МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Грознова Анастасия Юрьевна

Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств

Специальность 1.1.3 (01.01.04) — «Геометрия и топология»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Сипачева Ольга Викторовна

Москва 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Диссертация посвящена свойствам, обобщающим экстремальную несвязность, и исследованию их связи с однородностью топологических пространств.

В 1956 году Уолтер Рудин в своей статье [1] доказал, в предположении справедливости континуум-гипотезы (CH), неоднородность нароста $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ стоун-чеховской компактификации $\beta\omega$ дискретного счётного пространства ω. Для этой цели он показал, что из условия CH вытекает существование P-точки [2] в ω^*; отсюда немедленно получается неоднородность ω^*, поскольку в компакте все точки не могут быть P-точками.

В [3] Фролик доказал то же самое иначе, заметив, что если две дискретные последовательности сходятся к одной и той же точке $x \in \omega^*$ по ультрафильтрам p и q, то p и q сравнимы в порядке Рудин–Фролика. Идея вполне естественная: если $p, q \in \omega^*$ несравнимы и $D = \{d_n : n \in \omega\}$ — счётное дискретное подмножество ω^*, то не существует гомеоморфизма $h\colon \omega^* \to \omega^*$, переводящего $q\text{-}\lim_n d_n$ в $p\text{-}\lim_n d_n$, поскольку если бы он существовал, то $(d_n)_{n\in\omega}$ и $(h(d_n))_{n\in\omega}$ были бы дискретными последовательностями, сходящимися к одной и той же точке $p\text{-}\lim_n d_n$ по ультрафильтрам p и q соответственно.

Идея Фролика применима не только к наросту ω^*, но и к произвольным F-пространствам и их важнейшему подклассу, экстремально несвязным пространствам. Экстремально несвязные пространства играют важную роль в теории категорий (они являются проективными объектами в категории компактных пространств и непрерывных отображений) и в теории двойственности между топологическими пространствами и булевыми алгебрами (это в точности пространства Стоуна полных булевых алгебр [4]).

Исследования Фролика положили начало активному изучению связи свойств топологических пространств типа однородности со свойствами типа экстремальной несвязности. В [5] рассматривались произведения однородных экстремально несвязных пространств. В предположении аксиомы Мартина были построены однородные экстремально несвязные счётно компактные пространства X и Y с несчётно компактным произведением $X \times Y$ [5, теорема 4.2]. В [6] этот пример был улучшен, а именно: произведение $X \times Y$ удалось сделать не псевдокомпактным [6, теорема 3]. В [7] однородные экстремально несвязные счётно компактные пространства X и Y, для которых произведение $X \times Y$ не является счётно компактным, были построены без дополнительных теоретико-множественных предположений [7, теорема 4.1].

Фролик показал, что все однородные экстремально несвязные компактные пространства конечны [8], а Архангельский доказал, что и все компакты, содержащиеся в экстремально несвязных топологических группах конечны [9]. Е. К. ван Дауэн [10, теорема 2 (с)] (см. также [11]) доказал, что все компакты, содержащиеся в экстремально несвязных однородных пространствах, конечны. К числу последних достижений относятся результаты Е. А. Резниченко в статье [11]. Он доказал, что конечны компакты, содержащиеся в однородных пространствах, которые вкладываются в куб экстремально несвязного пространства. Использование CH позволяет усилить этот результат: (i) любое компактное множество в однородном подпространстве конечного произведения $\beta\omega$-пространств (и тем более, экстремально несвязных пространств) конечно и (ii) любое компактное множество в однородном подпространстве счетного произведения $\beta\omega$-пространств метризуемо [11, теоремы 4 и 3]. В настоящей работе мы показываем, что предположение CH в его доказательстве, можно заменить на более слабое условие существования несчётного числа $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-несовместимых, т.е. не почти когерентных, P-точек.

Ближайшим обобщением класса экстремально несвязных пространств является класс F-пространств. F-Пространства, как и экстремально несвязные, на первый взгляд могут показаться экзотическими, однако они играют важную роль в теории непрерывных отображений компактных пространств [12], [13] и в теории двойственности между топологическими пространствами [14], а также в теории колец непрерывных функций [15]. Основные топологические свойства, в частности, алгебраическую характеризацию в терминах идеалов экстремально несвязных и F-пространств можно найти в основополагающей книге [15] Гиллмана и Джерисона по теории колец непрерывных функций.

Идея Фролика доказательства неоднородности с помощью порядка на ультрафильтрах была развита Куненом. Используя порядок Рудин–Кейслера и понятие слабой P-точки, являющееся ослаблением понятия P-точки, он доказал лемму [16, лемма 4] о сравнимости двух ультрафильтров, по которым могут сходиться к одной и той же точке последовательности в F-пространстве. С помощью своей леммы Кунен доказал, что произведение компактных F-пространств никогда не бывает однородным [16].

Класс F-пространств (и, тем более, экстремально несвязных пространств) довольно узок, и важной задачей является поиск более широких классов пространств, которые обладают теми или иными полезными свойствами F-пространств. Так, ван Дауэн в своей диссертации [17] ввел понятие $\beta\omega$-пространства. Этот класс оказался весьма полезным при изучении свойств ультрафильтров [18] и непрерывных отображений на подпространства произведений [19]. Известно, что любое F-пространство является $\beta\omega$-пространством, и что некоторые полезные утверждения об F-пространствах остаются верными для $\beta\omega$-пространств. Однако многие важные результаты перенести на $\beta\omega$-пространства не удается, хотя различия между F- и $\beta\omega$-пространствами довольно тонкие.

В диссертации мы рассматриваем $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространства, являющиеся обобщениями экстремально несвязных пространств и F-пространств. Эти классы пространств находятся строго между F- и $\beta\omega$-пространствами. Свойства $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ и $\mathscr{R}_3$ удобны тем, что полностью определяются счётными подмножествами и при этом наследственны, в отличие, например, от экстремальной несвязности, которая наследуется только счётными подпространствами. Мы приводим характеризацию этих новых классов пространств в терминах продолжения непрерывных функций со счётных подпространств и идеалов полуколец и колец непрерывных функций, а также доказываем, что классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями, в отличие от классов экстремально несвязных пространств и F-пространств.

Мы обобщаем теорему Кунена о неоднородности произведений на класс $\mathscr{R}_2$-пространств, а в предположении существования дискретного ультрафильтра и на класс $\beta\omega$-пространств. Дискретные ультрафильтры впервые появились в статье Баумгартнера [20]. В диссертации мы исследуем класс дискретных ультрафильтров. В частности, мы показываем, что всякий дискретный ультрафильтр является X-дискретным для любого тихоновского пространства X, и рассматриваем различные свойства дискретных ультрафильтров с целью изучения однородности топологических пространств. Мы также исследуем различные порядки на ультрафильтрах и связь между ними.

Цели и задачи диссертации

Ввести и исследовать с разных точек зрения классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, обобщающие классы экстремально несвязных пространств и F-пространств и имеющие ряд преимуществ перед ними. Охарактеризовать введённые классы пространств в терминах продолжений непрерывных функций со счётных подпространств, а также идеалов полуколец и колец непрерывных функций. Исследовать однородность пространств из классов $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств, их произведений и подпространств, и с этой целью изучить порядки на классе ультрафильтров, исследовать дискретные ультрафильтры на ω, их связь с другими типами ультрафильтров и алгебраические операции на множестве дискретных ультрафильтров.

Положения, выносимые на защиту

1. Свойства и взаимосвязь порядков Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на классе ультрафильтров, исследование дискретных ультрафильтров. Описание алгебры дискретных ультрафильтров.

2. Определение новых классов $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, обобщающих класс экстремально несвязных пространств. Теорема о о том, что они строго содержатся друг в друге. Их обобщение на случай несчётных кардиналов. Доказательство того, что введённые классы пространств обладают свойством наследственности, но не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.

3. Существование продолжения функций с подпространств в классах $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств. Алгебраическая характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

4. Сравнимость в смысле порядка Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в $\mathscr{R}_2$- и $\beta\omega$-пространстве сходятся разные последовательно-

сти к одной и той же точке. Неоднородность произведения бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств, а в предположении $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, произведения компактных $\beta\omega$-пространств. Доказательство в дополнительных теоретико-множественных предположениях конечности компактов в однородных подпространствах $\beta\omega$-пространств и метризуемости компактов в однородных подпространствах счётных произведений однородных $\beta\omega$-пространств.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Исследованы порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на классе ультрафильтров, свойства дискретных ультрафильтров, их связь с другими классами ультрафильтров. Рассмотрена алгебра дискретных ультрафильтров.

2. Введены классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, обобщающие класс экстремально несвязных пространств. Доказано, что имеют место строгие включения:

$$\begin{aligned}\text{класс } F\text{-пространств} &\subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_1\text{-пространств} \subsetneq \\ &\subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_2\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_3\text{-пространств} \subsetneq \\ &\subsetneq \text{класс } \beta\omega\text{-пространств.}\end{aligned}$$

   Доказано, что введённые классы пространств обладают свойством наследственности, но не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями. Определены и рассмотрены обобщения классов $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств на несчётные кардиналы.

3. Исследовано продолжение функций со счётных подпространств в классах $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств. Дана алгебраическая характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

4. Получены результаты о сравнимости в смысле порядка Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в $\mathscr{R}_2$- и $\beta\omega$-пространстве сходятся разные последовательности к одной и той же точке. Доказано, что произведение бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств неоднородно,

а в предположении $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, произведение компактных $\beta\omega$-пространств неоднородно. В дополнительных теоретико-множественных предположениях доказана конечность компактов в однородных подпространствах конечных произведений однородных $\beta\omega$-пространств и метризуемость компактов в однородных подпространствах счётных произведений однородных $\beta\omega$-пространств.

Методы исследования

В диссертации используются методы общей топологии, теории ультрафильтров, теории множеств и элементы теории колец непрерывных функций.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области общей топологии, теории ультрафильтров, теории множеств и функционального анализа.

Степень достоверности и апробация результатов

Соискатель имеет 6 опубликованных работ, все они по теме диссертации; из них 4 работы [51, 52, 53, 54] опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, РИНЦ, RSCI. По ним были сделаны доклады на следующих международных конференциях и семинарах.

Международные конференции:

- Международная конференция по топологии и её приложениям, посвященная 100-летию со дня рождения Ю. М. Смирнова, 20–21 сентября 2021.

- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2022», имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–22 апреля 2022.

Научно-исследовательские семинары механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова:

- Научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 11 марта 2021 года.
- Научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 11 ноября 2021 года.
- Научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 10 марта 2022 года.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Объём диссертации составляет 86 страниц. Список литературы и публикаций автора включает в себя 55 наименований. Используется тройная нумерация определений, лемм, теорем, предложений, следствий и замечаний. Первое число означает номер главы, второе — номер раздела внутри главы, а третье — номер подраздела.

Содержание работы

Во **введении** приводится краткая история вопроса, определяется область исследования, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, формулируются основные результаты диссертации.

Глава 1 посвящена основным свойствам ультрафильтров, порядкам Рудин–Кейслера, Рудин-Бласса и Рудин–Фролика на ультрафильтрах, дискретным ультрафильтрам и операциям над ультрафильтрами. Перечислим основные определения и результаты этой главы.

Начнём с определения порядков на ультрафильтрах (см., например, [22]).

Определение 1.2.1. *Порядок Рудин–Кейслера* $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$, если существует функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$.

Определение 1.2.2. *Порядок Рудин–Бласса* $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q$, если существует конечнократная функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$.

Определение 1.2.3. *Порядок Рудин–Фролика* $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$, если существует инъективная функция $\varphi\colon \omega \to \beta\omega$ такая, что $\varphi(\omega)$ дискретно и $\beta\varphi(p) = q$.

В [20] Баумгартнер ввёл определение I-ультрафильтра и связанные с ним классы ультрафильтров.

Если $X = \mathbb{R}$ и I — семейство всех дискретных (разреженных, меры ноль, нигде не плотных) подмножеств $\mathbb{R}$, I-ультрафильтр называется *дискретным* (*разреженным, меры ноль, нигде не плотным* соответственно).

Рассматривая семейство I дискретных подмножеств X и накладывая предположения на $f\colon I \to X$, получаем различные классы дискретноподобных ультрафильтров.

Определение 1.3.2. Пусть X — топологическое пространство. Скажем, что ультрафильтр p на ω является X-дискретным (конечнократно X-дискретным, инъективно X-дискретным) если для любой (для конечнократной, инъективной соответственно) функции $f\colon \omega \to X$ найдётся $A \in p$ такой, что $f(A)$ дискретно в X. Для $X = \mathbb{R}$ мы пишем «дискретный» вместо «$\mathbb{R}$-дискретный».

