

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Загидуллин Артур Александрович

**РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОЙ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ
ДЛЯ МОДЕЛИ УПРУГОЙ ЛУНЫ**

1.3.1. Физика космоса, астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Нефедьев
Юрий Анатольевич

Казань – 2024

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ЛУННЫХ СПИН-ОРБИТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ	20
1.1 Актуальные проблемы разработки теории вращения Луны.....	20
1.2 Аналитический подход в построении теории физической либрации Луны.....	31
1.3 Анализ численных теорий.....	38
ГЛАВА 2 МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ	42
2.1 Главная проблема в теории физической либрации Луны.....	43
2.2 Гамильтонов подход к построению уравнений ФЛЛ.....	49
2.2.1 Вывод выражения для кинетической энергии системы.....	49
2.2.2 Вывод выражений для 2-ой и 3-ей гармоник селенопотенциала.....	53
2.2.3 Вычисление выражений гармоник с 4-го по 6-ой порядок в разложении селенопотенциала.....	59
2.2.4 Линеаризация системы уравнений Гамильтона. Значения собственных частот ФЛЛ.....	63
2.3 Описание используемой аналитической теории орбитального движения Луны.....	67
2.3.1 Координаты Земли относительно центра масс Луны.....	67
2.3.2 Координаты Солнца относительно центра масс Луны.....	69
2.4 Программное обеспечение для построения численной теории ФЛЛ.....	75
2.4.1 Анализ метода Рунге-Кутты для численного интегрирования либрационных уравнений.....	75
2.4.2 Структура программного комплекса для реализации решения системы уравнений ФЛЛ.....	78

ГЛАВА 3 ПЕРЕХОД НА ЧИСЛЕННЫЕ ЭФЕМЕРИДЫ И РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМОГО РЕШЕНИЯ.....	81
3.1 Особенности перестройки решения с применением численной эфемериды DE.....	82
3.2 Разработка алгоритма по извлечению параметров орбиты Луны из DE421.....	85
3.3 Разработка алгоритма по извлечению параметров либрации из DE421.....	87
3.3.1 Полуэмпирические ряды наблюдений, построенные на основе сравнения DE421 с лазерными данными.....	87
3.3.2 Оптимизация числовых параметров и констант при формировании начальных значений для численного решения уравнений ФЛЛ.....	91
ГЛАВА 4 ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ГЛАВНОЙ ПРОБЛЕМЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	96
4.1 Анализ результатов с использованием твердотельной модели.....	96
4.2 Вклад 4-ой гармоники селенопотенциала в решение ФЛЛ.....	101
4.3 Анализ влияния на ФЛЛ прямого и косвенного возмущения от планет.....	104
4.4 Решение вопроса о влиянии на физическую либрацию приливной деформации лунного тела.....	105
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	116
ЛИТЕРАТУРА.....	121
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	133

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень ее разработанности

Интерес к исследованиям Луны сохраняется на протяжении многих десятков лет: накапливаются многолетние лазерные наблюдения, проводятся налунные и окололунные эксперименты, открывающие неизвестные ранее факты и повышающие точность наблюдений. Актуальность лунных исследований обусловлена необходимостью решения как фундаментальных проблем небесной механики и изучения Солнечной системы, так и решением всё более востребованных практических задач по освоению Луны и окололунного пространства. При этом возникает необходимость развития соответствующих теорий для адекватного описания как динамики Луны, так и её внутреннего строения. Прогрессу в области теоретических изысканий в значительной степени способствует применение непрерывно развивающихся математических и компьютерных методов. Также стоит отметить работы, направленные на изучение рельефа лунной поверхности и связанные с ней улучшение точности системы координат [41-43].

На основании лунных экспериментов Clementine и Lunar Prospector и построенных по ним моделей гравитационного поля Луны, группа учёных JPL NASA под руководством Williams J.G. провела тщательный анализ наблюдений физической либрации Луны с привлечением лазерной локации Луны и, с учётом уточнённых данных по возможной структуре лунного ядра, оценила, каким образом различные виды диссипативных процессов скажутся на параметрах вращения Луны [97]. Моделирование с использованием лазерных данных позволило сделать выводы о вероятном химическом составе лунного ядра и его размерах. При этом ранее было обнаружено [98], что диссипация лунного вращения вызывает периодические колебания вектора нормали экватора Луны, амплитуда которых составляет 0.26 угловой секунды относительно плоскости Кассини. Проведённый в работе [98] анализ большого количества лазерных измерений с использованием новых данных о гравитационном поле и коэффициентах Лява помимо вязкоупругих и приливных факторов позволил

обнаружить диссипативные процессы на границе мантии и жидкого ядра и (Mantle-Core Boundary – MCB), которые примерно за треть ответственны за наблюдаемые амплитуды в выявленном смещении полюса Луны. В ходе этого исследования были обнаружены и другие частоты физической либрации, на которых проявляются диссипативные свойства лунного вращения.

Позднее в работе [86] были построены полуэмпирические аналитические ряды теории физической либрации Луны. Причем аналитические ряды были рассчитаны не путём решения уравнений либрации, а путём подгонки параметров рядов к наблюдениям, а именно: параметры рядов – степенные коэффициенты и частотные характеристики каждого члена – были определены методом Ласкара на основе высокоточного частотного анализа остаточных разностей между многолетними лазерными данными и параметрами вращения, извлечёнными из DE421. Большая часть полученных таким образом гармоник была отождествлена с вынужденными или свободными либрациями. Однако остался ряд членов малой амплитуды (менее 50 мс дуги), для которых не удалось определить источник их происхождения. Единственное на сегодняшний день обоснованное объяснение возникновения этих неотожествлённых членов приводится в работе Баркина Ю.В., и др. [1]. Ими показано, что эти члены являются производными от свободных нутаций жидкого лунного ядра.

Таким образом, разработка и развитие теории лунной динамики остаётся весьма актуальной. Точная теория нужна не только для решения задач практического освоения Луны, но и для решения ряда фундаментальных проблем, связанных с получением данных о вязкоупругих характеристиках лунного тела, лунном ядре, его химическом составе и динамической фигуре. В частности, выяснение вопроса о наличии у Луны ядра и его физико-химических свойствах позволит приблизиться к решению задачи о возникновении и развитии системы Земля–Луна. Косвенные доказательства наличия лунного ядра были впервые определены из лазерных наблюдений. В 2011 году при переобработке сейсмических измерений [55, 91], полученных ранее по программе «Apollo», с применением современных математических и компьютерных методов были

найжены прямые доказательства того, что у Луны ядро существует. Также были сделаны оценки его структуры и размеров, которые подтвердили результаты, ранее полученные из лазерных наблюдений. Несмотря на столь большой прогресс в получении данных о лунном ядре, остаётся ещё ряд вопросов, без решения которых отсутствует полная картина процессов, происходящих в теле Луны. Речь идёт о параметрах сжатия ядра, скорости его вращения, наличии твёрдой внутренней сердцевины в жидкой оболочке ядра – от этих параметров зависит тип взаимодействия ядра с мантией, что, соответственно, не может не сказаться и на вращении Луны в целом.

Помочь в решении этих задач может высокоточная теория физической либрации Луны, которая развита в данном диссертационном исследовании. Дифференциальные уравнения, описывающие ФЛЛ, дают решение, состоящее из двух составляющих: решения однородного и соответствующего неоднородного уравнений. Решение однородного уравнения позволяет вычислить частоты *свободной либрации Луны*, которая может возникнуть в лунном вращении вследствие каких-то случайных единовременных возмущений, например, падение крупного метеорита. Решение неоднородного уравнения описывает *вынужденную либрацию*, обусловленную постоянно действующими возмущениями на тело Луны: гравитационное притяжение Земли, Солнца, планет, создающее пары сил, вводящих тело Луны в периодические колебания относительно равновесного вращения. По поводу свободной либрации следует сказать, что если у Луны есть жидкое ядро, то в её вращении должны также появиться дополнительные моды свободной либрации, обусловленные несовпадением оси вращения лунного ядра с осью вращения мантии – свободные нутации ядра, как у Земли. Однако расчёты показали, что период этих либраций близок к суточному лунному периоду, если рассматривать их в лунной системе координат, а в инерциальной – период порядка 300 лет [5]. Последнее при условии малых амплитуд (на уровне миллисекунд), существенно затрудняет их обнаружение. Но если бы в наблюдениях физической либрации Луны удалось обнаружить эту нутацию, мы бы получили дополнительные условия для определения и размеров лунного ядра,

и его эллиптичности. Тем не менее, и эта проблема разрешима на теоретическом уровне. Так Баркиным Ю.В. и др. [2, 45] впервые была построена аналитическая теория физической либрации для модели Луны с жидким ядром. В результате, как и ожидалось, было определено несколько высокочастотных гармоник малой амплитуды (менее 30 мс дуги), обусловленных исключительно наличием у Луны ядра. При сравнении теоретических результатов с полуэмпирической моделью ФЛЛ [86], выяснилось, что многие так называемые «неизвестные» члены с амплитудой менее 5 мс дуги в полуэмпирической модели как раз и соответствуют полученным в работах [2, 45] гармоникам. Это важное открытие, имеющее методологическое значение для применения результатов теории ФЛЛ к поиску в наблюдениях тех гармоник, которые помогут дать дополнительную информацию о параметрах лунного ядра. К сожалению, пока эти результаты о взаимосвязи аналитически и эмпирически полученных параметрах не получили широкого распространения. Возможно, потому, что в теории Баркина и др. [2, 45] рассмотрена простейшая модель жидкого эллипсоидального ядра, свободно вращающегося внутри лунной мантии. Научный интерес представляет продолжение развития описанного подхода для того, чтобы путём моделирования параметров ядра добиться максимального соответствия теории наблюдениям. Тем не менее, как правило, только параметры вынужденной либрации вычисляют в теории ФЛЛ, полагая, что свободные либрации уже затухли в ходе эволюции лунного вращения. Такой подход достаточно обоснован, т.к. амплитуды свободных либраций очень малы: лишь одна гармоника имеет значение 3 секунды дуги, остальные – на уровне десятка миллисекунд, их обнаружили только в середине 70-х годов 20-го века из первых лазерных наблюдений. Существенного влияния на решение для вынужденной либрации эти гармоники не оказывают. Поэтому и наш подход основан на получении только вынужденной либрации.

В представленном диссертационном исследовании приведены результаты построения теории физической либрации Луны на основе численного подхода к решению либрационных уравнений, который был разработан в Казанском федеральном университете. Основы теоретического описания вращения Луны

были заложены Хабибуллиным Ш.Т. в конце 50-х годов прошлого столетия. В середине 90-х годов Петровой Н.К. [80] была построена аналитическая теория физической либрации в рамках «главной проблемы». Представленная диссертационная работа развивает идеи Петровой Н.К. и Хабибуллина Ш.Т. на случай более точной модели лунного вращения, учитывающей такие эффекты, как косвенные и прямые возмущения от планет, влияние гармоник 4-го порядка гравитационного потенциала Луны, учёта усредненного приливообразующего потенциала и ряда других тонких эффектов, выходящих за пределы «главной проблемы ФЛЛ».

Объект и предмет исследования

Предметом исследования является построение теории физической либрации Луны. **Объектом** исследования является лунная динамическая система, включающая движение твердого тела в гравитационном поле, твердотельные приливы, анализ вращательной лунной динамики и методы гармонического анализа.

Цель данной работы – разработка численной теории физической либрации для модели упругой Луны с учетом требований к точности, определяемой современными наблюдениями.

Решаемые **задачи**, необходимые для достижения поставленной цели:

1. Разработка модели с точки зрения главной проблемы ФЛЛ:

- Вывод системы уравнений Гамильтона с использованием самолетных углов в качестве канонических переменных;
- Анализ гравитационного поля Луны с точностью до 3-го порядка в разложении по сферическим функциям;
- Исследование влияния возмущения от Земли и Солнца с учетом их представления в виде точечных объектов;
- Применение в качестве основной теории движения центра масс Луны аналитической теории Гутцвиллера–Шмидта [59].

2. Уточнение модели главной проблемы ФЛЛ:

- Включение в теорию ФЛЛ высших гармоник в разложении гравитационного поля Луны;
- Создание алгоритма перехода начальных параметров ФЛЛ к динамической теории движения Луны DE421;
- Учет влияния приливного члена Земли и гравитационных сил со стороны планет.

Следует отметить, что учет приливных явлений от Земли производился с помощью методики, предложенной в работе [98], согласно которой включение приливных деформаций можно выполнить с необходимой степенью точности путем добавления поправок к коэффициентам Стокса и к компонентам тензора инерции Луны. Это обоснованная методика, так как, согласно международной службе вращения Земли IERS, она является стандартной при расчете приливных поправок к вращению Земли.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Разработанные математический метод и программный алгоритм для описания вращения твердого тела Луны в рамках главной проблемы позволили решить дифференциальные уравнения вращения Луны.
2. Разработанные методики и подходы для исследования параметров современных динамических эфемерид для построения высокоточной теории физической либрации Луны позволили осуществить привязку текущей численной теории к данным DE421.
3. Результаты проведенного в работе сравнительного анализа теорий физической либрации Луны необходимы при использовании теории DE421 для моделирования либрационных параметров, определяющих уравнения связи канонических переменных в системе самолетных углов с углами Эйлера.
4. Разработка модели и методов, обеспечивающих решение задачи физической либрации Луны с учетом дополнительных возмущений, выходящих за рамки модели главной проблемы, необходимы для повышения уровня координатного обеспечения в процессе прилунения космических аппаратов и позволили учесть отклонения от главной проблемы физической либрации Луны.

Научная новизна работы

1. Впервые построена теория ФЛЛ с использованием собственной методики, и в отличие от других теорий применены самолетные углы в качестве либрационных переменных;
2. Разработан и реализован авторский алгоритм для интегратора дифференциальных уравнений ФЛЛ;
3. Создана численная теория для модели упругой Луны, которая опирается на современную высокоточную орбитальную теорию движения Луны, что повышает ее точность и достоверность;
4. Решена задача для уточненной модели вращения Луны, что позволило расширить представления о главной проблеме ФЛЛ.

Описание вращения Луны было реализовано через переменные, которые задают положение лунного тела (осей инерции a , b , c) относительно эклиптики. Данные переменные представляют разновидность самолётных углов: угол рысканья μ – описывает движение оси a относительно среднего движения Луны в эклиптике, угол крена ν – отслеживает смещение оси a относительно эклиптики, а угол тангажа π – ответственен за отклонение оси c от плоскости «полюс эклиптики – ось a » (рис 1). Указанные переменные, в отличие от классических углов либрации τ , ρ , σ , описывающих либрационное движение в углах Эйлера, не привязаны к движению лунного узла, что позволяет не учитывать прецессию лунного узла при решении уравнений либрации. Кроме того, использование разных способов построения уравнений либрации при сравнении с другими теориями позволяет выявлять возможные систематические ошибки и разную чувствительность переменных к внешним возмущениям [12], а также в итоге получить объективную оценку внешней точности теории.

Практическая и научная значимость работы

Результаты, а именно уточнённая теория ФЛЛ, может быть использована для широкого круга задач лунной астрометрии и небесной механики:

1. Точная теория ФЛЛ востребована для адекватной обработки современных и планируемых наблюдений за вращением Луны. При обработке наблюдений

лазерной локации такая теория является необходимым инструментом, позволяющим подгонять теоретические параметры к наблюдаемым на основе уменьшения остаточных разностей О-С.

2. Для координатно-временного обеспечения навигационных задач на Луне и окололунном пространстве. При этом для навигационной привязки к селеноцентрической системе координат и получения с высокой точностью координат объектов на лунной поверхности необходимо знать неравномерности во вращении лунного тела.
3. Теория ФЛЛ обеспечивает возможность анализа внутренней структуры Луны. Для решения научных задач по изучению внутренней структуры лунного тела (параметры лунного ядра, диссипативные процессы на границе с лунным ядром, отклонения от модели твердого тела, упругие параметры тела и т.д.) необходимо иметь не только ряды физической либрации, но и инструмент, который позволит изменять параметры уравнений ФЛЛ, вносить новые члены в теорию и проводить анализ их влияния на конечный результат.
4. Разработанная в диссертационном исследовании методика может быть экстраполирована для изучения вращения резонансных спутников других планет. В будущих исследованиях объектов дальнего космоса, например, резонансных спутников Юпитера, необходимы информация о параметрах гравитационного поля и вращения спутника, топографические данные, что позволит обеспечить успешную навигацию космического аппарата и определить области, подходящие для его безопасного прилунения.
5. Создание лунного ежегодника, который будет использоваться при планировании лунных наблюдений и анализа селенодезических процессов.

Данные исследования могут быть использованы в ГАИШ МГУ, ИКИ РАН, ИНАСАН, ИФЗ РАН, ИПА РАН, ГАО РАН, КФУ.

Методология и методы исследования

В работе используются следующие методы: описание гравитационного поля на основе его разложения по сферическим функциям; формализм Гамильтона –

как метод построения уравнений вращения для задачи физической либрации Луны; Фурье-анализ для определения частотных характеристик остаточных разностей при сравнении полученного решения для теории физической либрации Луны с наблюдаемыми данными.

Достоверность полученных результатов

Полученные в работе данные являются достоверными, так как: а) они в высокой степени согласуются с аналогичными результатами, опубликованными в высокорейтинговых рецензируемых научных изданиях; б) в процессе их обработки применялись классические методы редукции и анализа наблюдательных данных; в) основные результаты успешно прошли апробацию на профильных астрометрических конференциях, проводимых ГАИШ МГУ, ГАО РАН и ИНАСАН РАН.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были доложены на заседаниях: на заседании Координационного совета по небесной механике Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга МГУ имени М.В. Ломоносова, на объединенном семинаре «Проблемы происхождения и эволюции кометно-астероидного вещества в Солнечной системе и околоземная астрономия» в ИНАСАН, Кафедры астрономии и космической геодезии Казанского (Приволжского) федерального университета, а также на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

1. Всероссийская астрономическая конференция 2021 года (ГАИШ МГУ), 23–28 августа 2021 г., Москва, Россия;
2. Третья астрометрическая конференция школа «Астрометрия вчера, сегодня, завтра» (ГАИШ МГУ), 14–16 октября 2019 г., Москва, Россия;
3. Всероссийская астрономическая конференция «Астрономия: познание без границ», 17–22 сентября 2017 г., Ялта, Россия;
4. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2018» (Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН), 1–5 октября 2018 г., Санкт-Петербург, Россия;

5. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики
Фундаментальные и прикладные космические исследования (ИНАСАН) 11–
13 апреля 2018 г., Москва, Россия;
6. XIV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики
Фундаментальные и прикладные космические исследования (ИНАСАН),
12–14 апреля 2017 г., Москва, Россия;
7. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики
Фундаментальные и прикладные космические исследования (ИКИ РАН),
11–13 апреля 2018 г., Москва, Россия;
8. The eighth Moscow solar system symposium 8M-S³ (ИКИ РАН) 9–13 октября
2017 г., Москва, Россия;
9. Международная конференция Физика.СПб/18 (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 23–
25 октября 2018 г., Санкт-Петербург, Россия;
10. Международная молодёжная конференция Физика.СПб/21 (Главная
(Пулковская) астрономическая обсерватория), 23–27 октября 2021 г., Санкт-
Петербург, Россия;
11. Международная молодёжная конференция Физика.СПб/22 (Главная
(Пулковская) астрономическая обсерватория), 23–27 октября 2022 г., Санкт-
Петербург, Россия;
12. Международная конференция «85th Annual Meeting of The Meteoritical
Society», 14–19 августа 2022 г., Глазго, Шотландия;
13. Международная конференция «84th Annual Meeting of The Meteoritical
Society», 14–21 августа 2021 г., Чикаго, США;
14. AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition, сентябрь 2018 г.,
Калифорния, США;
15. Международный симпозиум «Lunar Exploration and Space Technology
Heritage», июнь 2016 г., Казань (КФУ), Россия.

Личный вклад автора

1. Выполнен вывод уравнений Гамильтона в самолетных углах. Личный вклад автора составил 80%, опубликовано 7 статей (№2, 3, 8-11, 20, в списке публикаций автора);
2. Осуществлен вывод гармоник 4-го и 5-го порядков селенопотенциала и их верификации с приведенными в литературе. Личный вклад автора составил 80%, опубликована 1 статья (№ 2 в списке публикаций автора);
3. Построен алгоритм для работы с аналитическими рядами ФЛЛ. Личный вклад автора составил 70%, опубликована 1 статья (№ 1 в списке публикаций автора);
4. Проведено исследование динамической эфемериды DE421. Личный вклад автора 80%, опубликовано 10 статей (№ 1, 12-19, 21 в списке публикаций автора);
5. Разработана система уравнений Гамильтона для решения главной проблемы ФЛЛ. Личный вклад автора составил 80%, опубликованы 2 статьи (№2, 4 в списке публикаций автора);
6. Создана теория физической либрации Луны для упругой модели. Личный вклад автора составил 80%, опубликована 1 статья (№ 5 из списка публикаций автора);
7. Выполнен анализ параметров для построения теории ФЛЛ с точки зрения их достоверности и точности. Личный вклад автора составил 80%, опубликовано 7 статей (№4,5,7,22-25 в списке публикаций автора);

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах WoS/Scopus, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:

1. Petrova N.K, **Zagidullin A.A**, Nefedyev Y.A. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results. *Advances in Space Research*. 2017. vol. 60. is. 10. p. 2303-2313. Web of Science JIF2022=2.6, личный вклад 80%, объем 1.32 печатных листов.
2. **Загидуллин А.А.**, Петрова Н.К., Усанин В.С., Нефедьев Ю.А., Глушков М.В. Разработка численного подхода в теории физической либрации в рамках

«главной проблемы». Ученые записки Казанского университета¹. Серия Физико-математические науки. 2017. т.159. №4. с. 529-546 //Переводная статья: **Zagidullin A. A.**, Petrova N.K. Usanin V.S., Nefedyev Y.A., Glushkov M.V. Development of the Numerical Approach in the Theory of Physical Libration within the Framework of the "Main Problem". Uchenye zapiski kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki. 2017. vol. 159. Is 4. p. 529-546. Scopus SJR2022 = 0.3, личный вклад 80%, объем 2.16 печатных листов, *Журнал индексируется системой Scopus с 2016 года*

3. Петрова Н.К., Нефедьев Ю.А., **Загидуллин А.А.**, Андреев А.О. Использование аналитической теории физической либрации Луны для обнаружения свободных нутаций лунного ядра. *Астрономический журнал*. 2018. т. 95. №. 12. с. 920-925 // Переводная статья: Petrova N.K., Nefed'ev Yu.A., **Zagidullin A.A.**, Andreev A.O. Use of an Analytical Theory for the Physical Libration of the Moon to Detect Free Nutation of the Lunar Core. *Astronomy Reports*. 2018. vol. 95, № 12. p. 1020-2024. Web of Science JIF2022=1.0, личный вклад 80%, объем 0.6 печатных листов.

4. Петрова Н.К. Нефедьев Ю.А., Андреев А.О., **Загидуллин А.А.** Налунные измерения физической либрации луны: методы и оценка точности. *Астрономический журнал*. 2020. т. 97. № 12. с. 1042-050 // Переводная статья: Petrova N.K., Nefedyev Y.A, **Zagidullin A.A.**, Andreev A.O. Lunar-Based Measurements of the Moons Physical Libration: Methods and Accuracy Estimates. *Astronomy Reports*. 2020. vol.64. is.12. p. 1078-1086. Web of Science JIF2022=1.0, личный вклад 80%, объем 1.08 печатных листов.

5. **Загидуллин А.А.**, Усанин В.С., Петрова Н.К., Нефедьев Ю.А., Гудкова Т.В. Физическая либрация Луны: расширенная проблема. *Астрономический журнал*. 2021. т. 98. № 1. с. 75-88 // Переводная версия: **Zagidullin A.A.**, Usanin V.S., Petrova N.K. Nefed'ev Yu.A, Gudkova T.V. Physical libration of the moon: an extended problem. *Astronomy Reports*. 2020. vol. 64. p. 1093–1106. Web of Science JIF2022=1.0, личный вклад 80%, объем 1.68 печатных листов.

¹ Журнал включен в Scopus в 2016 году

6. **Zagidullin A.A.**, Petrova N. K., Andreev A. O., Nefedyev Y. A. Development of the Theory of Physical Libration of the Moon Taking into Account the Lunar Two-Layer Model Including a Solid Mantle and a Liquid Core. *Meteoritics & Planetary Science*. 2022. vol. 57. is. 1. p. 6282. Web of Science JIF2022=2.2, личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.
7. **Zagidullin A.A.**, Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O. Creation of a generalized dynamic model of planetary moons based on an analytical approach for describing the libration processes of their rotation. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 2023. Vol. 16, No. 1.2, 517 – 522. Scopus SJR = 0.38, личный вклад 80%, объем 0.72 печатных листов.

Иные публикации:

8. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Glushkov M. V. Numerical approach to constructing the lunar physical libration: results of the initial stage. *European Planetary Science Congress*. 2015. vol. 10. Art. id. 67., личный вклад 60%, объем 0.12 печатных листов.
9. Zagidullin A. A., Petrova N. K. Development of a numerical approach to the theory of the rotation of the Moon: A study of latitudinal parameters physical libration. *41st COSPAR Scientific Assembly, 30 July - 7 August*. 2016. Art. id. B0.1-31-16., личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.
10. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А., Глушков М.В. Численный подход к построению физической либрации Луны: результаты второго этапа. *Reports of the International Symposium «Lunar Exploration and Space Technology Heritage»*. 25-30 August. Kazan: Kazan federal university. 2016. С. 218 - 225., личный вклад 80%, объем 0.96 печатных листов.
11. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Физическая либрация Луны - главная проблема. XIV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики *Фундаментальные и прикладные космические исследования*. 12 -14 апреля. Москва, Институт космических исследований РАН. 2017. С. 5 -7., личный вклад 70%, объем 0.36 печатных листов.

12. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны. Всероссийская астрономическая конференция 2017 «Астрономия: познание без границ». 17-22 сентября. Ялта, Крым. 2017. С. 2 - 5., личный вклад 70%, объем 0.48 печатных листов.
13. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны. Тезисы докладов Международной молодежной конференции ФизикА.СПб 24 -26 октября. Санкт-Петербург: ЛИТЕО. 2017. С. 11 –12., личный вклад 70%, объем 0.24 печатных листов.
14. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Адаптация численной эфемериды DE к построению теории физической либрации Луны. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования. 11 - 13 апреля. Москва, институт космических исследований РАН. 2018. С. 40 - 43., личный вклад 70%, объем 0.48 печатных листов.
15. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Analysis of dynamic ephemeris and physical libration of the Moon in order to create a lunar navigational system. AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition. 17-19 September. Orlando, USA. 2018. Art. id. 5299., личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.
16. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Проблема редукции углов вращения Луны, полученных в разных теориях лунной физической либрации. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2018» 1 - 5 октября. Санкт-Петербург: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук. 2018. С. 14., личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.
17. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А., Андреев А.О. Использование современных численных и аналитических эфемерид Луны. Тезисы докладов Международной конференции ФизикА.СПб 23 -25 октября

Санкт-Петербург: ЛИТЕО. 2018. С. 3 - 4., личный вклад 80%, объем 0.24 печатных листов.

18. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Проблема редукции углов вращения Луны, полученных в разных теориях лунной физической либрации. Труды ГАО РАН. 2018. № 225. С. 155 -160., личный вклад 70%, объем 0.72 печатных листов.

19. Загидуллин А. А., Петрова Н. К., Усанин В. С., Нефедьев Ю. А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны. Известия Крымской астрофизической обсерватории. 2018. Т. 114., № 1. С. 37 - 42., личный вклад 70%, объем 0.72 печатных листов.

20. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Analysis of orbital theories for the construction of the numerical theory of the lunar physical librations. Journal of Physics: Conference Series. 2018. vol. 1038., no. 1. Art. id. 012004, SNIP 0.447, личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.

21. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Analysis of analytical and numerical dynamic lunar ephemerides. Journal of Physics: Conference Series. 2020. vol. 1697., Is 1., Art. id. 012018., личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.

22. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. The Simulation System for Determining the Positions of Lunar Objects on the Basis of Satellite Observations in the Selenocentric System. 84th Annual Meeting of the Meteoritical Society. 15-21 August. Chicago, Illinois. LPI Contribution. 2021. No. 2609, Art. id. 6214, личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.

23. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Development of the Theory of Physical Libration of the Moon Taking into Account the Lunar Two-Layer Model Including a Solid Mantle and a Liquid Core. 85th Annual Meeting of The Meteoritical Society. 14-19 August. Glasgow, Scotland. LPI Contribution. 2022. No. 2695. Art. id.6282, личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.

24. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Simulation of the Size and Flattening of the Lunar Core for Synchronization with Data on Laser Observations. Meteoritics & Planetary Science. 2022. Vol. 57., no. 1. Pp. 6278., личный вклад 70%, объем 0.12 печатных листов.

25. Zagidullin A. A., Petrova N. K., Usanin V. S., Nefedief Yi. A., Andreev A.O. Development of a Highly Accurate Theory of the Physical Libration of the Moon for Its Use in the System of Coordinate and Time Support. 86th Annual Meeting of the Meteoritical Society. 13-18 August. Los Angeles, California/Virtual. LPI Contribution. 2023. no. 2990. Art. id. 6126, личный вклад 80%, объем 0.12 печатных листов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из 4 глав. Объем -137 стр., рисунки - 31, таблицы -12.

В первой главе приведен анализ лунных спин-орбитальных теорий.

Во второй главе выводятся основные уравнения, описывающие вращение Луны, приведен явный вид гармоник селенопотенциала, получены выражения для работы с аналитическими таблицами движения Луны по теории Гутцвиллера и Шмидта. Помимо перечисленного, описывается метод численного интегрирования системы дифференциальных уравнений Гамильтона. Также приводится обзор структуры программной реализации задачи с описанием всех взаимосвязанных программ-функций.

В третьей главе описана процедура получения начальных данных для построения теории ФЛЛ на основе констант, заложенных в численную динамическую эфемериду DE421. Приводится алгоритм решения задачи Коши численного интегрирования полученных уравнений ФЛЛ и краткий обзор структуры хранения численных эфемерид DE.

В четвертой главе рассматриваются и анализируются остаточные разности между полученным в диссертации решением ФЛЛ с аналитическим решением [80] и с численным решением DE421.

При написании данной главы использованы публикации 3, 23, 24 из списка публикаций автора по теме диссертации.

ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ЛУННЫХ СПИН-ОРБИТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Актуальные проблемы разработки теории вращения Луны

Методы описания динамики Луны и Земли отличаются. Во-первых, если для Земли, движущейся в поле тяготения Солнца, можно в качестве первого приближения использовать Кеплерову орбиту, возмущаемую относительно лёгкой Луной, то для Луны такой подход не приемлем. Луна, находясь в поле тяготения Земли, испытывает сильное возмущение и со стороны массивного Солнца. Поэтому для описания с необходимой степенью точности движения её центра масс по орбите применяется решение, как минимум, ограниченной задачи трёх тел, а именно: основой для теории движения Луны служат уравнения Хилла, на которых и построена первая, удобная для практического применения, теория движения Луны Хилла–Брауна.

При описании вращательного движения Луны также требуются иные методы и подходы. Например, Земля имеет очень высокую скорость вращения, совершая оборот за одни сутки. Такой тип вращения называют ротационным, так как кинетическая энергия вращения Земли намного больше, чем потенциальная энергия взаимодействия с другими небесными телами. Влияние внешних сил приводит к долгопериодической прецессии и малым нутациям (максимальная амплитуда 17 угловых секунд в лунно-солнечной нутации). В то же время Луна в ходе долгой приливной эволюции пришла к стационарному вращению: скорость собственного вращения синхронизирована в отношении 1:1 с орбитальной скоростью. В результате Луна вращается медленно, делая оборот вокруг оси лишь за 27.3 суток. Такой тип вращения называют либрационным, и здесь при малой кинетической энергии собственного вращения большую роль играют внешние потенциальные силы, приводящие к либрационным колебаниям относительно равновесного положения. Поэтому для описания вращения Луны в качестве первого приближения можно использовать законы Кассини, соответствующие

равномерному вращению Луны, синхронизированному с орбитальным движением лунного центра масс [57]. Таким образом, задача построения теории вращения сводится, как правило, к описанию этих либраций относительного равновесного положения.

К концу прошлого века рядом ученых были построены теории физической либрации как в аналитическом, так и численном подходе. В частности, в работах [26, 83] рассмотрено, как применение различных подходов при создании теории вращения Луны позволяет продвинуться в обработке и интерпретации наборов данных, которые были получены в результате ряда спутниковых экспериментов по исследованию гравитационного поля Луны и физической либрации. Данные эксперименты также были направлены на определение селенопотенциала, построению глобальной топографии лунной поверхности и обработке долговременных рядов наблюдений лазерной локации Луны. В итоге были определены те направления исследований, в которых удалось добиться существенного прогресса, а также обозначены задачи, которые требуют дальнейшего улучшения наблюдательной базы и теоретической модели лунной динамики.

Следует подчеркнуть, что исследования особенностей вращения нашего естественного спутника с использованием данных лазерной локации (Lunar Laser Ranging – LLR) до сих пор остается главным методом для уточнения теории ФЛЛ. Так, например, с помощью LLR были достоверно установлены эффекты, подтверждающие существование жидкого лунного ядра (ЖЛЯ) у Луны [86, 87]. Диссипация энергии на МСВ является фактором, который подтверждает наличие лунного жидкого ядра. Также, согласно работам [86, 96, 98] на основе наблюдений лазерной локации Луны была построена модель распределения влияния на диссипацию с одной стороны лунных приливов, а с другой процессов на МСВ. В качестве другого показателя наличия ЖЛЯ выступает компрессия МСВ-слоя, приводящая к появлению пертурбационного компонента во вращательном движении.

Существование ЖЛЯ является причиной преобразования амплитуд отдельных элементов в рядах ФЛЛ. Одним из проявлений этого становится несоответствие ориентации и величины осей инерции ядра и лунной мантии [85, 102]. Данный эффект называется свободной нутацией ядра FCN (Free Core Nutation). Амплитуда этого эффекта мала, и поэтому имеющийся наблюдательный материал не позволяет его обнаружить в полной мере [97]. Таким образом, данная задача остается для будущих исследований и может быть решена с помощью планируемых экспериментов по установке измерительного оборудования на лунную поверхность. Такие эксперименты также позволят повысить точность теории ФЛЛ [81].

В некоторых работах, в которых анализировались данные LLR, исследователи пытались установить величину параметров FCN, однако получить частоту FCN не удалось [86, 97]. При этом на основе сопоставления результатов с эфемеридой DE430 удалось определить одну из важных характеристик – сжатие ЖЛЯ, равное $(2.47 \pm 1.5) \times 10^{-4}$. В зависимости от структуры лунного ядра определяются и периодические члены FCN, соответственно, для принятого нами размера ядра частота колебаний имеет 300-летний период.

Также согласно исследованиям, выполненным Williams et al. [86], данный период оказался больше, чем в работе Петровой и др. [85]. Это объясняется тем, что значения теоретических оценок данного периода зависят от модели лунного тела. Соответственно, в работе [85] не учитывалось взаимодействие жидкого ядра и лунного тела, и динамическая фигура была подобна фигуре мантии. Данная модель упрощенная, и как сообщалось выше, необходимо учитывать трения на СМВ, так как Луна до сих пор не пришла к своему равновесному состоянию. Это предполагает наличие внутренних напряжений, выводящих лунное тело из гидростатического равновесного состояния. Также данные напряжения вызывают дополнительное сжатия МСВ, и в итоге экваториальная эллиптичность получилась больше, чем при гидростатическом равновесии [97].

Таким образом, вопрос о величине сжатия области МСВ и самого ядра f_c остается по-прежнему актуальным в силу того, что данный параметр напрямую определяет FCN-период:

$$P_{\text{FCN}} = 27,32 \times (1 + \delta(R_c)) / f_c,$$

здесь $\delta(R_c) \ll 1$ – функция от радиуса ядра. Необходимо отметить, что из наблюдений за свободной либрацией – нутацией лунного ядра – требуется получить одновременно два параметра: сжатие и средний радиус Луны. При этом, если бы удалось выявить из наблюдений период свободных нутаций, то появилось бы дополнительное условие для определения параметров лунного ядра. Но в связи с тем, что величина этого периода, согласно приведенным выше различным оценкам, достаточно велика, и поэтому его сложно определить даже с использованием наблюдений ЛЛЛ.

Другая трудность определения периода FCN состоит в наличие резонанса вынужденных и свободных либраций, вследствие чего частота, на которой происходят свободные нутации, попадает в области частот многих вынужденных либраций и при редукции наблюдений выделить ее достаточно сложно. Чтобы этого избежать, необходимо точно определить реальные частоты и амплитуды вынужденных либраций, которые рассчитываются в аналитической теории ФЛЛ.

Вопрос об определении параметров лунного ядра важен ещё и потому, что процессы на его границе с мантией, наряду с приливными эффектами, приводят к диссипации лунного вращения. Диссипация энергии зависит от параметров ядра и свойств вещества на границе ядро–нижняя мантия. Williams J.G., et al. [98] в 2001 году дал оценку радиуса ядра, состоящего полностью из железа, в 352 км, а если добавить в состав некоторое количество серы, то радиус оценивается в 374 км. Также, при выполнении космической миссии «Lunar Prospector» изучалось прохождение Луны через магнитосферу Земли, и согласно предположению, что проводящее ядро индуцирует магнитное поле Луны, исследователями был оценен радиус ядра в 340 ± 90 км [62]. При этом сейсмические и геофизические

эксперименты определили радиус ядра в диапазоне 250–450 км [68, 69]. Поскольку все вышеперечисленные данные являются независимыми друг от друга, то говорить о случайном совпадении оценок размера ядра нельзя. Отметим, что современная переобработка сейсмических данных миссии «Apollo» с учетом отраженных фаз от лунного ядра выполнена двумя исследовательскими группами Garcia, et al. [55] и Weber, et al. [91], причем в модели [55] не предполагается наличие ядра у Луны в отличие от модели [91]. Данные работы по анализу сейсмических данных позволили более уверенно определить параметры ядра, но уже на основе прямых измерений сейсмических волн.

Другим важным параметром в определении диссипации на границе ядро-мантия является приливное число Лява. Гравитационные измерения Луны в проекте GRAIL [67, 70, 94, 97] определили с хорошей точностью значение приливного числа Лява, равного в среднем 0.0242. При этом сейсмические данные дают меньшее значение числа Лява, равное 0.0231. Данная разница говорит о том, что ядро Луны не находится в тепловом балансе с мантией [37]. Сейсмические данные также показывают, что у Луны отсутствуют глубокофокусные лунотрясения. Это можно объяснить тем, что вся энергия в пограничном лунном слое рассеивается и, следовательно, невозможно считать данный сферический слой как твердое тело. Вероятно, слой, находящийся между ядром и мантией, имеет частичное расплавление.

