем не менее, подставим данное выражение в уравнение для магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}} = & -R_\alpha B_\varphi \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}} \left( 1 - B_\varphi^2 \frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - B_\varphi^2 \right) - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}} + \\ & + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\} \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}. \end{aligned}$$

С целью удобства учтем, что коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, заметно меньше коэффициента, характеризующего дифференциальное вращение:

$$R_\alpha \ll R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r};$$

поэтому можно переписать уравнение так:

$$-\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}} = -R_\alpha B_\varphi \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}} (1 - B_\varphi^2) + \frac{\pi^2}{4} B_\varphi \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}} - \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\} \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}.$$

Домножим обе части на  $-\sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha}}$ , тогда можно получить, что [149]:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = B_\varphi \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} (1 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}.$$

Данное уравнение встречается в асимптотической теории контрастных структур [148], и может описывать возникновение решений с переходными слоями в случае задачи реакция-адвекция-диффузия. Опишем, как оно может решаться.

Рассмотрим стационарный случай, когда частная производная по времени в правой части уравнения принимает нулевое значение:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = 0;$$

поэтому уравнение примет вид [148]:

$$-B_\varphi \sqrt{R_\alpha R_\omega r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} (1 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\} = 0.$$

Построим его решение, предполагая [123], что есть точка перехода  $r = r^*$ , в которой магнитное поле принимает нулевое значение:

$$B_\varphi(r^*) = 0.$$

Также будем предполагать, что при  $r > r^*$  решение принимает положительные значения, а при  $r < r^*$  – отрицательные. Поэтому удобно рассмотреть вместо  $B_\varphi$  новую функцию, зависящую от так называемой растянутой переменной, учитывающую не только расположение точки перехода, но и малость параметра  $\lambda$ :

$$B_\varphi(r) = u(x),$$

где

$$x = \frac{r - r^*}{\lambda}.$$

Перепишем производную по расстоянию до оси вращения диска, которые теперь должны пониматься в полном смысле:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = u'(x) \frac{dx}{dr} = \frac{1}{\lambda} u'(x).$$

Для второй производной в таком случае можно записать следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\lambda} u'(x) \right) = \frac{1}{\lambda} u''(x) \frac{dx}{dr} = \frac{1}{\lambda^2} u''(x).$$

Перепишем теперь интересующее нас уравнение с учетом того, что было сказано выше:

$$u \sqrt{R_\alpha R_\omega r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} (1 - u^2) - \frac{\pi^2}{4} u + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\lambda^2} u'' + \frac{1}{r} \frac{1}{\lambda} u' - \frac{u}{r^2} \right\} = 0.$$

Раскроем фигурные скобки и пренебрежем в полученном выражении слагаемыми, которые будут пропорциональны малому параметру  $\lambda$  и его квадрату  $\lambda^2$ :

$$u \sqrt{R_\alpha R_\omega r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} (1 - u^2) - \frac{\pi^2}{4} u + u'' + \frac{\lambda}{r} u' - \frac{\lambda^2}{r^2} u = 0;$$

$$u \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} (1-u^2) - \frac{\pi^2}{4} u + u'' = 0.$$

Данное равенство можно для удобства проведения дальнейших выкладок преобразовать к следующей форме:

$$\begin{aligned} u \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - u^3 \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} u + u'' &= 0; \\ \left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right) u - u^3 \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} + u'' &= 0; \\ \left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right) u - \left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right) u^3 \frac{\sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}{\left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right)} + u'' &= 0; \\ \left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right) u \left( 1 - u^2 \frac{\sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}{\left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right)} \right) + u'' &= 0; \end{aligned}$$

Введем новую величину, которая позволит несколько нам несколько упростить задачу [149]:

$$\gamma = \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4}.$$

Отметим, что если мы будем рассматривать некоторую окрестность точки  $r^*$  (что вполне можно говорить учитывая тот факт, что характерный масштаб изменения расстояния до оси имеет величину порядка  $\lambda$ , которую мы ранее предполагали пренебрежимо малой), то вполне разумно предполагать для данной величины, что:

$$\gamma = \gamma_0 = \gamma(r^*) = \sqrt{R_\alpha R_\omega r^* \frac{\partial \Omega}{\partial r}} \Big|_{r=r^*} - \frac{\pi^2}{4}.$$

Тогда уравнение приближенно можно будет переписать в следующем формате:

$$\gamma_0 u \left( 1 - u^2 \frac{\sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}{\left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4} \right)} \right) + u'' = 0;$$

Введем теперь еще одну вспомогательную величину, которая позволит упростить уравнение [107]:

$$U = \frac{\left( \sqrt{R_\alpha R_\omega r^* \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big|_{r=r^*}} - \frac{\pi^2}{4} \right)^{1/2}}{\left( R_\alpha R_\omega r^* \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big|_{r=r^*} \right)^{1/4}}.$$

Вновь учитывая тот факт, что мы рассматриваем малую окрестность точки  $r^*$ , можно использовать данную величину для дальнейшего упрощения используемого нами уравнения:

$$\gamma_0 u \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) + u'' = 0;$$

Для данной задачи можно также записать следующие граничные условия:

$$u \Big|_{x \rightarrow +\infty} = U;$$

$$u \Big|_{x \rightarrow -\infty} = -U.$$

С целью поиска решения необходимого нам уравнения домножим обе части на  $u'$ :

$$\gamma_0 u' u \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) + u' u'' = 0;$$

Учтем тот факт, что:

$$\frac{d}{dx}(u^2) = 2u'u';$$

$$\frac{d}{dx}(u'^2) = 2u''u'.$$

Тогда наше уравнение можно будет переписать так:

$$\gamma_0 \frac{d}{dx}(u^2) \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) + \frac{d}{dx}(u'^2) = 0.$$

Отдельно рассмотрим первое слагаемое, явно выделив там полную производную:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{d}{dx}(u^2) \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) &= \gamma_0 U^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{U^2} \right) \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) = -\gamma_0 U^2 \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \gamma_0 U^2 \frac{d}{dx} \left\{ \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение можно переписать в форме:

$$-\frac{1}{2} \gamma_0 U^2 \frac{d}{dx} \left\{ \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right)^2 \right\} + \frac{d}{dx}(u'^2) = 0.$$

Проинтегрируем правую и левую часть данного уравнения:



$$-\frac{1}{2}\gamma_0 U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)^2 + u'^2 = C,$$

где  $C$  – некоторая постоянная величина, зависящая от граничных условий, накладываемых на функцию. Отметим, что при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} U;$$

$$u'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Тогда в левой части данного равенства мы получим в пределе нулевое значение:

$$-\frac{1}{2}\gamma_0 U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)^2 + u'^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Это означает, что

$$C = 0.$$

Поэтому наше уравнение можно будет переписать в следующем, более простом виде

$$-\frac{1}{2}\gamma_0 U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)^2 + u'^2 = 0.$$

Тогда мы можем получить следующее выражение для первой производной необходимой нам функции:

$$u'^2 = \frac{1}{2}\gamma_0 U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)^2.$$

Мы можем извлечь квадратный корень из обеих частей уравнения следующим образом:

$$u' = \pm \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} U \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right).$$

Поскольку выбранным граничным условиям соответствует решение, которое по мере увеличения переменной  $x$  будет возрастать, то нас будет интересовать выражение с неотрицательной производной:

$$u' = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} U \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right).$$

Тогда:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} U \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right);$$

$$\frac{1}{U} \sqrt{\frac{2}{\gamma_0}} \frac{du}{dx} = \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right);$$

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma_0}} \frac{d\left(\frac{u}{U}\right)}{dx} = 1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2;$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{U}\right)}{1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} dx;$$

Несложно проинтегрировать обе части данного равенства:

$$\ln \left| \frac{U+u}{U-u} \right| = \sqrt{2\gamma_0} x + A.$$

Пропотенцируем обе части данного равенства и получим

$$\frac{U+u}{U-u} = \exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A);$$

$$U+u = (U-u) \exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A);$$

$$U+u = U \exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A) - u \exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A).$$

Выразим значение функции:

$$u \left[ 1 + \exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A) \right] = U \left[ \exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A) - 1 \right];$$

$$u = U \frac{\exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A) - 1}{\exp(\sqrt{2\gamma_0} x + A) + 1};$$

$$u = U \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x + \frac{A}{2}\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x - \frac{A}{2}\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x + \frac{A}{2}\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x - \frac{A}{2}\right)};$$

$$u = U \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x + \frac{A}{2} \right).$$

Величину  $A$  можно определить из дополнительных условий, накладываемых на функцию. В нашем случае можно воспользоваться тем фактом, что при  $r = r^*$  выполняется условие  $x = 0$ , при котором исходя из условия задачи  $u = 0$ . Из этого следует, что  $A = 0$ , поэтому:

$$u = U \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x \right).$$

Таким образом, не зависящее от времени решение для функции  $B_\phi$  может выглядеть следующим образом:

$$B_{\varphi} = u \left( \frac{r-r^*}{\lambda} \right) = U \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x \right).$$

Рассмотрим теперь возможность движения [123] данного решения в сторону возрастания  $r$  со скоростью  $c$ . Это означает, что движение при поиске решения, зависящего от растянутой переменной, будет происходить со скоростью  $\frac{c}{\lambda}$ . Тогда будем искать решение, зависящее от времени по закону:

$$B_{\varphi}(r, t) = u \left( x - \frac{c}{\lambda} t \right).$$

Иначе говоря, это означает, что

$$B_{\varphi}(r, t) = u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Перепишем в таком случае производную по времени:

$$\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = -\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Запишем теперь первую частную производную магнитного поля по расстоянию до оси вращения с учетом того, что оно представляется с помощью функции  $u$ :

$$\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Для второй производной мы точно также можем записать аналогичное представление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{\varphi}}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dr} \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что в таком случае необходимо также учесть тот факт, что показатель роста магнитного поля, который мы ввели раньше, будет меняться по мере удаления от интересующей нас точки локализации инверсии. Учитывая, что изменение будет не слишком быстрым, можно приближенно считать, что оно описывается при помощи линейного слагаемого [149]:

$$\gamma(r) \cong \gamma_0 + \gamma'(r^*)(r-r^*).$$

Тогда уравнение для эволюции азимутальной компоненты магнитного поля можно переписать в следующей форме:

$$-\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = \left\{ \gamma_0 + \gamma'(r^*)(r-r^*) \right\} u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) +$$

$$+\lambda^2 \left\{ \frac{1}{\lambda^2} u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) - \frac{1}{r^2} u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right\}.$$

Раскроем фигурные скобки:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) &= \gamma_0 u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) + \\ &+ \gamma'(r^*) (r-r^*) u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) + \\ &+ u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) + \frac{\lambda}{r} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) - \frac{\lambda^2}{r^2} u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $\lambda$  – малый параметр, можно пренебречь последним слагаемым в правой части данного равенства:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) &= \gamma_0 u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) + \\ &+ \gamma'(r^*) (r-r^*) u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) + u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) + \frac{1}{r} \lambda u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Вспомним, на основе какого уравнения мы получили наше решение и подставим туда следующее выражение:

$$u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = -\gamma_0 u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right).$$

Тогда первое слагаемое в правой части данного уравнения можно будет сократить:

$$-\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = \gamma'(r^*) (r-r^*) u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) + \frac{1}{r} \lambda u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Кроме того, учтем, что в области локализации интересующего нас переходного слоя  $r \approx r^*$ , поэтому уравнение еще немного упростится:

$$-\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = \gamma'(r^*) (r-r^*) u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) + \frac{1}{r^*} \lambda u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Теперь учтем тот факт, что:

$$u \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{1}{U^2} u^2 \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) \right) = -\frac{1}{\gamma_0} u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Из этого мы можем получить, что:

$$-\frac{c}{\lambda} u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) = -\frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} (r-r^*) u'' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right) + \frac{1}{r^*} \lambda u' \left( \frac{r-r^*-ct}{\lambda} \right).$$

Введем теперь новую переменную:

$$y = \frac{r - r^* - ct}{\lambda}.$$

Тогда уравнение можно переписать следующим образом:

$$-\frac{c}{\lambda} u'(y) = -\frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} (\lambda y + ct) u''(y) + \frac{1}{r^*} \lambda u'(y).$$

Перенесем последнее слагаемое в левую часть равенства:

$$-\frac{c}{\lambda} u'(y) - \frac{1}{r^*} \lambda u'(y) = -\frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} (\lambda y + ct) u''(y).$$

Домножим обе части уравнения на  $-\lambda$ :

$$\left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) u'(y) = \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} \left( y + \frac{c}{\lambda} t \right) u''(y).$$

Нас будут интересовать в первую очередь малые моменты времени, поэтому перепишем уравнение в виде:

$$\left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) u'(y) = \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} y u''(y).$$

Домножим обе части на  $u'(y)$ :

$$\left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) u'^2(y) = \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} y u''(y) u'(y).$$

Проинтегрируем обе части по  $y$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) u'^2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} y u''(y) u'(y) dy.$$

Вынесем постоянные величины за скобку:

$$\left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2(y) dy = \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} y u''(y) u'(y) dy.$$

Подставим значение функции, которую мы нашли чуть ранее. Для ее производной можно получить:

$$u'(y) = \frac{d}{dy} \left( U \operatorname{th} \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right) \right) = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \frac{U}{\operatorname{ch}^2 \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)}.$$

Для первого интеграла, стоящего в левой части, тогда можно записать следующее:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2(y) dy = \frac{\gamma_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U^2 dy}{\operatorname{ch}^4\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)} = U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)}{\operatorname{ch}^4\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)}.$$

Сделаем замену:

$$\xi = \operatorname{th}\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right).$$

Для дифференциала данной вспомогательной переменной мы можем получить следующее:

$$d\xi = \frac{d\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)}.$$

Учитывая, что  $\operatorname{th}\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 1$ ,  $\operatorname{th}\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -1$ , интеграл преобразуется к

виду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2(y) dy = U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^2\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)}.$$

Можно записать, что

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right)} = 1 - \operatorname{th}^2\left(y\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}\right) = 1 - \xi^2.$$

Это означает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2(y) dy = U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi = U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_{\xi=-1}^{\xi=+1} = \frac{4}{3} U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}}.$$

Второй интеграл вычисляется несколько сложнее. Сначала можно отметить, что под знаком интегрирования стоит следующая величина:

$$u''(y)u'(y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dy}(u'^2(y)).$$

Это означает, что данный интеграл возможно было бы взять по частям таким образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y u''(y) u'(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{d}{dy}(u'^2(y)) dy = \frac{1}{2} y u'^2(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2(y) dy.$$

Учитывая тот факт, что

$$yu'^2(y) = y \left( \frac{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} U}{\operatorname{ch}^2 \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)} \right)^2 \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0;$$

$$yu'^2(y) = y \left( \frac{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} U}{\operatorname{ch}^2 \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)} \right)^2 \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0;$$

можно записать, что

$$\frac{1}{2} yu'^2(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} = 0.$$

Поэтому,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yu''(y)u'(y)dy = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2(y)dy.$$

В то же время, выражение для данного интеграла уже было найдено нами выше, поэтому:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yu''(y)u'(y)dy = -\frac{1}{2} U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)}{\operatorname{ch}^4 \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)}.$$

Тогда для определения скорости мы можем получить такое несложно выражение:

$$\left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)}{\operatorname{ch}^4 \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)} = -\frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} U^2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)}{\operatorname{ch}^4 \left( y \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \right)}.$$

Сократив повторяющиеся слагаемые, мы можем получить следующее выражение:

$$\left( c + \frac{\lambda^2}{r^*} \right) = -\frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0};$$

из чего следует, что

$$c = -\frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} - \frac{\lambda^2}{r^*} = \lambda^2 \left( -\frac{1}{2} \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} - \frac{1}{r^*} \right);$$

Таким образом, скорость перемещения инверсии оказывается пропорциональной  $\lambda^2$ . Она меняется по мере удаления от оси вращения объекта. Если  $\gamma'(r) < 0$ , то скорость движения переходного слоя направлена в сторону края диска и увеличивается по мере роста расстояния до оси [107].

Отметим, что в случае, когда по мере удаления от центра азимутальная компонента магнитного поля меняет знак с положительного на отрицательный, для скорости движения переходного слоя будет иметь место практически такой же результат, но отличающийся другим знаком в скобках [149]:

$$c = \lambda^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} - \frac{1}{r^*} \right).$$

Исследуем возникновение инверсий численно. Как уже говорилось ранее, удобная модель для зависимости угловой скорости вращения от расстояния до оси – так называемая брандтовская кривая вращения:

$$\Omega(r) = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2}}.$$

Для производной угловой скорости по расстоянию до оси можно записать следующее [150]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = - \frac{\Omega_0 r}{r_\omega^2 \left(1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Для зависимости коэффициента, характеризующего альфа-эффект, от расстояния до оси, можно приближенно считать, что она обратно пропорциональна расстоянию до центрального объекта [150]:

$$R_\alpha = \frac{R_{\alpha 0}}{r},$$

где  $R_{\alpha 0}$  – некоторое характерное значение соответствующего безразмерного коэффициента.

Для коэффициента, описывающего процесс генерации магнитного поля и фигурирующего в упрощенной модели для его эволюции (состоящей из одного уравнения), можно записать следующую формулу

$$\gamma = \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\pi^2}{4}} = \sqrt{\frac{R_{\alpha 0} R_\omega \Omega_1 r}{r_\omega^2 \left(1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\pi^2}{4}}.$$

Рассмотрим процесс генерации инверсии в случае, когда магнитное поле описывается при помощи такого выражения:



$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = B_\varphi (1 - B_\varphi^2) \sqrt{\frac{R_{\alpha 0} R_\omega \Omega_1 r}{r_\omega^2 \left(1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2\right)^{3/2}}} - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}.$$

Рассмотрим такие значения коэффициентов:

$$R_{\alpha 0} = 1;$$

$$R_\omega = 10;$$

$$r_\omega = 0.2;$$

$$\Omega_1 = 5;$$

$$\lambda = 0.04.$$

Введем простейшие начальные условия, которые соответствуют магнитному полю, которое меняет свое направление на расстоянии от оси вращения, соответствующем половине радиуса диска [150]:

$$B_\varphi \Big|_{r=0} = -B_0 r (r-1)(r-r_0),$$

где

$$r_0 = \frac{1}{2};$$

$$B_0 = 0.01.$$

Данное решение можно получить численно с помощью конечно-разностного метода. Результат эволюции магнитного поля со временем показан на рис. 3.1.1.

Можно отметить, что со временем в данной задаче формируется переходный слой, который перемещается с определенной скоростью. На рисунке 3.1.2 показана зависимость координаты точки локализации переходного слоя от времени. Для наглядности данная зависимость показана для двух различных значений параметра  $\lambda$ , характеризующего диссипационные процессы в плоскости диска [149].

Можно отметить, что скорость действительно растет по мере увеличения малого параметра, стоящего в нашей задаче, по закону, близкому к квадратичному. Таким образом, закономерность, описанная выше, выполняется в принципиальном отношении.

Гораздо больший интерес представляет собой исследование магнитного поля с учетом того факта, что эволюция описывается с помощью пары уравнений планарного приближения. Рассмотрим аналогичные условия и исследуем, как будет происходить процесс эволюции магнитного поля со временем.

Рассмотрим следующую задачу для эволюции поля:

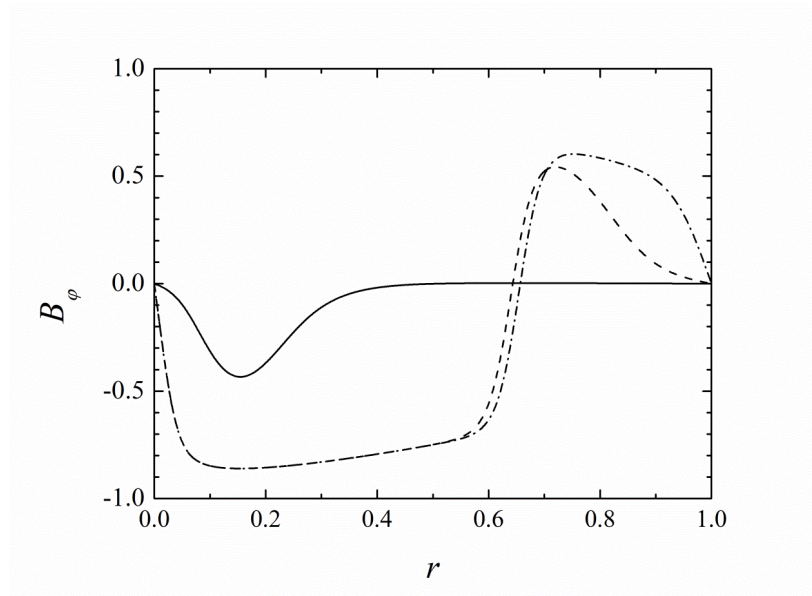


Рис. 3.1.1. Зависимость поля от расстояния до оси вращения, вычисленная с помощью пространственно-одномерной модели. Момент времени  $t = 1$  показан сплошной кривой, момент  $t = 5$  - пунктирной, момент  $t = 10$  - штрихпунктирной.

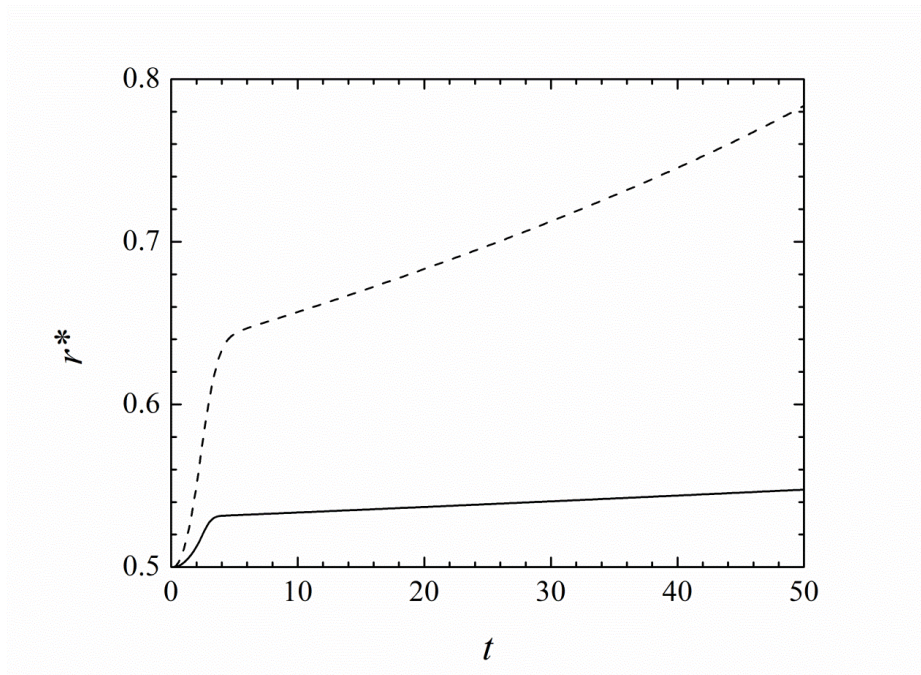


Рис. 3.1.2. Движение точки локализации инверсии со временем. Сплошная линия показывает случай  $\lambda = 0.02$ , пунктирная –  $\lambda = 0.04$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) - \frac{B_r}{r^2} \right\};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\};$$

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\phi|_{t=0} = -B_0 r(r-1)(r-r_0),$$

где значения использованных параметров аналогичны тем, что были приведены ранее. Данная задача уже более сложна, чем ее одномерная модификация, рассмотренная выше, и аналитическое решение оказывается, по-видимому, невозможным. Поэтому данные уравнения решались численно с помощью конечно-разностных методов.

Отдельное внимание заслуживает исследование соотношения между различными компонентами решения, которое приведено на рис.3.1.3. Можно видеть, что азимутальная компонента действительно заметно превышает радиальную. Тем не менее, нельзя не отметить ряд существенных отличий со случаем использования единственного уравнения, что говорит нам о необходимости использования модели, которая принимает во внимание уравнения для обеих составляющих поля.

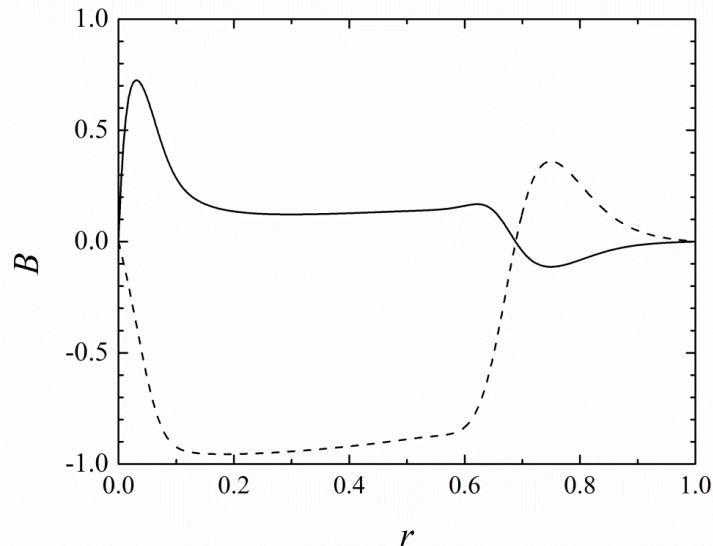


Рис.3.1.3 Структура поля при  $t = 5$ . Радиальная составляющая показана сплошной кривой, азимутальная – пунктирной.

После этого возможно было бы исследовать то, как будет меняться магнитное поле со временем, изучив его пространственную зависимость в различные моменты времени [150]. Это наглядно показано на рис. 3.1.4, где видно, как с одной стороны, переходный слой немного сдвигается по мере роста времени в сторону, противоположную центру, с другой – можно говорить о том, что в правой части рисунка продолжается выход магнитного поля на стационарное значение.

Приведенные рисунки, на наш взгляд, достаточно ясно показывают, что хотя модель, сводящаяся к единственному уравнению, и позволяет понять некоторые принципиальные закономерности, связанные с эволюцией магнитного поля, тем не менее, для более полного

понимания происходящего необходимо исследовать поле в рамках системы уравнений, описывающих обе составляющие поля, лежащие в экваториальной плоскости.

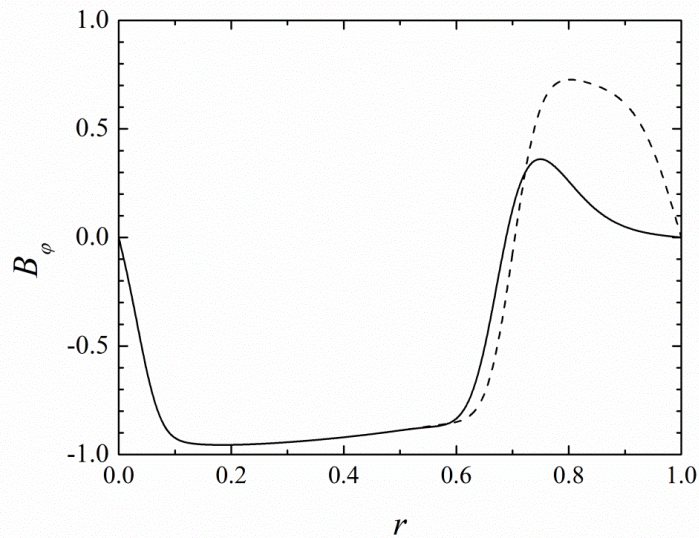


Рис. 3.1.4. Эволюция азимутальной компоненты магнитного поля со временем. Сплошная кривая показывает момент времени  $t = 5$ , пунктирная –  $t = 10$ .

В настоящий момент наибольший интерес с точки зрения исследования инверсий магнитного поля представляет наша Галактика – Млечный Путь. Для нее имеется большое количество наблюдательных данных, связанных с исследованием фарадеевского вращения радиоизлучения, приходящего от пульсаров. Эти данные показывают, что есть все основания считать, что магнитное поле в Млечном Пути демонстрирует два изменения направленности [136] [139] [140].

Представляет большой интерес возможное воспроизведение данных результатов при помощи теоретических моделей. Отметим, что это, по всей видимости, должно быть связано с начальными условиями. Кроме того, важно учитывать тот факт, что при наличии вязкости магнитное поле будет со временем размываться за счет диссипативных эффектов, а также за счет движения переходных слоев в противоположном направлении.

Рассмотрим следующие начальные условия, соответствующие двукратной смене направления магнитного поля, следующей из наблюдательных данных [151]:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = B_0 r^2 (r-1)(r-r_1)(r-r_2),$$

где изменения направления начального поля локализованы на следующих расстояниях от оси вращения:

$$r_1 = 0.3;$$

$$r_2 = 0.6$$

Отметим, что в случае галактики, имеющей размеры Млечного Пути, это соответствует 3 кпк и 6 кпк, соответственно.

Результат для компонент магнитного поля приведен на рис.3.1.4. Можно видеть, что в таком случае формируются две инверсии, которые затрагивают как азимутальную компоненту магнитного поля, так и радиальную. Таким образом, мы можем говорить о том, что в галактике присутствуют сразу три области. В наиболее близкой к центру части поле ориентировано против часовой стрелки, в «средней» – оно направлено по часовой, а в периферийных регионах галактики поле вновь ориентировано против часовой стрелки. Данная структура близка к наблюдательным данным о магнитном поле Млечного Пути, основанных на измерениях меры фарадеевского вращения плоскости поляризации изучения, полученного от пульсаров [151]. Кроме того, важно отметить, что они разделены узким переходным слоем, в котором поле достаточно резко меняет свое направление.

Отдельный интерес может представлять изменение характера зависимости магнитного поля от времени (рис. 3.1.5). Можно видеть, что сначала формируется магнитное поле во внутренней области, направленное против часовой стрелке, затем начинает образовываться поле, которое ориентировано по часовой в промежуточной области, и в самую последнюю очередь образуется поле, которое связано с окраинными областями и направлено против часовой стрелки.

В настоящее время есть все основания считать, что такой механизм соответствует процессу генерации магнитного поля в Млечном Пути, и, возможно, в других галактиках, для которых характерны инверсии.

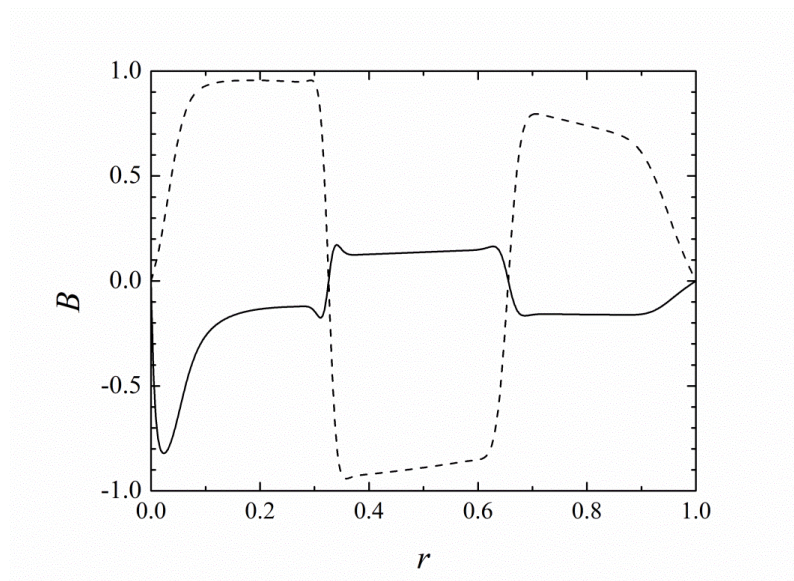


Рис.3.1.4. Структура поля при  $t = 10$  в случае пары инверсий. Радиальная составляющая показана сплошной линией, азимутальная - пунктирной.



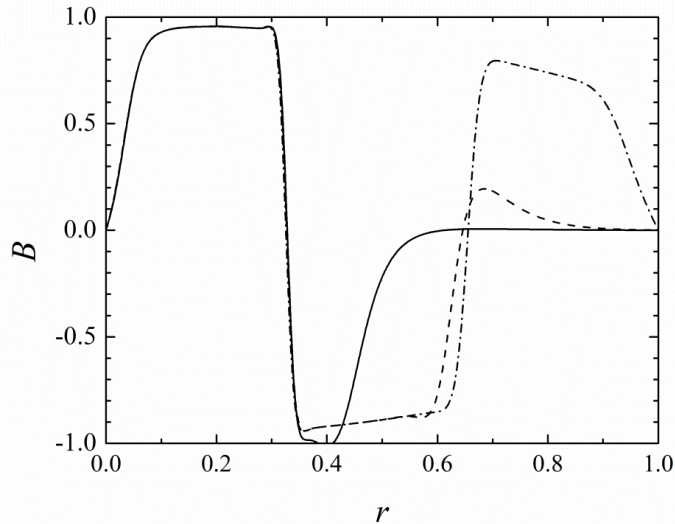


Рис. 3.1.5. Эволюция азимутальной компоненты магнитного поля со временем.

Сплошная кривая показывает момент времени  $t = 3$ , пунктирная –  $t = 5$ , штрихпунктирная –  $t = 10$ .

## §2. Генерация магнитных полей в окраинных областях галактик и во внешних кольцах

Большинство моделей, которые были разработаны для генерации магнитных полей в галактиках, описывают процесс генерации на небольшом расстоянии от оси вращения [14] [48]. В них неявно предполагается, что за пределами некоторого расстояния (скажем, около 10 кпк в случае Млечного Пути) магнитное поле оказывается пренебрежимо малым и его можно уже не учитывать.

Такой подход основан также и на других моментах. Так, на большом расстоянии от центра галактики динамо-число уменьшается, и становится ниже своего критического значения [151]. На основании этого можно предположить, что генерация магнитного поля в соответствующих областях происходить не будет. Тем не менее, в математической физике известен так называемый эффект Колмогорова – Петровского – Пискунова [152], который впервые был показан для одной биофизической проблемы [153], описываемой параболическим уравнением в частных производных. Он связан с распространением за счет нелинейной волны решения в те области, где его рост, казалось бы, невозможен. В целом, он аналогичен механизму движения инверсий магнитного поля, который рассмотрен в предыдущем разделе.

Для иллюстрации данного процесса возьмем упрощенную модель для генерации магнитного поля, связанную с планарным приближением (изъяв отсюда эффекты, относящиеся к кривизне, для того чтобы можно было исследовать важнейшие эффекты):

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2}.$$

Введем «скорректированное» время [119] [120]:

$$\tau = \frac{\pi^2}{4} t.$$

Тогда система уравнений будет переписана в виде:

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2};$$

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tau} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2}.$$

Домножим обе части на  $\frac{4}{\pi^2}$ :

$$\frac{\partial B_r}{\partial \tau} = -\frac{4}{\pi^2} R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - B_r + \lambda^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \tau} = -\frac{4}{\pi^2} R_\omega B_r - B_\varphi + \lambda^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2}.$$

Введем вспомогательные функции (вообще говоря, зависящие от расстояния до оси вращения) [119]:

$$A(r) = \frac{4}{\pi^2} R_\alpha;$$

$$B(r) = \frac{4}{\pi^2} R_\omega;$$

и коэффициент:

$$\varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi}.$$

Уравнение в таком случае переписется в форме:

$$\frac{\partial B_r}{\partial \tau} = -A(r) B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - B_r + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \tau} = -B(r) B_r - B_\varphi + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2}.$$

Нетрудно видеть, что условие генерации магнитного поля, которое было получено в прошлой главе ( $D = R_\alpha R_\omega > \frac{\pi^4}{16}$ ) перейдет к следующему простому выражению:

$$A(r)B(r) > 1.$$

Рассмотрим такую зависимость данных параметров от расстояния до оси вращения [107]:

$$A(r) = \exp(-0.55r);$$

$$B(r) = 3 \exp(-0.55r).$$

Можно отметить, что условие генерации перестает выполняться при превышении величиной расстояния до оси вращения некоторого критического значения:

$$r > r^*;$$

где для введенной нами зависимости коэффициентов получается приближенное выражение:

$$r^* \approx 0.998.$$

Рассмотрим следующие начальные условия для магнитного поля:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_\varphi|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{при } r < r_1; \\ B_0, & \text{при } r_1 < r < r_2; \\ 0, & \text{при } r > r_2; \end{cases}$$

где

$$B_0 = 0.05;$$

$$r_1 = 0.1;$$

$$r_2 = 0.2.$$

Что касается граничных условий, то из теоретических соображений разумно использовать следующие:

$$B_r|_{r=0} = B_\varphi|_{r=0} = 0;$$

$$B_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0;$$

$$B_\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0;$$

однако с точки зрения численного решения можно заменить пару последних условий на следующие:

$$B_r|_{r=R_{\max}} = B_\varphi|_{r=R_{\max}} = 0;$$

где

$$R_{\max} \gg r^*.$$

Для удобства возьмем значение

$$R_{\max} = 10.$$

Результат для магнитного поля при  $\varepsilon = 0.02$  показан на рис. 3.2.1. Можно видеть, что решение в определенной области выходит на уровень нелинейной стабилизации, после чего область локализации начинает расширяться [107].



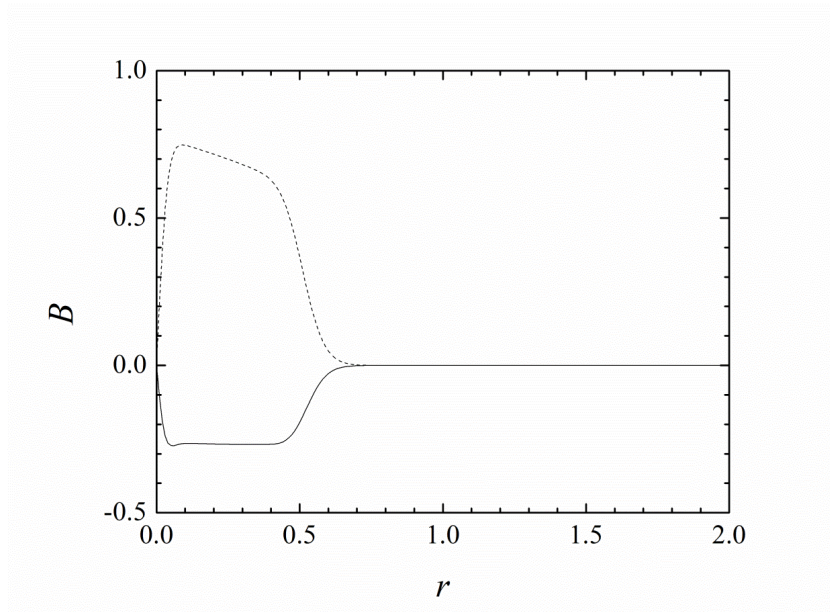


Рис. 3.2.1. Структуру поля для  $\varepsilon = 0.02$  при  $t = 20$ . Радиальная часть поля показана сплошной кривой, азимутальная – пунктирной.

Интересно изучить, насколько магнитное поле может распространиться в области, где, казалось бы, практически невозможна генерация магнитного поля *in situ*. Скорость движения фронта, как показывает численное моделирование, а также теоретические оценки, растет с увеличением значения коэффициента при старшей производной, поэтому для этого рассмотрим случай несколько большего его значения –  $\varepsilon = 0.06$ . Результат показан на рис. 3.2.2. Нетрудно убедиться в том, что с ростом времени поле проникает за пределы «точки перехода через критическое значение».

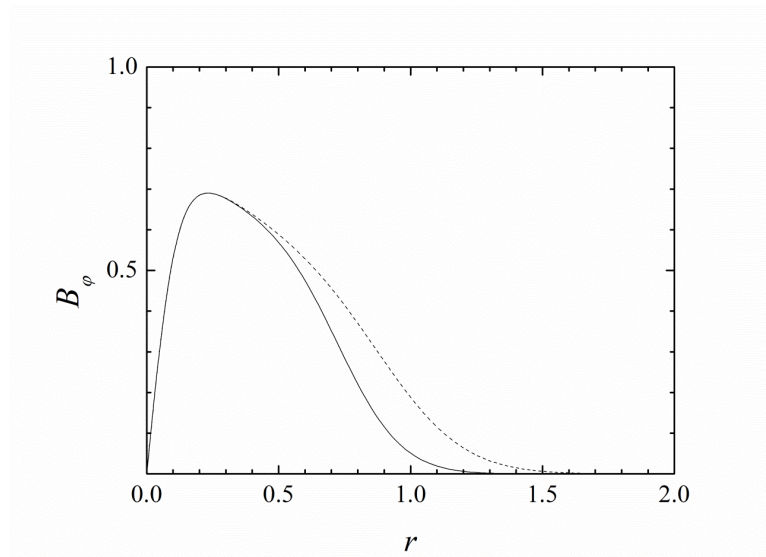


Рис. 3.2.2. Зависимость азимутального магнитного поля от расстояния для  $\varepsilon = 0.06$ . Сплошная линия показывает момент времени при  $t = 20$ , пунктирная –  $t = 50$ .