Предложение 1.3.1. *Любой дискретный (конечнократно дискретный, инъективно дискретный) ультрафильтр является X-дискретным (конечнократно X-дискретным, инъективно X-дискретным соответственно) для любого тихоновского пространства X.*

Предложение 1.3.2. *Несуществование нигде не плотных ультрафильтров влечёт за собой несуществование инъективно дискретных ультрафильтров.*

Предложение 1.3.3. (i) *Если $p \in \beta\omega$ является X-дискретным для некоторого пространства X и $q \leqslant_{\mathrm{RK}} p$, то q является X-дискретным.*

(ii) *Если $p \in \beta\omega$ является конечнократно X-дискретным для неко-*

торого пространства X и $q \leqslant_{\mathrm{RB}} p$, то q является конечнократно X-дискретным.

(iii) *Если $q \in \beta\omega$ является ω^*-дискретным и p — нетривиальный q-предел некоторой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ из $\beta\omega$, то найдётся $r \in \beta\omega$ такой, что $r \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ и $r \leqslant_{\mathrm{RF}} p$. Более того, $p = r\text{-}\lim_n x_{k_n}$ для некоторой дискретной подпоследовательности $(x_{k_n})_{n\in\omega}$ последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, состоящей из попарно различных точек.*

(iv) *Если $q \in \beta\omega$ является инъективно ω^*-дискретным, то $q \leqslant_{\mathrm{RF}} p$ тогда и только тогда, когда p является q-пределом некоторой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ попарно различных точек из $\beta\omega$.*

Далее мы рассматриваем произведение ультрафильтров.

Определение 1.4.1 [21]**.** Пусть p и q — ультрафильтры на ω. Тогда *тензорным произведением*, или *произведением Фубини*, $p\otimes q$ ультрафильтров p и q называется ультрафильтр на $\omega\times\omega$, определённый следующим образом:

$$p \otimes q = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n : \{m : (n,m) \in A\} \in q\} \in p\}.$$

Обобщением тензорного произведения двух ультрафильтров является сумма Фубини последовательности $q_n \in \beta\omega$ по ультрафильтру $p \in \beta\omega$, его базу составляют множества вида $\bigcup\limits_{n\in P}\{n\} \times Q_n$, где $P \in p$ и $Q_n \in q_n$ для любого $n \in P$.

В [23] ван Милл определил различные топологические типы ультрафильтров из ω^*, одним из которых является

$$A_1 = \{x \in \omega^* : \exists\,\text{счётное дискретное}\ D \subset \omega^* \setminus \{x\},\ x \in \overline{D}\}.$$

Ультрафильтры *не* типа A_1 мы называем *дискретно слабыми P-точками*.

Предложение 1.4.1. *Пусть p, q — ультрафильтры из ω^*, тогда тензорное произведение $p \otimes q$ принадлежит A_1.*

Следствие 1.4.1. *Тензорное произведение двух неглавных ультрафильтров не может быть дискретно слабой P-точкой. Таким образом, любое такое произведение не $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимально.*

Предложение 1.4.2. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных, инъективно X-дискретных) ультрафильтров $p, q_n \in \omega^*$, $n \in \omega$, сумма Фубини $\sum_p(q_n)$ — это X-дискретный (ко-*

нечнократно X-дискретный, инъективно X-дискретный) ультрафильтр на $\omega \times \omega$.

Следствие 1.4.2. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных) ультрафильтров $p, q \in \omega^*$, тензорное произведение $p \otimes q$ является X-дискретным (конечнократно X-дискретным) ультрафильтром на $\omega \times \omega$.*

Следствие 1.4.3. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных) ультрафильтров $p, q \in \mathbb{N}^*$ ультрафильтры $p \cdot q$ и $p + q$ являются X-дискретными (конечнократно X-дискретными).*

Следствие 1.4.4. *Множества дискретных, конечнократно дискретных, ω^*-дискретных и конечнократно ω^*-дискретных ультрафильтров на $\mathbb{N}$ образуют подполугруппу в полугруппах $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ и $(\beta\mathbb{N}, +)$.*

Следствие 1.4.5. *Если существуют дискретные ультрафильтры, то существуют дискретные ультрафильтры, которые не являются дискретно слабыми P-точками (и следовательно, не являются $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимальными).*

В **главе 2** вводятся $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространства, рассматриваются их свойства, строятся различающие примеры этих пространств, также определяются обобщения новых классов пространств на произвольные кардиналы. Перечислим основные определения и результаты этой главы.

Определение 2.1.7. Топологическое пространство X называется

- *$\mathscr{R}_1$-пространством*, если любое счётное подмножество пространства X экстремально несвязно, т.е. любые два счётных отделённых подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания;

- *$\mathscr{R}_2$-пространством*, если любые два счётных отделённых подмножества пространства X, одно из которых дискретно, имеют непересекающиеся замыкания;

- *$\mathscr{R}_3$-пространством*, если любые два счётных отделённых дискретных подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания.

Как нетрудно видеть, свойства $\mathscr{R}_i$ для $i = 1, 2, 3$ наследственны, т.е. сохраняются любыми своими подпространствами.

Теорема 2.2.4. *Имеют место строгие включения:*

$$\text{класс } F\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_1\text{-пространств} \subsetneq \\ \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_2\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_3\text{-пространств} \subsetneq \\ \subsetneq \text{класс } \beta\omega\text{-пространств.}$$

Теорема 2.3.2. *Классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.*

Рассмотрим обобщения введённых классов пространств на произвольные бесконечные кардиналы. Пусть τ — любой бесконечный кардинал.

Определение 2.4.1. Топологическое пространство X называется

- $\mathscr{R}_1(\tau)$*-пространством*, если любые два отделённых подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, имеют непересекающиеся замыкания;
- $\mathscr{R}_2(\tau)$*-пространством*, если любые два отделённых подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, одно из которых дискретно, имеют непересекающиеся замыкания;
- $\mathscr{R}_3(\tau)$*-пространством*, если любые два отделённых дискретных подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, имеют непересекающиеся замыкания.

Свойства $\mathscr{R}_i(\tau)$ для $i = 1, 2, 3$ также наследственны и для них выполненен аналог теоремы 2.3.2.

Теорема 2.4.1. *Классы $\mathscr{R}_1(\tau)$-, $\mathscr{R}_2(\tau)$-, $\mathscr{R}_3(\tau)$- и $\beta\tau$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.*

Пример 2.4.2. *F-пространство произвольной несчётной мощности τ, не являющееся $\mathscr{R}_3(\aleph_1)$-пространством.*

Глава 3 посвящена продолжению функций в классах $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств и характеризации $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах продолжения непрерывных функций со счётных подпространств и идеалов полуколец и колец непрерывных функций. Основные результаты таковы:

Теорема 3.1.1. *Пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено в $\overline{Y}$.*

Следствие 3.1.1. *Компакт X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено в X.*

Следствие 3.1.3. *Пусть X — сепарабельное $\mathscr{R}_1$-пространство и $Y \subset X$ — счётное подпространство X. Тогда Y C^*-вложено в X.*

Теорема 3.1.2. (i) *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное множество $D \subset X$ C^*-вложено в $\overline{D}$.*

(ii) *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного подпространства $Y \subset X$ каждое множество $A \subset Y$ C^*-вложено в $\overline{Y}$.*

(iii) *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда замыкание любого счётного дискретного множества $D \subset X$ в βX является стоун-чеховской компактификацией βD множества D.*

(iv) *Пространство X является $\beta\omega$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное множество $D \subset X$ с компактным замыканием $\overline{D}$ C^*-вложено в X.*

Приведём несколько ключевых характеристик $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов.

Предложение 3.2.3. *Тихоновское пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(A)$ является главным.*

Предложение 3.2.4. *Компакт X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(\overline{A})$ является главным.*

Предложение 3.2.5. *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(\overline{A})$ является главным.*

Теорема 3.2.4. *Для произвольного компакта X эквивалентны следую-*

щие утверждения:

1) X — $\mathscr{R}_1$*-пространство;*

2) *для любого счётного* $Y \subset X$ *каждый простой идеал полукольца* $C(Y, \mathbb{I})$ *содержится в единственном максимальном идеале;*

3) *для любого счётного* $Y \subset X$ *каждый простой идеал полукольца* $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ *содержится в единственном максимальном идеале;*

4) *для любого счётного* $Y \subset X$ *каждый простой идеал полукольца* $C(Y, \mathbb{I})$ *содержит единственный минимальный простой идеал;*

5) *для любого счётного* $Y \subset X$ *каждый простой идеал полукольца* $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ *содержит единственный минимальный простой идеал;*

6) *для любого счётного* $Y \subset X$ *все простые идеалы полукольца* $C(Y, \mathbb{I})$*, содержащие данный простой идеал, образуют цепь (т.е. линейно упорядочены по включению);*

7) *для любого счётного* $Y \subset X$ *все простые идеалы полукольца* $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$*, содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

Теорема 3.2.5. *Для произвольного компакта* X *эквивалентны следующие утверждения:*

1) X — $\mathscr{R}_3$*-пространство;*

2) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *каждый простой идеал полукольца* $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ *содержится в единственном максимальном идеале;*

3) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *каждый простой идеал полукольца* $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ *содержит единственный минимальный простой идеал;*

4) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *все простые идеалы полукольца* $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$*, содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

Теорема 3.2.6. *Для произвольного компакта* X *эквивалентны следующие утверждения:*

1) X — $\mathscr{R}_1$*-пространство;*

2) *для любого счётного* $Y \subset X$ *решётки* $\operatorname{Id} C(Y)$ *и* $\operatorname{Id} C^+(Y)$ *изоморфны;*

3) *для любого счётного* $Y \subset X$ *решётки* $\operatorname{Id} C(\overline{Y})$ *и* $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ *изоморфны;*

4) *для любого счётного* $Y \subset X$ *решётка* $\operatorname{Id} C^+(Y)$ *модулярна;*

5) *для любого счётного* $Y \subset X$*решётка* $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ *модулярна;*

6) *для любого счётного* $Y \subset X$*решётка* $\operatorname{Id} C^+(Y)$ *дистрибутивна;*

7) *для любого счётного* $Y \subset X$*решётка* $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ *дистрибутивна;*

8) *для любого счётного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C^+(Y)$ *полустрогие;*

9) *для любого счётного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C^+(\overline{Y})$ *полустрогие;*

10) *для любого счётного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C(Y)$ *разностные;*

11) *для любого счётного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C(\overline{Y})$ *разностные.*

Теорема 3.2.7. *Для произвольного компакта* X *эквивалентны следующие утверждения:*

1) X *—* $\mathscr{R}_3$*-пространство;*

2) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *решётки* $\operatorname{Id} C(\overline{Y})$ *и* $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ *изоморфны;*

3) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *решётка* $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ *модулярна;*

4) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *решётка* $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ *дистрибутивна;*

5) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C^+(\overline{Y})$ *полустрогие;*

6) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C(\overline{Y})$ *разностные.*

В **главе 4** получены результаты об однородности в произведениях пространств.

Одним из главных инструментов доказательства неоднородности являются следующие две теоремы о сравнимости ультрафильтров.

Теорема 4.1.1. *Пусть $q \in \omega^*$ — любой неглавный ультрафильтр на ω и $p \in \omega^*$ — неглавный ультрафильтр, являющийся слабой P-точкой. Предположим, что существуют компактное $\mathscr{R}_2$-пространство X, точка $x \in X$ и две последовательности $(d_m)_{m\in\omega}$ и $(e_n)_{n\in\omega}$ точек X такие, что $\{d_m : m \in \omega\}$ — дискретное множество попарно различных точек и $e_n \neq x$ для всех $n \in \omega$, причем $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$. Тогда $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

Теорема 4.2.1. *Пусть X — компактное $\beta\omega$-пространство. Предположим, что $x \in X$, $(d_m)_{m\in\omega}$ — дискретная последовательность различных точек X, $(e_n)_{n\in\omega}$ — произвольная последовательность точек X и $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$, где $p, q \in \omega^*$, p — дискретно слабая P-точка и q — дискретный ультрафильтр. Если $\{n : e_n = x\} \notin q$, то $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

В доказательстве одного из основных результатов используется понятие S-разделённости:

Определение 4.3.1. Назовём множество $D = \{d^n : n \in \omega\}$ в произвольном компакте X *S-разделённым*, если найдутся открытые окрестности $U^n \ni d^n$, $n \in \omega$, такие, что для любых $y^n \in U^n$, $n \in \omega$, и для всех $I \subseteq \omega$

$$\overline{\{y^n : n \in I\}} \cap \overline{\{y^n : n \notin I\}} = \varnothing.$$

Предложение 4.3.1. *Пусть κ — бесконечный кардинал и $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, где каждый X_α — компакт, и предположим, что $d^n \in X$ для $n \in \omega$. Тогда следующие условия связаны импликациями 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longleftrightarrow$ 3):*

1) *для некоторого $\alpha \in \kappa$ множество $\{d^n_\alpha : n \in \omega\}$ является S-разделённым в X_α;*
2) *для некоторого счётного множества $B \subseteq \kappa$ множество $\{\pi_B(d^n) : n \in \omega\}$ является S-разделённым в $\prod\limits_{\alpha\in B} X_\alpha$;*
3) *множество $\{d^n : n \in \omega\}$ является S-разделённым в X.*

Свойство, которое можно противопоставить свойству $\mathscr{R}_3$, было введено Куненом в [16]:

Определение 4.3.2 [16]**.** Топологическое пространство X называется *секвенциально малым*, если любое бесконечное множество из X содержит бесконечное подмножество, замыкание которого не содержит копию $\beta\omega$.