Поскольку возмущающие силы являются периодическими, то явление частичного расплавления можно исключить, если принять во внимание, что реологические параметры – модуль сжатия и др. - зависят от частоты возмущающей силы, а не только от ее амплитуды. В работе [37] был рассмотрен случай, где реологический параметр модуль сжатия, зависел от частоты возмущающей силы. Это позволило уменьшить имеющиеся расхождения в значениях числа Лява. Однако нельзя утверждать, что проблема расхождения была решена, так как в рассматриваемой модели [6, 37] использовалась самая простая линейная зависимость изменения модуля сжатия ядра.

Согласно результатам ранних, не высокой точности, наблюдений за вращением Луны был сделан вывод, что её тело является абсолютно твёрдым и, по оценкам [8] обладает добротностью $Q \sim 5000$. При сравнении теории ФЛЛ с данными лазерной локации было обнаружено [8, 101] периодическое смещение оси вращения Луны из плоскости Кассини с периодом в 27.3 суток и амплитудой 0.27 сек. дуги. Плоскость Кассини – это плоскость, в которой бы лежали векторы полюса орбиты Луны, полюса эклиптики и полюса Луны, в случае равномерного вращения Луны. Объяснить обнаруженное из наблюдений ЛЛЛ явление выхода из плоскости Кассини удалось включением диссипативных процессов в теле Луны. Рассеяние лунного вращения обусловлено совокупным действием приливного трения и турбулентных процессов на границе жидкого ядра и вязкоупругой мантии [52]. Как итог, полученные данные привели к отказу от модели абсолютно твёрдого тела (АТТ) Луны.

При накоплении большего количества лазерных измерений группой учёных JPL под руководством Williams J.G., et al. [98] было проведено сопоставление результатов моделирования с наблюдаемыми эффектами диссипации в лунном вращении путём теоретического моделирования вязкоупругих свойств лунного тела и параметров ядра (размер, сжатие и химический состав). Подробно рассмотрим эти наблюдаемые эффекты. Согласно законам Кассини, три вектора: нормаль к орбите Луны, нормаль к плоскости эклиптики и нормаль к экватору Луны, должны находиться в одной плоскости (рис 1.1). Из-за диссипации происходит смещение третьей нормали от этой плоскости.

Williams J.G., et al. [98] показал, что в рассматриваемой наблюдаемой величине смещения, значение которого равно ~ 0.26 угловых секунды, $2/3$ величины обязано приливам, а $1/3$ соответствует диссипации на МСВ. Разделить данный эффект, как пишет автор, удалось благодаря тому, что вращение ядра и мантии происходит с разной угловой скоростью. Отметим, что в силу малости лунного ядра и медленной скорости вращения Луны удастся определить приливосодержащую зависимость в первом приближении, как постоянную добавку к моментам инерции твёрдого тела Луны, а также к коэффициентам Стокса второго порядка.

Рассмотрим, как современными исследователями производится учет диссипации [96]. Модель АТТ – это математическая абстракция, которая означает, что при любых внешних воздействиях расстояние между двумя точками в теле никогда не изменяется. Более точной моделью можно считать упругое тело, в котором деформация прямо пропорциональна прикладываемой внешней силе. Отметим, что если внешнее воздействие является статическим, то деформация не будет изменяться со временем. Здесь наиболее правдоподобной моделью можно считать вязкое тело, которое, в отличие от упругого тела, после прекращения внешнего воздействия не возвращается в прежнее состояние. В таком теле остаются остаточные напряжения. Если теперь мы применим статическое внешнее воздействие, то вязкое тело деформируется со временем. Данный эффект описывается свойством ползучести. На Земле, например, таким эффектом обладают массивные ледяные образования на определенном геологическом промежутке времени. Также вязкое тело обладает диссипацией.

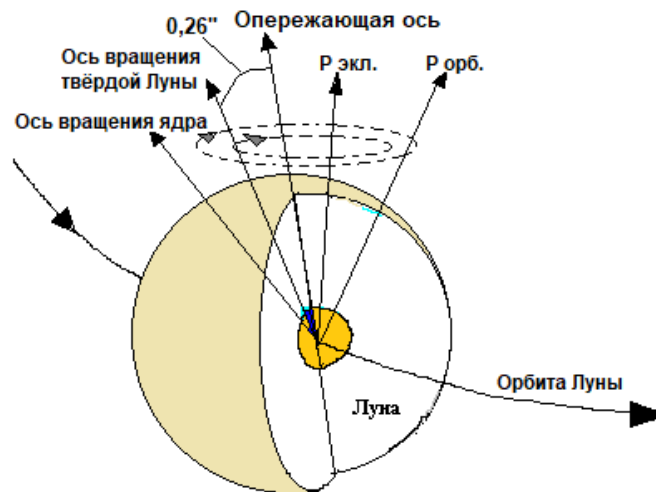


Рис 1.1 Смещение оси вращения Луны от плоскости Кассини. Ось вращения лунного ядра не совпадает с осью вращения Луны.

В рассматриваемой модели такие параметры, как коэффициенты Стокса, задающие распределение масс в теле, и число Лява (для потенциала) уже не постоянны, а зависят от времени. Учёт влияния диссипации на вращение Луны

можно произвести путём введения параметров временной задержки (для Луны – порядка четырех часов) и фазовой задержки в приливном отклике Луны. В работе [96] число Лява вводится более сложным образом с использованием фазовой задержки в приливном отклике системы. Для описания фазовой задержки через свойства лунного тела рассматривается простое соотношение [96] синус фазовой задержки обратно пропорционален добротности тела на разных периодах вынужденных возмущений (1.1.1). Для того, чтобы найти явную зависимость числа Лява k_2 и (k_2/Q) от вынужденного периода, вводятся функции, называемые реологическими, которые зависят от распределения в мантии и ядре Луны внутренних параметров (в общем случае это плотность, модуль сдвига, модуль объемного расширения/сжатия). Как и для Земли, изменение числа Лява для Луны также раскладывается в ряд, состоящий из частных производных числа Лява. Но при этом в отличие от Земли дифференцирование производится по модулю смещения, так как параметр объемного расширения/сжатия для Луны не вносит заметного вклада.

Следующий этап теоретического учета эффектов диссипации заключается в выборе реологической модели для нахождения реологических функций. В работе Williams J.G., et al. [96, 98] рассматриваются четыре модели: вязкоупругая модель, модель Andrade, модель Single Relaxation Time, модель Absorption Bands.

Опишем вкратце суть каждой модели. Все модели опираются на лабораторный эксперимент по измерению добротности тела. Эти эксперименты показывают степенную зависимость между добротностью и периодом возмущения. Поведение вязкоупругой модели полностью описывается формулой:

$$Q = Q_F \left(\frac{\text{частота}}{\dot{F}} \right)^w = Q_F \left(\frac{27.212}{\text{период}} \right)^w, \quad (1.1.1)$$

где разность между долготой Луны и средней долготой восходящего узла Луны обозначена как F . В случае $w = 0$ диссипация не зависит от периода/частоты

вынужденных сил, в случае $w = -1$ зависимость от частоты обратно пропорциональная.

Модель Andrade, в отличие от первой, не включает диссипативный фактор, который Williams J.G., et al. [96] называют вязкостью типа Максвелла, то есть является упругой моделью. Последние две модели рассматривают ограниченный диапазон периодов, на которых возможна диссипация. Согласно Single Relaxation Time, диссипация имеется только на одном определенном периоде, а Absorption Bands предполагает, что существует диапазон, внутри которого диссипация растет с периодом по степенному закону, а вне диапазона равна нулю.

Во все перечисленные выше модели входят два основных параметра k_2 и k_2/Q для фиксированного периода, которые должны определяться из наблюдений, а коэффициент w в степенном законе должен определяться либо из лабораторных измерений, либо из наблюдательных данных (например, гравиметрических (GRAIL), лазерных (ЛЛЛ), радиометрических (Chang'E)). Результаты исследования показали, что при использовании только одной модели не удается согласовать моделируемые параметры с наблюдательными данными. Но эта проблема исчезает при использовании комбинированной модели.

Следует отметить, что числа Лява можно рассчитать теоретически, если решать связанную систему из уравнений теории упругости [28, 29] и теории гравитационного потенциала [49, 50, 53]. Решив данную систему, получают ряд параметров, которые и определяют числа Лява, которые представляют собой функцию модуля сжатия, модуля сдвига и плотности планетного объекта. При этом модули сдвига и сжатия связаны через продольные и поперечные скорости волн, определяемые из сейсмических данных [109], что видно из формулы ниже:

$$V_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} - \text{продольные волны} \quad (1.1.2)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} - \text{поперечные волны,}$$

где K – модуль сжатия, μ – модуль сдвига, ρ – плотность среды в данной точке.

Диапазоны сейсмических скоростей в верхней мантии для всех сейсмических моделей, проанализированных в работе [109], совпадают, кроме нижней мантии (ниже 500–700 км под лунной поверхностью), где оценки скоростей P и S волн имеют большие ошибки $\pm(0.1-0.3)$ км/с [37]. Поэтому ошибки в сейсмических скоростях, особенно в нижней мантии, приводят к ошибкам определения чисел Лява, которые сильно зависят от определяемых параметров именно на этих глубинах.

Сейсмические и магнитометрические методы являются прямыми методами изучения структуры небесного тела. Для Луны эти методы были применены и внесли существенный вклад в понимание её внутренней структуры. Для других небесных тел прямые измерения пока малодоступны. Изучение физической либрации Луны обеспечивает исследователям косвенные методы определения её внутренней структуры. Эти методы, возможно, менее точны, но зато и менее затратные, чем эксперименты с установкой оборудования на поверхности планеты. Физическая либрация содержит важную информацию об лунной динамике, и те методы, с помощью которых изучают Луну, вполне могут быть экстраполированы на другие небесные тела, имеющие такой же тип вращения, что и наш естественный спутник.

Как отмечалось выше, одной из причин возникновения свободных колебаний во вращении Луны является несовпадение оси вращения с главным моментом инерции. В результате в спектре либраций появляется низкоамплитудная мода, период которой в динамической системе координат (ДСК) равен примерно 74.6 года. Данную моду с полным правом можно отнести к чандлерово - подобным колебаниям, так как аналогичное явление с периодом в 433 дня мы наблюдаем и во вращении Земли и называем эту моду Чандлеровыми колебаниями. У Луны эту моду впервые выявила Calame O. [49] в начале 70-ых годов 20-го века из анализа лазерных наблюдений. Вследствие этой моды ось вращения Луны описывает относительно главной оси инерции C эллипс

размерами 3×8 угловых секунд. Номенклатурное название этого движения – CW (Chandler Wobble).

Помимо CW в спектре свободных колебаний твёрдой Луны наблюдаются широтные и долготные либрации. Либрация по долготе имеет период 2,9 года, либрация по широте имеет период около 81 года (в инерциальной системе отсчета) [83, 101]. Эти либрации представляют ретроградное движение оси вращения Луны вокруг перпендикуляра к плоскости экватора по небольшому конусу.

Поскольку у Луны обнаружено жидкое ядро, то вследствие несовпадения осей вращения ядра и мантии в спектре либраций Луны должна появиться ещё одна мода, которая, согласно предварительным расчётам, будет иметь квазисуточный период в динамической системе координат и более 300 лет в инерциальной системе координат (ИСК). Этот период зависит от размера ядра и, в большей степени, от его эллиптичности. Номенклатурное название этой моды – FCN (Free Core Nutation) – свободная нутация ядра. Если бы из наблюдений удалось определить эту моду, мы бы получили возможность оценить и размер, и сжатие ядра. Однако пока эта мода не поддаётся обнаружению [83, 97].

Внутреннее строение Луны можно представить как твердое ядро, жидкое ядро и мантия, имеющие разнонаправленные оси вращения. Тогда возникают две дополнительные моды, связанные нутации и колебаниям компонентов, составляющих внутреннюю структуру. Периоды для инерциальной системы координат равны для нутации 100 лет, а для свободных колебаний ≈ 550 лет [57].

Периоды свободных либраций могут быть также рассчитаны аналитически, на основе различных моделей структуры ядра. А вот их амплитуды могут быть получены только из высокоточных наблюдений. В частности, пока из наблюдений ЛЛЛ чётко выявлены только свободные твердотельные либрации. При этом нутации ядра не обнаружены с использованием наблюдательной техники современного уровня.

Тем не менее, косвенные доказательства наличия свободных мод ядра имеются. Баркиным Ю. и др. [45] была впервые построена аналитическая теория

физической либрации Луны, имеющей жидкое ядро. Верификация теории производилась на полуэмпирических рядах Rambaux, et al. [86]. Эти ряды получены с помощью высокоточного частотного анализа остаточных разностей при сравнении лазерных наблюдений с данными численной теории DE421. С использованием аналитической теории [1, 45] авторами были рассчитаны параметры либрации с числовыми значениями, заложенными в DE421, и был произведен анализ остаточных разностей. Самым интересным результатом данного анализа оказалось совпадение теоретически рассчитанных аналитических членов с членами, обозначенными в теории [86] как U_n – неизвестные: то есть их физическое происхождение в работе [86] не было выявлено. Анализ этих рядов с помощью аналитической теории позволил сделать вывод, что большая часть членов U_n хорошо совпадает с гармониками, которые в аналитической теории соответствуют модам, обусловленным наличием жидкого ядра. Таким образом, можно сказать, что моды жидкого ядра также обнаружены и, в качестве первого приближения, можно взять параметры ядра, заложенные Баркиным Ю. и др. в их теорию. В частности, можно принять амплитуду FCN, примерно равную 0.0395 угловой секунды, фазу, равную -134 градуса для начальной эпохи 2000.0, период, равный 205.7 года, а также сжатие ядра, равное 3.6×10^{-4} [45].

Таким образом, аналитический подход в теории ФЛЛ имеет безусловные преимущества: несмотря на невысокую точность аналитических теорий, они обладают предсказательной функцией, и, как было показано, дают предварительные оценки периодов свободных твердотельных либраций и нутаций ядра.

1.2 Аналитический подход в построении теории физической либрации Луны

В отсутствие мощных вычислительных средств – компьютеров и соответствующего программного обеспечения – развитие теорий, описывающих динамику Луны и других небесных тел, происходило преимущественно по аналитическому пути. В данном случае зависимость параметров вращения Луны

от времени и характеристик лунного тела определялась *приближенным представлением*, как правило, в виде тригонометрических рядов или рядов Пуассона. Параметры этих рядов могли быть рассчитаны аналитически из уравнений либрации и представлялись в виде таблиц физической либрации [63, 80].

Первые аналитические теории физической либрации Луны строились чаще всего с применением тригонометрических рядов, в них были заложены простейшие модели селенопотенциала с учётом гармоник только второго порядка. Однако, успехи лазерной локации Луны и уточнение параметров гравитационного поля, а также появление мощных ЭВМ с программным обеспечением для реализации аналитических операций с рядами, привели к тому, что с 80-х годов XX века появился ряд аналитических теорий, которые обеспечивали точность 10 мс дуги в определении параметров либрации [53, 73, 74, 75, 80]. В них присутствовали уже гармоники третьей степени разложения селенопотенциала, а в некоторых [53, 76] и четвертой степени, были учтены возмущения от планет, от сжатия Земли, от упругих свойств Луны [53, 76]. Также наряду с вынужденными гармониками были включены гармоники, соответствующие свободной либрации [74, 75].

Для обеспечения математической зависимости параметров ФЛЛ от временных и гравиметрических характеристик Луны в рамках современного подхода аналитические теории включают разложение ФЛЛ в виде тригонометрических и пуассоновских рядов. В работе [50] авторы провели анализ точностей аналитических теорий Moons M. [75] путём сравнения с результатами аналогичных численных теорий и показали, что точность аналитического подхода не превышает 0.3 угловых секунд.

Тем не менее, значимость аналитического подхода нельзя недооценивать. Даже для проведения численного интегрирования порой приходится принимать в качестве начальных условий на больших временных периодах результаты, полученные по аналитическим формулам. Но ключевым преимуществом аналитического подхода является возможность оценить периоды свободных

либраций как для твердотельной Луны, так и для Луны с жидким ядром, а также ряд других эффектов, позволяющих определить частоты, на которых эти эффекты проявляются [82]. Поэтому два подхода в построении теории ФЛЛ до сих пор остаются естественным путём их разработки [83].

Дадим краткий обзор некоторых аналитических теорий, вклад которых в общее понимание процессов вращательной динамики Луны имеет существенное значение.

Аналитическая теория Петровой Н.К. В настоящей диссертационной работе, учитывая многолетний опыт Казанской школы физической либрации Луны, за основу построения численной теории взяты методика и исходные данные из работы Петровой Н.К. [32, 80]. Аналитическая теория [80] построена в рамках ограниченной «главной проблемы». Значения углов либрации представлены в виде рядов Пуассона:

$$\sum_{r=1}^{\infty} COEF_r \cdot FACTOR_r \frac{\cos}{\sin}(k_{r1}l + k_{r2}l' + k_{r3}F + k_{r4}D), \quad (1.2.1)$$

где l, l', F, D – линейные составляющие аргументов Делоне;

$COEF_r$ – числовые параметры, рассчитанные на основе аналитической теории орбитального движения [59];

$FACTOR_r = \prod_{i=1}^9 E_i^{m_{ri}}$ – полиномы в степенной форме; $E_i^{m_{ri}}$ являются функциями гравитационного потенциала; m_{ri}, k_{ri} – экспоненциальные и тригонометрические показатели [38].

Результаты теории Петровой согласуются с аналогичными теориями других авторов (Moons [75], Migus [73], Eckhardt [53]) с точностью до 10 мс дуги, что соответствует требованиям к внешней точности аналитических теорий для принятых моделей Луны. В теории Петровой Н.К. для углов либрации, описывающих движение полюса Луны относительно полюса эклиптики, имеется периодическое расхождение с периодом в один месяц и амплитудой в 1 секунду дуги. Тем не менее ценность этой теории заключается в том, что она основана на использовании углов либрации, отличных от других аналогичных теорий, что

позволяет получить более объективную оценку точности параметров и выявить возможные систематические расхождения в различных теориях. Также, на сегодняшний день все еще остаётся непонятным, вследствие каких факторов возникает указанное выше периодическое расхождение в полярных углах либрации.

На первом этапе разработки численной теории нами была полностью воспроизведена модель [80]. Сравнение результатов численной и аналитической теории показало приемлемое согласие параметров [12]. Имеющиеся расхождения, как мы полагаем, связаны с проблемой недостаточного учёта резонансных гармоник в аналитическом подходе. На этом этапе мы смогли сформулировать как математическую постановку проблемы, так и выверить все формулы на основе сравнения с данными модели [80], а также протестировать программную реализацию решения полученных уравнений уже численным методом и выбрать оптимальный вариант и точность для численного интегрирования построенных уравнений.

Полуэмпирическая теория [86] построена путём обработки данных динамической эфемериды DE421, основанной на наблюдательном материале лазерной локации Луны, который был получен с 1970 по 2007 гг. Использование гармонического анализа с уточнением Ласкара и в комбинации с методом наименьших квадратов позволили построить аналитическую функцию в виде ряда Пуассона. Частоты, амплитуды и степенные коэффициенты подгоночной функции определялись по анализу остаточных разностей [83]. Метод подгонки численной теории к наблюдаемым данным был основан на последовательном применении частотного анализа, позволяющего точно определять частоты и соответствующие им амплитуды, и метода наименьших квадратов для учета изменения амплитуд, зависящих от времени. Комбинация двух методов выполнялась итеративно, что позволило при достижении сходимости добиться надёжных значений подгоняемых величин.

В результате проделанных вычислений и анализа многочисленных членов функции подгонки на сегодняшний день получено самое современное

аналитическое представление физической либрации Луны. Оно представляет собой ряды, которые состоят из трёх различных групп периодических членов в зависимости от природы их происхождения. Первая группа членов относится к главной проблеме ФЛЛ: её частоты являются комбинацией только аргументов Делоне – l, l', F, D . Для второй группы учтены прецессия узла и взаимодействие с планетами, поэтому в этих рядах содержатся аргументы, зависящие от прецессирующей долготы узла Ω и средних долгот планет – Меркурия (Me), Венеры (Ve), Земли (Ea), Марса (Ma), Юпитера (Ju) и Сатурна (Sa). Эти две первые группы называют вынужденными либрациями Луны. Третья группа членов включает в свои аргументы частоты свободных либраций U, V, W – по долготе, широте и моде качания. Периоды этих либраций ~ 1056 дней (2.9 года), ~ 81 год и ~ 75 лет, соответственно.

Что касается проблемы нахождения FCN-моды из эфемериды DE421, то достоверно выявить её проявление пока не удалось, хотя были обнаружены определенные особенности, которые могут говорить о наличии FCN-мод, если говорить более конкретно, то на периодах 7481 дней в либрации узла $I\sigma$ и 7468 дней в либрации по широте ρ , а также в эквивалентных им членах в направляющих косинусах эклиптики ρ_1 и ρ_2 на периоде в 27.312 дня. Однако их амплитуды определены неоднозначно, что не позволяет сделать выводы о применении этих данных для оценки параметров ядра.

В полуэмпирических таблицах помимо указанных групп частот присутствуют U_n гармоники, для которых не был определен физический смысл, то есть авторы не смогли идентифицировать данные гармоники. Амплитуда этих гармоник составляет около нескольких мс дуги, а периоды – либо долгопериодические, либо имеют суточный характер. Обнаружить физическую природу помогли работы Баркина Ю. и др. [45], в которых представлена аналитическая теория ФЛЛ с учетом лунного ядра.

Аналитическая теория Ю.В. Баркина физической либрации Луны, имеющей жидкое эллипсоидальное ядро [1, 2, 45]. Моделью лунного ядра является эллипсоид инерции, заполненный однородной несжимаемой жидкостью,

движение которого описывается моделью Пуанкаре [27-30]. Орбитальное движение Луны описывается моделью DE/LE-406, на основе которой сферические функции координат Луны представляются в виде рядов Пуассона по аргументам Делоне [46]. В качестве возмущающей рассматривается вторая гармоника потенциала Луны в переменных Андуайе-Пуанкаре [46]. Главным результатом теории является определение параметров четвертой моды свободной либрации, вызванной влиянием жидкого эллипсоидального ядра. Основываясь на сейсмических данных [91], а именно на оценках радиусов жидкого и твердого ядер, а также их плотностей, авторы работы [45] показывают, что момент инерции жидкого ядра составляет 71.3% от полного момента лунного ядра. Этим аргументом обосновывается двухслойная модель Лунного тела.

Взаимодействие жидкого ядра с твердой мантией в работе [45] считается одной из основных причин для объяснения эмпирических неотожествленных гармоник U_n . Теория, построенная Баркиным Ю. и др., была использована для анализа полуэмпирической теории [86], построенной на основе эфемериды DE421, где были отождествлены не найденные ранее гармоники [84].

Анализ показал, что частоты, полученные в [45], соответствуют частотам U_n в полуэмпирической теории [86]. Таким образом, впервые были отождествлены начальная фаза и период четвертой моды свободных либраций, которые были вызваны наличием у Луны жидкого ядра. Помимо четвертой моды были обнаружены еще ряд не идентифицированных гармоник. Было обнаружено 8 гармоник в наклоне соответствующие свободным либрациям, которые оказались производными от FCN моды. Анализ, выполненный Баркиным Ю. и др., позволил также обнаружить вклад от FCN в свободную либрацию по долготе, а также определить ее период и амплитуду, которые составили 7 449 дней и 1 мс дуги соответственно.

Результаты работы [45] позволяют говорить о том, что у Луны действительно существует ядро, и оно, как минимум, частично находится в жидком состоянии. Данный вывод непосредственно следует из выполненного

сравнительного анализа полуэмпирической теории [86] по идентификации неопределённых Un гармоник.

Аналитическая теория Б.П. Кондратьева [20-24]. В описанной выше работе Баркина Ю.В. не были учтены силы взаимодействия между ядром и мантией, а только кинематические эффекты, которых было достаточно для открытия четвертой моды свободной либрации Луны. Но поскольку при рассмотрении лунного вращения наблюдается диссипация вращения, это говорит о более сложной картине взаимодействия лунного ядра с мантией. Одной из моделей взаимодействия является турбулентные эффекты на МСВ с учетом вязкости жидкости. В этом случае заслуживают внимания работы, посвященные методам учета вязкости [66]. Теория Б.П. Кондратьева строилась в несколько этапов. Начиная с 2009 г. были рассмотрены линеаризованная задача, нелинейная задача, влияние сжатия Земли на либрацию по долготе, влияние сжатия Земли на либрацию по широте, влияние жидкого ядра на либрацию Луны.

Подход Б.П. Кондратьева к ФЛЛ оригинальный с точки зрения построения уравнений. Если классиками построения теории ФЛЛ используются уравнения Эйлера-Лиувилля либо уравнения Гамильтона, то Б.П. Кондратьев построил теорию вращения иначе: к кинематическим уравнениям Эйлера добавляются еще 12 кинематических переменных. Введение этих переменных в аналитическом подходе позволяет упростить решение системы дифференциальных уравнений, а также процесс линеаризации уравнений для получения нулевого приближения. В нелинейной части теории рассматриваются вклад от момента сил сжатия Земли и вязкое лунное ядро. Описанию эффектов вязкого лунного ядра в разработанной теории Б.П. Кондратьева отвечают два параметра, один из которых связывает вращение ядра с вращением мантии, а второй привязан к углу, передающему момент внешних сил, либрации по долготе. Согласно работам Б.П. Кондратьева, первый параметр определяется полем скоростей ядра, а второй – асимметрией лунного экватора.

Таким образом, аналитический подход Б.П. Кондратьева позволяет подойти к решению задачи ФЛЛ с новой стороны, а именно – учесть ещё более тонкие эффекты лунного вращения.

1.3 Анализ численных теорий

При построении численных теорий движения планет Солнечной системы используют релятивистские уравнения в невращающейся барицентрической системе координат, то есть PPN (parameterized post-Newtonian) подход [99]. В уравнении движения включены следующие возмущающие силы [36, 35]: ньютоновский закон всемирного тяготения, релятивистские силы; силы, вызванные сжатием Солнца и наличием возмущения со стороны кольца астероидов, и т.д. Наиболее известными численными решениями задачи N тел являются динамические эфемериды DE (лаборатория реактивного исследования НАСА) и эфемериды планет и Луны EPM (Институт прикладной астрономии РАН). Существует также ряд и других серий эфемерид, например, французские эфемериды VSOP. В различных сериях эфемерид точность теории росла за счет увеличения наблюдательной базы и учета тонких эффектов, таких как влияние астероидов.

Рассмотрим общий алгоритм использования динамических эфемерид DE. Параметры эфемериды можно найти по следующему электронному адресу <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/>. На данном ресурсе также представлены необходимые программные пакеты для обработки эфемерид, написанные сотрудниками JPL. Сами данные представляют собой коэффициенты Чебышева, и для того, чтобы получить ФЛЛ на заданную дату, необходимо провести интерполяцию. Процедуру можно выполнять на основе программ, предоставленных сотрудниками JPL. В таком случае сначала чебышевские коэффициенты переводятся в двоичный формат, а затем проводится процедура интерполяции. Подробную информацию о том, как работать с данными, можно найти в инструкции к эфемеридам, которая находится на том же электронном ресурсе.

Согласно рекомендациям JPL, на данный момент следует использовать теорию DE430/431. Наблюдательные данные, входящие в эфемериду, имеют разброс по точности: для внутренних планет – это субкилометровая точность, полученная на основе радионаблюдений искусственного спутника вокруг данных планет, для Марса применялись данные с РСДБ, в угловом размере точность составляет 0.0002 угловых секунд; внешние планеты имеют ошибку в десятки километров, а наблюдательные данные в основном астрометрические. Поэтому существует две эфемериды 430 и 431, которые отличаются интервалом интегрирования и динамической моделью. Модель 430 включает диссипацию энергии между жидким ядром и твёрдой мантией Луны, что хорошо согласуется с лазерной локацией Луны, однако интервал ограничен несколькими веками. Модель 431 не содержит диссипации на МСВ, поэтому менее точна вблизи эпохи интегрирования, но период интегрирования гораздо шире. Для эфемериды 431 интервал интегрирования от –13 200 до 17 191 года, а для эфемериды 430 от 1 550 до 2 650 года. В модели были также включены астероиды, идентичные тем, что входят в DE421, которые составляют 90% массы от пояса астероидов, но в отличие от DE421 в модели DE430 параметры астероидов оценивались индивидуально на основе данных с инфракрасного спутника WISE. Ограничение интервала интегрирования для модели DE430 связано с тем, что мы не знаем начальные значения для процесса затухания механической энергии, и поэтому ошибка растет со временем.

Для описания физической либрации Луны применяются динамические уравнения Эйлера в подвижной системе координат. Переход от эклиптической системы координат к динамической системе осуществляется тремя поворотами, которые можно записать матричным способом как $R_z(\psi) \cdot R_x(-\theta) \cdot R_z(\varphi)$. В качестве переменных, описывающих малые колебания относительно равномерного движения, используют следующие поправки к углам Эйлера $\psi = \Omega + \sigma$, $\theta = I + \rho$, $\varphi = \tau - \Omega - \sigma + 180^\circ - L$, где L средняя долгота Луны. В качестве углов физической либрации рассматривают либрацию Луны по долготе τ , в наклоне ρ и в узле $I\sigma$.

Необходимо отметить, что основной акцент в JPL сделан на создании теории, описывающей вращение Луны, в то время как в ИПА РАН – на согласование наблюдений с теорией. Относительно недавно Павловым Д. и др. [78] (ИПА РАН) было произведено уточнение параметров орбиты и либрации Луны на основе модели DE430 [93]. При моделировании учитывались следующие эффекты:

1. Ньютоновское и релятивистское ускорение в постньютоновском подходе;
2. Эффект от сжатия Солнца;
3. Возмущения орбиты Луны в нецентральной гравитационном поле Земли до 6-го порядка с учетом вековых поправок к коэффициентам Стокса s_{20} , s_{30} , s_{40} согласно IERS 2010 [79];
4. Возмущение орбиты Луны от твердотельных и океанических приливов, возникающих на Земле под действием Луны и Солнца, путем динамических поправок к коэффициентам гравитационного поля Земли (ограничено второй степенью);
5. Возмущения орбиты Земли в неоднородном гравитационном поле Луны.

В процессе обработки наблюдательных данных в работе [78] учитывались также релятивистские задержки сигнала от планет, задержки сигнала в тропосфере Земли, особенности вращения Земли, изменение положений рефлекторов на Луне и станций на Земле вследствие приливов, а также многие другие тонкие эффекты во вращении Луны.

Проведенный Павловым Д. и др. [78] анализ показывает, что точность в определении расстояния Луна–Земля за последние несколько лет достигла по модулю 5 см. Также показано, что есть расхождения в некоторых параметрах ФЛЛ, и предложены пути решения данной проблемы. Поскольку уравнения ФЛЛ строятся в главных осях инерции Луны и предполагается, что оси инерции ядра и мантии совпадают, а также в силу того, что гравиметрические измерения не привязаны к осям инерции Луны, авторами [78] было обнаружено отклонение коэффициента Стокса s_{21} от нулевого значения. Ими было смоделировано и

показано, что значение, полученное на основе гравиметрических измерений на порядок больше тех, что дает обработка данных лазерной локации Луны. В работе [78] также было показано, что оси инерции ядра и мантии не совпадают, и согласно работе [89] внешний вращающий момент действует только на твёрдую оболочку, но не на жидкое ядро, что может объяснить значение s_{21} . Но в силу того, что движение жидкости по Пуанкаре оказывает давление на мантию, то при наличии наклона оси инерции ядра изменится не только тензор инерции Луны, но и момент, который кора получает от давления жидкости. После моделирования авторы работы [78] показали, что изменение тензора инерции и вклада от давления внешних слоев взаимно компенсируются. В качестве альтернативы в работе [78] приводятся другие возможные эффекты:

1. Приливы от Солнца в динамической модели не учитываются;
2. Нет работ по переносу теории учета прилива с космических аппаратов на Луну;
3. Модель движения по Пуанкаре недостаточно хорошо описывает динамику движения жидкости.

Также при обработке данных ЛЛЛ авторами [78] было обнаружено наличие вращения системы координат эфемерид относительно ICRF и показано, что при определении ориентации эфемериды относительно ICRF необходимо использовать данные ЛЛЛ.

Таким образом, современные эфемериды включают в себя множество факторов, которые необходимо учесть, чтобы достигнуть нужной точности. Использование численных методов для решения соответствующих уравнений недостаточно, чтобы явно интерпретировать физику процесса, и для этого параллельно используют аналитические методы. Ярким примером такого парадокса является численный подход, описанный в работе [86], в которой авторы не смогли проинтерпретировать частоты U_n , поскольку не было соответствующего аналитического выражения, которое бы объясняло физику данной частоты.

При написании данной главы использованы следующие публикации 2, 6, 8-11 из списка публикаций автора по теме диссертации

ГЛАВА 2 МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ

Данная глава посвящена разработке и построению теории вращения Луны в рамках модели, согласно которой Луна рассматривается как абсолютно твёрдое тело. В начале первого параграфа обосновывается возможность использования данной модели, а далее подробно рассматриваются основные этапы математического построения уравнений либрации: от геометрического описания положения Луны в инерциальной системе координат и вывода кинематических уравнений до построения динамических уравнений с учётом основных характеристик лунного тела и всех внешних сил, оказывающих возмущающее действие на вращательную динамику. Особенностью применяемого в работе подхода является отказ от традиционных параметров либрации в углах Эйлера, и применение самолётных углов, задающих вращение лунного тела относительно эклиптики. На основе полученных математических связей строятся уравнения вращения Луны в рамках Гамильтоновой механики. Подробно рассматривается вывод выражения для кинетической энергии и гармоник возмущающего потенциала, который представляется в виде разложения по сферическим функциям. Таким образом была построена система либрационных уравнений. Путем линеаризации системы полученных уравнений Гамильтона было показано, что либрация по долготе в первом приближении не зависит от либрации по широте, и этот факт позволил получить и решить характеристическое уравнение с целью определения собственных частот либрации. Для установления числовых характеристик, определяющих основные параметры гамильтониана, в качестве первого приближения была взята аналитическая теория орбитального движения Земли и Солнца относительно Луны [59]. Применение орбитальной теории позволило провести сравнение полученных результатов с результатами по аналогичной модели аналитической теории Н.К. Петровой [80]. Выбор метода

численного интегрирования полученных либрационных уравнений определялся требованиями к внутренней точности решения. По результатам сравнительного анализа нескольких проведенных подходов был выбран метод Рунге-Кутты 10-го порядка, обеспечивающий точность 10^{-4} секунды дуги в углах ФЛЛ при шаге интегрирования 0.1 суток.

2.1 Главная проблема в теории физической либрации Луны

Модель вращения Луны строится поэтапно, поскольку отсутствует возможность одновременного учета всех эффектов, влияющих на её динамику. После построения базовой модели (модели абсолютно твёрдого тела) различными аналитическими и численными способами в нее вводятся все более тонкие эффекты, что позволяет уточнять и совершенствовать получаемые результаты. Следует сказать, что модель абсолютно твёрдой Луны с высокой степенью достоверности соответствует реальной Луне. Только в конце 20-го века появились основания считать, что Луна имеет сложную стратиграфию [8, 90, 101], и некоторые из её слоёв находятся в жидком или полурасплавленном состоянии. Однако влияние этих факторов значительно слабее, чем эффект от гравитационного воздействия Земли и Солнца на твёрдое тело, динамическая фигура которого не соответствует сферической фигуре с равномерным распределением масс. Существуют гипотезы магматического океана [109], согласно которым при формировании лунного тела неоднородности по плотности преимущественно возникают в ядре, полужидкой оболочке вокруг ядра и в лунной коре. Мантия же имеет более или менее постоянную среднюю плотность. Кроме того, время релаксации Максвелла ($\tau = \frac{\eta}{\mu}$, где η – вязкость = 10^{25} пуаз, μ – модуль сдвига = 250 ГПа) оценивается на уровне тысячи лет, а это соответствует тому, что Луна в течение нескольких столетий может вести себя как твёрдое тело, и даже при учёте приливных деформаций вязкостью можно пренебречь, что показано в работе [109].

Модель, которая в настоящей диссертации закладывается как первое приближение, называется главной проблемой в теории вращения Луны. Она включает в себя следующие положения:

1. Луна – абсолютно твёрдое тело, потенциал которого описывается через сферические функции с учётом гармоник второго, третьего и четвертого порядков;
2. Возмущающими факторами являются Земля и Солнце, которые при взаимодействии с Луной рассматриваются точечными объектами;
3. Орбитальное и вращательное движения с высокой степенью приближения рассматриваются как независимые, что позволяет использовать готовые решения для описания движения центра масс Луны.

Кроме того, специфика вращения Луны заключается в том, что оно имеет либрационный характер. Это означает, что Луна вращается медленно, средняя скорость вращения синхронизирована с орбитальной скоростью, внешние возмущения приводят лишь к малым покачиваниям (либрациям) относительно среднего положения. Иными словами, система подобного рода находится в резонансе 1:1. Впервые особенности вращения Луны были изучены Джованни Кассини, который в результате многолетних наблюдений сформулировал три закона, которые получили название эмпирических законов Кассини:

1. Время оборота Луны вокруг оси равно времени оборота вокруг Земли. Другими словами, скорость вращения Луны вокруг оси совпадает со скоростью движения вокруг Земли как по значению, так и по направлению;
2. Наклон лунного экватора к эклиптике постоянен составляет $\approx 1^{\circ}32'$;
3. Радиусы-векторы полюсов плоскости лунной орбиты, экватора и эклиптики Луны расположены в единой плоскости.

Перечисленные законы Кассини позволяют в первом приближении описать вращение лунного тела. Полученные Кассини законы могут быть применены не только к Луне, но и к другим телам, у которых спутник Земли по отношению к своему центральному телу находится в прямом резонансе, который обязан

приливному взаимодействию в процессе эволюции. Таким образом обеспечивается устойчивая вращательная динамика с минимальными энергетическими затратами. При этом вращение Земли отличается от лунного тем, что в последнем случае присутствуют либрационные эффекты [85].