Данный результат означает, что магнитное поле действительно может проникать за пределы точки смены устойчивости. Глубина его проникновения зависит от конкретных параметров галактик, которые изучаются в интересующей нас задаче. Ранее проводилось исследование данного вопроса для реальных примеров объектов, таких как Млечный Путь и Туманность Андромеды. Было показано, что для подобных галактик можно говорить о наличии магнитного поля на расстояниях вплоть до примерно 20 кпк до оси вращения [151]. После этого величина магнитного поля уменьшается до величин, которые оказываются меньше так называемого межгалактического фона, и говорить о каком-то магнитном поле уже бессмысленно.

Другим важным примером эволюции полей является возможность их возникновения во внешних кольцах галактик, которыми обладают ряд объектов [49] [154] [155] [156] [157] [158] [159]. Они расположены на некотором расстоянии от основной части галактики, и в целом в них также присутствуют все основные эффекты, которые характерны и для основной части галактики. Так, там присутствует дифференциальное вращение, можно говорить о закрученных турбулентных движениях ионизированной среды и т.д. По этой причине в них вполне логично предположить наличие крупномасштабного магнитного поля.

Конечно, на первый взгляд процесс генерации поля описывается там совершенно такими же закономерностями, как и было описано выше для основной части галактики. Вместе с тем, более внимательное изучение говорит о достаточно существенных различиях. Действительно, рассмотрим внешнее кольцо, которое обладает полутолщиной  $h$  и полушириной  $a$ . Кроме того, пусть его радиус составляет величину  $R$ . Это означает, что кольцо будет характеризоваться следующими значениями цилиндрических координат (рис.3.2.3) [52] [160]:

$$R - a < r < R + a;$$

$$-h < z < h.$$

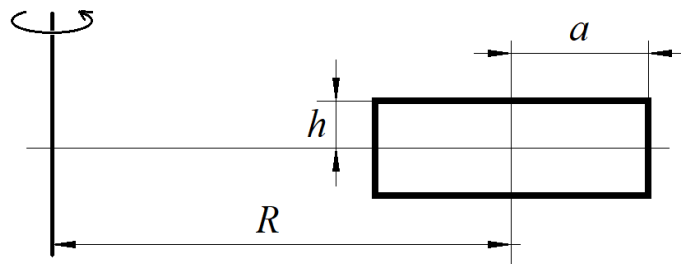


Рис.3.2.3. Основные параметры внешнего кольца.

В таком случае логично предположить, что компоненты магнитного поля будут обращаться в нуль не только на верхней и нижней границах кольца, но и на внутренней и на внешней [52] [160]:

$$B_r|_{r=R-a} = B_r|_{r=R+a} = B_\varphi|_{r=R-a} = B_\varphi|_{r=R+a} = 0.$$

В таком случае зависимость магнитного поля от радиальной координаты можно также, учитывая малую ширину внешнего кольца, описывать в следующем формате [55]:

$$B_r(r, z, t) = B_r(R, 0, t) \cos\left(\frac{\pi(r-R)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right);$$

$$B_\varphi(r, z, t) = B_\varphi(R, z, t) \cos\left(\frac{\pi(r-R)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).$$

Для производной магнитного поля по радиальной координате в таком случае можно также приближенно записать, что:

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} = -\frac{\pi^2}{4a^2} B_r;$$

$$\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} = -\frac{\pi^2}{4a^2} B_\varphi.$$

Тогда упрощенная система дифференциальных уравнений для эволюции магнитного поля в безразмерном виде (время измеряется в единицах  $h^2 / \eta$ ), которая обсуждалась нами ранее, в линейном случае (когда мы пренебрегаем квадратами компонент поля) может быть переписана в следующей форме:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4a^2} B_r;$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4a^2} B_r.$$

Учитывая, что расстояния измеряются в радиусах внешнего кольца (таким образом, в рамках таких единиц  $R=1$ ), а также введенное ранее выражение  $\lambda = \frac{h}{R}$  нетрудно записать, что:

$$\lambda^2 \frac{\pi^2}{4a^2} = \frac{h^2}{R^2} \frac{\pi^2}{4a^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2}.$$

Тогда уравнение для эволюции магнитного поля будет в полных дифференциалах, и оно переписется в следующей форме:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r - \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} B_r;$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} B_\varphi.$$

Также как и прежде, будем искать решение для магнитного поля в следующей форме [115]:

$$B_r(t) = B_{r0} \exp(\gamma t);$$

$$B_\varphi(t) = B_{\varphi0} \exp(\gamma t).$$

Тогда уравнение может быть переписано в такой форме:

$$\gamma B_{r0} \exp(\gamma t) = -R_\alpha B_{\varphi0} \exp(\gamma t) - \frac{\pi^2}{4} B_{r0} \exp(\gamma t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} B_{r0} \exp(\gamma t);$$

$$\gamma B_{\varphi0} \exp(\gamma t) = -R_\omega B_{r0} \exp(\gamma t) - \frac{\pi^2}{4} B_{\varphi0} \exp(\gamma t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} B_{\varphi0} \exp(\gamma t).$$

Разделив обе части на  $\exp(\gamma t)$ , мы можем получить такие уравнения для определения  $B_{r0}$  и  $B_{\varphi0}$ :

$$\left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} + \gamma \right) B_{r0} + R_\alpha B_{\varphi0} = 0;$$

$$R_\omega B_{r0} + \left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} + \gamma \right) B_{\varphi0} = 0.$$

Условие разрешимости данной системы уравнений таково [112]:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} + \gamma & R_\alpha \\ R_\omega & \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} + \gamma \end{pmatrix} = 0;$$

$$\left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{h^2}{a^2} + \gamma \right)^2 - R_\alpha R_\omega = 0.$$

Тогда для скорости роста магнитного поля мы получим [160]:

$$\gamma = -\frac{\pi^2}{4} \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right) \pm \sqrt{R_\alpha R_\omega} = -\frac{\pi^2}{4} \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right) \pm \sqrt{D}.$$

Наличие положительного показателя (и возможность генерации магнитного поля) определяется следующим условием:

$$-\frac{\pi^2}{4} \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right) + \sqrt{D} > 0;$$

$$\sqrt{D} > \frac{\pi^2}{4} \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right).$$

Возведем обе части в квадрат:

$$D > D_{cr} = \frac{\pi^4}{16} \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)^2.$$

Таким образом, критическое динамо-число в данном случае будет выше, чем то, что было получено раньше. Оценим его возможную величину для реальных значений параметров. Если  $h = \frac{1}{2}a$ , то критическое значение динамо-числа будет таким:

$$D_{cr} = \frac{\pi^4}{16} \left( 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{a^2} \right)^2 = \frac{3.14^4}{16} \left( 1 + \frac{1}{4} \right)^2 = 9.5 \approx 10.$$

Это означает, что генерация магнитного поля в случае внешних колец *in situ* оказывается более сложной, чем в случае основной части галактики [160]. Более аккуратное исследование процесса генерации можно провести с помощью численного решения соответствующих уравнений.

Сформулируем основные модельные представления, описывающие действие планарного приближения. Возьмем следующие уравнения (здесь используется несколько иной вариант подавления альфа-эффекта, который связан с нелинейным слагаемым, находящимся в знаменателе соответствующего выражения) [160]:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{R_\alpha(r)B_\varphi}{1 + \frac{B_r^2 + B_\varphi^2}{B^*(r)}} - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) \right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega(r)B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\varphi) \right).$$

Отметим, что в качестве единицы измерения для расстояния будем использовать величину  $2R_0$ , где  $R_0$  – радиус основной части галактики. Это связано с тем, что теперь расчетная область не ограничивается областью, в которой сосредоточена основная часть галактики, и поэтому неразумно полагать, что на ее границе  $R = 1$ .

Будем предполагать, что коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, зависит от расстояния до оси вращения исследуемого нами объекта по следующему закону:

$$R_\alpha(r) = \frac{R_{\alpha 0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_\omega}\right)^2}},$$

где  $R_{\alpha 0}$  – некоторая характерная величина соответствующего параметра,  $r_\omega$  имеет тот же смысл, что и обсуждался раньше. Для параметра  $R_\omega(r)$  мы используем ту же закономерность, которая была использована нами ранее.

Отдельное внимание надо уделить зависимости поля равномерного распределения от расстояния до оси. Отметим, что основную роль играет именно она, поскольку связана с плотностью межзвездной среды (именно она в наибольшей степени отличается в основной части галактики, в кольце и в промежутке между ними, в то время как большинство других величин можно считать зависящими от расстояния до оси по примерно одинаковому закону). Для плотности среды будем считать, что она меняет согласно следующей функции [160]:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{при } r < R_0; \\ 10^{-2} \rho_0 & \text{при } R_0 < r < R - a; \\ \rho_0 & \text{при } R - a < r < R + a. \end{cases}$$

Учитывая, что поле равномерного распределения пропорционально квадратному корню из плотности, можно записать следующую зависимость от расстояния до центра (отметим, что здесь поле измеряется в единицах равномерного распределения в центральной части, а расстояния приведены в тех безразмерных единицах, которые были описаны нами выше):

$$B^*(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } r < 0.5; \\ 10^{-1} & \text{при } 0.5 < r < R - a; \\ 1 & \text{при } R - a < r < R + a. \end{cases}$$

Характер зависимости данного поля от расстояния при  $R = 0.9$ ,  $a = 0.1$  (естественно, с учетом того, что мы измеряем их в безразмерных единицах) приведен на рис. 3.2.4.

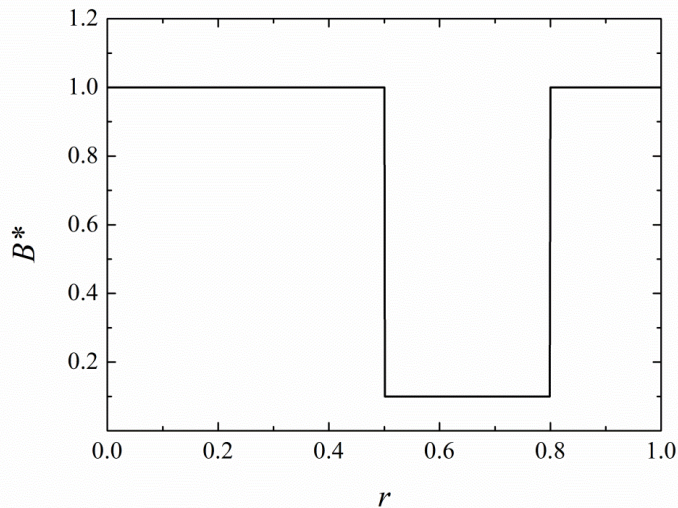


Рис. 3.2.4. Зависимость поля равномерного распределения от расстояния до оси вращения объекта.

В качестве граничных условий для магнитного поля можно использовать следующие:

$$B_r|_{r=0} = B_\varphi|_{r=0} = B_r|_{r=R+a} = B_\varphi|_{r=R+a} = 0.$$

Используем для решения задачи следующие значения начального магнитного поля:

$$B_r|_{t=0} = 0;$$

$$B_{\varphi}|_{t=0} = \begin{cases} B_0 \sin 2\pi r, & \text{при } r < 0.5; \\ 0 & \text{при } r > 0.5. \end{cases}$$

Результат, который получен при  $B_0 = 0.05$ ,  $R = 0.9$ ,  $a = 0.1$ , приведен на рис. 3.2.5. На нем показана зависимость величины  $B = \sqrt{B_r^2 + B_{\varphi}^2}$  от расстояния до оси вращения [160].

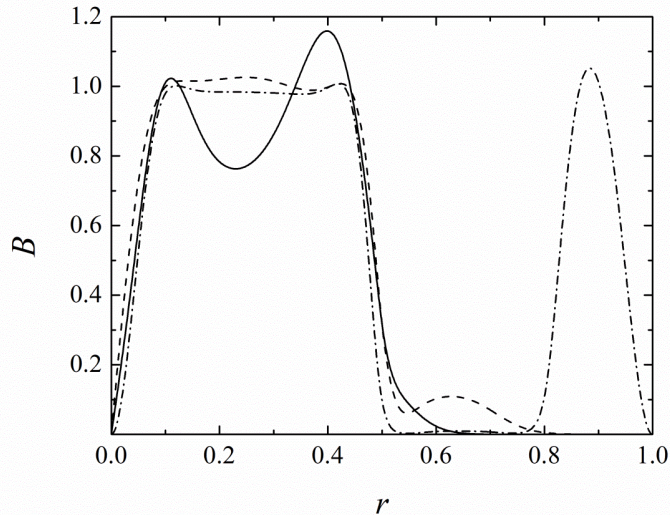


Рис. 3.2.5. Структура поля в разные моменты времени. Момент времени  $t = 1$  показан сплошной линией,  $t = 2$  – пунктирной,  $t = 5$  – штрихпунктирной.

Можно видеть, что также, как и в прошлом случае [151], магнитное поле в первую очередь генерируется в центральной части галактики, после чего за счет эффекта Колмогорова – Петровского – Пискунова [152] перемещается в ее внешние части.

Отметим, что в случае внешних колец изучение эволюции поля в гораздо большей степени описывается при помощи модели динамо в торе, которая намного лучше подходит для исследования магнетизма в подобных объектах.

### §3. Генерация полей в галактических объектах с активным звездообразованием

Большинство модельных предположений, которые были описаны выше, исходили из тех соображений, что эволюция галактического магнитного поля может быть описана при помощи усредненных параметров (таких, как  $R_{\alpha}$  и  $R_{\omega}$ ), характеризующих свойства межзвездной среды. Подобные представления основываются на том факте, что в большом количестве галактик ионизованная компонента межзвездного газа составляет долю от 10 до 15% [161] [162], и отсутствуют какие-либо активные процессы, которые могут данное соотношение существенным образом изменить.

Вместе с тем, существует достаточно большое количество галактических объектов, в которых присутствует звездообразование и тесно связанные с этим явления, такие как взрывы сверхновых, истечения из звезд и т.д. [163]. Они достаточно заметно меняют параметры



межзвездной среды, и поэтому такие эффекты, как турбулентная диффузия, происходят уже с существенно иной интенсивностью [98].

Один из способов решения подобных задач связан с возможностью параметризации соответствующих коэффициентов, характеризующих действия динамо [98]. Так, с ростом интенсивности звездообразования можно говорить о том, что они начинают плавно меняться по некоторому закону. Вместе с тем, важно учитывать тот факт, что звездообразование в реальности является локальным процессом, а расположение соответствующих ему областей является случайным. По этой причине разумно использовать модель, которая бы использовала случайные коэффициенты [108] [109] [164] [165] [166] [167]

Отметим, что коэффициент турбулентной диффузии является пропорциональным скоростям турбулентных движений. В таком случае при рассмотрении уравнений для генерации магнитного поля в рамках планарного приближения слагаемое, характеризующее диффузию магнитного поля в вертикальном направлении (и играющее ключевую роль в описании диффузии) будет также меняться пропорционально скоростям турбулентных движений. Это приведет к следующей модификации уравнений (отметим, что ниже они приведены в линейном локальном варианте, однако то же самое может быть с успехом переписано и для нелинейных уравнений, содержащих частные производные магнитного поля по координатам) [166]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - kB_r;$$
$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - kB_\varphi;$$

где  $k$  - коэффициент, характеризующий диффузию магнитного поля в вертикальном направлении и пропорциональный скорости движений.

Определим, какие типичные значения может принимать данный коэффициент. Основная составляющая межзвездной среды связана с нейтральным водородом, характерные скорости турбулентных движений в которой составляют величину около 10 км/с [168]. Если мы говорим про области, ассоциированные со звездообразованием, то они в значительной мере заполнены ионизованным водородом, для которого типичная скорость будет равна около 30 км/с [169]. Тогда можно говорить о том, что в случае областей нейтрального водорода значение коэффициента будет близко к тому, что использовалось нами ранее (скажем, можно взять  $k = 2.5$ ), а в тех частях галактики, в которых присутствует интенсивное звездообразование, можно взять величину  $k = 7.5$  [109].

Данный процесс может быть описан при помощи следующего случайного закона [109]:

$$k = \begin{cases} 2.5 & \text{с вероятностью } (1-p); \\ 7.5 & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$



Значение  $p$  – вероятность того, что мы находимся в области интенсивного звездообразования. Установим ее взаимосвязь с поверхностной плотностью звездообразования, являющейся основной наблюдательной характеристикой, которая может быть непосредственно измеренной. Возьмем звезду, имеющую массу, превышающую солнечную в 10 раз. Продолжительность жизни подобного объекта можно оценить в  $10^7$  лет. Рассмотрим галактику, которая имеет радиус  $R = 10$  кпк. Ее площадь будет такой:

$$S = \pi R^2 = 3.14 \cdot (10 \text{ кпк})^2 = 314 \text{ кпк}^2.$$

Поверхностная плотность звездообразования, которая соответствует единственной звезде, будет равна величине:

$$\Sigma = \frac{10M_{Sun}}{10^7 \text{ лет} \cdot 314 \text{ кпк}^2} = 3.2 \cdot 10^{-9} \frac{M_{Sun}}{\text{год} \cdot \text{кпк}^2}.$$

Определим теперь вероятность «попасть» в область, соответствующую звездообразованию. Радиус зоны Стремгrena для такой звезды будет равна  $r = 10$  кпк, и ее объем составляет величину:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (0.01 \text{ кпк})^3 = 4.2 \cdot 10^{-6} \text{ кпк}^3.$$

Для объема всей галактики мы можем в таком случае получить следующее (предположим, что ее полутолщина равна  $h = 0.3$  кпк):

$$V = \pi h R^2 = 3.14 \cdot 0.3 \text{ кпк} \cdot (10 \text{ кпк})^2 = 94.2 \text{ кпк}^3.$$

Тогда для вероятности можно получить следующую оценку, связанную с отношением этих объемов:

$$p = \frac{V_1}{V} = \frac{4.2 \cdot 10^{-6} \text{ кпк}^3}{94.2 \text{ кпк}^3} = 4.4 \cdot 10^{-8}.$$

Сравнивая эту величину с тем, что было получено для  $\Sigma$ , мы можем записать приближенное равенство [98]:

$$p \approx 13\Sigma.$$

В таком случае, будем предполагать, что коэффициент  $k$  является кусочно-постоянным: в течении промежутка времени продолжительностью  $\Delta t$ , после чего он обновляется вновь в соответствии со случайным законом, описанным чуть выше [170] [171] [172] [173] [174] [175] [176] [177] [178].

Найдем собственные значения, которым соответствуют постоянной величине  $k$ . Будем, также как и раньше, искать магнитное поле в экспоненциальной форме ( $B_r(t) = B_{r0} \exp(\gamma t)$ ;  $B_\varphi(t) = B_{\varphi0} \exp(\gamma t)$ ). Тогда система дифференциальных уравнений сведется с алгебраическим:

$$\begin{aligned}\gamma B_{r_0} \exp(\gamma t) &= -R_\alpha B_{\varphi_0} \exp(\gamma t) - k B_{r_0} \exp(\gamma t); \\ \gamma B_{\varphi_0} \exp(\gamma t) &= -R_\omega B_{r_0} \exp(\gamma t) - k B_{\varphi_0} \exp(\gamma t).\end{aligned}$$

Они могут переписаны в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}(\gamma + k) B_{r_0} + R_\alpha B_{\varphi_0} &= 0; \\ R_\omega B_{r_0} + (\gamma + k) B_{\varphi_0} &= 0.\end{aligned}$$

Его разрешимость связана с равенством нулю следующего определителя матрицы:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \gamma + k & R_\alpha \\ R_\omega & \gamma + k \end{pmatrix} &= 0; \\ (\gamma + k)^2 - R_\alpha R_\omega &= 0.\end{aligned}$$

Для показателя роста магнитного поля можно получить следующее:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -k + \sqrt{R_\alpha R_\omega}; \\ \gamma_2 &= -k - \sqrt{R_\alpha R_\omega};\end{aligned}$$

Для первого из собственных значений мы можем получить такой собственный вектор:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} B_{r_1} \\ B_{\varphi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{R_\alpha} \\ \sqrt{R_\omega} \end{pmatrix}.$$

Для второго собственного значения, которые мы получили, собственный вектор будет следующим:

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} B_{r_2} \\ B_{\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_\alpha} \\ \sqrt{R_\omega} \end{pmatrix}.$$

Как видно, собственные векторы не различаются для различных значений параметра  $k$ . Кроме того, хорошо видно, что решение, соответствующее собственному вектору  $\mathbf{V}_2$ , будет во всех случаях затухающим. По этой причине можно приближенно считать, что эволюция магнитного поля объясняется в первую очередь тем, что связано с первым собственным значением (и связанным с ним собственным вектором).

Для магнитного поля можно в таком случае записать следующее разложение магнитного поля по базису из собственных векторов для соответствующего оператора:

$$\mathbf{V}(t) = y(t)\mathbf{V}_1 + z(t)\mathbf{V}_2.$$

Сказанное выше означает, что нам достаточно учитывать только то, что связано с  $y(t)$ . Напомним, что на полуинтервалах времени  $[0, \Delta t)$ ,  $[\Delta t, 2\Delta t)$ , ...,  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ , ... собственные значения являются постоянными, и равны одному из следующих значений:

$$\gamma^0 = -2.5 + \sqrt{R_\alpha R_\omega};$$

$$\gamma^1 = -7.5 + \sqrt{R_\alpha R_\omega}.$$

Так, при значениях  $R_\alpha = 1$  и  $R_\omega = 10$  можно получить такие значения показателей роста [116]:

$$\gamma^0 = 0.66;$$

$$\gamma^1 = -4.33.$$

Для значения  $y(t)$  в таком случае можно получить следующее:

$$y(n\Delta t) = y(0) \exp(\gamma_1(0)\Delta t) \exp(\gamma_1(\Delta t)\Delta t) \dots \exp(\gamma_1((n-1)\Delta t)\Delta t).$$

Вероятность первого из собственных значений на каждом из промежутков составляет  $p$ , второго –  $(1-p)$ . Вероятность того или иного значения на следующих интервалах описывается при помощи биномиального распределения. Так, с вероятностью  $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$  коэффициент разложения магнитного поля по собственным векторам будет принимать в соответствующий момент следующее значение:

$$y(n\Delta t) = y(0) \exp(m\gamma^0 \Delta t) \exp((n-m)\gamma^1 \Delta t).$$

Для среднего значения данной величины можно точно также записать следующее [116]:

$$\langle y(n\Delta t) \rangle = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} y(0) \exp(m\gamma^0 \Delta t) \exp((n-m)\gamma^1 \Delta t).$$

Вынося  $y(0)$  за знак суммирования, мы можем получить такое выражение:

$$\begin{aligned} \langle y(n\Delta t) \rangle &= y(0) \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \exp(m\gamma^0 \Delta t) \exp((n-m)\gamma^1 \Delta t) = \\ &= y(0) \sum_{m=0}^n C_n^m \left\{ p \exp(\gamma^0 \Delta t) \right\}^m \left\{ (1-p) \exp(\gamma^1 \Delta t) \right\}^{n-m}. \end{aligned}$$

Его можно преобразовать к соответствующей степени суммы:

$$\langle y(n\Delta t) \rangle = y(0) \left\{ p \exp(\gamma^0 \Delta t) + (1-p) \exp(\gamma^1 \Delta t) \right\}^n.$$

Раскроем «круглые» скобки:

$$\begin{aligned} \langle y(n\Delta t) \rangle &= y(0) \left\{ p \exp(\gamma^0 \Delta t) + \exp(\gamma^1 \Delta t) - p \exp(\gamma^1 \Delta t) \right\}^n = \\ &= y(0) \exp(n\gamma^1 \Delta t) \left\{ 1 - p + p \exp((\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t) \right\}^n. \end{aligned}$$

Представим фигурную скобку при малых значениях шага по времени  $\Delta t$ , учитывая слагаемые вплоть до тех, которые пропорциональны  $\Delta t^2$ :

$$1 - p + p \exp((\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t) = 1 - p + p \left( 1 + (\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{1}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right) =$$

$$= 1 - p + p + p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 = 1 + p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2.$$

Для среднего значения в таком случае можно получить такую приближенную формулу:

$$\langle y(n\Delta t) \rangle = y(0) \exp(n\gamma^1 \Delta t) \left\{ 1 + p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\}^n$$

Исследуем, как решение растёт со временем:

$$\frac{\langle y(n\Delta t) \rangle}{y(0)} = \exp(n\gamma^1 \Delta t) \left\{ 1 + p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\}^n.$$

Прологарифмируем обе части данного равенства:

$$\ln \left( \frac{\langle y(n\Delta t) \rangle}{y(0)} \right) = n\gamma^1 \Delta t + n \ln \left\{ 1 + p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\}.$$

Для натурального логарифма в правой части мы можем приближенно получить следующее:

$$\ln \left\{ 1 + p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\} = p(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2.$$

Тогда:

$$\ln \left( \frac{\langle y(n\Delta t) \rangle}{y(0)} \right) = n\gamma^1 \Delta t + np(\gamma^0 - \gamma^1)\Delta t + \frac{np}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2.$$

Если мы введем параметр:

$$\beta_1 = \gamma^1 + p(\gamma^0 - \gamma^1) + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t = p\gamma^0 + (1-p)\gamma^1 + \frac{p}{2}(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t;$$

то, учитывая тот факт, что  $t = n\Delta t$ , можно говорить о том, что среднее значение магнитного поля растёт по закону:

$$\langle y(t) \rangle = y(0) \exp(\beta_1 t).$$

Вычислим теперь значение среднего квадрата данной величины (это делается аналогично тому, что мы ранее делали для среднего значения):

$$\begin{aligned} \langle y(n\Delta t) \rangle &= \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} y^2(0) \exp(2m\gamma^0 \Delta t) \exp(2(n-m)\gamma^1 \Delta t) = \\ &= y^2(0) \sum_{m=0}^n C_n^m \left\{ p \exp(2\gamma^0 \Delta t) \right\}^m \left\{ (1-p) \exp(2\gamma^1 \Delta t) \right\}^{n-m} = \\ &= y^2(0) \left\{ p \exp(2\gamma^0 \Delta t) + (1-p) \exp(2\gamma^1 \Delta t) \right\}^n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= y^2(0) \left\{ p \exp(2\gamma^0 \Delta t) + (1-p) \exp(2\gamma^1 \Delta t) \right\}^n = \\
 &= y^2(0) \left\{ p \exp(2\gamma^0 \Delta t) + (1-p) \exp(2\gamma^1 \Delta t) \right\}^n = \\
 &= y^2(0) \left\{ p \exp(2\gamma^0 \Delta t) + \exp(2\gamma^1 \Delta t) - p \exp(2\gamma^1 \Delta t) \right\}^n = \\
 &= y^2(0) \left\{ \exp(2\gamma^1 \Delta t) \left( 1-p + p \exp(2(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t) \right) \right\}^n = \\
 &= y^2(0) \exp(2n\gamma^1 \Delta t) \left\{ 1-p + p \exp(2(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t) \right\}^n .
 \end{aligned}$$

Для фигурной скобки, которая стоит в последней строке, можно записать такое разложение экспоненциального слагаемого, которое учитывает члены вплоть до тех, которые пропорциональны  $\Delta t^2$ :

$$\begin{aligned}
 1-p + p \exp(2(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t) &= 1-p + p \left\{ 1 + 2(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\} = \\
 &= 1 + 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 .
 \end{aligned}$$

Тогда для среднего квадрата решения можно записать такое несложное выражение:

$$\langle y^2(n\Delta t) \rangle = y^2(0) \exp(2n\gamma^1 \Delta t) \left\{ 1 + 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\}^n .$$

Для скорости роста данного среднего квадрата мы можем получить следующее:

$$\frac{\langle y^2(n\Delta t) \rangle}{y^2(0)} = \exp(2n\gamma^1 \Delta t) \left\{ 1 + 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\}^n .$$

Вычислим, как и раньше, натуральный логарифм от обеих частей данного соотношения:

$$\begin{aligned}
 \ln \left( \frac{\langle y^2(n\Delta t) \rangle}{y^2(0)} \right) &= 2n\gamma^1 \Delta t + \ln \left\{ 1 + 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\}^n = \\
 &= 2n\gamma^1 \Delta t + n \ln \left\{ 1 + 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\} .
 \end{aligned}$$

Для логарифма от выражения, стоящего в фигурных скобках, мы можем получить следующее:

$$\ln \left\{ 1 + 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\} = 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 .$$

Тогда для логарифма роста данной величины можно получить такую формулу:

$$\begin{aligned}
 \ln \left( \frac{\langle y^2(n\Delta t) \rangle}{y^2(0)} \right) &= 2n\gamma^1 \Delta t + n \left\{ 2p(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 \right\} = \\
 &= 2n\gamma^1 \Delta t + 2np(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + 2np(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2 .
 \end{aligned}$$

Большой интерес для нас будет представлять не средний квадрат, а среднеквадратичное значение функции:

$$\ln \left( \frac{\langle y^2(n\Delta t) \rangle^{1/2}}{y(0)} \right) = n\gamma^1 \Delta t + np(\gamma^0 - \gamma^1) \Delta t + np(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t^2.$$

Введем теперь такой параметр:

$$\beta_2 = p\gamma^0 + (1-p)\gamma^1 + p(\gamma^0 - \gamma^1)^2 \Delta t.$$

Таким образом, среднеквадратичное значение функции будет расти по следующему закону:

$$\langle y^2(t) \rangle^{1/2} = y(0) \exp(\beta_2 t).$$

Сравнивая значения показателей роста, можно отметить, что  $\beta_1 < \beta_2$ . В этом заключается эффект перемежаемости, который сводится к тому, что старшие моменты растут быстрее младших [179] [180]. Это связано с тем, что существуют маловероятные, но достаточно большие решения, которые вносят гораздо больший вклад в среднеквадратичное, нежели в среднее решение. Если мы возьмем большие номера статистических моментов, то можно получить еще большие значения показателя роста. Этот эффект характерен не только для магнитного поля, но и в других подобных задачах [181].

Данные результаты необходимо проверить с помощью методов численного моделирования. Во-первых, необходимо изучить, как будет расти со временем решение для магнитного поля при различных значениях  $p$ , характеризующих интенсивность звездообразования. Типичные результаты представлены на рисунке 3.3.1. Отметим, что ввиду достаточно быстрого роста магнитного поля удобнее использовать логарифмический масштаб [109], который гораздо лучше позволяет исследовать параметры увеличения полей.

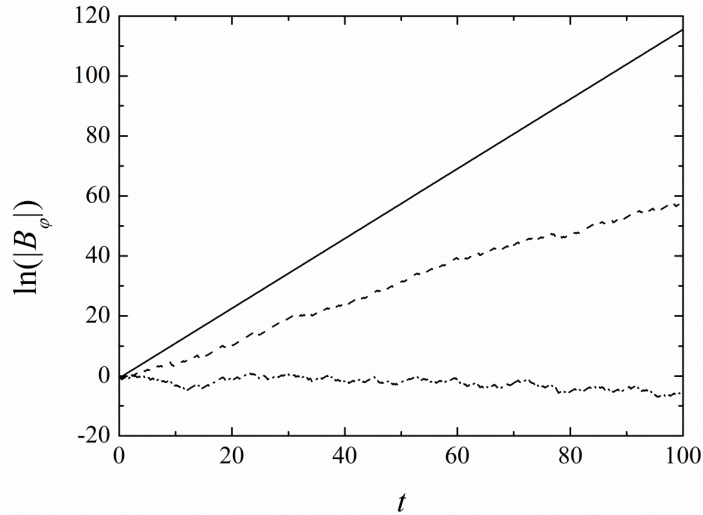


Рис. 3.3.1. Эволюция поля в модели со случайными коэффициентами. Случай  $p = 0$  показан сплошной кривой,  $p = 0.12$  – пунктирной,  $p = 0.25$  – штрихпунктирной.

Можно отметить, что при ряде значений магнитное поле растет, при других поле начинает затухать. Численный расчет показывает, что рост магнитного поля возможен при условии, что  $p < p_{cr}$ , где  $p_{cr}$  – некоторое критическое значение вероятности. В нашем случае оно составляет величину  $p_{cr} \approx 0.17$ .

С точки зрения учета влияния звездообразования это означает, что рост магнитного поля возможен только при звездообразовании низкой интенсивности. При наличии существенных процессов, связанных со звездообразованием, рост поля приостанавливается, крупномасштабные структуры поля разрушаются, и поле восстанавливается только после окончания вспышки. Оценим характерное значение поверхностной плотности звездообразования, при которой поле прекращает расти [109]:

$$\Sigma_{cr} \approx \frac{p_{cr}}{13} = \frac{0.17}{13} = 0.013 \frac{M_{Sun}}{\text{кпк}^2 \text{Г}}.$$

Это значение в несколько раз превышает поверхностную плотность звездообразования в Млечном Пути. Можно отметить, что примерно те же результаты были получены и при изучении поля в объектах с активным звездообразованием с помощью различных параметризаций управляющих параметров динамо.

Отдельного внимания заслуживает также исследование поведения различных статистических моментов решения. Рис. 3.3.2 показывает эволюцию со временем типичной реализации магнитного поля, среднего решения и среднеквадратичного магнитного поля.

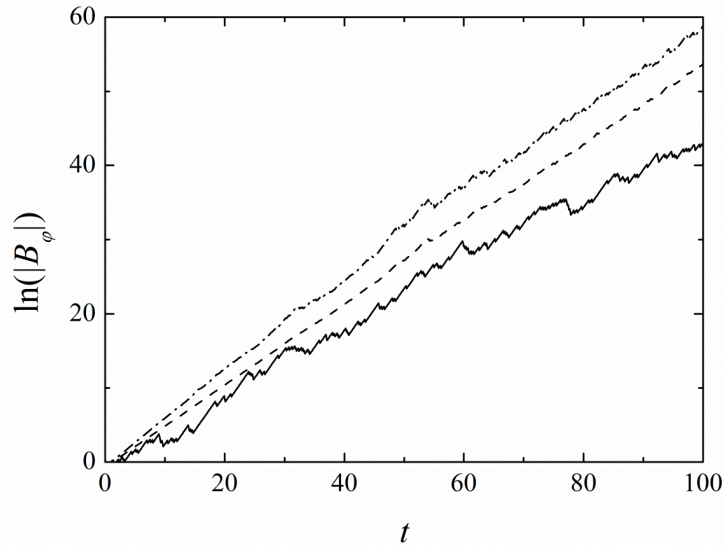


Рис. 3.3.2. Эволюция статистических моментов магнитного поля со временем при  $p = 0.15$ .

Сплошная кривая показывает типичную реализацию, пунктирная – среднее значения, штрихпунктирная – среднеквадратичное.

Можно отметить, что в данном случае действительно наблюдается предсказанный в теоретических оценках эффект перемежаемости, когда старшие моменты решения растут быстрее младших. С физической точки зрения это может означать, что энергия галактического магнитного поля растет быстрее, чем само поле.

#### §4. Магнитные поля аккреционных дисков

Кроме галактических объектов, методы планарного приближения могут быть использованы также в принципиально иных астрофизических задачах. Так, существенное значение в различных областях астрофизики имеют так называемые аккреционные диски [56] [182] [183] [184] [185] [186], окружающие массивные небесные тела, такие как белые карлики, черные дыры, нейтронные звезды и т.д. Еще в первых работах, посвященных их эволюции, говорилось о том, что магнитные поля могут играть важную роль в их эволюции [56] [187] [188] [189], объясняя такие эффекты, как перенос момента количества движения от одних частей диска к другим. Немаловажна также их роль в возникновении так называемых джетов – релятивистских выбросов вещества, тесно связанных с характеристиками магнитных полей как центрального тела, так и аккреционного диска.

В настоящий момент существуют различные подходы, описывающие процесс возникновения магнитных полей в диске. Так, ранее предполагалось, что они связаны с переносом магнитного поля при помощи падающего вещества [190]. Кроме того, можно объяснять генерацию магнитного поля в диске с помощью влияния центрального объекта. Вместе с тем, в настоящий момент есть существенные аргументы, позволяющие объяснить процесс



генерации магнитного поля при помощи действия динамо [5] [191] [192] [193], подобного тому, что присутствует в галактиках. Немаловажно также учесть, что диски имеют принципиально схожую с галактиками форму, и с поправкой на геометрические параметры можно ожидать, что процесс генерации магнитного поля может быть описан с помощью планарного приближения в теории динамо.

Нужно отметить, что в отличие от галактик, угловая скорость вращения аккреционных дисков описывается с помощью кеплеровского закона [194]:

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \sim \frac{1}{r^{3/2}}.$$

В таком случае разумно предполагать, что слагаемое, описывающее действие дифференциального вращения будет также зависеть от расстояния до центрального объекта по аналогичному степенному закону. В таком случае систему уравнений для эволюции магнитного поля можно записать в такой форме (учитывая, что значения параметров соответствуют аккреционным дискам):

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right); \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right). \end{aligned}$$

В качестве начальных условий можно взять следующие:

$$\begin{aligned} B_r|_{t=0} &= 0; \\ B_\varphi|_{t=0} &= B_0 \sin\left(\pi \frac{r-a}{R-a}\right); \end{aligned}$$

где  $a$  – внутренний радиус аккреционного диска. Принципиальную роль играют граничные условия, которые в данном случае предполагались нулевыми. Это соответствует (по крайней мере, в случае внутренней границы) тому факту, что магнитное поле не концентрируется на внутренней границе диска. По сравнению с предшествующими работами [5], использовавшими граничные условия специального вида (так, там предполагалось равенство нулю второй производной для радиальной компоненты поля), это позволило получить магнитное поле, которое заметно ниже уровня равномерного распределения. Результат решения задачи показан на рис. 3.4.1. Можно видеть, что в таком случае энергия магнитного поля примерно вчетверо ниже энергии турбулентных движений. В таком случае его влияние на турбулентность не является критичным, и можно пользоваться моделями кинематического динамо.

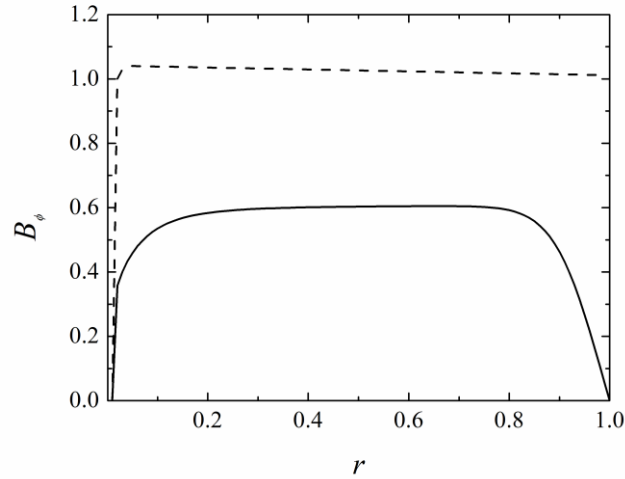


Рис. 3.4.1. Магнитное поле в аккреционном диске при  $t = 10$ . Сплошная линия показывает использованную нами модель [194], пунктирная – данные для граничных условий из [5]

Таким образом, мы показали, что планарное приближение может быть применено не только в случае галактических, но и аккреционных дисков. Можно ожидать, что оно может быть использовано и в других магнитогидродинамических задачах.

В данной главе были изучены различные приложения планарного приближения в теории динамо. К основным выводам можно отнести получение структуры магнитного поля, величина которого ниже уровня равномерного распределения, что стало возможно с учетом правильного выбора граничных условий. Также исследован процесс генерации инверсий галактических магнитных полей. Продемонстрировано, что воздействие звездообразования сводится к разрушению крупномасштабных структур поля, вопреки ожиданиям, согласно которым магнитное поле должно увеличиваться за счет усиления турбулентных движений в межзвездной среде.