Теорема 4.1.1. *Пусть κ — кардинал и $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ — компакт, причём каждый X_α удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:* (i) *является $\mathscr{R}_2$-пространством;* (ii) *содержит слабую P-точку;* (iii) *содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество. Пусть также X_α — бесконечное компактное $\mathscr{R}_2$-пространство для хотя бы одного $\alpha \in A$. Тогда X неоднородно.*

Следствие 4.3.1. *Произведение компактных $\mathscr{R}_2$-пространств неоднородно.*

Теорема 4.3.3. *Предположим, что существует дискретный ультрафильтр $q \in \omega^*$, κ — кардинал и $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ — компакт, причём каждый X_α удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:* (i) *является $\beta\omega$-пространством;* (ii) *содержит слабую P-точку;* (iii) *содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество. Пусть также X_α — бесконечное компактное $\beta\omega$-пространство для хотя бы одного $\alpha \in A$. Тогда X неоднородно.*

Следствие 4.3.2. *Если существует дискретный ультрафильтр в ω^*, то произведение компактных $\beta\omega$-пространств неодноднородно.*

Следующее следствие использует предположение $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Через $\mathfrak{d}$ обозначают наименьшую мощность *доминирующего* семейства $\mathscr{D}$ функций $\omega \to \omega$, т.е. семейства с тем свойством, что для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся функция $g \in \mathscr{D}$ такая, что $g(n) \geqslant f(n)$ для всех, кроме конечного числа, $n \in \omega$, и $\mathfrak{c}$ — стандартное обозначение для 2^ω. Очевидно, что CH влечёт за собой $\omega_1 = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, однако утверждение $\omega_1 < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ также совместимо с ZFC.

Следствие 4.3.3. *В предположении $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ произведение компактных $\beta\omega$-пространств неоднородно.*

Приведём результаты о метризуемости однородных подпространств произведений.

Нам понадобится следующее теоретико-множественное предположение:

NNCPP$_\kappa$: *Существует κ попарно $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-несовместимых (т.е. не почти когерентных) P-точек.*

Теорема 4.4.1 (NNCPP$_{\omega_1}$). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^\omega$ —*

однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X метризуемо.

Теорема 4.4.2 (NNCPP$_{n+1}$). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^{\omega}$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X конечно.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Сипачевой за постановку задачи, многочисленные полезные обсуждения, заботу и терпение, а также Евгению Александровичу Резниченко за стимулирующие беседы.

Автор благодарит коллектив кафедры общей топологии и геометрии за доброжелательную и творческую атмосферу.

Автор также признателен Евгению Михайловичу Вечтомову за плодотворные обсуждения.

Основные понятия и предварительные сведения

Мы используем символ ω для множества неотрицательных целых чисел, $\mathbb{R}$ для множества вещественных чисел. Для данного пространства X и $A \subset X$ через $|A|$ мы обозначаем мощность множества A и через $\overline{A}$ — его замыкание. Замыкание множества A в подпространстве Y пространства X обозначается через $\overline{A}^Y$. Скажем, что два множества A и B в топологическом пространстве X *отделены*, если $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Последовательность точек $(x_n)_{n \in \omega}$ пространства X *дискретна*, если множество значений $\{x_n : n \in \omega\}$ — дискретное (не обязательно замкнутое) подпространство X. Символом $\restriction$ мы обозначаем сужение отображений.

Компактами мы называем хаусдорфовы компактные пространства. Любое тихоновское пространство X имеет стоун-чеховскую компактификацию βX. Это компакт, в который X вкладывается всюду плотным образом так, что каждое непрерывное отображение $f \colon X \to K$ в любой компакт K имеет непрерывное продолжение $\beta f \colon \beta X \to K$.

Через $\beta\omega$ мы обозначаем стоун-чеховскую компактификацию дискретного пространства ω, а через ω^* — стоун-чеховский нарост $\beta\omega \setminus \omega$. Точки пространства $\beta\omega$ отождествляются с ультрафильтрами на ω, а точки ω^* — с неглавными ультрафильтрами на ω. Напомним, что топология пространства $\beta\omega$ порождена базой

$$\mathscr{B} = \{\overline{A} : A \subseteq \omega\}, \quad \text{где} \quad \overline{A} = \{\mathscr{U} \in \beta\omega : A \in \mathscr{U}\} \quad \text{для} \quad A \subseteq \omega.$$

Само множество ω находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех главных ультрафильтров:

$$n \mapsto \mathscr{U}_n = \{A \subseteq \omega : \{n\} \in A\} \in \beta\omega.$$

Таким образом, ω отождествляется с подпространством главных ультрафильтров на ω, которое вложено в $\beta\omega$ в качестве открытого плотного дискретного подпространства. Более того, для каждого $A \subset \omega$ множество $\overline{A}$, определённое выше, — это в точности замыкание A в $\beta\omega$. Заметим также, что ультрафильтр является неглавным тогда и только тогда, когда все его элементы бесконечны.

Говорят, что последовательность точек $(x_n)_{n\in\omega}$ в топологическом пространстве X *сходится к точке* $x \in X$ *по ультрафильтру* $p \in \beta\omega$, если для любой окрестности U точки x множество $\{n : x_n \in U\}$ принадлежит p. Обозначение: $x = p\text{-}\lim_n x_n$. Точка x называется *нетривиальным* p-пределом последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, если $\{n \in \omega : x_n = x\} \notin p$. Ясно, что если $p \in \omega^*$ и $x = p\text{-}\lim_n x_n$, то x — предельная точка множества $\{x_n : n \in \omega\}$. Последовательность может не иметь p-предела, но если он существует, то он единственен (в случае хаусдорфова пространства).

Подпространство $Y \subset X$ называется называется C^*-*вложенным*, если любая непрерывная ограниченная функция $f\colon Y \to \mathbb{R}$ имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$.

Пусть A — множество. Для любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств все множества вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, координат, образуют базу топологического произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Элементы этой базы называются *каноническими открытыми множествами*. Для $A_0 \subseteq A$ обозначим через π_{A_0} естественное отображение проектирования $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in A_0} X_\alpha$, определённое правилом $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha\in A_0}$. Говорят, что множество $Y \subseteq X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *заполняет счётные грани*, если для любого счётного множества индексов $A_0 \subseteq A$ имеет место равенство $\pi_{A_0}(Y) = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A_0\}$.

Глава 1

Специальные ультрафильтры на ω

1.1. Ультрафильтры и их свойства

Важнейшую роль в топологии играет понятие фильтра. Окрестности и проколотые окрестности каждой неизолированной точки в топологическом пространстве X образуют фильтр.

Определение 1.1.1 [47]**.** *Фильтром* на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$;

2) если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$;

3) если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$.

Определение 1.1.2 [47]**.** Максимальный (по включению) фильтр называется *ультрафильтром*. Другими словами, ультрафильтр на множестве X — это такой фильтр $\mathscr{U}$ на на X, что для всякого фильтра $\mathscr{F}$ на X со свойством $\mathscr{U} \subset \mathscr{F}$ имеем $\mathscr{U} = \mathscr{F}$. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется *главным*, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

Ультрафильтры были введены Риссом в 1909 году. Они стали широко использоваться после выхода статьи Улама в 1929 году.

Следующий критерий играет фундаментальную роль в теории ультрафильтров и её приложениях. Например, для того чтобы доказать, что при любой раскраске бесконечного множества X в конечное число цветов найдётся одноцветное множество с определённым свойством, достаточно найти какой-нибудь ультрафильтр на X, все элементы которого обладают этим свойством.

Теорема 1.1.1 [47]. *Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*

Нам понадобится следующее определение:

Определение 1.1.3 [47]. Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на X. Семейство множеств

$$\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\} = \{A \subset Y : \exists F \in \mathscr{F}(f(F) \subset A)\}$$

называется *образом фильтра* $\mathscr{F}$ при отображении f.

Предложение 1.1.1 [47]. *Образ любого фильтра при любом отображении является фильтром. Образ любого ультрафильтра при любом отображении является ультрафильтром.*

Определение 1.1.4 [47]. Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X *сходится к некоторой точке* $x \in X$, если любая окрестность этой точки принадлежит $\mathscr{F}$. Для сходимости $\mathscr{F}$ к x используется обозначение $\mathscr{F} \to x$. Фильтр *сходится*, или является *сходящимся*, если он сходится к некоторой точке.

Пользуясь определением сходимости ультрафильтра к точке и предложением 1.1.1, получим критерий непрерывности функции в точке в терминах ультрафильтров:

Теорема 1.1.2 [47]. *Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда образ при f любого ультрафильтра, сходящегося к x, сходится к $f(x)$.*

Следствие 1.1.1 [47]. *Отображение топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда образ при этом отображении любого сходящегося ультрафильтра сходится.*

Ультрафильтры представляют собой мощный инстумент для доказательства теорем. Например, с помощью них удаётся весьма изящно доказать теорему Тихонова о компактности произведений, пользуясь следующим критерием компактности в терминах ультрафильтров:

Теорема 1.1.3 [47]. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.*

Любую функцию $f\colon \omega \to \omega$ можно рассматривать как отображение $\omega \to \beta\omega$, поэтому у неё существует непрерывное продолжение $\beta f\colon \beta\omega \to \beta\omega$, которое описывается следующим образом:

$$\beta f(p) = \{A \subset \omega : f^{-1}(A) \in p\}, \quad p \in \beta\omega$$

(см. [21, лемма 3.30]). Множество $\beta f(p)$ представляет собой образ ультрафильтра p при непрерывном отображении $f\colon \omega \to \beta\omega$ в соответствии с определением 1.1.3.

Замечание 1.1.1. (i) Любой ультрафильтр $p \in \beta\omega$ — это p-предел последовательности $(n)_{n\in\omega}$ в $\beta\omega$: $p = p\text{-}\lim_n n$.

(ii) Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение пространств X и Y и пусть $x, x_n \in X$ для $n \in \omega$. Если $p \in \beta\omega$ и $x = p\text{-}\lim_n x_n$, то $f(x) = p\text{-}\lim_n f(x_n)$. Действительно, пусть U — окрестность точки $f(x) \in Y$, тогда в силу непрерывности f у точки $x \in X$ найдётся окрестность V такая, что $V \subset f^{-1}(U)$. Равенство $x = p\text{-}\lim_n x_n$ равносильно тому, что $\{n : x_n \in V \subset f^{-1}(U)\} \in p$, следовательно, $\{n : f(x_n) \in U\} \in p$.

(iii) Предположим, что $p \in \omega^*$, $\varphi\colon \omega \to \omega$ — произвольная функция, $(x_n)_{n\in\omega}$ и $(y_k)_{k\in\omega}$ — две последовательности в пространстве X и существует $P_0 \in p$ такое, что $y_{\varphi(n)} = x_n$ для $n \in P_0$. Если $x = p\text{-}\lim_n x_n$, то $x = \beta\varphi(p)\text{-}\lim_k y_k$. Действительно, для любой окрестности U точки x мы имеем $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$. Следовательно, множество $P = \{n \in P_0 : y_{\varphi(n)} \in U\}$ принадлежит ультрафильтру p. Таким образом, $\{k \in \omega : y_k \in U\} \supset \varphi(P) \in \beta\varphi(p)$.

Замечание 1.1.2. Если X — компакт, то любая последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ в X имеет в точности один p-предел для любого $p \in \beta\omega$. Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть непрерывное продолжение $\beta f\colon \beta\omega \to X$ отображения $f\colon \omega \to X$, определённого как $f(n) = x_n$ для $n \in \omega$, и применить замечание 1.1.1, согласно которому $p\text{-}\lim_n x_n = \beta f(p\text{-}\lim_n n) = \beta f(p)$.

Определение 1.1.5. Ультрафильтры p и q на ω называются *эквивалентными*, если существует биекция $\varphi\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta\varphi(p) = q$.

Замечание 1.1.3. Ультрафильтры p и q на ω эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют функция $f\colon \omega \to \omega$ и $A \in p$ такие, что $\beta f(p) = q$ и сужение $f \restriction A$ функции f на множество A взаимно однозначно. Действительно, пусть такие f и A существуют. Выберем $B \subset A$, $B \in p$, для которого $|\omega \setminus B| = |\omega \setminus f(B)| = \omega$. (Такой элемент B найдётся, поскольку если взять экземпляр $\omega = f(\omega)$ и представить его в виде разбиения $\omega = \omega_{\text{чёт.}} \sqcup \omega_{\text{нечёт.}}$ на чётные ($\omega_{\text{чёт.}}$) и нечётные ($\omega_{\text{нечёт.}}$) числа, то либо $\omega_{\text{чёт.}} \in q$ либо $\omega_{\text{нечёт.}} \in q$, поскольку q — ультрафильтр. Пусть для определённости $\omega_{\text{чёт.}} \in q$, тогда элемент $B = f^{-1}\left(\omega_{\text{чёт.}} \cap f(A)\right)$ будет искомым.) Если взять любую биекцию $g\colon \omega \to \omega$, продолжающую $f \restriction B$, то получится эквивалентность p и q. Обратная импликация очевидна.