Земля, Солнце и планеты своим гравитационным воздействием вызывают наибольшие возмущения во вращении Луны за счёт возникновения пары сил, создающих крутящий момент для несферического лунного тела. Менее существенные возмущения возникают из-за наличия у Луны небольшого жидкого ядра, которое и по химическому составу, и по наклону оси вращения, и по скорости вращения отличается от протяженной мантии Луны. Изучение особенностей лунного вращения позволяет определять её внутреннее строение, не привлекая дорогостоящие прямые аппаратные измерения, обеспеченные космическими экспериментами. Хотя Луна – это одно из первых космических тел, где были применены прямые измерения сейсмичности, магнитных свойств и химического состава, тем не менее недорогие, относительно простые астрономические методы позволяют также получать актуальную информацию, что поддерживает исследовательский интерес к изучению особенностей лунного вращения, в том числе и при написании данной диссертационной работы.

В рамках модели твёрдого тела существует возможность строить вращательные уравнения для консервативной системы без учета диссипативных процессов, что существенно упрощает создание математического аппарата разрабатываемой теории. Вопрос об учёте потери энергии из-за приливного трения и трения на границе ядро-мантия тоже актуален, но потеря энергии в результате этих процессов происходит достаточно медленно, поэтому на относительно небольших интервалах (порядка 100–300 лет) все это слабо проявляется в наблюдениях. Однако существуют неопровержимые наблюдательные факты о потере вращательной энергии: это и отдаление Луны от Земли, составляющее примерно 4 см/год, и определяемые из лазерных наблюдений отклонения от законов Кассини. Тем не менее, влияние рассеяния энергии на либрацию на порядок меньше, чем факторы, включённые в модель главной проблемы. Поэтому получаемое для этой

модели решение может быть использовано как базовое для дальнейшего уточнения теории ФЛЛ.

В настоящей диссертации особенностью подхода к созданию теории ФЛЛ являлся собственный метод построения либрационных уравнений. Суть используемого подхода заключается в том, что используются не классические переменные либрации, описывающие положение Луны в углах Эйлера, а самолётные углы, определяющие положение лунного тела относительно среднего вращения в эклиптике. Идея использовать подобного рода описание положения лунного тела в пространстве была предложена и реализована Хабибуллиным [60]. В данном подходе самолётные углы выбраны таким образом, что напрямую прецессионное движение узла экватора не рассматривается, и это упрощает вывод уравнений. При этом применение разных методов для анализа и сравнения полученных результатов позволяет выявить реальную точность построенной нами теории ФЛЛ.

Как один из результатов работы следует отметить, что параметры широтных компонент ФЛЛ согласуются со значениями переменных p_1 , p_2 теории [53]. Величины p_1 , p_2 представляют собой направляющие косинусы полюса эклиптики в динамической системе координат, определяемой триэдром главных осей инерции Луны. Следует отметить и недостаток в выборе подобного рода переменных: в широтные компоненты ФЛЛ входит значение среднего угла наклона лунного полюса к полюсу эклиптики, в результате чего члены с аргументом широты F имеют амплитуды порядка 5 000 угловых секунд, что на 2 порядка выше, чем амплитуды остальных гармоник ФЛЛ. Этот момент не позволяет визуализировать поведение либрационных углов так, чтобы было видно поведение либрации на всех частотах. Но поскольку для сравнения наших результатов с теориями других авторов используются остаточные разности, данная проблема не представляется существенной.

Основная задача при построении теории ФЛЛ – возможность представить положение тела Луны в пространстве для любого момента времени, а также оценить влияние параметров, характеризующих фигуру и распределение масс в

лунном теле. Для этой цели описание лунного тела заменяется триэдром его главных моментов инерции, которые в модели абсолютно твёрдого тела жёстко связаны с ним. Введем обозначения: «система динамических координат» (СДК) и «система инерциальных координат» (СИК). В первом случае оси координат лежат в векторах инерции, а во втором – используется эклиптическая СИК на эпоху J2000. В настоящей работе инерциальную систему ICRF не применялась автором из-за сложности построения в ней либрационных уравнений. Тем не менее, мы считали, что переход от эклиптики к ICRF известен, и все необходимые инструменты можно найти в рекомендации IERS 2010 [79].

Соотношение ДСК и ИСК можно записать в матричном виде, используя матрицы поворота вокруг оси r на угол q $\Pi_r(q)$ – (2.1.1). Самолётные углы μ - ν - π (рис. 2.1) являются аргументами матрицы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \prod_x(-\pi) \times \prod_Y(\nu) \times \prod_Z(L + \mu) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Эта математическая запись показывает алгоритм перехода от ИСК, заданной проекциями $(X \ Y \ Z)^T$ радиуса-вектора Луны в ИСК, к его проекциям в ДСК:

1. Первоначально реализуется поворот на угол $M = \bar{L} + \mu$ от оси X до среднего направления на Землю \bar{X} вокруг полюса эклиптики (ось Z). Поворот осуществляется против часовой стрелки;
2. Далее также против часовой стрелки производится поворот на угол ν от оси \bar{X} до оси $x(A)$ вокруг оси Y ;
3. Трансформация системы завершается поворотом на угол π от оси Y до оси $y(B)$ вокруг оси $x(A)$ по часовой стрелке – отсюда возникает минус в аргументе матрицы поворота.

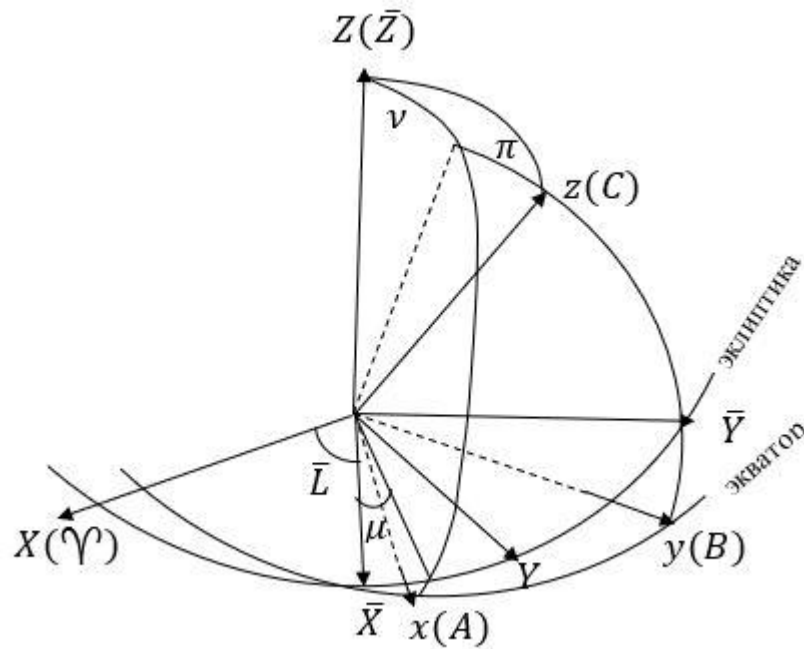


Рис. 2.1. X, Y, Z представляет собой СИК, в которой абсцисса X направлена на ТВР, а аппликата Z направлена в полюс эклиптики. x, y, z являются осями СДК, которые совпадают с осями инерции A, B, C , соответственно. μ, ν, π – самолетные углы ФЛЛ. $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ – эклиптическая СК.

Запишем кинематические уравнения (2.1.2), в которых проекции угловой скорости вращения Луны на оси ИСК выражены через либрационные углы. Получаются эти уравнения в результате несложных геометрических преобразований:

$$\begin{aligned}
 p = \Omega_x &= -\dot{M} \times \sin \nu - \dot{\pi} \\
 q = \Omega_y &= -\dot{M} \times \cos \nu \times \sin \pi + \dot{\nu} \times \cos \pi \\
 r = \Omega_z &= \dot{M} \times \cos \nu \times \cos \pi + \dot{\nu} \times \sin \pi
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2}$$

Эти уравнения вводятся нами далее в уравнения Гамильтона, которые полностью описывают вращательную динамику Лунного тела.

2.2 Гамильтонов подход к построению уравнений ФЛЛ

2.2.1 Вывод выражения для кинетической энергии системы

Известно, что кинематический момент твердого тела относительно неподвижной точки равен $G = \sum_i [r_i \times [m_i \omega \times r_i]]$, который можно представить через тензор инерции тела

$$G = J\omega = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Тогда кинетическая энергия системы будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} \omega^T J \omega. \quad (2.2.2)$$

В частном случае, когда система координат выбирается таким образом, что ее оси параллельны главным осям инерции Луны, тензор инерции будет иметь диагональный вид, и в таком случае выражение для кинетической энергии примет вид:

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad (2.2.3)$$

где p, q, r – проекции угловой скорости вращения Луны (2.1.2) на соответствующие оси ДСК.

Запишем уравнения вращения для Гамильтонова подхода. Для этого нам понадобится ввести обобщенные координаты. В эклиптической системе координат в качестве обобщенных координат можно выбирать углы M, ν, π , которые обозначаются следующим образом: $\bar{q}_1 = M = L + \mu$; $\bar{q}_2 = \nu$; $\bar{q}_3 = \pi$. Тогда, согласно (2.2.3, 2.1.2), кинетическая энергия будет независимой от угла M :

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T(\bar{q}_2, \bar{q}_3, \dot{\bar{q}}_1, \dot{\bar{q}}_2, \dot{\bar{q}}_3). \quad (2.2.4)$$

Введем обобщенные импульсы \bar{p} , сопряженные выбранным каноническим переменным. В соответствии с Гамильтоновым подходом, они получаются из следующего уравнения (в нашем случае функция Лагранжа полностью представима только кинетической энергией системы):

$$\bar{p}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.5)$$

Для ускорения процесса проведения математических операций и уменьшения вероятности случайных ошибок, расчёты проводились в математической среде Wolfram Mathematica.

Для того, чтобы привести сопряженные канонические переменные к одному порядку значимости с угловыми переменными, канонические импульсы и главные моменты инерции А, В задаются в единицах главного момента инерции С, и таким образом предполагается, что $C = 1$.

Подставим (2.1.2) в формулу (2.2.3), а затем полученное выражение введем в (2.2.5), в итоге для канонических импульсов получим следующий вид [11, 12, 18, 19]:

$$\begin{aligned} \bar{p}_3 &= -\frac{\Omega_x}{1 + k_2} \\ \bar{p}_2 &= \frac{\Omega_y}{1 + k_1} \cdot \cos(\bar{q}_3) + \Omega_z \cdot \sin(\bar{q}_3) \\ \bar{p}_1 &= \Omega_z \cdot \cos(\bar{q}_2) \cdot \cos(\bar{q}_3) - \frac{\Omega_x}{1 + k_2} \cdot \sin(\bar{q}_2) - \frac{\Omega_y}{1 + k_1} \cdot \cos(\bar{q}_2) \cdot \sin(\bar{q}_3). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Далее запишем выражение для кинетической энергии как:

$$T = \frac{1}{2}[(1 + k_2) \cdot p^2 + (1 + k_1) \cdot q^2 + r^2]. \quad (2.2.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A = \frac{1}{1+k_2}, B = \frac{1}{1+k_1}, \text{ тогда } k_1 = \frac{C-B}{B}, k_2 = \frac{C-A}{A}. \quad (2.2.8)$$

Выполним каноническое преобразование – переход во вращающуюся систему координат: $q_1 = \bar{q}_1 - L(t); p_1 = \bar{p}_1 - C \cdot n; q_2 = \bar{q}_2; q_3 = \bar{q}_3; p_2 = \bar{p}_2; p_3 = \bar{p}_3$, в результате формула для кинетической энергии будет иметь следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} [(1 + k_2) \cdot p_3^2 + (1 + k_1) \cdot \sin(q_3) \cdot (a^2 + b^2)]$$

$$a = p_2 \cdot \operatorname{ctg}(q_3) - \frac{1}{\cos(q_2)} (n + p_1 - p_3 \cdot \sin(q_2)) \quad (2.2.9)$$

$$b = p_2 + \operatorname{ctg}(q_3) \cdot ((n + p_1) \operatorname{Sec}(q_2) - p_3 \tan(q_2)).$$

Формула (2.2.9) дает полное представление о кинетической энергии системы, и с ней проводилась вся дальнейшая наша работа.

Построим теперь сами уравнения Гамильтона, используя функцию Гамильтона H :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.2.10)$$

Функция Гамильтона H представляет собой сумму кинетической T и потенциальной $V = -U$ энергий (в данном случае рассматривается гравитационный потенциал Луны, умноженный на массу Земли) системы $H = T + U$. В силу того, что силовая функция есть функция аддитивная, можно записать потенциальную энергию в виде суммы соответствующих компонент – гравитационного взаимодействия Луны с Землей и Солнцем, где Земля и Солнце в селеноцентрической системе представляют собой точечные тела. Для Луны мы обязаны учитывать её размеры и распределение масс в теле, которые определяют

гравитационное поле Луны в любой точке. Это поле описывается через разложение в ряд по сферическим функциям с точностью до 3-го слагаемого:

$$U = U_{2earth} + U_{2sun} + U_{3,earth} + \dots \quad (2.2.11)$$

Следует учесть, что при получении выражения (2.2.9) для кинетической энергии было выполнено каноническое преобразование координат, и в соответствии с этим преобразованием необходимо правильно получить якобиан перехода от старых переменных (\bar{q}, \bar{p}) к новым (q, p) в функции Гамильтона. После проведения соответствующих математических операций новая функция Гамильтона примет вид:

$$H_{new} = H - n \cdot p_1 \quad (2.2.12)$$

Тогда уравнения Гамильтона после дифференцирования по соответствующим компонентам будут иметь следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = & n \cdot tg^2(q_2) + sec^2(q_2) \cdot \\ & \cdot (p_1 \cdot Cos^2(q_3) + k_1 \cdot n \cdot sin^2(q_3) + p_1 \cdot sin^2(q_3) + \\ & + k_1 \cdot p_1 \cdot sin^2(q_3)) - 0.5 \cdot k_1 p_2 \cdot sec(q_2) \cdot sin(2 \cdot q_3) - \\ & - sec(q_2) \cdot tg(q_2) \cdot (p_3 - p_3 \cdot sin^2(q_3)) \\ & - p_3 \cdot sin^2(q_3) \cdot (1 - k_1)) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = cos(q_3) \cdot a_1 + p_2 sin^2(q_3)$$

$$a_1 = (1 + k_1) \cdot p_2 \cdot cos(q_3) - k_1 (n + p_1 - p_3 sin(q_2)) \frac{sin(q_3)}{cos(q_2)}$$

$$\frac{dq_3}{dt} = (1 + k_2) p_3 + (1 + k_1) sin(q_3) \cdot tg(q_2) \cdot a_2 - cos(q_3) \cdot a_3$$

$$a_2 = (p_2 cos(q_3) - Sec(q_2) [n + p_1 - p_3 sin(q_2)] sin(q_3))$$

$$a_3 = tg(q_2) [p_2 sin(q_3) + cos(q_3) ((n + p_1) Sec(q_2) - p_3 tg(q_2))]]$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dU}{dq_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_2}{dt} = \frac{dU}{dq_2} &- (1 + k_1) \sec^2(q_2) (p_3 - (n + p_1) \sin(q_2)) \sin(q_3) \cdot \\ &\cdot (p_2 \cos(q_3) - \sec(q_2) (n + p_1 - p_3 \sin(q_2)) \sin(q_3)) - \\ &- \cos(q_3) \sec(q_2) (-p_3 \sec(q_2) + (n + p_1) \operatorname{tg}(q_2)) \cdot \\ &\cdot (p_2 \sin(q_3) + \cos(q_3) ((n + p_1) \sec(q_2) - p_3 \operatorname{tg}(q_2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_3}{dt} = \frac{dU}{dq_3} &+ k_1 (p_2 \cos(q_3) - \sec(q_2) (n + p_1 - p_3 \sin(q_2)) \cdot \\ &\cdot \sin(q_3)) \cdot (p_2 \sin(q_3) + \cos(q_3) ((n + p_1) \sec(q_2) - \\ &- p_3 \operatorname{tg}(q_2))). \end{aligned}$$

Полученная система уравнений (2.2.13) является системой либрационных уравнений, на основе которой определяются значения канонических переменных на заданный интервал времени.

2.2.2 Вывод выражений для 2-ой и 3-ей гармоник селенопотенциала

Для описания гравитационного поля эквипотенциальной фигуры был введен термин «гармоника», который описывает отклонения от сферической или эллипсоидальной формы. Для наглядности все гармоники степени n разделяются на зональные $m = 0$, секторальные $m = n$ и тессеральные $0 < m < n$. Потенциал гравитационного поля представляется следующей бесконечной суммой по n :

$$U(\rho, \theta, \phi) = \frac{GM}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 [c_{nm} \cos(m\lambda) + s_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\cos\theta) \quad (2.2.14)$$

Здесь M – масса возмущающего тела (Земли), c_{ij} и s_{ij} – коэффициенты Стокса (Луны) [44, 56, 71, 72, 77, 92], P_{nm} – присоединенные полиномы Лежандра, a – средний радиус планеты (Луны), λ, θ, ρ – сферические координаты точки (Земли),

в которой рассчитывается потенциал, G – универсальная гравитационная постоянная.

Поскольку мы строим уравнения в ДСК, в которой центр системы совпадает с центром масс Луны, а оси совпадают с осями инерции твердой Луны, то это означает, что коэффициенты Стокса при $n = 1$ равны нулю, а при $n = 2$ равны нулю недиагональные компоненты тензора инерции ($E = D = F = 0$), соответственно, c_{21} , s_{21} , s_{22} также равны нулю, тогда в выражении (2.2.14) остаются только c_{20} и c_{22} .

Рассмотрим направляющие косинусы радиуса-вектора точки (либо Земли, либо Солнца), в которой рассчитывается значение потенциала. Осуществим вспомогательные построения (рис. 2.2 и 2.3) для получения связи направляющих косинусов с эклиптическими координатами возмущающего тела. На рис 2.2 показана сферическая система координат, где дуга $\overset{\frown}{AB}$ равна долготе рассматриваемой точки θ . На рис 2.3 показаны углы направляющих косинусов радиуса-вектора: $\cos(\alpha) = \frac{r_x}{|r|}$; $\cos(\beta) = \frac{r_y}{|r|}$; $\cos(\gamma) = \frac{r_z}{|r|}$. Обозначим

направляющие косинусы как $u_1 u_2 u_3$, они связаны соотношением $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. В таком случае из рис. 2.2 следует, что дуга AO равна u_1 . Рассмотрим сферический треугольник AOB и найдем по теореме косинусов сторону AO : $\cos(AO) = \cos(\lambda) \cdot \cos(90^\circ - \theta) + \sin(\lambda) \cdot \sin(90^\circ - \theta) \cdot \cos(90^\circ) = \cos(\lambda) \cdot \sin(\theta)$ или

$$\cos^2(\lambda) = \frac{u_1^2}{a_4}, a_4 = 1 - u_3^2 \quad (2.2.15)$$

Полиномы Лежандра рассчитываются по следующей формуле:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1) P_{nm}(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z). \quad (2.2.16)$$

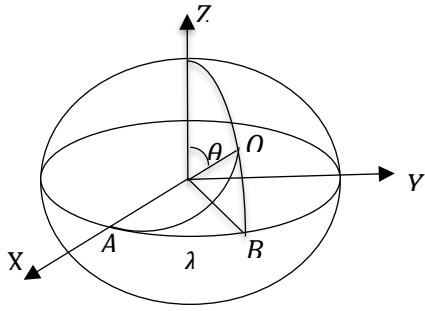


Рис 2.2 Сферический треугольник АОВ для вывода направляющих косинусов точки О, связь $AB = \lambda$ долготы и полярного угла θ

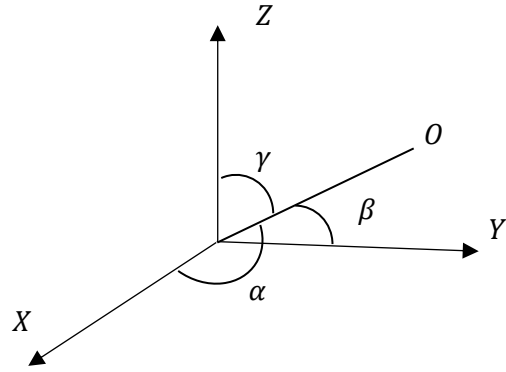


Рис 2.3 Углы α, β, γ между радиусом-вектором наблюдаемой точки О и осями системы координат

Для вывода рабочей формулы для 2-ой гармоники селенопотенциала нам потребуются следующие соотношения для (2.2.15)–(2.2.16):

$$\begin{aligned} \cos(2\lambda) &= 2 \cdot \cos^2 \lambda - 1 = \frac{2u_1^2}{a_4} - 1 \\ P_2 &= \frac{1}{3}(3 \cdot \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2}(3u_3^2 - 1) \\ P_{22} &= 3(1 - \cos^2 \theta) = 3a_4. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Рассмотрим выражение (2.2.14) при $n = 2$ без множителя $\frac{GM}{\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2$ и подставим выражение из (2.2.17) в (2.2.14):

$$\begin{aligned} c_{20}P_2(\cos\theta) + c_{22}\cos(2\lambda)P_{22}(\cos\theta) &= \\ &= c_{20} \cdot \frac{1}{2}(3u_3^2 - 1) + c_{22} \left[\frac{2u_1^2}{a_4} - 1 \right] (3 - 3u_3^2) = \frac{3}{2}c_{20}u_3^2 - \\ &- \frac{c_{20}}{2} + c_{22}(6u_1^2 - 3 + 3u_3^2) = u_3^2 \left(\frac{3}{2}c_{20} + 3c_{22} \right) + 6u_1^2 - \frac{c_{20}}{2} - 3c_{22} \end{aligned}$$

и с учётом того, что $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, это уравнение можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
(1 - u_1^2 - u_2^2) \left(\frac{3}{2} c_{20} + 3c_{22} \right) + 6u_1^2 c_{22} - \frac{c_{20}}{2} - 3c_{22} &= c_{20} - \frac{3}{2} c_{20} u_1^2 - \\
-3c_{22} u_1^2 - \frac{3}{2} c_{20} u_2^2 - 3c_{22} u_2^2 + 6u_1^2 c_{22} &= c_{20} - \frac{3}{2} c_{20} u_1^2 + \\
+3c_{22} u_1^2 - \frac{3}{2} c_{20} u_2^2 - 3c_{22} u_2^2 &= c_{20} + u_1^2 \left(\frac{-3}{2} c_{20} + 3c_{22} \right) - \\
-u_2^2 \left(\frac{3}{2} c_{20} + 3c_{22} \right) &= c_{20} + \frac{3}{2} [(2c_{22} - c_{20})u_1^2 - (c_{20} + 2c_{22})u_2^2],
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{22} &= \frac{1}{4Ma^2} (B - A) \\
c_{20} &= \frac{1}{Ma^2} \left(\frac{A + B}{2} - C \right) \\
2c_{22} - c_{20} &= \frac{1}{2Ma^2} \left(B - A - 2 \left(\frac{A + B}{2} - C \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2Ma^2} (B - A - A - B + 2C) = \frac{1}{Ma^2} (C - A) \\
2c_{22} + c_{20} &= \frac{1}{2Ma^2} (B - A + A + B - 2C) = \frac{1}{Ma^2} (B - C).
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Тогда вторая гармоника селенопотенциала будет иметь следующий вид

$$U_2 = \frac{GM_e M_m}{\rho} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \frac{3}{2} \frac{1}{M_m a^2} [(C - A)u_1^2 - (B - C)u_2^2]. \tag{2.2.20}$$

Осуществив процедуру редукции и введя среднее расстояние между Землей и Луной, обозначенное как a_{em} , окончательное выражение для второй гармоники будет иметь следующий вид:

$$U_2 = \frac{3GM_e}{2a_{em}^3} \left(\frac{a_{em}}{\rho} \right)^3 [(C - A)u_1^2 - (B - C)u_2^2]. \tag{2.2.21}$$

В дальнейшем формула (2.2.21) используется при интегрировании уравнений Гамильтона.

Приступим к выводу выражения для 3-ей гармоники селенопотенциала. Преобразуем стандартные вспомогательные выражения через введенные направляющие косинусы и определим формулы для полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned}
 \sin(\lambda) &= \sqrt{1 - \cos^2(\lambda)} = \frac{u_2}{a_4} \\
 \cos(2\lambda) &= 2 \frac{u_1^2}{a_4} - 1 \\
 \sin(2\lambda) &= 2 \frac{u_1 u_2}{a_4} \\
 \cos(3\lambda) &= 4 \frac{u_1^3}{a_4^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{u_1}{\sqrt{a_4}} \\
 \sin(3\lambda) &= 3 \frac{u_2}{\sqrt{a_4}} - 4 \frac{u_2^3}{a_4^{\frac{3}{2}}} \\
 P_{30} = P_3 &= \frac{1}{2}(-3u_3 + 5u_3^2) \\
 P_{31} &= \frac{3}{2}(-1 + 5u_3^2)\sqrt{a_4} \\
 P_{32} &= 15 \cdot u_3 a_4 \\
 P_{33} &= 15 \cdot a_4^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Подставим параметры из (2.2.22) в (2.2.14) при $n = 3$ без множителя $\frac{GM}{\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^3$

$$\begin{aligned}
 c_{30}P_{30} + [c_{31}\cos(\lambda) + s_{31}\sin(\lambda)]P_{31} + [c_{32}\cos(2\lambda) + s_{32}\sin(2\lambda)]P_{32} + \\
 + [c_{33}\cos(3\lambda) + s_{33}\sin(3\lambda)]P_{33} = c_{30} \frac{1}{2}(-3u_3 + 5u_3^2) + \\
 + \left[c_{31} \frac{u_1}{\sqrt{a_4}} + s_{31} \frac{u_2}{\sqrt{a_4}} \right] \frac{3}{2}(-1 + 5u_3^2)\sqrt{a_4} + \\
 + 15 \left[c_{32} \frac{2u_1^2}{a_4} - c_{32} + s_{32} \frac{2u_1 u_2}{a_4} \right] u_3 a_4 + \\
 + 15 \left[c_{33} \frac{4u_1^3}{a_4^{\frac{3}{2}}} - \frac{3c_{33}u_1}{\sqrt{a_4}} + \frac{s_{33}3u_2}{\sqrt{a_4}} - \frac{4s_{33}u_2^3}{a_4^{\frac{3}{2}}} \right] a_4^{\frac{3}{2}} =
 \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{2}c_{30}u_3 + \frac{5}{2}c_{30}u_3^3 - \frac{3}{2}c_{31}u_1 + 15c_{31}u_1u_3^2 - \frac{3}{2}s_{31}u_2 + \\
&\quad + \frac{15}{2}s_{31}u_2u_3^2 + 30c_{32}u_1^2u_3 - 15c_{32}u_3 + 30c_{32}u_3^3 + \\
&+ 30s_{32}u_1u_2u_3 + 60c_{33}u_1^3 - 60s_{33}u_2^3 - 45c_{33}u_1 + 45c_{33}u_1u_3^2 + \\
&\quad + 45s_{33}u_2 - 45s_{33}u_2u_3^2 = -\frac{3}{2} - 10c_{32}u_3u_3^2 + 30c_{33}u_1 - \\
&- 30s_{33}u_2 + 10c_{32}u_3 - 30c_{33}u_1u_3^2 - 5s_{31}u_2u_3^2 + 30s_{33}u_2u_3^2
\end{aligned}$$

Для проверки корректности полученной формулы сделаем ряд преобразований, чтобы сравнить ее с формулой, приведенной в работе [32]. Опуская промежуточные вычисления, получаем выражение:

$$\begin{aligned}
U_3 &= \frac{-GM_e M_m}{\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \frac{3}{2} \times \\
&(-10c_{33}u_1^3 - 5c_{31}u_1u_3^2 - 10c_{32}u_1^2u_3 - 20s_{32}u_1u_2u_3 \\
&- 5s_{31}u_2u_3^2 + 30c_{33}u_1u_2^2 - 30s_{33}u_1^2u_2 + 10c_{32}u_2^2u_3).
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Пусть константа, a равна радиусу Луны, тогда, используя величину $\frac{c}{Ma^2}$, определяемую из наблюдений, выделим ее значение из множителя перед квадратной скобкой в формуле (2.2.24). Далее осуществим, как и для предыдущих гармоник, выделение дроби $\frac{a_{em}}{\rho}$ теперь уже в 4-ой степени, тогда рабочее выражение для 3-ей гармоники селенопотенциала примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
U_3 &= \frac{-GM_e}{a_{em}^3} M_m a^2 \left(\frac{a}{a_{em}}\right) \left(\frac{a_{em}}{\rho}\right)^4 \frac{3}{2} \times \\
&(-\frac{5}{3}c_{30}u_3^3 - 10c_{33}u_1^3 - 5c_{31}u_1u_3^2 - 10c_{32}u_1^2u_3 - 20s_{32}u_1u_2u_3 \\
&- 5s_{31}u_2u_3^2 + 30c_{33}u_1u_2^2 - 30s_{33}u_1^2u_2 + 10c_{32}u_2^2u_3).
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Это выражение, с одной стороны, служит доказательством корректности проведенных нами сложных преобразований, а с другой стороны, оно является рабочей формулой для вычисления третьей гармоники селенопотенциала.

2.2.3 Вычисление выражений гармоник с 4-го по 6-ой порядок в разложении селенопотенциала

Вывод высших степеней гармоник в разложении гравитационного потенциала в ряд по сферическим функциям аналитически является достаточно сложным, поэтому воспользуемся математическим пакетом Mathematica 8.

Чтобы получить вспомогательные тригонометрические тождества, применим формулу Муавра и биномом Ньютона, а также распишем соответствующие полиномы Лежандра:

$$\begin{aligned}
 P_{40} &= 0.125 \cdot (3 - 30 \cdot u_3^2 + 35 \cdot u_3^4) \\
 P_{41} &= 2.5 \cdot (-3 \cdot u_3 + 7 \cdot u_3^3) \sqrt{a_4} \\
 P_{42} &= 7.5 \cdot (-1 + 7 \cdot u_3^2) \cdot a_4 \\
 P_{43} &= 105 \cdot u_3 a_4^{1.5} \\
 P_{44} &= 105 \cdot a_4^2 \\
 P_{55} &= 945 \cdot a_4^{2.5} \\
 P_{54} &= 945 \cdot u_3 a_4^2 \\
 P_{53} &= 0.5 \cdot a_4^{1.5} (945 \cdot u_3^2 - 105) \\
 P_{52} &= 0.5 \cdot a_4 \cdot (315 \cdot u_3^3 - 105 \cdot u_3) \\
 P_{51} &= 0.125 \cdot \sqrt{a_4} (315 \cdot u_3^4 - 210 \cdot u_3^2 + 15) \\
 P_{50} &= 0.125 \cdot (63 \cdot u_3^5 - 70 \cdot u_3^3 + 15 \cdot u_3) \\
 P_{66} &= 10395 \cdot a_4^3 \\
 P_{65} &= 10395 \cdot u_3 \cdot a_4^{2.5} \\
 P_{64} &= 0.5 \cdot a_4^2 (10395 \cdot u_3^2 - 945) \\
 P_{63} &= 0.5 \cdot a_4^{1.5} (3465 \cdot u_3^3 - 945 \cdot u_3) \\
 P_{62} &= 0.125 \cdot a_4 (3465 \cdot u_3^4 - 1890 \cdot u_3^2 + 105)
 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

$$P_{61} = 0.125 \cdot \sqrt{a_4} (693 \cdot u_3^5 - 630 \cdot u_3^3 + 105 \cdot u_3)$$

$$P_{60} = 0.0625 \cdot (231 \cdot u_3^6 - 315 \cdot u_3^4 + 105 \cdot u_3^2 - 5).$$

Тогда, согласно (2.2.14), гармоника для $n = 4$ без учета $\frac{GM}{\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^4$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
& 0.375 \cdot c_{40} + 7.5 \cdot c_{42} - 15 \cdot c_{42} \cdot u_1^2 + 105 \cdot c_{44} \cdot u_1^4 - \\
& -15 \cdot s_{42} \cdot u_1 \cdot u_2 + 420 \cdot s_{44} \cdot u_1^3 \cdot u_2 - 630 \cdot c_{44} \cdot u_1^2 \cdot u_2^2 - \\
& -420 \cdot s_{44} \cdot u_1 \cdot u_2^3 + 105 \cdot c_{44} \cdot u_2^4 - 7.5 \cdot c_{41} \cdot u_1 \cdot u_3 + \\
& +420 \cdot c_{43} \cdot u_1^3 \cdot u_3 - 7.5 \cdot s_{41} \cdot u_2 \cdot u_3 - 420 \cdot s_{43} \cdot u_2^3 \cdot u_3 + \\
& +3.75 \cdot c_{40} \cdot u_3^2 - 60 \cdot c_{42} \cdot u_3^2 + 105 \cdot c_{42} \cdot u_1^2 \cdot u_3^2 + \\
& +105 \cdot s_{42} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3^2 + 17.5 \cdot c_{41} \cdot u_1 \cdot u_3^3 + \\
& +17.5 \cdot s_{41} \cdot u_2 \cdot u_3^3 + 4.375 \cdot c_{40} \cdot u_3^4 + 52.5 \cdot c_{42} \cdot u_3^4 - \\
& -315 \cdot c_{43} \cdot u_1 \cdot u_3(1 - u_3^2) + 315 \cdot s_{43} \cdot u_2 \cdot u_3(1 - u_3^2).
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Коэффициент для 4-ой гармоники можно представить в виде, аналогичном гармоникам 2 и 3, где в квадратных скобках фигурируют функции направляющих косинусов из (2.2.27):

$$U_4 = \frac{GM_e}{a_{em}^3} M_m a^2 \left(\frac{a_{em}}{\rho}\right)^5 \left(\frac{a}{a_{em}}\right)^2 [\dots]. \tag{2.2.28}$$

Для гармоники $n = 5$ без учета $\frac{GM}{\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^5$ выражение в скобках (2.2.14) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
& 1.875 \cdot c_{51} \cdot u_1 - 210 \cdot c_{53} \cdot u_1^3 + 15120 \cdot c_{55} \cdot u_1^5 + \\
& +1.875 \cdot s_{51} \cdot u_2 + 210 \cdot s_{53} \cdot u_2^3 + 15120 \cdot s_{55} \cdot u_2^5 + \\
& +1.875 \cdot c_{50} \cdot u_3 + 52.5 \cdot c_{52} \cdot u_3 - 105 \cdot c_{52} \cdot u_1^2 \cdot u_3 +
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

$$\begin{aligned}
& +945 \cdot c_{54} \cdot u_1^4 \cdot u_3 - 105 \cdot s_{52} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 + \\
& +3780 \cdot s_{54} \cdot u_1^3 \cdot u_2 \cdot u_3 - 5670 \cdot c_{54} \cdot u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot u_3 - \\
& -3780 \cdot s_{54} \cdot u_1 \cdot u_2^3 \cdot u_3 + 945 \cdot c_{54} \cdot u_2^4 \cdot u_3 - \\
& -26.25 \cdot c_{51} \cdot u_1 \cdot u_3^2 + 1890 \cdot c_{53} \cdot u_1^3 \cdot u_3^2 - \\
& -26.25 \cdot s_{51} \cdot u_2 \cdot u_3^2 - 1890 \cdot s_{53} \cdot u_2^3 \cdot u_3^2 - \\
& -8.75 \cdot c_{50} \cdot u_3^3 - 210 \cdot c_{52} \cdot u_3^3 + 315 \cdot c_{52} \cdot u_1^2 \cdot u_3^2 + \\
& +315 \cdot s_{52} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3^3 + 39.375 \cdot c_{51} \cdot u_1 \cdot u_3^4 + \\
& +39.375 \cdot s_{51} \cdot u_2 \cdot u_3^4 + 7.875 \cdot c_{50} \cdot u_3^5 + 157.5 \cdot c_{52} \cdot u_3^5 + \\
& +157.5 \cdot c_{53} \cdot u_1(1 - u_3^2) - 18900 \cdot c_{55} \cdot u_1^3(1 - u_3^2) + \\
& +157.5 \cdot s_{53} \cdot u_2(1 - u_3^2) - 18900 \cdot s_{55} \cdot u_2^3(1 - u_3^2) - \\
& -1417.5 \cdot c_{53} \cdot u_1 \cdot u_3^2(1 - u_3^2) + 1417.5 \cdot s_{53} \cdot u_2 \cdot u_3^2(1 - u_3^2) \\
& +4725 \cdot c_{55} \cdot u_1(1 - u_3^2)^2 + 4725 \cdot s_{55} \cdot u_2(1 - u_3^2)^2.
\end{aligned}$$

Аналогично степенной коэффициент можно представить в виде:

$$U_5 = \frac{GM_e}{a_{em}^3} M_m a^2 \left(\frac{a_{em}}{\rho} \right)^6 \left(\frac{a}{a_{em}} \right)^3 [\dots]. \quad (2.2.30)$$

Для гармоник $n = 6$ без учета $\frac{GM}{\rho} \left(\frac{a}{\rho} \right)^6$ выражение в скобках (2.2.14) будет иметь

вид:

$$\begin{aligned}
& -0.3125 \cdot c_{60} - 13.125 \cdot c_{62} + 26.25 \cdot c_{62} \cdot u_1^2 + 10395 \cdot c_{66} \cdot u_1^6 + \\
& +26.25 \cdot s_{62} \cdot u_1 \cdot u_2 + 62370 \cdot s_{66} \cdot u_1^5 \cdot u_2 - 155925 \cdot c_{66} \cdot u_1^4 \cdot u_2^2 - \\
& -207900 \cdot s_{66} \cdot u_1^3 \cdot u_2^3 + 155925 \cdot c_{66} \cdot u_1^2 \cdot u_2^4 + 62370 \cdot s_{66} \cdot u_1 \cdot u_2^5 - \\
& -10395 \cdot c_{66} \cdot u_2^6 13.125 \cdot c_{61} \cdot u_1 \cdot u_3 - 1890 \cdot c_{63} \cdot u_1^3 \cdot u_3 + \\
& +166320 \cdot c_{65} \cdot u_1^5 \cdot u_3 + 13.125 \cdot s_{61} \cdot u_2 \cdot u_3 + 1890 \cdot s_{63} \cdot u_2^3 \cdot u_3 + \\
& +166320 \cdot s_{65} \cdot u_2^5 \cdot u_3 + 6.5625 \cdot c_{60} \cdot u_3^2 + 249.375 \cdot c_{62} \cdot u_3^2 - \\
& -472.5 \cdot c_{62} \cdot u_1^2 \cdot u_3^2 - 472.5 \cdot s_{62} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3^2 - 78.75 \cdot c_{61} \cdot u_1 \cdot u_3^3 + \\
& +6930 \cdot c_{63} \cdot u_1^3 \cdot u_3^3 - 78.75 \cdot s_{61} \cdot u_2 \cdot u_3^3 - 6930 \cdot s_{63} \cdot u_2^3 \cdot u_3^3 -
\end{aligned} \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned}
& -19.6875 \cdot c_{60} \cdot u_3^4 - 669.375 \cdot c_{62} \cdot u_3^4 + 866.25 \cdot c_{62} \cdot u_1^2 \cdot u_3^4 + \\
& + 866.25 \cdot s_{62} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3^4 + 86.625 \cdot c_{61} \cdot u_1 \cdot u_3^5 + 86.625 \cdot s_{61} \cdot u_2 \cdot u_3^5 + \\
& + 14.4375 \cdot c_{60} \cdot u_3^6 + 433.125 \cdot c_{62} \cdot u_3^6 - \frac{472.5 \cdot c_{64} \cdot u_1^4}{a_4^2} - \\
& - \frac{1890 \cdot s_{64} \cdot u_1^3 \cdot u_2}{a_4^2} + \frac{2835 \cdot c_{64} \cdot u_1^2 \cdot u_2^2}{a_4^2} + \frac{1890 \cdot s_{64} \cdot u_1 \cdot u_2^3}{a_4^2} - \\
& - \frac{472.5 \cdot c_{64} \cdot u_2^4}{a_4^2} + \frac{6142.5 \cdot c_{64} \cdot u_1^4 \cdot u_3^2}{a_4^2} + \frac{24570 \cdot s_{64} \cdot u_1^3 \cdot u_2 \cdot u_3^2}{a_4^2} \\
& - \frac{36855 \cdot c_{64} \cdot u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot u_3^2}{a_4^2} - \frac{24570 \cdot s_{64} \cdot u_1 \cdot u_2^3 \cdot u_3^2}{a_4^2} + \\
& + \frac{6142.5 \cdot c_{64} \cdot u_2^4 \cdot u_3^2}{a_4^2} - \frac{10867.5 \cdot c_{64} \cdot u_1^4 \cdot u_3^4}{a_4^2} - \\
& - \frac{43470 \cdot s_{64} \cdot u_1^3 \cdot u_2 \cdot u_3^4}{a_4^2} + \frac{65205 \cdot c_{64} \cdot u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot u_3^4}{a_4^2} \\
& + \frac{43470 \cdot s_{64} \cdot u_1 \cdot u_2^3 \cdot u_3^4}{a_4^2} - \frac{10867.5 \cdot c_{64} \cdot u_2^4 \cdot u_3^4}{a_4^2} + \\
& + \frac{5197.5 \cdot c_{64} \cdot u_1^4 \cdot u_3^6}{a_4^2} + \frac{20790 \cdot s_{64} \cdot u_1^3 \cdot u_2 \cdot u_3^6}{a_4^2} - \\
& - \frac{43740 \cdot s_{64} \cdot u_1 \cdot u_2^3 \cdot u_3^4}{a_4^2} - \frac{20790 \cdot s_{64} \cdot u_1 \cdot u_2^3 \cdot u_3^6}{a_4^2} + \\
& + \frac{5197.5 \cdot c_{64} \cdot u_2^4 \cdot u_3^6}{a_4^2} + 1417.5 \cdot s_{63} \cdot u_1 \cdot u_3 \cdot a_4 - \\
& - 207900 \cdot c_{65} \cdot u_1^3 \cdot u_3 \cdot a_4 - 1417.5 \cdot s_{63} \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot a_4 - \\
& - 207900 \cdot s_{65} \cdot u_2^3 \cdot u_3 \cdot a_4 - 5197.5 \cdot c_{63} \cdot u_1 \cdot u_3^3 \cdot a_4 + \\
& + 5197.5 \cdot s_{63} \cdot u_2 \cdot u_3^3 \cdot a_4 + 51975 \cdot c_{65} \cdot u_1 \cdot u_3 \cdot a_4 + \\
& + 51975 \cdot s_{65} \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot a_4.
\end{aligned}$$

Соответственно, степенной коэффициент можно представить в виде:

$$U_6 = \frac{GM_e}{a_{em}^3} M_m a^2 \left(\frac{a_{em}}{\rho} \right)^7 \left(\frac{a}{a_{em}} \right)^4 [\dots]. \quad (2.2.32)$$

В представленных формулах гармоник селенопотенциала с 4-ой по 6-ую содержат постоянные слагаемые, не зависящие явно от направляющих косинусов радиуса-вектора, т.е. от канонических переменных. Эти слагаемые не влияют на вращательную динамику Луны, поскольку в уравнениях Гамильтона потенциальная энергия входит как частная производная по каноническим координатам и импульсам.