Результаты, представленные в настоящей главе, были опубликованы в работах [109] [110] [119] [120] [149] [150] [151] [160] [167] [178] [194]. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад соискателя был основополагающим. Соискатель принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений. При этом, в работах [109], [110] и [167] В.В.Пушкаревым был получен ряд численных решений уравнений, сформулированных соискателем на основе разработанных им модельных представлений для магнитных полей в галактиках и их внешних кольцах. В работе [149] Т.Т.Хасаевой был получен ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных соискателем в рамках разработанных им модельных представлений. В работе [150] Р.Р.Андреасяном и А.Р.Андреасян были представлены данные астрономических наблюдений, полностью подтверждающих результаты, полученные в рамках модели,

сформулированной соискателем, также проводилось общее обсуждение всех основных вопросов. В работе [151] модельные представления о магнитном поле формулировались соискателем совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, А.В.Каспаровой и А.В.Засовым были представлены данные о скоростях среды, использованные автором для построения моделей, Р.Беком составлен обзор наблюдений. В работе [160] модельные представления формулировались соискателем совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, О.К.Сильченко были представлены данные о внешних кольцах галактик, использованные для построения моделей, К.Орелу был представлен обзор наблюдательных перспектив в данной области. В работе [178] общие вопросы, связанные с постановкой задачи, обсуждались соискателем с Д.А.Грачевым, С.А.Елистратову принадлежит ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных соискателем. В работе [194] модельные представления формулировались соискателем совместно с Д.Д.Соколовым, Д.В.Боневой был написан обзор астрономических данных, М.В.Пашенцевой получен ряд численных результатов на основе уравнений, сформулированных соискателем.

## Глава IV. Модель динамо в торе

В настоящей главе изучается вопрос о генерации магнитного поля в торах круговой и прямоугольной формы. С этой целью решается следующая система уравнений (и ее модификации):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_1 z B (1 - B^2) + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_2 \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B.$$

В случае тора круговой формы задача решалась в области

$$\zeta = \sqrt{z^2 + (r-1)^2} < \lambda$$

с использованием следующих граничных условий:

$$B|_{\zeta=\lambda} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\lambda} = 0.$$

Для торов прямоугольной формы задача решалась в области

$$R - a < r < R + a;$$

$$-h < z < h$$

и брались такие граничные условия:

$$B|_{r=1-\lambda} = B|_{r=1+\lambda} = B|_{z=-\frac{\lambda}{k}} = B|_{z=+\frac{\lambda}{k}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial r} \right|_{r=1-\lambda} = \left. \frac{\partial A}{\partial r} \right|_{r=1+\lambda} = \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z=-\frac{\lambda}{k}} = \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z=+\frac{\lambda}{k}} = 0.$$

### §1. Основные уравнения

Планарное приближение показало ряд важных результатов, связанных с исследованием галактического магнетизма и других приложений теории динамо. Вместе с тем, исследование полей во внешних галактических галактик сталкивается с достаточно существенной проблемой, связанной с выходом за пределы применимости модели. Так, одним из принципиальных моментов является то, что полутолщина является достаточно малой величиной по сравнению с радиальными размерами объекта [14]. Если в случае с галактическими и аккреционными дисками это предположение можно считать выполненным (там радиальный размер – это их радиус), то в случае с внешними кольцами речь идет об их полуширине, которая является вполне сравнимой с

вертикальными размерами диска. По этой причине можно предполагать, что исходная модель, связанная с тем, что мы учитываем только старшую моду решения, оказывается не вполне рабочей и нужно использовать другие представления о процессе роста магнитных полей. Это приводит нас к разработке так называемой модели динамо в торе.

Первые работы, связанные с возбуждением магнитного поля в объектах с тороидальной геометрией, были созданы в середине 1990-х годов Дейнцером и другими авторами [15] [50] [195]. К сожалению, хотя они и содержат ряд ценных результатов, в тот момент они оказались не очень востребованными в силу нескольких причин. Во-первых, они использовали тороидальные координаты [196], которые хотя и являются весьма красивыми с математической точки зрения, вряд ли могли вызвать большой интерес у специалистов по наблюдательной астрономии, поскольку имеют не вполне прозрачную взаимосвязь с измеряемыми величинами. Во-вторых, уровень развития вычислительной техники в тот период был довольно слабым, поэтому большинство работ ограничивались лишь аналитическими оценками, которые являются достаточно громоздкими – и также требуют использования тороидальных координат. Наконец, в-третьих (и это можно считать главной причиной) в тот момент не было достаточной информации о внешних кольцах галактик [49], поэтому вопрос о применении соответствующих моделей оставался до конца не выясненным.

В настоящее время, когда стала понятна важность изучения полей во внешних галактических кольцах, вновь возникает интерес к исследованию модели динамо в торе. По этой причине опишем основные подходы, которые возможно использовать в подобном случае.

Ввиду того, что большинство объектов, которые имеют значение с точки зрения астрономии, являются осесимметричными, логично рассматривать поля, которые также обладают подобными свойствами. Если мы используем цилиндрическую систему координат  $r - \varphi - z$ , то удобно выделить азимутальную и полоидальную компоненты магнитного поля.

Это позволяет представить магнитное поле в виде следующей комбинации собственно магнитного поля и ротора от векторного потенциала [15] [50]:

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(\mathbf{Ae}_\varphi),$$

где  $B$  – азимутальная составляющая магнитного поля,  $A$  – азимутальная составляющая векторного потенциала, ротор которой представляет собой полоидальную составляющую магнитного поля. Отметим, что в силу физических соображений полоидальная составляющая магнитного поля заметно меньше, чем тороидальная [51] [52]:

$$|B| \gg |\text{rot}(\mathbf{Ae}_\varphi)|.$$

Данный факт можно использовать в дальнейшем при анализе уравнений и их решений.

Точно так же, как и говорилось ранее, можно описать эволюцию крупномасштабного магнитного поля при помощи уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера. Предполагая, что коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, зависит только от расстояния до экваториальной плоскости [51]:

$$\alpha = \alpha(z),$$

уравнение можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right) = \text{rot} \left( \alpha(z) \left( B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right) \right) + \text{rot} \left[ \mathbf{V}, B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right] + \eta \Delta \left( B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right).$$

Учитывая, что операция дифференцирования поля по времени и операция взятия ротора являются линейными, мы можем поменять их в левой части уравнения местами:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right) = \frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi \right).$$

Что касается первого слагаемого в правой части, то учитывая рассуждения о соотношении между тороидальной и полоидальной составляющих магнитного поля, сделанные выше, можно приблизительно переписать его в следующем формате [51]:

$$\text{rot} \left( \alpha(z) \left( B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right) \right) = \text{rot} \left( \alpha(z) B \mathbf{e}_\varphi \right).$$

Крупномасштабная скорость связана с вращением объекта вокруг своей оси, поэтому для нее можно считать, что  $\mathbf{V} = r \Omega \mathbf{e}_\varphi$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения, зависящая от расстояния.

Рассмотрим теперь ротор тороидальной компоненты векторного потенциала магнитного поля. Его нетрудно вычислить с помощью следующего символического определителя:

$$\text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rA) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \mathbf{e}_z$$

Запишем теперь векторное произведение, которое стоит во втором слагаемом в правой части:

$$\left[ \mathbf{V}, B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( A \mathbf{e}_\varphi \right) \right] = \left[ r \Omega \mathbf{e}_\varphi, -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rA) \mathbf{e}_r + B \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \mathbf{e}_z \right].$$

С помощью аналогичного символического определителя это выражение можно представить так:

$$\left[ \mathbf{V}, B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi) \right] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ 0 & r\Omega & 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(rA) & B & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA) \end{vmatrix} = \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rA)\mathbf{e}_r + \Omega \frac{\partial}{\partial z}(rA)\mathbf{e}_z.$$

Вычислим ротор от данной величины:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[ \mathbf{V}, B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi) \right] &= \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rA) & 0 & \Omega \frac{\partial}{\partial z}(rA) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial z}(rA) \right) \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rA) \right) \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial z}(rA) \right) \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rA) \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Учитывая, что задача является осесимметричной, а производная по азимутальному углу равна нулю, данное выражение для ротора может быть переписано:

$$\text{rot} \left[ \mathbf{V}, B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rA) \right) \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial z}(rA) \right) \mathbf{e}_\varphi.$$

Учитывая, что угловая скорость вращения объекта зависит только от расстояния до оси вращения, данную формулу можно раскрыть следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[ \mathbf{V}, B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi) \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rA) \right) \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial z}(rA) \right) \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega A + \Omega r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega r \frac{\partial A}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \Omega \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \Omega r \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial z} \mathbf{e}_\varphi - \frac{d\Omega}{dr} r \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi - \Omega \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi - \Omega r \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial z} \mathbf{e}_\varphi = -r \frac{d\Omega}{dr} \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Для слагаемого, содержащего лапласиан магнитного поля можно записать такое несложное соотношение, учитывая что как оператор Лапласа, так и ротор являются линейными операторами:

$$\eta \Delta \left( B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi) \right) = \eta \Delta B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(\eta \Delta A \mathbf{e}_\varphi).$$

Уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера [10] для эволюции крупномасштабного магнитного поля можно переписать с помощью следующих комбинаций:

$$\frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi + \text{rot} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi \right) = \text{rot}(\alpha(z) B \mathbf{e}_\varphi) - r \frac{d\Omega}{dr} \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \eta \Delta B \mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(\eta \Delta A \mathbf{e}_\varphi).$$

Отметим, что как в левой, так и в правой части содержатся слагаемые, соответствующие  $\mathbf{e}_\varphi$ . Выделим их в отдельное уравнение:

$$\frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi = -r \frac{d\Omega}{dr} \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \eta \Delta B \mathbf{e}_\varphi.$$

Из векторного равенства вытекает скалярное уравнение:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -r \frac{d\Omega}{dr} \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \Delta B.$$

Оставшиеся слагаемые в уравнении Штеенбека – Краузе – Рэдлера выглядят так:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi \right) = \operatorname{rot} (\alpha(z) B \mathbf{e}_\varphi) + \operatorname{rot} (\eta \Delta A \mathbf{e}_\varphi).$$

Сняв операцию ротора, мы можем получить (отметим, что результат определен с точностью до градиента, однако это полностью соответствует произволу при определении векторного потенциала магнитного поля, зависящего от его калибровки):

$$\frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi = \alpha(z) B \mathbf{e}_\varphi + \eta \Delta A \mathbf{e}_\varphi.$$

Это, в свою очередь, приводит к скалярному соотношению:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha(z) B + \eta \Delta A.$$

Сделаем несколько упрощений. Так, угловая скорость вращения объекта может быть приближенно выражена следующим образом [15]:

$$\Omega(r) = \Omega_0 + \omega(r - R),$$

где  $R$  – некоторое расстояние до оси вращения объекта (например, «большой» радиус тора), а коэффициент во втором слагаемом определяется как производная угловой скорости по расстоянию:

$$\omega = \left. \frac{d\Omega}{dr} \right|_{r=R}.$$

Кроме того, можно считать, что зависимость альфа-эффекта от расстояния до экваториальной плоскости можно также определить с помощью линейной формулы:

$$\alpha(z) = \alpha(0) + \alpha'(0)z.$$

Учитывая, что альфа-эффект в экваториальной плоскости обращается в нуль, можно считать, что

$$\alpha(z) = \alpha'(0)z.$$

Удобно ввести некоторое характерное значение альфа-эффекта, например, которое соответствует полутолщине диска (или внешнего кольца, если мы говорим именно о таких объектах):

$$\alpha_0 = \alpha'(0)h.$$

Это означает, что альфа-эффект оказывается представим с помощью линейной формулы:



$$\alpha = \alpha_0 \frac{z}{h}.$$

В таком случае система уравнений для эволюции азимутального магнитного поля и азимутальной составляющей его векторного потенциала будет выглядеть так [52]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha_0 \frac{z}{h} B + \eta \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -r\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \Delta B. \end{aligned}$$

Кроме того, важно учитывать, что, также как и в предыдущих моделях для магнитного поля, нельзя говорить о том, что рост магнитного поля может быть бесконечен. Поскольку он связан с переходом энергии турбулентных движений в энергию магнитного поля, то величина поля будет ограничена сверху уровнем равнораспределения [47]  $B^* = 2v\sqrt{\pi\rho}$ , где  $v$  – характерная скорость турбулентных движений,  $\rho$  – плотность проводящей среды (например, межзвездного газа). При приближении магнитного поля к данному уровню его рост должен замедляться, и в какой-то момент это прекращается вовсе.

В таком случае процесс насыщения генерации магнитного поля может быть описан при помощи нелинейной модификации системы уравнений [51]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha_0 \frac{z}{h} B \left( 1 - \frac{B^2}{B^{*2}} \right) + \eta \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -r\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \Delta B. \end{aligned}$$

Отметим, что первое из уравнений содержит лишь азимутальную компоненту магнитного поля. Конечно, можно было бы учесть в знаменателе нелинейного слагаемого также величину

$$\left| \text{rot}(\mathbf{Ae}_\varphi) \right|^2 = \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial z}(rA) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial r}(rA) \right)^2 \right),$$

описывающую тороидальную составляющую

магнитного поля. Тем не менее, выше было сказано, что эта часть поля заметно меньше азимутальной. Поэтому вполне допустимо ограничиваться лишь нелинейностью, связанной с главной частью поля.

Данная система уравнений (в линейном или нелинейном случае) описывает эволюцию компонент магнитного поля в различных случаях. Отметим, что пока мы не останавливались на конкретных примерах объектов (основная часть галактики, внешнее кольцо или что-то иное). Другие характеристики модели – такие, как способ обезразмеривания, граничные условия и т.д. – будут зависеть от того, о чем именно мы говорим. Поэтому в дальнейшем планируется

сформулировать представления о магнитных полях в конкретных небесных телах и сделать оценку возможности их роста с помощью методов численного моделирования.

## §2. Магнитное поле в торе кругового сечения

В случае внешних колец галактик особую роль играют объекты, имеющие круговое сечение (рис. 4.2.1) [51] [52]. В таком случае  $h = a$ , и альфа-эффект выражается таким способом:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{z}{a}.$$

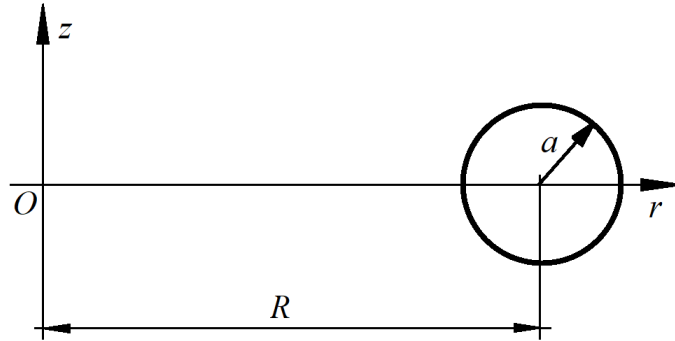


Рис. 4.2.1. Тор кругового сечения

Кроме того, расстояние до оси вращения меняется не очень значительно (учитывая, что  $a \ll R$ ), поэтому можно предполагать, что в пределах нашего исследования  $r \approx R$ .

Для данной задачи удобно обезразмерить переменные следующим образом. Будем измерять расстояния в единицах «большого» радиуса  $R$ , а времена – в единицах  $\frac{a^2}{\eta}$ , связанных с «малым» радиусом [51]:

$$\frac{\eta}{a^2} \frac{\partial A}{\partial t} = R\alpha_0 \frac{z}{a} B + \eta \frac{1}{R^2} \Delta A;$$

$$\frac{\eta}{a^2} \frac{\partial B}{\partial t} = -R^2 \omega \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \frac{1}{R^2} \Delta B.$$

Домножим обе части на  $\frac{a^2}{\eta}$ , тогда уравнения преобразовываются к такой форме:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = Ra\alpha_0 \frac{z}{\eta} B + \frac{a^2}{R^2} \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -R^2 \frac{a^2}{\eta} \omega \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{a^2}{R^2} \Delta B.$$

По аналогии с другими моделями для магнитного поля безразмерные параметры, описывающие эволюцию магнитного поля, описывающие соответственно альфа-эффект, дифференциальное вращение и соотношение между радиусами кругового тора [51]:

$$R_1 = \frac{Ra\alpha_0}{\eta};$$

$$R_2 = -\frac{R^2 a^2 \omega}{\eta};$$

$$\lambda = \frac{a}{R}.$$

В таком случае эволюционные уравнения для магнитного поля переписутся в таком виде [51]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_1 z B + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_2 \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B.$$

Если мы говорим о нелинейной модификации уравнений, то разумно измерять их в единицах поля равномерного распределения  $B^*$ . В таком случае уравнения будут такими:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_1 z B (1 - B^2) + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_2 \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B.$$

С математической точки зрения представленная система уравнений – как линейная, так и нелинейная – может решаться в области (обратим внимание на то, что при использовании безразмерных переменных «малый» радиус нашего тора соответствует тому же малому параметру, который фигурирует в решаемых уравнениях) [52]:

$$\zeta = \sqrt{z^2 + (r-1)^2} < \lambda.$$

На границе в таком случае возможно поставить следующие условия для азимутальной составляющей магнитного поля и для азимутальной компоненты ее векторного потенциала (это означает, что все составляющие магнитного поля будут принимать нулевые значения на внешней границе тора):

$$B|_{\zeta=\lambda} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\lambda} = 0.$$

Что касается начальных условий, то многое зависит от того, какую конфигурацию магнитного поля с точки зрения симметрии мы имеем намерение получить. Это будет определять характер магнитного поля, которое будет в нулевой момент времени.

Если мы хотим получить решение в виде квадрупольного магнитного поля (симметричное относительно экваториальной плоскости – именно такие решения чаще всего рассматриваются в случае основной части галактики), определяемого соотношением:

$$B(z) = B(-z),$$

то начальные значения магнитного поля и его векторного потенциала будут таковы:

$$B|_{t=0} = B_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2\lambda}\right);$$

$$A|_{t=0} = 0;$$

где  $B_0$  – амплитуда начального магнитного поля, которое можно для удобства брать таким:

$$B_0 = 0.01.$$

В случае, когда нас интересует дипольное магнитное поле (являющееся ассиметричным относительно экваториальной плоскости – подобные решения могут представлять определенный интерес с точки зрения внешних колец), задаваемое соотношением:

$$B(z) = -B(-z),$$

то можно брать такое начальное магнитное поле:

$$B|_{t=0} = B_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2\lambda}\right);$$

$$A|_{t=0} = 0.$$

В качестве амплитудного значения для магнитного поля мы можем брать то же значение, что и выше.

Если мы говорим о параметре, который стоит при лапласиане, то для внешних колец галактик мы можем учесть, что характерный «большой» радиус обычно составляет величину  $R = 10$  кпк, а «малый» часто можно оценить как  $a = 1$  кпк. Поэтому для соответствующего коэффициента получается следующая оценка:

$$\lambda = 0.1.$$

Так же, как в случае планарного приближения из коэффициентов, описывающих альфа-эффект и дифференциальное вращение, можно было сконструировать динамо-число, описывающее возможность генерации магнитного поля, можно сделать и в случае данной задачи. Принципиальный характер роста магнитного поля будет описываться при помощи следующей комбинации [51]:

$$Q = R_1 R_2.$$

Отметим, что чем большее ее значение, тем «легче» сгенерировать магнитное поле. Поэтому можно ожидать, что точно также возникают некоторые критические значения для данного параметра, описывающие принципиальные свойства магнитного поля.

Проведем для начала качественный анализ возможности роста магнитного поля при положительных значениях данного параметра. Характерное значение произведения тороидальной составляющей магнитного поля на вертикальную координату можно по порядку величины оценить так [52]:

$$zB \sim \frac{\lambda B}{2}.$$

Если мы говорим о тороидальной составляющей векторного потенциала, то в рамках используемых безразмерных переменных ее характерный масштаб изменения представляет величину  $\lambda$ . В таком случае ее производная по расстоянию до экваториальной плоскости может быть приближенно заменена на выражение:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \sim \frac{A}{\lambda}.$$

Что касается оператора Лапласа, то, учитывая что его основные составляющие связаны с частными производными второго порядка, то можно приближенно переписать его так:

$$\Delta A \approx \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2};$$
$$\Delta B \approx \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}.$$

Учитывая характерные масштабы изменения магнитного поля и его векторного потенциала по каждой из независимых переменных (отметим, что в данном случае они совпадают), для производных в таком случае можно записать выражения (здесь допустимо воспользоваться аналогией с тем, что было в случае планарного приближения в галактическом динамо [48]):

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \approx -\frac{\pi^2 A}{4\lambda^2};$$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \approx -\frac{\pi^2 A}{4\lambda^2};$$
$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \approx -\frac{\pi^2 B}{4\lambda^2};$$
$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \approx -\frac{\pi^2 B}{4\lambda^2}.$$

В таком случае оператор Лапласа для каждой из функций запишется с учетом выдвинутых предположений так:

$$\Delta A = -\frac{\pi^2 A}{2\lambda^2};$$

$$\Delta B = -\frac{\pi^2 B}{2\lambda^2}.$$

Тогда уравнения для эволюции поля и потенциала можно приближенно переписать так:

$$\frac{dA}{dt} = R_1 \frac{\lambda B}{2} - \frac{\pi^2}{2} A;$$

$$\frac{dB}{dt} = R_2 \frac{A}{\lambda} - \frac{\pi^2}{2} B.$$

Будем искать зависимость наших функций от времени в экспоненциальной форме:

$$A(t) = A_0 \exp(\gamma t);$$

$$B(t) = B_0 \exp(\gamma t).$$

В таком случае система уравнений сведется к алгебраическим:

$$\gamma A_0 \exp(\gamma t) = R_1 \frac{\lambda}{2} B_0 \exp(\gamma t) - \frac{\pi^2}{2} A_0 \exp(\gamma t);$$

$$\gamma B_0 \exp(\gamma t) = \frac{R_2}{\lambda} A_0 \exp(\gamma t) - \frac{\pi^2}{2} B_0 \exp(\gamma t);$$

или, после небольших упрощений,

$$\left(-\gamma - \frac{\pi^2}{2}\right) A_0 + R_1 \frac{\lambda}{2} B_0 = 0;$$

$$\frac{R_2}{\lambda} A_0 + \left(-\gamma - \frac{\pi^2}{2}\right) B_0 \exp(\gamma t) = 0.$$

Условие разрешимости данной системы линейных уравнений состоит в следующем [112]:

$$\det \begin{pmatrix} -\gamma - \frac{\pi^2}{2} & R_1 \frac{\lambda}{2} \\ \frac{R_2}{\lambda} & -\gamma - \frac{\pi^2}{2} \end{pmatrix} = \left(\gamma + \frac{\pi^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} R_1 R_2 = \left(\gamma + \frac{\pi^2}{2}\right)^2 - \frac{Q}{2} = 0;$$

Тогда для скорости роста магнитного поля можно будет получить, что:

$$\left(\gamma + \frac{\pi^2}{2}\right)^2 = \frac{Q}{2}.$$

Учитывая знак величины  $Q$ , мы можем извлечь квадратный корень из обеих частей:

$$\gamma + \frac{\pi^2}{2} = \pm \sqrt{\frac{Q}{2}};$$

$$\gamma = -\frac{\pi^2}{2} \pm \sqrt{\frac{Q}{2}}.$$

Значения, соответствующие знаку «минус», в любом случае будут отрицательными. В то же время, при знаке «плюс» положительное значение показателя роста достигается при

$$-\frac{\pi^2}{2} + \sqrt{\frac{Q}{2}} > 0;$$

$$\sqrt{\frac{Q}{2}} > \frac{\pi^2}{2}.$$

Возведем обе части в квадрат, умножим на 2, и получим условие генерации:

$$Q > \frac{\pi^4}{2}.$$

Таким образом, возможность генерации поля описывается формулой:

$$Q > Q_{cr};$$

где

$$Q_{cr} \approx 48.$$

В свою очередь, численное моделирование демонстрирует, что магнитное поле затухает при значениях

$$Q_{1-} < Q < Q_{1+}.$$

Рост квадрупольной составляющей возможен при

$$Q_{1+} < Q < Q_{2+}$$

и при

$$Q_{2-} < Q < Q_{1-}.$$

Наконец, рост дипольной составляющей магнитного поля может происходить при условиях:

$$Q > Q_{2+}$$

или

$$Q < Q_{2-}.$$

Для значений данного параметра с помощью численного анализа были вычислены следующие значения [51]:

$$Q_{1+} \approx 42;$$

$$Q_{2+} \approx 1190;$$

$$Q_{1-} \approx -1056;$$

$$Q_{2-} \approx -1857.$$

Вычислительный эксперимент убедительно показывает [51], что конкретные значения управляющих параметров ( $R_1$ , отвечающий за альфа-эффект, и  $R_2$ , характеризующий дифференциальное вращение) слабо влияют на характер эволюции магнитного поля и возможность его роста. Они оказывают влияние только на соотношение между тороидальным и полоидальным магнитным полем, тем не менее основной результат сохраняется прежним. Отметим, что указанные значения относятся лишь к случаю линеаризованных уравнений для магнитного поля, в то время как учет нелинейного насыщения с очевидностью делает условия для возможности генерации магнитного поля более жесткими.

В свою очередь, параметр  $\lambda$  описывает процесс диссипации магнитного поля. На первый взгляд может показаться, что его влияние на критические значения параметра  $Q$  примерно та же, что и было описано в случае планарного приближения. Тем не менее, важно заметить, что характерный линейный масштаб изменения как магнитного поля, так и его векторного потенциала связан с размерами внешнего кольца (или другого объекта, описываемого с помощью тороидальной формы), которые в безразмерных переменных также пропорциональны  $\lambda$ . Оператор Лапласа обратно пропорционален его квадрату, поэтому его изменение слабо влияет на характерные значения параметров.

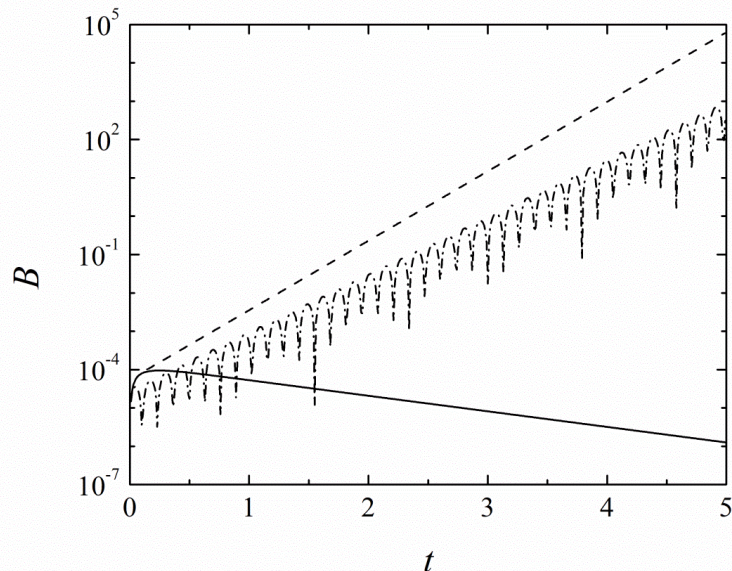


Рис. 4.2.2. Эволюция вектор-потенциала поля от времени при  $R_1 = 5$  для линеаризованной модели. Случай  $R_2 = 5$  показан сплошной линией,  $R_2 = 40$  – пунктирной,  $R_2 = 300$  – штрихпунктирной.



Результат моделирования векторного потенциала магнитного поля представлен на рис.4.2.2, а тороидальная компонента поля показана на рис. 4.2.3. На них показано значение магнитного поля в точке с координатами  $r=1$  и  $z=\frac{\lambda}{2}$ . Поле в данной точке неплохо характеризует поведение решения уравнения в целом. Отметим, что там продемонстрированы три различных значения параметра, от которого зависит процесс генерации магнитного поля:  $Q=25$ , при котором происходит затухание поля,  $Q=200$ , соответствующее росту квадрупольной составляющей, и  $Q=1500$ , которое описывает рост магнитного поля дипольной симметрии.

Можно отметить, что если мы говорим о росте квадрупольного поля, то происходит его монотонный рост (также ведет себя и его векторный потенциал). В то же время, дипольная составляющая магнитного поля демонстрирует экспоненциальный рост, наложенный на колебания поля.

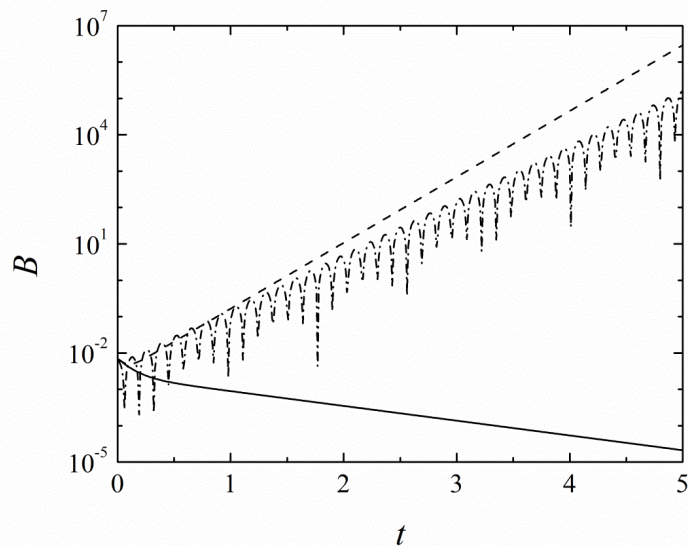


Рис. 4.2.3. Эволюция тороидального поля при  $R_1 = 5$  для линеаризованной модели. Случай  $R_2 = 5$  показан сплошной линией,  $R_2 = 40$  – пунктирной,  $R_2 = 300$  – штрихпунктирной.

Отдельного внимания заслуживает исследование магнитного поля в нелинейном случае, когда учитывается насыщение его роста. В таком случае магнитное поле выходит на значение порядка единицы, а его векторный потенциал принимает значение на уровне  $\lambda$ . В таком случае полоидальная компонента поля также принимает величину порядка единицы. Это согласуется с тем, что тороидальная составляющая векторного потенциала имеет порядок  $10^{-1}$ , что и демонстрируют результаты вычислительного эксперимента.

Можно видеть, что в случае поля квадрупольной симметрии магнитное поле совершает затухающие колебания около своего стабильного значения. Со временем компоненты поля

начинают принимать значения, все более приближающиеся к постоянным величинам, определяемые тем, как именно происходит процесс насыщения в рассматриваемой нами в настоящей главе модели динамо. То же самое можно сказать и о поведении исследуемой нами компоненты векторного потенциала. Это позволяет нам судить о том, что соответствующее стационарное решение является устойчивым фокусом.

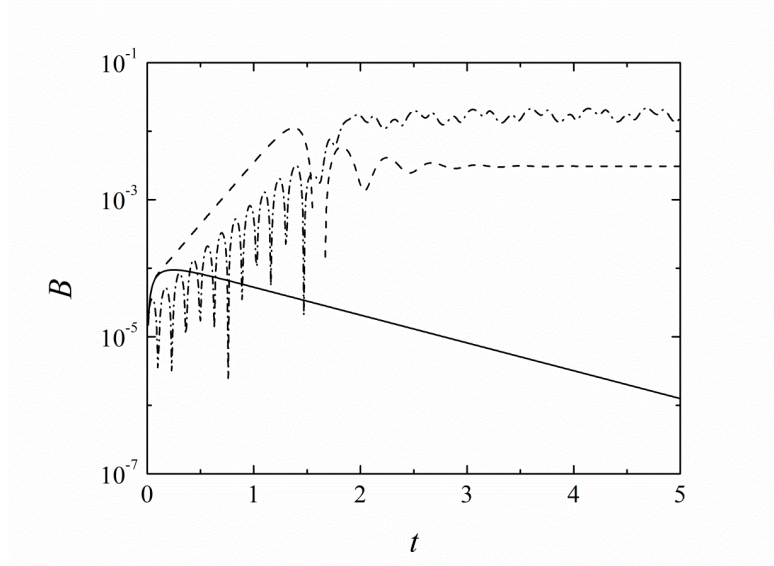


Рис. 4.2.4. Эволюция тороидальной составляющей вектор-потенциала поля от времени при  $R_1 = 5$  в нелинейном случае. Случай  $R_2 = 5$  показан сплошной линией,  $R_2 = 40$  – пунктирной,  $R_2 = 300$  – штрихпунктирной.

В то же время, когда речь идет о поле дипольной симметрии, оно продолжает совершать колебания, амплитуда которых ограничена уровнем равномерного распределения в случае самого поля (единицей) и уровнем распределения, умноженным на малый параметр (около одной десятой). Это дает нам возможность предполагать, что в таком случае соответствующее стабильное решение представляет собой центр.

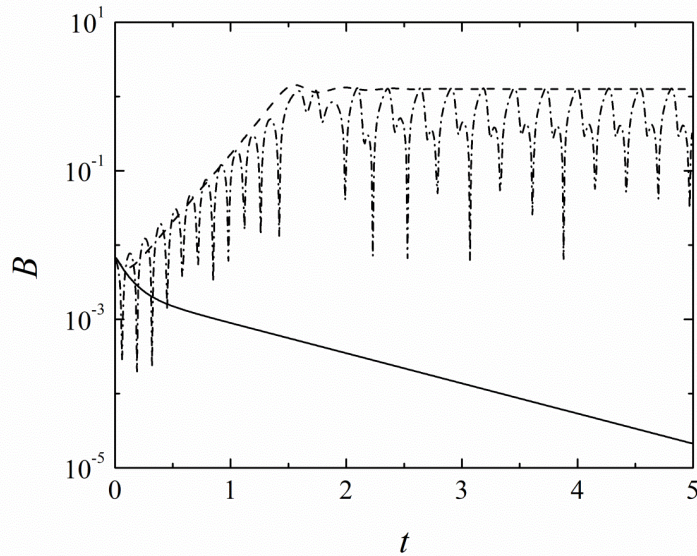


Рис. 4.2.5. Эволюция тороидального поля при  $R_1 = 5$  в нелинейном случае. Случай  $R_2 = 5$  показан сплошной линией,  $R_2 = 40$  – пунктирной,  $R_2 = 300$  – штрихпунктирной.

Нам важны не только эволюция поля и его вектор-потенциала, но и их характерная пространственная структура в случае того или иного типа симметрии, который наблюдается при используемых нами значениях параметров. Это позволяет понимать, как именно компоненты магнитного поля будут зависеть от времени.

Рис. 4.2.6 и 4.2.7 показывают зависимость магнитное поле в зависимости от координат в квадрупольном случае. Данные графики соответствуют параметрам магнитного поля при  $Q = 50$  (конкретные управляющие коэффициенты принимают значения  $R_1 = 5$  и  $R_2 = 10$ ), относящимся к моменту времени  $t = 1$ . Отметим, что в таком случае используется модель с учетом нелинейного насыщения роста поля, хотя это и не принципиально (к тому моменту поле еще не успевает выйти на стационарный уровень). Если тороидальная компонента поля может быть определена непосредственно из решения уравнения, то для вычисления полоидальной составляющей магнитного поля (которая представлена с помощью символических стрелок) используются выражения, стандартные для определения ротора вектора, имеющего только тороидальную компоненту.

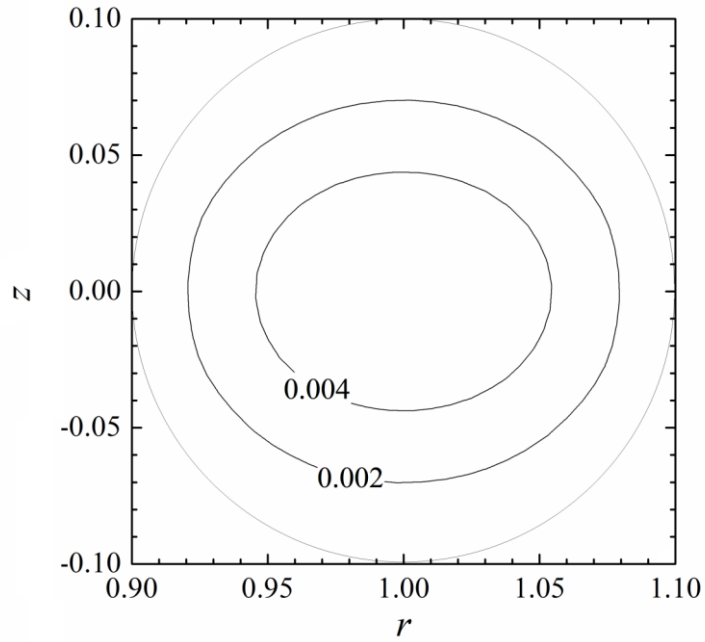


Рис. 4.2.6. Пространственная структура тороидального магнитного поля в случае квадрупольной симметрии

Можно видеть [51], что тороидальная часть поля действительно имеет только один максимум, сосредоточенный в экваториальной плоскости, плавно уменьшаясь к краям. Что касается полоидального поля, то оно также принимает максимальные значения в этой же плоскости, а линии магнитного поля приближаются к ней в центре круга и удаляются по мере увеличения расстояния от него. Данная картина является достаточно интересной и качественно отличается от результатов, которые могут быть получены в рамках планарного приближения, описывающего пространственную структуру магнитного поля наиболее простым и достаточно наивным с точки зрения исследования магнетизма таких объектов способом [52].

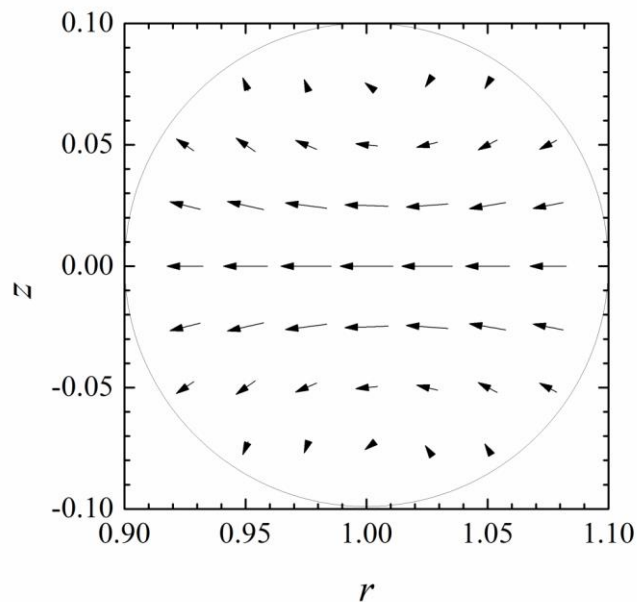


Рис. 4.2.7. Полоидальная составляющая магнитного поля в случае квадрупольной симметрии

Также представляет интерес изучение магнитного поля в том случае, когда оно описывается структурами дипольной симметрии. Рис. 4.2.8 и 4.2.9 показывают магнитное поле в случае  $Q=1200$ , который соответствует значениям управляющих коэффициентов  $R_1 = 5$  и  $R_2 = 240$ . Хотя, надо признать, что такие величины параметров и кажутся неоправданно большими с астрофизической точки зрения, важно понять, как именно магнитное поле может зависеть от координат в данной ситуации – вполне возможно, что существуют объекты, для которых они будут вполне реалистичными.

Тороидальное магнитное поле в таком случае показывает два явных экстремума (минимум и максимум), расположенных симметрично относительно экваториальной плоскости. Можно отметить, что в верхней части объекта поле направлено против часовой стрелки, а в нижней – по часовой.

Что касается полоидального магнитного поля, то его векторы (полученные с помощью дифференцирования численного решения для тороидальной составляющей векторного потенциала) показаны на рис. 4.2.9. Можно отметить, что линии поля в таком случае будут демонстрировать замкнутые траектории, закрученные в верхней части в одну сторону, а в нижней – в другую.

Это вполне соответствует тому, что ожидается получить в случае поля дипольной симметрии. Важно указать, что подобные результаты принципиально невозможно было бы получить, если бы мы пользовались только планарным приближением. Все это говорит о важности как применения предложенной нами модели для внешних колец, имеющих круговую форму, так и ее развития на более сложные небесные объекты – начиная от колец другого типа и заканчивая толстыми галактиками.