Продолжение βf функции $f\colon \omega \to K$ в произвольный компакт K имеет простое описание: образ βf ультрафильтра p определяется как $\{\beta f(p)\} = \bigcap_{A\in p} \overline{f(A)}$ (см. [21, теорема 3.27]).

1.2. Порядок на ультрафильтрах

Существует несколько естественных отношений порядка на классах эквивалентных ультрафильтров. Мы рассмотрим порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на ультрафильтрах из $\beta\omega$. Более детальную информацию про порядки на ультрафильтрах можно найти, например, в [21], [22], [23].

Определение 1.2.1. *Порядок Рудин–Кейслера* $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$, если существует функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$.

Определение 1.2.2. *Порядок Рудин–Бласса* $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q$, если существует конечнократная функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$.

Определение 1.2.3. *Порядок Рудин–Фролика* $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$, если существует инъективная функция $\varphi\colon \omega \to \beta\omega$ такая, что $\varphi(\omega)$ дискретно и $\beta\varphi(p) = q$.

Заметим, что отображение φ в последнем определении и отображение f в двух предыдущих действуют на ультрафильтры p и q в противоположных направлениях.

В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующая лемма:

Лемма 1.2.1. *Пусть X — регулярное топологическое пространство, тогда любое дискретное множество $D = \{d_n : n \in \omega\}$ из X сильно дискретно, т.е. существует система попарно непересекающихся открытых множеств $\{U_n : n \in \omega\}$ в X такая, что $d_n \in U_n$ и $U_n \cap (\overline{D} \setminus D) = \varnothing$ для любого $n \in \omega$.*

Доказательство. В силу дискретности множества D у каждой точки $d_k \in D$ есть окрестность W_k такая, что $d_n \notin W_k$ для любого $n \in \omega \setminus \{k\}$. У каждой точки d_k возьмём открытую окрестность $\widetilde{W_k} = W_k \setminus (\overline{D} \setminus D) = W_k \setminus \overline{D} \cup \{d_k\}$. В силу регулярности пространства X найдётся окрестность V_k, для которой $\overline{V}_k \subset \widetilde{W}_k$. По индукции построим систему попарно непересекающихся открытых окрестностей $U_0, U_1, \ldots$ точек из множества D:

$$U_0 = V_0, \quad U_1 = V_1 \setminus \overline{V}_0, \quad \ldots, \quad U_n = V_n \setminus \bigcup_{i<n} \overline{V}_n, \quad \ldots .$$

∎

Известно, что все эти соотношения действительно являются порядками на классах эквивалентности ультрафильтров. Порядок $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ наибольший. Действительно, ясно, что имеет место импликация $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q \implies p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$. Покажем, что из $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$ следует $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$. Пусть $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$, φ — функция из определения порядка Рудин–Фролика и A_i, $i \in \omega$, — непересекающиеся подмножества ω, определяющие непересекающиеся окрестности $\overline{A_i}$ точек $\varphi(i)$ в $\beta\omega$ (такие окрестности легко можно построить, см. лемму 1.2.1). Рассмотрим функцию $f \colon \omega \to \omega$ такую, что $f(n) = i$ для $n \in A_i$ и $f(n) = 0$ для $n \notin \bigcup A_i$. Из вида функции f следует, что $\beta f(q) = p$, а значит, $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$. Действительно, $\beta f(\overline{A_i}) = \{i\}$, т.к. $\beta f \restriction A_i = f \restriction A_i \equiv i$ и A_i плотно в $\overline{A_i}$, поэтому $\beta f(\varphi(i)) = i$ в силу включения $\varphi(i) \in \overline{A_i}$. Таким образом, $\beta f \circ \beta\varphi = \mathrm{id}$ на ω, а поскольку $\overline{\omega} = \beta\omega$, имеет место равенство $\beta f \circ \beta\varphi = \mathrm{id}$ на $\beta\omega$. Следовательно, $\beta f(\beta\varphi(p)) = p$, т.е. $\beta f(q) = p$.

Замечание 1.2.1. Любой неглавный ультрафильтр на ω имеет не более 2^ω $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественников (поскольку число функций $\omega \to \omega$ равно 2^ω).

Предложение 1.2.1. *Для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$ тогда и только тогда, когда q — это p-предел дискретной последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ различных* *точек в $\beta\omega$.*

Доказательство. Из пункта (i) замечания 1.1.1 мы имеем $p = p\text{-}\lim_n n$, а из (ii) $\beta\varphi(p) = p\text{-}\lim_n \beta\varphi(n)$ для любой функции $\varphi\colon \omega \to \beta\omega$. Таким образом, $q = p\text{-}\lim_n x_n$ тогда и только тогда, когда $q = \beta\varphi(p)$ для функции $\varphi(n) = x_n$ для $n \in \omega$. Поэтому если множество $\{x_n : n \in \omega\}$ дискретно и состоит из различных точек, то из равенства $q = p\text{-}\lim_n x_n$ вытекает существование функции φ из определения неравенства $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$. Обратно, если такое отображение φ существует, то по доказанному $q = \beta\varphi(p)$. ■

Следствие 1.2.1. *Если $p, q, r \in \omega^*$, $(x_n)_{n\in\omega}$ — дискретная последовательность различных точек в $\beta\omega$, $q = p\text{-}\lim_n x_n$ и $q \leqslant_{RK} r$, то $p \leqslant_{RK} r$.*

Доказательство. По предложению 1.2.1 $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$. Поскольку порядок Рудин–Кейслера наибольший, имеем также $p \leqslant_{RK} q$, откуда немедленно вытекает требуемое неравенство. ■

Следующая теорема была доказана М. Е. Рудин в [24] (см. также [22, теорема 16.16]).

Теорема 1.2.1 [24]**.** *Множество всех $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-предшественников любого ультрафильтра $p \in \beta\omega$ линейно упорядочено отношением $\leqslant_{\mathrm{RF}}$.*

Определение 1.2.4 [2]**.** Точка x в топологическом пространстве X называется *P-точкой*, если для любой счётной последовательности её окрестностей $U_0, U_1, \ldots$ пересечение $\bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$ тоже является её окрестностью (не обязательно открытой).

Определение 1.2.5 [25]**.** Точка $x \in X$ называется *слабой P-точкой*, если она не является предельной точкой никакого счётного подмножества X.

Определение 1.2.6. Точка $x \in X$ называется *дискретно слабой P-точкой*, если она не является предельной точкой никакого счётного дискретного подмножества X.

Замечание 1.2.2 [48]**.** Известно, что $p \in \omega^*$ является P-точкой, если для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся $A \in p$ такой, что $f \restriction A$ конечнократно или является константой, или, что эквивалентно, для любой данной последовательности $(A_n)_{n\in\omega}$ элементов ультрафильтра p найдётся $A \in p$ такой, что $A \subset^* A_n$ (т.е. $|A \setminus A_n| < \omega$) для каждого $n \in \omega$.

Существование слабых P-точек в ω^* может быть доказано в ZFC [25], в то время как существование P-точек в ω^* не зависит от ZFC (см., например, [26]). Заметим, что существуют дискретно слабые P-точки в ω^*, которые не являются слабыми P-точками: пример такой точки — любая одинокая точка (понятие, введённое Симоном), существование которой доказано Вернером в [27]. Также заметим, что *не* дискретно слабые P-точки в ω^* — это в точности точки типа A_1 в терминологии ван Милла [23].

Различают ещё другие типы ультрафильтров — селективные и Q-ультрафильтры (см., например, [29] и [30]).

Определение 1.2.7. Ультрафильтр $p \in \omega^*$ называется *селективным*, или, *рамсеевским*, если для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся $A \in p$ такой, что $f \restriction A$ инъективно или является константой.

Замечание 1.2.3. Это определение эквивалентно следующему: для любой убывающей последовательности элементов $(A_n)_{n\in\omega}$ ультрафильтра p найдётся $A \in p$ такой, что $|A \cap (A_n \setminus A_{n+1})| \leqslant 1$ для любого $n \in \omega$.

Определение 1.2.8. Ультрафильтр $p \in \omega^*$ называется *Q-точкой*, или *редким*, если для любой конечнократной функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся $A \in p$ такой, что $f \restriction A$ инъективно.

Доказательство следующей теоремы по существу содержится в [22].

Теорема 1.2.2. (i) *Ультрафильтр $p \in \omega^*$ минимальный в смысле порядка Рудин–Кейслера тогда и только тогда, когда p селективный.*

(ii) *Ультрафильтр $p \in \omega^*$ минимальный в смысле порядка Рудин–Бласса тогда и только тогда, когда p — Q-точка.*

(iii) *Ультрафильтр $p \in \omega^*$ минимальный в смысле порядка Рудин–Фролика тогда и только тогда, когда p — дискретно слабая P-точка в ω^*.*

Доказательство. Утверждение (i) — это теорема 9.6 из [22]. Утверждение (ii) (как и (i)) легко следует из определений и замечания 1.1.3. Утверждение (iii) — это лемма 16.14 из [22]. ■

В классе P-точек $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ совпадает с $\leqslant_{\mathrm{RB}}$. Более того, имеет место следующее утверждение:

Предложение 1.2.2. *Если $p, q \in \omega^*$, q — P-точка и $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$, то $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q$.*

Доказательство. В силу условия $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ найдётся функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$. Из того, что q является P-точкой, следует, что существует элемент $A \in q$ такой, что $f \upharpoonright A$ конечнократно. Как и в замечании 1.1.3, выберем $B \subset A$, $B \in q$, для которого $|\omega \setminus B| = |\omega \setminus f(B)| = \omega$. Возьмём любую биекцию g между $\omega \setminus B$ и $\omega \setminus f(B)$. Определим отображение $h\colon \omega \to \omega$ следующим образом: $h(n) = f(n)$ для $n \in B$ и $h(n) = g(n)$ для $n \in \omega \setminus B$. Оно конечнократно и $\beta h(q) = p$, т.к. для любого $C \in q$ имеем $h(C \cap B) \in p$ по построению и из включения $h(C) \supset h(C \cap B)$ следует, что $h(C) \in p$. Значит, $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q$. ■

Следующий замечательный результат ван Милла показывает, что порядок $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ намного меньше, чем $\leqslant_{\mathrm{RK}}$.

Теорема 1.2.3 (см. [23, теорема 4.5.1])**.** *Существует конечнократная функция $\pi\colon \omega \to \omega$ такая, что для любого данного ультрафильтра $p \in \omega^*$ найдётся слабая P-точка $q \in \omega^*$, для которой $\beta\pi(q) = p$ (и следовательно, $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q$ и $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$).*

Известно, что существует 2^{2^ω} $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несравнимых (и следовательно, $\leqslant_{\mathrm{RB}}$- и $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-несравнимых) ультрафильтров из ω^* [32]. Однако проблема существования $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-*несовместимых* (т.е. не имеющих общего $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественника) ультрафильтров намного сложнее. С одной стороны, CH влечёт за собой существование 2^{2^ω} неэквивалентных $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-минимальных ультрафильтров в ω^* [33, раздел 8, следствие 8]. Ясно, что такие ультрафильтры не могут быть сравнимы в порядках $\leqslant_{\mathrm{RK}}$, $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ и $\leqslant_{\mathrm{RF}}$. С другой стороны, с ZFC совместимо утверждение, что все ультрафильтры в ω^* являются *почти когерентными* (т.е. для любых двух ультрафильтров p и q из ω^* найдутся конечнократные функции $f\colon \omega \to \omega$ и $g\colon \omega \to \omega$ такие, что $\beta f(p) = \beta g(q)$), а значит, $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-совместимыми [34]. Известно также, что в ZFC найдётся по крайней мере 2^ω неэквивалентных (даже $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несравнимых) слабых P-точек в ω^* [25], а такие точки $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимальны и поэтому $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-несовместимы.

1.3. Дискретные ультрафильтры

В [20] Баумгартнер ввёл понятие I-ультрафильтра и связанные с ними классы ультрафильтров.

Определение 1.3.1 (Baumgartner, [20]). Пусть I — семейство подмножеств множества X, которое содержит все одноэлементные множества и замкнуто относительно взятия подмножеств. Ультрафильтр p на ω называется *I-ультрафильтром*, если для любого отображения $f\colon \omega \to X$ найдётся $A \in p$ такой, что $f(A) \in I$.

Если $X = \mathbb{R}$ и I — семейство всех дискретных (разреженных, меры ноль, нигде не плотных) подмножеств пространства $\mathbb{R}$, I-ультрафильтр называется *дискретным* (*разреженным, меры ноль, нигде не плотным* соответственно).