Таким образом, были выведены соответствующие гармоники селенопотенциала, необходимые для дальнейших численных расчетов. С целью отладки программ и проверки корректности проводимых нами вычислений на первом этапе разработки численной теории, была полностью воспроизведена модель, заложенная в аналитическую теорию Петровой [32]. Все особенности этой модели будут рассмотрены в следующих параграфах.

2.2.4 Линеаризация системы уравнений Гамильтона. Значения собственных частот ФЛЛ

В случае отсутствия каких-либо внешних возмущений или торможений механическая система будет испытывать свободные колебания на так называемых *собственных частотах*. К примеру, если произошло столкновение Луны с большим метеоритом, то после удара Луна будет испытывать свободные либрационные колебания на этих частотах. Как правило, вследствие внутренних демпфирующих процессов амплитуды свободных колебаний постепенно уменьшаются. При этом амплитуды свободных либраций можно вычислить только из обработки наблюдательного материала, тогда как собственные частоты можно рассчитать теоретически.

Для Луны воспользуемся построенными нами уравнениями Гамильтона (2.12.13), описывающими либрацию на основе полной энергии, которой обладает Луна. Чтобы выделить собственные частоты, можно упростить полученные уравнения, линеаризовав уравнения системы и принимая во внимание, что амплитуды канонических координат малы ($q_1 \sim 10^{-4}$, $q_2 \approx q_3 \sim 10^{-2}$) [32]. Путём

разложения в ряд тригонометрических функций по степеням q_i выделяются члены, линейные относительно канонических переменных \vec{q} и \vec{p} .

Некоторые линейные члены выводятся из производной от потенциала $\frac{dU}{dq_n}$ ($n = 1 \div 3$), другие – от кинетической энергии $\frac{dT}{dq_n}, \frac{dT}{dp_n}$ ($n = 1 \div 3$). Для упрощения вида математического выражения были введены следующие обозначения в соответствии с [32]:

$$\Phi_n(\vec{q}) = \frac{dU}{dq_n} = \sum(i\delta_n^1 + j\delta_n^2 + k\delta_n^3)Q_{ijk}q_1^{i-\delta_n^1}q_2^{j-\delta_n^2}q_3^{k-\delta_n^3} - d_nq_n. \quad (2.2.33)$$

Выражения для функций $Q_{ijk}(t, c_{nm}, s_{n,m})$ получены на основе выражений для потенциала U (уравнения (2.2.21), (2.2.25) и т.д.) и направляющих косинусов u_i, u_{is} (2.2.15). Приведенные функции Q являются рядами Пуассона (2.2.34), с помощью которых вводится зависимость обобщенных координат как от времени (через аргументы Делоне - l, l', F, D), так и от коэффициентов $c_{nm}, s_{n,m}$, описывающих динамическую фигуру Луны:

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r P_r \left(\beta, \gamma, C_{3n}, S_{3n}, \frac{R}{a}, \frac{C}{M_M R^2} \right) \frac{\sin}{\cos} (k_{r1}l + k_{r2}l' + k_{r3}F + k_{r4}D) \quad (2.2.34)$$

Здесь A_r – числовые коэффициенты, которые рассчитываются на основе принятой модели гравитационного поля Луны. В модели [32] это параметры теории LURE2 [65]. Аргументами множителей P_r являются нормированные коэффициенты E_m , описывающие динамическую фигуру Луны, нормировка произведена на основе численных данных системы [65]. Например, $E_1 = \frac{\beta - \beta_0}{\beta_0}$, где β_0 – числовое значение из модели [65]. При этом коэффициенты $P_r = \prod_{m=1}^9 (E_1^{m_1} \dots E_9^{m_9})$ представляют собой произведение различных степеней аргументов E_m . Значения целочисленных показателей степеней m_i ($i = 1 \div 9$) и индексов k_{ri} ($i = 1 \div 3$) рассчитываются с использованием аналитической теории Н.К. Петровой. Здесь

учитывается орбитальное движение Луны [59] и динамические параметры, описывающие лунное гравитационное поле. Для осуществления аналитических операций с подобными рядами ФЛЛ было использовано программное обеспечение, разработанное Институтом прикладной астрономии РАН.

Аналогично выражению (2.2.33) все нелинейные члены относительно \vec{q} и \vec{p} были вынесены из производной от кинетической энергии, явно прописанные в (2.2.13), в отдельные функции $F_i(\vec{q}, \vec{p}), i = 1 \div 6$.

В результате, система уравнений (2.2.13) может быть переписана в более простом виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= p_1 + F_1(\vec{q}, \vec{p}) \\
 \dot{q}_2 &= (1 + k_1) \cdot p_2 - k_1 \cdot n \cdot q_3 + F_2(\vec{q}, \vec{p}) \\
 \dot{q}_3 &= (1 + k_2) \cdot p_3 - q_2 \cdot n + F_3(\vec{q}, \vec{p}) \\
 \dot{p}_1 &= d_1 \cdot q_1 + F_4(\vec{q}, \vec{p}) + \Phi_1(\vec{q}) \\
 \dot{p}_2 &= (-n^2 + d_2) \cdot q_2 + n \cdot p_3 + F_5(\vec{q}, \vec{p}) + \Phi_2(\vec{q}) \\
 \dot{p}_3 &= (-k_1 \cdot n^2 + d_3) \cdot q_3 + k_1 \cdot n \cdot p_2 + F_6(\vec{q}, \vec{p}) + \Phi_3(\vec{q}).
 \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Числовые значения коэффициентов d_1, d_2, d_3 – вычислены аналитическим методом как постоянные члены в рядах $Q_{ijk}(t, c_{nm}, s_{n,m})$. В модели [32], основанной на числовых значениях теории LURE2 [65], значения коэффициентов следующие: $d_1 = -3,53 \cdot 10^{-5}$, $d_2 = -9,85 \cdot 10^{-5}$, $d_3 = -3,24 \cdot 10^{-7}$.

Для вычисления собственных частот канонических переменных линеаризуем систему (2.2.35), удаляя функции F_i и Φ_i , которые содержат все нелинейные члены с каноническими переменными. В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений, решение которой реализуется через построение характеристического уравнения. Из системы (2.2.35) следует, что либрация по долготе не зависит от либрации по широте в линеаризованном случае, и это является особенностью либрационного типа вращения Луны. Последнее позволяет упростить расчет характеристического уравнения и свести решение уравнения 6-го порядка к решению уравнений 2-й и 4-ой степеней:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -k_1 n & 1 + k_1 & 0 \\ -n & -\lambda & 0 & 1 + k_2 \\ -n - d_2 & 0 & -\lambda & n \\ 0 & -k_1 n^2 + d_3 & k_1 n & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.36)$$

Раскрыв приведенные определители, получаем, в частности, что во втором случае уравнение четвертой степени сводится к биквадратному уравнению. Тогда собственные значения системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \omega_1 \cdot i, \omega_1 = \pm \sqrt{d_1} \\ \lambda_{3,4} &= \pm \omega_2 \cdot i, \omega_2 = \sqrt{n^2 - d_2 - d_3} \\ \lambda_{5,6} &= \pm \omega_3 \cdot i, \omega_3 = \sqrt{k_1 k_2 n^2 - k_1 d_2 - k_2 d_3} \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Полученные собственные значения и называются *собственными частотами либрации Луны*, поскольку соответствующие уравнения (2.2.35) описывают колебания Луны в невозмущенном виде.

При этом возникает проблема объяснения того, что частота либраций в долготе ω_1 определяется только коэффициентом d_1 , полученным из возмущающего потенциала U . В этом и заключается особенность либрационного характера вращения тела – без внешних возмущений долготные колебания были бы равны нулю. То есть Луна имела бы резонансное вращение, вытянутость ее фигуры была бы направлена всё время на Землю, т.е. вдоль оси \bar{X} .

Обозначим как ω_2 и ω_3 частоты, характеризующие динамику лунного полюса относительно полюса эклиптики, что можно записать как

$$\omega_2 \approx 0.230185, \omega_3 \approx 2.31188 \cdot 10^{-4}.$$

Соответствующие полученным частотам периоды будут равны 1057.48 суток для либрации по долготе 27.29 суток и 74.4 года для либрации по широте. Если учесть тот факт, что Луна имеет резонансное вращение, то собственные частоты должны учитывать и этот факт. Математически это означает включение в

собственную частоту соответствующих коэффициентов из разложения потенциальной энергии. В результате все описанное выше должно увеличить третий период 74.4 г примерно в два раза. Принимая резонансное вращение и согласно [60, 63, 64], правильнее было бы называть полученные частоты не свободными, а «произвольными».

Исследование колебаний на этих частотах имеет большое значение, т.к. по их наличию или отсутствию можно делать выводы о причинах диссипации лунного вращения, а также о силах, возбуждающих подобные колебания. Свободные либрации могут проявляться в результате действия сил, приводящих к одномоментному воздействию, например, при падении метеорита. В спектре колебаний после такого воздействия обнаруживаются частоты, близкие к ω_1, ω_2 . Именно поэтому из наблюдательного спектра колебаний трудно выделить свободную либрацию из-за наложения большого спектра частот. Тем не менее, благодаря длительным наблюдениям ЛЛЛЛ был получен значительный массив данных, обработка которого позволила определить амплитуды свободной либрации, оказавшихся равными нескольким миллисекундам дуги [97]. Геометрическая интерпретация колебаний с частотой ω_3 соответствует движению мгновенного полюса Луны в обратном направлении по эллипсу размером 3×8 угловых секунд. Такое поведение также свойственно Земле, а такие колебания называются чандлеровскими. Физическая интерпретация этих колебаний заключается в несовпадении оси вращения и оси главного момента инерции Луны (или Земли) [5, 25, 26].

2.3 Описание используемой аналитической теории орбитального движения Луны

2.3.1 Координаты Земли относительно центра масс Луны

В рамках модели главной проблемы предполагается отсутствие орбитально-вращательного взаимодействия [104], что позволяет отделить решение задачи вращения от решения задачи о движении центра масс Луны. Поэтому можно

считать орбиту Луны известной, и в качестве таковой была выбрана аналитическая орбитальная теория, построенная в работе [59]. Именно эта теория использовалась в работах [80, 86], с которыми в дальнейшем будет проведен сравнительный анализ с целью верификации построенной теории ФЛЛ и оценки ее точности.

Положение центра масс Луны на орбите вокруг Земли описывается долготой, широтой и параллаксом, выражения зависимости от времени которых заданы в виде тригонометрических рядов. Введем следующие обозначения:

a_e – экваториальный радиус Земли;

r_L – мгновенное расстояние Луна–Земля;

a_L – среднее расстояние Луна–Земля;

Параллакс – это синус угла, под которым виден некоторый радиус (экваториальный радиус Земли) на некотором расстоянии (расстояние Луна–Земля) $\sin(\pi_L) = \frac{a_e}{r_L}$. Если взять вместо мгновенного значения расстояния Луна–

Земля его среднее значение, то это называется постоянной синуса параллакса

$$\sin(\pi_0) = \frac{a_e}{a_L}$$

Запишем мгновенный параллакс через постоянную параллакса, которая примерно равна 56'31,25:

$$\sin(\pi_L) = \frac{a_e}{a_L + \Delta r} = \frac{a_e}{a_L} \left(1 + \frac{\Delta r}{a_L}\right)^{-1} = \frac{a_e}{a_L} + \sum_i f(\Delta r) = \sin(\pi_0) + \sum_i f(\Delta r) \quad (2.3.1)$$

Далее выполним нормировку на $\sin(\pi_0)$, тогда обратный радиус-вектор в теории [59] будет иметь следующий вид, обозначенный как R^{-1} :

$$R^{-1} = \frac{\sin(\pi_L)}{\sin(\pi_0)} = \frac{a_e a_L}{r_L a_e} = \frac{a_L}{r_L} = 1 + \frac{1}{\sin(\pi_0)} \sum_{\pi} f(\Delta r) \quad (2.3.2)$$

Эта величина представлена в таблицах, приведенных в работе [59].

Поскольку в либрационных уравнениях (2.2.13) используются только направляющие косинусы радиуса-вектора Луна–Земля, а не сами сферические

координаты, получим выражения для косинусов, исходя из следующих положений:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_L \cos(B) \sin(L) \\ r_L \cos(B) \sin(L) \\ -r_L \sin(B) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{r_L} \begin{pmatrix} r_L \cos(B) \sin(L) \\ r_L \cos(B) \sin(L) \\ -r_L \sin(B) \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = R_x(-\pi) \cdot R_y(\nu) \cdot R_z(M) \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Для перехода в селеноцентрическую систему координат координаты Земли относительно Луны будут выражаться следующим образом $L_{\text{earth}} = L_{\text{moon}} + 180^\circ$, $V_{\text{earth}} = -V_{\text{moon}}$

Таким образом, формула (2.3.3) позволяет из орбитальной теории движения Луны получить направляющие косинусы радиуса-вектора Земли относительно Луны в ДСК.

2.3.2 Координаты Солнца относительно центра масс Луны.

Положение Солнца будем рассматривать относительно эклиптической системы координат, вращающейся вокруг оси Z (полюс эклиптики) с угловой скоростью \dot{L}_L и имеющей широту B. Тогда селеноцентрические координаты Солнца x'_S, y'_S, z'_S будут суммой прямоугольных координат Солнца относительно центра Земли ξ_S, η_S, ζ_S и селеноцентрических координат Земли относительно Луны x'_E, y'_E, z'_E :

$$\begin{aligned} x'_S &= x'_E + \xi_S, \\ y'_S &= y'_E + \eta_S \\ z'_S &= z'_E + \zeta_S \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Прямоугольные координаты Солнца в ДСК будут равны:

$$\begin{aligned}x_S &= x'_S \beta_{11} + y'_S \beta_{12} + z'_S \beta_{13} \\y_S &= x'_S \beta_{21} + y'_S \beta_{22} + z'_S \beta_{23} \\z_S &= x'_S \beta_{31} + y'_S \beta_{32} + z'_S \beta_{33}\end{aligned}\quad (2.3.5)$$

Введем следующие обозначения (рис 2.4 и 2.5):

1. χ_L – селеноцентрическое расстояние до Земли (E''')
2. χ_S – геоцентрическое расстояние до Солнца
3. r_S – селеноцентрическое расстояние до Солнца (S'')

Тогда направляющие косинусы будут иметь вид:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{x_S}{r_S} = \frac{1}{r_S} x'_S \beta_{11} + \frac{1}{r_S} y'_S \beta_{12} + \frac{1}{r_S} z'_S \beta_{13} \\u_2 &= \frac{y_S}{r_S} = \frac{1}{r_S} x'_S \beta_{21} + \frac{1}{r_S} y'_S \beta_{22} + \frac{1}{r_S} z'_S \beta_{23} \\u_3 &= \frac{z_S}{r_S} = \frac{1}{r_S} x'_S \beta_{31} + \frac{1}{r_S} y'_S \beta_{32} + \frac{1}{r_S} z'_S \beta_{33}\end{aligned}\quad (2.3.5)$$

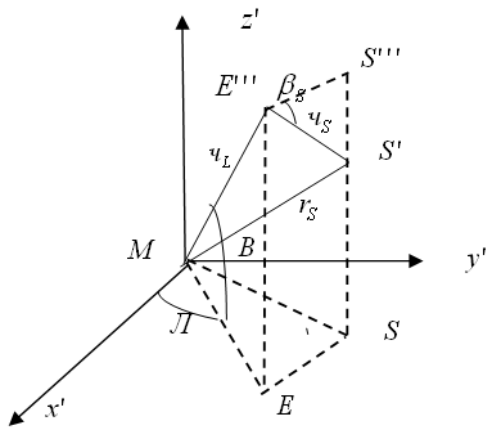


Рис 2.4 Расположение радиусов векторов χ_L Земли (E''') и r_S Солнца (S'') в селеноцентрической системе координат $x'y'z'$.

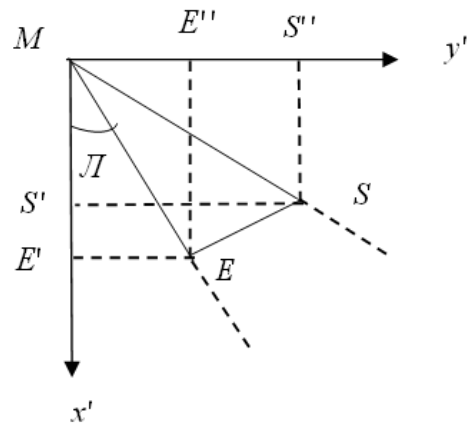


Рис 2.5 Проекции ME, ES, MS радиусов векторов χ_L , χ_S , r_S на плоскость $x'y'$. Где M – центр Луны, E – положение Земли, S – положение Солнца.

Найдем проекции радиуса-вектора Солнца на оси координат и выразим через широту и долготу Солнца и Земли

$$\begin{aligned}
 (r_S)_{x'} &= ME' - E'S'^{(r_S)}_{y'} = ME'' + E''S''^{(r_S)}_{z'} = SS' = \\
 &= E'''E - S'''S' \\
 ME &= \varphi_L \cos(B_E) \\
 ME' &= \varphi_L \cos(B_E) \cos(L_E) ME'' = \varphi_L \cos(B_E) \sin(L_E) \\
 ES &= \varphi_S \cos(-\beta_S) = \varphi_S \cos(\beta_S) E'S' = \\
 &= \varphi_S \cos(\beta_S) \cos[180 - \Lambda] E''S'' = \varphi_S \cos(\beta_S) \sin[180 - \Lambda] \\
 S'''S' &= \varphi_S \sin(-\beta_S) = -\varphi_S \sin(\beta_S) \\
 E'''E &= \varphi_L \sin(B_E) \\
 \Lambda &= \lambda_S - l_E \\
 (r_S)_{x'} &= \varphi_L \cos(B_E) \cos(L_E) + \varphi_S \cos(\beta_S) \cos[\lambda_S - l_E] \\
 (r_S)_{y'} &= \varphi_L \cos(B_E) \sin(L_E) + \varphi_S \cos(\beta_S) \sin[\lambda_S - l_E] \\
 (r_S)_{z'} &= \varphi_L \sin(B_E) + \varphi_S \sin(\beta_S)
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Формулы (2.3.6) показывают проекции соответствующих векторов на соответствующие плоскости (согласно рисункам 2.4 и 2.5), где S' – положение Солнца при нулевой широте, а S'' – истинное положение Солнца.

Заменим теперь координаты Земли на координаты Луны: $B_E = -B_L$, $l_E = l_L + 180^\circ$, $\lambda_S - l_E = l_S + L_S - l_L - 180^\circ = D + L_S - 180^\circ$, $L_E = L_L$. Тогда координаты Солнца относительно Луны будут равны:

$$\begin{aligned}
 (r_S)_{x'} &= \varphi_L \cos(B_L) \cos(L_L) - \varphi_S \cos(\beta_S) \cos[D - L_S] \\
 (r_S)_{y'} &= \varphi_L \cos(B_L) \sin(L_L) + \varphi_S \cos(\beta_S) \sin[D - L_S] \\
 (r_S)_{z'} &= -\varphi_L \sin(B_L) + \varphi_S \sin(\beta_S)
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Перепишем полученные выражения в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_1'' &= \frac{\varphi_L}{r_S} \cos(B_L) \cos(L_L) - \frac{\varphi_S}{r_S} \cos(\beta_S) \cos[D - L_S] \\
u_2'' &= \frac{\varphi_L}{r_S} \cos(B_L) \sin(L_L) + \frac{\varphi_S}{r_S} \cos(\beta_S) \sin[D - L_S] \\
u_3'' &= \frac{-\varphi_L}{r_S} \sin(B_L) + \frac{\varphi_S}{r_S} \sin(\beta_S)
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Рассмотрим вычисление $\frac{\varphi_S}{r_S}$ и $\frac{\varphi_L}{r_S}$ (рис. 2.6 и 2.7). Если мы представим $\frac{\varphi_L}{r_S}$ через параллакс Луны $\frac{\varphi_L}{r_S} = \frac{a_L \varphi_L a_S}{a_S a_L r_S}$, где $a_M = \frac{a_L}{a_S}$ есть отношение средних расстояний Земля–Луна и Земля–Солнце, равное $2.5718814 \cdot 10^{-3}$, тогда $\frac{\varphi_L}{r_S}$ будет представлять собой произведение константы на параллакс Луны и на параллакс Солнца относительно Земли $\frac{\varphi_L}{r_S} = \frac{a_L}{a_S} R_L^{-1} \cdot R_S^{-1}$. Необходимо отметить, что параллакс Луны в теории Брауна Шмидта дается в виде R_L^{-1} . После всех преобразований получаем, что выражение $\frac{\varphi_L}{r_S}$ будет равняться $\frac{\varphi_L \varphi_S}{\varphi_S r_S}$.

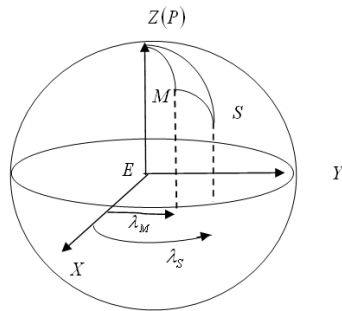


Рис 2.6. Сферический треугольник (ZMS) с центром в центре масс Земли. Вывод отношения $\frac{\varphi_S}{r_S}$
E, M, S положения тел Земли, Луны и Солнца, λ_M -
долгота Луны, λ_S - долгота Солнца

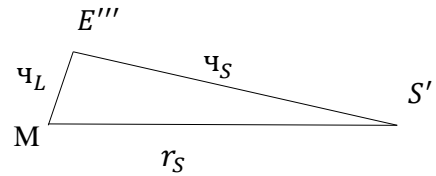


Рис 2.7 Треугольник $ME'''S'$ для формулы косинусов.

Для расчета $\frac{\varphi_S}{r_S}$ применим формулу косинусов (рис. 2.7) $r_S^2 = \varphi_L^2 + \varphi_S^2 - 2\varphi_L \varphi_S \cos(\angle \varphi_L \varphi_S)$. Применяя формулу косинусов для сферического треугольника (рис 2.6), найдем, чему равен $\cos(\angle \varphi_L \varphi_S)$:

$$\cos(\check{L}S) = \sin(B_L)\sin(\beta_S) + \cos(B_L)\cos(\beta_S)\cos(\lambda_S - \lambda_L). \quad (2.3.9)$$

Итоговая формула для расчета $\frac{r_S}{r_S}$ будет следующей:

$$\sqrt{\left(\frac{r_S}{r_S}\right)^2} \Rightarrow \frac{r_S}{r_S} = \left[1 + \left(\frac{r_L}{r_S}\right) - 2\frac{r_L}{r_S}(\cos(B_L)\sin(\beta_S) + \cos(B_L)\cos(\beta_S)\cos(\lambda_S - \lambda_L))\right]^{-0.5} \quad (2.3.10)$$

Теперь воспользуемся решением задачи двух тел, в которой для кеплеровского движения можно получить следующие разложения, описанные в параграфе 3.03 и работе [7]:

$$\begin{aligned} R_S^{-1} &= 1 + e'\cos(l') + e'^2\cos(2l') + a_M\cos(D) \\ L_S &= 2e'\sin l' + \frac{5}{4}e'^2\sin(2l') - a_M\sin(D), \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

где l' и $D = l_L - l_S$ есть аргументы Делоне, а e' – эксцентриситет земной орбиты на J2000. Заметим (рис 2.7), что $\lambda_S - \lambda_L = l_S + L_S - l_L - L_L = -D + L_S - L_L = -(D + L_L - L_S)$, где λ – это истинная долгота, l – средняя долгота, L – неравенство в долготе ($L = \lambda - l$).

Таким образом, на основе выражений (2.3.4–2.3.11) можно сформулировать алгоритм вычисления прямоугольных координат Солнца:

1. Вычисление параллакса Солнца $R_S^{-1} = 1 + e'\cos(l') + e'^2\cos(2l') + a_M\cos(D)$
2. Вычисление промежуточной величины $\mathfrak{R}m = \frac{r_L}{r_S} = a_M(1 + R_L)^{-1} \cdot R_S^{-1}$
3. Вычисление неравенства в долготе Солнца $L_S = 2e'\sin l' + \frac{5}{4}e'^2\sin(2l') - a_M\sin(D)$

4. При нулевой широте Солнца $\beta_S = 0$ вычисление значения

$$\cos(\alpha) = \cos(B_L)(\cos(D)\cos(L - L_S) - \sin(L - L_S)\sin(D))$$

5. Вычисление значения $Rsm = \frac{\varphi_S}{r_S} = [1 + \Re m^2 - 2 \cdot \Re m \cdot \cos(\alpha)]^{\frac{-1}{2}}$

6. Вычисление значения $\Re S = \frac{\varphi_L}{r_S} = \frac{\varphi_L \varphi_S}{\varphi_S r_S} = \Re m \cdot Rsm$

Тогда выражения для проекций вектора Луна–Солнце будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} as &= \Re s \cos(B_L) \cos(L_E) - Rsm \cdot \cos[D - L_S] \\ bs &= \Re s \cos(B_L) \sin(L_E) + Rsm \cdot \sin[D - L_S] \\ cs &= -\Re s \sin(B_L) \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_S}{r_S} &= \frac{a_S + \sum \Delta a_S}{r_S} = \frac{a_S}{r_S} \left(1 + \frac{\sum \Delta a_S}{a_S} \right) = \frac{a_S}{r_S} \cdot R_S \\ &\Rightarrow \frac{a_S}{r_S} = \frac{\varphi_S}{r_S} \cdot R_S^{-1}, \end{aligned}$$

где B_L и L_L – широта и долгота, или по-другому неравенство в долготе Луны по теории Гутцвиллера-Шмидта. Следовательно, направляющие косинусы радиуса-вектора Солнца примут следующий окончательный рабочий вариант:

$$\begin{aligned} u_1 &= as\beta_{11} + bs\beta_{12} + cs\beta_{13} \\ u_2 &= as\beta_{21} + bs\beta_{22} + cs\beta_{23} \\ u_3 &= as\beta_{31} + bs\beta_{32} + cs\beta_{33}. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Нормированный параллакс Солнца относительно Луны можно рассчитать по формуле $\frac{a_S}{r_S} = \frac{\varphi_S}{r_S} \cdot R_S^{-1}$.

На данном этапе получены все необходимые уравнения для дальнейшей реализации численного интегрирования.

2.4 Программное обеспечение для построения численной теории ФЛЛ

2.4.1 Анализ метода Рунге-Кутты для численного интегрирования либрационных уравнений

Вначале рассмотрим численный метод для решения системы дифференциальных уравнений. В качестве такового примем классический метод Рунге-Кутты. Данный метод в некоторой степени напоминает разложение в ряд Тейлора. Последнее позволяет найти значение функции на следующий момент времени при каждом шаге интегрирования. Алгоритм неявного метода Рунге-Кутты состоит в следующем (для краткости запишем для случая одной переменной):

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad (2.4.1)$$

Матрица коэффициентов

$$\begin{pmatrix} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ b_1 & b_2 & \cdots & & \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

Уравнения выше – 2.4.1 и 2.4.2 представляют собой взаимосвязи, накладываемые на коэффициенты в методе Рунге-Кутты. Используя несколько вариантов метода, Рунге-Кутты, была проведена верификация коэффициентов с целью их приведения к единой системе. В итоге была получена система значений коэффициентов, которая представлена в Таблице 1 приложения.

При решении системы дифференциальных уравнений ФЛЛ с использованием Гамильтонова подхода мы воспользовались методом Рунге-Кутты 10-го порядка

точности ($s = 17$ – количество членов в суммах (2.4.1)). Данный метод был выбран вместо классического метода 4-го порядка для повышения точности решения, а также по той причине, что в работе [4] приводится проверочная Таблица 1 (основного текста диссертации) только для 10-го порядка разложения. Внутренняя точность метода определялась на основе анализа решения на разных шагах: $h_1 = 0.10$ дня, $h_2 = 0.01$ дня, $h_3 = 0.05$ дня.

На рис. 2.8 представлены разности при сравнении этих численных решений: слева $f(h_3) - f(h_2)$, справа $f(h_3) - f(h_1)$. Из графиков следует, что при использовании шага в 0.05 дня внутренняя точность достигает 10-го знака после запятой, а при использовании шага в 0.1 дня – 4-го знака после запятой. Следует отметить, что график для разности $f(h_3) - f(h_2)$ почти в два раза меньше по интервалу интегрирования. Это связано с тем, что метод 10-го порядка достаточно объемный и требует большого количества вычислительного времени, для расчета эфемериды на 10000 суток (около 27 лет) вперед требуется порядка одного часа. При этом процесс распараллеливания не был использован. Таким образом, исходя из экономии вычислительного времени, был выбран шаг, равный 0.5 дня. Анализ точности решения системы Гамильтона будет приведен в следующих главах.

В завершение данного параграфа следует отметить, что используемый в диссертационной работе алгоритм Рунге-Кутты обеспечивает устойчивое решение на интервале порядка 27 лет с внутренней точностью до 4-го знака после запятой. Однако это не гарантирует, что внешняя точность будет такой же. Далее будет обосновано и доказано, что внешняя точность зависит от того, насколько близки две модели (наша и сравниваемая) в математическом и физическом смысле. Небольшая разница в потенциалах приводит к появлению шумовых частот, близких к резонансным частотам системы, которые существенно ухудшают внешнюю сходимость.

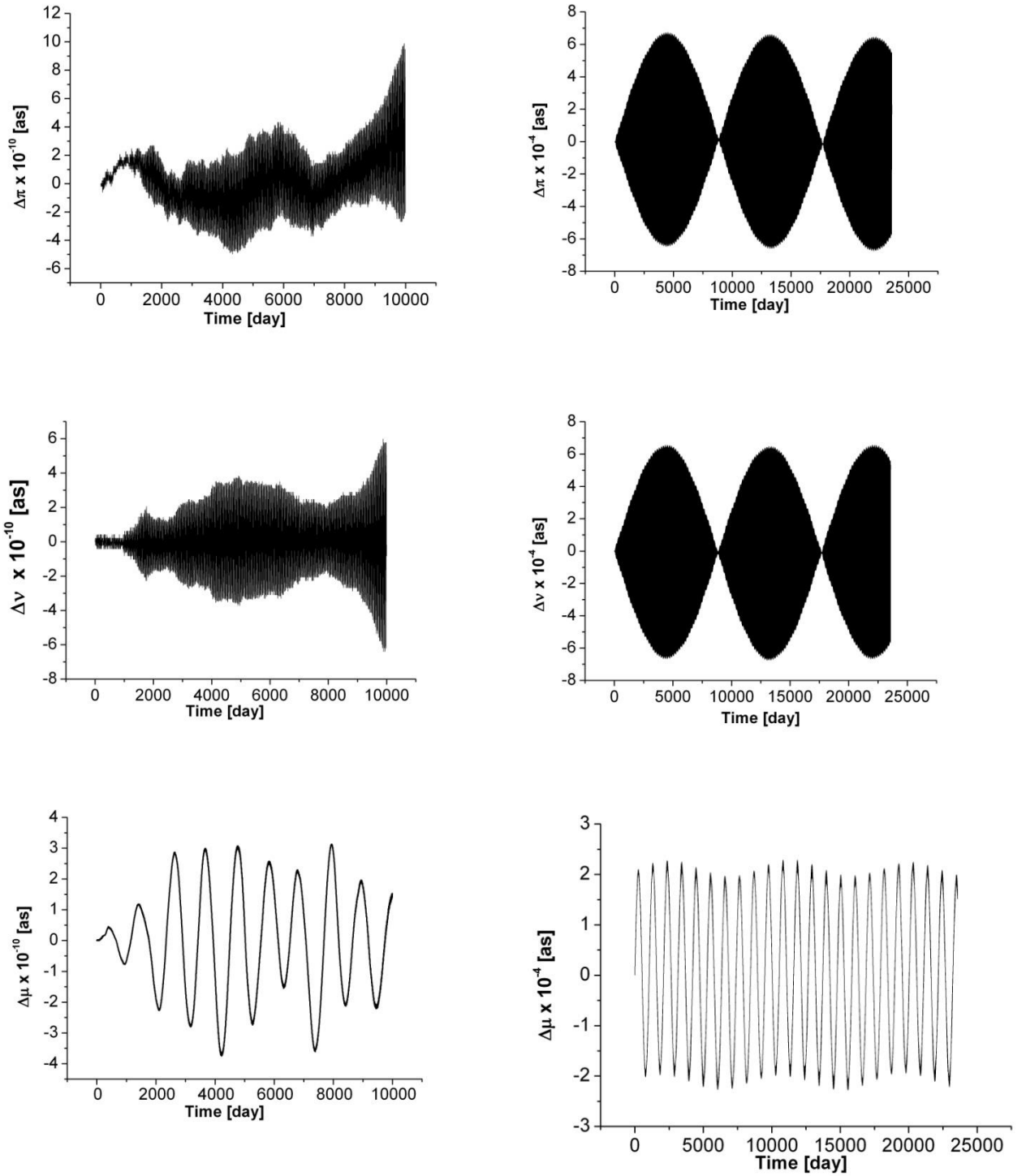


Рис 2.8 Точность решения дифференциальных уравнений ФЛЛ для разных периодов интегрирования

2.4.2 Структура программного комплекса для реализации решения системы уравнений ФЛЛ

Представим структурную схему программы по реализации численного интегрирования уравнений физической либрации Луны.