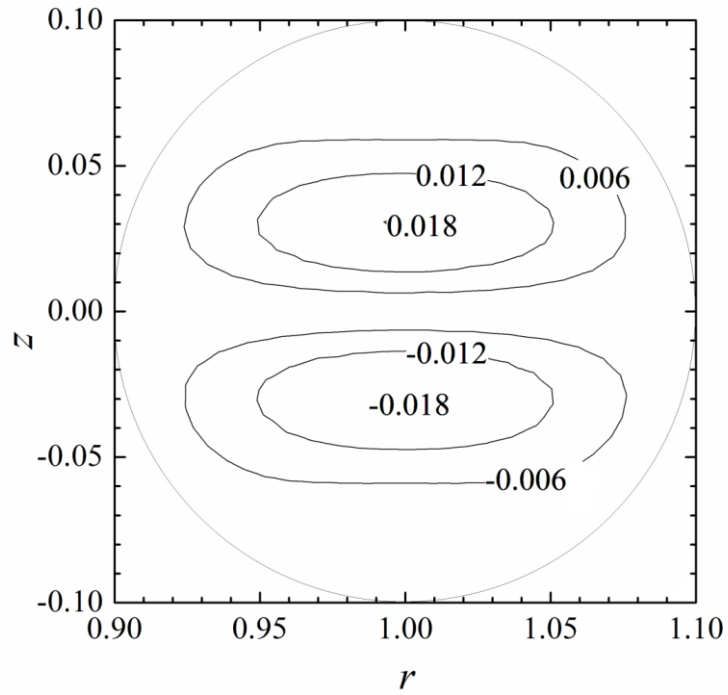


Рис. 4.2.8. Тороидальная компонента магнитного поля в случае дипольной симметрии.

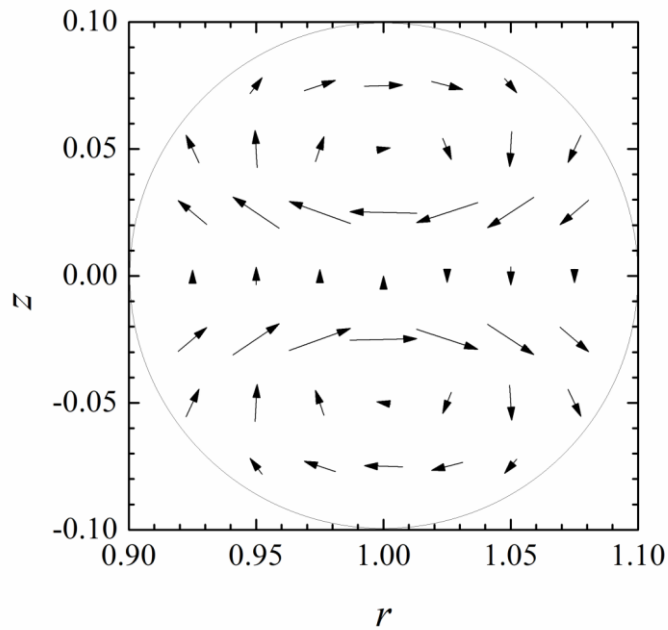


Рис. 4.2.9. Полоидальная составляющая магнитного поля в случае дипольной симметрии

### §3. Динамо в прямоугольном торе

Отдельного внимания заслуживает также изучение действия динамо в прямоугольном торе [53]. Оно соответствует следующему диапазону значений (см. рис. 3.2.3):

$$R - a < r < R + a;$$

$$-h < z < h.$$

Что касается системы уравнений, то с принципиальной точки зрения она будет такой же, как и в предыдущем случае. Вместе с тем, управляющие параметры динамо в такой ситуации заслуживают отдельного обсуждения.

Для коэффициента, характеризующего альфа-эффект, можно записать такую формулу:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{z}{h}.$$

Параметр  $\alpha_0$ , описывающий характерное значение альфа-эффекта, можно приблизить с помощью такого выражения:

$$\alpha_0 = \frac{\Omega l^2}{h},$$

где  $\Omega$  – скорость вращения, а  $l$  – типичный размер турбулентной ячейки.

Кроме того, будем предполагать, что для скорости вращения объекта вокруг своей оси выполнено такое условие:

$$\frac{d\Omega}{dr} \approx -\frac{\Omega}{r};$$

т.е. можно осуществить в уравнениях замену  $r \frac{d\Omega}{dr} \approx -\Omega$ , поэтому уравнения можно переписать в таком виде [53]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\Omega l^2}{h} \frac{z}{h} B + \eta \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \Omega \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \Delta B. \end{aligned}$$

Теперь домножим обе части имеющихся у нас уравнений на величину  $\frac{a^2}{\eta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\eta} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\Omega l^2 a^2}{\eta h^2} z B + a^2 \Delta A; \\ \frac{a^2}{\eta} \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\Omega a^2}{\eta} \frac{\partial A}{\partial z} + a^2 \Delta B. \end{aligned}$$

В качестве единицы измерения для расстояния можно точно также использовать значение  $R$ , а для времени использовать единицу  $\frac{a^2}{\eta}$ , связанную с полушириной диска. Отметим, что тогда единица измерения для магнитного поля и для его векторного потенциала будет отличаться в  $R$  раз. Тогда с использованием таких единиц уравнения преобразуются к следующей форме [53]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = S_{\alpha} z B + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = S_{\omega} \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B;$$

где введены такие безразмерные переменные:

$$S_{\alpha} = \frac{\Omega l^2 a^2}{\eta h^2}$$

- характеризует действие альфа-эффекта;

$$S_{\omega} = \frac{\Omega a^2}{\eta}$$

– описывает дифференциальное вращение. В свою очередь, коэффициент  $\lambda = \frac{a}{R}$  по смыслу близок к тому, что было раньше и показывает действие турбулентной диффузии.

Для удобства можно ввести также параметр, который характеризует соотношение между шириной и толщиной прямоугольного тора:

$$k = \frac{a}{h}.$$

В таком случае исследуемая нами область в рамках новых безразмерных переменных приведет к виду:

$$1 - \lambda < r < 1 + \lambda;$$

$$-\frac{\lambda}{k} < z < \frac{\lambda}{k}.$$

Граничные условия, с поправкой на новую геометрическую конфигурацию данной области, несколько видоизменятся. Для тороидальной компоненты магнитного поля и соответствующей компоненты его векторного потенциала можно записать такие выражения:

$$B|_{r=1-\lambda} = B|_{r=1+\lambda} = B|_{z=-\frac{\lambda}{k}} = B|_{z=+\frac{\lambda}{k}} = 0;$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}|_{r=1-\lambda} = \frac{\partial A}{\partial r}|_{r=1+\lambda} = \frac{\partial A}{\partial z}|_{z=-\frac{\lambda}{k}} = \frac{\partial A}{\partial z}|_{z=+\frac{\lambda}{k}} = 0.$$

Можно предполагать, что возможность генерации магнитного поля теперь описывается с помощью такого параметра:

$$Q = S_{\alpha} S_{\omega} = \frac{\Omega^2 l^2 a^4}{\eta^2 h^2}.$$



Можно ожидать, что критические значения для данных параметров будут существенно зависеть от соотношения между сторонами тора. С этой целью необходимо провести вычислительный анализ решений [53], которые встречаются в задаче.

Отметим, что в данном случае начальные условия будут существенно зависеть от того, какое именно решение мы хотим получить. В том случае, если мы предполагаем наличие решения, обладающего квадрупольной симметрией, когда поле описывается выражением

$$B(z) = B(-z)$$

можно взять такие начальные распределения для тороидальной компоненты поля и соответствующей части его векторного потенциала:

$$A|_{t=0} = 0;$$

$$B|_{t=0} = B_0 \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2\lambda}\right).$$

В том же случае, когда мы ожидаем возникновения поля дипольной симметрии

$$B(z) = -B(-z);$$

используются начальные условия другого типа:

$$A|_{t=0} = 0;$$

$$B|_{t=0} = B_0 \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{\lambda}\right).$$

Результаты численного моделирования показывают, что генерация магнитного поля при  $k=1$  (тор квадратного сечения) возможна при значении  $Q > 32$ . При увеличении соотношения между сторонами данное значение начинает заметно возрастать: при  $k=2$  поле имеет возможность возрастать только при  $Q > 277$ , а при  $k=3$  его генерация оказывается допустимой лишь при  $Q > 1199$ . Все это может означать, что при различных соотношениях между сторонами сечения тора диссипация магнитного поля в радиальном и вертикальном направлениях происходит принципиально по-разному [53].

Изучим эволюцию магнитного поля в различных случаях. Зависимость магнитного поля для тора квадратного сечения ( $k=1$ ) показана на рис. 4.3.1. Можно видеть, что при небольшом значении  $Q = 25$ , которое не превышает критического значения, наблюдается лишь затухание поля. При умеренном значении  $Q = 200$  поле демонстрирует рост, причем изучение пространственной структуры численного решения говорит о том, что оно может обладать лишь квадрупольной симметрией. Наконец, использование достаточно большого значения  $Q = 1000$  показывает немонотонность роста магнитного поля. Также как и в случае тора круглого сечения, это свидетельствует о возможности роста магнитного поля дипольной симметрии.

Действительно, подстановка начальных условий второго типа демонстрирует устойчивый рост дипольной составляющей поля, хотя и с несколько меньшей скоростью, чем квадрупольной компоненты.

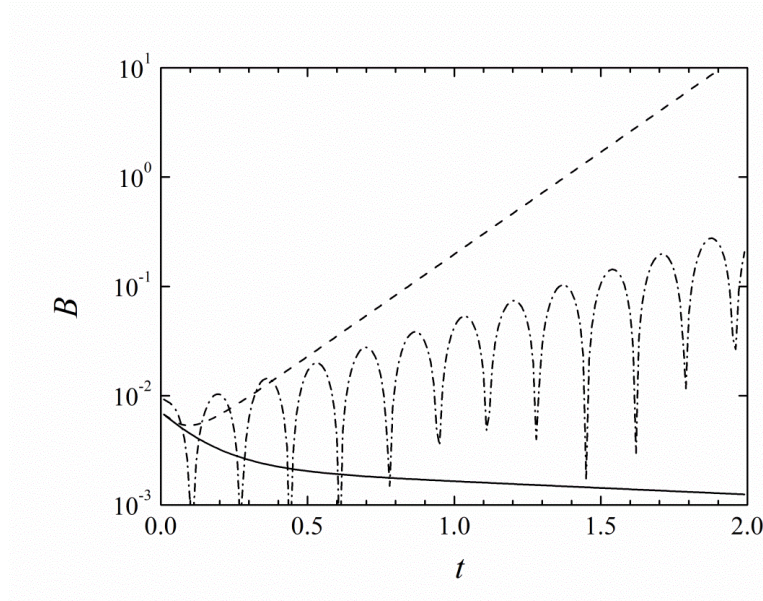


Рис. 4.3.1. Эволюция магнитного поля при  $S_\alpha = 5$  при соотношении сторон прямоугольного тора  $k = 1$ . Сплошная кривая показывает случай  $S_\omega = 5$ , пунктирная –  $S_\omega = 40$ , штрихпунктирная  $S_\omega = 200$ . В первых двух случаях использовано квадрупольное начальное поле, в последнем оно предполагалось дипольным.

Так же представляет интерес изучение поведения тороидальной составляющей векторного потенциала магнитного поля. Ее эволюция представлена на рис. 4.3.2. Можно видеть, что со временем данная функция так же начинает вести себя достаточно похоже на тороидальное магнитное поле. В случае затухания поля векторный потенциал точно также уменьшается. При наличии роста квадрупольной составляющей магнитного поля можно говорить о том, что векторный потенциал так же демонстрирует экспоненциальный рост, а тогда, когда можно говорить о генерации дипольной составляющей, векторный потенциал совершает рост, смешанный с осцилляциями.

При использовании большего значения  $k = 2$  ситуация несколько изменяется. Результаты расчетов для данного случая представлены на рис.4.3.3. Можно отметить, что при небольшом параметре  $Q = 25$  точно так же происходит лишь затухание магнитного поля. В случае когда значение параметра является умеренным ( $Q = 200$ ) поле также является затухающим, что вполне соответствует критическим значениям данного параметра, которые были вычислены выше. При экстремально большом значении  $Q = 1000$  все-таки возможно добиться устойчивой генерации магнитного поля. Вместе с тем, нельзя не отметить, что в таком случае при любых

начальных условиях окажется возможным возбуждение только поля, обладающего квадрупольной симметрией. Если говорить об эволюции со временем векторного потенциала, то она принципиально схожа с тем, что было получено для растущего квадрупольного магнитного поля и затухающего поля при предыдущем соотношении сторон прямоугольного сечения (см. рис.4.3.2).

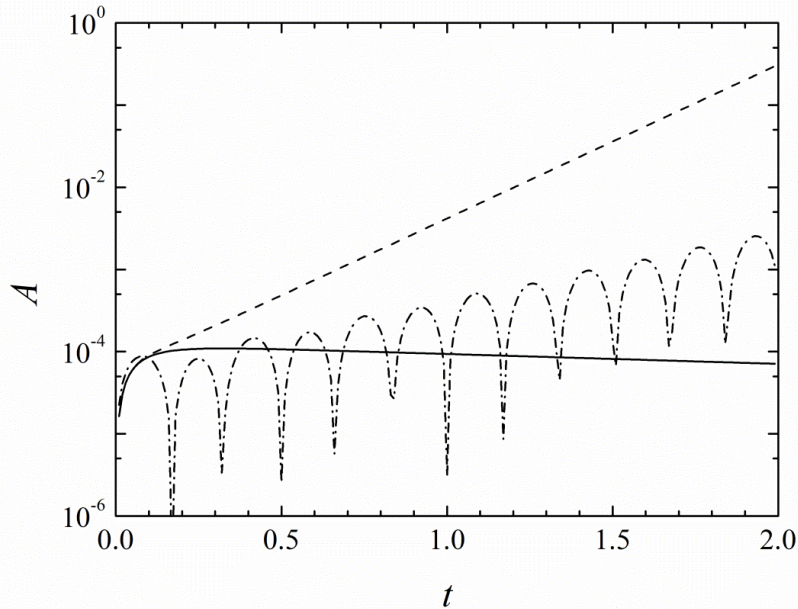


Рис. 4.3.2. Эволюция векторного потенциала магнитного поля при  $S_\alpha = 5$  при соотношении сторон прямоугольного тора  $k = 1$ . Сплошная кривая показывает случай  $S_\omega = 5$ , пунктирная –  $S_\omega = 40$ , штрихпунктирная  $S_\omega = 200$ . Симметрия магнитного поля здесь имеет такой же вид, как и на предыдущем графике (см. рис. 4.3.1)

Наконец, при использовании соотношения  $k = 3$  возможность роста магнитного поля оказывается практически невозможной при разумных значениях параметра  $Q$ . На рис. 4.3.5 показаны результаты вычислений для данного случая. Можно отметить, что магнитное поле затухает не только при малом значении  $Q = 25$  и при умеренном  $Q = 200$ , но даже при экстремально большом  $Q = 1000$ . Отметим, что векторный потенциал ведет себя принципиально так же, как и показано на рис. 4.3.2 для затухающего решения.

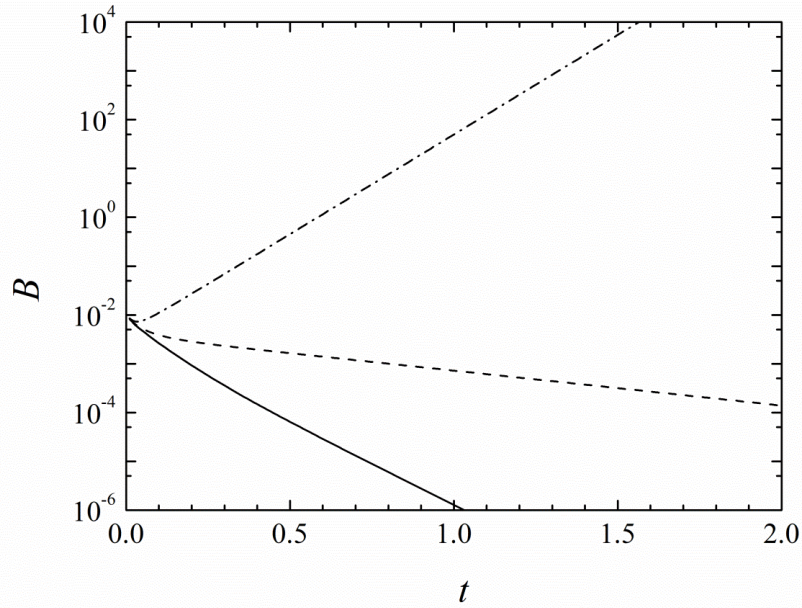


Рис. 4.3.3. Эволюция магнитного поля при  $S_\alpha = 5$  при соотношении сторон прямоугольного тора  $k = 2$ . Сплошная кривая показывает случай  $S_\omega = 5$ , пунктирная –  $S_\omega = 40$ , штрихпунктирная  $S_\omega = 200$ . Во всех случаях использовано квадрупольное начальное магнитное поле.

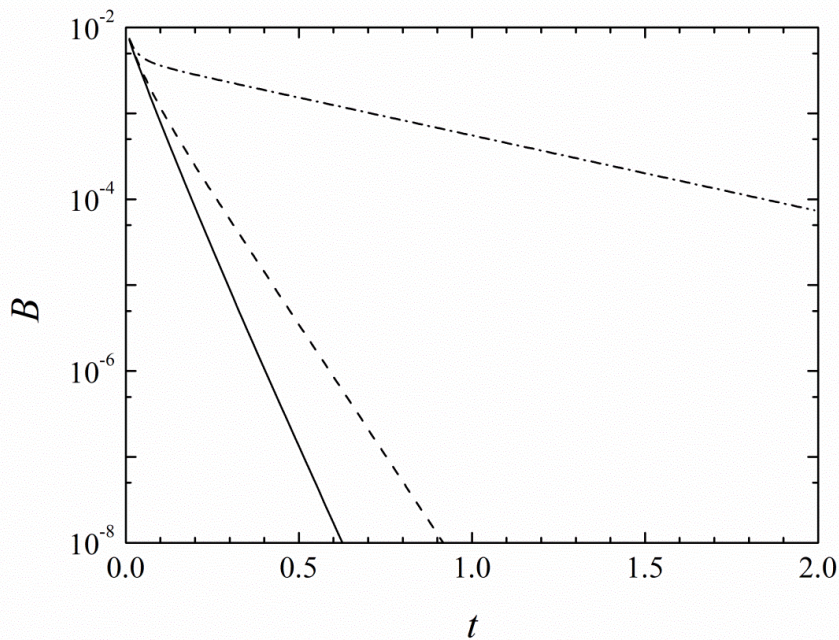


Рис. 4.3.5. Эволюция магнитного поля при  $S_\alpha = 5$  при соотношении сторон прямоугольного тора  $k = 3$ . Сплошная кривая показывает случай  $S_\omega = 5$ , пунктирная –  $S_\omega = 40$ , штрихпунктирная  $S_\omega = 200$ . Во всех случаях использовано квадрупольное начальное магнитное поле.



Имеет смысл продемонстрировать также характерную структуру решения для примеров торов прямоугольного сечения, в которых присутствуют течения различной интенсивности. Отметим, что для нас исключительно важно понимать, как выглядят течения как дипольного, так и квадрупольного типа. В качестве примера возьмем тор квадратного сечения, для которого можно полагать, что  $\lambda = 0.1$  и  $k = 1$ . Отметим, что с точки зрения галактических объектов это вполне допустимые значения.

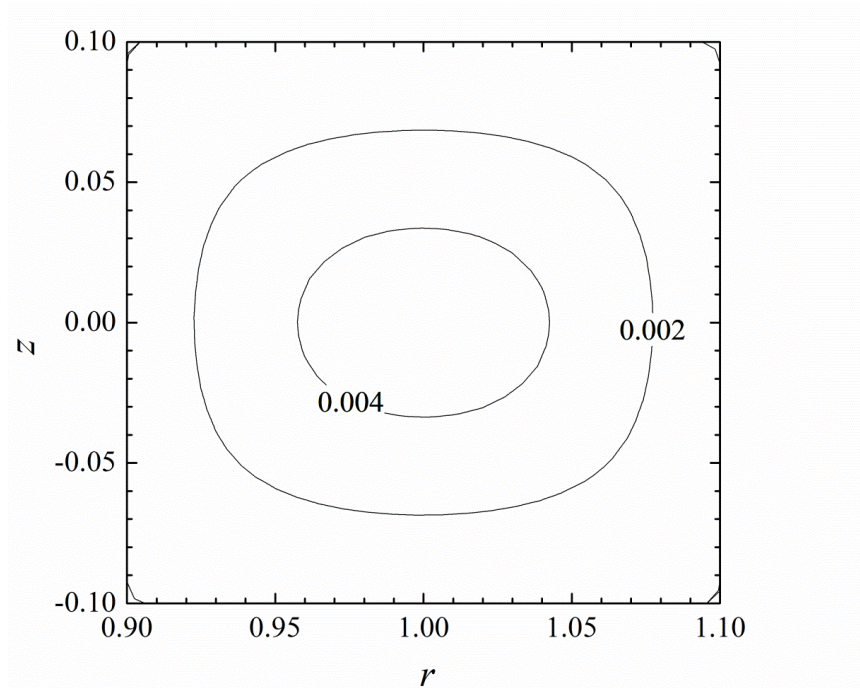


Рис. 4.3.6. Тороидальная компонента магнитного поля квадрупольной симметрии при  $S_\alpha = 4$ ,  $S_\omega = 8$ , соответствующие моменту времени  $t = 3$  в случае тора квадратного сечения.

Для начала изучим магнитное поле квадрупольной симметрии, наличие которого более ожидаемо для большинства астрофизических систем (таких, как внешние кольца галактик, движения в которых не настолько интенсивны, чтобы было легко сгенерировать поле дипольного типа). С этой целью возьмем значение, соответствующее порогу генерации –  $Q = 32$ , когда с трудом возможен процесс возбуждения магнитного поля

Тороидальная компонента магнитного поля, которая соответствует моменту времени  $t = 3$  (достаточному для того, чтобы магнитное поле вышло за пределы того, что соответствует начальным условиям) представлена на рис. 4.3.6. Можно отметить, что в таком случае оно действительно является симметричным относительно экваториальной плоскости.

Полоидальная составляющая представлена, в свою очередь, на рис. 4.3.7. Отчетливо видно, что поле наибольшей величины, направленное в сторону оси вращения, сосредоточено в экваториальной плоскости. Нельзя не сделать вывод о том, что результаты для тора квадратного

сечения в целом достаточно близки к тому, что ранее было получено для круговых торов (см. данные предыдущего параграфа).

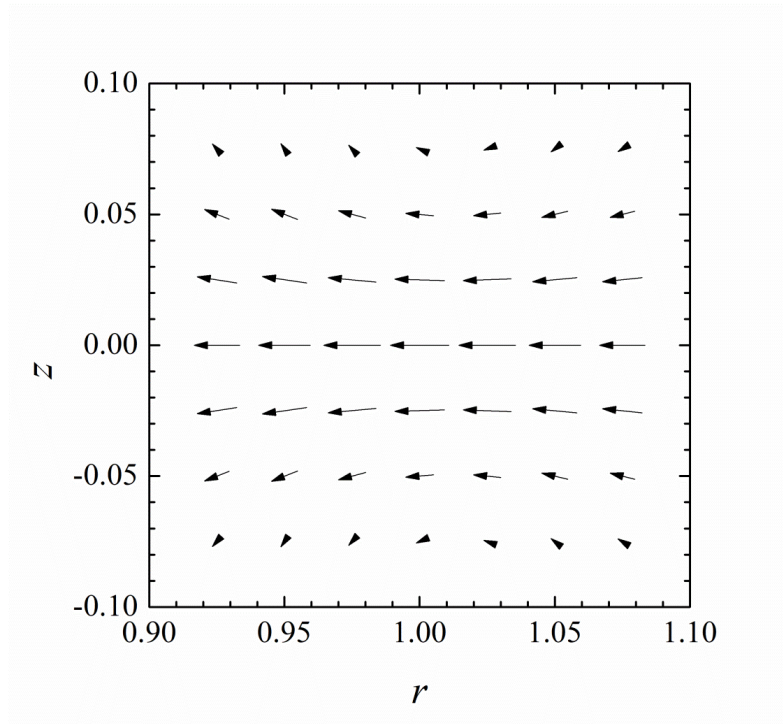


Рис. 4.3.7. Полоидальная компонента магнитного поля квадрупольной симметрии при  $S_\alpha = 4$ ,  $S_\omega = 8$ , соответствующие моменту времени  $t = 3$  в случае тора квадратного сечения.

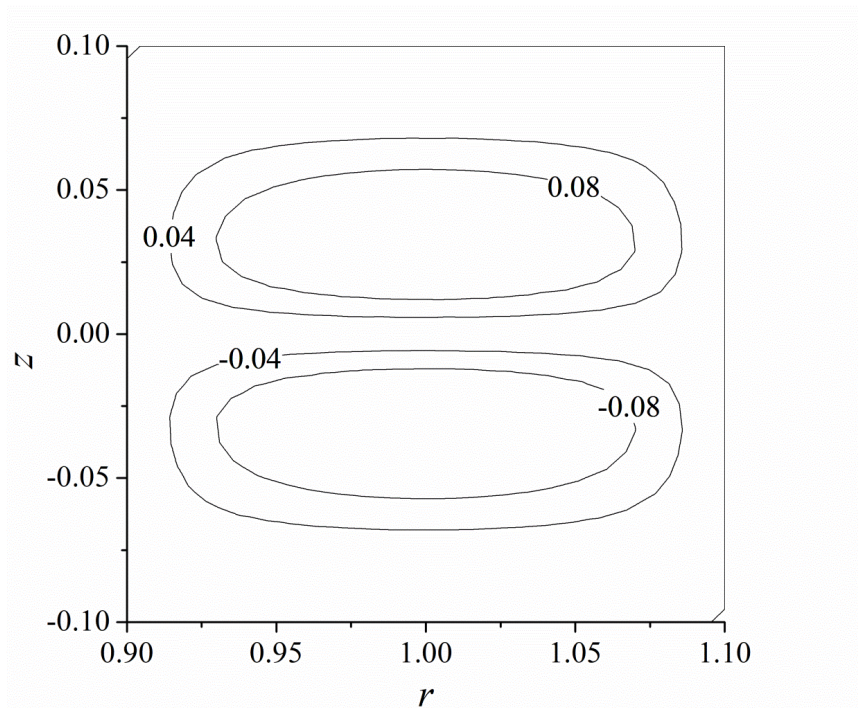


Рис. 4.3.8. Тороидальная компонента магнитного поля квадрупольной симметрии при  $S_\alpha = 20$ ,  $S_\omega = 45$ , соответствующие моменту времени  $t = 3$  в случае тора квадратного сечения.

Исследуем структуру магнитного поля в случае, когда можно говорить о дипольной симметрии. С этой целью мы брали значение управляющего параметра  $Q=900$ . Результаты для тороидальной составляющей показаны на рис. 4.3.8. Нетрудно видеть, что в данной ситуации поле демонстрирует устойчивые структуры, которые являются ассиметричным относительно экваториальной плоскости. Можно видеть, что в таком случае формируются два экстремума, располагающиеся примерно посередине верхней и нижней половины области решения. Верхняя часть соответствует положительному направлению поля (можно говорить о том, что оно направлено против часовой стрелки), в то время как в нижней части формируется отрицательное магнитное поле (иначе говоря, ориентированное по часовой стрелке). В качестве момента времени здесь также используется  $t = 3$ , который представляется вполне достаточным для того, чтобы растущее поле соответствовало собственным функциям, связанным с положительными собственными значениями

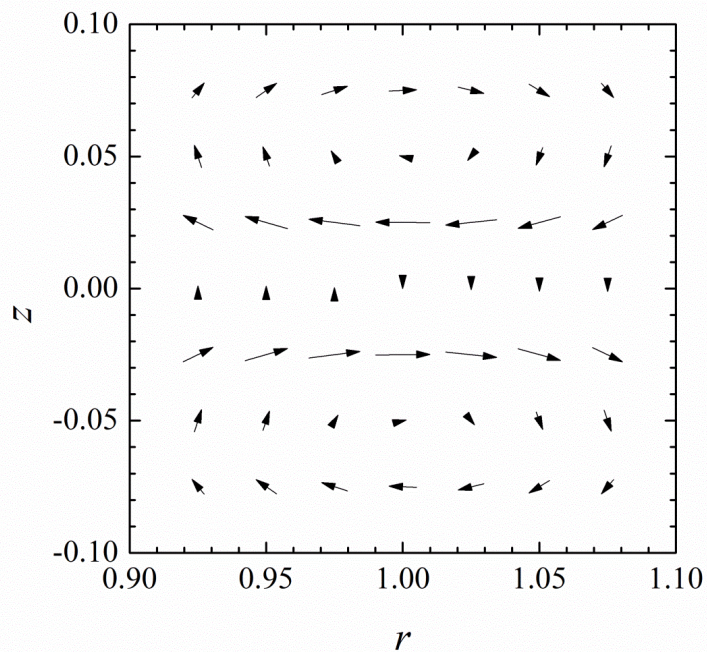


Рис. 4.3.9. Полоидальная компонента магнитного поля квадрупольной симметрии при  $S_\alpha = 20$ ,  $S_\omega = 45$ , соответствующие моменту времени  $t = 3$  в случае тора квадратного сечения.

Результаты для полоидальной составляющей магнитного поля показаны на рис.4.3.9. В таком случае поле образует две симметричных друг относительно друга кольцевых структуры. Как в верхней, так и в нижней половине рисунка линии магнитного поля закручены по часовой стрелке и можно говорить о двух различных вихрях. В то же время, в экваториальной плоскости оно оказывается достаточно близким к нулевому.

Отметим, что с качественной точки зрения можно говорить о том, что имеет место воспроизводство тех результатов, которые были получены в случае круговых торов. Это означает, что оба подхода, хотя и несколько различаются по построению, тем не менее, приводят нас к сходным принципиальным выводам о том, как может выглядеть магнитное поле в соответствующих астрофизических объектах.

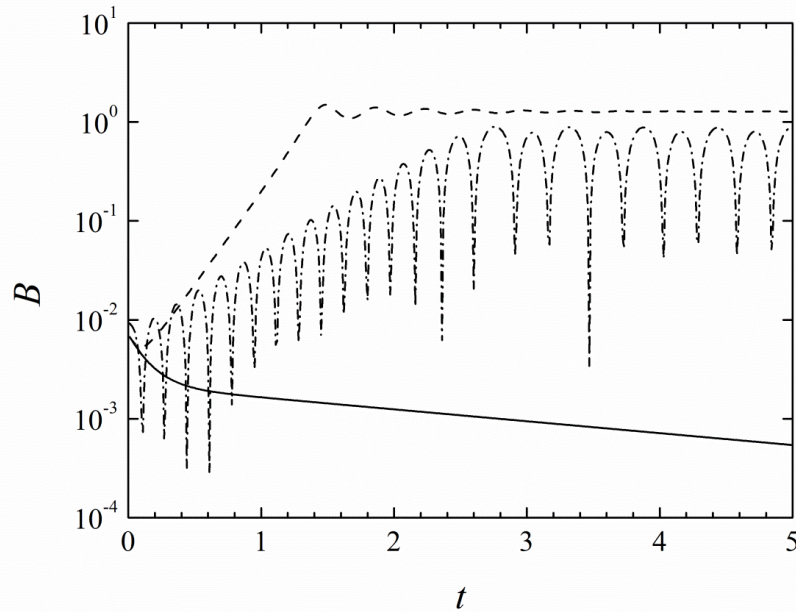


Рис. 4.3.10. Эволюция магнитного поля в нелинейном случае при  $S_\alpha = 5$  при соотношении сторон прямоугольного тора  $k = 1$ . Сплошная кривая показывает случай  $S_\omega = 5$ , пунктирная –  $S_\omega = 40$ , штрихпунктирная  $S_\omega = 200$ . В первых двух случаях использовано квадрупольное начальное поле, в последнем оно предполагалось дипольным.

Так же, как и в предыдущих случаях, весьма важно учесть процесс нелинейного насыщения роста магнитного поля – вполне очевидно, что его генерация не может продолжаться бесконечно. Если поля измеряются в единицах равномерного распределения, то можно преобразовать систему уравнения для их генерации к следующей форме [53] [54] [55]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = S_\alpha z B (1 - B^2) + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = S_\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B.$$

Процесс эволюции тороидальной составляющей при тех же параметрах, что и были применены при изучении нелинейной модификации уравнений, показан на рис. 4.3.10. Можно отметить, что в таком случае рост магнитного поля ограничен значением порядка единицы – это относится и к квадрупольному случаю (когда можно говорить о том, что оно выходит на константу, близкую к уровню равномерного распределения), и к дипольному (тогда поле



равнораспределения начинает играть роль чего-то похожего на амплитуду колебаний его индукции). Эволюция векторного потенциала магнитного потенциала показана, в свою очередь, на рис.4.3.11.

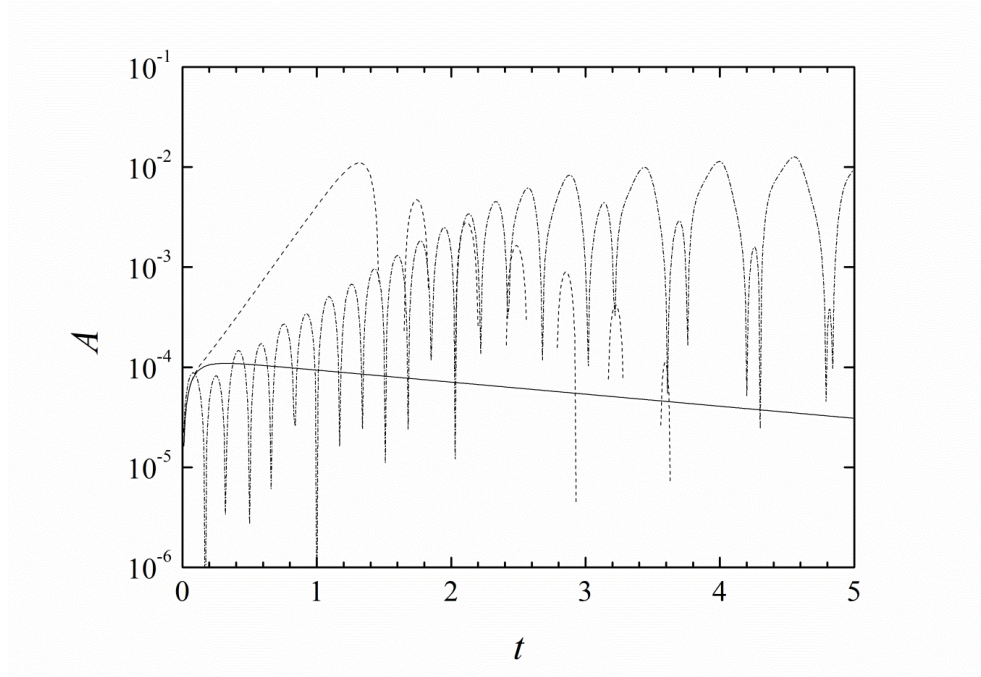


Рис. 4.3.11. Эволюция векторного потенциала магнитного поля в нелинейном случае при  $S_\alpha = 5$  при соотношении сторон прямоугольного тора  $k = 1$ . Сплошная кривая показывает случай  $S_\omega = 5$ , пунктирная –  $S_\omega = 40$ , штрихпунктирная  $S_\omega = 200$ . В первых двух случаях использовано квадрупольное начальное поле, в последнем оно предполагалось дипольным.

Что касается пространственной структуры магнитного поля, то после выхода на стационарный уровень достаточно грубо его зависимость от координат можно представить с помощью различных приближенных выражений. При наличии квадрупольной симметрии соответствующая формула будет выглядеть таким образом:

$$B = B^* \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2\lambda}\right),$$

где  $B^*$  – уровень равнораспределения. В свою очередь, при наличии в задаче дипольной симметрии приближенное выражение будет принимать следующую форму:

$$B = B^* \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi kz}{\lambda}\right),$$

Отметим, что в каком-то смысле их можно считать похожими на выражения для начальных условий. В последующем это можно применять для других оценок, которые связаны с магнитным полем (см.ниже).

Поведение магнитных полей в нелинейном случае интересно также с точки зрения того, может ли поле осуществлять «переключение» с одного вида симметрии на другой. Для начала нам необходимо формализовать вычисление соотношения между дипольной и квадрупольной составляющей магнитного поля. В целом, здесь мы пользуемся [53] идеями, близкими к тому, что было введено Моссом и использовалось им совместно с соавторами [160].

Введем интеграл, который характеризует вклад квадрупольной составляющей магнитного поля (для дипольного поля он обращается в нуль):

$$E_Q = \int_{1-\lambda}^{1+\lambda} dr \int_{-\frac{\lambda}{k}}^{+\frac{\lambda}{k}} B(r, z) \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) dz.$$

В свою очередь, вклад дипольной составляющей магнитного поля можно описать при помощи величины (для квадрупольного поля он будет нулевым):

$$E_D = \int_{1-\lambda}^{1+\lambda} dr \int_{-\frac{\lambda}{k}}^{+\frac{\lambda}{k}} B(r, z) \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) dz.$$

Легко видеть, что с точки зрения функционального анализа  $E_Q$  с точностью до нормы описывает проекцию решения на функцию

$$d(r, z) = \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right),$$

а  $E_D$  связано с проекцией решения на функцию:

$$q(r, z) = \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right).$$

Если поле будет носить чисто квадрупольный характер, то для него будет выполняться условие  $E_D = 0$ . Для поля, носящего чисто дипольный характер, аналогично будет выполняться условие  $E_Q = 0$ .

Соотношение между дипольной и квадрупольной составляющей можно описывать при помощи такой величины [53]:

$$P = \frac{E_Q^2 - E_D^2}{E_Q^2 + E_D^2}.$$

Для полностью квадрупольного магнитного поля  $P = +1$ , для полностью дипольного —  $P = -1$ . В случаях, когда в поле присутствует как одна компонента, так и другая, можно сказать,

что  $-1 < P < +1$ . В том случае, если начальные условия соответствуют квадрупольному полю, то оно постоянно будет таковым (и аналогично для дипольной составляющей).

Рассмотрим теперь случай смешанных начальных условий:

$$A|_{t=0} = 0;$$

$$B|_{t=0} = B_0 \left\{ \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) + \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) \right\}.$$

Очевидно, что в начальный момент это соответствует значению параметра  $P = 0$ . В качестве величины, характеризующей процесс генерации магнитного поля, можно взять  $Q = 900$  (в таком случае возможно возбуждение как квадрупольной, так и дипольной составляющей).

Эволюция магнитного поля и параметра  $P$  показана на рис. 4.3.12. Можно видеть, что магнитное поле достаточно быстро переключается на преимущественно квадрупольный режим, после чего переходит в дипольный. Это означает, что совместное существование полей обоих типов является достаточно неустойчивым, и в реальности поле является либо дипольным, либо квадрупольным.

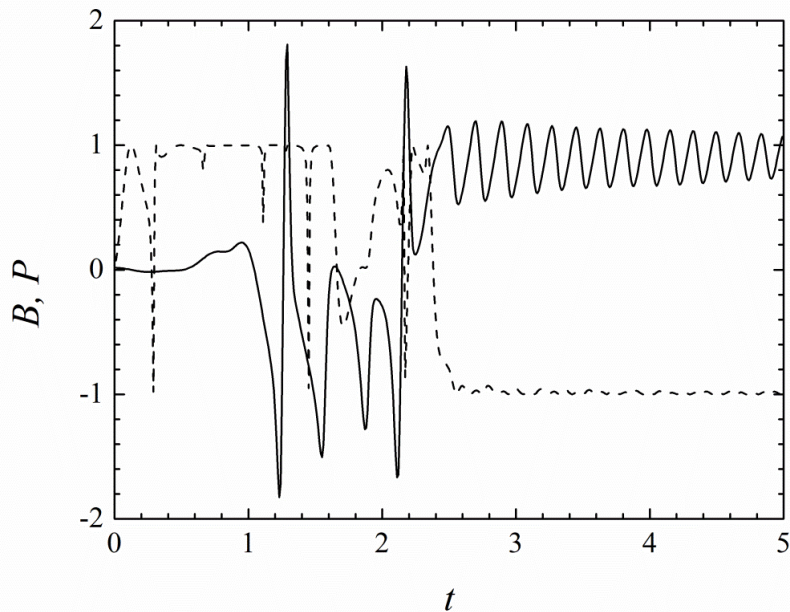


Рис. 4.3.12. Эволюция магнитного поля для смешанных начальных условий при  $Q = 900$ .

