



**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA**

Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik

Universität Jena · FMI · 07737 Jena
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
119991, Российская Федерация,
Москва, Ленинские горы, д. 1

Prof. Dr. Oksana Yakimova
Professur "Algebraische Lie-Theorie"

Ernst-Abbe-Platz 2
07743 Jena

Telefon: 0 36 41 9-46 164

Telefax: 0 36 41 9-46 162

E-Mail: oksana.yakimova@uni-jena.de

ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертационную работу

Гаража Александры Андреевны

“Инварианты Жордана–Кронекера пары элементов алгебры Ли”,

представленную на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

**1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика»**

Диссертация А.А. Гаража посвящена изучению вполне интегрируемых бигамильтоновых систем на классических комплексных алгебрах Ли \mathfrak{g} . Исследуются алгебраические свойства пары согласованных скобок на \mathfrak{g} , а также связанные с этой парой Пуассон-коммутативные подалгебры. Поиск достаточного числа независимых функций в инволюции, то есть коммутирующих относительно скобки Пуассона, – одна из важнейших задач гамильтоновой механики.

В диссертации рассматривается пара, состоящая из скобки Пуассона–Ли $\{ , \}$ и скобки $\{ , \}_A$ с замороженным аргументом $A \in \mathfrak{g}$. По такой паре строится подалгебра Мищенко–Фоменко (МФ) $F_A \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$, которая является Пуассон-коммутативной относительно обеих скобок. В случае регулярного элемента A , подалгебра F_A имеет алгебраически независимые образующие, более того, она полна на присоединённых орбитах общего положения. В диссертация А.А. Гаража изучается случай нерегулярного элемента. Полученные результаты вносят существенный вклад в структурную теорию редуцированных алгебр Ли, проливают свет на нерегулярные МФ-подалгебры, а также пределы регулярных МФ-подалгебр.

Следуя алгебраическому подходу к бигамильтоновым системам, описанному в работе Болсинова и Чжан, скобки $\{ , \}$ и $\{ , \}_A$ можно рассматривать как кососимметрические билинейные формы \mathcal{B} и \mathcal{B}_A над полем рациональных функций $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ на пространстве $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$. Согласно классическим результатам Жордана и Кронекера пара кососимметрических форм на конечномерном



векторном пространстве приводится к каноническому виду состоящему из жордановых и кронекеровых блоков. Возникающие здесь числовые инварианты называются индексами Жордана–Кронекера. Те же числа соответствуют паре кососимметрических форм \hat{X}, \hat{A} на \mathfrak{g} , связанных с общим элементом $X \in \mathfrak{g}$ и уже фиксированным A . Известно, что жордановы блоки имеют размер два. Размеры кронекеровых блоков представляют куда больший интерес.

Первым существенным достижением А.А. Гаража является вычисление индексов Кронекера для всех элементов алгебр \mathfrak{sl}_n и \mathfrak{sp}_{2n} , а также для многих элементов ортогональной алгебры Ли. В работе доказано, что индексы Кронекера пары $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ не меняются внутри пластов алгебр \mathfrak{sl}_n и \mathfrak{sp}_{2n} , для алгебр \mathfrak{so}_{2n+1} и \mathfrak{so}_{2n} приведены примеры пластов, для которых это неверно. Продвижения в случае ортогональной алгебры потребовали преодоления значительных технических трудностей.

Следует отметить, что в настоящий момент нет универсального способа вычисления индексов Жордана–Кронекера пары $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ для произвольной алгебры Ли. Даже и в редуکتивном случае индексы Кронекера не имеют общего описания.

Пара форм $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ имеет канонический базис. Интегрированием билагранжевой части такого базиса получается полная система алгебраически независимых функций в биинволюции. В случае регулярного элемента $A \in \mathfrak{g}$ это приводит к образующим МФ-подалгебры. В диссертации А.А. Гаража представлено обобщение метода Мищенко–Фоменко на случай сингулярного элемента A .

Для произвольного элемента A алгебры \mathfrak{sl}_n или \mathfrak{sp}_{2n} , а также для любого «хорошего» $A \in \mathfrak{so}_n$, построена полная система функций в биинволюции, соответствующая каноническому базису билагранжева подпространства. Для «хороших» и «исправимых» элементов $A \in \mathfrak{so}_n$ построена кронекерова часть полной системы функций в биинволюции, в частности, предъявлены алгебраически независимые образующие алгебры F_A . Отметим, что F_A не всегда является алгеброй многочленов. В диссертации доказано, что для всех классических алгебр Ли \mathfrak{g} и полупростых элементов $A \in \mathfrak{g}$, при дополнительном условии, что A – «хороший» в \mathfrak{so}_n , построенные полные системы функций в биинволюции свободно порождают некоторые предельные подалгебры $\lim F_{A(s)}$.

В диссертации А.А. Гаража решено несколько важных интересных задач, связанных с интегрируемыми системами. Изучены инварианты Жордана–Кронекера пары элементов редуکتивной алгебры Ли и развиты методы их вычисления. Явно построены новые полные алгебраически независимые наборы полиномиальных функций в биинволюции. А.А. Гаража удалось продемонстрировать, что идея перехода к полю $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ и к кольцу многочленов $\mathbb{K}[t]$ весьма



плодотворна и имеет значительные перспективы последующих применений. Её работа безусловно будет способствовать дальнейшему продвижению в изучении свойств бигамильтоновых систем на алгебрах Ли.

Основные результаты диссертации А.А. Гаража изложены в трех статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова; публикации дают полное представление о результатах выполненных ею исследований. Кроме того, А.А. Гаража докладывала о полученных в диссертации результатах на многих международных математических конференциях и научных семинарах как в России, так и за рубежом.

Считаю, что диссертация Гаража Александры Андреевны «Инварианты Жордана–Кронекера пары элементов алгебры Ли» соответствует всем критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 (МГУ.01.17) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Кандидат физ.-мат. наук, профессор

О.С. Якимова

Оксана Якимова

21.06.2023

Подпись профессора О.С. Якимовой удостоверяю.

Декан факультета математики и информатики
университета города Йена, профессор

И.Е. Павлюкевич

Илья Павлюкевич

21.06.2023