Таблица 1. Описание функций в программном комплексе

Название функций	Описание функции	Входные переменные	Выходные переменные	Ссылка на формулу или стр. в тексте
fq1, fq2, fq3 fp1, fp2, fp3 (t, i, j, q1, q2, q3, p1, p2, p3)	Функции для расчета правых частей уравнения Гамильтона	t, i время и подшаг $q1, q2, q3$ координаты $p1, p2, p3$ импульсы	Значение функции	2.2.13
direct_cos_D E (t, i)	Функция для расчета орбитальных координат из дин.-й теории DE	t, i	Направляющие косинусы	Рис 2.2 и 2.3, формула 2.2.15
Ufull (j, t, i, q1, q2, q3)	Функция для расчета гравитационного потенциала	j производная ($j=0$ -значение), $t, i, q1, q2, q3$	Значение функции	2.2.14, 2.2.20, 2.2.25, 2.2.28, 2.2.30, 2.2.32
Matric (i, j, q, q1, q2, q3)	Функция для расчета компонент матрицы перехода от ИСК к ДСК	i, j, q - производная, $q1, q2, q3$	Значение функции	2.1.1

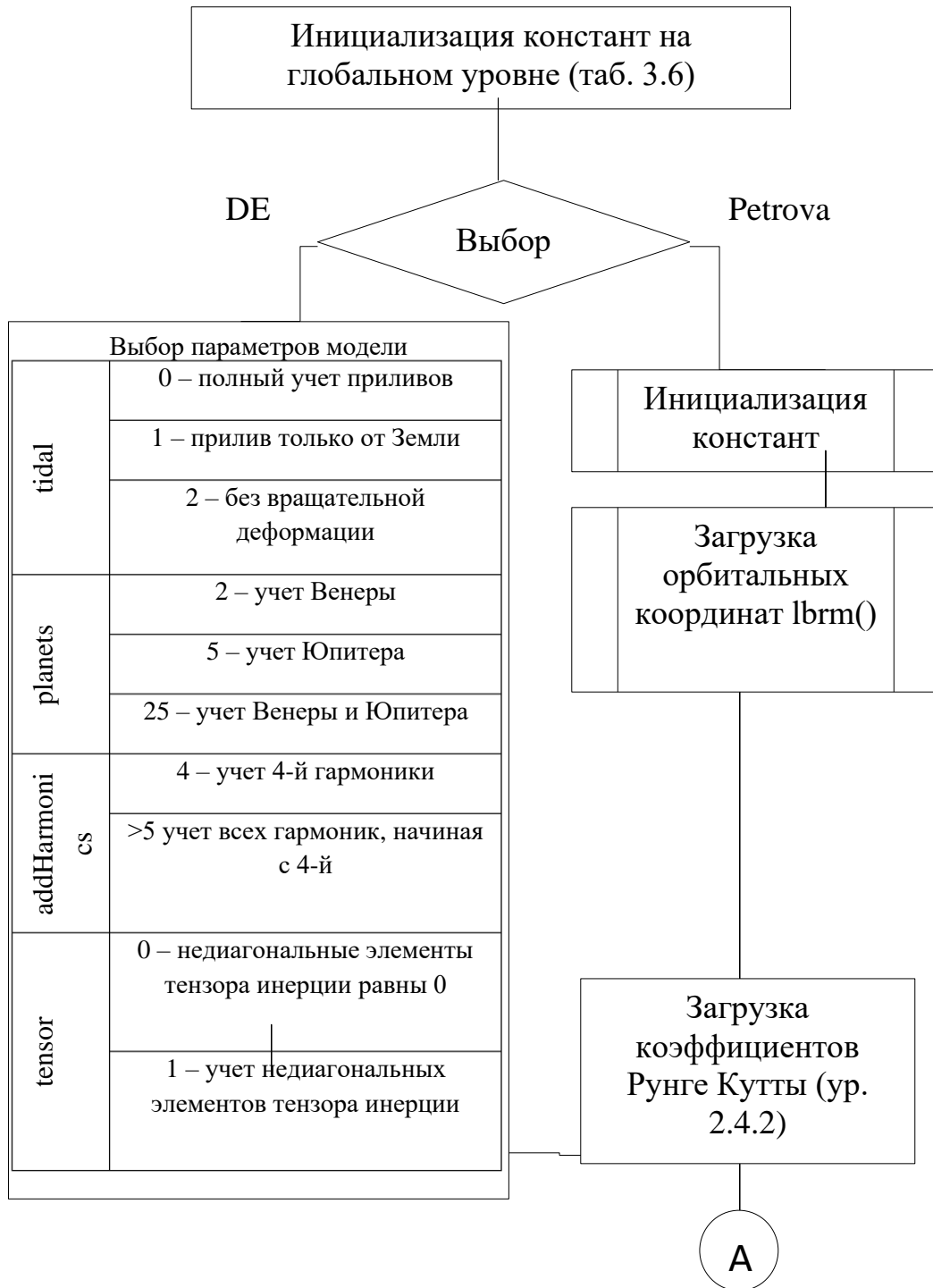


Рис 2.9 Структура программного комплекса, часть 1.

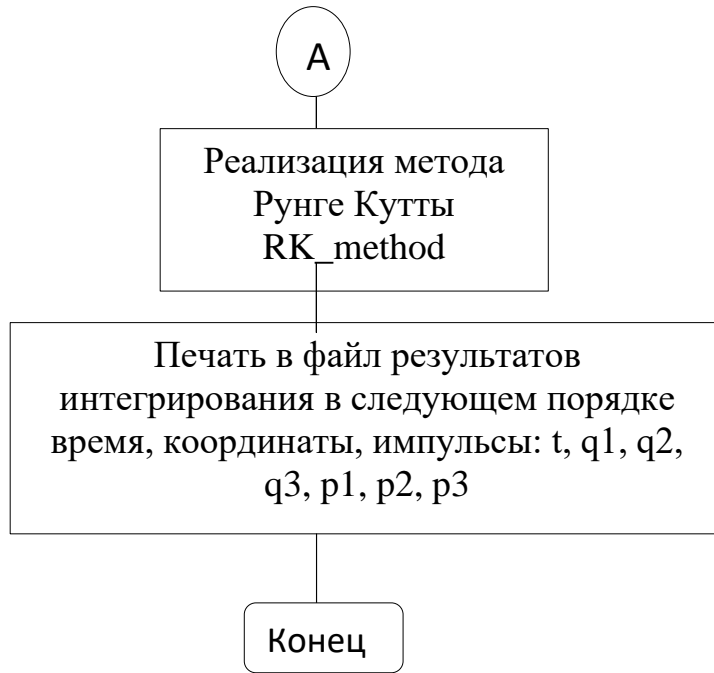


Рис 2.10 Структура программного комплекса, часть 2.

По итогам разработки и внедрения программного продукта, реализующего решение главной проблемы ФЛЛ, было получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018664908 «Программный комплекс для анализа либрационной динамики сложных систем», Загидуллин А.А., Нефедьев Ю.А., Петрова Н.К., Андреев А.О. от 26.11.2018.

При написании этой главы использованы публикации 1, 3, 12-21 из списка публикаций автора по теме диссертации.

ГЛАВА 3 ПЕРЕХОД НА ЧИСЛЕННЫЕ ЭФЕМЕРИДЫ И РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМОГО РЕШЕНИЯ

Данная глава посвящена рассмотрению ряда эффектов, позволяющих улучшить модель физической либрации, заложенной в решение главной проблемы.

Решение, полученное на первом этапе, построено на основе аналитической теории движения центра масс [59]. Точность этой теории существенно уступает точности современных численных орбитальных теорий. Поэтому первым шагом в улучшении базовой модели был переход на современную численную эфемериду. В качестве таковой была выбрана эфемерида DE421. Несмотря на то, что на данный момент существуют более современные динамические эфемериды DE 430/431, DE 440/441, эта эфемерида была выбрана по той причине, что на основе сравнения модели DE421 с многолетними наблюдениями ЛЛЛ и гравиметрическими данными Rambaux, Williams [86] автором настоящей диссертации были получены аналитические ряды, описывающие заложенную в эфемериду модель ФЛЛ в зависимости от времени, параметров селенопотенциала и коэффициентов, ответственных за некоторые долгопериодические процессы [84]. Ряды были получены путём последовательного применения частотного анализа и метода наименьших квадратов (МНК). Эти эмпирические ряды [86] являются удобным инструментом для тестирования алгоритмов по извлечению параметров ФЛЛ из численной эфемериды. Основываясь на сравнении параметров, полученных непосредственно из эфемериды, с данными, полученными по эмпирическим рядам [86], нами корректировался алгоритм вычислений с целью минимизации остаточных разностей.

При переходе на численную эфемериду необходимо было решить ещё одну проблему: реализовать переход от Эйлеровых углов, в которых описывается ФЛЛ

в DE421, к самолётным углам, в которых строится наша численная теория. Были проведены и аналитические, и численные расчёты для установления явной связи между двумя видами углов и их производными [17]. После разработки этого математического инструментария появилась возможность учесть дополнительные к главной проблеме эффекты: влияния планет и приливных деформаций тела Луны.

3.1 Особенности перестройки решения с применением численной эфемериды DE

Результаты интегрирования задачи N тел, описывающих динамику Солнечной системы, выполненной в JPL NASA, можно найти по следующему адресу <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/>. В данном каталоге содержится большое количество версий теорий, отличающихся качеством и предназначением данных. Каждая теория пронумерована и представляет собой ряд файлов. Первый файл – шапка или *header.###* файл, где символы *###* обозначают номер теории. Остальные файлы представляют собой Чебышевские коэффициенты, и названия этих файлов имеют вид *asc[pn]****.###*. Символы ****** обозначают начальное значение времени в григорианской шкале времени, а *[pn]* обозначает эпоху (p – наша эра, n – до нашей эры).

Рассмотрим структуру файла *header*. В *header* содержится основная информация о структуре эфемериды: название эфемериды, интервал эфемериды, параметры модели и организации Чебышевских коэффициентов, содержащихся в *asc* файлах. Последняя информация является критически важной, так как без структуры организации Чебышевских коэффициентов программа для интерполяции не сможет правильно считать информацию с файлов *asc*. Весь файл *header* (рис 3.1) разделен на группы с названиями 1010, 1030, 1040, 1041, 1050 и заканчивается 1070 (для версий, начиная с DE403), а также перед началом первой группы в первой строке указаны два целых значения *KSIZE*, *NCOEFF*.

Первая группа 1010 содержит три строки со следующими значениями: полное название эфемериды, начальная эпоха в Юлианской и Григорианской шкале времени и конечная эпоха интегрирования также в двух шкалах времени.

Вторая группа 1030 повторяет информацию о начале и конце временного промежутка, но в Юлианской шкале времени, а также включает шаг, с которым разбит весь промежуток интегрирования (типичный шаг равен 32 дня).

В следующей группе 1040 приводятся названия всех констант для интегрирования уравнений (начальные данные Коши, коэффициенты Стокса, произведение гравитационной постоянной на массу планет – GM и др.). В первой строке группы 1040 дается общее количество констант, а в группе 1041 даются их числовые значения, где первая строка также начинается с общего количества констант. Предпоследняя группа 1050 содержит информацию о том, как устроена организация чебышевских коэффициентов (Табл. 2 приложения). Последняя группа 1070 закрывает файл *header*.

Со значением *NCOEFF* тесно связано организация *asc* файлов. *asc* файл состоит из коэффициентов Чебышевской интерполяции. Пусть мы имеем файлы с именем *ascp1900.403* и *ascp2000.403*, из названия видно, что в каждом файле содержится временной промежуток в 100 лет. Весь этот промежуток разделяется на группы с шагом в 32 дня. Каждая группа начинается со строки, в которой содержится два целых значения. Первое – это номер группы, второе – количество записей в этой группе, то есть *NCOEFF*. Вторая строка каждой группы начинается с двух значений: начало и конец временного отрезка данной группы в юлианской шкале (по 32 дня). Каждый блок из *NCOEFF* состоит из трех столбцов, считывание с которых осуществляется в строку. После *UT* идут *NCOEFF* значений в следующем порядке: Меркурий, Венера, барицентр Земля–Луна, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон, Луна, Солнце, нутация и либрация. Информацию о том, как разделены значения *NCOEFF* среди планет, Луны, Солнца, нутации и либрации, можно найти в *header* файле в *GROUP* 1050 (Табл. 2 Приложения).

```

1 KSIZE= 2036      NCOEFF= 1018
2
3 GROUP   1010
4
5 JPL Planetary Ephemeris DE422/LE422
6 Start Epoch: JED=   625648.5-3000-DEC-07-00:00:00
7 Final Epoch: JED=  2816816.5 3000-JAN-30-00:00:00
8
9 GROUP   1030
10
11      625648.50  2816816.50      32.
12
13 GROUP   1040
14
15      222
16 DENUM   LENUM   TDATEF   TDATEB   CENTER   CLIGHT   AU           EMRAT   GM1     GM2
17                                     .....
18
19 GROUP   1041
20
21      222
22 0.42200000000000000000D+03  0.42200000000000000000D+03  0.200909261302050000D+14
23 0.200909251841380000D+14  0.11000000000000000000D+02  0.299792458000000000D+06
24                                     .....
25
26 GROUP   1050
27
28      3   171   231   309   342   366   387   405   423   441   753   819   899
29      14   10   13   11    8    7    6    6    6    13   11   10   10
30      4    2    2    1    1    1    1    1    1    8    2    4    4
31
32 GROUP   1070

```

Рис 3.1 Структура *header* файла

Каждый столбец относится либо к планете, либо к нутации, либо к либрации, в которой приведена структура хранения Чебышевских коэффициентов. Рассмотрим подробнее первый столбец: последняя строка обозначает, что данные для Меркурия разбиты на четыре подгруппы (исключая данные UT), общее количество коэффициентов которых равняется 170 (см. второй столбец второй строки). Разбиение на подгруппы не является обязательно равномерным, это связано с тем, что разбиение на 32 дня не является оптимальным для данного объекта, соответственно и степень аппроксимирующего полинома зависит от сложности объекта.

Поскольку сами данные в *acs* файлах представляют Чебышевские коэффициенты, имеются соответствующие программы для пользователей. Данные программы написаны на языках C и Fortran. Для полноценной работы нужно использовать две программы: первая переводит файл в двоичный формат, а

вторая производит интерполяцию на заданный промежуток времени. Для интерполяции нужно задать значения двух переменных NCENT и NTARG, где NCENT означает центральное тело, относительно которого мы хотим получим координаты тела NTARG. NCENT для случая либрации Луны равен 0, а NTARG равен 15.

Помимо динамических эфемерид, следует упомянуть и численные эфемериды планет и тел Солнечной системы, реализуемые в Институте прикладной астрономии (ИПА) РАН в Санкт-Петербурге. Доступ к этим эфемеридам реализован через онлайн-сервис <http://iaaras.ru/dept/ephemeris/online/>, также можно найти исходный код, находящийся на платформе github.

Эфемериды ИПА представляют собой координаты тела, вычисляемые через коэффициенты Чебышева, точность представления которых не уступает эфемеридам DE. Как и любые современные эфемериды, повышение точности осуществляется за счет двух основных факторов – физической либрации Луны и моделирования гравитационного эффекта от пояса астероидов, которые влияют на орбитальное движение (в первую очередь, на орбиту Марса).

3.2 Разработка алгоритма по извлечению параметров орбиты Луны из DE421

Для извлечения параметров либрации Луны использовались готовые программы, написанные сотрудниками лаборатории реактивных исследований JPL NASA. Приведем описание основной функции данной программы. Основные элементы программы описаны в работах [13–15] и список небесных тел, у которых должны быть определены координаты, приводится в Таблице 3 Приложения. Здесь NTARG – нумерация по программе.

1. Трансформация из декартовой системы координат $(R(1), R(2), R(3))$ в эклиптическую систему $X_{ecl}, Y_{ecl}, Z_{ecl}$ (при повороте на угол ε_0) можно записать как

$$\begin{pmatrix} X_{ecl} \\ Y_{ecl} \\ Z_{ecl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_0) & \sin(\varepsilon_0) \\ 0 & -\sin(\varepsilon_0) & \cos(\varepsilon_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(3) \end{pmatrix}.$$

2. Определение долготы и широты Земли и Солнца можно выполнить согласно следующим выражениям:

$$\lambda = \begin{cases} 2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{X_{ecl}}{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2}} \right) - n, Y_{ecl} < 0, \\ \cos^{-1} \left(\frac{X_{ecl}}{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2}} \right) - n, Y_{ecl} > 0, \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{Z_{ecl}}{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2 + Z_{ecl}^2}} \right).$$

3. Для нахождения косинусов направлений на точечные Землю и Солнце от Луны используются формулы:

$$a_{ecl} = \frac{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2}}{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2 + Z_{ecl}^2}} \cos(\lambda),$$

$$b_{ecl} = \frac{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2}}{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2 + Z_{ecl}^2}} \sin(\lambda),$$

$$c_{ecl} = \frac{Z_{ecl}}{\sqrt{X_{ecl}^2 + Y_{ecl}^2 + Z_{ecl}^2}}.$$

Полученные величины далее используются для определения потенциальной энергии всей системы. Достоверность выполненных нами вычислений была проверена на основе их верификации с данными электронного ресурса HORIZONS, основанного на модели DE431mx. В Таблице 4 Приложения

приведены остаточные разности между нашими результатами и данными работы [93].

3.3 Разработка алгоритма по извлечению параметров либрации из DE421

3.3.1 Полуэмпирические ряды наблюдений, построенные на основе сравнения DE421с лазерными данными

Так как теория DE421 представляет собой наиболее точное аналитическое описание ФЛЛ в виде полуэмпирических рядов [86], она была использована для верификации нашего программного пакета. Ряды Пуассона можно представить как

$$F(t) = \sum_{j=1}^n a_j t^j + \sum_{i=1}^n [(C_i + \epsilon_i^c t) \cos(\varphi_i(t)) + (S_i + \epsilon_i^s t) \sin(\varphi_i(t))] \quad (3.3.1)$$

Компоненты в (3.3.1) являются полуэмпирическими фундаментальными аргументами Делоне. Фрагмент компонент полуэмпирических рядов приводится в Таблице 2. Следует отметить, что в нашем случае включены низкоамплитудные члены, которые, согласно работе Баркина Ю. В. и др. [1], возникают вследствие свободной нутации лунного ядра (FCN) [84].

Были выполнены следующие процедуры:

- 1) Создана программа для определения параметров ФЛЛ согласно модели (3.3.1) и данным работы [86];
- 2) В результате верификации алгоритмов извлечения параметров ФЛЛ согласно параграфу 3.2 установлено хорошее соответствие остаточных разностей с работой [86];
- 3) Все необходимые параметры приведены в Таблицах 5–7 Приложения.

Необходимым этапом в работе с эфемеридой DE421 была реализация методики извлечения параметров физической либрации Луны из хранимых на дисках данных. Для этой цели создателями динамической эфемериды была подготовлена программа P1erh. Формальным параметрам этой программы мы

Таблица 2 Фрагмент таблицы полуэмпирических рядов [86].

Физическая либрация для угла $I\sigma$					
Аргумент	Период (сутки)	Фурье C (")	Фурье S (")	Пуассон C ("/ век)	Пуассон S ("/ век)
+I	27.555	-0.046	-101.344	-	-
+F	27.212	78.575	0.249	-	-
+I-2F	-26.878	0.072	-24.569	-	-
+ Ω	-6798.526	7.582	-9.023	-0.006	0.121
+2F	13.606	-0.003	-10.080	-	-
+F+W	27.185	0.004	5.758	-0.012	-0.002
-2D+2F	173.310	-0.001	-3.002	-	-
-2D+I	-31.812	-0.001	2.469	-	-
+F-W	27.239	-0.001	2.443	0.005	-0.001

задали фактические значения: NTARG=15 - индекс Луны - объекта, координаты которого необходимо получить, и NCTR=0 – индекс Земли - объекта, относительно которого необходимо получить координаты Луны. В списке возвращаемых значений функции является массив значений углов Эйлера ψ , θ , ϕ . Традиционно эти углы определяют положение динамической системы Луны относительно ICRF. Углы либрации ρ , τ , $I\sigma$ мы получали по классической схеме с применением матриц поворота [88, 100, 108].

Первый шаг реализует перевод единичных векторов в систему ICRF

$$\bar{r}_2 = R_3(-\phi)R_1(-\theta)R_3(-\psi)\bar{r}_1. \quad (3.3.2)$$

Здесь $\bar{r}_1 = (1.0.0)^T$ направлен вдоль оси Ox, а $\bar{r}_2 = (0,0,1)^T$ - к полюсу плоскости xOy. Обозначим получившиеся векторы как \bar{x}_{2000} и \bar{z}_{2000} .

На следующем шаге реализуем переход от эклиптической системы к экваториальной поворотом на угол наклона экватора Земли к эклиптике ε :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{2000} = R_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{2000}. \quad (3.3.3)$$

Третьим шагом получаем направление на нисходящий узел экватора Луны:

$$\bar{\Omega} = \frac{|\bar{z}_{MM}| \cdot |\bar{k}| \cdot \sin(\bar{z}_{MM} \wedge \bar{k})}{|[\bar{z}_{MM} \times \bar{k}]|}. \quad (3.3.4)$$

Здесь индекс ММ обозначает эпоху 2000.

На четвёртом шаге мы имеем возможность получить Эйлеровы углы в эклиптике. Для этого используются стандартные операции с векторами:

$$\begin{aligned} \cos(\phi_c) &= (\bar{i} \cdot \bar{\Omega}) \\ \sin(\phi_c) &= (\bar{j} \cdot \bar{\Omega}) \\ \cos(\theta_c) &= (\bar{k} \cdot \bar{z}_{2000}) \\ \cos(\psi_c) &= (\bar{\Omega} \cdot \bar{x}_{2000}) \\ \sin(\psi_c) &= ([\bar{z}_{2000} \times \bar{\Omega}] \cdot \bar{x}_{2000}), \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

здесь ϕ_c – угловое расстояние нисходящего узла от точки весны, θ_c – угол между экватором Луны и плоскостью эклиптики, ψ_c – угол на эклиптике от узла до проекции оси, направленной на момент инерции А. Все параметры приведены к эпохе J2000.

Наконец, реализуем переход от углов Эйлера к углам либрации ρ , τ , $I\sigma$:

$$\begin{aligned} I\sigma &= (\phi_c - \Omega) \cdot I \\ \rho &= \theta_c - I \\ \tau &= \psi_c + \phi_c - \Omega - F - 180^\circ \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

В результате описанных манипуляций нами были извлечены углы физической либрации (τ° , ρ° , $I\sigma^\circ$) изданных эфемериды DE421. Эти данные необходимы были нам для сравнения с результатами τ^0 , ρ^0 , $I\sigma^0$, рассчитанными по полуэмпирическим рядам (1), чтобы верифицировать корректность описанной методики. Расчёты для обоих типов параметров ФЛЛ были сделаны с интервалом

в 1 день на периоде в 200 лет. Качество полученных результатов определялось по поведению остаточных разностей $\Delta\tau = |\tau^c - \tau^0|$, $\Delta\rho = |\rho^c - \rho^0|$, $I\Delta\sigma = I \times |\sigma^c - \sigma^0|$, представленных на рис. 3.2.

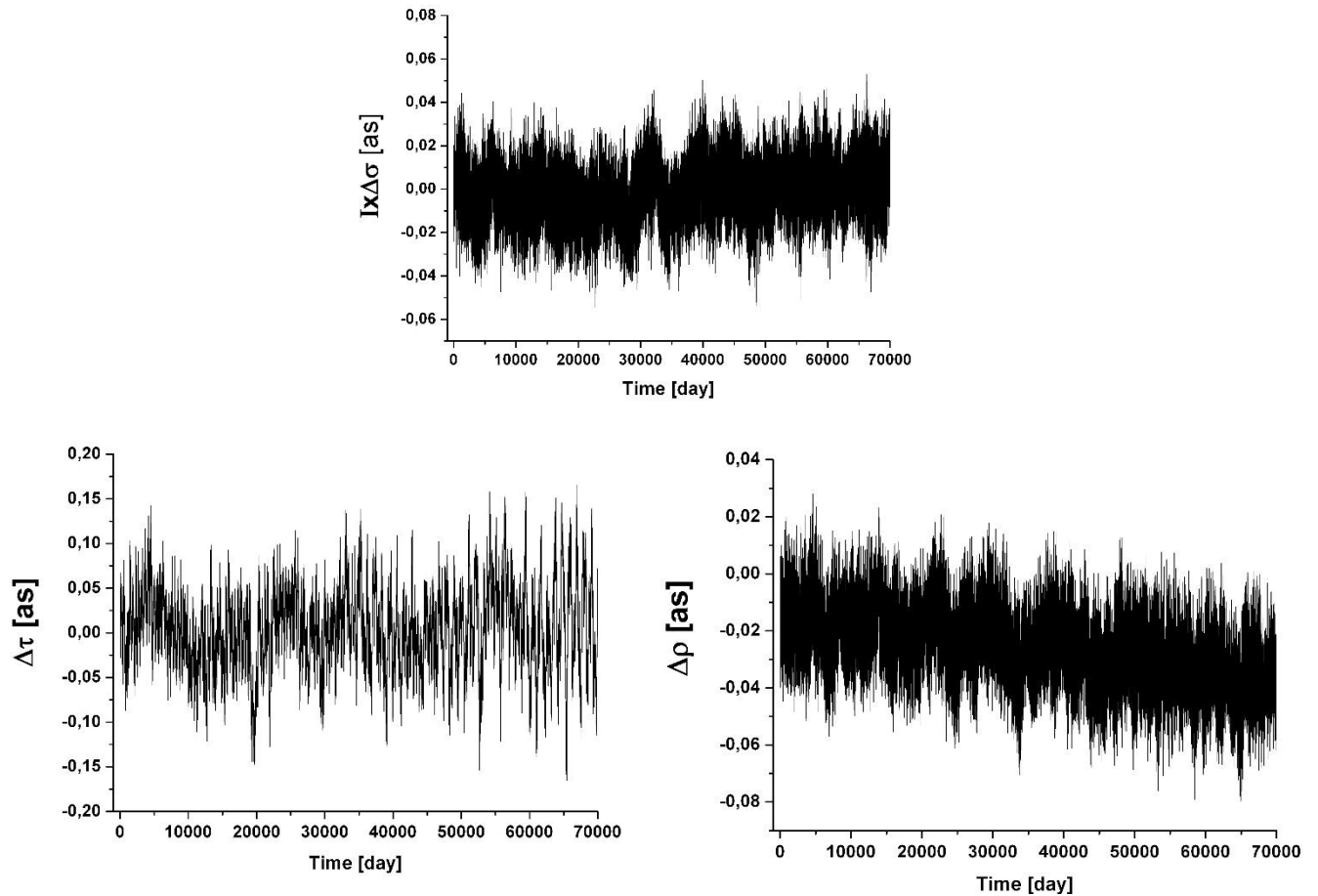


Рис 3.2. Представлены различия в углах либрации, $I\sigma$, ρ , τ , обнаруженные при сравнении данных, полученных из DE421, с данными, рассчитанными по рядам [86]

После анализа поведения полученных расхождений, было обнаружено, что различия с данными из работы [86] не превышают 20 миллисекунд дуги для всех трех углов. Однако, при исследовании либрации в наклоне на выбранном временном интервале, был обнаружен небольшой тренд в либрации наклона ρ , причина которого остаётся неизвестной. Однако, в пределах необходимой точности на данном этапе, полученные результаты подтверждают правильность применяемого нами алгоритма для работы с численной эфемеридой DE421 и корректный выбор значений параметров.

3.3.2 Оптимизация числовых параметров и констант при формировании начальных значений для численного решения уравнений ФЛЛ

Согласно требованиям задачи Коши для решения дифференциальных необходимо корректно определить начальные условия. Кроме того, в контексте данной диссертационной работы, где мы перешли к численной орбите эфемериды DE, требуется также согласовать параметры, константы и начальные значения для углов либрации и сопряжённых им импульсов с параметрами DE421 (см. Таблицу 8 в Приложении).

Теории физической либрации, представленная в данной диссертации, построена относительно эклиптики эпохи J2000, что важно учитывать, если нужно перейти к эклиптике текущей даты. Для этого нам понадобятся значения долготы восходящего узла Ω как на эклиптике эпохи J2000, так и на эклиптике эпохи наблюдения. Для расчёта долгот используются коэффициенты и значение угла наклона экватора Земли к эклиптике ε из Таблицы 9 Приложения.

Опишем алгоритм расчёта начальных условий для параметров физической либрации. Напомним, эфемерида DE421 описывает вращение Луны через традиционные углы Эйлера, по которым, как мы показали, можно вычислить параметры либрации τ , ρ и Iob . В нашей теории мы работаем с самолётными углами μ , ν и π (см. рис. 2.2) [12], которые определяют положение динамической системе координат – ДСК – относительно эклиптики. Для достижения согласования двух различных способов описания физической либрации, необходимо было разработать алгоритм, который и позволил получить корректные начальные значения для самолётных углов. Этот алгоритм обеспечивает переход от ДСК к эклиптике через μ , ν и π , а затем обратный переход - от эклиптики к ДСК, но уже через углы Эйлера (ψ , θ , ϕ). Здесь опять потребуются применить матрицы поворота как относительно углов Эйлера, так и относительно самолётных углов.

Используя соотношения [80, 86], определим углы широтной либрации ν , π :

$$\begin{aligned}
\sin(\nu) &= f(\psi_f, \theta_f) \\
\sin(\pi) \operatorname{ctg}(\nu) &= h(\psi_f, \theta_f) \\
f(\psi_f, \theta_f) &= \sin(\psi_f) \sin(\theta_f), g(\psi_f, \theta_f) \\
&= \cos(\psi_f) \sin(\theta_f) h(\psi_f, \theta_f) = \operatorname{ctg}(\psi_f),
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Здесь $P_1 = -\frac{g(\psi_f, \theta_f)}{h(\psi_f, \theta_f)}$, $P_2 = -f(\psi_f, \theta_f) \cdot h(\psi_f, \theta_f)$ – это направляющие косинусы полюса эклиптики J2000 В ДСК. Применяя правила для равенства матриц:

$$R_x(-\pi) \cdot R_y(\nu) \cdot R_z(\mu + \bar{L}) = R_z(\psi_c) \cdot R_x(-\theta_c) \cdot R_z(\phi_c),$$

получим следующие соотношения для либрации по долготе [16]:

$$\begin{aligned}
&\cos(\bar{q}_1) \cos(\bar{q}_2) \\
&= f(\psi_f, \theta_f) \operatorname{cosec}(\theta_f) \sin^2(\phi_f) \operatorname{tg}(\psi_f) \operatorname{sec}(\phi_f) \\
&\quad - f(\psi_f, \theta_f) \operatorname{cosec}(\theta_f) \sin(\phi_f) \cos(\theta_f), \\
&\sin(\bar{q}_1) \cos(\bar{q}_2) = \sin(\psi_f) \sin(\phi_f) [\operatorname{ctg}(\psi_f) + \cos(\theta_f) \operatorname{ctg}(\phi_f)],
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Здесь используется классическое определение средней долготы Земли \bar{L} в селеноцентрической системе координат:

$$\bar{L} = F + \Omega + 180^0 \tag{3.3.9}$$

Вычисленные разности $\Delta\mu = |\mu^{\text{Petrova}} - \mu^{421}|$, $\Delta\nu = |\nu^{\text{Petrova}} - \nu^{421}|$, $\Delta\pi = |\pi^{\text{Petrova}} - \pi^{421}|$, между решением, полученного по теории Н.К. Петровой, и решением, полученным в диссертации, представлены на рис. 3.3. Теория Петровой построена на аналитической теории движения лунного центра масс [59] и параметров лунного тела из модели Lure2 [65]. Наше численное решение построено на параметрах и решении модели DE421. Анализ входных параметров, представленных в таблицах в работах [80] и [86], показывает, что повышение точности в постоянных Стокса, описывающих гравитационное поле, вызывает постоянное смещение, равное 146.59 угловых секунд в μ , а также появление колебаний с амплитудой 4.07 и 4.08 угловых секунд в ν , π , соответственно, период которых составляет 27.212 суток. Следует отметить, что

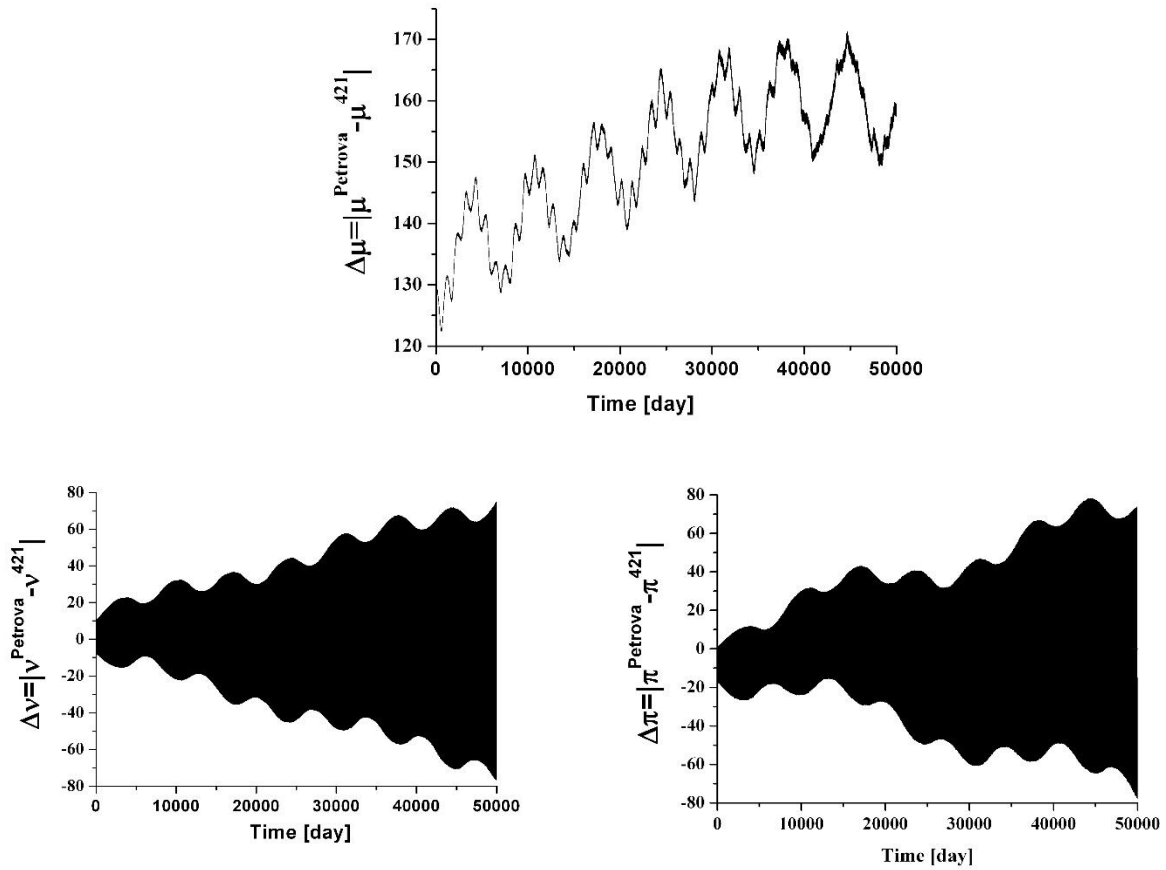


Рис. 3.3. Отличие параметров аналитической теории ФЛЛ [81] от численной эфемериды DE421

в динамике параметров ФЛЛ присутствуют флюктуации, обусловленные, с одной стороны, не стационарностью лунной орбиты вокруг Земли, и проявляющиеся при применении высокоточных теорий DE (с периодом 27.323 дней и амплитудой 47 сек дуги/столетие по широте) [61], и с другой стороны не относящиеся к положениям главной проблемы ФЛЛ. Также присутствуют флюктуации с периодом 99858.7 дней и амплитудой 14.62 сек дуги, обусловленные резонансных явлений между орбитами Луны и Венеры. Сжатая вследствие быстрого вращения форма Земли также вносит вклад в либрационные колебания по долготе, в результате появляются гармоники, период которых равен 6798.53 суток, а величина амплитуды составляет 7.76 угловых секунд. В либрации по широте обнаруживаются составляющие, возникающие вследствие косвенного эффекта сжатия Земли и движением плоскости эклиптики, период которого 27.32 суток и амплитудой 11.86 угловых секунд. Кроме того, обнаружены чандлероподобные

колебания по эллипсу с периодом 27257.27 суток и большими полуосями эллипса 3.31 и 8.18 угловых секунд.

Приведем вывод связи канонических сопряженных координат с производными от Эйлеровых углов путем дифференцирования соотношений (3.3.2–3.3.5) полученных ранее, опубликованный в статье [17]:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \dot{R}_3(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{r}_2 &= (\dot{R}_3(-\phi, -\dot{\phi})R_1(-\theta)R_3(-\psi) + \\ &+ R_3(-\phi)\dot{R}_1(-\theta, -\dot{\theta})R_3(-\psi) + R_3(-\phi)R_1(-\theta)\dot{R}_3(-\psi, -\dot{\psi}))\bar{r}_1, \\ \dot{r}_{MM} &= R_1(\varepsilon_0)\dot{r}_2, \\ \dot{\Omega} &= \frac{[\dot{z}_{MM} \times \bar{k}][\bar{z}_{MM} \times \bar{k}] - \frac{[\bar{z}_{MM} \times \bar{k}]}{||[\bar{z}_{MM} \times \bar{k}]||} ([\bar{z}_{MM} \times \bar{k}] \cdot [\dot{z}_{MM} \times \bar{k}])}{||[\bar{z}_{MM} \times \bar{k}]||^2} \\ -\dot{\phi}_f \sin(\phi_f) &= \langle \bar{i} \cdot \dot{\Omega} \rangle, \\ -\dot{\theta}_f \sin(\theta_f) &= \langle \bar{k} \cdot \dot{z}_{MM} \rangle, \\ -\dot{\psi}_f \sin(\psi_f) &= \langle \dot{\Omega} \cdot \bar{x}_{MM} \rangle + \langle \bar{\Omega} \cdot \dot{x}_{MM} \rangle, \\ \dot{q}_2 \cdot \cos(\bar{q}_2) &= \dot{\psi}_f \cos(\psi_f) \sin(\theta_f) + \dot{\theta}_f \cdot b_1(\psi_f, \theta_f), \\ \dot{q}_3 \cdot \cos(\bar{q}_3) \cos(\bar{q}_2) - \dot{q}_2 \cdot \sin(\bar{q}_3) \sin(\bar{q}_2) &= -\dot{\psi}_c \cdot f(\psi_f, \theta_f) + \\ &+ \dot{\theta}_f b_2(\psi_f, \theta_f), \\ \dot{q}_1 \cdot \cos(\bar{q}_1) \cos(\bar{q}_2) - \dot{q}_2 \cdot \sin(\bar{q}_1) \sin(\bar{q}_2) &= -\dot{\psi}_f \sin(\psi_f) \sin(\phi_f), \\ &+ \dot{\phi}_f \cos(\psi_f) \cos(\phi_f) + \dot{\psi}_f b_2(\psi_f, \theta_f) \cos(\phi_f) - \\ &- \dot{\theta}_f f(\psi_f, \theta_f) \cos(\phi_f) - \dot{\phi}_f b_1 \sin(\phi_f), \\ b_1(\psi_f, \theta_f) &= \sin(\psi_f) \cos(\theta_f), \\ b_2(\psi_f, \theta_f) &= \cos(\psi_f) \cos(\theta_f), \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

здесь угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают скалярное произведение

Следует отметить, что в теории ФЛЛ, построенной с применением канонических уравнений Гамильтона, используются импульсы, а не скоростные параметры. Для вывода канонических импульсов \tilde{p}_1, p_2, p_3 , взаимосвязанных с переменными M, ν, π , применяются математические выражения (2.1.2) и для твердой модели Луны кинетические уравнения энергии (2.2.3):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{M}} = -A\Omega_x \sin(\nu) - B\Omega_y \cos(\nu) \sin(\pi) + C\Omega_z \cos(\nu) \cos(\pi) \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}} = B\Omega_y \cos(\pi) + C\Omega_z \sin(\pi) \\ p_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}} = -A\Omega_x \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Импульс p_1 , сопряжённый переменной μ , находим через каноническое преобразование [80]:

$$p_1 = \tilde{p}_1 - C \cdot n = \tilde{p}_1 - C \cdot \dot{L} = \tilde{p}_1 - C \cdot (\dot{F} + \dot{\Omega}) \quad (3.3.12)$$

Соответственно, из выражений (3.3.11) и (3.3.12) возможно определить базовые значения канонических импульсов. В итоге появляется возможность выведенных из эфемериды DE421 базовых значений параметров ФЛЛ μ^0, ν^0, π^0 и взаимосвязанных с ними импульсов p_1^0, p_2^0, p_3^0 выполнить численное интегрирование полученных уравнений ФЛЛ, а также провести тестирование полученных параметров $\mu(t), \nu(t), \pi(t)$ сравнением с данными работы [86].