Сплошная линия показывает тороидальную компоненту магнитного поля, пунктирная – параметр, характеризующий соотношение между квадрупольным и дипольным полем.

Отметим, что магнитное поле может влиять на течение. Для того, чтобы определить его воздействие, можно определить плотность действующей силы. Для этого определим, как будет выглядеть сила в том случае, когда речь идет о квадрупольном магнитном поле, определяемом

приближенным выражением (в пренебрежении полоидальной составляющей, которая является достаточно небольшой) [54] [55]:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{kcB^*}{8r\lambda} \sin\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \mathbf{e}_r - \frac{\pi B^*}{2r\lambda} \cos\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \mathbf{e}_z$$

Для плотности силы мы можем в таком случае записать следующее:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c\rho} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] = \frac{B^{*2}}{16\lambda r\rho} \left( \sin\left(\frac{\pi(r-1)}{\lambda}\right) \cos^2\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) \mathbf{e}_r + k \sin\left(\frac{\pi kz}{\lambda}\right) \cos^2\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \mathbf{e}_z \right)$$

В работах, связанных с моделированием турбулентных движений в такой ситуации, было показано, что роль данной силы сводится к тому, что в спектре скоростей турбулентных движений исчезает ряд пиков, которые характерны для движения без магнитного поля.

В настоящей главе была исследована генерация магнитных полей в объектах тороидальной формы. В качестве выводов можно отметить, что была построена модель для магнитного поля в проводящей среде, использующая цилиндрические координаты. Для торов с круговым и прямоугольным сечением были получены условия возбуждения магнитного поля, показана принципиальная возможность генерации магнитного поля дипольной симметрии, которая невозможна в случае использования различных модификаций планарного приближения. Также обсужден вопрос об обратном влиянии магнитного поля на межзвездную турбулентность.

Результаты представленные в настоящей главе, были опубликованы в работах [51] [52] [53] [55] [160]. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад соискателя был основополагающим. Соискатель принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений. При этом, в работе [53] А.Д.Хохряковой получен ряд численных решений уравнений, сформулированных в рамках разработанных соискателем модельных представлений для торов прямоугольного течения. В работе [55] И.Н.Сибгатуллин был проведен численное исследование течений на основе модельных представлений о магнитном поле, подготовленных соискателем. [160] модельные представления формулировались соискателем совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, О.К.Сильченко были представлены данные о внешних кольцах галактик, использованные для

построения моделей, К.Орелу был представлен обзор наблюдательных перспектив в данной области.

# Глава V. Модели промежуточного типа для электровихревых течений

В настоящей главе решается задача о генерации электровихревых течений в различных областях. Для течения в полусфере используется безразмерная система уравнений для движения проводящей среды в магнитном поле в переменных «скалярная функция тока – завихренность»:

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{\sin^2 \theta} \right) = -\omega r^2;$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{A(\cos \theta - 1)}{r^2 \sin \theta};$$

$$a < r < 1; \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2};$$

с граничными условиями (в ряде простых случаев):

$$\psi|_{r=1} = \psi|_{r=a} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$\omega|_{r=1} = \omega|_{r=a} = \omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

а также:

$$\psi|_{r=a} = \psi|_{r=1} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \psi|_{\theta=0} = 0; \quad \omega|_{\theta=0} = 0;$$

$$\omega|_{r=a+h} = -\frac{2}{h^2} \psi|_{r=a}; \quad \omega|_{r=1-h} = -\frac{2}{h^2} \psi|_{r=1}; \quad \omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}-g} = -\frac{2}{h^2} \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Для течения между двумя плоскостями вводится вспомогательная функция  $F$  (возникающая при решении задачи в классе фон Кармана), для которой в стационарно случае ставится задача:

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} + S \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{d^4 F}{dz^4} = 0.$$

с граничными условиями:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=1} = 0.$$

## §1. Общие вопросы

Электровихревые течения играют достаточно важную роль в различных областях, связанных в первую очередь с течениями жидких металлов. Они возникают при прохождении

через проводящую среду электрического тока переменной плотности [16] [75] [197] [198]. В таком случае ток порождает вихревое магнитное поле, которое при взаимодействии с породившим его током приводит к возникновению закрученных течений соответствующей среды. Данные процессы играют важную роль с точки зрения различных металлургических явлений, таких как электросварка, электрошлаковый переплав металлов и т.д. В связи с этим трудно переоценить их вклад с прикладной точки зрения. Не менее важно их значение и с точки зрения фундаментальной науки.

Изучение электровихревых течений осуществляется начиная с 1970-х годов. В числе первых коллективов, занимавшихся данной проблемой, можно отметить группу под руководством Щербинина в Институте физики Латвийского университета (г.Рига) [16] [197] [199] [200] [201] [202], которая внесла крайне значительный вклад как с точки зрения экспериментальных исследований, так и с позиции теории. Примерно в то же самое время данные течения начали исследовать и в Киеве в Институте электросварки имени Е.О.Патона [70]. Достаточно значительный вклад в изучение теоретических аспектов электровихревых течений внесли также британские специалисты из Университета Шеффилда, построившие ряд важных асимптотических разложений [22] [23]. Ряд прикладных вопросов изучается в Магнитогорском Государственном Техническом Университете имени Г.И.Носова [19] [203] [204] [205], где проводятся исследования процессов, важных с точки зрения их дальнейшего применения на современных производствах, в частности, Магнитогорском Металлургическом Комбинате. Активно изучаются соответствующие течения и в Перми на базе Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН, где проводятся как теоретические, так и экспериментальные работы [18] [206] [207] [208] [209] [210] [211] [212]. Ведущую роль в исследовании электровихревых течений играет коллектив Объединенного института высоких температур РАН, где в настоящий момент ставится большое количество важнейших экспериментов [213] [214] [215] [216]. Кроме того, нельзя не отметить и ряд теоретических исследований, которые ведутся в ОИВТ РАН [17] [217]. Большой опыт в изучении электровихревых течений накоплен также в Дрездене (Германия) [20], где в Центре имени Гельмгольца проводится большое количество важных исследований. Немаловажен также вклад Университета Леобена (Австрия) [21].

На заре изучения электровихревых течений теоретическая сторона вопроса обычно сводилась к решению уравнений с помощью различных спектральных разложений. Исследователи строили собственные функции для соответствующих областей и искали коэффициенты, соответствующие им. Между тем, по мере развития вычислительной техники все возрастающую роль стали играть численные решения, связанные с использованием стандартных вычислительных пакетов. Несмотря на большую важность подобной работы и ряд значимых результатов, поучительность решений, даваемых с помощью подобных программ, в ряде случаев

оказывается спорной. Как уже говорилось в предыдущих разделах, подобное прямое численное моделирование далеко не всегда дает возможность явно получить решение, которое позволяет провести прозрачный анализ того, как на те или иные характеристики решения влияют входные параметры задачи. Это означает, что до сих пор оказываются востребованными двумерные модели, которые допускают не только численное решение, но и определенный асимптотический и спектральный анализ.

В настоящей работе проводится подробное исследование того, как можно построить подобные спектральные разложения решений для двух важных частных случаев. Они имеют как теоретическое значение, так и большое количество приложений, связанных с применением электровихревых течений в технике. Для построения решения используется так называемое стоково приближение, которое является «вырожденным» случаем уравнения Навье – Стокса [75]. Предполагается, что течения жидкого металла являются установившимися, поэтому можно пренебречь частной производной по времени. Кроме того, считается, что данные течения являются довольно медленными, что дает возможность исключить из рассмотрения конвективное слагаемое, являющееся квадратичным по скорости. Наконец, немаловажно отметить, что задача решается в рамках электродинамического приближения, когда обратным влиянием течения на распределение плотности тока и магнитное поле допустимо пренебречь. В таком случае задача является линейной, а решения являются вполне обоснованными. Отметим, что данные предположения являются вполне разумными и активно применяются в большом числе приложений, которые встречаются на практике.

Первый связан с изучением электровихревых течений, которые происходят в полусферическом контейнере. Экспериментальное изучение подобных процессов проводится на базе Объединенного института высоких температур РАН [17], а их суть состоит в следующем. В ванну полусферической формы помещен центральный электрод полусферической формы, от которого растекается электрический ток. Роль второго электрода играет внешняя полусфера. Нетрудно понять, что в таком случае формируется ток переменной плотности, и поэтому генерируется тороидальное магнитное поле [75]. При взаимодействии тока и поля образуется электромагнитная сила, которая вызывает возникновение закрученных движений проводящей среды. В таком случае задача может быть решена при помощи разложения решения по собственным функциям полушарового слоя, которая в целом соответствует тому, что известно в современной математической физике [77].

Второй пример относится к электровихревому течению между двумя плоскостями [218]. В таком случае имеются два плоских электрода, которых с определенной степенью точности можно считать бесконечными. Отметим, что данные электроды имеют одноименную полярность. На плоскости симметрии, разделяющей данные электроды, на достаточно большом (с точки



зрения модели – бесконечно большом) расстоянии располагается третий электрод. Электрический ток распространяется от плоскостей-электродов, и его переменная плотность порождает тороидальное магнитное поле (если мы рассматриваем его в цилиндрической системе координат). После этого взаимодействие тока и поля приводит к возникновению закрученных электровихревых течений. Отметим, что в таком случае для решения задачи можно применять автомодельные переменные, которые позволяют свести задачу к двумерной. В таком случае задача может быть решена с использованием асимптотического разложения решения. Отметим, что в данном случае предположения о линейности задачи не делается.

## §2. Электровихревое течение в полусферическом сосуде.

Как уже говорилось выше, отдельный интерес представляет электровихревое течение в полусферическом сосуде (рис. 5.2.1). Данный пример связан с экспериментом с использованием эвтектического сплава индия-галлия-олова, проводимым на базе одной из лабораторий Объединенного института высоких температур РАН [17]. Возникает необходимость теоретического описания соответствующих процессов.

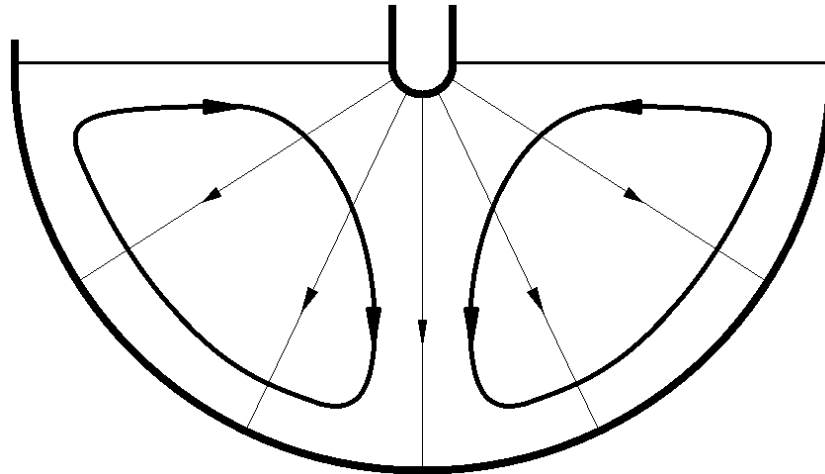


Рис. 5.2.1. Схема электровихревого течения в полусферическом сосуде

Будем использовать сферическую систему координат  $r - \theta - \varphi$ , отсчитывая угол  $\theta$  от оси, направленной вниз. Если электрический ток имеет величину  $J$ , то его плотность выражается так [75] [219] [220] [221]:

$$\mathbf{j} = \frac{J}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

Связанное с ним магнитное поле может быть выражено из второго уравнения Максвелла (при условии пренебрежения электрическими токами смещения):

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Магнитное поле при такой конфигурации может иметь только азимутальную компоненту

$$\mathbf{H} = H\mathbf{e}_\varphi;$$

поэтому:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & Hr \sin \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(Hr \sin \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(Hr \sin \theta)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta.$$

Рассмотрим радиальную проекцию данного соотношения (смысл угловой будет ясен чуть позже):

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(Hr \sin \theta)}{\partial \theta} = \frac{4\pi}{c} \frac{J}{2\pi r^2}$$

После сокращения получим такое выражение:

$$\frac{\partial(Hr \sin \theta)}{\partial \theta} = \frac{2}{c} J \sin \theta.$$

Проинтегрируем обе части данного равенства по углу  $\theta$ :

$$Hr \sin \theta = \frac{2}{c} J \int \sin \theta d\theta;$$

$$Hr \sin \theta = \frac{2}{c} J(C - \cos \theta);$$

где  $C$  – некоторая константа интегрирования. Учитывая, что при  $\theta = 0$   $\sin \theta = 0$ , можно получить, что  $C = 1$ , поэтому:

$$Hr \sin \theta = \frac{2}{c} J(1 - \cos \theta).$$

Для магнитного поля в таком случае можно получить, что:

$$H = \frac{2}{c} \frac{J(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta}.$$

Исходя из вида данной функции понятно, как будет выглядеть угловая составляющая ротора магнитного поля:

$$(\text{rot}\mathbf{H})_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(Hr \sin \theta)}{\partial r} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2}{c} J(1 - \cos \theta) \right) = 0.$$

Таким образом, никаких противоречий с предыдущими рассуждениями не будет.

Рассмотрим теперь движение жидкого металла. Поле скоростей в нем, также как и в других подобных случаях, описывается с помощью уравнения Навье – Стокса [75] [219] [220]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v};$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость,  $\rho$  – плотность жидкого металла,  $p$  – давление,  $\mathbf{f}$  – массовая плотность силы,  $\eta$  – коэффициент вязкости. Далее будем предполагать, что жидкость является несжимаемой и однородной.

Будем пользоваться так называемым стоксовым приближением, согласно которому рассматриваются медленные стационарные течения. Это означает, что частная производная скорости по времени обращается в нуль, а член  $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}$  пропорционален квадрату скорости. Ввиду ее малости данным слагаемым можно будет пренебречь, что приведет к обнулению левой части уравнения Навье – Стокса:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} + \eta\Delta\mathbf{v} = 0.$$

Основную сложность представляет нахождение градиента давления, которое является неизвестным [75]. Чтобы избавиться от него, возьмем ротор от обеих частей уравнения. Тогда можно воспользоваться тем, что ротор от градиента равен нулю:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = 0.$$

Что касается последнего слагаемого, то можно использовать тот факт, что операцию лапласиана и ротора можно поменять местами:

$$\text{rot}(\eta\Delta\mathbf{v}) = \eta\Delta(\text{rot}\mathbf{v}).$$

В таких случаях удобно ввести так называемый вектор завихренности, характеризующий скорость:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{v}.$$

С учетом написанного выше, уравнение движения жидкости сводится к форме:

$$\text{rot}\mathbf{f} + \eta\Delta\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Что касается плотности силы, то по сути мы имеем дело с массовой плотностью магнитной части силы Лоренца, которая определяется следующим образом:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c\rho}[\mathbf{j}, \mathbf{B}],$$

или, с учетом того, что магнитную проницаемость можно считать единичной, получается что  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ , т.е.

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c\rho}[\mathbf{j}, \mathbf{H}].$$

Используя выражения, записанные выше, мы можем преобразовать плотность к следующему виду:

$$\mathbf{f} = -\frac{J^2(1-\cos\theta)}{\pi\rho c^2 r^3 \sin\theta} \mathbf{e}_\theta$$

Вычислим ротор от данной силы:

$$\text{rot}\mathbf{f} = \frac{2J^2(1-\cos\theta)}{\pi c^2 r^4 \rho \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi.$$

Учитывая, что скорость имеет только компоненты  $v_r(r, \theta)$  и  $v_\theta(r, \theta)$ , не зависящие от азимутального угла  $\varphi$ , вектор завихренности можно представить так:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta(r, \theta)) - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r(r, \theta)) \right) \mathbf{e}_\varphi.$$

Это означает, что завихренность имеет только одну ненулевую компоненту – азимутальную:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_\varphi$$

Таким образом, уравнение для движения жидкого металла можно записать в форме:

$$\eta \Delta(\omega \mathbf{e}_\varphi) + \frac{2J^2(1-\cos\theta)}{\pi c^2 \rho r^4 \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi = 0.$$

Если раскрыть векторный оператор Лапласа (учитывая, что производные по углу  $\varphi$  обращаются в нуль), то можно переписать данное выражение в следующей форме:

$$\eta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2\theta} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{2J^2(1-\cos\theta)}{\pi c^2 \rho r^4 \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi = 0.$$

Отсюда вытекает скалярное уравнение:

$$\eta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2\theta} \right) = -\frac{J^2(1-\cos\theta)}{\pi c^2 \rho r^4 \sin\theta}.$$

Будем измерять расстояния в единицах  $R$ , а скорости в единицах  $\frac{J}{cR\sqrt{\rho}}$ . Тогда угловая

скорость будет измеряться в единицах  $\frac{J}{cR^2\sqrt{\rho}}$ . В таком случае уравнение для зависимости

завихренности от пространственных координат переписется в форме [75] [219] [221]:

$$\frac{\eta}{c} \frac{J}{R^4 \sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2\theta} \right) = -\frac{1}{R^4} \frac{2J^2(1-\cos\theta)}{\pi c^2 \rho r^4 \sin\theta};$$

Его несложно переписать в форме:

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2\theta} \right) = -\frac{2J(1-\cos\theta)}{\pi \eta \sqrt{\rho} c r^4 \sin\theta}.$$

Введем безразмерный параметр  $A = \frac{2J}{\pi\eta c\sqrt{\rho}}$ . С учетом этого уравнение переписывается в

форме:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta}\right) = -\frac{A(1 - \cos \theta)}{r^4 \sin \theta}.$$

Кроме этого, учитывая, что для несжимаемой жидкости дивергенция скорости равна нулю, ее можно искать с помощью векторного потенциала, вводимого по правилу:

$$\mathbf{v} = \text{rot} \boldsymbol{\psi}.$$

Если скорость не имеет азимутальной компоненты, то векторный потенциал имеет только азимутальную составляющую [219]:

$$\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_\varphi,$$

а равенство будет выглядеть так:

$$\mathbf{v} = \text{rot}(\psi \mathbf{e}_\varphi).$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения, тогда мы получим такое выражение:

$$\text{rot} \mathbf{v} = -\Delta(\psi \mathbf{e}_\varphi).$$

В левой части мы имеем вектор завихренности поля скорости:

$$\boldsymbol{\omega} = -\Delta(\psi \mathbf{e}_\varphi)$$

Тогда:

$$\omega \mathbf{e}_\varphi = -\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \mathbf{e}_\varphi.$$

В скалярном виде мы получаем такое уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\omega.$$

Полную систему уравнений с учетом граничных условий можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\omega r^2;$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{A(1 - \cos \theta)}{r^4 \sin \theta}.$$

$$\psi|_{r=1} = \psi|_{r=a} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$\omega|_{r=1} = \omega|_{r=a} = \omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

где  $a$  – радиус внутреннего электрода (измеренный в единицах радиуса внешней полусферы).

Оценим роль сил Кориолиса в данной задаче и корректность используемой модели. Как известно, влияние данных эффектов описывается с помощью числа Россби:

$$Ro = \frac{V}{2L\Omega \sin \beta},$$

где  $V$  – характерная скорость течения,  $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  – угловая скорость вращения Земли,  $L$  – типичный размер,  $\beta$  – географическая широта.

Роль кинематической вязкости описывается с помощью числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{VL}{\eta}.$$

Соотношение между ними описывается с помощью числа Экмана, вводимого так:

$$Ek = \frac{Ro}{Re} = \frac{\eta}{2\Omega L^2 \sin \beta}.$$

Предполагая, что  $\beta \approx 60^\circ$ ,  $L \sim 10^1 \text{ см}$ ,  $\eta \sim 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$ , мы можем получить:

$$Ek \sim 10^{-1},$$

что делает возможным пренебречь ролью силы Кориолиса в подобных задачах.

Можно видеть, что для каждой из функций мы имеем так называемое уравнение Пуассона, известное в математической физике [78]. Сначала необходимо найти решение уравнения для функции  $\omega$ , после чего с ее помощью можно найти решение для векторного потенциала скорости  $\psi$ , действуя аналогичными методами.

Для поиска решения введем вспомогательную функцию [75]:

$$u(r, \theta, \varphi) = \omega(r, \theta) \cos \varphi.$$

Вычислим скалярный оператор Лапласа от нее:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial (\omega(r, \theta) \cos \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial (\omega(r, \theta) \cos \varphi)}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (\omega(r, \theta) \cos \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega(r, \theta)}{\partial r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \cos \varphi - \frac{\omega(r, \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} \cos \varphi = \\ &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{\sin^2 \theta} \right) \cos \varphi \end{aligned}$$

Тогда для функции  $u$  можно записать следующее уравнение:

$$\Delta u = \frac{A(\cos \theta - 1) \cos \varphi}{r^4 \sin \theta}.$$

Его решение можно искать в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа [75]:

$$u_{nkm}(r, \theta, \varphi) = R_{nk}(r) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi);$$

Где  $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$  – сферическая функция:

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi.$$

Учитывая, что выше мы предположили, что функция  $u$  пропорциональна  $\cos \varphi$ , имеет смысл рассматривать только сомножители, для которых  $m=1$  [75]:

$$Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) = P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi.$$

Для сомножителя, отвечающего за радиальную часть, мы можем использовать стандартную формулу:

$$R_{nk} = C_1 \frac{J_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k})}{\sqrt{r}} + C_2 \frac{N_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k})}{\sqrt{r}};$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – некоторые коэффициенты,  $\lambda_n^k$  – отвечающие им собственные значения. Определим соотношение между постоянными. Для этого потребуем выполнения для данной функции граничного условия, которое соответствует внутреннему электроду:

$$C_1 \frac{J_{n+1/2}(a\sqrt{\lambda_n^k})}{\sqrt{a}} + C_2 \frac{N_{n+1/2}(a\sqrt{\lambda_n^k})}{\sqrt{a}} = 0.$$

Таким образом, можно выразить один коэффициент через другой по формуле:

$$C_2 = -C_1 \frac{J_{n+1/2}(a\sqrt{\lambda_n^k})}{N_{n+1/2}(a\sqrt{\lambda_n^k})}.$$

Введем вспомогательную функцию [75]:

$$g_n(a, \lambda_n^k) = \frac{J_{n+1/2}(a\sqrt{\lambda_n^k})}{N_{n+1/2}(a\sqrt{\lambda_n^k})}.$$

Таким образом, радиальная часть собственной функции будет выражаться с помощью соотношения:

$$R_{nk} = \frac{C_1}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k}) + g_n(a, \lambda_n^k) N_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k}) \right).$$

Потребуем теперь выполнения второго граничного условия. Это приведет нас к трансцендентному уравнению:

$$J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda_n^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_n^k\right)N_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda_n^k}\right) = 0.$$

Оно позволяет найти  $\lambda_n^k$ , являющиеся собственными значениями соответствующей задачи.

Нас будут интересовать только симметричные решения, поэтому в разложении можно оставить только присоединенные функции Лежандра четного порядка  $P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)$ :

$$u = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_n^k\right)N_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi.$$

Выражение для завихренности в таком случае приводится к следующей форме (для этого необходимо разделить предыдущую вспомогательную функцию на косинус азимутального угла) [75] [219]:

$$\omega = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_n^k\right)N_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)$$

Аналогичное разложение можно также записать и для функции, которая стоит в правой части уравнения:

$$f(r, \theta) = \frac{A(\cos \theta - 1)}{r^4 \sin \theta}.$$

и раскладывается следующим образом:

$$f(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_n^k\right)N_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta).$$

Коэффициенты разложения для нее могут быть выражены так. Сначала нужно найти интеграл, при помощи которого можно вычислить квадрат нормы функций, по которым ведется разложение [75]:

$$S_{kl} = \int_a^1 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_n^k\right)N_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta.$$

Для него можно получить следующее выражение:

$$S_{kl} = \int_a^1 \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_n^k\right)N_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right)^2 r^2 dr \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \left( P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\pi l(2l+1)}{(4l+1)\lambda_{2l+1/2}^k} \left( \left( J'_{2l+1/2}\left(\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}\right) \right) - \right.$$



$$-g_{2l}(\lambda_{2l+1/2}^k, a)N'_{2l+1/2}(\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k})^2 - a^2(J'_{2l+1/2}(a\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}) - g_{2l}(\lambda_{2l+1/2}^k, a)N'_{2l+1/2}(a\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}))^2$$

Теперь вычислим значения скалярных произведений правой части на функции, по которым ведется разложение. Они представляются в форме произведения:

$$\int_a^1 \int_0^{1/\pi/2} \frac{f(r, \theta)}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k}) + g_n(a, \lambda_n^k)N_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k}) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta =$$

$$= A Q_{lk} M_l;$$

где [75]:

$$Q_{lk} = \int_a^1 \frac{1}{r^{5/2}} \left( J_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k}) + g_n(a, \lambda_n^k)N_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_n^k}) \right) dr =$$

$$= \frac{{}_2F_1\left(\frac{2l-1}{2}, \frac{2l+1}{2}, \frac{4l+3}{2}, -\frac{1}{4}\lambda_{2l}^k\right) \cdot (\sqrt{\lambda_{2l}^k})^{2l+\frac{1}{2}}}{2^{2l+\frac{1}{2}}(2l-1)\Gamma\left(2l+\frac{3}{2}\right)} -$$

$$- \frac{{}_2F_1\left(\frac{2l-1}{2}, \frac{2l+1}{2}, \frac{4l+3}{2}, -\frac{1}{4}a^2\lambda_{2l}^k\right) \cdot (a\sqrt{\lambda_{2l}^k})^{2l+\frac{1}{2}}}{2^{2l+\frac{1}{2}}(2l-1)a^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(2l+\frac{3}{2}\right)} -$$

$$- 2^{2l-\frac{1}{2}} g_{2l}(\lambda_{2l}^k, a) \frac{{}_2F_1\left(-l, -\frac{4l-1}{2}, -l, -\frac{1}{4}\lambda_{2l}^k\right)}{(\sqrt{\lambda_{2l}^k})^{2l+\frac{1}{2}}(l+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-2l\right)} +$$

$$+ 2^{2l-\frac{1}{2}} g_{2l}(\lambda_{2l}^k, a) \frac{{}_2F_1\left(-l, -\frac{4l-1}{2}, -l, -\frac{1}{4}a^2\lambda_{2l}^k\right)}{(a\sqrt{\lambda_{2l}^k})^{2l+\frac{1}{2}}(l+1)a^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-2l\right)}.$$

Для коэффициента можно получить следующее несложное выражение, связанное со свойствами присоединенных функций Лежандра [75]:

$$M_l = \int_0^{\pi/2} P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta = \frac{(-1)^l C_{2l}^l}{2^{2l}},$$

где  $C_{2l}^l$  – биномиальные коэффициенты, хорошо известные всем из комбинаторики.

Тогда уравнение для завихренности может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \Delta \left( \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right) = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl}\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Перенесем оператор Лапласа внутрь суммы (это можно сделать с учетом его линейности) и учтем, что суммирование осуществляется по его собственным функциям:

$$\begin{aligned} & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2l}^k \frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl}\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Покомпонентно это равенство, с учетом сокращения на собственные функции, может быть переписано в виде [75]:

$$-\lambda_{2l}^k \Omega_{lk} = \frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl}}.$$

Для каждого из коэффициентов разложения собственной функции мы можем получить такую формулу:

$$\Omega_{lk} = -\frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl}\lambda_{2l}^k}.$$

Азимутальная составляющая векторного потенциала может быть представлена в виде аналогичного разложения по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\psi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{n+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_n^k} \right) + g_n \left( a, \lambda_n^k \right) N_{n+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_n^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta).$$

Уравнение для зависимости векторного потенциала от координат представимо в форме, аналогичной тому, что было записано выше для завихренности (в таком случае в правой части будет стоять завихренность со знаком «минус»):

$$\begin{aligned} & \Delta \left( \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right) = \\ & = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta); \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2l}^k \Psi_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) = \end{aligned}$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}} \left( J_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + g_{2l} \left( a, \lambda_{2l}^k \right) N_{2l+1/2} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta);$$

Покомпонентно данное выражение может быть переписано в таком несложном виде:

$$-\lambda_{2l}^k \Psi_{lk} = -\Omega_{lk}.$$

Здесь можно воспользоваться уже полученной ранее формулой для коэффициентов завихренности.

$$-\lambda_{2l}^k \Psi_{lk} = \frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl}\lambda_{2l}^k};$$

Для коэффициентов разложения векторного потенциала скорости можно записать следующее [75]:

$$\Psi_{lk} = -\frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl}(\lambda_{2l}^k)^2}.$$

Полученные выражения выглядят достаточно сложно. Поэтому имеет смысл найти их приближенный вид, который позволит представить его в несколько более наглядной форме. По этой причине возьмем старшую моду решения (которая соответствует единичным значениям индексов  $l = 1, k = 1$ ), и рассмотрим выражения для нее [219].

Для начала учтем тот факт, что размер внутреннего электрода заметно меньше внешнего, а в рамках безразмерных переменных это значит, что  $a \ll 1$ . Тогда можно взять такие приближенные выражения для функции Бесселя:

$$J_{2l+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \cong \frac{\left( a\sqrt{\lambda_{2l}^1} \right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}$$

и для функции Неймана:

$$N_{2l+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) \cong \frac{3\sqrt{2}}{\left( a\sqrt{\lambda_{2l}^1} \right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\pi}}.$$

Для функции  $g$  в таком случае возможно записать следующее приближенное выражение:

$$g_{2l} \left( \lambda_{2l}^1, a \right) \cong \frac{1}{5} \left( a\sqrt{\lambda_{2l}^1} \right)^5.$$

Тогда для радиальной части собственной функции мы можем приближенно записать следующее:

$$R_{lk}(r) = J_{2l+\frac{1}{2}} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right) + \frac{1}{5} \left( a\sqrt{\lambda_{2l}^1} \right)^5 N_{2l+\frac{1}{2}} \left( r\sqrt{\lambda_{2l}^k} \right)$$

Учитывая малость внутреннего электрода, можно в отдельных случаях даже считать, что:

$$R_{lk}(r) \cong J_{2l+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right).$$

Это можно использовать для определения значения собственных значений оператора. Внешнее граничное условие в таком случае возможно представить в такой форме:

$$J_{2\cdot 1+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{2\cdot 1}^1}\right) \cong 0.$$

Его решение можно представить с помощью первого из корней функции Бесселя:

$$\sqrt{\lambda_2^1} = 5.763.$$

Для собственного значения для оператора Лапласа мы несложно получить, что:

$$\lambda_2^1 = 33.21.$$

Коэффициент  $S_{11}$ , возникающий в разложении, в таком случае будет выглядеть таким образом:

$$S_{11} \cong -\frac{3\pi}{5} \left( J_{\frac{7}{2}}(5.763) \right)^2 = -0.1897.$$

Для коэффициента  $Q_{11}$  мы получим такую приближенную формулу (не будем учитывать слагаемые, которые содержат размер центрального электрода в степени выше первой):

$$Q_{11} \cong 2.158 - 4.241a.$$

Коэффициент  $M_1$ , характеризующий присоединенные функции Лежандра, записывается в виде:

$$M_1 = -\frac{1}{2}.$$

Для коэффициентов, характеризующих правую часть уравнения для завихренности, мы можем получить, что:

$$F_{11} = A(5.688 - 11.187a);$$

$$\Omega_{11} = -A(0.1713 - 0.3368a);$$

$$\Psi_{11} = -A(5.158 \cdot 10^{-3} - 1.0141 \cdot 10^{-2} a)$$

Это означает, что решение уравнения для завихренности представляется приближенно в таком виде [219]:

$$\omega \cong \frac{\Omega_{11}}{\sqrt{r}} \left( J_{5/2}\left(r\sqrt{\lambda_2^1}\right) + g_2(a, \lambda_2^1) N_{5/2}\left(r\sqrt{\lambda_2^1}\right) \right) P_2^{(1)}(\cos \theta) \cong$$

$$\cong \frac{A}{\sqrt{r}} (0.5139 - 1.0104a) \left( J_{5/2}(5.763r) - 1271.4a^5 N_{5/2}(5.763r) \right) \sin \theta \cos \theta;$$

Уравнение для азимутальной компоненты векторного потенциала в таком случае может быть решено так:

$$\begin{aligned} \psi &\cong \frac{\Psi_{11}}{\sqrt{r}} \left( J_{5/2} \left( r\sqrt{\lambda_2^1} \right) + g_2 \left( a, \lambda_2^1 \right) N_{5/2} \left( r\sqrt{\lambda_2^1} \right) \right) P_2^{(1)}(\cos \theta) \cong \\ &\cong -\frac{A}{\sqrt{r}} \left( 1.547 \cdot 10^{-2} - 3.0423 \cdot 10^{-2} a \right) \left( J_{5/2}(5.763r) - 1271.4a^5 N_{5/2}(5.763r) \right) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Приближенное решение для завихренности, даваемое формулой, приведенной выше, представлено на рис. 5.2.2. Предполагается, что радиус внутреннего электрода составляет величину  $a = 0.1$ . Можно говорить о том, что завихренность принимает свое максимальное значение примерно посередине области решения.

В свою очередь, результат решения для векторного потенциала скорости представлен на рис. 5.2.3. В качестве линий тока жидкого металла можно использовать линии уровня данного векторного потенциала. Можно отметить, что с точки зрения рисунка течение направлено против часовой стрелки. Таким образом, жидкий металл течет в сторону оси около поверхности жидкости, после чего «поворачивает» вниз и течет вдоль оси. После этого металл течет вдоль внешней поверхности сосуда.

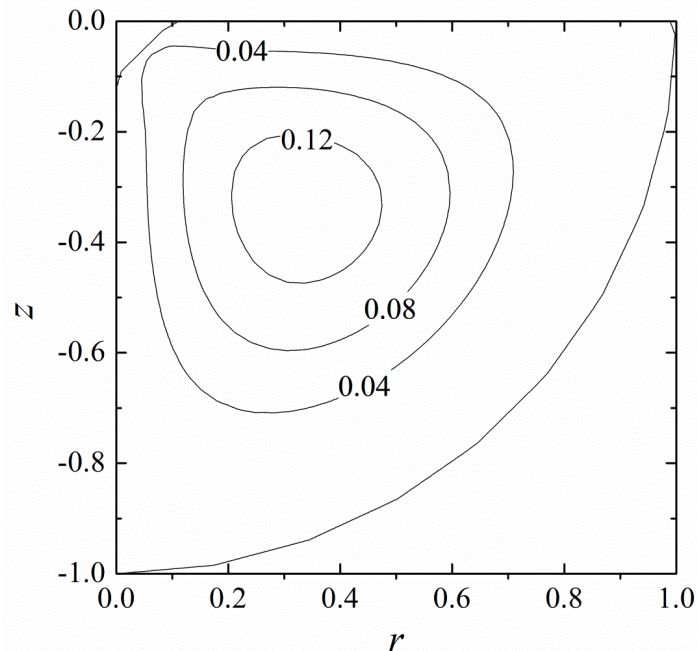


Рис. 5.2.2. Завихренность поля скорости, даваемая с помощью приближенной формулы

Отметим, что гораздо больший интерес может представлять численное решение данной задачи [219] [220]. Оно позволяет рассмотреть решение задачи с учетом более физических

граничных условий. Так, гораздо лучше подходит условие прилипания, которое сводится к тому, что как сам векторный потенциал скорости, так и его нормальная производная на границе равны нулю.

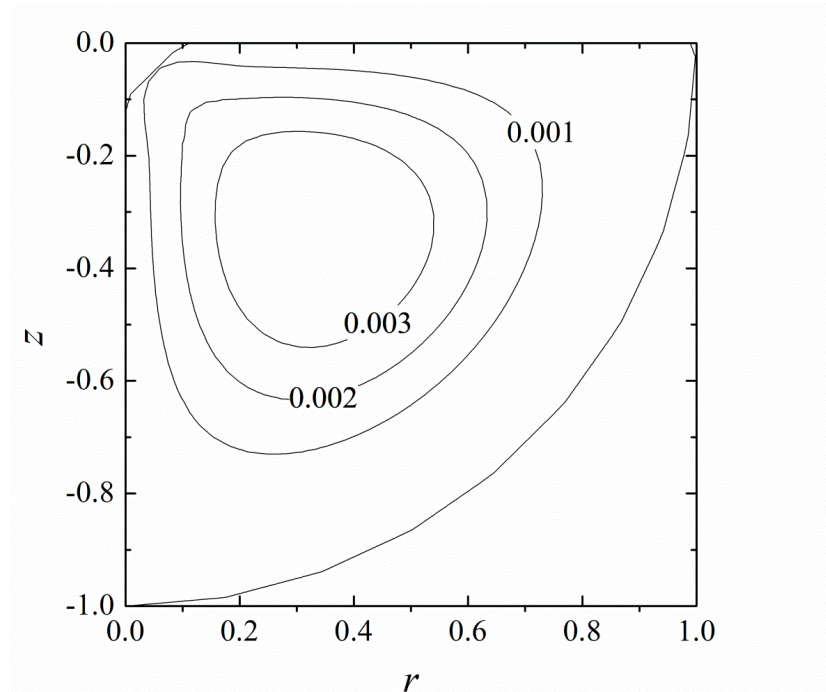


Рис. 5.2.3. Азимутальная компонента векторного потенциала скорости, даваемая с помощью приближенной формулы

Реализовать это при совместном решении двух различных уравнений достаточно проблематично. Вместе с тем, данное точное условие можно заменить на приближенное. Рассмотрим это на элементарном примере. Пусть при некотором значении одной из независимых переменных  $x = a$  имеет место условие непротекания. Это означает, что:

$$\psi|_{x=a} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0.$$

Для значения функции на некотором малом расстоянии  $h$  можно записать следующую приближенную формулу (связанную с разложением по формуле Тейлора с точностью до второго слагаемого, следующими слагаемыми будем пренебрегать):

$$\psi|_{x=a+h} \cong \psi|_{x=a} + h \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=a}.$$

Учитывая граничные условия, которые были записаны выше, можно сказать, что:

$$\psi|_{x=a+h} \cong \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=a}.$$

Около границы можно воспользоваться следующим условием (учитывая, что векторный потенциал на границе тождественно равен нулю, и также допустимо полагать нулевыми и его вторые частные производные вдоль поверхности):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\omega.$$

Это означает, что для условия на границе можно записать следующее:

$$\psi|_{x=a+h} \cong -\frac{1}{2} h^2 \omega|_{x=a}.$$

Это составляет суть так называемых условий Тома [79], которые в случае нашей задачи можно переписать в следующей форме:

$$\psi|_{r=a} = \psi|_{r=1} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \psi|_{\theta=0} = 0;$$

$$\omega|_{\theta=0} = 0;$$

$$\omega|_{r=a+h} = -\frac{2}{h^2} \psi|_{r=a};$$

$$\omega|_{r=1-h} = -\frac{2}{h^2} \psi|_{r=1};$$

$$\omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}-g} = -\frac{2}{h^2} \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

В случае численного решения  $h$  и  $g$  могут играть роль шага разностной схемы. Отметим, что данные условия позволяют достаточно точно описать решение, которое соответствует исходному граничному условию, обусловленному физическими соображениями.