Замечание 1.3.1. Баумгартнер также доказал, что *для $I = \{Y \subset 2^\omega : Y$ конечно или порядкового типа ω или $\omega+1\}$ неглавные I-ультрафильтры — это в точности P-точки из ω^** (здесь 2^ω — канторово множество с лексикографическим порядком). Отсюда немедленно вытекает, что всякая P-точка в ω^* является дискретным ультрафильтром.

Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} P\text{-точка} \implies \text{дискретный} &\implies \text{разреженный} \\ \implies \text{меры ноль} &\implies \text{нигде не плотный}. \end{aligned}$$

В предположении аксиомы Мартина ни одна из этих импликаций не обратима [20]. Не имеет смысла говорить об их обратимости без дополнительных теоретико-множественных предположений, поскольку несуществование нигде не плотных ультрафильтров совместимо с ZFC [26].

Рассматривая семейство I дискретных подмножеств пространства X и накладывая дополнительные предположения на $f\colon I \to X$, получим различные классы дискретноподобных ультрафильтров.

Определение 1.3.2. Пусть X — топологическое пространство. Скажем, что ультрафильтр p на ω является X-дискретным (конечнократно X-дискретным, инъективно X-дискретным), если для любой (для любой конечнократной, для любой инъективной соответственно) функции $f\colon \omega \to X$ найдётся $A \in p$ такой, что $f(A)$ дискретно в X. Для $X = \mathbb{R}$ мы пишем «дискретный» вместо «$\mathbb{R}$-дискретный».

Замечание 1.3.2. Заметим, что всякий ω^*-дискретный (в любом смысле) ультрафильтр p является $\beta\omega$-дискретным (в этом же смысле). Действительно, возьмём функцию $f\colon \omega \to \beta\omega$. Если $A = f^{-1}(\omega) \in p$, то множество

$f(A) \subset \omega \subset \beta\omega$ дискретно; в противном случае $B = \omega \setminus A \in p$, и мы можем зафиксировать произвольные различные точки $q_n \in \omega^* \setminus f(B), n \in \omega$, и рассмотреть отображение $g\colon \omega \to \omega^*$, определённое следующим образом: $g(n) = f(n)$ для $n \in B$ и $g(n) = q_n$ для $n \in A$. Возьмём $C \in p$ такое, что $g(C)$ дискретно. Тогда $C \cap B \in p$ и $f(C \cap B) = g(C \cap B)$ дискретно.

Инъективно дискретный и инъективно ω^*-дискретный ультрафильтры рассмотрены в [35] (там они называются просто «дискретный» и «ω^*-дискретный»). В доказательстве следующего предложения используются идеи доказательства предложения 12 в [35].

Предложение 1.3.1. *Любой дискретный (конечнократно дискретный, инъективно дискретный) ультрафильтр является X-дискретным (конечнократно X-дискретным, инъективно X-дискретным соответственно) для любого тихоновского пространства X.*

Доказательство. Пусть p — дискретный ультрафильтр и $f\colon \omega \to X$ — произвольное отображение. Положим $x_n = f(n)$ для $n \in \omega$. Если f постоянно, то доказывать нечего. Пусть f не постоянно. Для каждой пары (x_k, x_m) различных точек в $f(\omega)$ возьмём непрерывную функцию $f_{(k,m)}\colon f(\omega) \to \{0,1\}$ такую, что $f_{(k,m)}(x_k) = 0$ и $f_{(k,m)}(x_m) = 1$ (она существует, поскольку X — тихоновское пространство и $f(\omega)$ счётно, а значит, нульмерно). Диагональ $g = \Delta\{f_{(k,m)} : x_k \neq x_m\}$ — инъективное непрерывное отображение множества $f(\omega)$ в канторово множество $2^\omega \subset \mathbb{R}$. Поскольку ультрафильтр p дискретный, найдётся множество $A \in p$, для которого $g(f(A))$ дискретно. Таким образом, сужение функции g на множество $f(A)$ является непрерывным инъективным отображением на дискретное пространство. Следовательно, $f(A)$ дискретно. Для конечнократно и инъективно дискретных ультрафильтров доказательство аналогично. ■

Таким образом, любой дискретный ультрафильтр является X-дискретным для любого тихоновского пространства X, однако неясно, скажем, является ли ω^*-дискретный ультрафильтр дискретным. Неясно также, вытекает ли конечнократная дискретность из инъективной дискретности и дискретность из конечнократной дискретности, хотя ответ вряд ли будет положительным. Однако несуществование инъективно и конечнократно дискретных ультрафильтров, также как и дискретных, совместимо с ZFC, потому что оно следует из несуществования нигде плотных ультрафильтров. Доказательство следующего утверждения любезно подсказал Тарас Банах.

Предложение 1.3.2. *Несуществование нигде не плотных ультрафильтров влечёт за собой несуществование инъективно дискретных ультрафильтров.*

Доказательство. Скажем, что ультрафильтр p на ω инъективно нигде не плотный, если для любой инъективной функции $f\colon \omega \to \mathbb{R}$ найдётся $A \in p$ такое, что $f(A)$ нигде не плотно. Покажем, что несуществование нигде не плотных ультрафильтров влечёт за собой несуществование инъективно нигде не плотных ультрафильтров. Пусть не существует нигде не плотных ультрафильтров, но существует инъективно нигде не плотный ультрафильтр p. Поскольку p не является нигде не плотным, существует функция $f\colon \omega \to (0;1) \cong \mathbb{R}$ такая, что для любого элемента $A \in p$ существует открытое множество $U \subset (0;1)$, для которого $U \cap f(A)$ плотно в U. Возьмём инъективную функцию $g\colon \omega \to \mathbb{R}$ такую, что $|g(n) - f(n)| < 2^{-n}$ для любого n. Поскольку p — инъективно нигде не плотный ультрафильтр, существует элемент $A \in p$ такой, что $g(A)$ нигде не плотно в $\mathbb{R}$. С другой стороны, в силу выбора функции f множество $U \cap f(A)$ плотно в U. Таким образом, $U \cap f(A)$ не имеет изолированных точек. Из условия $|g(n) - f(n)| \to 0$ следует, что $U \cap g(A)$ плотно в U, поэтому $g(A)$ не может быть нигде не плотным в $\mathbb{R}$. ∎

Предложение 1.3.3. (i) *Если $p \in \beta\omega$ является X-дискретным для некоторого пространства X и $q \leqslant_{\mathrm{RK}} p$, то q является X-дискретным.*

(ii) *Если $p \in \beta\omega$ является конечнократно X-дискретным для некоторого пространства X и $q \leqslant_{\mathrm{RB}} p$, то q является конечнократно X-дискретным.*

(iii) *Если $q \in \beta\omega$ является ω^*-дискретным и p — нетривиальный q-предел некоторой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ из $\beta\omega$, то найдётся $r \in \beta\omega$ такой, что $r \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ и $r \leqslant_{\mathrm{RF}} p$. Более того, $p = r\text{-}\lim_n x_{k_n}$ для некоторой дискретной подпоследовательности $(x_{k_n})_{n\in\omega}$ последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, состоящей из попарно различных точек.*

(iv) *Если $q \in \beta\omega$ является инъективно ω^*-дискретным, то $q \leqslant_{\mathrm{RF}} p$ тогда и только тогда, когда p является q-пределом некоторой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ попарно различных точек из $\beta\omega$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) очевидны, также как и необходимость в (iv) (см. предложение 1.2.1).

Докажем (iii). Пусть $(x_n)_{n\in\omega}$ — произвольная последовательность точек $\beta\omega$ и p — нетривиальный q-предел последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$. Если ультрафильтр q главный, то доказывать нечего, так что пусть $q \in \omega^*$. В силу замечания 1.3.2 ω^*-дискретность ультрафильтра p влечёт за собой $\beta\omega$-дискретность. Выберем элемент $A \in q$ так, чтобы множество $\{x_n : n \in A\}$ было дискретным. Это множество бесконечно, поскольку p — нетривиальный q-предел последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$. Пусть $(x_{k_n})_{n\in\omega}$ — подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, состоящая из различных точек и такая, что $\{x_n : n \in A\} = \{x_{k_n} : n \in \omega\}$. Заметим, что последовательность $(x_{k_n})_{n\in\omega}$ дискретна.

Возьмём произвольную функцию $\pi\colon \omega \to \omega$ такую, что для любого $i \in A$ $\pi(i) = n$ тогда и только тогда, когда $x_i = x_{k_n}$. Ультрафильтр $r = \beta\pi(q)$ является $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественником для q, и для любой окрестности $\overline{U}$ ультрафильтра $p \in \beta\omega$ (где $U \in p$) мы имеем $\{n : x_{k_n} \in \overline{U}\} = \{n : x_{k_n} \in U\} = \pi(\{n : x_n \in U\}) \in r$, поэтому $p = r\text{-}\lim_n x_{k_n}$. Из замечания 1.1.1 получаем, что $r \leqslant_{\mathrm{RF}} p$.

Доказательство достаточности в (iv) аналогично доказательству пункта (iii) с той разницей, что мы должны будем рассмотреть инъективную последовательность; тогда сужение π на A взаимно однозначно и поэтому ультрафильтр q эквивалентен r (см. рассуждение в теореме 1.2.2). ■

1.4. Произведение ультрафильтров

Напомним, что *базой фильтра* p на множестве X называется семейство подмножеств $\mathfrak{B} \subset p$ такое, что для любого $P \in p$ найдётся элемент $B \in \mathfrak{B}$ со свойством $B \subset P$.

Определение 1.4.1. Пусть p и q — ультрафильтры на ω. Тогда *тензорным произведением*, или *произведением Фубини*, $p \otimes q$ ультрафильтров p и q называется ультрафильтр на $\omega \times \omega$, определённый следующим образом:

$$p \otimes q = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n : \{m : (n, m) \in A\} \in q\} \in p\}.$$

Базу произведения $p \otimes q$ составляют множества вида $\bigcup\limits_{x\in P} \{x\} \times Q_x$, где $Q_x \in q$ для любого $x \in P$.

Обобщением тензорного произведения двух ультрафильтров является сумма Фубини последовательности ультрафильтров $q_n \in \beta\omega$ по ультрафильтру $p \in \beta\omega$; его базу составляют множества вида $\bigcup\limits_{n\in P} \{n\} \times Q_n$, где $P \in p$ и $Q_n \in q_n$ для любого $n \in P$.

Рассматривая произведения ультрафильтров, мы предполагаем, что $\omega\times$

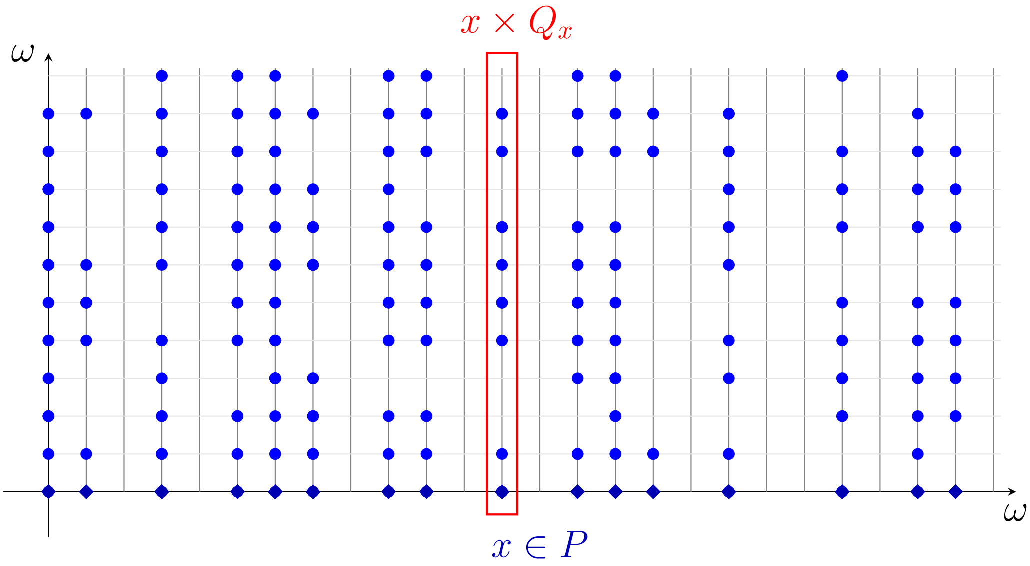


Рис. 1. Наглядная иллюстрация тензорного произведения ультрафильтров p и q.

ω снабжено дискретной топологией, так что пространство $\beta(\omega\times\omega)$ состоит из ультрафильтров на $\omega \times \omega$ и топология на нём определяется базой $\overline{A} = \{p \in \beta(\omega \times \omega) : A \in p\}$. Таким образом, пространства $\beta\omega$ и $\beta(\omega \times \omega)$ гомеоморфны и имеют одинаковое описание, все понятия и конструкции, относящиеся к $\beta\omega$, переносятся без изменений на $\beta(\omega \times \omega)$. В дальнейшем мы будем отождествлять ω с $\omega \times \omega$ и $\beta\omega$ с $\beta(\omega \times \omega)$.