При написании данной главы диссертации использованы публикации 5-7 из списка публикаций автора по теме диссертации.

ГЛАВА 4 ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ГЛАВНОЙ ПРОБЛЕМЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Данная глава посвящена анализу результатов построенной нами численной теории ФЛЛ путём сравнения с данными теории Н.К. Петровой (в рамках главной программы) и с данными эфемериды DE421. В ходе исследования анализируется вклад от каждого эффекта, уточняющего модель главной проблемы. Показано, что включение 4-ой гармоники в формулу селенопотенциала существенно сказывается на результатах. Эта гармоника, аналогично третьей гармонике, вызывает постоянное смещение в либрации по долготе. Величина вклада небольшая, но при современных точностях наблюдений уже достаточно заметная. Затем был выполнен анализ вклада прямого влияния планет через вторую гармонику. Показано, что данный вклад является незначительным, в отличие от косвенного влияния через изменение орбиты Луны. В заключение подробно рассматривается приливной вклад в либрацию Луны. Оказывается, что уменьшение амплитуды в остаточных разностях на один порядок обусловлено изменением не компонент тензора инерции Луны, а коэффициентов Стокса 2-го порядка. Безусловно, понятия «компоненты тензора инерции» и «коэффициенты Стокса» по смыслу идентичны, но в уравнениях Гамильтона они разделены. Тензор инерции описывает тело Луны, а коэффициенты Стокса входят в возмущающий потенциал. И таким образом, делается вывод, что наличие разной модели потенциала в сравниваемых теориях вызывает рост амплитуды в остаточных разностях, и главным образом эта разница проявляется на частотах, близких к собственным частотам системы.

4.1 Анализ результатов с использованием твердотельной модели

Построенная теория ФЛЛ (2.2.13) с применением Гамильтонова подхода решалась численным способом. Для численного интегрирования использовался метод Рунге-Кутты. Интегрирование выполнялось для периода 150 лет с шагом 0.1

суток до 10-го порядка точности. Используемые постоянные приведены в Табл. 9 Приложения. Начальные данные для интегрирования системы Гамильтона на момент J2000 приведены в Табл. 10 Приложения. Они были получены на основе аналитической теории [80].

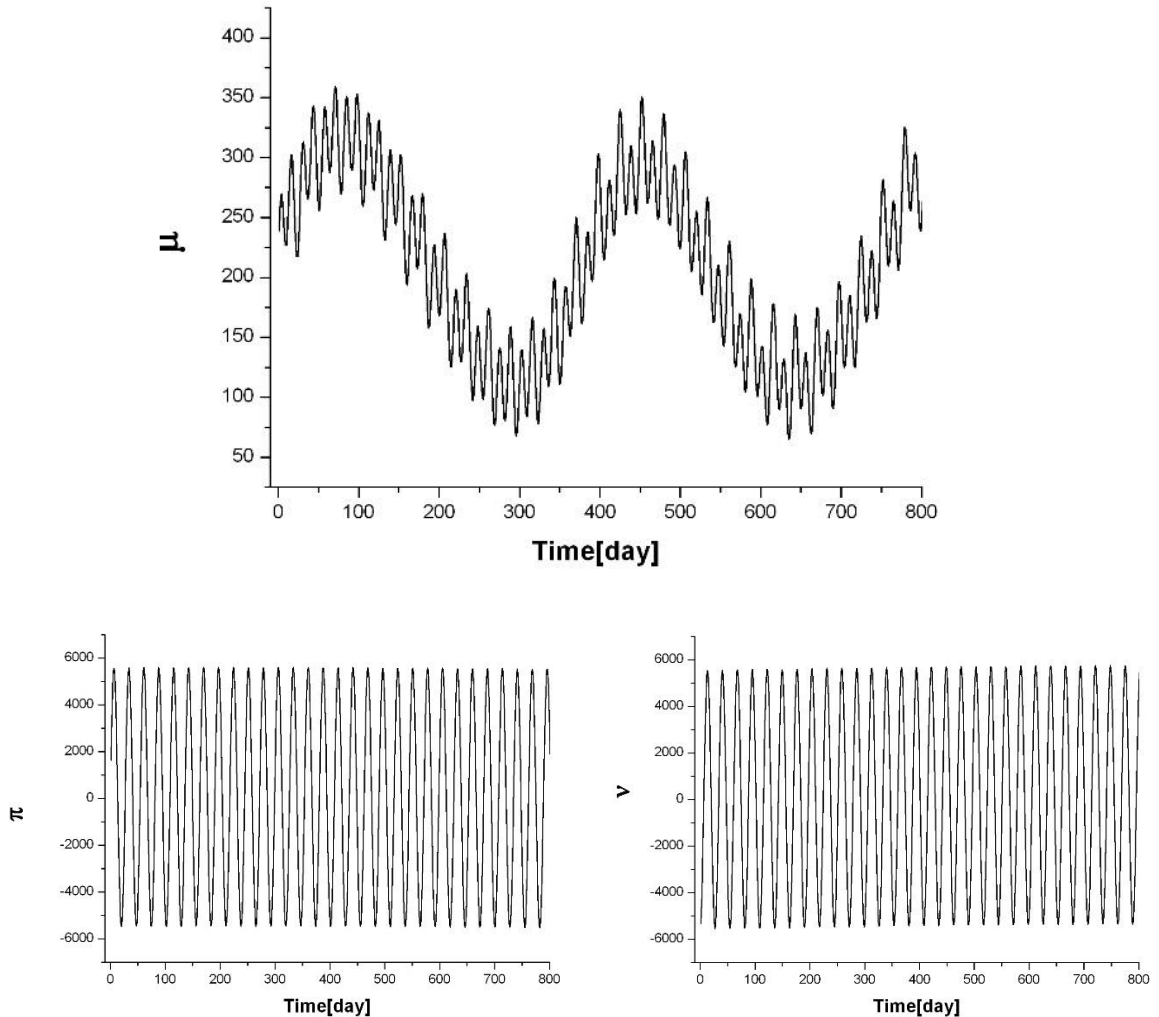


Рис 4.1 Решение главной проблемы в долготе (μ) и в широте (ν , π), выраженных в угл. сек.

Для выявления точности полученного решения вычислим остаточные разности между нашим решением и решением аналитической теории [80], которая имеет аналогичную теоретическую модель – модель главной проблемы на основе гравитационной теории LURE2 с точностью 0.01 угловой секунды.

Решение системы Гамильтона (2.2.13) имеет периодический характер, на рис. 4.1 представлены результаты численного интегрирования. Для лучшей наглядности интервал интегрирования составил 2 года.

Следует отметить, что в либрации по долготе присутствует постоянное слагаемое, равное примерно 250 угловым секундам, вызванное грушевидной формой Луны и описывающееся третьей гармоникой в разложении гравитационного потенциала Луны в ряд по сферическим функциям.

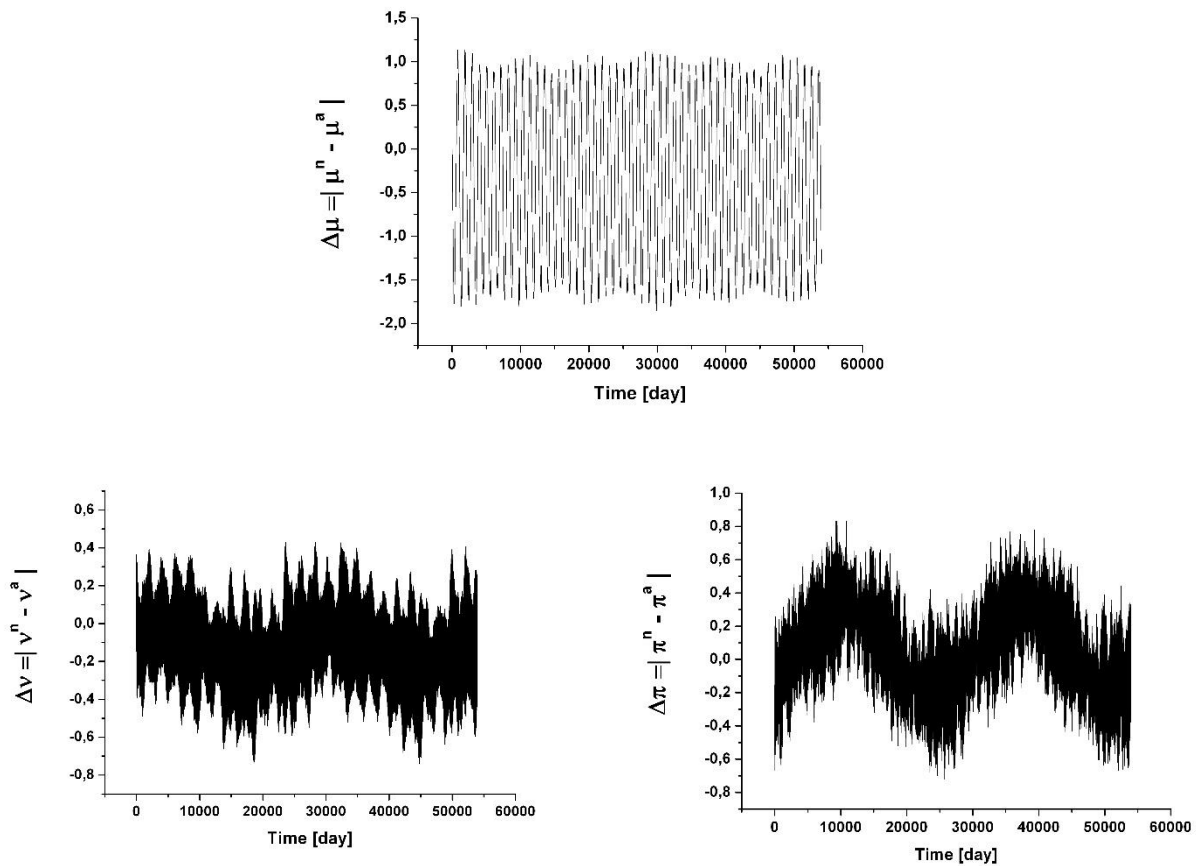


Рис 4.2 Остаточные разности параметров ФЛЛ μ , ν , π , в сек. дуги.

График изменения либрации по широте менее информативен. Во-первых, обе компоненты имеют сдвиг друг относительно друга на 90 градусов по фазе, во-вторых, гармоника с частотой F , обусловленная ретроградным движением лунного узла, и имеющая драконический период, подавляет собой все другие составляющие, что осложняет визуальный анализ. Амплитуда данной компоненты соответствует колебанию угла наклона между плоскостью эклиптики и лунным экватором, равного примерно 1.5 градусам или 5500 угловым секундам

Приведем остаточные разности (численное минус аналитическое) решений $\Delta\mu = |\mu^n - \mu^a|$, $\Delta\nu = |\nu^n - \nu^a|$, $\Delta\pi = |\pi^n - \pi^a|$ на интервале около 150 лет (рис. 4.2). На всем промежутке интегрирования величина остаточной разности не превосходит по абсолютной величине 1.7 угловых секунды в либрации по долготе и 0.6 угловой секунды в широтных компонентах углах либрации Луны. Отметим, что подобная работа была выполнена ранее Ерошкиным Г.И. [54], который провел сравнение своего численного решения ФЛЛ на промежутке 80 лет с аналитическим решением Eckhardt [53] (рис. 4.3) и Moons [74] (рис. 4.4). На рисунках приведены остаточные разности только по долготе.

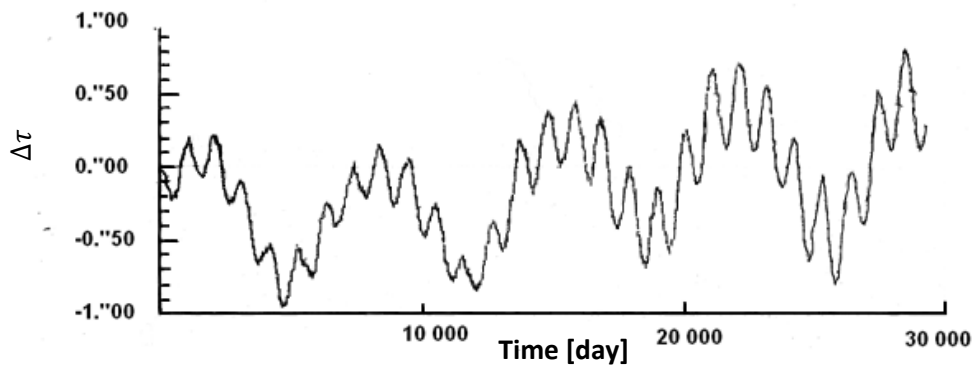


Рис 4.3 Результаты сравнения численного решения Ерошкина с аналитическим решением Eckhardt в долготе. По оси ординат остаточные разности в угл. сек., а по оси абсцисс время

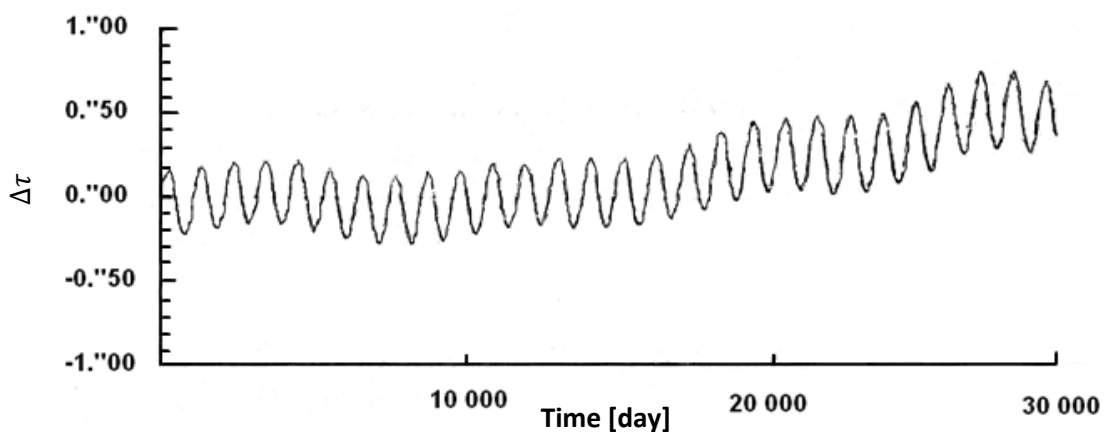


Рис 4.4 Результаты сравнения численного решения Ерошкина с аналитическим решением Moons в долготе. По оси ординат остаточные разности в угл. сек., а по оси абсцисс время

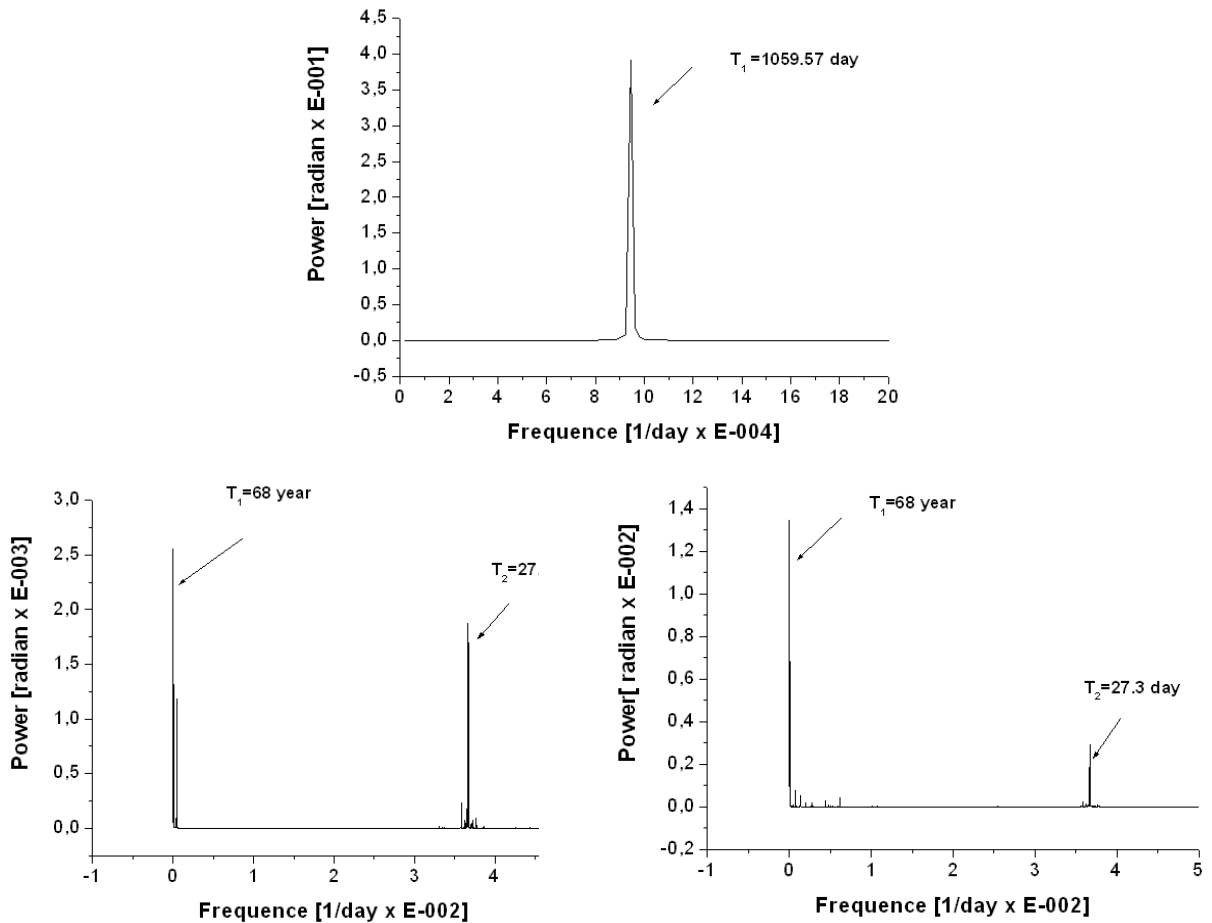


Рис 4.4 Частотные зависимости остаточных разностей, описанных выше

В работе [54] были проанализированы остаточные разности между различными решениями ФЛЛ и получено, что расхождения происходят на частотах, близких к собственным частотам системы. Также был рассмотрен вопрос, почему расхождения происходят именно на таких частотах, и после тщательного анализа аналитических работ сделан вывод, что при построении решения аналитическим путем возникают сложности при работе именно с этими частотами. Как правило, при построении аналитической теории решение ищется в виде гармонического осциллятора, и амплитуда тригонометрической функции представляет собой дробь, в которой в знаменателе находится разность квадратов возмущающей частоты и свободной частоты. Таким образом, при построении аналитического решения вблизи свободных частот точность теории становится ниже, а амплитуда получается завышенной. Именно этот факт не позволяет осуществить простое сравнение двух теорий ФЛЛ. Когда в предыдущих главах упоминалось, что

точность аналитической теории Петровой Н.К. составляет 0.01 секунды дуги, подразумевалась не точность теории в целом, а точность отдельных гармоник, за исключением тех, которые имели частоты близкие к собственным.

Убедимся в том, что и в полученных остаточных разностях (4.2) присутствуют частоты, близкие к собственным. Для этого следует провести гармонический Фурье анализ [39] (рис. 4.4). С этой целью была написана соответствующая функция, реализующая данную процедуру.

На рис. 4.4 можно найти частоты, близкие к свободным частотам системы, аналогичные найденным в работе [54]: первая из них имеет период около 3 лет, вторая – 68 лет, третья – 27.3 дня. Использование различных динамических моделей будет давать значения, несколько отличающиеся по своей величине. Однако период в 68 лет отличается от теоретического значения, полученного в работе [83], поэтому в дальнейшем необходимо продолжение исследований для решения данной проблемы. В заключение можно сделать вывод, что в целом результаты анализа, выполненного в данном диссертационном исследовании, близки к результатам, полученным в работе и [54], что является дополнительным свидетельством корректности построенной модели ФЛЛ и метода численного интегрирования.

4.2 Вклад 4-ой гармоники селенопотенциала в решение ФЛЛ

Используя формулы для разложения селенопотенциала по сферическим функциям, можно приближенно оценить вклад гармоник высоких порядков относительно гармоники второго порядка: $\frac{U_3}{U_2} \sim 3 \cdot 10^{-4}$, $\frac{U_4}{U_2} \sim 3 \cdot 10^{-6}$, $\frac{U_5}{U_2} \sim 2 \cdot 10^{-8}$. Полученные значения показывают, что чем выше порядок гармоники, тем существенно меньшим является её вклад в общий потенциал. Следует отметить, что учет U_4 является важным для современных исследований. После верификации уравнения для четвертой гармоники (2.2.28), данная компонента была включена в гамильтониан, а затем было проведено сравнения полученного решения для μ_4 , ν_4 , π_4 с решением для μ , ν , π , без учёта этой гармоники.

Полученные остаточные разности $\Delta\mu = |\mu_4 - \mu|$, $\Delta\nu = |\nu_4 - \nu|$, $\Delta\pi = |\pi_4 - \pi|$ представлены на рис. 4.5. Анализируя их поведение, можно заметить, что влияние 4-ой гармоники на либрацию по долготе проявляется в виде постоянного смещения на -0.855 сек дуги, или если использовать регрессионный анализ для повышения точности, согласно выражению $y = -0.855 - 6.4 \cdot 10^{-6}t$.

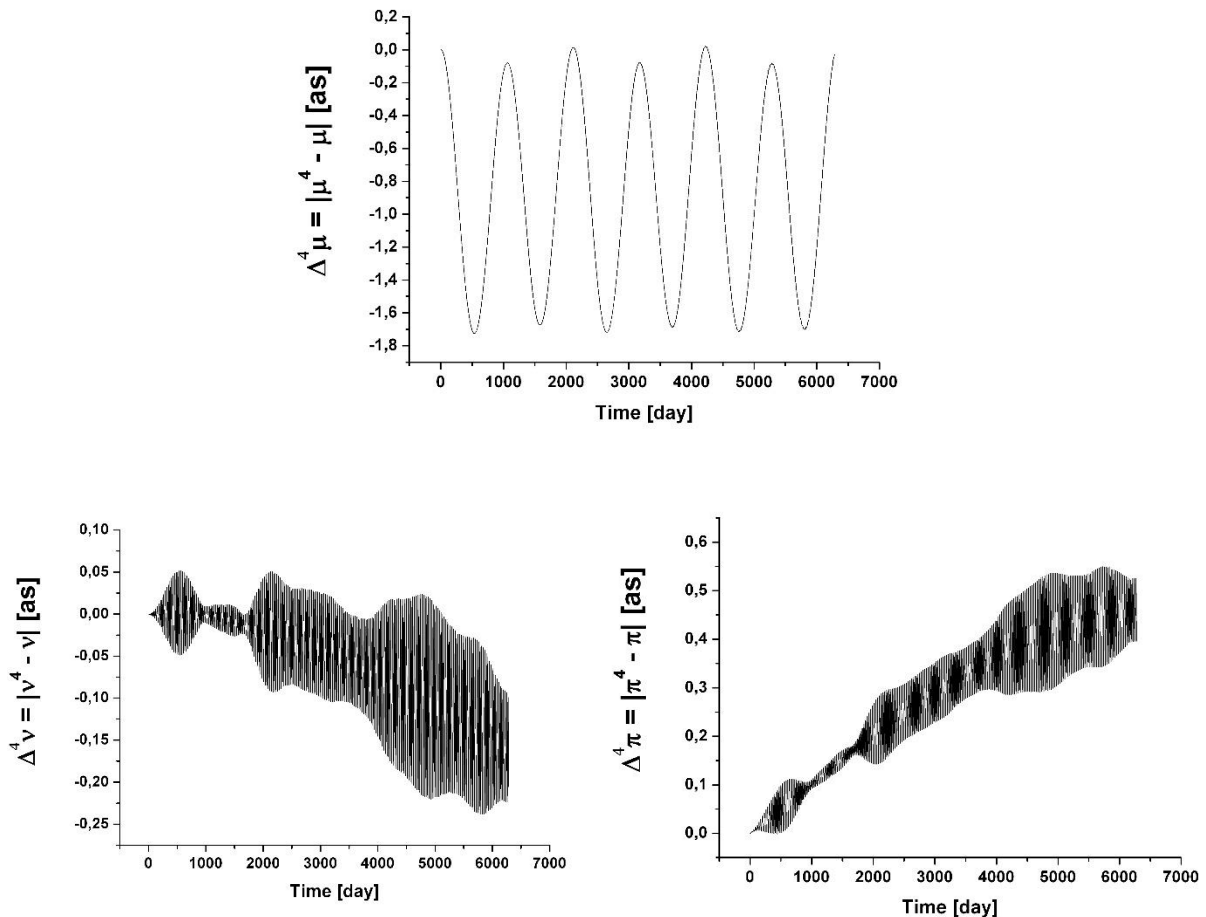


Рис. 4.5 Вклад 4-ой гармоники в решение ФЛЛ

Также в остаточных разностях присутствуют флюктуации с периодом 1056 суток и амплитудой 0.9 угловых сек. (рис. 4.6). Предыдущие наши исследования показали идентичный вклад в ФЛЛ гармоники U_3 [10], обязанной «грушевидности» лунной структуры. Согласно «грушевидности» формы Луны возникают флюктуации порядка 200 угловых сек. в восточном направлении от линии Луна – Земля. Также флюктуации в два раза слабее

вызывает гармоника U_4 относительно оси x . Вклад гармоники U_4 в ФЛЛ наиболее заметен в долготные параметры, чем в широтные и вызывает долгопериодические колебания неизвестной природы.

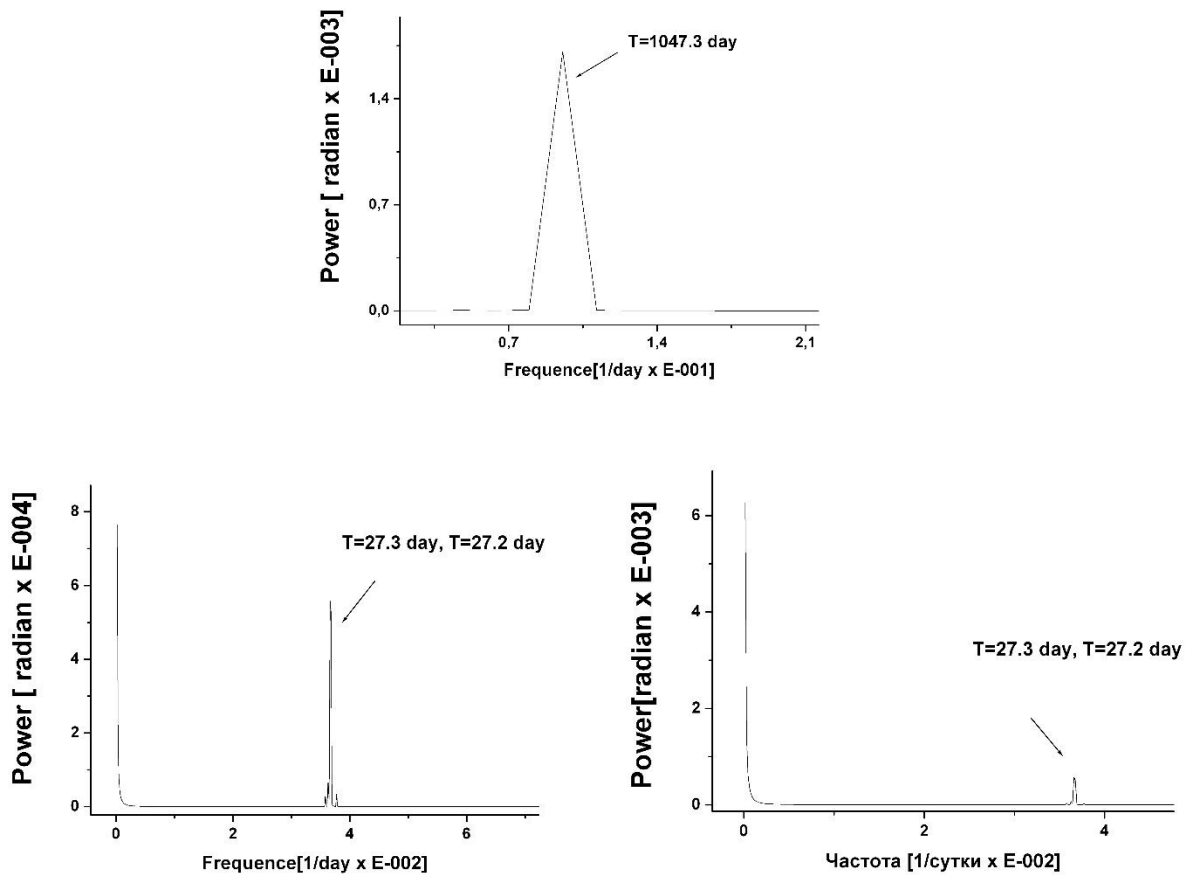


Рис 4.6 Частотная зависимость в остаточных разность для вклада 4-ой гармоники для μ , ν ,

π

Таким образом при включении гармоники 4-го порядка в рамках главной проблемы получено существенное на уровне современных требований количественное и качественное улучшение точности решения уравнений ФЛЛ. Следовательно, найден ещё один фактор, позволяющий улучшить точность разрабатываемой теории.

4.3 Анализ влияния на ФЛЛ прямого и косвенного возмущения от планет

Рассмотрим суть косвенных возмущений от планет. Они возникают из-за того, что центр масс Луны подвержен гравитационному взаимодействию с испытывает возмущения со стороны планет. И, если для аналитической теории орбитального движения [59] этот эффект никак не был учтён, то численная эфемерида DE421 включает не только возмущения от планет, но и даже от астероидов. В главе III мы обосновали корректность выполненного нами перехода на динамическую эфемериду, что фактически привело к автоматическому учёту и косвенного влияния планет как на движение центра масс, так и на физическую либрацию.

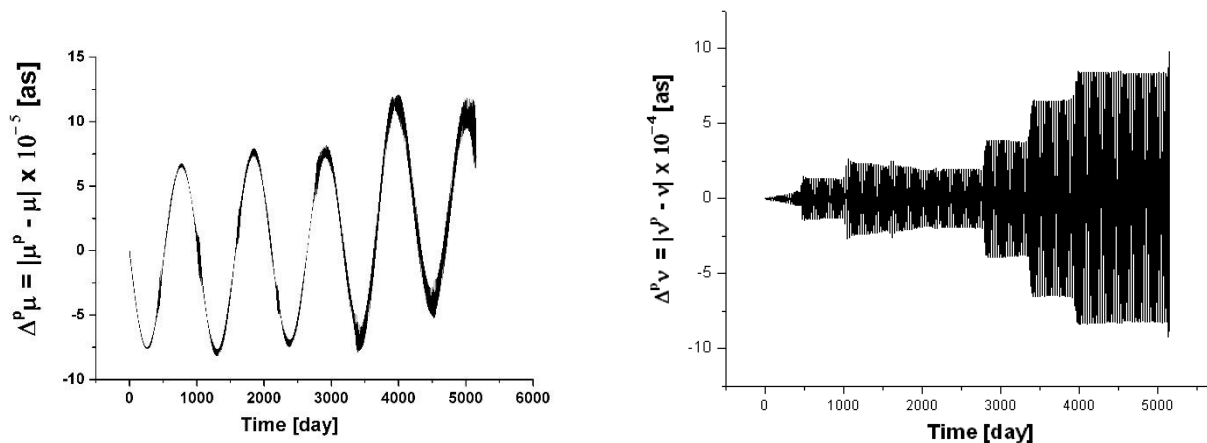


Рис. 4.7 Оценка влияния на ФЛЛ прямого взаимодействия тела Луны с Венерой и Юпитером.

Задача рассмотрения прямого гравитационного взаимодействия тела Луны с планетами была решена путём включения этого фактора в выражение для второй гармоники потенциала в [106]. С учётом малости масс планет и удалённости их от системы Земля-Луна, нами были рассмотрено влияние только Венеры, как близкого и относительного массивного тела, и Юпитера, удалённого от Земли, но имеющего очень большую массу.

В [106] мы представили численное решение для μ , ν , π , полученное без учёта прямого воздействия от планет, а также решение μ^p , ν^p , π^p , в котором это

взаимодействие учтено. Влияние прямых возмущений оценивалось по анализу остаточных разностей $\Delta\mu^p = |\mu^p - \mu|$, $\Delta\nu^p = |\nu^p - \nu|$, $\Delta\pi^p = |\pi^p - \pi|$, поведение которых со временем представлено на рис. 4.7 (для $\Delta\pi^p$. результаты аналогичны $\Delta\nu^p$, отличаются только по фазе)

Поведение остаточных разностей показывает, что прямые возмущения от планет дают вклад в углы ФЛЛ не более долей миллисекунды, что на данном уровне наблюдательной точности невозможно выявить. Полученный результат хорошо согласуется с выводами независимого исследования [47], что подтверждает правильность выполненных нами расчётов и сделанных на их основе выводов.

4.4 Решение вопроса о влиянии на физическую либрацию приливной деформации лунного тела

Современные наблюдения Луны [52, 96, 98] дают неоспоримые доказательства тому, что тело нашего спутника не является абсолютно твёрдым. Поэтому модель лунного тела, закладываемая в теорию ФЛЛ обязана учитывать эффекты от деформации Луны вследствие вращения и приливного трения. И теоретически, и практически уже было доказано [93, 97], что вследствие твердотельных приливов поверхность луны «дышит» с амплитудой $\sim \pm 10$ см в месяц. Неоспоримые доказательства существования упругих деформаций разной природы были получены в результате миссии GRAIL [67].

Построение приливного потенциала — это сложная и трудоёмкая задача. В данном диссертационном исследовании, направленном на разработку собственной теории ФЛЛ, как инструмента всестороннего исследования Луны, мы в качестве первого приближения для учёта деформаций лунного тела взяли метод усреднённых постоянных деформаций в значениях главных моментов инерции и коэффициентах Стокса 2-го порядка. Значения усреднённых деформаций были получены в работе [98] на основе обработки многолетних данных лазерной локации Луны.

Суть метода учёта усреднённых приливных деформаций состоит в следующем.

Для твёрдой Луны справедливы следующие соотношения между главными моментами инерции A , B , C и их безразмерными аналогами:

$$A = \frac{1 - \beta\gamma}{1 + \beta}, \quad B = \frac{1 + \gamma}{1 + \beta}, \quad \frac{C}{mR_{Rigid}^2} = \frac{-2 \cdot c_{20}(1 + \beta)}{2\beta - \gamma + \beta\gamma}. \quad (4.5.1)$$

Обозначим нормированный главный момент инерции $\overline{C}_r = \frac{C}{mR^2}$. Поправки за деформацию $\Delta A(k_2, s)$, $\Delta B(k_2, s)$, $\Delta C(k_2, s)$, ΔC_{20} , ΔC_{22} мы вычисляли по коэффициентам k_2 и сферического члена s , представленным в Таблице 8 Приложения. В результате, изменения в характеристиках лунного тела вследствие деформации будут записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= A_{Rigid} + \frac{\Delta A(k_2, s)}{\overline{C}_r} \\ B &= B_{Rigid} + \frac{\Delta B(k_2, s)}{\overline{C}_r} \\ C &= C_{Rigid} + \frac{\Delta C(k_2, s)}{\overline{C}_r} \\ C_{20} &= C_{20Rigid} + \Delta C_{20} \\ C_{22} &= C_{22Rigid} + \Delta C_{22} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Значения числа Лява k_2 и сферического члена s представлены в Таблице 8 Приложения.

Осуществив интегрирование уравнений ФЛЛ (2.2.13) с уточнёнными значениями главных моментов инерции и коэффициентов Стокса, было получено решение, которое обеспечивает существенно меньшие отклонения в остаточных разностях при сравнении с DE421. Для интерпретации полученных результатов

рассмотрим по отдельности влияние приливных добавок к каждому из параметров, перечисленных в Табл. 8 Приложения, а именно:

1. Вклад прилива в параметры твердого тела (диагональные элементы тензора инерции A, B, C и коэффициенты Стокса s_{20}, s_{22});
2. Вклад прилива в коэффициенты Стокса s_{21}, s_{22} , ответственные за несовпадения системы координат с осями инерции Луны. Расчет 2-ой гармоники селенопотенциала в общем виде. Стоит обратить внимание, что использование разнотипных данных (коэффициентов Стокса и параметров β, γ , выраженных через комбинацию моментов инерции) приводит к достаточно большой ошибке [80];
3. Вклад прилива в недиагональные элементы тензора инерции Луны.