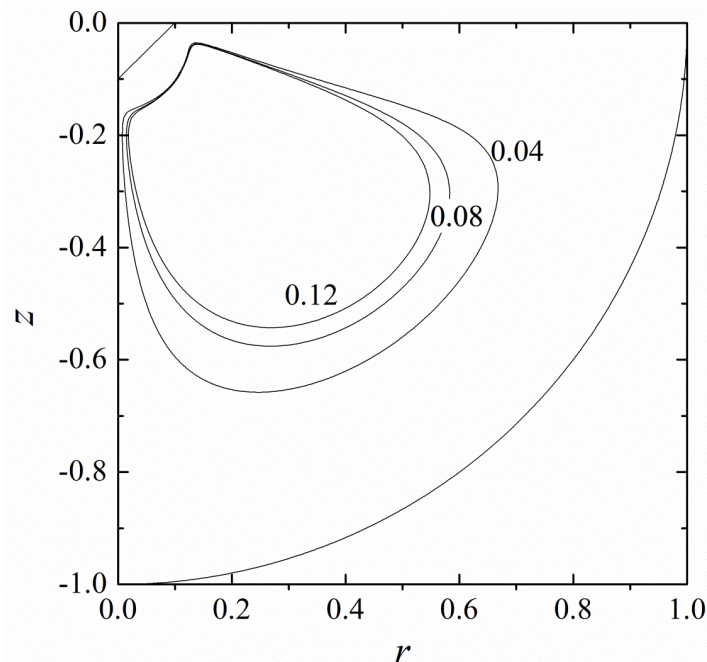




Рис. 5.2.4. Завихренность поля скорости, полученная с помощью численного моделирования

В качестве метода решения удобно использовать так называемый счет на установление [82]. Он связан с заменой системы эллиптических уравнений на систему параболических:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{A(\cos \theta - 1)}{r^4 \sin \theta};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} + \omega.$$

Учитывая отрицательные собственные значения оператора Лапласа, функции будут со временем выходить на постоянные выражения, соответствующие решению исходной эллиптической задачи. Выполнения граничных условий можно добиться итерационным способом.

Результаты численного решения задачи для завихренности показаны на рис. 5.2.4. Можно отметить, что, хотя в целом решение и соответствует тому, что было получено аналитически, есть ряд отличий, которые не «улавливаются» старшей из мод решения. Так же важно отметить тот факт, что завихренность в данном случае может принимать в том числе и отрицательные значения около краев исследуемой области. Примерно то же самое можно сказать и о решении для азимутальной компоненты векторного потенциала скорости, которая представлена на рис.5.2.5. Численное решение позволяет в данном случае учесть ряд дополнительных особенностей скорости, линии которой соответствуют линиям уровня для векторного потенциала.

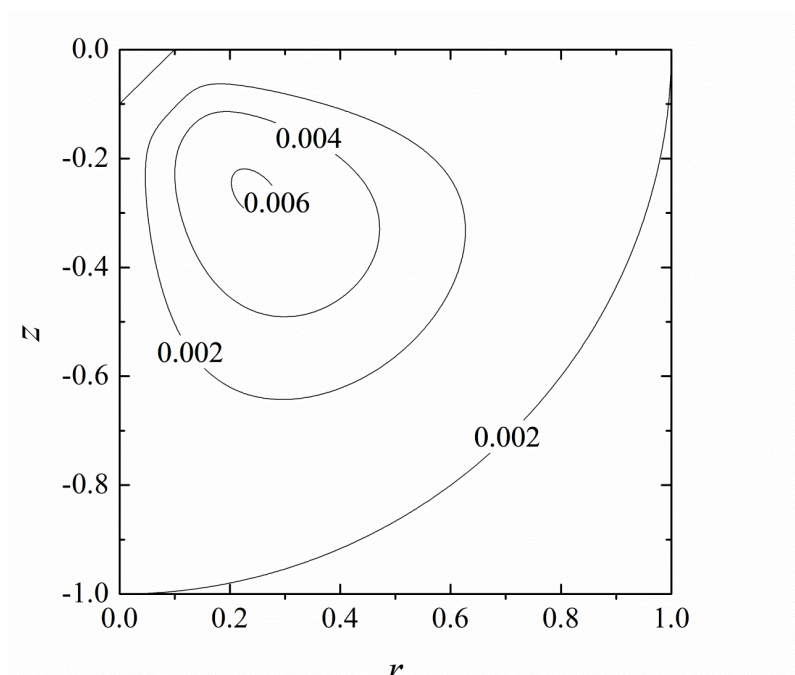


Рис. 5.2.5. Завихренность векторного потенциала скорости, полученная с помощью численного моделирования



### §3. Электровихревое течение между двумя плоскостями

Не менее важное значение имеет и другой пример, который связан с электровихревым течением между двумя плоскостями [218] [222]. Возьмем две плоскости, которые являются электродами одноименной полярности. Пусть ток от них растекается к достаточно удаленному электроду, расстояние до которого можно предполагать бесконечным (рис. 5.3.1).

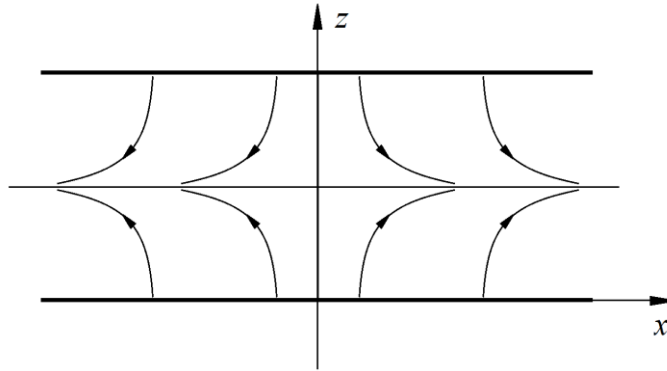


Рис. 5.3.1. Примерная структура течения

Запишем уравнение Навье – Стокса с учетом того, что плотность силы связана с током величины  $\mathbf{j}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c\rho} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{v}.$$

С учетом того, о какой области идет речь, будем пользоваться цилиндрической системой координат. В таком случае скорость течения можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_z \mathbf{e}_z.$$

Так же, как и раньше, воспользуемся векторным потенциалом скорости, который в таком случае будет представляться в виде  $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_\varphi$ , а скорость можно представить так:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\psi & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \mathbf{e}_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) \mathbf{e}_z;$$

т.е.

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z};$$

$$v_z = \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right).$$

Тогда первое слагаемое в правой части выражается так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \mathbf{e}_z.$$

Для второго слагаемого мы можем получить, что:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \mathbf{e}_z + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \mathbf{e}_r - \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) \mathbf{e}_z + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_r + \left( -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\psi}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{2\psi}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что ток описывается при помощи ротора векторного потенциала тока  $\Psi_1$ :

$$\mathbf{j} = \text{rot} \Psi_1$$

Для осесимметричного течения, когда все величины не зависят от азимутального угла  $\varphi$ , данный векторный потенциал будет иметь только одну компоненту:

$$\Psi_1 = \psi_1 \mathbf{e}_\varphi,$$

а его ротор представляется в следующей форме:

$$\mathbf{j} = \text{rot}(\psi_1 \mathbf{e}_\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\psi_1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi_1)}{\partial r} \mathbf{e}_z.$$

В простейшем случае можно считать, что функция  $\psi_1$  представляется в форме [218]:

$$\psi_1 = \frac{Ir}{L} \left( z - \frac{L}{2} \right),$$

где  $L$  – расстояние между плоскостями, а  $I$  – характерное значение электрического тока.

Плотность тока в таком случае выражается так:

$$\mathbf{j} = -\frac{Ir}{L} \mathbf{e}_r + 2 \frac{I}{L} \left( z - \frac{1}{2} \right) \mathbf{e}_z.$$

Для магнитного поля мы в таком случае можем записать, что:

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \Psi_1 = \frac{4\pi}{c} \psi_1 \mathbf{e}_\varphi = \frac{4\pi}{c} \frac{Ir}{L} \left( z - \frac{L}{2} \right) \mathbf{e}_\varphi.$$

Векторное произведение плотности тока и индукции магнитного поля в таком случае выражается так:

$$[\mathbf{j}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ -\frac{Ir}{L} & 0 & 2\frac{I}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right) \\ 0 & \frac{4\pi Ir}{c}\left(z - \frac{L}{2}\right) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{8\pi I^2 r}{c} \frac{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2}{L^2} \mathbf{e}_r - \frac{4\pi I^2 r^2}{c} \frac{\left(z - \frac{L}{2}\right)}{L^2} \mathbf{e}_z.$$

Возьмем операцию ротора от обеих частей уравнения, учитывая, что ротор от градиента будет нулевым:

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) + \text{rot}((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}) = \frac{1}{c\rho} \text{rot}[\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \eta \text{rot}(\Delta \mathbf{v}).$$

Рассмотрим по отдельности ротор каждой из компонент. Для ротора частной производной по времени можно записать следующее:

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} & 0 & \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t}\right) \mathbf{e}_\varphi.$$

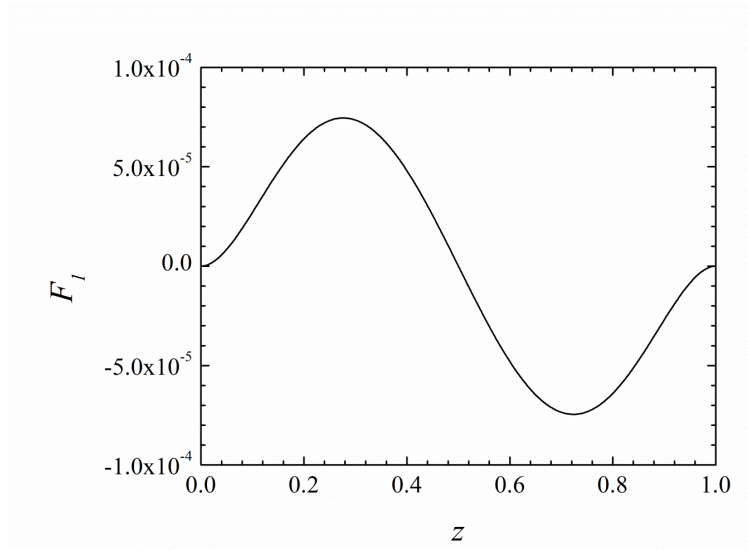


Рис. 5.3.2. Функция первого приближения.

Основную роль здесь будет играть старшая производная по  $z$ . Это связано с тем, что характерный масштаб изменения в данном направлении заметно меньше, чем в случае  $r$ . Тогда можно записать, что:

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) \cong -\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} \mathbf{e}_\varphi.$$

Для ротора второго слагаемого можно получить, что:

$$\begin{aligned} \text{rot}((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}) = & \\ = & \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) & 0 & \left( -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\psi}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{2\psi}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \end{vmatrix} = \\ = & \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\psi}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \right. \\ & + \frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{4\psi}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\psi}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \\ & \left. - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

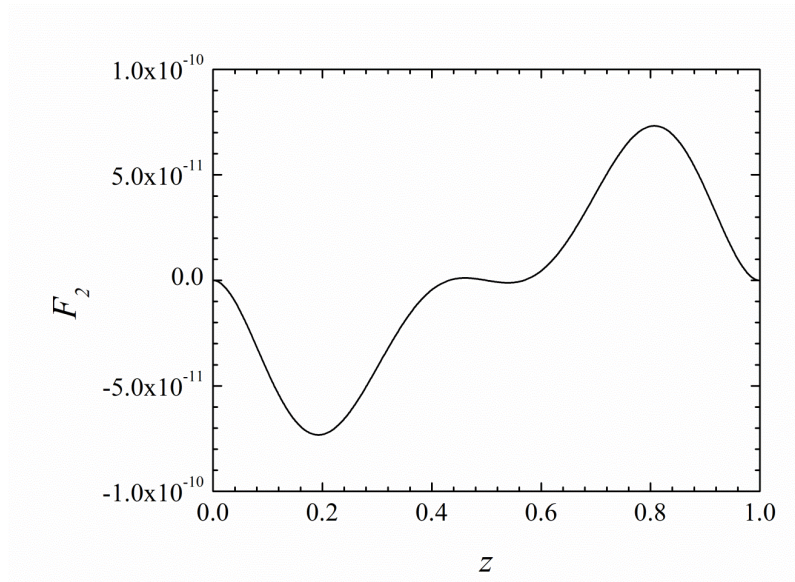


Рис. 5.3.3. Функция второго приближения

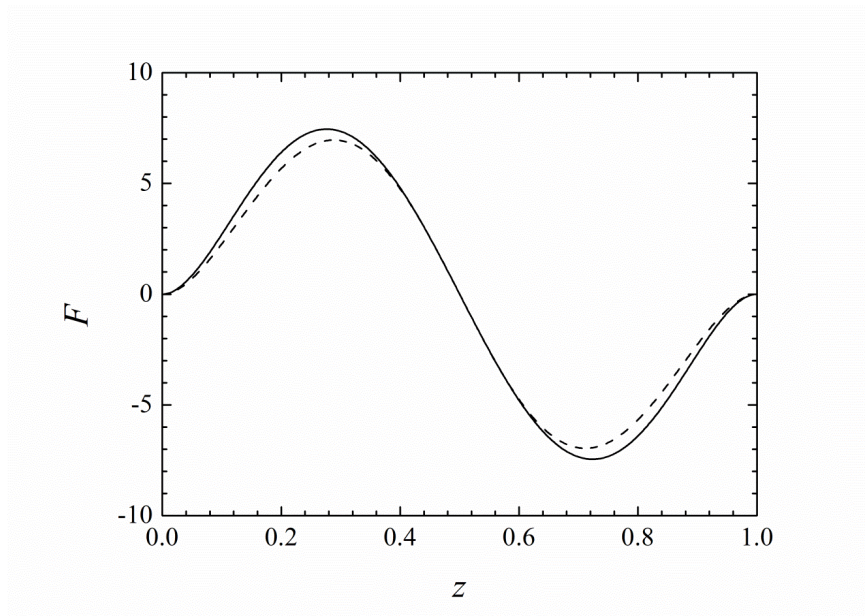


Рис. 5.3.4. Вспомогательная функция при  $S = 10^5$ . Сплошная кривая показывает первое приближение, пунктирная – второе.

Пользуясь аналогичными соображениями, приближенно можно получить, что:

$$\text{rot}((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}) \cong -\frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \mathbf{e}_\varphi.$$

Оценим теперь слагаемое, связанное с действующей силой:

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{j}, \mathbf{B}] &= \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{8\pi}{c} \frac{I^2 r}{L^2} \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 & 0 & -\frac{4\pi}{c} \frac{I^2 r^2}{L^2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{8\pi}{c} \frac{I^2 r}{L^2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Наконец, для последнего слагаемого, связанного с ротором лапласиана, мы можем получить, что:

$$\text{rot}(\eta \Delta \mathbf{v}) = -(\eta \Delta^2 \psi) \mathbf{e}_\varphi.$$

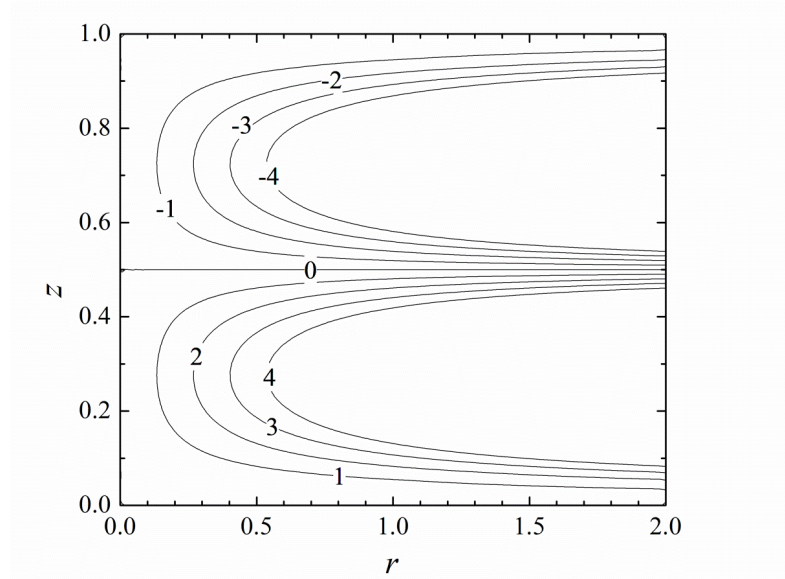


Рис. 5.3.5. Азимутальная компонента векторного потенциала скорости при  $S = 10^5$ .

Вновь учитывая основное слагаемое, мы можем получить выражение:

$$\text{rot}(\eta \Delta \mathbf{v}) \cong -\eta \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \mathbf{e}_\varphi.$$

Таким образом, уравнение Навье – Стокса приводится к виду:

$$-\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \mathbf{e}_\varphi = -\frac{8\pi}{c^2 \rho} \frac{I^2 r}{L^2} \left( z - \frac{L}{2} \right) \mathbf{e}_\varphi - \eta \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \mathbf{e}_\varphi;$$

или, в скалярном виде:

$$-\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = -\frac{8\pi}{c^2 \rho} \frac{I^2 r}{L^2} \left( z - \frac{L}{2} \right) - \eta \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4}.$$

Достаточно удобно пользоваться безразмерными переменными. В качестве единиц измерения для расстояний можно выбрать  $L$ , в качестве единиц для времени  $\frac{L^2}{\eta}$ . Для векторного потенциала скорости мы можем использовать единицы измерения, связанные с  $\eta$ . В таком случае наше уравнение переписывается в форме:

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} = \frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + Sr \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4};$$

где  $S = \frac{8\pi I^2 L^4}{\eta c^2 \rho}$  – параметр электровихревого течения.

Задачу удобно решать, сделав следующую замену [218] [222]:

$$\psi = rF(z, t),$$

где  $F(z, t)$  – некоторая вспомогательная функция, не зависящая от расстояния до оси. В таком случае мы можем получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t} = F \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + S \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4}.$$

Как и раньше, особый интерес для нас будут представлять так называемые установившиеся течения, когда частные производные по времени обращаются в нуль, и уравнение можно переписать в полных производных:

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} + S \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{d^4 F}{dz^4} = 0.$$

В случае, если мы имеем дело с условием прилипания, граничные условия в нашей задаче выглядят следующим образом:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = \frac{dF}{dz}|_{z=0} = \frac{dF}{dz}|_{z=1} = 0.$$

Данная задача является нелинейной, и ее решение представляет определенные трудности. Вместе с тем, вполне возможен поиск ее решений в виде разложения по слагаемым, пропорциональным разным степеням параметра электровихревого течения [222]:

$$F(z) = S^1 F_1(z) + S^2 F_2(z) + \dots + S^n F_n(z).$$

Составим уравнение для первого слагаемого. Тогда, предполагая  $S$  достаточно малым, можно получить такое равенство:

$$S \frac{d^4 F_1}{dz^4} + S^2 F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3} + S \left( z - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Второе слагаемое является достаточно малым, поэтому уравнение сводится к следующей форме:

$$S \frac{d^4 F_1}{dz^4} + S \left( z - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Иными словами, мы получаем для первого приближения уравнение:

$$\frac{d^4 F_1}{dz^4} = \frac{1}{2} - z$$

с граничными условиями:

$$F_1|_{z=0} = F_1|_{z=1} = \frac{dF_1}{dz}|_{z=0} = \frac{dF_1}{dz}|_{z=1} = 0.$$

Интегрируя, мы получим следующее решение:

$$F_1(z) = \frac{1}{120} \left( \frac{1}{2} - z \right) z^2 (z-1)^2.$$

Найдем теперь уравнение для второго приближения. С его учетом, мы получаем:

$$S \frac{d^4 F_1}{dz^4} + S^2 \frac{d^4 F_2}{dz^4} - \left( S F_1 + S^2 F_2 \right) \left( S \frac{d^3 F_1}{dz^3} + S^2 \frac{d^3 F_2}{dz^3} \right) + S \left( z - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Учитывая тот факт, что  $\frac{d^4 F_1}{dz^4} = \frac{1}{2} - z$ , мы можем получить следующее:

$$S^2 \frac{d^4 F_2}{dz^4} - S^2 F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3} - S^3 F_1 \frac{d^3 F_2}{dz^3} - S^3 F_2 \frac{d^3 F_1}{dz^3} - S^4 F_2 \frac{d^3 F_2}{dz^3} = 0.$$

Пренебрегая слагаемыми, пропорциональными степени параметра выше второй, мы получаем:

$$\frac{d^4 F_2}{dz^4} = F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3}.$$

Раскроем выражение для первого приближения, тогда мы получим формулу:

$$F_1(z) = -\frac{1}{120} \left( z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right).$$

Для производных различных порядков мы можем получить следующие формулы:

$$\frac{dF_1}{dz} = -\frac{1}{120} (5z^4 - 10z^3 + 6z^2 - z),$$

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} = -\frac{1}{120} (20z^3 - 30z^2 + 12z - 1),$$

$$\frac{d^3 F_1}{dz^3} = -\frac{1}{120} (60z^2 - 60z + 12).$$

Для произведения третьей производной и самого первого приближения мы получим, что:

$$\begin{aligned} F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3} &= \left( -\frac{1}{120} \right)^2 \left( z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right) (60z^2 - 60z + 12) = \\ &= \frac{1}{14400} (60z^7 - 210z^6 + 282z^5 - 180z^4 + 54z^3 - 6z^2) = \\ &= \frac{1}{2400} (10z^7 - 35z^6 + 47z^5 - 30z^4 + 9z^3 - z^2). \end{aligned}$$

Уравнение для второго приближения в таком случае записывается в следующей форме:

$$\frac{d^4 F_2}{dz^4} = \frac{1}{2400} (10z^7 - 35z^6 + 47z^5 - 30z^4 + 9z^3 - z^2),$$

с условием:

$$F_2|_{z=0} = F_2|_{z=1} = \frac{dF_2}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF_2}{dz} \Big|_{z=1} = 0.$$

Его решение можно получить с помощью интегрирования и будет выглядеть так [222]:

$$F_2(z) = \frac{1}{2400} \left( \frac{z^{11}}{792} - \frac{z^{10}}{144} + \frac{47z^9}{3024} - \frac{z^8}{56} + \frac{3z^7}{280} - \frac{z^6}{360} + \frac{13z^3}{166320} - \frac{z^2}{55440} \right).$$



Приводя подобные слагаемые, мы можем переписать его в форме:

$$F_2(z) = \frac{z^2(z-1)^2\left(z - \frac{1}{2}\right)}{199584000} (105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3)$$

Зависимости данной функции от координат представлены на рис. 5.3.2 и рис. 5.3.3. Можно отметить, что сама по себе функция второго приближения оказывается меньше, чем для первого.

Аналогично можно получить и следующие приближения. Оценим применимость той или иной аппроксимации. Построенные выражения дают основание считать, что модуль данных функций ограничен по порядку величины такими выражениями [222]:

$$|F_1(z)| < 10^{-4};$$

$$|F_2(z)| < 10^{-10}.$$

Это означает, что первое приближение корректно с точностью  $10^{-2}$  (что можно считать вполне достаточным) при  $S < 10^4$ , а учитывая, что параметр электровихревого течения по сути представляет собой квадрат числа Рейнольдса, это означает, что оно корректно при таком условии:

$$\text{Re} = \sqrt{S} < 10^2.$$

Таким образом, при малых числах Рейнольдса решение практически полностью описывается при помощи первого приближения, а при больших значениях (которые являются реалистичными) его можно записать в следующей форме [222]:

$$F(z) = -\frac{S}{120} z^2(z-1)^2\left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{S^2}{199584000} z^2(z-1)^2\left(z - \frac{1}{2}\right) (105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3)$$

График данной функции с учетом только первого приближения и с учетом второго при достаточно большом значении представлен на рис. 5.3.4. Можно видеть, что даже несмотря на крайне значительную величину тока, различия между первым и вторым приближением достаточно невелика. Отвечающий данному случаю график азимутальной компоненты векторного потенциала показан на рис. 5.3.5. Линии тока жидкости в таком случае будут соответствовать данным линиям.

Отметим, что использование дальнейших приближений, хотя и возможно, как правило не требуется в большинстве случаев, которые могут встречаться в приложениях.

В настоящей главе построены модели промежуточного типа для течений проводящей жидкости под действием магнитного поля, связанного с распространением электрического тока.

К выводам можно отнести разработку модельных представлений для поведения магнитного поля в полусферическом объеме и между двумя бесконечными плоскостями. Получены спектральные разложения для линейной задачи. С помощью математических методов теории возмущений построено приближенное решение в нелинейном случае.

Результаты представленные в настоящей главе, были опубликованы в работах [75] [219] [220] [221] [222]. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад соискателя был основополагающим. Соискатель принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений. При этом, в работах [75] и [219] модельные представления формулировались соискателем совместно с И.О.Тепляковым В работе [220] модельные представления формулировались соискателем совместно с И.О.Тепляковым, И.А.Федотову принадлежит ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных соискателем. В работе [221] модельные представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым, Е.П.Георгиевской был получен ряд численных решений уравнений, сформулированных соискателем. В работе [222] основные вопросы, связанные с постановкой задачи, обсуждались соискателем с А.Ю.Чудновским.

# Глава VI. Генерация магнитных полей с помощью движений специальной структуры

В настоящей главе изучается вопрос о генерации начальных магнитных полей в галактиках с помощью батареи Бирмана, описываемых в безразмерных переменных с помощью интегрального уравнения:

$$B(r') = -2 \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) \frac{dr}{r} - \lambda \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) B(r) dr,$$

где

$$J(x) = \int_0^\pi \frac{(1 - x \sin \theta) d\theta}{(1 + x^2 - 2x \sin \theta)^{3/2}}.$$

Также рассматривается вопрос об усилении магнитных полей в конвективных ячейках в двумерном случае. Компонента векторного потенциала описывается с помощью уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_x \frac{\partial a}{\partial x} + v_y \frac{\partial a}{\partial y} = \eta_m \Delta a + v_x H_0.$$

с периодическими условиями:

$$a|_{x=-\pi} = a|_{x=\pi}; \quad a|_{y=-\pi} = a|_{y=\pi}.$$

Начальные условия, как правило, брались нулевыми.

## §1. Общие вопросы

В предыдущих главах был рассмотрен ряд примеров, которые относятся к вопросам генерации магнитных полей с помощью механизма динамо. По большому счету, можно говорить о том, что используемые там уравнения являются результатом усреднения равенств, имеющих место в магнитной гидродинамике. Как правило, они содержат некоторые коэффициенты, которые характеризуют типичные скорости, присутствующие в среде. Результатом их решения является магнитное поле, которое является следствием некоторого усреднения мелкомасштабных магнитных полей. Подобные модели, как было показано выше, являются достаточно полными и описывают магнетизм большого количества космических объектов и его эволюцию со временем в рамках моделей промежуточного типа, и дают достаточно приемлемые и согласующиеся с данным наблюдений результаты. Вместе с тем, данные подходы оставляют

некоторые вопросы, на которые нельзя ответить, пользуясь только методами теории динамо среднего поля.

Так, все указанные модели предполагают, что в астрофизическом объекте (галактике [97], внешнем кольце [51], аккреционном диске [194] и т.д.) присутствует некоторое начальное магнитное поле. В том случае, если оно достаточно интенсивное, а значения кинематических параметров проводящей среды таковы, что динамо-число превышает определенное пороговое значение, происходит рост магнитного поля [47]. Вместе с тем, процесс генерации подобных «затравочных» магнитных полей остается за пределами рассмотрения. Поэтому возникает существенная необходимость исследования процесса возбуждения таких структур за счет тех или иных течений. Один из подходов, который мы планируем с наиболее общих позиций описать в данной работе, связан с так называемым бирмановским механизмом [223] [224] [225] [226] [227] [228] [229] [230]. Он связан с тем, что протоны и электроны имеют одинаковое значение заряда, вместе с тем, их масса существенно отличается. Поэтому по мере распространения их потока от центра изучаемого объекта (например, в случае галактик им может служить ее активное ядро), они существенно по-разному будут увлекаться движущейся средой, и поэтому возникает определенный круговой ток, приводящий к возникновению магнитного поля. Оно имеет достаточно небольшую интенсивность, однако может служить «затравкой» для генерации поля за счет мелкомасштабного и крупномасштабного динамо [47]. В настоящей главе мы приводим оценки значения данного поля и его пространственной структуры. Отметим, что для этого необходимо решение интегральных уравнений, которые решаются в рамках тех или иных приближений, обусловленных с точки зрения математической физики [231].

Другой проблемой, которая встает при изучении магнитной гидродинамики в астрофизических объектах, является изучения взаимодействия мелкомасштабных течений и магнитного поля. Так, впервые еще Паркер предположил [232], что конвективные ячейки около поверхности Солнца могут способствовать усилению магнитного поля в определенных частях. Степень данного усиления в случае идеальной магнитной гидродинамики, является, по-видимому, неограниченной, и связана с экспоненциальным ростом магнитного поля [233] [234]. Наличие конечной магнитной вязкости несколько ограничивает этот процесс, однако нельзя исключать, что магнитное поле начинает вытягиваться в «жгуты» вдоль границ конвективных ячеек. Вместе с тем, хотелось бы отметить, что подобные процессы, могут быть актуальны не только на Солнце, но и в других астрофизических объектах, что ставит нас перед необходимостью детального исследования изменения магнитного поля при наличии течений замкнутой формы. С этой целью в настоящей главе проведен анализ поведения магнитного поля, который делается как с аналитической, так и с численной позиции. Отметим, что в данном случае также необходимо пользоваться моделями промежуточного типа, поскольку расчеты требуют

исключительно больших вычислительных ресурсов даже в этом случае. Немаловажно так же, что данные результаты очень хорошо соответствуют аналитическим оценкам, которые делаются параллельно [235]. Вместе с тем, они оказываются достаточно близкими к истине, что подтверждается наблюдениями магнитных полей на Солнце [236], структура которых действительно похожа на то, что представлено в данном диссертационном исследовании. Отметим, что вопрос о влиянии конвекции на поведение магнитного поля с тем же успехом может быть использован не только в случае Солнца, но и при изучении поведения поля в галактиках, аккреционных дисках и т.д. – если мы не ограничиваемся простейшими моделями, связанными с эволюцией магнитной спиральности.

Также исключительного внимания заслуживает связанный с этим вопрос о возможности коллапса в магнитной гидродинамике (и гидродинамике вообще). Классическая теория колмогоровской турбулентности [237], согласно которой в инерционном интервале колебания завихренности имеют при малых размерах порядок  $\lambda^{-2/3}$ , говорит о том что при определенных условиях возможен коллапс. Простейшие численные расчеты, на первый взгляд, показали наличие данного явления. Однако дальнейшее исследование соответствующих процессов наглядно продемонстрировало, что на самом деле найденные решения коллапсу не соответствуют [238]. Последующее изучение вопроса показало, что трехмерные уравнения Эйлера допускают при определенных условиях возникновение коллапса [239]. Тем не менее, если мы используем модели промежуточного типа, связанные с двумерными уравнениями, то возникновение каких-либо особенностей в течение конечного времени оказывается запрещенным [240]. Вместе с тем, ничто не мешает рассмотреть экспоненциальный рост, который будет соответствовать экспоненциальному же уменьшению всех геометрических размеров интересующих нас особенностей [241]. Численные расчеты показывают, что в случае использования трехмерных уравнений Эйлера особенности также имеет место возникновение особенностей, размеры которых сокращаются по экспоненциальному закону [242] [243] [244]. Большой интерес представляют результаты, полученные для неустойчивостей так называемого блинного типа. Отметим, что они относились к исследованию эволюции вектора завихренности течения. Между тем, данная задача имеет очень тесную взаимосвязь с задачами магнитной гидродинамики. Как магнитное поле, так и завихренность течения являются типичными примерами векторов, замороженных в среду при условии хорошей проводимости жидкости или газа. Это означает, что принципиальные закономерности вполне могут быть перенесены и на процессы, связанные с эволюцией магнитного поля.

## **§2. Бирмановский механизм и магнитное поле**

Рассмотрим процесс истечения частиц – протонов и электронов – из центрального объекта (им может быть активное ядро галактики, или центральное тело в случае изучения аккреционного

диска). Нам будет в первую очередь интересно, как частицы распространяются в плоскости диска, поэтому имеет смысл рассматривать происходящие процессы в рамках цилиндрической системы координат, центр которой ассоциируется с центральным объектом. Будем предполагать, что радиальная скорость меняется достаточно мало и всегда равна  $V$ . [230]

Уравнение движения частицы массы  $m$  может быть записано в следующей несложной форме [231]:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_g;$$

где  $\mathbf{w}$  - ускорение,  $\mathbf{F}_c$  – сила сопротивления движению,  $\mathbf{F}_L$  – сила Лоренца,  $\mathbf{F}_g$  – гравитационная сила. Учитывая достаточно большую скорость движения частиц, а так же тот факт, что они имеют малую массу, можно пренебречь данным слагаемым, и записать такое приближенное равенство:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_L.$$

Основной интерес для нас представляет составляющая данного равенства, связанная с азимутальным углом:

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Учитывая то, что было сказано выше относительно значения радиальной скорости, мы можем записать для соответствующей компоненты ускорения такое выражение:

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2V\dot{\varphi}.$$

Что касается силы сопротивления, то она в первую очередь связана с вращением объекта вокруг своей оси, и его взаимодействием с частицами [231]:

$$F_{c,\varphi} = -\frac{mr}{\tau}(\dot{\varphi} - \Omega).$$

Для силы Лоренца, если мы учтем ранее высказанные предположения относительно радиальной скорости и будем предполагать, что магнитное поле направлено вдоль оси вращения объекта, можно получить такое выражение [91]:

$$F_{L,\varphi} = -\frac{e}{c}VB.$$

Таким образом, уравнение для ускорения будет выглядеть следующим образом:

$$m(r\ddot{\varphi} + 2V\dot{\varphi}) = -\frac{mr}{\tau}(\dot{\varphi} - \Omega) - \frac{e}{c}VB.$$

Разделим обе части на значение массы, и в таком случае получим следующее уравнение:

$$r\ddot{\varphi} + 2V\dot{\varphi} = -\frac{r}{\tau}(\dot{\varphi} - \Omega) - \frac{e}{mc}VB.$$

Если раскрыть скобки и приравнять единице коэффициент при старшей производной, то оно может быть без труда приведено к следующему несложному виду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2V\tau + r}{r\tau} \dot{\varphi} = \frac{\Omega}{\tau} - \frac{e}{rmc} VB.$$

Будем предполагать, что магнитное поле и расстояние до центрального объекта в нашей задаче меняется медленнее, чем значение азимутального угла, поэтому можно считать данные значения постоянными, что сильно облегчает процесс дальнейшего решения уравнения.

Введем вспомогательную функцию, которая несколько облегчит процесс решения уравнения:

$$\Phi = \dot{\varphi} - \frac{r\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right)$$

Уравнение для нее запишется в следующем виде:

$$\dot{\Phi} + \frac{2V\tau + r}{r\tau} \Phi = 0.$$

Его решение представляется так [115]:

$$\Phi(t) = \Phi(0) \exp\left(-\frac{r\tau}{2V\tau + r} t\right).$$

Если в начальный момент времени угловая скорость равна нулю, то это означает, что:

$$\Phi(0) = -\frac{r\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right).$$

Таким образом, зависимость вспомогательной функции от времени будет выражаться так:

$$\Phi(t) = -\frac{r\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right) \exp\left(-\frac{r\tau}{2V\tau + r} t\right).$$

Возвращаясь к исходному выражению, мы можем получить для производной азимутального угла следующее:

$$\dot{\varphi} = \frac{r\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right) - \frac{r\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right) \exp\left(-\frac{r\tau}{2V\tau + r} t\right)$$

Можно видеть, что со временем решение для производной азимутального угла достаточно быстро сходится к значению:

$$\dot{\varphi}_{\infty} = \frac{r\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right).$$

Это соответствует значению круговой скорости:

$$v_{\varphi} = \frac{r^2\tau}{2V\tau + r} \left( \frac{\Omega}{\tau} - \frac{eVB}{rmc} \right).$$

Для тока, который будет в таком случае создаваться за счет движения с такой скоростью, мы можем получить выражение [245]:

$$I = \pm \frac{ev\varphi}{2\pi r};$$

причем знак «плюс» соответствует протонам, а знак «минус» – электронам.

Таким образом, протонам соответствует следующий ток:

$$I_p = \frac{e}{2\pi} \frac{r\tau_p}{2V\tau_p + r} \left( \frac{\Omega}{\tau_p} - \frac{eVB}{rm_p c} \right).$$

Преобразуя одну из дробей, мы получим, что:

$$I_p = \frac{e}{2\pi} \frac{\tau_p}{1 + \frac{2V\tau_p}{r}} \left( \frac{\Omega}{\tau_p} - \frac{eVB}{rm_p c} \right),$$

где  $m_p$  – соответствующее протону значение массы,  $\tau_p$  – столкновительного времени.

Учитывая, что расстояние до оси вращения достаточно велико, можно приближенно записать следующее:

$$\frac{1}{1 + \frac{2V\tau_p}{r}} \cong 1 - \frac{2V\tau_p}{r}.$$

Для тока мы в таком случае получим [245]:

$$I_p \cong \frac{e\tau_p}{2\pi} \left( 1 - \frac{2V\tau_p}{r} \right) \left( \frac{\Omega}{\tau_p} - \frac{eVB}{rm_p c} \right) = \frac{e\tau_p}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\tau_p} - \frac{eVB}{rm_p c} - \frac{2V\Omega}{r} + \frac{2eV^2 B\Omega}{r^2 m_p c} \right).$$

Последнее слагаемое в скобках является достаточно малым по сравнению с другими (оно является произведением двух малых величин), поэтому можно приближенно записать, что:

$$I_p \cong \frac{e\tau_p}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\tau_p} - \frac{eVB}{rm_p c} - \frac{2V\Omega}{r} \right).$$

Для электронов аналогично можно записать, что:

$$I_e \cong -\frac{e\tau_e}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\tau_e} + \frac{eVB}{rm_e c} - \frac{2V\Omega}{r} \right);$$

где  $m_e$  – масса электрона,  $\tau_e$  – время, соответствующее его столкновениям со средой.

Для суммарного тока, создаваемого парой «протон – электрон» мы можем получить выражение [245]:

$$\begin{aligned} I = I_p + I_e &= \frac{e\tau_p}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\tau_p} - \frac{eVB}{rm_p c} - \frac{2V\Omega}{r} \right) - \frac{e\tau_e}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\tau_e} + \frac{eVB}{rm_e c} - \frac{2V\Omega}{r} \right) = \\ &= \frac{e\Omega}{2\pi} - \frac{e^2 V \tau_p B}{2\pi r m_p c} - \frac{eV \tau_p \Omega}{\pi r} - \frac{e\Omega}{2\pi} - \frac{e^2 V \tau_e B}{2\pi r m_e c} + \frac{eV \tau_e \Omega}{\pi r} = \end{aligned}$$



$$= \frac{eV\Omega}{\pi r} (\tau_e - \tau_p) - \frac{e^2VB}{2\pi r c} \left( \frac{\tau_e}{m_e} + \frac{\tau_p}{m_p} \right).$$

Для времени столкновений можно получить, что [230]:

$$\tau = \frac{m^2 V^3}{16\pi e^4 N \ln \lambda},$$

где  $N$  – концентрация частиц,  $\ln \lambda$  – кулоновский логарифм (можно считать, что он примерно равен двадцати). Это означает, что столкновительное время для протонов намного больше, чем

для электронов, кроме того,  $\frac{\tau_p}{m_p} \gg \frac{\tau_e}{m_e}$ . Это означает, что:

$$I = -\frac{\tau_p eV\Omega}{\pi r} - \frac{e^2VB\tau_p}{2\pi r c m_p}.$$

Величину магнитного поля, которое создается на расстоянии  $r'$  от центрального объекта с помощью тока силы  $I$ , можно определить с помощью следующего интеграла, который связан с законом Био – Савара – Лапласа [91]:

$$B = \frac{2I}{c} \int_0^\pi \frac{r(r - r' \sin \theta) d\theta}{(r'^2 + r^2 - 2r'r \sin \theta)^{3/2}} = \frac{2I}{cr} \int_0^\pi \frac{\left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right) \sin \theta\right) d\theta}{\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \sin \theta\right)^{3/2}} = \frac{2I}{cr} J\left(\frac{r'}{r}\right),$$

где введена новая функция, определяемая с помощью такого интеграла [231]:

$$J(x) = \int_0^\pi \frac{(1 - x \sin \theta) d\theta}{(1 + x^2 - 2x \sin \theta)^{3/2}}.$$

Если мы будем говорить о большом числе частиц, то имеет смысл заменить данное выражение на интеграл, выразив магнитное поле через плотность числа частиц:

$$B(r') = \int_a^R \frac{2I(r)}{cr} J\left(\frac{r'}{r}\right) \cdot 4\pi r h dr,$$

где  $h$  – полутолщина диска,  $a$  – его внутренний радиус,  $R$  – внешний. Тогда для магнитного поля можно получить следующее уравнение:

$$B(r') = \int_0^R \frac{2}{cr} \left( -\frac{\tau_p eV\Omega}{\pi r} - \frac{e^2VB(r)\tau_p}{2\pi r c m_p} \right) J\left(\frac{r'}{r}\right) \cdot 4\pi r h dr,$$

Измеряя магнитное поле в единицах  $\frac{eNh\Omega V\tau_p}{c}$ , а расстояния в единицах  $R$ , можно

получить следующее интегральное уравнение [246]:

$$B(r') = -2 \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) \frac{dr}{r} - \lambda \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) B(r) dr,$$

где также введен параметр

$$\lambda = \frac{e^2 NR}{mc^2}.$$

В произвольном случае решение данной задачи может быть найдено только с помощью различных численных методов. Тем не менее, в большинстве физически обоснованных случаев радиус диска достаточно велик, поэтому параметр  $\lambda$  будет большим, и магнитным полем в левой части уравнения можно пренебречь. По этой причине уравнение может быть приведено к такому виду:

$$0 = -2 \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) \frac{dr}{r} - \lambda \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) B(r) dr,$$

Его решение может быть найдено, если приравнять подынтегральные выражения в обоих интегралах:

$$B(r) = -\frac{2}{\lambda r}.$$

Так, для случая  $\lambda = 0.01$ ,  $a = 0.05$  результаты представлены на рис. 6.2.1. Можно видеть, что поле достигает достаточно больших значений с точки зрения безразмерных единиц.