В [23] ван Милл определил различные топологические типы ультрафильтров из ω^*, одним из которых является

$$A_1 = \{x \in \omega^* : \exists\,\text{счётное дискретное}\ D \subset \omega^* \setminus \{x\},\ x \in \overline{D}\}.$$

Предложение 1.4.1. *Пусть p, q — ультрафильтры из ω^*, тогда тензорное произведение $p \otimes q$ принадлежит A_1.*

Доказательство. Для любого $n \in \omega$ через $p(n)$ обозначим главный ультрафильтр, содержащий $\{n\}$. Пусть $r = p\text{-}\lim_n(p(n) \otimes q)$. Любая окрестность ультрафильтра r в $\beta(\omega\times\omega)$ содержит окрестность вида $\overline{A}$ для $A \in r$. Поскольку $r = p\text{-}\lim_n(p(n) \otimes q)$, для любого $A \in r$ мы имеем $B = \{n : A \in p(n) \otimes q\} = \{n : p(n) \otimes q \in \overline{A}\} \in p$. Следовательно, для любого $n \in \omega$ существует $B_n \in q$ такое, что $\{n\} \times B_n \subset A$. Таким образом, каждое множество $A \in r$ содержит $\bigcup\limits_{n\in B} \{n\} \times B_n$ для некоторых $B_n \in q$. Это следует из определения базы произведения ультрафильтров $r = p \otimes q$. Заметим, что множество $D = \{p(n) \otimes q : n \in \omega\}$ счётно и дискретно (непересекающиеся окрестности его элементов — это множества $\overline{\{n\} \times B_n}$) и $p \otimes q \in \overline{D}$, поскольку любая окрестность ультрафильтра $p \otimes q$ содержит окрестность вида $\overline{A}$ для $A \in p \otimes q$, любое множество A содержит $B = \{n\} \times B_n$ для некоторых $n \in \omega$ и $B_n \in q$, и $\overline{B}$ — это окрестность ультрафильтра $p(n) \otimes q$ для любого такого $\overline{B}$. ■

Следствие 1.4.1. *Тензорное произведение двух неглавных ультрафильтров не может быть дискретно слабой P-точкой. Таким образом, любое такое произведение не $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимально.*

Предложение 1.4.2. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных, инъективно X-дискретных) ультрафильтров $p, q_n \in \omega^*$, $n \in \omega$, сумма Фубини $\sum_p(q_n)$ — это X-дискретный (конечнократно X-дискретный, инъективно X-дискретный) ультрафильтр на $\omega \times \omega$.*

Доказательство. Возьмём произвольное (конечнократное, инъективное) отображение $f\colon \omega \times \omega \to X$. Положим $x_{(n,m)} = f(n,m)$. Покажем, что существует $A \in \sum_p(q_n)$, для которого множество $\{x_{(n,m)} : (n,m) \in A\}$ дискретно. Для каждого $k \in \omega$ определим последовательность $(x_{(k,m)})_{m\in\omega}$. Поскольку ультрафильтры q_k дискретны, для каждого $k \in \omega$ найдётся $B_k \in q_k$, для которого множество $\{x_{(k,m)} : m \in B_k\}$ дискретно. Вспомним, что в компакте любая последовательность по любому ультрафильтру куда-нибудь сходится. Пусть $x_k = q_k\text{-}\lim_m x_{(k,m)}$ для $k \in \omega$. Из X-дискретности ультрафильтра p следует существование $C \in p$, для которого множество $\{x_k : k \in C\}$ дискретно. Поскольку множество $\{x_k : k \in C\}$ счётно и дискретно, существует система попарно непересекающихся окрестностей U_k точек x_k в X (см. лемму 1.2.1). Для любой окрестности U_k мы имеем $\widetilde{B}_k = \{m : x_{(k,m)} \in U_k\} \in q_k$, поскольку $x_k = q_k\text{-}\lim_m x_{(k,m)}$. Таким образом, $A = \bigcup_{k\in C}\big(\{k\}\times(B_k \cap \widetilde{B}_k)\big) \in \sum_p(q_k)$. Ясно, что множество $\{x_{(n,m)} : (n,m) \in A\}$ дискретно. ■

Следствие 1.4.2. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных) ультрафильтров $p, q \in \omega^*$ тензорное произведение $p \otimes q$ является X-дискретным (конечнократно X-дискретным) ультрафильтром на $\omega \times \omega$.*

Ниже мы рассмотрим $\mathbb{N}$ — множество положительных целых чисел вместо ω, поскольку операция умножения на $\mathbb{N}$ является конечнократной. На пространстве $\beta\mathbb{N}$ определены полугрупповые операции $\cdot$ и $+$, причём они продолжают обычные операции умножения и сложения на $\beta\mathbb{N}$ (см. [21]). Для данных ультрафильтров p и q на $\mathbb{N}$ базу полугруппового произведения $p \cdot q$ и суммы $p + q$ образуют, соответственно, следующие множества:

$$\bigcup_{n \in P}(n \cdot Q_n) \quad \text{и} \quad \bigcup_{n \in P}(n + Q_n), \quad \text{где } P \in p \text{ и } Q_n \in q \text{ для каждого } n \in P$$

(здесь $\cdot$ и $+$ обозначают операции умножения и сложения в $\mathbb{N}$). Отображения

$$\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m, n) \mapsto m \cdot n, \quad \text{и} \quad +\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m, n) \mapsto m + n,$$

конечнократны. Ясно, что $\cdot(p \otimes q) = p \cdot q$ и $+(p \otimes q) = p \cdot q$ для любых $p, q \in \beta\mathbb{N}$. Имеет место следующее утверждение:

Следствие 1.4.3. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных) ультрафильтров $p, q \in \mathbb{N}^*$ ультрафильтры $p \cdot q$ и $p + q$ являются X-дискретными (конечнократно X-дискретными).*

Следствие 1.4.4. *Множества дискретных, конечнократно дискретных, ω^*-дискретных и конечнократно ω^*-дискретных ультрафильтров на $\mathbb{N}$ образуют подполугруппу в полугруппах $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ и $(\beta\mathbb{N}, +)$.*

Следствие 1.4.5. *Если существуют дискретные ультрафильтры, то существуют дискретные ультрафильтры, которые не являются дискретно слабыми P-точками (и, следовательно, не являются $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимальными).*

Глава 2

Свойства типа экстремальной несвязности

2.1. Классы пространств между классами F- и $\beta\omega$-пространств

В этой главе мы рассмотрим экстремально несвязные, F- и $\beta\omega$-пространства и введём промежуточные классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств.

Определение 2.1.1 [15]**.** Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого открытого множества в X открыто.

Предложение 2.1.1 [15]**.** *Топологическое пространство X является экстремально несвязным тогда и только тогда, когда $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ для любых двух непересекающихся открытых множеств $U, V \subset X$.*

Напомним определения *функционально открытых* и *функционально замкнутых* множеств.

Определение 2.1.2. Множество A в топологическом пространстве X называется *функционально замкнутым*, или *нуль-множеством*, если существует непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $A = f^{-1}(\{0\})$.

Определение 2.1.3. Множество A в топологическом пространстве X называется *функционально открытым*, или *конуль-множеством*, если существует непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Замечание 2.1.1. Поскольку пространство $\mathbb{R}$ совершенно нормально (т.е. оно нормально и каждое замкнутое в нём множество является пересечением счётного числа открытых), функционально замкнутые (открытые) подмножества пространства X — это в точности прообразы замкнутых (открытых) подмножеств $\mathbb{R}$ при непрерывных отображениях X в $\mathbb{R}$ (см. [37, с. 82]).

Определение 2.1.4. Два множества A и B в тополологическом пространстве X *функционально отделимы*, если существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$.

Определение 2.1.5. Топологическое пространство X является *F-пространством*, если любые непересекающиеся функционально открытые подмножества X функционально отделимы, и *F'-пространством*, если любые такие подмножества имеют непересекающиеся замыкания.

Замечание 2.1.2. Ясно, что любые два функционально отделимых множества A и B в пространстве X имеют непересекающиеся замыкания, поэтому всякое F-пространство является F'-пространством.

Пусть A и B — функционально открытые непересекающиеся подмножества экстремально несвязного пространства X, тогда, очевидно, $\overline{A}$ открыто в X и $B \subset X \setminus \overline{A}$. Возьмём функцию $f\colon X \to [0;1]$ такую, что $f(\overline{A}) \subset \{1\}$ и $f(X \setminus \overline{A}) \subset \{0\}$, она непрерывна, поскольку $\overline{A}$ открыто-замкнуто. Отсюда имеем, что множества A и B функционально отделены. Таким образом, любое экстремально несвязное пространство является F-пространством.

Класс $\beta\omega$-пространств был введён ван Дауэном в [17], он обобщает класс F-пространств.

Определение 2.1.6. Топологическое пространство X называется *$\beta\omega$-пространством*, если каково бы ни было дискретное счётное подмножество $D \subset X$ с компактным замыканием, замыкание $\overline{D}$ гомеоморфно стоун-чеховской компактификации βD.

Замечание 2.1.3. Из определения 2.1.6 вытекает, что если в пространстве X нет бесконечных компактов, то оно является $\beta\omega$-пространством.

Замечание 2.1.4. Стоун-чеховская компактификация $\beta\omega$ дискретного множества ω представляет собой экстремально несвязное пространство [15]. Любое счётное подмножество экстремально несвязного пространства является экстремально несвязным [15]. Нетрудно видеть, что экстремально несвязное пространство не может содержать сходящихся последовательностей. В $\beta\omega$-пространстве также нет сходящихся последовательностей в силу того, что любая сходящаяся последовательность — это компактное замыкание счётного дискретного множества, не гомеоморфное $\beta\omega$.

Замечание 2.1.5. Все счётные подпространства пространства X экстремально несвязны тогда и только тогда, когда любые счётные отделённые подмножества X имеют непересекающиеся замыкания. Действительно, допустим, что все счётные подпространства X экстремально несвязны, и пусть A и B — счётные отделённые подмножества X. Предположим, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $A \cup B \cup \{x\}$ счётно, а значит, экстремально несвязно, и A и B отделены в $A \cup B \cup \{x\}$. Точка x принадлежит пересечению замыканий множеств A и B в $A \cup B \cup \{x\}$, что противоречит предложению 1.9 статьи [36]. Обратно, пусть все счётные отделённые подмножества X имеют непересекающиеся замыкания, и пусть Y — счётное подпространство X. Очевидно, что любые непересекающиеся открытые подмножества Y отделены в Y, а потому и в X. Следовательно, они имеют непересекающиеся замыкания в X, а значит, и в Y.

Замечание 2.1.6. Из предыдущего замечания следует, что любое счётное подпространство экстремально несвязного пространства является экстремально несвязным.

Из сделанных выше наблюдений получаются естественные обобщения классов F-пространств.

Определение 2.1.7. Топологическое пространство X назовём

- $\mathscr{R}_1$-*пространством*, если любое счётное подмножество пространства X экстремально несвязно, т.е. любые два счётных отделённых подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания;
- $\mathscr{R}_2$-*пространством*, если любые два счётных отделённых подмножества пространства X, одно из которых дискретно, имеют непересека-

ющиеся замыкания;

- $\mathscr{R}_3$-*пространством*, если любые два счётных отделённых дискретных подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания.

Сразу же отметим, что классы $\mathscr{R}_i$-пространств для $i = 1, 2, 3$, в отличие от классов экстремально несвязных пространств и F-пространств, обладают полезным свойством наследственности:

Предложение 2.1.2. *Для произвольного топологического пространства X свойство быть $\mathscr{R}_i$-пространством для $i = 1, 2, 3$ наследуется любыми подпространствами.*

Доказательство. В качестве примера рассмотрим случай, когда X — $\mathscr{R}_3$-пространство, для $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_2$-пространств рассуждение аналогично. Пусть $Y \subset X$ — произвольное подпространство. Возьмём отделённые дискретные подмножества A и B в Y, т.е. такие, что $\overline{A}^Y \cap B = A \cap \overline{B}^Y = \varnothing$, и покажем, что они имеют непересекающиеся замыкания в Y. Для начала заметим, что $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$. Следовательно, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, а значит, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, поскольку X — $\mathscr{R}_3$-пространство. Таким образом, $Y \cap \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, т.е. $\overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y = \varnothing$. ■

Очевидно, что $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_2 \subset \mathscr{R}_3$, однако обратные включения, как будет показано ниже, неверны.