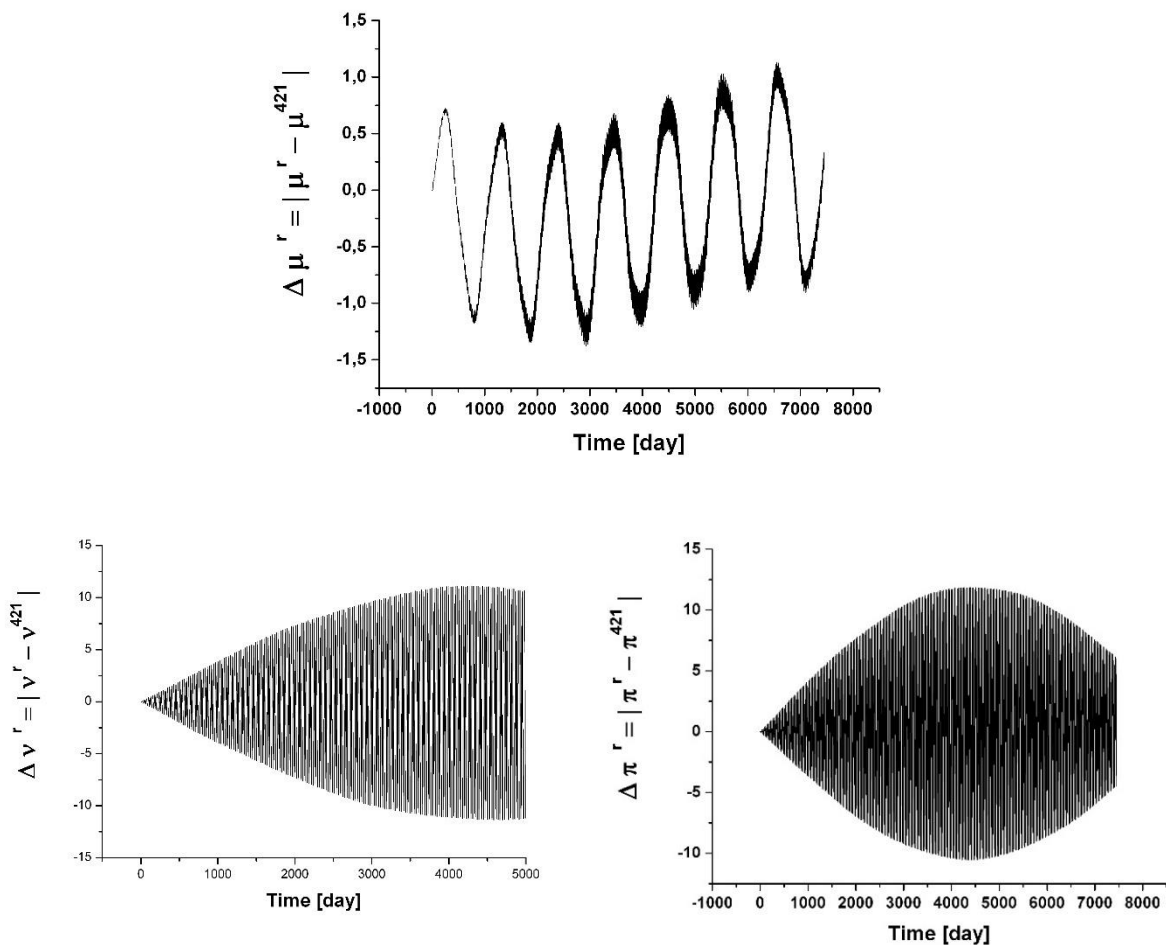


Рис 4.8. Остаточные разности в угл. сек. с DE без учета приливов: μ, ν, π

Напомним, что для каждой серии результатов необходимо заново получать начальные данные и, как следствие, согласно формуле (3.3.11), будут меняться канонические импульсы. При этом во всех вычислениях учитывались высшие гармоники селенопотенциала.

Для анализа была выполнена серия решений. Решение по модели твердого тела обозначим как $\mu^r(t)$, $v^r(t)$, $\pi^r(t)$, а решение, соответствующее модели DE421, обозначим как $\mu^{421}(t)$, $v^{421}(t)$, $\pi^{421}(t)$. Остаточные разности, приведенные на рис. 4.8 для модели твердого тела, обозначим как $\Delta\mu^r = |\mu^r - \mu^{421}|$, $\Delta v^r = |v^r - v^{421}|$, $\Delta\pi^r = |\pi^r - \pi^{421}|$. Соответствующие частотные зависимости показаны на рис. 4.9. Частоты в широте q_2 и q_3 практически идентичны, и поэтому на рис. 4.9 приведена зависимость только для угла q_2 .

Вначале были проанализированы остаточные разности в решении без учета приливов. К сожалению, можно видеть (рис 4.8), что расхождение между нашими результатами и данными DE421 существенно превышает требуемую точность: остаточные разности в долготе колеблются от -1.4 до 1.1 угл. сек., а в широте (q_2 , q_3) – от -12 до 11 и от -11 до 12 угл. сек., соответственно.

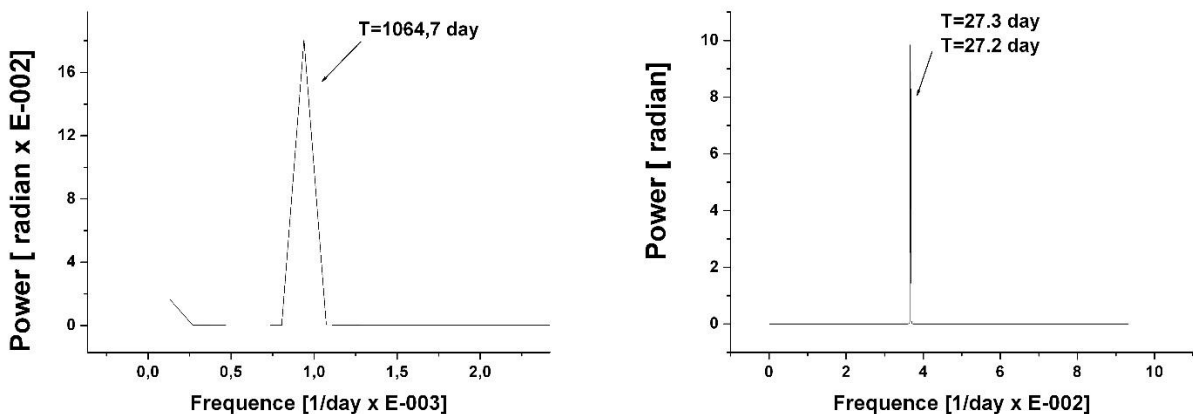


Рис 4.9. Частотная зависимость для долготы (μ) и широты(v)

Для улучшения решения было проведено интегрирование с учетом приливных эффектов. В первую очередь был проведен анализ учета вклада приливов к твердотельным компонентам тензора инерции Луны и к

коэффициентам Стокса c_{20} , c_{22} . Обозначим соответствующие остаточные разности индексом 1: $\Delta\mu_1$, $\Delta\nu_1$, $\Delta\pi_1$, которые приведены на рис. 4.10.

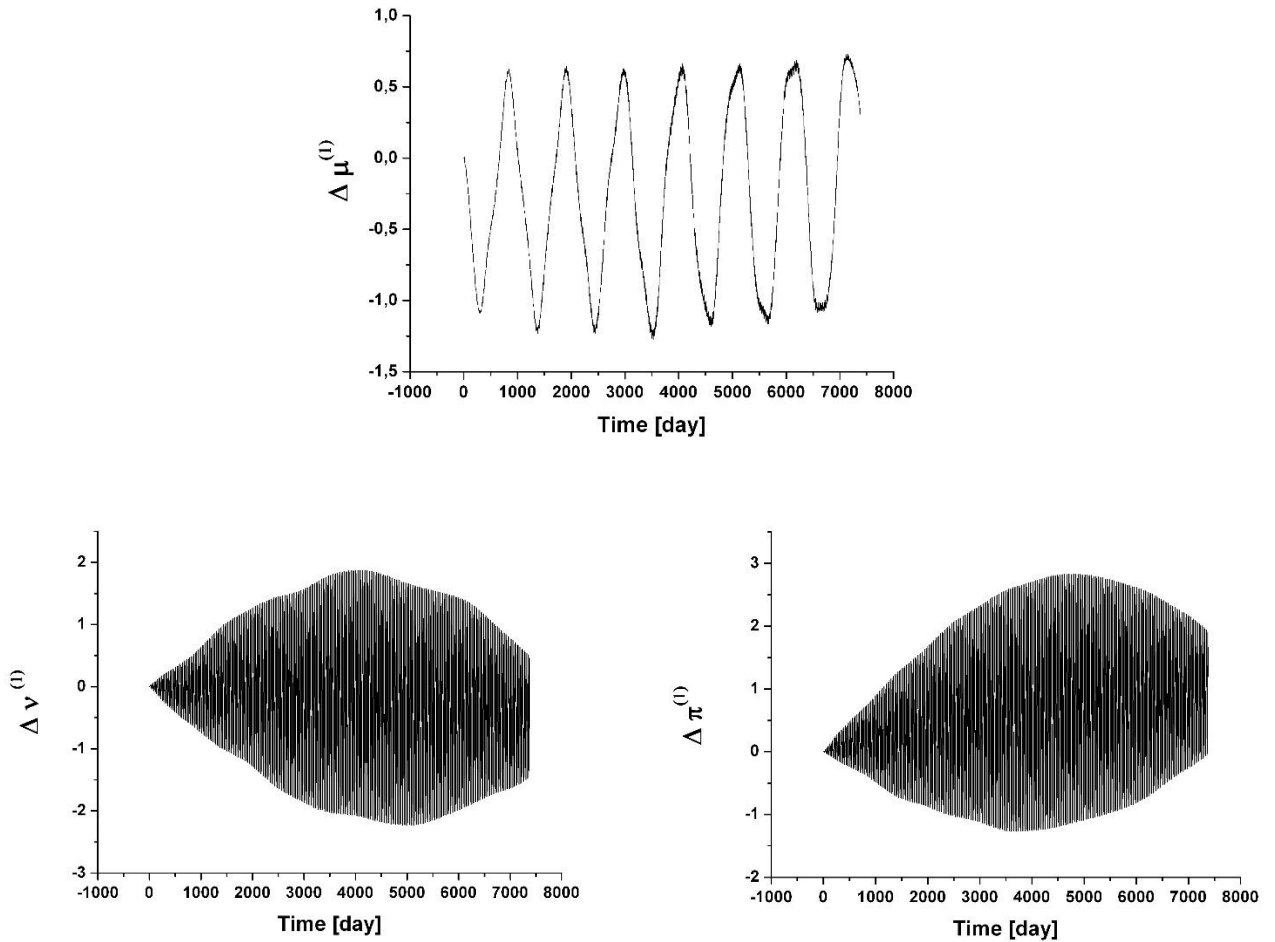


Рис 4.10. Остаточные разности в угл. сек. в долготе и в широте в сравнении с DE421 с учетом твердотельных приливов: q_1 , q_2 , q_3

Очевидно, что учет приливов почти на порядок улучшил результаты в либрации по широте. Амплитуды как долгопериодической компоненты, так и остальных частот остаточных разностей заметно уменьшились: в долготе расхождения лежат в пределах от -1.25 до 0.6 угл. сек., в широтных углах – для ν от -2.1 до 1.8 для π – от -1.3 до 2.8 угл. сек. соответственно. Далее был выполнен детальный анализ того, насколько существенно сказывается приливной эффект на точности из-за изменения параметров тензора инерции и коэффициентов Стокса. Выделим вклад от тензора инерции путем вычитания соответствующих решений

(до и после учета параметров прилива), обозначим полученную разность индексом (2): $\Delta\mu_2$, $\Delta\nu_2$, $\Delta\pi_2$. Из рис. 4.11 следует, что значимый вклад как в долготу, так и в широтные составляющие от добавок к тензору инерции отсутствует. Величина остаточной разности не превышает ± 0.8 миллисекунды в долготе, в широтных компонентах не превышает 0.05 угл. сек.

На рисунке 4.12 приведены остаточные разности, обусловленные добавками за прилив к коэффициентам Стокса (c_{20} , c_{22}). Обозначим полученные разности индексом (3): $\Delta\mu_3$, $\Delta\nu_3$, $\Delta\pi_3$. Поскольку приливные силы зависят от двух основных факторов – неоднородности по массе и удаленности от центрального тела [25, 26] – можно ожидать, что поправки к коэффициентам Стокса внесут существенный вклад в остаточные разности, что и наблюдается на рис. 4.12.

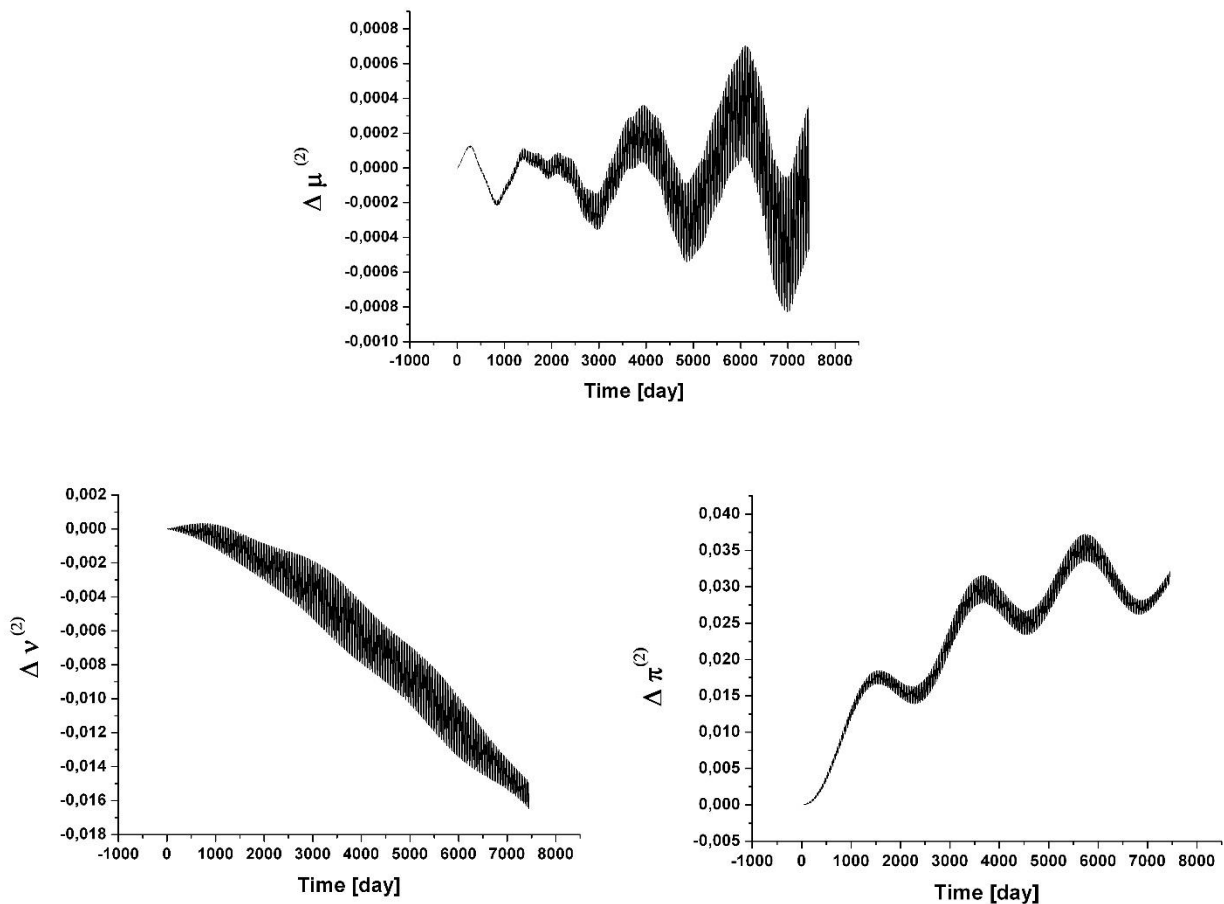


Рис. 4.11 Вклад в угл. сек. приливных добавок к тензору инерции Луны: $\mu - \nu - \pi$

Таким образом существенный вклад в точность теории вносится за счет изменения коэффициентов Стокса приливными силами, а влияние прилива через изменения главных компонент момента инерции Луны практически отсутствует. Соответственно, остаточные разности в долготе вследствие изменения коэффициентов Стокса приливными силами составили от -2 до 2 угл. сек., в широтных компонентах – от -10 до 9 угл. сек.

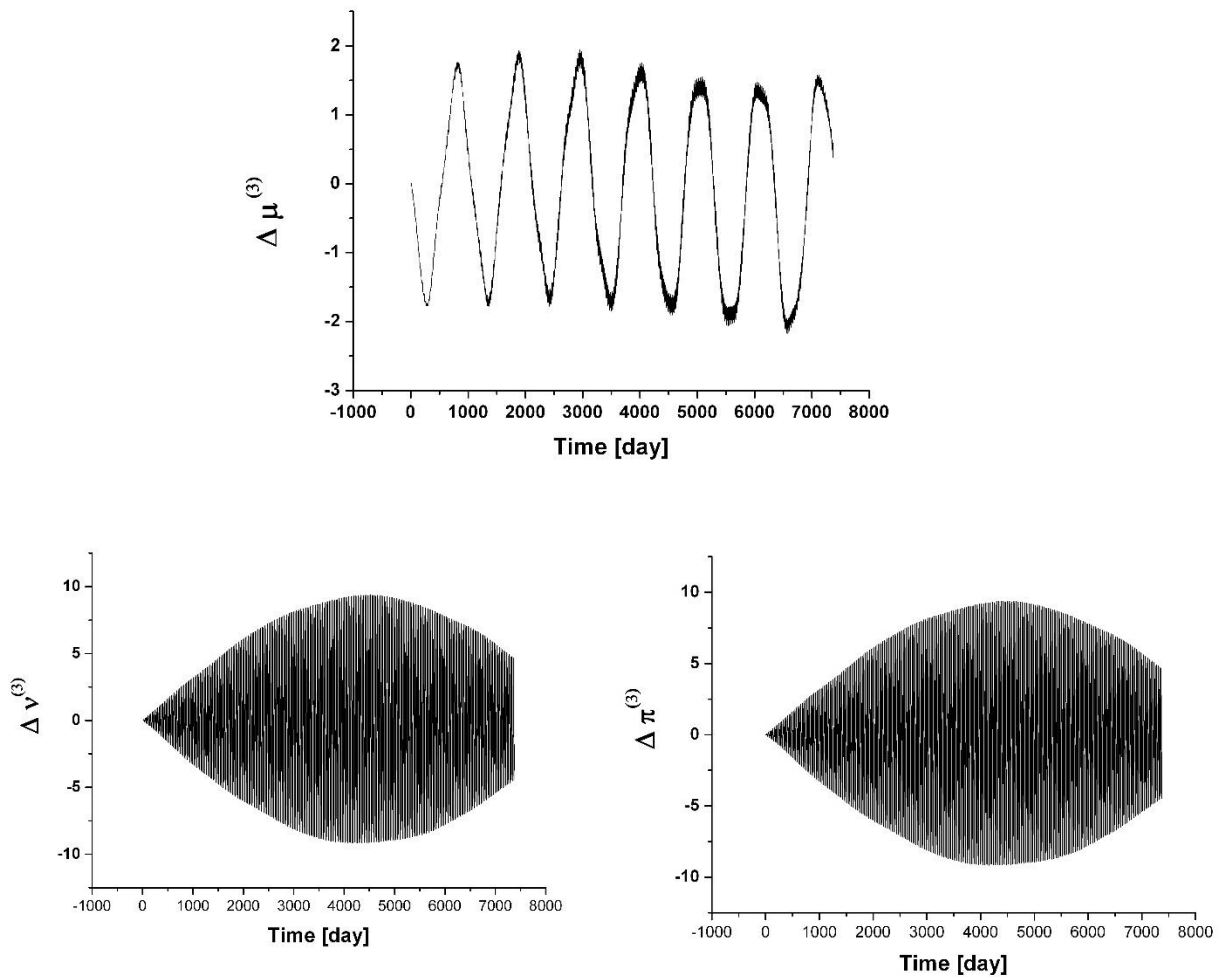


Рис. 4.12 Вклад в угл. сек. от добавок к коэффициентам Стокса (c_{20} , c_{22}): q_1 , q_2 , q_3

Далее было рассмотрено, как изменяется решение ФЛЛ при учете приливных добавок к коэффициентам Стокса c_{21} , s_{22} и к недиагональным компонентам тензора инерции Луны. Остаточные разности рассчитываются аналогично предыдущему подходу: строятся разности между решением с приливными

добавками и решением без них. Этот тип остаточных разностей обозначим индексом (4) – $\Delta\mu_4$, $\Delta\nu_4$, $\Delta\pi_4$. Расхождения в двух типах решений представлены на рис. 4.13 и составляют от 0 до 0.25 угл. сек. в долготе и 0.09 угл. сек. в широтных компонентах. Поскольку остаточные разности без учета прилива по либрации в долготе составляют порядка 1 угл. сек., то согласно рис. 4.13 можно сделать вывод, что суммарный вклад приливных поправок к коэффициентам Стокса s_{12} , s_{22} дает существенный вклад в либрацию по долготе. Помимо периодической составляющей с периодом около 3 лет наблюдается постоянный сдвиг, равный 0.12 угл. сек.. Вклад в либрацию по широте значимого эффекта данная приливная поправка не внесла.

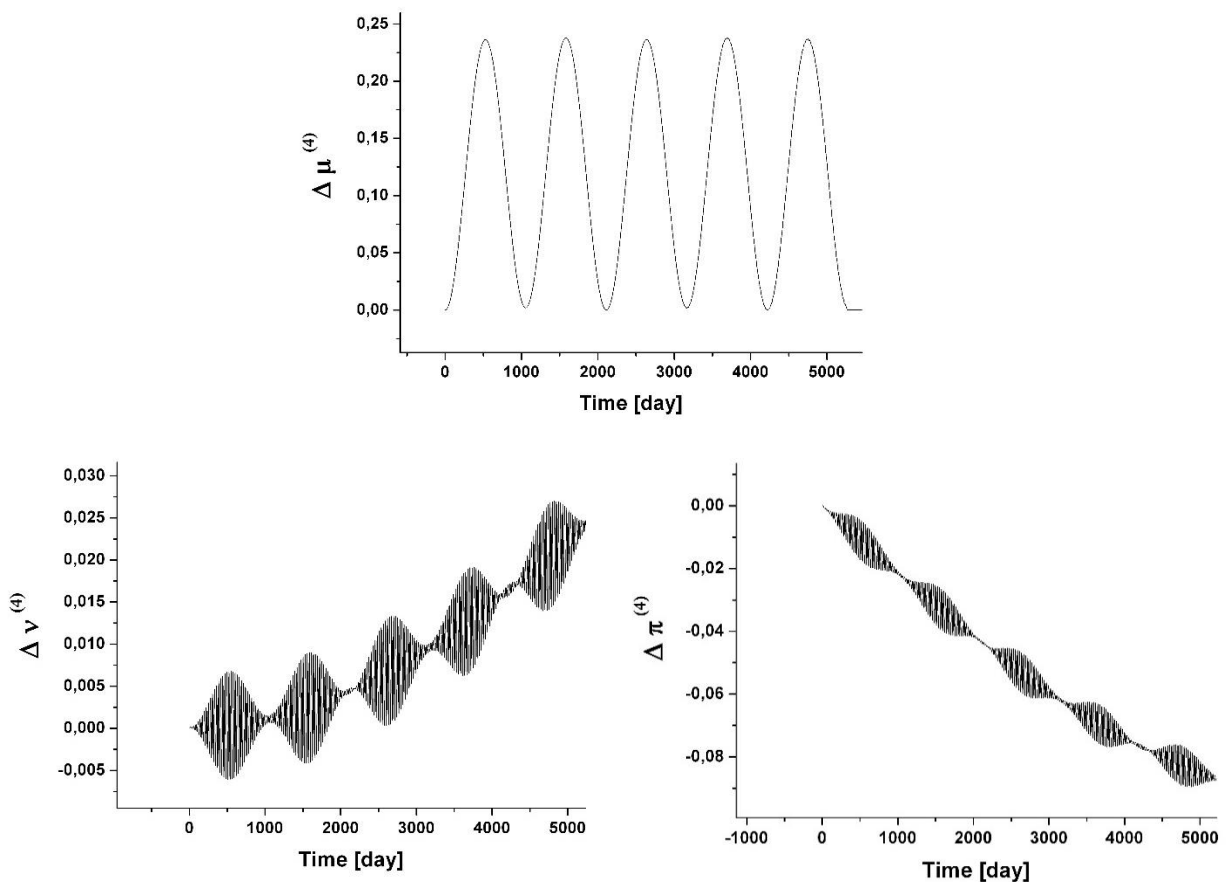


Рис. 4.13 Вклад в угл. сек. от коэффициентов Стокса s_{21} , s_{22} : q_1 , q_2 , q_3

Рассмотрим теперь вклад приливных поправок к недиагональным моментам тензора инерции Луны, которые приведены на рис. 4.14. Для их учета необходимо

было заново получить уравнения Гамильтона, теперь в общем виде, что и было сделано. Данные разности вклада прилива мы обозначаем индексом (5): $\Delta\mu_5$, $\Delta\nu_5$, $\Delta\pi_5$. Однако, как видно из рис. 4.14, амплитуда в долготе (q_1) составила десятые доли миллисекунды, а в широте (q_2, q_3) – 0.3 угл. сек.

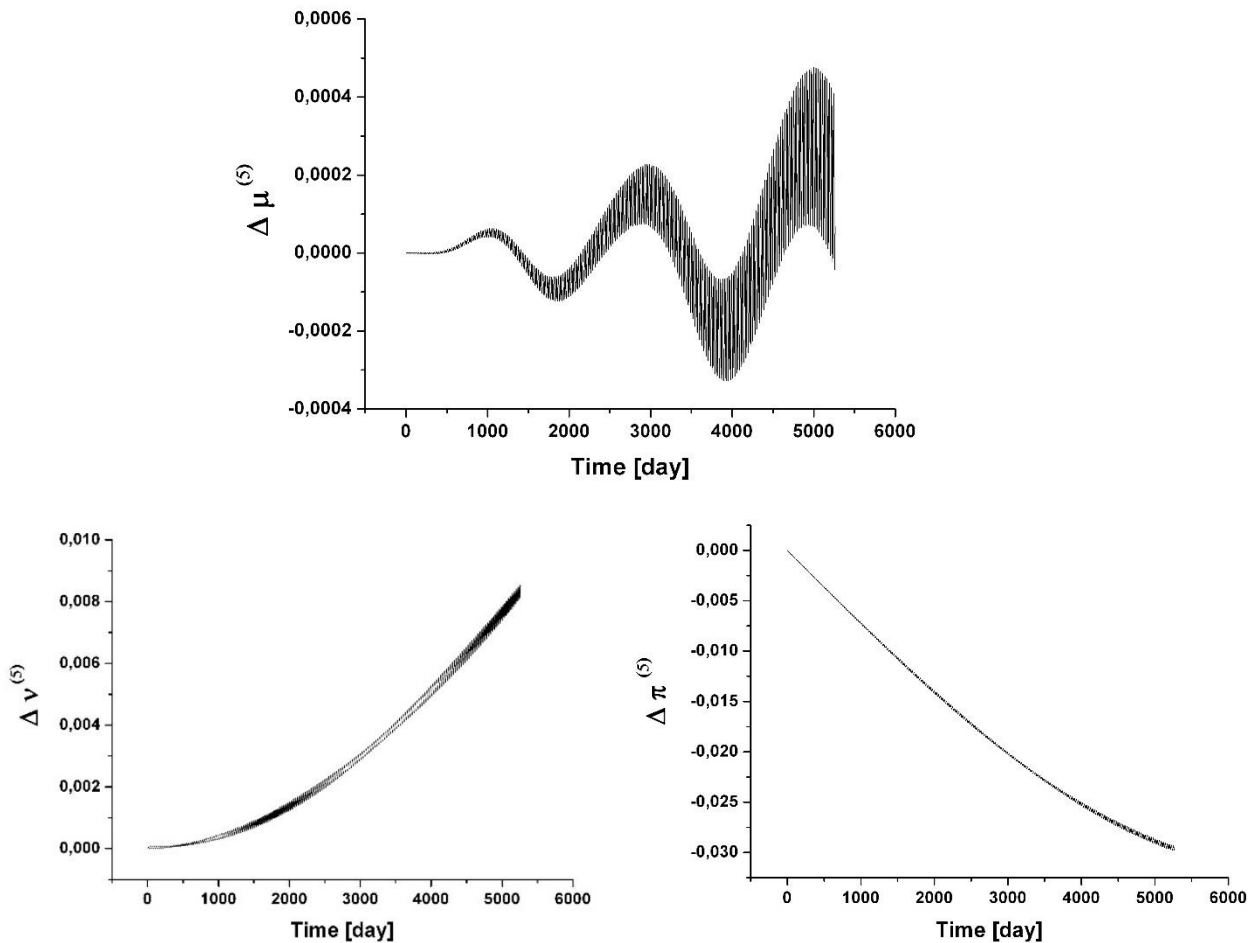


Рис. 4.14 Вклад в угл. сек. от недиагональных элементов тензора инерции: $\mu - \nu - \pi$

В заключение приведем итоговые графики остаточных разностей с учетом всех учтенных эффектов, улучшающих стандартную модель твёрдого тела, а именно: приливных добавок к моментам инерции Луны и коэффициентам Стокса, планетных возмущений и учета 4-ой гармоники селенопотенциала. Итоговое решение обозначим индексом (6). Остаточные разности при сравнении итогового решения с данными численной теории DE421 дают расхождения в долготе от -1.1

до 0.75 угловой секунды, а в широтных компонентах ν – от -2.1 до 1.8 и π – от -1.5 до 2.6 угл. сек., соответственно.

Поведение всех представленных на рис. 4.15 остаточных разностей носит периодический характер с частотами, близкими к собственным частотам. Предположительно причиной такого поведения остаточных разностей является несовпадение моделей сил, используемых в разных теориях. Например, в модели DE421 приливная модель учитывается авторами более сложным образом, что на выходе приводит к интегрированию системы уравнений частот, близких к собственным частотам системы.

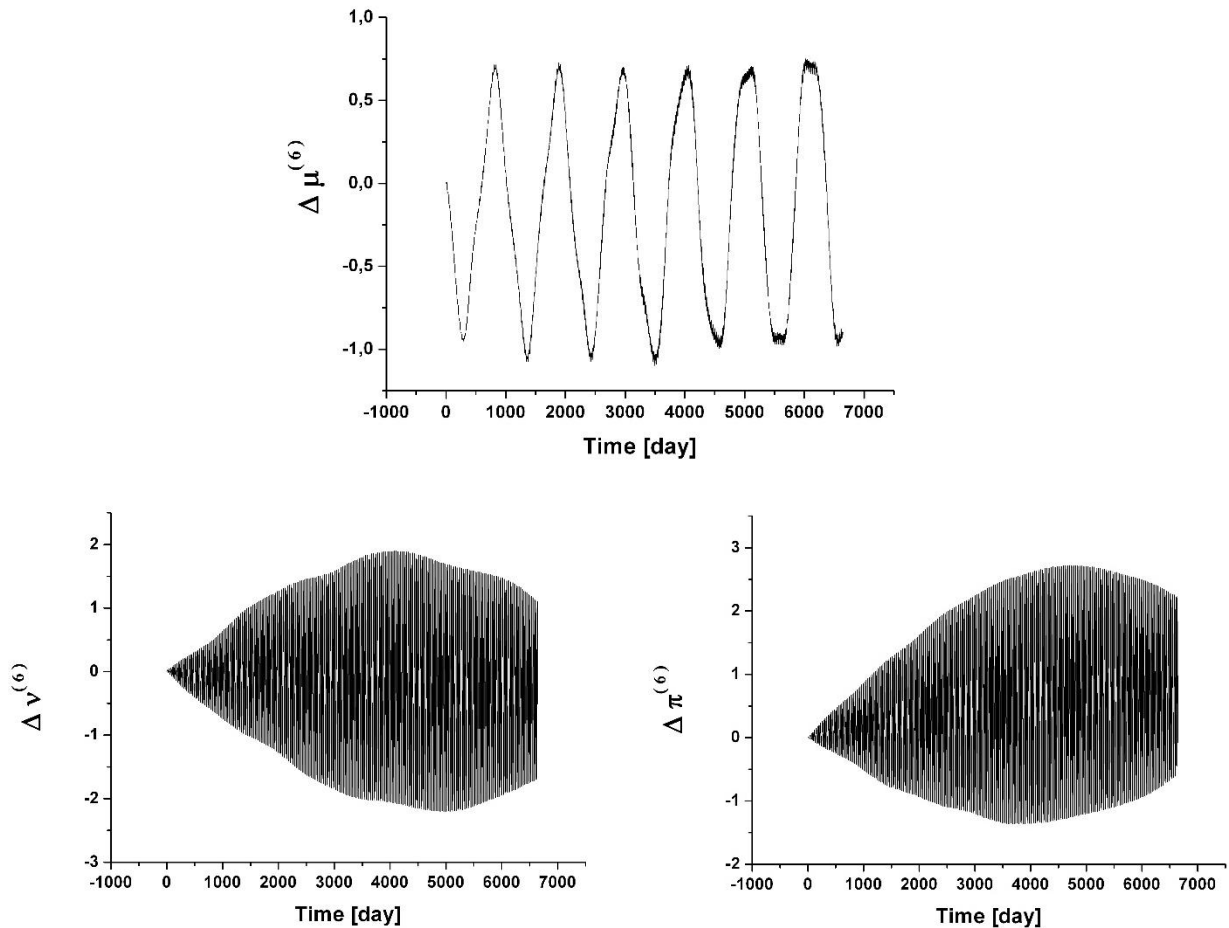


Рис. 4.15 Остаточные разности в угл. сек. между численным решением и динамической эфемеридой DE421

Были выполнены следующие вычисления по выделению этих частот либрации по долготе из нашей модели с помощью линейного регрессионного

анализа: частоты либрации были взяты из работы [86]. Уравнение регрессии будет иметь вид: $a_1 + a_2 \cdot \sin(U(t)) + a_3 \cdot \cos(U(t))$, $U(t) = \frac{2\pi \cdot t}{1056.21}$.

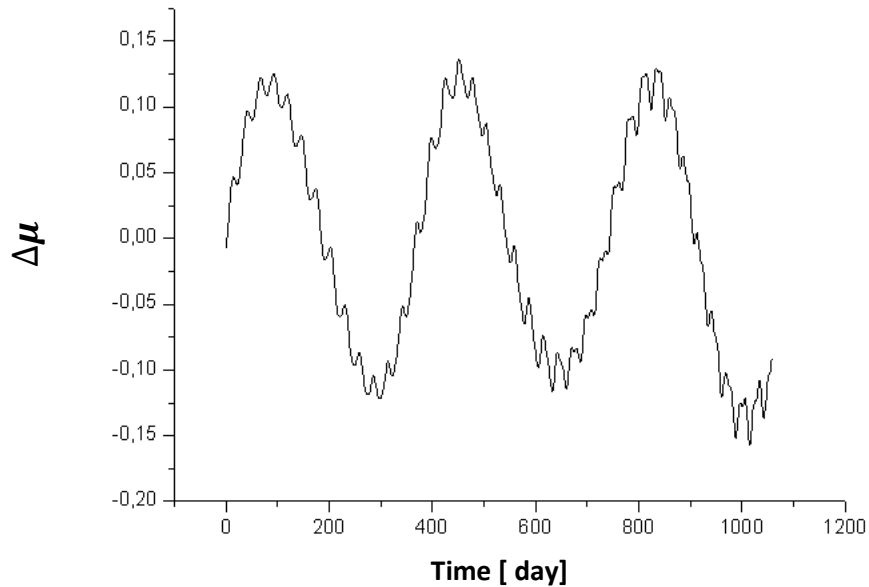


Рис 4.16 Анализ свободной либрации по долготе в угл.сек..

В качестве остаточных разностей использовались данные, приведенные на рис. 4.15. В таком случае коэффициенты регрессии равны -0.213 , -0.720 и 0.224 соответственно. Анализируя рис. 4.16, можно сделать вывод, что оставшиеся разности в среднем после вычета из DE421 членов, обусловленных свободной либрацией, имеют максимальную амплитуду не более чем ± 0.15 угл. сек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование вращательных параметров планет и их спутников является как эффективным средством анализа их строения, так основой для создания прецизионной навигационной системы для их будущего освоения. В контексте селенодезических исследований эти направления являются крайне востребованными, что подтверждается выполнением соответствующих работ по анализу радиолокационных, гравиметрических данных и созданию численных теорий ФЛЛ в ведущих российских и зарубежных организациях (например, в ГАИШ МГУ, ИПА РАН, Лаборатории реактивного движения NASA). Разрабатываемые теории непрерывно совершенствуются, что позволяет учитывать более сложные эффекты, оказывающие влияние на особенности вращательного движения Луны.

В диссертационной работе была создана теория ФЛЛ для упругой модели Луны. Построенная теория в процессе исследований была существенно уточнена на основе применения современных методов анализа многопараметрических систем и учета влияния внешних факторов [12, 16].

В процессе выполнения диссертационного исследования были получены следующие результаты.

Успешно осуществлен переход к эфемериде DE421, который позволил упростить вычисление либрационных углов и проведение анализа точности полученных данных. Точность процесса перехода к эфемериде оценивалась по значениям остаточных разностей между результатами, полученными в настоящем диссертационном исследовании, и аналогичными решениями других авторов согласно данной теории. Особое внимание было уделено проверке факторов, ответственных за поступательные и вращательные особенности лунного движения (Таблица 4 Приложения).

Теория ФЛЛ построена в самолетных углах μ , ν , π , соответствующих углам либрации и описывающих ориентацию лунных осей инерции по отношению к эклиптике (рис. 2.1). В свою очередь в численных эфемеридах DE параметры либрации τ , ρ , $I\sigma$ задаются в системе углов Эйлера.

Для оценки точности получения данных параметров из DE421, а также для проведения сравнительного анализа полученного в работе решения для углов либрации с данными динамической теории сформированы выражения (2.1.1), описывающие переход от эйлеровых к самолетным углам. Из данных выражений могут быть определены параметры для интегрирования уравнений либрации, а также уточнены значения переменных, используемых в рамках создаваемой теории.

Созданное для определения либраций в узле, наклоне и долготе с использованием рядов (3.3.1) [86] программное обеспечение позволило сопоставить полученные результаты с имеющимися наблюдениями, поскольку выражение (3.3.1) является представлением данных LLR в аналитическом виде.

Суть следующего этапа исследования заключалась в усовершенствовании модели ФЛЛ в рамках реализуемой теории. Благодаря использованию DE421 были учтены непрямые воздействия со стороны планет, а включение потенциала прямой интеракции Луна–Венера и Луна–Юпитер в уравнение гравитационного потенциала Луны позволил определить вклад данного эффекта в параметры, определяющие характер вращательного движения Луны (менее нескольких мс дуги). Эта оценка соответствует результатам, приведенным в работе [53]. Также выполнено моделирование деформации фигуры Луны из-за приливного воздействия. Для этого в члены тензора инерции и коэффициенты Стокса внесены дополнения за приливное сжатие, которые получены из наблюдений лазерной локации Луны [86]. Учет данного фактора при сопоставлении с данными эфемериды способствовал сокращению отклонения широтных остаточных разностей приблизительно в 10 раз. Вместе с тем было установлено, что ключевую роль в повышении точности результатов играет внесение деформаций, вызванных приливыми воздействиями, в параметры Стокса. На заключительном этапе в уравнение гравитационного потенциала была введена четвертая гармоника, что позволило устранить регулярное несоответствие динамической теории, обнаруженное в прошлой модели [12]. Следует отметить, что данная

гармоника имеет малый вклад в смещении положения оси инерции от линии Луна-Земля.