Хотя данное поле и не очень велико с точки зрения тех магнитных полей, которые в настоящий момент присутствуют в галактиках, не вызывает сомнений, что оно может стать «затравочным» полем для последующей генерации поля с помощью динамо.

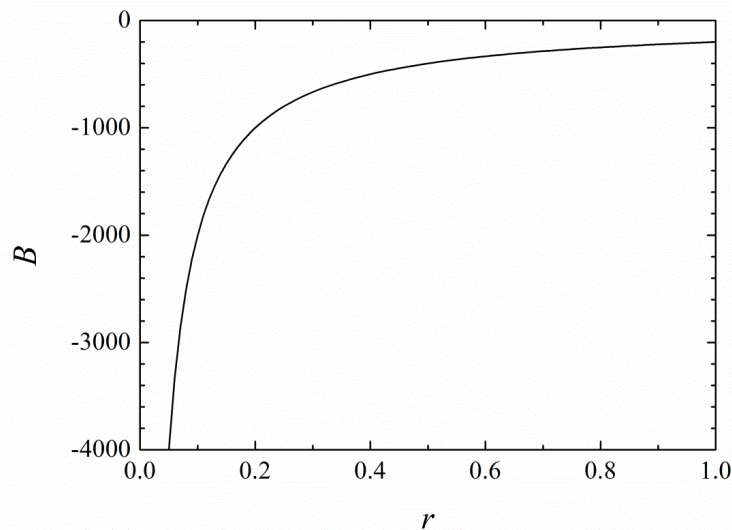


Рис. 6.2.1. Структура поля, которое может быть сгенерировано с помощью батарейного механизма Бирмана

### §3. Генерация магнитных полей с помощью конвективных движений

Конвекция оказывает достаточно значимое влияние на эволюцию магнитных полей в различных астрофизических объектах. Так, ранее обсуждался тот факт, что она может значительно усиливать магнитное поле в конвективной зоне Солнца [232], «сжимая» линии поля. Вместе с тем, нельзя исключать и ее значимую роль при эволюции магнитного поля в других объектах, например галактиках и аккреционных дисках. Кроме того, интерес представляет не только изучение собственно влияния конвекции, но и замкнутых движений вообще: это может помочь понять более детально, каким образом на магнитное поле может повлиять, к примеру турбулентность. Отметим, что для этого вполне возможно рассмотреть простую двумерную модель конвективных течений [235].

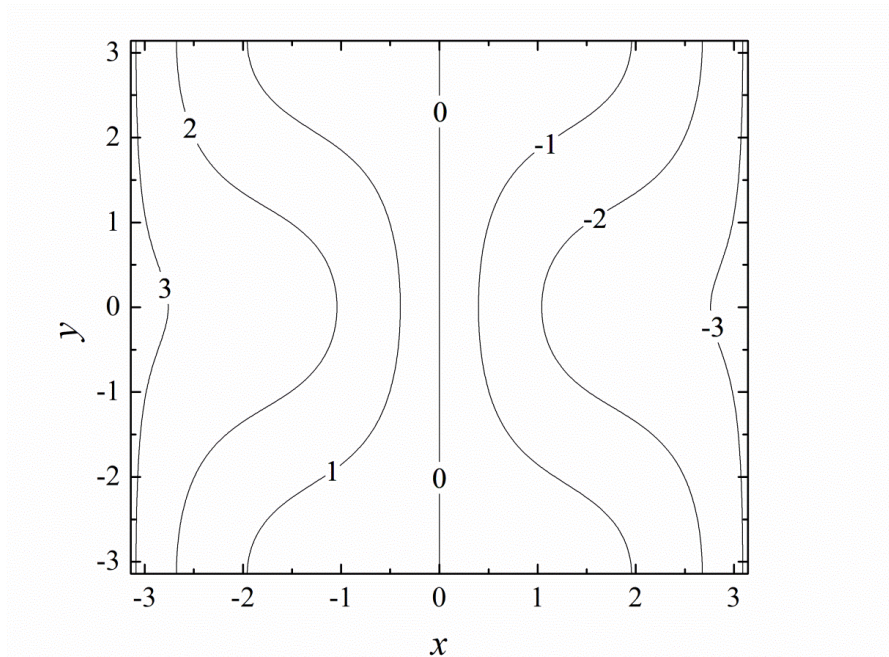


Рис. 6.3.1. Векторный потенциал магнитного поля при  $\eta_m = 0$ ,  $t = 1$ .

Отметим, что для этого удобно использовать уравнение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , которое выражается с помощью уравнения переноса данного вектора, равносильного основному уравнению магнитной гидродинамики [85] (отметим, что здесь и далее магнитные поля, времена и расстояния измеряются в условных безразмерных единицах):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{A} = \eta_m \Delta \mathbf{A};$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\eta_m$  – коэффициент магнитной вязкости [235]. Это позволяет также получить определенные аналогии с эволюцией завихренности в двумерных течениях [247] [248] [249].

Рассмотрим двумерную модель, когда течения происходят в плоскости  $x - y$ . Тогда векторный потенциал имеет только  $z$  – компоненту:

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}_z,$$

а уравнение станет скалярным:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)A = \eta_m \Delta A.$$

Будем предполагать, что есть фоновое магнитное поле  $H_0 \mathbf{e}_y$ , а векторный потенциал представляется в форме [235]:

$$A = -H_0 x + a.$$

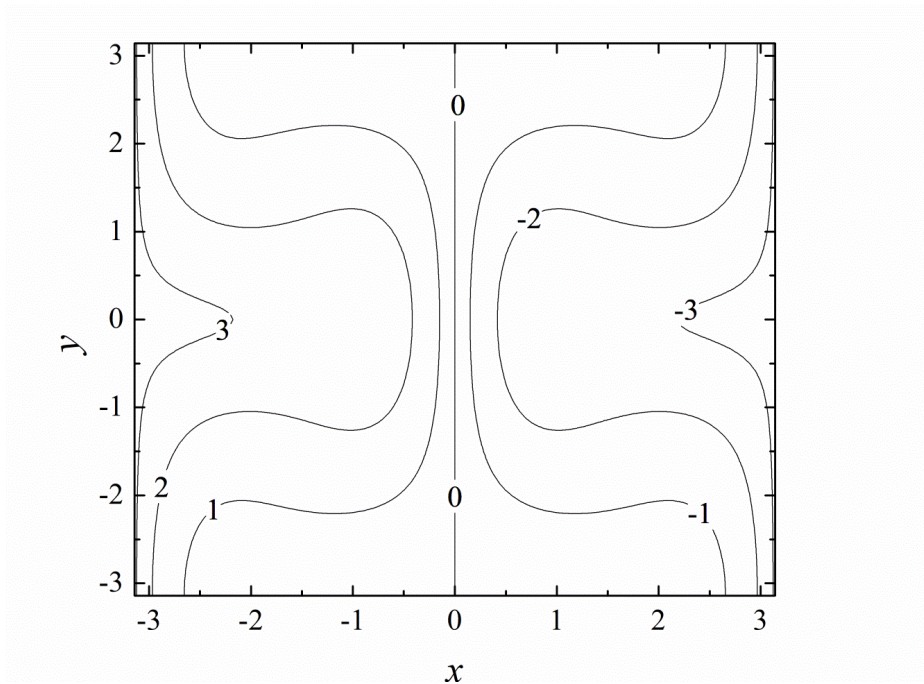


Рис. 6.3.2. Векторный потенциал магнитного поля при  $\eta_m = 0$ ,  $t = 2$ .

В таком случае уравнение представимо в виде:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_x \frac{\partial a}{\partial x} + v_y \frac{\partial a}{\partial y} = \eta_m \Delta a + v_x H_0.$$

Будем рассматривать область:

$$-\pi < x < \pi;$$

$$-\pi < y < \pi.$$

Для скорости возьмем следующую модель [250]:

$$v_x = -\sin x \cos y;$$

$$v_y = \cos x \sin y.$$

а исследуемая компонента векторного потенциала подчиняется периодическим условиям:

$$a|_{x=-\pi} = a|_{x=\pi};$$

$$a|_{y=-\pi} = a|_{y=\pi}.$$

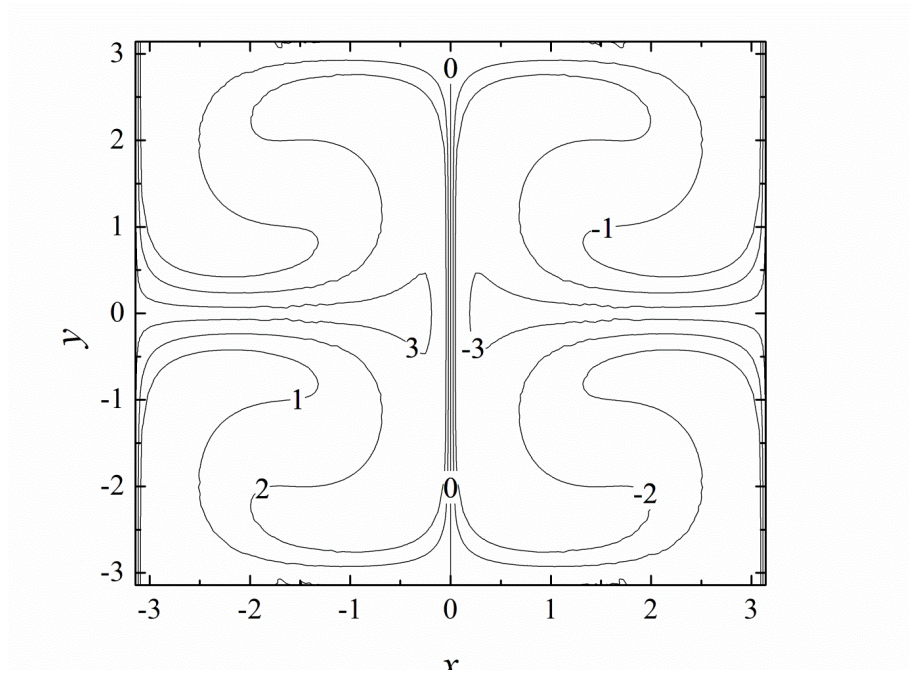


Рис. 6.3.3. Векторный потенциал магнитного поля при  $\eta_m = 0$ ,  $t = 5$ .

В качестве начального поля возьмем то, которое направлено параллельно оси  $y$ , что соответствует нулевому «малому» векторному потенциалу:

$$a|_{t=0} = 0.$$

Оценим поведение магнитного поля при  $y = 0$  со временем. Логично предположить, что оно направлено вдоль оси  $y$ . Для этого перейдем к исходному уравнению для магнитного поля [235]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \eta_m \Delta \mathbf{H}$$

Для производной магнитного поля по времени можно записать следующее выражение:

$$\frac{\partial (H \mathbf{e}_y)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \mathbf{e}_y.$$

Для скорости мы в таком случае получим, что:

$$v_x = -\sin x;$$

$$v_y = 0.$$

Векторное произведение скорости и магнитного поля выражается в такой форме:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\sin x & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = -H \sin x \mathbf{e}_z.$$

Ротор тогда примет следующий вид:



$$\text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -H \sin x \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial y} (H \sin x) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} (H \sin x) \mathbf{e}_y.$$

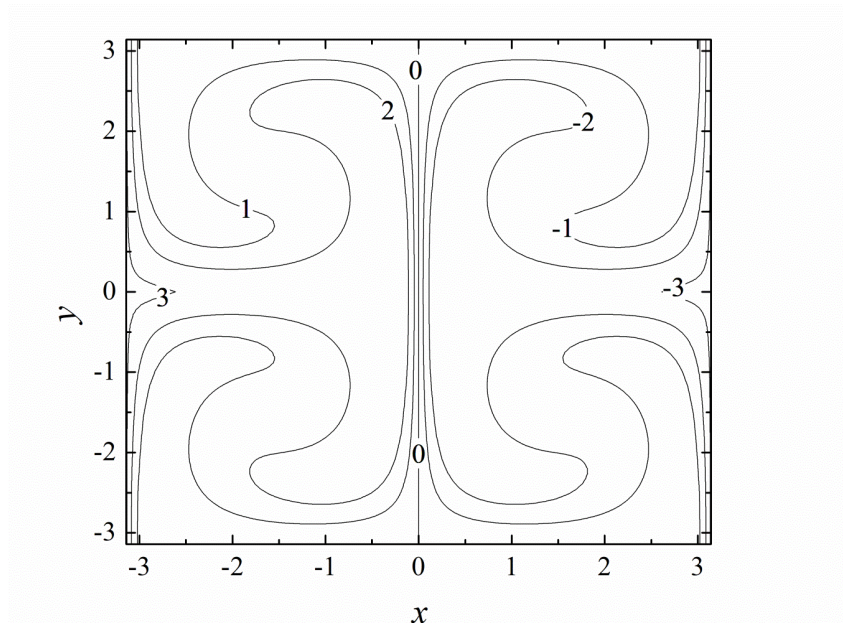


Рис. 6.3.4. Векторный потенциал магнитного поля при  $\eta_m = 0.01$ ,  $t = 5$ .

Для оператора Лапласа мы получим следующее:

$$\eta_m \Delta \mathbf{H} = \eta_m \Delta H \mathbf{e}_y.$$

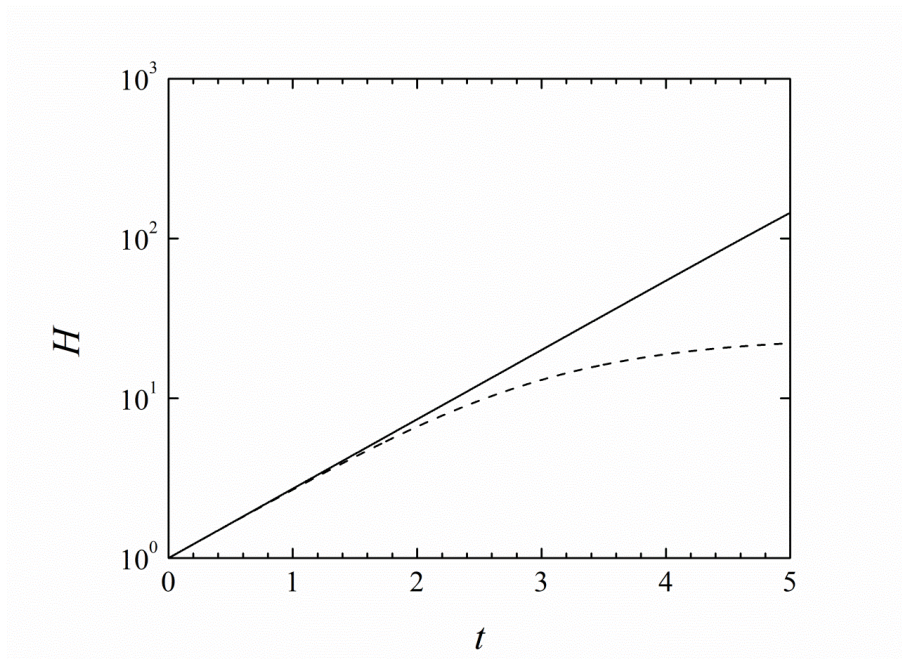


Рис. 6.3.5. Эволюция магнитного поля со временем. Сплошная линия показывает случай

$\eta_m = 0$ , пунктирная –  $\eta_m = 0.01$ .

В проекции на ось  $z$  мы получим такое уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(H \sin x) + \eta_m \Delta H.$$

Предполагая, что основной вклад в оператор Лапласа вносит производная по оси  $x$ , в окрестности точки  $x = 0$  справедливо равенство:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(H \sin x) + \eta_m \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим случай пренебрежимо малой вязкости и возьмем точку  $x = 0$ . Тогда:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = H.$$

В таком случае магнитное поле зависит от времени по следующему закону:

$$H(t) = H_0 \exp t.$$

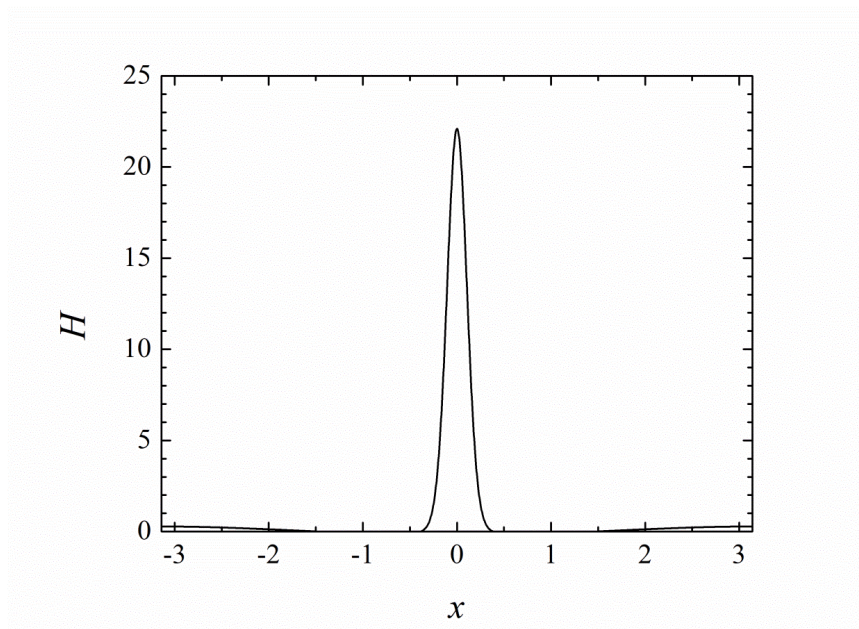


Рис. 6.3.6. Зависимость магнитного поля от координаты  $x$  при  $y = 0, \eta_m = 0.01, t = 5$ .

Таким образом, будет наблюдаться экспоненциальный рост магнитного поля. Исследуем теперь стационарное значение поля около данной точки в случае конечного значения коэффициента магнитной вязкости. Тогда производной по времени можно пренебречь, а для синуса можно приближенно считать, что  $\sin x \cong x$ . В таком случае уравнение примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xH) + \eta_m \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0.$$

Его можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( xH + \eta_m \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Оно приводит к следующему равенству:

$$xH + \eta_m \frac{\partial H}{\partial x} = \text{const.}$$

Его решением, если учитывать то, что максимальное значение магнитного поля соответствует началу координат, будет следующее [235]:

$$H(x) = H_{\max} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta_m}\right).$$

Результат моделирования магнитного поля при нулевой магнитной вязкости показан на рис. 6.3.1 – 6.3.3. Можно видеть, что линии уровня (соответствующие линиям магнитного поля) векторного потенциала сжимаются, т.е. можно говорить об усилении магнитного поля. То, что происходит при конечном значении магнитной вязкости, показано на рис. 6.3.4. Принципиально результаты мало отличаются от того, что будет в «ламинарном» случае. Тем не менее, магнитное поле частично размазывается.

Эволюцию магнитного поля со временем можно видеть на рис. 6.3.5. В ламинарном случае рост магнитного поля по экспоненциальному закону происходит бесконечно, а при наличии вязкости оно постепенно выходит на постоянное значение. На рис. 6.3.6 показана зависимость магнитного поля от координаты при  $y = 0$ . Она в целом соответствует тому, что было получено с помощью простых оценок.

Таким образом, можно заключить, что при конвекции линии магнитного поля «сжимаются» в области нисходящих потоков. Подобный результат может быть очень важен при изучении влияния на магнитное поле как конвективных течений, так и других, имеющих похожую структуру (например, турбулентность).

В данной главе изучен процесс генерации магнитных полей с помощью течений специального вида. К выводам можно отнести получение детальной структуры магнитного поля на начальном этапе эволюции галактики при больших красных смещениях. Также исследован вопрос о влиянии конвекции на магнитное поле. Продемонстрировано, что на границе конвективных ячеек могут образовываться области с экспоненциально растущим магнитным полем. В случае использования эйлеровых уравнений рост магнитного поля оказывается бесконечным, для «вязкого» случая величина магнитного поля ограничена величиной, пропорциональной обратному значению коэффициента вязкости.

Результаты представленные в настоящей главе, были опубликованы в работах [231] [235]. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад соискателя был основополагающим.



Соискатель принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений. При этом, в работе [231] формулировка модельных представлений проводилась соискателем совместно с Р.Р.Андреасяном. В работе [235] теоретические оценки для магнитного поля были получены совместно с Е.А.Кузнецовым, также ему принадлежит общая идея данной статьи.

# Заключение

В настоящей работе была рассмотрена эволюция магнитного поля в проводящей среде как в астрофизике, так и прикладных задачах. Продемонстрировано, что в весьма значительной части они могут быть описаны при помощи моделей промежуточного типа, позволяющих значительно экономить вычислительные ресурсы и делать определенные качественные оценки поведения магнитных полей и формирования течений. Вместе с тем, они дают результаты, которые являются физически обоснованными и соответствуют данным наблюдений и экспериментов. Как мы показали в настоящей работе, применение моделей промежуточного типа для исследования эволюции магнитных полей в проводящей среде является оправданным и имеет значительные перспективы в будущем.

Хотелось бы отметить следующие предметные результаты, которые представлены в рамках данной диссертационной работы.

1. Детально исследованы решения уравнений планарного приближения, описывающего эволюцию магнитных полей в тонких дисках, связанную с  $P$ -неинвариантностью альфа-эффекта. Продемонстрировано, что в большинстве реально встречающихся задач можно ожидать генерации магнитных полей, обладающих осевой симметрией, в то время как рост неосесимметричных полей, рассматривавшихся ранее, оказывается существенно подавленным. Для данных моделей были разработаны математические методы, связанные со спектральным анализом встречающихся в задаче дифференциальных операторов. Также проведен подробный анализ того, что происходит в случае включения в уравнения нелинейных слагаемых, которые описывают влияние магнитного поля на неравновесные процессы в межзвездной среде и турбулентность.

2. Исследован вклад потоков спиральности в эволюцию магнитных полей. Построена система уравнений, которая в рамках планарного приближения учитывает влияние потоков спиральности на космическую турбулентность, а также дает возможность учесть такие процессы как, например звездообразование в галактиках. Также они могут быть полезны при исследовании конвекции.

3. Изучены различные приложения планарного приближения. Оно было применено для моделирования магнитных полей в дисковых галактиках, их внешних кольцах и аккреционных дисках. Показана ключевая роль влияния внутреннего граничного условия на магнитное поле в аккреционном диске. Немаловажно отметить, что особую роль могут играть нелинейные волны, описывающие распространение структур магнитного поля. Исследовано влияние звездообразования, с целью чего в уравнения вносились поправки, связанные с флуктуациями

управляющих параметров динамо. Было показано, что планарное приближение оказывается достаточно эффективным при изучении магнитных полей в дисковых структурах, однако для внешних колец галактик его применимость оказывается под вопросом и требует использования более аккуратных моделей.

4. Построена модель динамо в торе, которая учитывает вертикальную структуру магнитного поля. Она исходит из несколько других предпосылок, нежели планарное приближение, и дает возможность получать решения как дипольной, так и квадрупольной симметрии. Тем не менее, нужно отметить, что рост дипольного магнитного поля оказывается подавленным, и ожидать его роста достаточно сложно. Также важно сказать, что результаты, даваемые моделью динамо в торе, позволяют более точно описывать магнитные поля во внешних галактических кольцах.

5. Построены модели для электровихревых течений жидких металлов. Рассмотрена модель электровихревого течения в полусфере и течения между двух плоскостей. Отметим, что ранее для этих течений были получены только численные результаты, а в данной работе были построены математические методы, связанные с получением решений в виде рядов. В одном случае речь идет о разложении решения по собственным функциям, в другом – о разложении нелинейного слагаемого в уравнении Навье – Стокса.

6. Исследовано влияние на магнитное поле течений специфической структуры. Построена картина магнитного поля на больших красных смещениях, индуцированного батарейными механизмами. Также изучено влияние на магнитное поле конвекции. Имеющиеся результаты могут быть с успехом применены также при изучении магнитных полей при наличии различных турбулентных течений, что представляет не меньший интерес с точки зрения различных приложений.

Результаты представленных исследований позволят в дальнейшем проводить исследования магнитных полей в различных объектах, имеющих дисковую структуру. Так, особенно перспективным выглядит изучение аккреционных дисков в двойных системах, для которых можно было бы исследовать возможность возникновения инверсий, влияние стохастических эффектов на процесс генерации.

Модель динамо в торе может быть использована не только для внешних колец галактик. Она также допускает обобщение на диск в целом, что позволяет изучить генерацию поля в «толстых» дисках. С одной стороны, это позволяет расширить класс объектов, для которых можно построить модели магнитных полей, с другой – ставит новые задачи об исследовании спектров и численном решении возникающих уравнений.

Автомодельные постановки в задачах об электровихревых течениях могут быть интересны и для другой геометрии. Так, представляет интерес исследование поведения

проводящей среды под действием магнитного поля в цилиндрическом сосуде, что может иметь широкие технические приложения.

Генерация магнитного поля за счет потоков плазмы может быть интересна не только для дисковых галактик, но и для других объектов, например при изучении вопроса о возникновении начальных магнитных полей в аккреционных дисках. Результаты, полученные для коллапса в магнитной гидродинамике, представляют интерес и для других классических полей, замороженных в среду.

## Список литературы

- [1] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 342 с.
- [2] Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Кинематическое динамо в случайном потоке. // С.А.Молчанов, А.А.Рузмайкин, Д.Д.Соколов / Успехи физических наук. — 1985. — Т. 145 — С.593.
- [3] Beck R., Brandenburg A., Moss, D., Shukurov, A., Sokoloff, D. Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives // R.Beck, A.Brandenburg, D.Moss, A.Shukurov, D.Sokoloff / Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1996. — 34. — P. 155.
- [4] Arshakian, T. G., Beck, R., Krause, M., Sokoloff, D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // T.G.Arshakian, R.Beck, M.Krause, D.Sokoloff. Astronomy and Astrophysics. — 2009. — 494. — P.21.
- [5] Moss, D., Sokoloff, D., Suleimanov, V. Dynamo generated magnetic configurations in accretion discs and the nature of quasi-periodic oscillations in accreting binary systems // D.Moss, D.Sokoloff, V.Suleimanov. Astronomy&Astrophysics. — 2016. — 588. — A18.
- [6] Parker E.N. Hydromagnetic Dynamo Models // E.N.Parker. Astrophysical Journal. — 1955. — 122. — 293.
- [7] Obridko, V.N., Livshits, I.M., Sokoloff, D.D. Two populations of the solar magnetic field // V.N.Obridko, I.M.Livshits, D.D.Sokoloff / MNRAS. — 2017. — 417. — P.2575.
- [8] Kitchatinov, L. L., Olemskoy, S. V. Differential rotation of main-sequence dwarfs and its dynamo efficiency // L.L.Kitchatinov, S.V.Olemskoy. MNRAS. — 2011. — 411. — P.1059.
- [9] Chris A.J. Planetary Magnetic Fields and Fluid Dynamos // A.J.Chris / Annual Review of Fluid Mechanics. — 2011. — 43. — P. 583.
- [10] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо // Ф.Краузе, К.-Х.Рэдлер / М.: Мир, 1984. — 320 с.
- [11] Соколов Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // Д.Д.Соколов, Р.А.Степанов, П.Г.Фрик / Успехи физических наук. — 2014. — 184. — С. 313.
- [12] Соколов Д.Д. Проблемы магнитного динамо // Д.Д.Соколов / Успехи физических наук. — 2015. — 185. — С.643.

- [13] Khoperskov, S.A., Khrapov, S.S. Global enhancement and structure formation of the magnetic field in spiral galaxies // S.A.Khoperskov, S.S.Khrapov / *Astronomy&Astrophysics*. — 2018. — 609. — A104.
- [14] Moss, D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions / D.Moss. — *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*. — 1995. — 275. — P.191.
- [15] Deinzer, W., Grosser, H., Schmitt, D. Torus dynamos for galaxies and accretion disks. I. The axisymmetric alpha omega-dynamo embedded into vacuum // W.Deinzer, H.Grosser, D.Schmitt / *Astronomy&Astrophysics*. — 1993. — 273. — P.405.
- [16] Bojarevich V., Frejbergs Ja., Shilova E.I., Shcherbinin E.V. Electrically induced vortical flows // V.Bojarevich, Ja.Frejbergs, E.I.Shilova, E.V.Shcherbinin / Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989.
- [17] Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений // В.Г.Жилин, Ю.П.Ивочкин, И.О.Тепляков / *Теплофизика высоких температур*. — 2011. — 47. — №6. — С.957.
- [18] Хрипченко С.Ю. Электровихревые течения в каналах МГД-устройств // С.Ю.Хрипченко / Екатеринбург: УрО РАН, 2009.
- [19] Ячиков И.М., Портнова И.В., Ларина Т.П. Исследование на физической модели поведения токонесущей жидкости в ванне ДППТ под действием внешнего вертикального магнитного поля//И.М.Ячиков, И.В.Портнова, Т.Ларина/*Известия ВУЗов.Черная металлургия.*-2018-1.-С.28.
- [20] Shatrov V., Gerbeth G. Stability of the electrically induced flow between two hemispherical electrodes // G.Gerbeth, V.Shatrov / *Magnetohydrodynamics*. — 2012. — 48. — P.469.
- [21] Kharicha A., Karimi-Sibaki E., Wu M., Ludwig A. Bohacek Review on Modeling and Simulation of Electroslag Remelting // A.Kharicha, E.Karimi-Sibaki, M.Wu, A.Ludwig / *J.: Steel Res. Int.* — 2018. — 89. — 1700100.
- [22] Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container //C.Sozou, W.M.Pickering / *J. Fluid. Mech.* — 1976. — 73. — P. 641.
- [23] Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current from a finite size electrode // C.Sozou, W.M.Pickering / *Proc. R. Soc. Lond. A* — 1978. — 362. — P.509.

- [24] Stephenson, F.R. Historical evidence concerning the Sun: interpretation of sunspots records during the telescopic and pre-telescopic eras / F.R.Stephenson // *Phil. Trans. R. Soc. London.* — 1990. — A330. — P.499.
- [25] Коэн, Р. В погоне за Солнцем / Р.Коэн. — М.: АСТ, 2013.
- [26] Историки эпохи Каролингов. М.: Росспэн, 1999.
- [27] Van Helden, A. Galileo and Scheiner on sunspots // A. Van Helden // *Proc. Am. Phil. Soc.* — 1996. — 140. — P.358.
- [28] Святский, Д.О. *Астрономия Древней Руси / Д.О.Святский.* — М.: Русская панорама, 2007. — 664 с.
- [29] Beckman, J.E., Mahoney, T.J. The Maunder Minimum and Climate Change: Have Historical Records Aided Current Research? / J.E.Beckman, T.J. Mahoney. — *ASP Conference Series.* — 1998. — 153. — P.212.
- [30] Arctowski, H. On Solar Faculae and Solar Constant Variations // H. Arctowski, *Astronomy.* — 1940. — 26. — №6. — P.406.
- [31] Hale, G.E. On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots / G.E.Hale. — *Astrophysical Journal.* — 1908. — 28. — P.315.
- [32] Кононович, Э.В., Мороз, В.И. *Общий курс астрономии / Э.В.Кононович, В.И.Мороз.* — М., Едиториал УРСС, 2004. — 414 с.
- [33] Parker, E.N. Hydromagnetic dynamo models // E.N.Parker. — *Astrophysical Journal.* — 1955. — 122. — P.293.
- [34] Гильберт В. О магните, магнитных телах и большом магните — Земле / В.Гильберт. — Москва, Изд-во АН СССР, 1956. — 414 с.
- [35] Gellibrand, H. A Discourse Mathematical on the Variation of the Magneticall Needle. Together with its admirable Diminution lately discovered / H. Gellibrand. — London, William Jones, 1635.
- [36] Викулин, А.В. *Введение в физику Земли. Учебное пособие для геофизических специальностей вузов / А.В.Викулин.* — Петропавловск-Камчатский: Изд-во КГПУ. — 2004. — 240 с.
- [37] Пасецкий В.М. Адольф Яковлевич Купфер (1799 — 1865) / В.М.Пасецкий. — М.: Наука, 1984. — 202 с.
- [38] Elsasser, W.M. The Earth's Interior and Geomagnetism / W.M.Elsasser. — *Reviews of Modern Physics.* — 1950. — 20. — №2. — P.135.

- [39] Fermi, E. On the origin of the cosmic radiation / E. Fermi // *Physical Review*. — 1949. — V.45, no.8. — P.1169 — 1174.
- [40] Пикельнер, С.Б. Физика межзвездной среды / С.Б.Пикельнер. — М.: Наука, 1959.
- [41] Ginzburg, V.L. Radio astronomy and the origin of cosmic rays / V.L.Ginzburg. — Paris Symposium on Radio Astronomy, IAU Symposium. — 1959. — 9. — P.589.
- [42] Morris, D., Berge, G.L. Direction of the Galactic Magnetic Field in the Vicinity of the Sun / D.Morris, G.L.Berge. — *Astrophysical Journal*. — 1964. — 139. — P.1388.
- [43] Manchester, R.N., Hobbs, G.B., Teoh, A., Hobbs, M. The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue / R.N.Manchester, G.B.Hobbs, A.Teoh, M.Hobbs. — *The Astronomical Journal*. — 2005. — 129. — №4. — P.1993.
- [44] Manchester, R.N. Pulsar Rotation and Dispersion Measures and the Galactic Magnetic Field / R.N.Manchester. — *Astrophysical Journal*. — 1972. — 172. — P.43.
- [45] Андреасян, Р.Р., Макаров, А.Н. Структура магнитного поля Галактики / Р.Р.Андреасян, А.Н.Макаров. — *Астрофизика*. — 1989. — 30. — С.170.
- [46] Beck, R. The Structure of Interstellar Magnetic Fields as Derived from Polarization Observations in Radio Continuum / R.Beck. — *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*. — 1996. — 97. — P.475.
- [47] Arshakian, T.G., Beck, R., Krause, M., Sokoloff, D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array / T.G.Arshakian, R.Beck, M.Krause, D.Sokoloff. — *Astronomy&Astrophysics*. — 2009. — 494. — №1.- P.21.
- [48] Phillips A. A comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos // A.Phillips / *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* — 2001. — 94. — P.135.
- [49] Костюк И.П., Сильченко О.К. Внешние кольца в дисковых галактик ранних типов // И.П.Костюк, О.К.Сильченко / *Астрофизический бюллетень*. — 2015. — 70. — №3. — С.296.
- [50] Brooke, J.M., Moss, D. Nonlinear Dynamos in Torus Geometry — Transition to Chaos // J.M.Brooke, D.Moss / *MNRAS*. — 1994. — 266. — P.733.
- [51] Михайлов, Е. Динамо в торе для описания магнитных полей во внешних кольцах галактик / Е.Михайлов // *Астрономический журнал*. — 2017. — Т.94, №9. — С.741 — 748.
- [52] Mikhailov, E.A. Torus dynamo model for study of magnetic fields in the outer rings of galaxies / E.A.Mikhailov // *Astrophysics*. — 2018. — V. 61, no. 2. — P. 147–159.



- [53] Mikhailov E. A., Khokhryakova A. D. Torus dynamo in the outer rings of galaxies / E.A.Mikhailov, A.D.Khokhryakova // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. — 2019. — V.113. — P.199 – 207.
- [54] Михайлов Е. А., Сибгатуллин И. Н. Исследование влияния регулярных магнитных полей на течения во внешних кольцах галактик / Е.А.Михайлов, И.Н.Сибгатуллин // *Труды Института системного программирования РАН*. — 2019. — Т. 31, № 6. — С. 215–224.
- [55] Mikhailov E. A., Sibgatullin I. N. Magnetic fields in the outer rings of galaxies and turbulent motions / E.A.Mikhailov, I.N.Sibgatullin // *Magnetohydrodynamics*. — 2019. — No. 1/2. — P. 133–140.
- [56] Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // N.I.Shakura, R.A.Sunyaev / *Astronomy&Astrophysics*. — 1973. — 24. — P.337.
- [57] Шакура Н.И., Колесников Д.А., Постнов К.А. Аккреционные процессы в астрофизике / Н.И.Шакура и др. // *Успехи физических наук*. — 2019. — Т. 189. — №. 11. — С. 1202-1212.
- [58] Тутуков А. В., Черепашук А. М. Эволюция тесных двойных звёзд: теория и наблюдения / А.В.Тутуков, А.М.Черепашук // *Успехи физических наук*. — 2020. — Т. 190. — №. 3. — С. 225-263.
- [59] Rüdiger, G., Shalybkov, D.A. The magnetic geometry of magnetic-dominated thin accretion disks // G.Rüdiger, D.A.Shalybkov / *Astronomy&Astrophysics*. — 2002. — 393. — P.L81.
- [60] von Rekowski, B., Brandenburg, A. Outflows and accretion in a star-disc system with stellar magnetosphere and disc dynamo // B.von Rekowski, A.Brandenburg / *Astronomy&Astrophysics*. — 2004. — 420. — P.17.
- [61] Мишуров Ю.Н., Ачарова И.А., Шевченко М.Г., Тышлангов Д.А. Выметание пыли из спиральной галактики вследствие эффекта “магнитной пращи” // Ю.Н.Мишуров, И.А.Ачарова, М.Г.Шевченко, Д.А.Тышлангов / *Астрофизический бюллетень*. — 2014. — 69. — С.22.
- [62] Bullard E.C. The stability of a homopolar dynamo // E.C.Bullard / *Math. Proc. Cambr. Philos. Soc.* — 1955. — 51. — P.744.
- [63] Bourgoïn M., Volk R., Plihon N., Augier P., Odier R., Pinton J.-F. A Bullard von Karman dynamo // M.Bourgoïn, R.Volk, N.Plihon, P.Augier, R.Odier, J.-F.Pinton / *New J. Phys.* 2006. — 8. — P.329.
- [64] Herzenberg A. Geomagnetic dynamos // A.Herzenberg / *Philosophical transactions of the Royal Society of London*. — 1958. — 240. — P.543.