2.2. Различающие примеры $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств

Пример 2.2.1 (*Компактное $\mathscr{R}_2$-пространство, не являющееся $\mathscr{R}_1$-пространством*)**.** Возьмём два экземпляра нароста ω^* стоун-чеховского расширения дискретного пространства ω, и в каждом из них выберем дискретно слабую P-точку, не являющуюся слабой P-точкой. Напомним, что такие точки всегда существуют (см. определение *одинокой точки* и доказательство её существования в [27]). Склеим копии ω^* по этим двум точкам, т.е. применим к $\omega^* \oplus \omega^*$ факторное отображение, которое отождествляет две выбранные точки друг с другом. Полученное пространство X является $\mathscr{R}_2$-пространством, но не $\mathscr{R}_1$-пространством. Действительно, пусть A и B — счётные отделённые подмножества пространства X, и пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Если x не является точкой склеивания, то она принадлежит только одной из копий ω^*, и у нее найдется окрестность U, целиком лежащая в этой копии. Ясно, что $A' = A \cap U$ и $B' = B \cap U$ — отделённые счётные подпространства пространства $\omega^* \subset \beta\omega$, причем $x \in \overline{A'} \cap \overline{B'}$, а это противоречит замечанию 2.1.5 и экстремальной несвязности пространства $\beta\omega$ [37, следствие 6.2.29]. Значит, точкой x может быть только точка склеивания. Отсюда вытекает, что X является $\mathscr{R}_2$-пространством, потому что точка склеивания не является предельной ни для какого счётного дискретного множества, так как если бы такое множество существовало, то точка склеивания была бы предельной для его пересечения с хотя бы одной копией ω^* в противоречие с тем, что она не является дискретно слабой P-точкой ни в одной из копий.

Из того, что обе точки не являются слабыми P-точками в соответствующих копиях пространства ω^*, следует, что точка склеивания является предельной для счётного множества A, целиком лежащего в одной из копий ω^*, и для счётного множества B, целиком лежащего в другой копии. Легко видеть, что $\overline{A} = A \cup \{\text{точка склеивания}\}$ и $\overline{B} = B \cup \{\text{точка склеивания}\}$, так что множества A и B отделены. Значит, X — не $\mathscr{R}_1$-пространство.

Пример 2.2.2 (*Компактное $\mathscr{R}_3$-пространство, не являющееся $\mathscr{R}_2$-пространством*). Возьмем два экземпляра ω^* и склеим их по двум точкам. В первом выберем дискретно слабую P-точку, не являющуюся слабой P-точкой (чтобы получившееся пространство не было $\mathscr{R}_2$-пространством), во втором — точку, не являющуюся дискретно слабой P-точкой (тогда она является предельной для некоторого счётного дискретного множества). Полученное пространство является $\mathscr{R}_3$-пространством, но не является $\mathscr{R}_2$-пространством.

Нам понадобятся следющие три теоремы из книги [15]:

Теорема 2.2.1 [15]. *Топологические пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда каждое функционально открытое подмножество $Y \subset X$ C^*-вложено в X, т.е. любая ограниченная непрерывная функция на Y продолжается на всё пространство X.*

Теорема 2.2.2 [15]. *Если X — F-пространство, то βX тоже является F-пространством.*

Теорема 2.2.3 [15]. *Всякое C^*-вложенное подпространство F-пространства является F-пространством.*

Предложение 2.2.1. *Если X — нормальное пространство, то для любой пары отделённых F_σ-множеств $A, B \subset X$ найдутся функционально открытые непересекающиеся множества U и V в X такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть A и B — отделённые непересекающиеся F_σ-множества в нормальном пространстве X. Тогда $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ и $B = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$, где множества A_n и B_n замкнуты для любого $n \in \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $A_n \subseteq A_{n+1}$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$ для $n \in \omega$. Непересекающиеся замкнутые множества в нормальном пространстве X функционально отделимы, поэтому существуют функционально открытые множества V_0 и W_0 такие, что $A_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq X \setminus \overline{B}$ и $B_0 \subseteq W_0 \subseteq \overline{W}_0 \subseteq X \setminus \overline{A}$, и для каждого $n \in \omega$ найдутся функционально открытые множества V_{n+1} и W_{n+1} такие, что $A_{n+1} \cup \overline{V}_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \overline{V}_{n+1} \subseteq X \setminus \big(\overline{B} \cup \overline{W}_n\big)$ и $B_{n+1} \cup \overline{W}_n \subseteq W_{n+1} \subseteq \overline{W}_{n+1} \subseteq X \setminus \big(\overline{A} \cup \overline{V}_n\big)$. Положим $V = \bigcup\limits_{n\in\omega} V_n$ и $W = \bigcup\limits_{n\in\omega} W_n$. Эти множества функционально открыты, будучи счётными объединениями функционально открытых множеств V_n и W_n [37, с. 77, 78], и они являются непересекающимися окрестностями множеств A и B. ■

Предложение 2.2.2. *Если X — компактное F-пространство, то замыкание любого F_σ-подмножества Y в X является стоун-чеховской компактификацией βY.*

Доказательство. Подмножество $Y \subset X$ нормально, поскольку нормальность наследуется F_σ-подмножествами (см. [37, с. 122]). Поскольку $\overline{Y}$ — компакт, достаточно показать, что произвольные непересекающиеся замкнутые подмножества Y имеют непересекающиеся замыкания в $\overline{Y}$ (см. следствие 3.6.4 из [37]). Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества Y. Они, очевидно, отделены и являются F_σ-множествами в X. В силу предложения 2.2.1 у них есть непересекающиеся функционально открытые окрестности V и W, которые в F-пространстве X функционально отделимы по определению, и поэтому A и B имеют непересекающиеся замыкания в X. Согласно следствию 3.6.4 из [37] имеем $\overline{Y} = \beta Y$. ■

Вспомним, что в нормальном пространстве замкнутое множество имеет тип G_δ тогда и только тогда, когда оно функционально замкнуто [37, с. 87]. Все счётные регулярные пространства нормальны, и в таких пространствах все (в частности, все замкнутые) множества имеют тип G_δ, а значит, все открытые множества функционально открыты. Отсюда немедленно вытекает следующее предложение:

Предложение 2.2.3. *Всякое счётное F-пространство экстремально несвязно.*

Предложение 2.2.4. *Всякое F-пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ — любое счётное множество. В силу теоремы 2.2.2 пространство βX — F-пространство, и в силу предложения 2.2.2 βY вложено в βX (поскольку Y, как и любое счётное множество, имеет тип F_σ). Будучи компактом, βY C^*-вложено в βX, а Y C^*-вложено в βY, значит, Y тоже является F-пространством (см. теорему 2.2.3). По предложению 2.2.3 Y экстремально несвязно, и поэтому в силу произвольности его выбора X является $\mathscr{R}_1$-пространством. ■

Пример 2.2.3 (*Компактное $\mathscr{R}_1$-пространство, не являющееся F-пространством*)**.** В пространстве ω^* выберем точку, которая не является P-точкой, но является слабой P-точкой; такая точка всегда существует [27]. Возьмем две копии пространства ω^*. Обозначим выбранную точку в одной из этих копий через x_1, а в другой — через x_2 и склеим точки x_1 и x_2. Полученное пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством. Действительно, если A и B — два счетных отделенных подмножества X и $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, то x — точка склеивания по той же причине, что и в примере 2.2.1, однако тогда она должна быть предельной точкой для пересечения счётного множества $A \cup B$ с одной из копий ω^*, а ни одна из точек x_1 и x_2, по которым производится склеивание, не является предельной точкой ни для какого счётного множества в своей копии ω^*, потому что обе эти точки являются слабыми P-точками.

С другой стороны, X не является F- и даже F'-пространством. Действительно, поскольку x_i — не P-точка в X_i для $i = 1, 2$, у x_i существуют окрестности $U_0, U_1, \ldots$ такие, что $\overline{U}_{n+1} \subseteq U_n$ и любая окрестность точки x_i пересекает дополнение до замкнутого G_δ-множества $Y_i = \bigcap\limits_{i\in\omega} U_i$ в компакте X_i. Из компактности X_i следует, что Y_i функционально замкнуто (см. [37, с. 87]). Значит, множество $Z_i = X_i \setminus Y_i$ функционально открыто в X_i. При склеивании компакт X_i вкладывается в X, и при этом вложении Z_i остается функционально открытым множеством в X. Имеем $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, однако $x \in \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2}$.

Другие примеры $\mathscr{R}_1$-пространств, не являющихся F-пространствами, можно получить, заметив, что свойство быть $\mathscr{R}_1$-пространством наследуется любыми подпространствами, а свойство быть F-пространством не наследуется даже замкнутыми подпространствами [50].

Предложение 2.2.5. *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого дискретного подмножества $D \subset X$ любые непересекающиеся подмножества множества D имеют непересекающиеся замыкания в X.*

Доказательство. Необходимость. Возьмём произвольное дискретное подпространство $D \subset X$. Пусть $A, B \subset D$ и $A \cap B = \varnothing$. Ясно, что A и B замкнуты в D. Они, очевидно, дискретны и, поскольку $\overline{A}^D = \overline{A} \cap D$ и $\overline{B}^D = \overline{B} \cap D$, отделены в X. Следовательно, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, поскольку X — $\mathscr{R}_3$-пространство.

Достаточность. Пусть A и B — счётные отделённые дискретные подмножества пространства X, тогда $A \cup B$ дискретно. Действительно, возьмем произвольную точку $x \in A \cup B$ (пусть для определенности $x \in A$). У этой точки есть окрестность U такая, что $U \cap A = \{x\}$ и $U \cap \overline{B} = \varnothing$, т.е. $U \cap (A \cup B) = \{x\}$. Аналогично, у любой точки $x \in B$ есть окрестность V такая, что $V \cap (A \cup B) = \{x\}$. Значит, объединение A и B дискретно. Следовательно, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, т.е. X — $\mathscr{R}_3$-пространство. ■

Предложение 2.2.6. *Компактное топологическое пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда оно является $\beta\omega$-пространством.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем произвольное счётное дискретное множество $D \subseteq X$ с компактным замыканием и его непересекающиеся подмножества A и B. Так как $\overline{D}$ компактно, то $cD = \overline{D}$ — некоторая компактификация D. Понятно, что $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$ (в силу дискретности множества D), а значит, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, так как X является $\mathscr{R}_3$-пространством. Согласно следствию 3.6.4 из [37] имеем $\overline{D} \cong \beta\omega$, а это и означает, что X является $\beta\omega$-пространством.

Достаточность. Пусть X — компактное $\beta\omega$-пространство. Возьмём дискретные счётные множества A и B в X такие, что $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Из тех же соображений, что и в доказательстве предложения 2.2.5, объединение A и B дискретно. Следовательно, $\overline{A \cup B} \cong \beta\omega$ в силу компактности замыкания этого объединения в компакте X. Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Поскольку пространство $\beta\omega$ экстремально несвязно, а экстремальная несвязность наследуется счётными подпространствами, пространство $x \cup A \cup B$ должно быть экстремально несвязно, однако замыкания его открытых подмножеств A и B пересекаются в точке x. Это противоречие показывает, что

$\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Ввиду произвольности выбора A и B заключаем, что X — $\mathscr{R}_3$-пространство. ■

Доказательство необходимости в предложении 2.2.6 не использует компактность пространства X. Поэтому выполнено следующее утверждение:

Предложение 2.2.7. *Всякое $\mathscr{R}_3$-пространство является $\beta\omega$-пространством.*

Пример 2.2.4 (*Некомпактное $\beta\omega$-пространство, которое не является $\mathscr{R}_3$-пространством*)**.** Возьмем счётное дискретное пространство X и добавим к нему одну неизолированную точку x, проколотыми окрестностями которой являются элементы некоторого неглавного ультрафильтра p на множестве X. Два экземпляра полученного пространства, склеенные по неизолированной точке, не содержат бесконечных компактов, поскольку в бесконечном счётном компакте обязана быть сходящаяся последовательность, т.к. он обладает счётной базой (см. [37]). Однако в пространстве X (а значит, и в результирующем пространстве) нет нетривиальных сходящихся последовательностей. Действительно, пусть последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ сходится к точке x. Тогда либо $\{x_{2n} : n \in \omega\} \in p$ либо $\{x_{2n+1} : n \in \omega\} \in p$ по основному свойству ультрафильтров, значит, последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ не сходится к точке x, следовательно, и вообще не сходится. Таким образом, мы построили $\beta\omega$-пространство, которое не является $\mathscr{R}_3$-пространством, так как точка склеивания предельна для обоих экземпляров дискретного множества X.

Из предложений 2.2.4 и 2.2.7 и примеров 2.2.3, 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.4 получаем следующую теорему:

Теорема 2.2.4. *Имеют место строгие включения:*

$$\begin{aligned}&\textit{класс } F\textit{-пространств} \subsetneq \textit{класс } \mathscr{R}_1\textit{-пространств} \subsetneq \\ &\subsetneq \textit{класс } \mathscr{R}_2\textit{-пространств} \subsetneq \textit{класс } \mathscr{R}_3\textit{-пространств} \subsetneq \\ &\subsetneq \textit{класс } \beta\omega\textit{-пространств.}\end{aligned}$$

2.3. Неинвариантность относительно стоун-чеховских компактификаций

Напомним, что классы экстремально несвязных и F-пространств сохраняются стоун-чеховскими компактификациями. Как показано ниже, для $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств это свойство не выполняется.

Определение 2.3.1 [37]**.** Топологическое пространство X обладает *свойством Суслина*, если каждое семейство непустых попарно непересекающихся открытых множеств в X не более чем счётно.