Таким образом, рассмотрение всех вышеописанных эффектов способствовало созданию более точной и полноценной модели ФЛЛ и редукции отклонений остаточных разностей (ОО) между построенной в данном диссертационном исследовании теории и динамической эфемеридой DE421. Тем не менее эти разности всё-таки остаются достаточно большими по сравнению с внутренней точностью 1 мс. Величины ОО в долготе μ изменяются от -1.2 до 0.76 секунд дуги, в широте ν от -2.4 до 1.9 секунд дуги и в π от -1.6 до 2.6 секунд дуги.

Причину такого расхождения результатов мы видим в неучете тех тонких эффектов, которые включены в модель DE421, а именно: влияние фигуры Земли и эффектов вращения эклиптики на ФЛЛ, точное, а не приближенное, построение приливного потенциала с учётом вязкости лунного тела, включение диссипативных факторов, вызванных как приливному трением, так и процессами на границе жидкого ядра и мантии, а также, слабых, но уже проявляющихся в наблюдениях, эффектов дифференциального вращения жидкого ядра и мантии.

Следует отметить, что, несмотря на малый вклад этих эффектов в ФЛЛ, учёт их при построении теории становится достаточно сложным, громоздким, требующим как разработку корректных физически моделей, так и модификацию используемого нами Гамильтонова подхода для математического описания задачи. Тем не менее мы уже начали исследования и в этих направлениях: нами сделаны шаги по рассмотрению вращения двухслойной модели Луны: жидкое ядро + твёрдая мантия, тестируется метод Пуанкаре для учёта вязкости при вращении неупругого тела и жидкости.

Задача разработки и развития теории ФЛЛ является очень важной, поскольку позволяет рассматривать разнообразные модели и инструменты для изучения вращательной динамики не только Луны, но и спутников других планет Солнечной системы. Подобный опыт безусловно востребован при обучении студентов по курсу небесной механики на кафедре астрономии и космической

геодезии Казанского федерального университета и других астрономических вузов страны.

Кроме того, разрабатываемая теория уже используется в КФУ для компьютерного моделирования планируемых космических экспериментов в окрестности Луны и на её поверхности. В этих исследованиях безусловно заинтересованы специалисты Роскосмоса, ИКИ РАН, ИНАСАН РАН.

Мы рассчитываем на продолжение исследований ФЛЛ в кооперации с другими научными организациями, заинтересованными в изучении вращательной динамики Луны и применении получаемых результатов в практической деятельности при освоении Луны.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность сотрудникам кафедры астрономии и космической геодезии КФУ за их дружественную поддержку в ходе работы над диссертацией; профессору института им. О.Ю. Шмидта д.ф.-м.н. **Гудковой Т.В.** за научное руководство в ходе работы по выполнению гранта РФФИ № 19-32-50108\19 по теме диссертации; старшему преподавателю кафедры астрономии и космической геодезии КФУ к.ф.-м.н. **Усанину В.С.** за консультации по вычислительной астрономии; к.ф.-м.н., старшему научному сотруднику Института физики КФУ **Петровой Н.К.** за научные консультации по вопросам построения теории ФЛЛ; научному руководителю д.ф.-м.н., доценту **Нефедьеву Ю.А.** за конструктивные советы и помощь в работе.

Полученные во время выполнения работы научные гранты, стипендии и награды:

1. Именная стипендия Ш.Т. Хабибуллина, г. Казань (2016 г.);
2. Стимулирующая выплата ректора КФУ, направленная на поддержку выполнения диссертационной работы (2019 г.);
1. Специальная государственная стипендия Республики Татарстан (2020 г.);
2. Грант РФФИ №19-32-50108\19 (2020 г., исполнитель);
3. Республиканская молодежная премия (2020 г.);
4. Грант РФФИ № 20-12-00105 (2022 г., исполнитель).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баркин, Ю.В. Эффекты физической либрации Луны, вызванные жидким ядром, и определение четвертой моды свободной либрации / Ю. Баркин, Х. Ханада, К. Матсумото, С. Сасаки, М. Баркин // *Астрономический вестник*. – 2014. – Т. 48., № 6. – С. 436 -453.
2. Баркин, Ю.В. Динамика системы несферичных небесных тел и теория вращения Луны / Баркин Ю.В. // Диссертация на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. М.: ГАИШ МГУ. – 1989. – С. 412.
3. Баркин, Ю.В. Тонкие закономерности во вращательном движении Луны / Ю.В. Баркин // *Доклады Академии наук, издательство Наука*. – 1990. – Т. 315., №5. – С. 1082 -1085.
4. Бордовицына, Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики / Т.В. Бордовицына// М.: Наука. – 1984. – С. 136.
5. Гусев, А.В. Вращение, физическая либрация, внутреннее строение активной и многослойной Луны / А.В. Гусев, Н.К. Петрова, Х. Ханада // Казань: Изд-во. Казан.ун-та. – 2015. – С. 232. (монография)
6. Гудкова, Т.В. О спектре собственных колебаний Луны / Т.В. Гудкова, С.Н. Раевский // *Астрономический вестник*. – 2013. – Т. 47., № 1. – С. 13 -20.
7. Дубошин, Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Г.Н. Дубошин // М.: Наука, Глав.ред.физ.мат. – 1976. – С. 864.
8. Жарков, В.Н. Введение в физику Луны / В. Н. Жарков, В. Л. Паньков, А. А. Калачников, А. И. Оснач // АН СССР. Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта. Москва: Наука. – 1969. – С. 311
9. Загидулли, А.А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны / А. А. Загидуллин, Н. К. Петрова, В. С. Усанин, Ю. А. Нефедьев // Тезисы докладов Международной молодёжной конференции ФизикА.СПб 24 -26 октября 2017 года. Санкт-Петербург: ЛИТЕО. – 2017. – С. 11 –12.
10. Загидуллин, А.А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны / А. А. Загидуллин, Н. К. Петрова, В. С.

- Усанин, Ю. А. Нефедьев // Всероссийская астрономическая конференция 2017 «Астрономия: познание без границ». Сборник тезисов. Ялта: Всероссийская астрономическая конференция 2017 «Астрономия: познание без границ». – 2017. – С. 2 - 5.
11. Загидуллин, А.А. Численный подход к построению физической либрации Луны: результаты второго этапа / А. А. Загидуллин, Н. К. Петрова, В. С. Усанин, Ю. А. Нефедьев, М.В. Глушков // Reports of the International Symposium «Lunar Exploration and Space Technology Heritage» Kazan: Kazan federal university. – 2016. – С. 218 - 225.
12. Загидуллин, А.А. Разработка численного подхода в теории физической либрации в рамках «главной проблемы» / А.А. Загидуллин, Н.К. Петрова, В.С. Усанин, Ю.А. Нефедьев, М.В. Глушков // Учен. Зап. Казан.ун -та. Сер. Физ. матем. Науки. – 2017. – Т. 4. – С. 529 -546.
13. Загидуллин, А.А. Адаптация численной эфемериды DE к построению теории физической либрации Луны. XV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования. Москва 11 - 13 апреля 2018 / А.А. Загидуллин, В.С. Усанин, Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев // Тезисы. М.: Институт космических исследований РАН. – 2018. – С. 40 - 43.
14. Загидуллин, А.А. Анализ орбитальных теорий для построения численной теории физической либрации Луны / А.А. Загидуллин, Н.К. Петрова, В.С. Усанин, Ю.А. Нефедьев// Известия Крымской астрофизической обсерватории. – 2018. – Т. 114., № 1. – С. 37 - 42.
15. Загидуллин, А.А. Использование современных численных и аналитических эфемерид Луны / А.А. Загидуллин, В.С. Усанин, Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, А.О. Андреев // Тезисы докладов Международной конференции Физика.СПб 23 -25 октября 2018 года. Санкт-Петербург: ЛИТЕО. – 2018. – С. 3 - 4.
16. Загидуллин, А.А. Проблема редукции углов вращения Луны, полученных в разных теориях лунной физической либрации / А. А. Загидуллин, В. С. Усанин, Н. К. Петрова, Ю. А. Нефедьев // Всероссийская астрометрическая

- конференция «Пулково-2018 » 1 -5 октября 2018 г. Тезисы докладов. Санкт-Петербург: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук. – 2018. – С. 1 -14.
17. Загидуллин, А.А. Проблема редукции углов вращения Луны, полученных в разных теориях лунной физической либрации / А.А. Загидуллин, В.С. Усанин, Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев // Труды ГАО РАН. – 2018. – № 225. – С. 155 -160.
18. Загидуллин, А.А. Физическая либрация Луны - главная проблема / Загидуллин А.А., Н. К. Петрова, В. С. Усанин, М. В. Глушков, Ю. А. Нефедьев // XIV конференция молодых ученых, посвященная дню космонавтики Фундаментальные и прикладные космические исследования. Москва. 12 -14 апреля 2017. Тезисы. М.: Институт космических исследований РАН. – 2017. – С. 5 -7.
19. Загидуллин, А.А. Физическая либрация Луны: расширенная проблема/ А.А. Загидуллин, В.С. Усанин, Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, Т.В. Гудкова // Астрономический журнал. – 2021. – Т. 98. № 1. – С. 75-88
20. Кондратьев Б.П. Векторный подход к проблеме физической либрации Луны. 1 Линеаризованная задача / Б.П. Кондратьев // Методическое пособие для студентов ГОУВПО «УдГУ». Ижевск. – 2009. – С. 56.
21. Кондратьев Б.П. Влияние сжатия Земли на физическую либрацию Луны / Б.П. Кондратьев // Астрономический вестник. – 2012. – Т. 46., №5. – С. 369 - 379.
22. Кондратьев, Б.П. Векторный подход к проблеме физической либрации Луны. 1 Линеаризованная задача / Б.П. Кондратьев // Астрономический вестник – 2011. – Т. 45., № 1. – С. 62 - 75.
23. Кондратьев, Б.П. Векторный подход к проблеме физической либрации Луны. 2 Нелинейная задача / Б.П. Кондратьев // Астрономический вестник. – 2011. – Т. 45., №5. – С. 458 - 469.
24. Кондратьев, Б.П. Влияние сжатия Земли на физическую либрацию Луны в широте / Б.П. Кондратьев // Астрономический вестник. – 2013. – Т. 47., №3. – С. 163 - 174.

25. Красинский, Г.А. Приливные эффекты во вращательном движении Земли и Луны 1. математическая модель. 1 / Г.А. Красинский // Труды ИПА РАН. – 1998 б. – №. 3. – С. 96 - 124.
26. Красинский, Г.А. Численная теория вращения деформируемой Земли с двухслойным ядром – математическая модель и сравнение с РСДБ данными / Г.А. Красинский // Труды ИПА РАН. – 2005. – №. 13. – С. 215 - 219.
27. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб // М.; Л.: Гостехиздат. – 1947. – С. 928.
28. Марченков, К.И. Расчет нагрузочных коэффициентов для заглоблений аномалий плотности / К.И. Марченков, В.М. Любимов, В.Н. Жарков // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 279., № 3. – С. 583 - 586.
29. Молоденский, М.С. Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы старения Земли / М.С. Молоденский // Тр. Гео физ. Ин-та АН СССР. – 1953. – Т. 19. – С. 146.
30. Перцев, Б.П. Влияние морских приливов на земные / Б.П. Перцев // Дис. докт. физ.-мат. наук. М.: ИФЗ РАН СССР. – 1975. – С. 140.
31. Петрова Н.К. Компьютерное моделирование наблюдений звезд с поверхности Луны с помощью полярного зенит-телескопа японского проекта ILOM / Н.К. Петрова, Х. Ханада // Астр. Вестн. – 2013. – Т. 47., № 6. – С. 504 - 517.
32. Петрова, Н.К. Таблицы физической либрации Луны, основанные на теории движения Луны Шмидта (главная проблема) / Н.К. Петрова // Труды Казанской городской астрономической обсерватории. – 1993. – Т. 53. – С. 48 - 80.
33. Петрова, Н.К. Использование аналитической теории физической либрации Луны для обнажения свободных нутаций лунного ядра / Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, А.А. Загидуллин, А.О. Андреев // Астрономический журнал. – 2018. – Т. 95., №. 12. – С. 920 - 925.
34. Петрова, Н.К. Налунные измерения физической либрации луны: методы и оценка точности / Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, А.О. Андреев, А.А. Загидуллин // Астрономический журнал. – 2020. – Т. 97., №. 12. – С. 1042-050.

- 35.Питьева, Е.В. Динамическая модель Солнечной системы в эфемеридах планет ЕРМб. /Д. А. Питьева, Д. А. Павлов, Н.П. Питьев // Труды ИПА РАН. – 2019 б. – Т. 51 б. – С. 82 - 92.
- 36.Питьева, Е.В. Современные численные теории движения Солнца, Луны и больших планет / Е.В. Питьева // Труды ИПА РАН, Расширенное объяснение к «Астрономическому ежегоднику». – 2004. – Вып. 10., глава 6. – С. 112 - 134.
- 37.Раевский, С. Н. О согласовании моделей внутреннего строения Луны с данными гравиметрического поля / С. Н. Раевский, Т. В. Гудкова, О. Л.Кусков, В. А. Кронрод // Физика Земли. – 2015. – № 1. – С. 139 - 147.
- 38.Тарасевич, С.В. УПП – Универсальный Пуассоновский процессор / С.В. Тарасевич // Алгоритмы небесной механики. – 1979. – Т. 27.
- 39.Теребиж, В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике / В.Ю. Теребиж // М.: Наука. – 1992. – С. 392.
- 40.Шевченко, В.В Спектрополяриметрический индекс зрелости лунного грунта / В. В Шевченко //Астрономический вестник. – 2007. – Т. 37., №3. – С. 198 - 219.
41. Andreev, A. O. Analysis of lunar macromodels using «Clementine», «Kaguya», and «LRO» space missions' data / A. O. Andreev, Yu. A. Nefedyev, N. Yu. Demina, N. K. Petrova, A. A. Zagidullon, S. Demin // 2018 AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition. – 2018. – Art. №. AIAA 2018 - 5301
- 42.Andreev, A. O. Analysis of topocentric and gravimetric data from modern space missions / A. O. Andreev, N. Y. Demina, A. A. Zagidullin, N. K. Petrova, Yu. A. Nefedyev, S. Demin // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1135., no.1. – Art. №. 012002
- 43.Andreev, A.O. The use of multi-parameter analysis and fractal geometry for investigating the structure of the lunar surface / A. O. Andreev, Yu. A. Nefedyev, L. A. Nefediev, E. N. Ahmedshina, N. Yu. Demina, A. A. Zagidullin //Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2020. – Vol. 162., no. 2. – Pp. 223 - 236.

44. Araki, H. Lunar global shape and polar topography derived from Kaguya LALT laser altimetry / H. Araki, S. Tazawa, H. Noda, S. Goossens and et al. // *Science*. – 2009. – Vol. 323. – Pp. 897 - 900.
45. Barkin, Y.V. Effects of a physical libration of the moon caused by a liquid core, and determination of the fourth mode of a free libration / Y. V. Barkin, H. Hanada, K. Matsumoto // *Solar Sys.Res.* – 2014. – Vol. 48., no. 6. – Pp. 403 - 419.
46. Barkin, Yu.V. Perturbations of the first order of the Moon rotation / Yu.V. Barkin, S.M. Kudryavtsev, M.Yu. Barkin // *Proc. Int. Conf. «Astronomy and World Heritage: across Time and Continents»* (Kazan, 19 –24 August). KSU. – 2009. – Pp. 161 -164.
47. Bois, E. Planetary and figure-figure effects on the moon's rotation motion / E. Bois, I. Wytrzyszczak, A. Journet // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 1992. – Vol. 53. – Pp. 185 - 201.
48. Bretagnon, P. Theory for the motion of all the planets - The VSOP82 solution / P. Bretagnon // *Astronomy and Astrophysics*. – 1982. – Vol. 114., № 2. – Pp. 278 - 288
49. Calame, O. Free librations of the moon from lunar laser ranging / O. Calame // *Scientific Application of lunar laser ranging* ed J. Mulholland, Reidel. – 1977. – Pp. 53 - 63.
50. Chapront, J. A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements / J. Chapront, M. Chapront-Touzé, G. Francou // *Astronomy & Astrophysics*. – 2002. – Vol. 387., no. 2. – Pp. 700 -709.
51. Chapront, J. Complements to moons' lunar libration theory comparisons and fits to JPL numerical integrations / J. Chapront, M. Chapront-Touze, G. Francou // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 1999. – Vol. 73. – Pp. 317 - 238.
52. Dickey, J.O Lunar Laser Ranging: A continuing Legacy of the Apollo Program / J.O Dickey // *Science*. – 1994. – Vol. 265. – Pp. 482 - 489.

53. Eckhardt, D.H. Theory of the libration of the Moon / D.H. Eckhardt // *Earth, Moon, Planets.* – 1981. – Vol. 25., no. 1. – Pp. 3 - 49.
54. Eroshkin, G.I. Comparison of a numerical model of the physical libration of the moon with two semi-analytical ones / G.I. Eroshkin // *Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets: Proc. Int. Symp. Holota P. (Ed.). Prague, Czech. Acad. Sci., Astron. Inst. Res. Inst. Geod. Topogr. Cartogr.* – 1987. – Pp. 685 - 696.
55. Garcia, R.F. Very preliminary reference Moon model / R.F. Garcia, J.G. Gagnepain Beyneix, S. Chevrot, P. Lognonne // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2011". – Vol. 188. – Pp. 96 -113.
56. Gossens, S. Lunar gravity field determination using SELENE same beam differential VLBI tracking data / S. Goossens, K. Matsumoto, H. Hanada, H. Noda and et al. // *J. Geod.* – 2011. – Vol. 85. – Pp. 205 - 228.
57. Gusev, A. V. «The Moon – 2012 +» Project: Spin-orbital evolution, geophysics and selenodesy of the Moon / A. V. Gusev, N. K. Petrova // *Advances in Space Research.* – 2008. – Vol. 42. – Pp. 289 - 293.
58. Gusev, A. V. Gravitation Investigations on the SELENE mission and the existence of a lunar core / A. V. Gusev, N. Kawano, N. K. Petrova // *Astron. Astroph. Trans.* – 2003. – Vol. 22. – Pp. 579 - 584.
59. Gutzwiller, M.C. The motion of the Moon as computed by the method of Hill, Brown, and Eckert / M.C. Gutzwiller, D.S. Schmidt // *Astronomical Papers Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac.* Washington, G.P.O. – 1986. – Vol. 23. – Pp. 1 - 272.
60. Habibullin, Šh.T. The Motion of the Momentary Poles of the Moon / Šh.T. Habibullin // *Acta Astronomica.* – 1968. – Vol. 18., no. 2. – Pp. 207 - 220.
61. Hilton, J.L. Report of the International Astronomical Union Division I Working Group on Precession and the Ecliptic / J.L. Hilton, N. Capitaine, J. Chapront et al // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* – 2006. – Vol. 94., no. 3. – Pp. 351 -367.

- 62.Hood, L.L. Initial measurements of the lunar induced magnetic dipole moment using lunar prospector magnetometer data / L.L. Hood, D.L. Mitchell, R.P. Lin et al. // *Geophys. Res. Lett.* – 1999. – Vol. 26. – Pp. 2327 - 2330.
- 63.Khabibullin, Sh. T. Nonlinear theory of the lunar physical libration / Sh.T. Khabibullin // *Trudy Kazanskoi gor.obs.* – 1966. – Vol. 34. – Pp. 3 -70.
- 64.Khabibullin, Sh.T. About an arbitrary libration of the Moon and the Eulerian motion of the lunar poles / Sh.T. Khabibullin, Yu.A. Chikanov // *Trudy Kazanskoi gor.obs.* – 1969. – Vol. 36. – Pp. 49 - 60.
- 65.King, R.W. Lunar Dynamics and Selenodesy: results from Analysis of VLBI and laser data (LURE) / R.W. King, C.C. Counselman, J.J. Shapiro, J.G. Williams// *J.Geophys. Res.* – 1975. – Vol. 81. – Pp. 6251.
- 66.Kondratyev, B.P. Accounting for the Viscosity of the Fluid Core in the Problem of the Physical Libration of the Moon / B.P. Kondratyev // *Solar System Research.* – 2013. – Vol. 47., no.1 – Pp. 1 - 10.
- 67.Konopliv, A.S. The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission / A.S. Konopliv, R.S. Park, D. Yuan and et.al. // *J. Geophys. Res.* – 2013. – Vol. 118. – Pp. 1415 - 1434.
- 68.Kronrod, V.A. Inversion of seismic and gravity data for the composition and core sizes of the Moon / V.A. Kronrod, O.L. Kuskov // *Izv. Phys. Solid Earth.* – 2011. – Vol. 47. – Pp. 711 - 730.
- 69.Kuskov, O.L. Geochemical constraints on the seismic properties of the lunar mantle / O.L. Kuskov, V.A. Kronrod, L.L Hood // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2002. – Vol. 134. – Pp. 175 - 189.
- 70.Lemoine, F. G. High-degree gravity models from GRAIL primary mission data / F. G. Lemoine, S. Goossens, J. B. Nicholas // *J.Geophys. Res.* – 2013. – Vol. 118. – Pp. 16 - 76.
- 71.Lemoine, F.G. A 70 th degree lunar gravity model (GLGM-2) from Clementine and other tracking data / F.G. Lemoine, D. E. Smith, M. T. Zuber, G. A. Neumann, D. D. Rowlands // *J. Geophys. Res.* – 1997. – Vol. 102. – Pp. 16.339

72. Matsumoto, K. An improved lunar gravity field model from SSELENE and historical tracking data: Revealing the farside gravity features / K. Matsumoto, S. Goossens, Q // J. Geophys. Res. – 2010. – Vol. 115. – E06007 (20).
73. Migus, A. Analytical lunar libration tables / A. Migus // Moon and the Planets. – 1980. – Vol. 23. – Pp. 391 - 427.
74. Moons, M. Analytical theory of the libration of the Moon / M. Moons // Moon Planets. – 1982. – Vol. 27., no. 3. – Pp. 257 - 284.
75. Moons, M. Physical libration of the Moon / M. Moons // Celest. Mech. – 1982 a. – Vol. 26. – Pp. 131 - 142.
76. Moons, M. Planetary perturbations on the libration of the Moon / M. Moons // Celest. Mech. – 1984. – Vol. 34. – Pp. 263 - 273.
77. Namiki, N. Far side gravity Field of the Moon from Four-Way Doppler Measurements of SELENE(Kaguya) / N. Namiki, T. Iwata, K. Matsumoto et. al. // Science. – 2009. – Vol. 323. – Pp. 900 - 905.
78. Pavlov, D. A. Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended model / D. A. Pavlov, J. G. Williams, V.V. Suvorkin // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2016. – Vol. 126., no. 1. – Pp. 61 - 88.
79. Petit, G. IERS Convection / G. Petit, B. Luzum // – 2010.
80. Petrova, N. K. Analytical extension of Lunar libration tables / N. K. Petrova // Earth Moon Planet. – 1996. – Vol. 73., no. 1. – Pp. 71 - 99.
81. Petrova, N. K. Computer simulation of observations of stars from the Moon using the polar zenith telescope of the Japanese project ILOM / N. K. Petrova, H. Hanada // Sol. Syst. Res. – 2013. – Vol. 47., no. 6. – Pp. 463 - 476.
82. Petrova, N. K. Some qualitative manifestations of the physical libration of the Moon by observing stars from the lunar surface / N. K. Petrova, T. R. Abdulmyanov, H. Hanada // Adv. space. res. – 2012. – Vol. 50. – Pp. 1702 - 1711.
83. Petrova, N. K. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results / N. K. Petrova, A. A. Zagidullin, Yu. A. Nefedyev, V. Kosulin, A. A. Andreev // Advances in Space Research. – 2017. – Vol. 60., no. 10. – Pp. 2303 - 2313.

84. Petrova, N. K. Use of an Analytical Theory for the Physical Libration of the Moon to Detect Free Nutation of the Lunar Core / N. K. Petrova, Yu.A. Nefedye, A. A. Zagidullin, A. O. Andreev // *Astronomy Reports*. – 2018. – Vol. 62., no. 12. – Pp. 1021 - 1025.
85. Petrova, N. K. Free librations of the two-layer Moon and the possibilities of their detection / N. K. Petrova, A. V. Gusev, H. Hanada, N. Kawano // *Advances in Space Research*. – 2008. – Vol. 42. – Pp. 1398 - 1404.
86. Rambaux, N. The Moon's physical librations and determination of their free modes / N. Rambaux, J.G. Williams // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 2011. – Vol. 109., no. 1. – Pp. 85 - 100.
87. Takeuchi, H. Study of shear velocity distribution in the upper mantle by mantle Rayleigh and Love waves // H. Takeuchi, M. Saito, N. Kobayshi // *J. Geophys. Res.* – 1962. – Vol. 67. – Pp. 2831 - 2839.
88. Taylor, D.B. Computation of the Quantities Describing the Lunar Librations in the *Astronomical Almanac* / D.B. Taylor, S.A. Bel, J.L. Hilt, A.T. Sinclair // *NAO Technical Note*. – 2010. – no. 74. – C. 5.
89. Wahr, J.M. Effects of non-hydrostatic core mantle boundary topography and core dynamics on Earth rotation / J.M. Wahr // *Geophysical Journal*. – 1997. – Vol. 128., no. 1. – Pp. 18 - 42.
90. Wieczoreck, M. The constitution and structure of the Lunar interior / M. Wieczoreck // *New Views of the Moon*. – 2006. – Pp. 221 - 364.
91. Weber, R.C. Seismic detection of the lunar core / R.C. Weber, P. Lin, E.J. Garnero, Q. Williams, P. Lognonne // *Science*. – 2011. – Vol. 331. – Pp. 309.
92. Williams, J.G. DE421 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates / J.G. Williams, D.H. Bogg, W.M. Folkner // *Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology Interoffice memorandum*. – 2008. – IOM 335 -JW, DB, WF-20080314 - 001
93. Williams, J.G. DE430 Lunar Orbit, Physical Librations and Surface Coordinates / J.G. Williams, D. Boggs, W. Folkner // *JPL Interoffice Memorandum (Internal Document)*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California – 2013.

94. Williams, J.G. Lunar core and mantle, what does LLR see? Proc / J.G. Williams, D.H. Boggs // Of 16 th Int. Workshop on Laser Ranging, Oct. 13 -17. – 2008. – Poznan Poland, 18 p.
95. Williams, J.G. Lunar laser ranging science: Gravitational physics and lunar interior and geodesy/ J.G. Williams // Advance of Space Res. – 2006. – Vol. 37. – Pp. 67 - 71.
96. Williams, J.G. Tides on the Moon: Theory and determination of dissipation / J.G. Williams, D.H. Boggs // J. Geophys. Res. Planets. – 2015. – Vol. 120. – Pp. 689 - 724.
97. Williams, J.G. Lunar interior properties from the GRAIL mission / A.S Konopliv A, D.H Boggs and et. all. // Journal of Geophysical Research: Planets. – 2014. – Vol. 119., no. 7. – Pp. 1546 -1578.
98. Williams, J.G. Lunar rotational dissipation in solid body and molten core / J.G. Williams // J. Geoph. Res. – 2001. – Vol. 106 (E11). – Pp. 933 - 968.
99. Xie, Yi Post-Newtonian reference frames for advanced theory of the lunar motion and for a new generation of lunar laser ranging / Y. Xie, S. Kopeikin // acta physica slovac. – 2010. – Vol. 60., no. 4. – Pp. 393 - 495.
100. Yang, Y. Comparison and analysis on lunar rotation with lunar gravity field models / Y. Yang, J. Ping, J. Jan, J. Li //Astrophys. Space Sci. – 2018. – Vol. 363. – Pp. 190.
101. Yoder, C.F. The free librations of a dissipative Moon / C.F. Yoder // Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A. – 1981. – Pp. 327 - 338.
102. Zagidullin A. A. Simulation of the Size and Flattening of the Lunar Core for Synchronization with Data on Laser Observations/ A. A. Zagidullin, N. K. Petrova, A. O. Andreev, and Y. A. Nefedyev// Meteoritics & Planetary Science. – 2022. – Vol. 57., no. 1. – Pp. 6278.
103. Zagidullin, A. A. Analysis of dynamic ephemeris and physical libration of the Moon in order to create a lunar navigational system / A. A. Zagidullin, V. S. Usanin, N. K. Petrova, A. O. Andreev, Yu. A. Nefedyev //2018 AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition. – 2018. – Art. №. AIAA 2018 - 5299.

104. Zagidullin, A. A. Analysis of orbital theories for the construction of the numerical theory of the lunar physical librations/ A. A. Zagidullin, N. K. Petrova, V. S. Usanin, A. O. Andreev, Y. A. Nefedyev // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1038., no. 1. – Art. № 012004, SNIP 0.447
105. Zagidullin, A. A. Numerical approach to constructing the lunar physical libration: results of the initial stage / A. A. Zagidullin, N. K. Petrova, V. S. Usanin, Yi. A. Nefedief, M. V. Glushkov // European Planetary Science Congress. – 2015. – Vol. 10. – EPSC2015 - 67.
106. Zagidullin, A.A. Physical libration of the moon: an extended problem / A. A. Zagidullin, V. S. Usanin, N. K. Petrova et al. // Astron. Rep. 64. – 2020. – Pp. 1093 -1106.
107. Zagidullin, A.A. Development of the Theory of Physical Libration of the Moon Taking into Account the Lunar Two-Layer Model Including a Solid Mantle and a Liquid Core / A.A Zagidullin., N.K. Petrova, A.O. Andreev, Y. A Nefedyev //Meteoritics & Planetary Science. – 2022. – Vol. 57., no. 1. – Pp. 6282.
108. Zagidullin, A.A. Creation of a generalized dynamic model of planetary moons based on an analytical approach for describing the libration processes of their rotation / A.A. Zagidullin, N.K. Petrova, Yu.A. Nefedyev, A.O. Andreev// St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. – 2023. – Vol. 16., no. 1.2 – Pp. 517 - 522
109. Zharkov, V.N. Interior Structure of the Earth and Planets / V.N. Zharkov // An Elementary Introduction to Planetary and Satellite Geophysics. Moscow, Nauka Obraz. – 2013. – Pp. 414. (In Russian)

ПРИЛОЖЕНИЕ

(таблицы)

Таблица 1 Свойства коэффициентов в методе Рунге-Кутты 10 порядка

$c_1 = 0, c_{13} = c_6, c_{14} = c_7, c_{15} = c_3$ $c_{16} = c_2, c_{17} = 1$	$\sum_{i=j+1}^{17} b_i a_{ij} = b_j(1 - c_j), j = 11 - 16$
$b_4 = 0, b_5 = 0, b_8 = 0$ $b_2 + b_{16} = 0$	$\sum_{i=j+1}^{17} b_i a_{ij} c_i = \frac{1}{2} b_j(1 - c_j^2), j = 11 - 15$
$b_3 + b_{15} = 0, b_6 + b_{13} = 0$ $b_7 + b_{14} = 0$	$\sum_{i=j+1}^{17} b_i a_{ij} c_i^2 = \frac{1}{3} b_j(1 - c_j^2), j = 11 - 14$
$a_{i,2} = 0, i = 4 - 14$ $a_{i,3} = 0, i = 6 - 14$	$\sum_{i=j+1}^{17} b_i a_{ij} c_i^3 = \frac{1}{4} b_j(1 - c_j^2), j = 11, 12$
$a_{i,4} = 0, i = 8 - 12, 17$ $a_{i,5} = 0, i = 9 - 12, 17$	$\sum_{i=1}^{17} b_i c_i^k \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^5 = \frac{1}{6(7+k)}, k = 0 - 3$
$a_{16,j} = 0, i = 2, 4 - 14$ $a_{15,j} = 0, i = 3, 4, 5, 8 - 12$	$\sum_{i=1}^{17} b_i c_i^r = \frac{1}{r+1}, r = 0 - 9$
$a_{15,6} + a_{15,13} = 0$	$\sum a_{ij} = c_i, i = 2 - 17$
$a_{13,4} = a_{6,4}$ $a_{15,7} + a_{15,14} = 0$	$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{c_i^2}{2}, i = 3 - 14, 17$
$a_{13,5} = a_{6,5}$ $a_{16,3} + a_{15,15} = 0$	$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{c_i^3}{4}, i = 4 - 14, 17$
$a_{14,4} = a_{7,4}$ $a_{17,2} + a_{17,16} = 0$	$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^3 = \frac{c_i^4}{4}, i = 6 - 14, 17$
$a_{14,5} = a_{7,5}$ $a_{17,3} + a_{17,15} = 0$	$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^4 = \frac{c_i^5}{5}, i = 9 - 12, 17$
$a_{15,2} = a_{3,2}$	$\sum_{j=1}^{12} a_{13,j} c_j^4 = \sum_{j=1}^5 a_{6,j} c_j^4$
	$\sum_{j=1}^{13} a_{14,j} c_j^4 = \sum_{j=1}^6 a_{7,j} c_j^4$

Таблица 2 Организация Чебышевских данных на подгруппы

Меркурий	Венера	Барицентр Земля-Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон	Луна	Солнце	Нутация	Либрация
3	171	231	309	34 2	366	38 7	40 5	42 3	44 1	75 3	819	89 9
14	10	13	11	8	7	6	6	6	13	11	10	10
4	2	2	1	1	1	1	1	1	8	2	4	4

Таблица 3 Значения NTARG

NTARG	Тело
5	Юпитер
2	Венера
13	Барицентр Земля-Луна
10	Геоцентр Луны
3	Земля
11	Солнце
15	ФЛЛ, причем NCTR=0

Таблица 4 Сравнение различных динамических теорий [103] Земли и Луны на 80 летнем периоде лет.

Сравниваемые теории	Радиус вектор, м	Долгота, м	Широта, м
DE430 - DE421	+/- 0.4	0 - 2	+/- 1.5
DE431 - Horizons	+/- $1.5 \cdot 10^{-6}$	+/- $1.5 \cdot 10^{-6}$	+/- $0.2 \cdot 10^{-6}$
DE430 – DE421	+/- 0.2	0 - 1	+/- 1

Таблица 5. Коэффициенты Делоне [50], динамики лунного узла и прецессионных параметров.

	$0^{\circ}/''$	T1''	T2''	T3''	T4''
L	134/57/49.2265	1717915923.0024	31.3939	0.051651	-0.00024470
L'	357/31/44.7744	129596581.0733	-0.5529	0.000147	0.00000015
F	93/16/18.5518	1739527264.2178	-13.2294	-0.001022	0.00000417
D	297/51/0.6902	1602961601.0312	-6.8498	0.006595	-0.00003184
Ω	125/2/40.3266	-6967919.8852	6.35934	0.007625	-0.00003586
P_a	0	5028,7946	1.11113	-0.000006	0

Таблица 6. Значения планетных долгот на эпоху наблюдений [48]

	T0/rad	T1''	T2''	T3''	T4''
Me	4.40260884240	26087.9031415742	-0.0000093429	0.000000031	0
Ve	3.17614669689	10213.285546211	0.00000287555	-0.00000003038	0
Ea	1.75347031435	6283.0758491800	-0.0000099189	0.00000000073	0
Ma	6.20348091341	3340.6124314923	0.00000454761	-0.00000005057	0
Ju	0.59954649739	529.6909650946	-0.00014837133	0.00000007482	0
Sa	0.84701675650	213.2990954380	0.00036659741	-0.0000003333	0.00000000217

Таблица 7. Члены разложения потенциала Луны a_j для классических параметров ФЛЛ и косинусов положения эклиптики P_1 , P_2 относительно лунных осей инерции.

	“	T1''	T2''	T3''
$I\sigma$	-0.249	0.0189	-0.0036	0.000245
ρ	-0.014	0.0003201	-0.0001504	0.00001375
τ	67.753	0.3162	-0.1034	0.007434
P_1	-78.513	0.00001075	-0.000006604	0.0000006663
P_2	0.290	0.0002411	-0.00006364	0.000004586

Таблица 8. Постоянные, входящие в модель численного интегрирования теории DE421.

$C_{20}(-J_2)$	-2,03273257637072E-04	C_{22}	2,238976709652413E-05	$C_{30}(-J_3)$	-0.8404701525941E-05
C_{31}	0.28452435E-04	C_{32}	0.484638724000903E-05	C_{33}	0.1674047530039142E-05
S_{31}	0.59008E-05	S_{32}	0.16841984741476E-05	S_{33}	-0.2485526E-06
$C_{40}(-J_4)$	0.9642285999999999E-05	C_{41}	-0.5692687E-05	C_{42}	-0.15862E-05
C_{43}	-0.812041E-07	C_{44}	-0.1273941E-06	S_{41}	0.1574393E-05
S_{42}	-0.1517312E-05	S_{43}	-8,027907000000001E-07	S_{44}	0.831475E-07
γ	2.277305314199142E-4	β	6,310022025364629E-4	$\frac{\bar{C}}{C} = \frac{C}{MR^2}$	0.39326772660028886
$\frac{M}{M_{\oplus} + M_{\zeta}}$	328900.55915	$\frac{M_{\zeta}}{M_{\oplus}}$	1.0 / 81.30056907	GM_S	0.2959122082855911E-03
GM_{Ju}	0.282534584085505E-06	$\frac{GM_S}{GM_E}$	0.7243452332698441E-09	GM_V	0.7243452332698441E-09
k_2	0.02163368386360741	s	0.011	I	0.026919957991
ε_0	84381.406				

Таблица 9. Значения констант, заложенных в уравнения.

Название константы	Значение в радианах	Название константы	Значение в радианах	Название константы	Значение в радианах
γ	0,00022755102	F	1,6279050815	C_{30}	-1,04E-05
β	0,000631121888	\dot{F}	0,2308957198	C_{31}	2,86E-05
l	2,355555743494	l'	6,24006012691	C_{32}	4,8E-06
i	0,2280271435	i'	0,0172019697	C_{33}	2,7E-06
k_1	0,00040347905	D	5,1984665887	S_{31}	8,8E-06
k_2	0,00063126559	\dot{D}	0,21276872	S_{32}	1,7E-06
n	0,2299708346	C_{20}	-0,0002028	S_{33}	-1,1E-06
n_s	0,01720242383	C_{22}	2,23E-05		

Таблица 10. Начальные значения для интегрирования на момент J2000.

q_{10}	0.001057405207	q_{20}	-0.0269141587	q_{30}	0.0018289955586
p_{10}	-6.09639407E-05	p_{20}	3.63692229E-04	p_{30}	-9.75414617E-07