- [65] Lowes F.J., Wilkinson I. Geomagnetic dynamo: a laboratory model // F.J.Lowes, I.Wilkinson / Nature. — 1963. — 198. — P.1158.
- [66] Пономаренко Ю.Б. О винтовом гидромагнитном динамо // Ю.Б.Пономаренко / Прикладная механика и техническая физика. — 1980. — 2. — С.22.
- [67] Gailitis A., Lielausis O., Dement'ev S., Platacis E., Cifersons A. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility // A.Gailitis, O.Lielausis, S.Dement'ev, E.Platacis, A.Cifersons/Physical Review Letters.-2000.- 84.-P.4365.
- [68] Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О., Гусева А.А., Токарев Ю.Н. Численное и экспериментальное исследование структуры закрученного электровихревого течения // Ю.П.Ивочкин, И.О.Тепляков, А.А.Гусева, Ю.Н.Токарев / Тепловые процессы в технике. — 2012. — 8. — С.345.
- [69] Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика: Учеб.пособие: В 3 кн. Кн.2. Электродинамика. Оптика / Е.И.Бутиков, А.С.Кондратьев. — М., ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 336 с.
- [70] Патон Б. Е., Медовар Б. И., Емельяненко Ю. Г. и др. Исследование магнитогидродинамических явлений в шлаковой ванне при ЭШП / Б.Е.Патон и др. // Проблемы специальной металлургии: Сб. науч. тр. — Киев, Наукова Думка, 1982. — Вып.17. — С. 3–8.
- [71] Priede J., Chudnovsky A. On the stability of an axisymmetric self-similar electrically induced vortical flow in a plane layer / J.Priede, A.Chudnovsky // Magnetohydrodynamics. — 1994. V. 30, no. 4. — P. 581–593.
- [72] Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О., Виноградов Д.А. О различных магнитогидродинамических приближениях при моделировании электровихревых течений / Ю.П.Ивочкин, И.О.Тепляков, Д.А.Виноградов, Моделирование. — 2019. — Т.7. — №1. — С.18.
- [73] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж.Серрин. — М.: Изд.иностр.лит., 1963. — 256 с.
- [74] Ле Меоте, Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде / Б. Ле Меоте // Ленинград, Гидрометеиздат, 1974. — 368 с.
- [75] Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении//Е.А.Михайлов, И.О.Тепляков/Вестник Московского университета. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2018. — №2. -С.39.
- [76] Биркгоф, Г. Гидродинамика: Методы, факты, подобие // Г.Биркгоф / М.: Изд. иностранной литературы, 1963.

- [77] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физики // А.Г.Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов / М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с.
- [78] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. М.: Наука, 1972. — 736 с.
- [79] Weinan E., Liu J.G. Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes // E.Weinan, J.G.Liu / Journal of Computational Physics. — 1996. — 124. — P.368.
- [80] Скубачевский А.Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // А.Л.Скубачевский / Математический сборник. — 1986. — 129. — №2. — С.279.
- [81] Скубачевский А.Л. Нелокальные задачи для уравнений Власова — Пуассона в бесконечном цилиндре // А.Л.Скубачевский / Функциональный анализ и его приложения. — 2015. — 49. — №3. — С.91.
- [82] Калиткин Н.Н. Численные методы // Н.Н.Калиткин / М.: Наука, 1978. — 512 с.
- [83] Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О., Гусева А.А., Лозина Е.Ю., Клементьева И.Б., Токарев Ю.Н. Исследование деформации свободной поверхности и ее влияние на интенсивность электровихревого течения жидкого металла// Ю.П.Ивочкин, И.О.Тепляков, А.А.Гусева, Е.Ю.Лозина,, И.Б.Клементьева, Ю.Н.Токарев / Тепловые процессы в технике. — 2012. — 4. — №8. — С.345.
- [84] Михайлов Е.А., Тепляков И.О., Федотов И.А. Определение критического тока, необходимого для возникновения разряда при электровихревом течении в жидком металле. // Е.А.Михайлов, И.О.Тепляков, И.А.Федотов / Уч. зап. физ.ф. Моск. ун-та.-2019.- №3. — С.1930601.
- [85] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред //Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц / М.: Наука, 1982. — 621 с.
- [86] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика // Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц / М.: Наука, 1986. — 736 с.
- [87] Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы // И.К.Волков, С.М.Зуев, Г.М.Цветкова / М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. — 1999. — 448 с.
- [88] Денисов В.И. Введение в электродинамика материальных сред // В.И.Денисов / М.: Физический факультет МГУ, 1989. — 168 с.
- [89] Казанцев А.П. Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью//А.П.Казанцев/Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1967. — 53. — №5. — С.1806.

- [90] Steenbeck, M., Krause, F. and Rädler, K.-H. A calculation of the mean electromotive force on an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces / M.Steenbeck et al. // *Z Naturforsch.* — 1966. — V.21. — P.369–376.
- [91] Тамм И.Е. Основы теории электричества // И.Е.Тамм / М.: Наука, 1989. — 504 с.
- [92] Ахметьев П.М., Кунаковская О.В., Кутвицкий В.А. Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности // П.М.Ахметьев, О.В.Кунаковская, В.А.Кутвицкий / ТМФ. — 2009. — 158. — С.150.
- [93] Денисов, В.И. Лекции по электродинамике / В.И.Денисов. — Москва, УНЦ ДО, 2007. — 272 с.
- [94] Михайлов, Е.А. Магнитная гидродинамика и теория динамо / Е.А.Михайлов. — М., Физический факультет МГУ, 2018. — 122 с.
- [95] Shukurov, A., Sokoloff, D., Subramanian, K., Brandenburg, A. Galactic dynamo and helicity losses through fountain flow // A.Shukurov, D.Sokoloff K.Subramanian, A.Brandenburg / *Astronomy&Astrophysics.* — 2006. — 448. — P.L33.
- [96] Sur, S., Shukurov, A., Subramanian, K. Galactic dynamos supported by magnetic helicity fluxes // S.Sur, A.Shukurov, K.Subramanian / *MNRAS.* — 2007. — 377. — P.874.
- [97] Михайлов Е. А. Галактическое динамо с учетом потоков спиральности /Е.А.Михайлов // Письма в *Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика.* — 2013. — Т. 39, № 7. — С. 474–480.
- [98] Михайлов Е. А. Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности / Е.А.Михайлов // Письма в *Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика.* — 2014. — Т. 40, № 7. — С. 445–453.
- [99] Subramanian, K., Brandenburg, A. Nonlinear Current Helicity Fluxes in Turbulent Dynamos and Alpha Quenching / K.Subramanian, A.Brandenburg // *Physical Review Letters.* — 2004. — V.93. — 205001.
- [100] Brandenburg, A., Subramanian, K. Strong mean field dynamos require supercritical helicity fluxes / A.Brandenburg, K.Subramanian // *Astronomische Nachrichten.* — 2005. — V.326. — P.400 — 408.
- [101] Brandenburg, A., Subramanian, K. Minimal tau approximation and simulations of the alpha effect / A.Brandenburg, K.Subramanian. // *Astronomy and Astrophysics.* — 2005. — V.439. — P.835 — 843.

- [102] Brandenburg, A., Subramanian, K. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory / A.Brandenburg, K.Subramanian // *Physics Reports*. — 2005. — V.417. — P.1 — 209.
- [103] Subramanian K., Mestel L. Galactic dynamos and density wave theory — II. an alternative treatment for strong non-axisymmetry // K.Subramanian, L.Mestel / *MNRAS*. — 1993. — 265. — P.649.
- [104] Зельдович, Я.Б., Рузмайкин, А.А., Соколов, Д.Д. Магнитные поля в астрофизике / Я.Б.Зельдович, А.А.Рузмайкин, Д.Д.Соколов // Москва — Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2006. — 384 с.
- [105] Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин // М., ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 572 с.
- [106] Засов, А.В., Постнов, К.А. Общая астрофизика / А.В.Засов, К.А.Постнов // Фрязино, Век 2, 2011. — 576 с.
- [107] Михайлов, Е.А. Задачи с малым параметром и распространение фронтов теории галактического динамо / Е.А.Михайлов // *Вестник Моск.ун-та. Сер.3. Физ.Астрон.* — 2015. — №2. — С.27 — 31.
- [108] Михайлов Е. А., Пушкарев В. В. Флуктуации коэффициента турбулентной диффузии в уравнениях галактического динамо / Е.А.Михайлов, В.В.Пушкарев // *Вычислительные методы и программирование*. — 2016. — Т. 17. — С. 447–454.
- [109] Михайлов Е. А., Пушкарев В. В. Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля / Е.А.Михайлов, В.В.Пушкарев // *Астрофизический бюллетень*. — 2018. — Т. 73, № 4. — С. 451–456.
- [110] Mikhailov E. A., Pushkarev V. V. Fluctuating governing parameters in galaxy dynamo / E.A.Mikhailov, V.V.Pushkarev // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. — 2018. — Vol. 30, no. 3. — P. 343–350.
- [111] Shukurov, A., Rodriguez, L.F.S., Bushby, P.J. et al. A physical approach to modelling large-scale galactic magnetic fields / A.Shukurov et al. // *Astronomy and Astrophysics*. — 2019. — V.623. — A113.
- [112] Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 280 с.
- [113] Михайлов, Е.А. Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении / Е.А.Михайлов // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*. — 2020. — № 5. — С. 40–45.

- [114] Нефедов Н. Н., Попов В. Ю., Волков В. Т. Обыкновенные дифференциальные уравнения (курс лекций) / Н.Н.Нефедов, В.Ю.Попов, В.Т.Волков // Москва: Москва, 2016. — 200 с.
- [115] Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник / Л.Э.Эльсгольц // М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 320 с.
- [116] Михайлов Е. А., Пушкарев В. В. Флуктуации коэффициента турбулентной диффузии в уравнениях галактического динамо / Е.А.Михайлов, В.В.Пушкарев // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2016. — Т. 17. — С. 447–454.
- [117] Mikhailov E., Boneva D., Pashentseva M. No-z model for magnetic fields of different astrophysical objects and stability of the solutions / E.Mikhailov, D.Boneva, M.Pashentseva // Data. — 2021. — Vol. 6, no. 1. — 4.
- [118] Михайлов, Е.А. Моделирование магнитных полей галактик в планарном приближении: дис. ... канд.физ.-мат.наук : 01.01.03 / Михайлов Евгений Александрович.- М., 2015. — 115 с.
- [119] Mikhailov E. A. Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches / E.A.Mikhailov // Magnetohydrodynamics. — 2016. — Vol. 52, no. 1. — P. 117–125.
- [120] Mikhailov E. Galactic magnetic field reversals and vorticity of transition layers / E.Mikhailov // Magnetohydrodynamics. — 2017. — Vol. 53, no. 2. — P. 357–363.
- [121] Бутузов В. Ф., Бучнев В. Ю. Об асимптотике решения одной сингулярно возмущенной двумерной задачи типа реакция-диффузия-перенос / В.Ф.Бутузов, В.Ю.Бучнев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1991. — Т. 31, № 4. — С. 533–542.
- [122] Бутузов В. Ф. О сингулярно возмущенных системах типа реакция-диффузия-перенос / В.Ф.Бутузов // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 5. — С. 833–845.
- [123] Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия // Ю.В.Божевольнов, Н.Н.Нефедов / Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — 50. — С.276.
- [124] Давыдова М. А., Нефедов Н. Н. Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 1. — С. 31–38.

- [125] Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев // М.: Наука, 1966. — 444 с.
- [126] Horrelou, C., Beck, R., Berkhuijsen E.M. et al. Faraday effects in the spiral galaxy M51 / C.Horrelou et al. // *Astronomy and Astrophysics*. — 1992. — V.265. — P.417–428.
- [127] Beck, R., Fletcher, A., Shukurov, A. et al. Magnetic fields in barred galaxies.IV. NGC 1097 and NGC 1365. / R.Beck et al. // *Astronomy and Astrophysics*. — 2005. — V.444. — P.739 — 765.
- [128] Sofue, Y., Fujimoto, M. A bisymmetric spiral magnetic field and the spiral arms in our galaxy / Y.Sofue, M.Fujimoto // *Astrophysical Journal*. — 1983. — V.265, no.1. — P. 722–729.
- [129] Bykov, A., Popov, V., Shukurov, A., Sokoloff, D. Anomalous persistence of bisymmetric magnetic structures in spiral galaxies / A.Быков, В.Попов, А.Шукуров, Д.Сokoloff // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1997. — V.292, no.1. — P.1-10.
- [130] Быков А.А., Воеводин Вл В., Козырева О.В., Попов В.Ю.Эволюция двумерных контрастных структур сложной формы / А. А. Быков, В. В. Воеводин, О. В. Козырева и др. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1999. — Т. 39, № 5. — С. 801–811.
- [131] Mikhailov E. A. Symmetry of the magnetic fields in galactic dynamo and the material arms / E.A.Mikhailov // *Magnetohydrodynamics*. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 303–315.
- [132] Han, J. L., Manchester, R. N., Qiao, G. J. Pulsar rotation measures and the magnetic structure of our Galaxy / J.L.Han, R.N.Manchester, G.J.Qiao // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1999. — V.306. — P.371-380.
- [133] Frick, P., Stepanov, R., Shukurov, A., Sokoloff, D. Structures in the rotation measure sky / P.Frick, R.Stepanov, A.Shukurov, D.Sokoloff // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2001. — V.325. — P.649 — 664.
- [134] Brown, J.C., Taylor, A.R., Wielebinski, R., Mueller, P. On Large-Scale Magnetic Field Reversals in the Outer Galaxy / J.C.Brown, A.R.Taylor, R.Wielebinski, P.Mueller // *The Astrophysical Journal*. — 2003. — V.592. — P. L29 — L32.
- [135] Weisberg, J. M., Cordes, J. M., Kuan, B. et al. Arecibo 430 MHz Pulsar Polarimetry: Faraday Rotation Measures and Morphological Classifications / J.M.Weisberg et al. // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2004. — V.150. — P.317 — 341.
- [136] Vallée, J.P. Pulsar-based Galactic Magnetic Map: A Large-Scale Clockwise Magnetic Field with an Anticlockwise Annulus / J.P.Vallée // *The Astrophysical Journal*. — 2005. — V.619. — P.297 — 305.

- [137] Vallée, J.P. An Improved Magnetic Map of the Milky Way, with the Circularly Orbiting Gas and Magnetic Field Lines Crossing the Dusty Stellar Spiral Arms / J.P.Vallée // *The Astrophysical Journal*. — 2008. — V.681. — P.303 — 310.
- [138] Pshirkov, M.S., Tinyakov, P.G., Kronberg, P.P., Newton-McGee, K.J. Deriving the Global Structure of the Galactic Magnetic Field from Faraday Rotation Measures of Extragalactic Sources/M.S.Pshirkov et al. // *Astrophysical Journal*.-2011.-V.738.-ID192.
- [139] Van Eck C. L., Brown J. C., Stil J. M., Rae K. et al. Modeling the Magnetic Field in the Galactic Disk Using New Rotation Measure Observations from the Very Large Array // C.L.Van Eck, J.C.Brown, J.M.Stil, K.Rae et al. / *Astrophysical Journal*. — 2011. — V.728. — P.97.
- [140] Ma, Y. K., Mao, S. A., Ordog, A., Brown, J. C. The complex large-scale magnetic fields in the first Galactic quadrant as revealed by the Faraday depth profile disparity/Y.K.Ma et al.//*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.-2020.-V.497.-P.3097.
- [141] Moss, D., Stepanov, R., Arshakian, T.G. et al. Multiscale magnetic fields in spiral galaxies: evolution and reversals / D.Moss et al. // *Astronomy & Astrophysics*. — 2012. — V.537. — A68.
- [142] Moss, D., Sokoloff, D. Magnetic field reversals and galactic dynamos / D.Moss, D.Sokoloff// *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. — 2013. -V.107. — P.497 — 505..
- [143] Неведов, Н.Н., Давыдова, М.А. Решения с пограничными и внутренними переходными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция/Н.Н.Неведов, М.А.Давыдова// *Уч.записки физического факультета Моск.Ун-та*. — 2016. — № 3. — 163106.
- [144] Omel'chenko, O.E., Recke, L., Butuzov, V.F., Nefedov, N.N.Time-periodic boundary layer solutions to singularly perturbed parabolic problems / O.E.Omel'chenko et al.// *Journal of Differential Equations*. — 2017. — Vol. 262, no. 9. — P. 4823–4862..
- [145] Nefedov N. N. Asymptotic analysis of reaction-diffusion-advection problems: Fronts with periodic motion and blow-up/ N.N.Nefedov // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2017. — V. 811. — 012008.
- [146] Nefedov N. Slow-fast systems and hysteresis: Fronts in reaction-diffusion-advection problems: Periodic motion and blow-up / N.N.Nefedov // *Trends in Mathematics*. — 2018. — V. 10. — P. 41–46..
- [147] Неведов Н. Н., Никулин Е. И. О периодических решениях с пограничным слоем в задаче реакция диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями третьего рода /Н.Н.Неведов, Е.И.Никулин // *Дифф. ур-я*. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1641.



- [148] Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Boundary effects and propagating, magnetic fronts in disc dynamos / D.Moss, A.Shukurov, D.Sokoloff // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. — 1998. — Vol. 89. — P. 285–308..
- [149] Mikhailov E., Khasaeva T. Evolution of the magnetic field reversals in galaxies / E.Mikhailov, T.Khasaeva // *Bulgarian Astronomical Journal*. — 2019. — Vol. 31. — P. 39–50..
- [150] Андреасян Р. Р., Михайлов Е. А., Андреасян А. Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля / Р.Р.Андреасян, Е.А.Михайлов, А.Р.Андреасян // *Астрономический журнал*. — 2020. — Т. 97, № 3. — С. 179–189..
- [151] Mikhailov, E., Kasparova, A., Moss, D. et al. Magnetic fields near the peripheries of galactic discs / E.Mikhailov et al. // *Astronomy & Astrophysics*. — 2014. — V.568. — A66.
- [152] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н.Колмогоров и др. // *Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика*.- 1937.-Т.1.- С.6.
- [153] Fisher R. A. The Wave of Advance of Advantageous Genes / R.A.Fisher // *Annals of Eugenics*. — 1937. — V.7. — P.355 — 369.
- [154] Few, J.M.A., Madore, B.F. Ring galaxies- II. Classification and statistics / J.M.A.Few, B.F.Madore // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1986. — V.222. — P. 673-682.
- [155] Athanassoula, E., Bosma, A., Creze, M., Schwarz, M. P. On the sizes of rings and lenses in disk galaxies / E.Athanassoula, A.Bosma, M.Creze, M.P.Schwarz // *Astronomy and Astrophysics*. — 1982. — V.107. — P.101-106.
- [156] Buta, R., Combes, F. Galactic Rings / R.Buta, F.Combes // *Fundamentals of Cosmic Physics*. — 1996. — V.17. — P. 95-281.
- [157] Appleton, P. N., Charmandaris, V., Horellou, C. et al. Plasma and Warm Dust in the Collisional Ring Galaxy VII ZW 466 from VLA and ISO Observations / P.N.Appleton, V.Charmandaris, C.Horellou et al. // *The Astrophysical Journal*. — 1999. — V.527. — P. 14.
- [158] Comerón, S., Salo, H., Laurikainen, E. et al. ARRAKIS: atlas of resonance rings as known in the S4G / S.Comerón // *Astronomy & Astrophysics*. — 2014. — V.562. — A121.
- [159] Ilyina, M.A., Sil'chenko, O.K., Afanasiev, V.L. Nature of star-forming rings in S0 galaxies / M.A.Ilyina, O.K.Sil'chenko, V.L.Afanasiev // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2014. — V.439. — P.334-341.

- [160] Moss, D., Mikhailov, E., Silchenko, O. et al. Magnetic fields in ring galaxies / D. Moss, E. Mikhailov, O. Silchenko et al. // *Astronomy and Astrophysics*. — 2016. — Vol. 592. — A44.
- [161] Berkhuijsen, E.M., Mitra, D., Mueller, P. Filling factors and scale heights of the diffuse ionized gas in the Milky Way / E.M.Berkhuijsen, D.Mitra, P.Mueller // *Astronomische Nachrichten*. — 2006. — V.327. — P.82 — 96.
- [162] Berkhuijsen, E. M., Fletcher, A. Density probability distribution functions of diffuse gas in the Milky Way / E.M.Berkhuijsen, A.Fletcher // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2008. — V.390. — P. L19 — L23.
- [163] Михайлов Е. А., Соколов Д. Д., Ефремов Ю. Н. Темп звездообразования и магнитные поля спиральных галактик / Е.А.Михайлов, Д.Д.Соколов, Ю.Н.Ефремов // *Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика*. — 2012. — Т. 38, № 9. — С. 611–616.
- [164] Михайлов Е. А., Модяев И. И. Уравнения галактического динамо со случайными коэффициентами / Е.А.Михайлов, И.И.Модяев // *Вычислительные методы и программирование*. — 2014. — Т. 15. — С. 351–358.
- [165] Mikhailov E. A., Modyaev I. I. Star formation and galaxy dynamo equations with random coefficients / E.A.Mikhailov, I.I.Modyaev // *Baltic Astronomy*. — 2015. — Vol. 24, no. 2. — P. 194–200.
- [166] Mikhailov E. A., Modyaev I. I. Dynamo equations with random coefficients / E.A.Mikhailov, I.I.Modyaev // *Magnetohydrodynamics*. — 2015. — Vol. 51, no. 2. — P. 285–292.
- [167] Mikhailov E., Pushkarev V. Influence of star formation on galactic magnetic fields in a model with vertical structure // *Magnetohydrodynamics*. — 2020. — V.56, No.2-3. — P.81 – 87.
- [168] Рузмайкин, А.А., Соколов, Д.Д., Шукуров, А.М. Магнитные поля галактик / А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, А. М. Шукуров. — М. : Наука, 1988. — 278 с.
- [169] Kulkarni, S.R., Fich, M. The fraction of high velocity dispersion HI in the Galaxy / S.R.Kulkarni, M.Fich // *Astrophysical Journal*. — 1985. — V.289. — P. 792 — 802.
- [170] Михайлов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами / Е.А.Михайлов, Д.Д.Соколов Д. Д., В.Н.Тутубалин // *Вычислительные методы и программирование*. — 2010. — Т. 11, № 2. — С. 103–110.
- [171] Artyushkova M. E., Sokoloff D. D. Modelling small-scale dynamo by the jacobí equation / M.E.Artyushkova, D.D.Sokoloff // *Magnetohydrodynamics*. — 2006. — Vol. 42. — P. 3–20.

- [172] Грачев Д. А., Соколов Д. Д. Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин / Д.А.Грачев, Д.Д.Соколов // Вычислительные методы и программирование. — 2007. — Т. 8, № 1. — С. 5–9.
- [173] Грачев Д. А. О соотношении между аналитическим и численным подходами к исследованию стохастических дифференциальных уравнений / Д.А.Грачев // Вычислительные методы и программирование. — 2008. — Т. 9, № 2. — С. 85–90.
- [174] Грачев Д.А. Тензорный подход к проблеме усреднения дифференциальных уравнений с  $\delta$ -коррелированными случайными коэффициентами / Д.А.Грачев // Математические заметки. — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 359–368.
- [175] Грачев Д. А., Михайлов Е. А. Численное моделирование двухточечного коррелятора для лагранжевых решений некоторых эволюционных уравнений / Д.А.Грачев, Е.А.Михайлов // Вычислительные методы и программирование. — 2017. — Т. 18. — С. 277–283.
- [176] Mikhailov E. A., Grachev D. A. Galaxy dynamo in inhomogeneous interstellar medium / E.A.Mikhailov, D.A.Grachev // Communications of the Byurakan Astrophysical Observatory. — 2018. — Vol. 65, no. 2. — P. 346–352.
- [177] Грачев Д. А., Елистратов С. А., Михайлов Е. А. Статистические моменты и многоточечные корреляторы магнитного поля в модели галактического динамо со случайной турбулентной диффузией // Вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20, № 2. — С. 88.
- [178] Mikhailov E. A., Elistratov S. A., Grachev D. A. The magnetic correlation tensor in the dynamo theory / E.A.Mikhailov, S.A.Elistratov, D.A.Grachev // Computational Mathematics and Modeling. — 2021. — Vol. 32, no. 1. — P. 45–51.
- [179] Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рuzмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде / Я.Б.Зельдович, С.А.Молчанов, А.А.Рuzмайкин, Д.Д.Соколов // Успехи физических наук. — 1987. — Т.152. — С.3–32.
- [180] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D. Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium / Ya.B.Zeldovich, A.A.Ruzmaikin, S.A.Molchanov, D.D.Sokoloff // Sov. Sci. Rev., C. Math. Phys. — 1988. -V.7.- P.1–110.
- [181] Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией / А.С.Михайлов, И.В.Упоров // Успехи физических наук. — 1984. — Т.144. — С. 79.

- [182] Lynden-Bell, D., Pringle, J. E. The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables / D.Lynden-Bell, J.E.Pringle // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1974. — V.168. P.603-637.
- [183] Tylenda, R. Radiation from Optically Thin Accretion Discs / R.Tylenda // *Acta Astronomica*. — 1981. — V.31. — P.127.
- [184] Horne, K., Marsh, T. R. Emission line formation in accretion discs / K.Horne, T.R.Marsh // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1986. — V.218. — P.761-773.
- [185] Gänsicke, B. T., Marsh, T. R., Southworth, J., Rebassa-Mansergas, A. A Gaseous Metal Disk Around a White Dwarf / B.T.Gänsicke, T.R.Marsh, J.Southworth, A.Rebassa-Mansergas // *Science*. — 2006. — V.314. — P. 1908.
- [186] Jiang, Y.-F., Stone, J.M., Davis, S.W. Super-Eddington Accretion Disks around Supermassive Black Holes / Y.-F.Jiang, J.M.Stone, S.W.Davis // *The Astrophysical Journal*. — 2019. — V.880. — ID67.
- [187] Pudritz, R.E., Norman, C.A. Bipolar Hydromagnetic Winds from Disks around Protostellar Objects / R.E.Pudritz, C.A.Norman // *Astrophysical Journal*. — 1986. — V.301. — P.571.
- [188] Balbus, S.A., Hawley, J.F. A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis / S.A.Balbus, J.F.Hawley // *Astrophysical Journal*. — 1991. — V.376. — P.214.
- [189] Blandford, R.D., Payne, D.G. Hydromagnetic flows from accretion disks and the production of radio jets / R.D.Blandford, D.G.Payne // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1982. — V.199. — P.883 — 903.
- [190] Lubow, S.H., Papaloizou, J.C.B., Pringle, J.E. Magnetic field dragging in accretion discs / S.H.Lubow, J.C.B.Papaloizou, J.E.Pringle // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1994. — V.267. — P.235-240.
- [191] Torkelsson, U., Brandenburg, A. Turbulent accretion disk dynamos? / U.Torkelsson, A.Brandenburg // *Astronomy and Astrophysics*. — 1994. — V.283. — P. 677 — 692.
- [192] Ruediger, G., Elstner, D., Stepinski, T.F. The standard-accretion disk dynamo / G.Ruediger, D.Elstner, T.F.Stepinski // *Astronomy and Astrophysics*. — 1995. — V.298. — P.934.
- [193] Reyes-Ruiz, M., Stepinski, T.F. An alpha Omega -dynamo in accretion disks with linear force-free coronae / M.Reyes-Ruiz, T.F.Stepinski // *Astronomy and Astrophysics*. — 1999. — V.342. — P.892 — 900.

- [194] Boneva, D.V., Mikhailov, E.A., Pashentseva, M.V., Sokoloff, D.D. Magnetic fields in the accretion discs for various inner boundary conditions / D. V. Boneva, E. A. Mikhailov, M. V. Pashentseva, D. D. Sokoloff // *Astronomy and Astrophysics*. — 2021. — V.652. — A38.
- [195] Brooke, J., Moss, D. Symmetry breaking in a dynamo model with torus geometry / J.Brooke, D.Moss // *Astronomy and Astrophysics*. — 1995. — V.303. — P.307–321.
- [196] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). / Г.Корн, Т.Корн. — М.: Наука, 1973. — 832 с.
- [197] Boyarevich, V.V. MHD flows near a point source of electric current. II Asymptotic expansions / V.V.Boyarevich // *Magnetohydrodynamics*. — 1981. — V.17. — P.41 — 44.
- [198] Lundquist, S. On the hydrodynamic viscous flow generated by a diverging electric current / S.Lindquist // *Arc.Fys.* — 1969. — V.40. P.89-95.
- [199] Bojarevich, V., Saramkin, V. MHD lows due to electrical current discharge in an axisymmetric layer of limited depth / V.Bojarevich, V.Saramkin // *Magnetohydrodynamics*. — 1977. — V.13. — P.172 — 177.
- [200] Kaudze, M., Chudnovsky, A. Axisymmetric electrovortex flow between two planes induced by AC / M.Kaudze, A.Chudnovsky // *Magnetohydrodynamics*. — 1989. — V.25. — P.187 — 194.
- [201] Pavlovs, S., Jakovics, A., Baake, E., Nacke, B. Melt flow patterns in metallurgical MHD devices with combined inductive and conductive power supply / S.Pavlovs, A.Jakovics, E.Baake, B.Nacke // *Magnetohydrodynamics*. — 2014. — V.50. — P.303 — 315.
- [202] Pavlovs, S., Jakovics, A., Sushkovs, V., Nacke, B. LES-study of heat transfer in the melt for metallurgical MHD devices with power supply by inductor and over electrodes / S.Pavlovs et al. // *Magnetohydrodynamics*. — 2015. — V.51. — P.67 — 81.
- [203] Yachikov, I.M., Portnova, I.V. Modeling of magnetic field behaviour in dc arc furnace bath for different designs of current lead of bottom electrode / I.M.Yachikov, I.V.Portnova // *Sciences in Europe*. — 2016. — V.2. — P.67 — 72.
- [204] Yachikov, I.M. Modelling of electrovortex flows and heat/mass transfer in the dc arc furnace bath / I.M.Yachikov // *Magnetohydrodynamics*. — 2016. — V.52. — P.301 — 310.
- [205] Ячиков, И.М., Заляутдинов, Р.Ю. Исследование магнитного поля в ванне дуговой печи постоянного тока при разной форме токоподводящей шины к подовому электроду / И.М.Ячиков, Р.Ю.Заляутдинов // *Известия вузов. Черная металлургия*. — 2014. — Т.3. — С.58 — 63.

- [206] Хрипченко, С.Ю. Электровихревые течения в плоских каналах с ферромагнитными сердечниками / С.Ю.Хрипченко // Магнитная гидродинамика. — 1984. — Т.20. — С.71 — 75.
- [207] Кирко, И.М. и др. Электровихревой способ перемешивания расплава затвердевающих слитков / И.М.Кирко // Магнитная гидродинамика. — 1985. — Т.21. — С.100 — 107.
- [208] Альмухаметов, В., Хрипченко, С.Ю. Механизмы генерации электровихревых течений в ванне электролизера со сплошным анодом / В.Альмухаметов, С.Ю.Хрипченко // Магнитная гидродинамика. — 1987. — Т.23. — С.101 — 104.
- [209] Хрипченко, С.Ю., Зимин, В.Д., Колпаков, Н.Ю. Электровихревые течения в сферической полости / С.Ю.Хрипченко, В.Д.Зимин, Н.Ю.Колпаков // Магнитная гидродинамика. — 1987. — Т.23. — С.116 — 120.
- [210] Альмухаметов, В., Колесниченко, В.И., Хрипченко, С.Ю. Математическая модель плоских электровихревых течений в двухслойной проводящей жидкости / В.Альмухаметов, В.И.Колесниченко, С.Ю.Хрипченко // Магнитная гидродинамика. — 1988. — Т.24. — С.137 — 140.
- [211] Хрипченко, С.Ю. Электровихревые течения в тонких слоях проводящей жидкости / С.Ю.Хрипченко // Магнитная гидродинамика. — 1991. — Т.27. — С.126 — 129.
- [212] Мандрыкин, С.Д., Колесниченко, И.В., Лосев, Г.Л., Фрик, П.Г. Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом канале / С.Д.Мандрыкин, И.В.Колесниченко, Г.Л.Лосев, П.Г.Фрик // Вестник Пермского университета. Физика. — 2018. — №2. — С.20 — 27.
- [213] Жилин, В.Г., Ивочкин, Ю.П., Оксан, А.А. и др. Экспериментальное исследование поля скоростей в осесимметричном течении в цилиндрическом контейнере / В.Г.Жилин, Ю.П.Ивочкин, А.А.Оксан и др. // Магнитная гидродинамика. — 1986. — №3. — С.110 — 116.
- [214] Жилин, В.Г., Ивочкин, Ю.П., Игумнов, В.С. и др. К вопросу о возникновении свободной конвекции в электровихревых течениях / В.Г.Жилин, Ю.П.Ивочкин, В.С.Игумнов и др. // Теплофизика высоких температур. — 1995. — Т.33. — С.490 — 491.
- [215] Ивочкин, Ю.П., Тепляков, И.О., Гусева, А.А., Токарев, Ю.Н. Численное и экспериментальное исследование структуры закрученного электровихревого течения / Ю.П.Ивочкин, И.О.Тепляков, А.А.Гусева, Ю.Н.Токарев // Тепловые процессы в технике. — 2012. — №8. — С.345.

- [216] Ivochkin, Y., Teplyakov, I., Guseva, A., Vinogradov, A. Influence of the swirled electrovortex flow on the melting of eutetic alloy In-Ga-Sn / Y.Ivochkin, I.Teplyakov, A.Guseva, D.Vinogradov // *Magnetohydrodynamics*. — 2015. — V.51. — P.337 — 344.
- [217] Teplyakov, I., Vinogradov, D., Ivochkin, Yu., Kharicha, A., Serbin, P. Applicability of different MHD approximations in electrovortex flow simulation / I.Teplyakov et al. // *Magnetohydrodynamics*. — 2018. — V.54. — P.403 — 416.
- [218] Chudnovsky, A., Rusbergs, E. Countermoving jets in self-similar electrovortex flow between two planes / A.Chudnovsky, E.Rusbergs // *11 PAMIR Intern. Conf. Fund. Appl.MHD*. — Reims, France, 2019. — P.99 — 104.
- [219] Mikhailov E. A., Teplyakov I. O. Construction asymptotic solution while studying electrovortex flow in hemispherical container using stokes approximation /E.A.Mikhailov, I.O.Teplyakov//*Journal of Physics: Conf. Series*. — 2017. — Vol. 891, no. 1. — 012060.
- [220] Mikhailov E. A., Teplyakov I. O., Fedotov I. A. Research of the electro-vortex flows in the liquid metals at different currents / E.A.Mikhailov, I.O.Teplyakov, I.A.Fedotov // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — Vol. 1565. — P. 012076.
- [221] Georgievskaya E.P., Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Simulation of the electrovortex flow in a linear approximation under the action of the external magnetic field // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — V.1683. — 022039.
- [222] Михайлов Е. А., Чудновский А. Ю. Асимптотическое разложение решения уравнения для медленного осесимметричного электровихревого течения между двумя плоскостями /Е.А.Михайлов,А.Ю.Чудновский// *Сиб. ж. инд. математики*. — 2020. — Т. 23, № 4. — С. 88–100.
- [223] Biermann, L. Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum (miteinem Anhang von A. Schlüter) / L.Biermann // *Zeitschrift Naturforschung Teil A*. — 1950. — V.5. — P. 65.
- [224] Biermann, L., Schlüter, A. Cosmic Radiation and Cosmic Magnetic Fields. II. Origin of Cosmic Magnetic Fields / L.Biermann, A.Schlüter // *Physical Review*. — 1951. — V.82. — P. 863 — 868.
- [225] Harrison, E.R. Generation of magnetic fields in the radiation ERA / E.R.Harrison // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1970. — V.147. — P. 279.
- [226] Mishustin, I.N., Ruzmaikin, A.A. Formation of "priming" magnetic fields during the formation of protogalaxies / I.N.Mishustin, A.A.Ruzmaikin // *Soviet J. Experim. Theoret. Phys*. — 1972. — V.34. — P. 233.

- [227] Вайнштейн, С.И., Зельдович, Я.Б. О происхождении магнитных полей в астрофизике / С.И.Вайнштейн, Я.Б.Зельдович // Успехи физических наук. — 1972. — Т.106. — С.431 — 457.
- [228] Pudritz, R.E., Silk, J. The Origin of Magnetic Fields and Primordial Stars in Protogalaxies / R.E.Pudritz, J.Silk // Astrophysical Journal. — 1989. — V. 342. — P. 650.
- [229] Davies, G., Widrow, L.M. A Possible Mechanism for Generating Galactic Magnetic Fields / G.Davies, L.M.Widrow // The Astrophysical Journal. — 2000. — V.540. — P.755 — 764.
- [230] Андреасян Р.Р. Механизм образования дипольного магнитного поля в центральных областях активных галактик // Р.Р.Андреасян / Астрофизика. — 1996. — 39. — 111.
- [231] Михайлов, Е.А., Андреасян, Р.Р. Батарейный механизм Бирмана и структура начального магнитного поля в галактиках /Е.А.Михайлов, Р.Р.Андреасян // Астрономический журнал. — 2021. — Т.98. — №10. — С.795-803.
- [232] Parker, E.N. Kinematical Hydromagnetic Theory and its Application to the Low Solar Photosphere / E.N.Parker // Astrophysical Journal. — 1963. — V.138. — P.552.
- [233] Galloway, D.J., Weiss, N.O. Convection and magnetic fields in stars / D.J.Galloway, N.O.Weiss // Astrophysical Journal. — 1981. — V.243. — P. 945 — 953.
- [234] Stix, M. The Sun: an Introduction / M.Stix // Berlin, Springer, 2002..
- [235] Кузнецов, Е.А., Михайлов, Е.А. Заметки о коллапсе в магнитной гидродинамике / Е.А.Михайлов, Е.А.Кузнецов // Журнал теоретической и экспериментальной физики. — 2020. — Т.158. — С.561 — 572.
- [236] Solanki, S.K. Sunspots: An overview / S.K.Solanki // The Astronomy and Astrophysics Review. — 2003. — V.11. P.153-286.
- [237] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса /А.Н.Колмогоров //Доклады АН СССР. — 1941. — Т.30. — С.299 — 303.
- [238] Gibbon, J.D. The three-dimensional Euler equations: Where do we stand? / J.D.Gibbon // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2008. — V.237. — P.1894 — 1904.
- [239] Hou, T.Y., Li, R. Computing nearly singular solutions using pseudo-spectral methods / T.Y.Hou, R.Li // Journal of Computational Physics. — 2007. — V.226. — P.379 — 397.
- [240] Юдович, В.И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости / В.И.Юдович // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т.3. — С. 1032 — 1066.



- [241] Kuznetsov, E.A., Naulin, V., Nielsen, A.H., Rasmussen, J.J. Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence / E.A.Kuznetsov, . Naulin, A. H. Nielsen, J.J. Rasmussen // *Physics of Fluids*. — 2007. — V.19. — 105110.
- [242] Agafontsev, D.S., Kuznetsov, E.A., Mailybaev, A.A. Development of high vorticity structures in incompressible 3D Euler equations / D.S.Agafontsev, E.A.Kuznetsov, A.A.Mailybaev // *Physics of Fluids*. — 2015. — V.27. — 085102.
- [243] Агафонцев, Д.С., Кузнецов, Е.А., Майлыбаев, А.А. Развитие структур высокой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера: влияние начальных условий / Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев//*Письма в ЖЭТФ*. — 2016. — Т.104. — С.695–700.
- [244] Agafontev, D.S., Kuznetsov, E.A., Mailybaev, A.A. Asymptotic solution for high-vorticity regions in incompressible three-dimensional Euler equations / D.S.Agafontsev, E.A.Kuznetsov, A.A.Mailybaev // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — V.813. — R1.
- [245] Mikhailov, E.A., Andreyan, R.R. Biermann battery mechanism and its role in evolution of astrophysical magnetic fields / E.A.Mikhailov, R.R.Andreyan // *Communications of the Byurakan Astrophysical Observatory*. — 2020. — V.67.- P.281 — 285.
- [246] Волков, В.Т, Ягола, А.Г. Интегральные уравнения. Курс лекций / В.Т.Волков, А.Г.Ягола // Москва, Физический факультет МГУ, 2006. — 94 с.
- [247] Кузнецов, Е.А., Рубан, В.П. Гамильтоновская динамика вихревых линий в системах гидродинамического типа / Е.А.Михайлов, В.П.Рубан // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1998. — Т.67. — С.1015 — 1020.
- [248] Kuznetsov, E.A., Ruban, V.P. Hamiltonian dynamics of vortex and magnetic lines in hydrodynamic type systems / E.A.Kuznetsov, V.P.Ruban // *Physical Review E*. — 2000. — V.61. — P.831.
- [249] Кузнецов, Е.А. Представление вихревых линий для течений идеальной и вязкой жидкостей / Е.А.Кузнецов // *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2000. — Т.76. — С.406 — 410.
- [250] Кузнецов, Е.А., Спектор, М.Д. О слабонадкритической конвекции / Е.А.Кузнецов, М.Д.Спектор // *Прикладная механика и техническая физика*. — 1980. — Т.2. — С.76 — 86.
- [251] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция — диффузия / Ю.В.Божевольнов, Н.Н.Нефедов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 276–285.

- [252] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике / А.Г.Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов // М.: Изд-во Московского университета, 1993. — 351 с.