Определение 2.3.2 [44]**.** Говорят, что множество $U \subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *зависит от счётного числа координат*, если найдётся такое счётное множество $A_0 \subset A$, что если $x \in U$, $y \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и $x_\alpha = y_\alpha$ для всех $\alpha \in A_0$, то $y \in U$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема:

Теорема 2.3.1 (Тайманов [37, теорема 3.2.1])**.** *Пусть Y — всюду плотное подпространство топологического пространства X и f — непрерывное отображение пространства Y в компакт K. Отображение f можно непрерывно продолжить на X в том и только том случае, если для каждой пары Z_1, Z_2 непересекающихся замкнутых в K множеств замыкания их прообразов $f^{-1}(Z_1)$ и $f^{-1}(Z_2)$ в пространстве X не пересекаются.*

Предложение 2.3.1. *Пусть тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ обладает свойством Суслина, $Y \subset X$ — подмножество X, заполняющее счётные грани. Тогда всякая непрерывная функция из Y в $[0,1]$ допускает непрерывное продолжение на X; в частности, если X компактно, то $\beta Y = X$.*

Доказательство. Заметим, что пространство Y всюду плотно в X, поскольку оно заполняет счётные грани X. Возьмём непрерывную функцию $f\colon Y \to [0,1]$ и произвольные непересекающиеся замкнутые подмножества Z_1 и Z_2 отрезка $[0,1]$. Покажем, что замыкания прообразов $A = f^{-1}(Z_1)$ и $B = f^{-1}(Z_2)$ не пересекаются в X. Отрезок $[0,1]$, как и прямая $\mathbb{R}$, совершенно нормален, поэтому из замечания 2.1.1 следует, что A и B — функционально замкнутые непересекающиеся подмножества Y. Значит, существует непрерывное отображение $g\colon Y \to [0,1]$ такое, что $A = g^{-1}(\{0\})$ и $B = g^{-1}(\{1\})$ (см. [37, теорема 1.5.13]), при этом множества $V_A = g^{-1}\big([0, \frac{1}{3})\big)$ и

$V_B = g^{-1}\big(\big(\frac{2}{3}, 1\big]\big)$ являются непересекающимися открытыми окрестностями множеств A и B в Y, причём их замыкания в Y тоже не пересекаются. Пусть U_A и U_B — открытые подмножества пространства X, для которых $V_A = U_A \cap Y$ и $V_B = U_B \cap Y$. Пусть $x \in \overline{U}_A \cap \overline{U}_B$ в X. Впишем в U_A и U_B максимальные системы попарно непересекающихся канонических открытых множеств $\{U_A^i\}$ и $\{U_B^j\}$ (их существование следует из леммы Цорна), они окажутся счётными в силу свойства Суслина. Заметим, что всякое каноническое открытое множество зависит от конечного числа координат, поэтому каждое из множеств $U_1 = \bigcup U_A^i$ и $U_2 = \bigcup U_B^j$ зависит от счётного числа координат, и эти множества плотны в U_A и в U_B соответственно (если, например, $\overline{U_1} \neq U_A$, то найдётся непустое каноническое открытое множество $U \subset U_A \setminus \overline{U_1}$, а это противоречит максимальности системы $\{U_A^i\}$), так что любая окрестность точки x пересекает U_1 и U_2. Объединим координаты, от которых зависят U_1 и U_2. Любая окрестность любой точки y, у которой проекция на эти координаты совпадает с проекцией точки x, пересекает U_1 и U_2, а значит, U_A и U_B. Следовательно, любая окрестность такой точки y пересекает и множества V_A и V_B, потому что они плотны в U_A и U_B соответственно. Заметим, что такая точка y найдётся в множестве Y, поскольку Y заполняет счётные грани X. Это противоречит тому, что замыкания множеств V_A и V_B в Y не пересекаются. Мы показали, что замыкания множеств $U_A \supset A$ и $U_B \supset B$ в X не пересекаются, следовательно, по теореме Тайманова функция f допускает непрерывное продолжение на X. ■

Пример Резниченко [11]**.** Пусть τ — любой кардинал со свойством $\tau^{\aleph_0} = \tau$ и A — множество мощности τ. Тогда в пространстве $[0,1]^A$ существует плотное связное псевдокомпактное подпространство Y такое, что $|Y| = \tau$ и любое множество $X \subset Y$ мощности $|X| < \tau$ дискретно и замкнуто в Y.

Теорема 2.3.2. *Классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.*

Доказательство. Положим $\tau = 2^{\aleph_0}$ и воспользуемся примером Резниченко. Подпространство Y из этого примера является $\mathscr{R}_1$-пространством, поскольку всякое счётное $X \subset Y$ дискретно. Пользуясь тем, что всякое $\mathscr{R}_1$-пространство является $\mathscr{R}_3$-пространством и что произведение $[0,1]^A$ содержит сходящиеся последовательности (поскольку оно содержит копию отрезка $[0,1]$), а $\mathscr{R}_3$-пространство и даже $\beta\omega$-пространство сходящихся последовательностей содержать не может в силу замечания 2.1.4, получим требуемое. ■

2.4. Обобщение на произвольные кардиналы

Заметим, что определения $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств можно обобщить на произвольные бесконечные кардиналы τ.

Определение 2.4.1. Топологическое пространство X называется

- $\mathscr{R}_1(\tau)$-*пространством*, если любые два отделённых подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, имеют непересекающиеся замыкания;
- $\mathscr{R}_2(\tau)$-*пространством*, если любые два отделённых подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, одно из которых дискретно, имеют непересекающиеся замыкания;
- $\mathscr{R}_3(\tau)$-*пространством*, если любые два отделённых дискретных подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, имеют непересекающиеся замыкания.

Введём понятие обобщённого $\beta\omega$-пространства:

Определение 2.4.2. Пространство X называется $\beta\tau$-*пространством*, если из того, что $D \subset X$, $|D| \leq \tau$, D дискретно и $\overline{D}$ компактно, следует, что $\overline{D}$ гомеоморфно $\beta\tau$.

Предложение 2.4.1. *Свойство быть $\mathscr{R}_i(\tau)$-пространством для $i = 1, 2, 3$ наследуется любыми подпространствами.*

Доказательство. Рассуждение полностью аналогично доказательству предложения 2.1.2. ■

Предложение 2.4.2. *Пространство X является $\mathscr{R}_1(\tau)$-пространством тогда и только тогда, когда любое его подмножество мощности не превосходящей τ экстремально несвязно.*

Доказательство. Необходимость. Возьмём произвольное множество $C \subset X$ мощности $\leqslant \tau$. Пусть A и B — непересекающиеся открытые подмножества в C, тогда A и B отделены в C, поскольку $\overline{A}$ содержится в замкнутом множестве $C \setminus B$ и, аналогично, $\overline{B} \subset C \setminus A$. Из предложения 2.4.1 получаем, что C — $\mathscr{R}_1(\tau)$-пространство, следовательно, $\overline{A}^C \cap \overline{B}^C = \varnothing$, т.е. C экстремально несвязно.

Достаточность. Пусть A и B — отделённые подмножества X мощности, не превосходящей τ, и $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Рассмотрим подпространство $C = A \cup B \cup \{x\}$. Ясно, что $\overline{B}^C = B \cup \{x\}$, следовательно, множество A открыто в C и, аналогично, B открыто в C. Поскольку C экстремально несвязно, $\overline{A}^C \cap \overline{B}^C = \varnothing$, противоречие. Следовательно, X — $\mathscr{R}_1(\tau)$-пространство. ■

Замечание 2.4.1. Для любого несчётного τ существуют недискретные пространства $\mathscr{R}_1(\tau)$. Действительно, из леммы перед теоремой 2 в статье [49] следует, что для любого бесконечного кардинала τ существует недискретное пространство, у которого все пространства меньшей мощности дискретны, а значит, экстремально несвязны.

Теорема 2.4.1. *Классы $\mathscr{R}_1(\tau)$-, $\mathscr{R}_2(\tau)$-, $\mathscr{R}_3(\tau)$- и $\beta\tau$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.*

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству теоремы 2.3.2, если взять любой кардинал $\kappa > \tau$ такой, что $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$. ■

Предложение 2.4.3. *Для всякого несчётного τ компактное топологическое пространство X является $\mathscr{R}_3(\tau)$-пространством тогда и только тогда, когда оно является $\beta\tau$-пространством.*

Доказательство. Необходимость. Доказательство повторяет рассуждение предложения 2.2.6.

Достаточность. Возьмём дискретные отделённые множества A и B мощности τ. Рассуждая как в предложении 2.2.6, получим $\overline{A \cup B} \cong \beta\tau$. Возьмём точку $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A \cup B} = \beta(A \cup B)$, т.е. x — некоторый ультрафильтр на $A \cup B$, элементами которого являются пересечения окрестностей точки x с $A \cup B$. Из основного свойства ультрафильтров следует, что найдётся окрестность U_x точки x такая, что либо $A \cap U_x = \varnothing$, либо $B \cap U_x = \varnothing$. Противоречие. ■

Пример 2.4.1. Стоун-чеховская компактификация $\beta\omega$ множества ω не является $\mathscr{R}_3(2^{\aleph_0})$-пространством. Из [44, с. 401, решение задачи 178] следует, что в ω^* существует дискретное подпространство D мощности $2^{\aleph_0}$ такое, что $\overline{D}^{\omega^*}$ компактно и не гомеоморфно βD.

Пример 2.4.2 (*F-пространства произвольной несчётной мощности τ, не являющегося $\mathscr{R}_3(\aleph_1)$-пространством*)**.** Пусть $X = D \cup \{*\}$, где D — дискретное множество мощности τ, $*$ — изолированная точка, проколотые окрестности которой — дополнения до счётных множеств в D. Рассмотрим непрерывную функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, для которой $f(*) = 0$, и найдём её нуль-множество $Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$. Для любого i найдётся такая окрестность U^i_* точки $*$, что $|f(U^i_*)| < 1/i$. Для всех $x \in \bigcap U^i_*$ имеем $f(x) = 0$, т.е. функция f принимает ненулевые значения лишь на некотором не более чем счётном множестве $A \subset D$. Если $f(*) \neq 0$, то, наоборот, нулевые значения функция f принимает лишь на не более чем счётном подмножестве множества D. Таким образом, функционально открытые множества в пространстве X — это либо счётные подмножества D, либо объединение $\{*\}$ с таким множеством $C \subset D$, что $D \setminus C$ счётно. Докажем теперь, что любые непересекающиеся функционально открытые A и B функционально отделимы. Если A и B — непересекающиеся счётные подмножества D, то функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, принимающая на A значение 0, на B — значение 1, а в других точках множества $X \setminus (A \cup B)$ — одно и то же произвольное значение, будет, очевидно, непрерывной. Аналогично рассматривается случай, когда A — счётное подмножество D, а B — окрестность точки $*$, не пересекающаяся с ним. Таким образом, X — F-пространство. Однако X не будет $\mathscr{R}_3(\aleph_1)$-пространством, поскольку замыкания любых двух непересекающихся несчётных подмножеств множества D содержат $*$.

Замечание 2.4.2. В пространстве X, определённом в предыдущем примере, нет бесконечных компактов, следовательно, оно является $\beta\tau$-пространством.

Глава 3

Продолжение функций с подпространств

В настоящей главе речь пойдёт, главным образом, о характеризации классов $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах продолжения непрерывных ограниченных функций. На протяжении всей главы полагаем, что X — тихоновское (вполне регулярное) топологическое пространство.

3.1. Продолжение функций в классе $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств

Предложение 3.1.1 [15, 6M.2]**.** *Пространство X экстремально несвязно тогда и только тогда, когда всякое всюду плотное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено в X.*

Предложение 3.1.2 [44, с. 93, задача 288]**.** *Пусть X — произвольное пространство, Z — регулярное пространство, Y — всюду плотное подпространство пространства X и $f\colon Y \to Z$ — непрерывное отображение. Тогда f продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$, если и только если для каждой точки $x \in X \setminus Y$ f продолжается до непрерывного отображения $Y \cup \{x\} \to Z$.*

Теорема 3.1.1. *Пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено* *в* $\overline{Y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть X — $\mathscr{R}_1$-пространство и $Y \subset X$ счётно.Возьмём произвольную точку $x \in \overline{Y} \setminus Y$. Счётное подпространство $Y \cup \{x\}$ экстремально несвязно, поскольку X — $\mathscr{R}_1$-пространство, и множество Y всюду плотно в нём. Следовательно, по предложению 3.1.1 Y C^*-вложено в $Y \cup \{x\}$ и по предложению 3.1.2 Y C^*-вложено в $\overline{Y}$, поскольку точка $x \in \overline{Y} \setminus Y$ была выбрана произвольно.

Достаточность. Пусть Y — любое счётное подпространство пространства X и A — любое всюду плотное подмножество подпространства Y. Тогда по предположению A C^*-вложено в $\overline{A}$ (а значит, и в Y), поскольку оно счётно. Следовательно, из предложения 3.1.1 вытекает, что Y экстремально несвязно. Таким образом, X является $\mathscr{R}_1$-пространством. ■

Следствие 3.1.1. *Нормальное пространство* X *является* $\mathscr{R}_1$*-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное подпространство* $Y \subset X$ C^**-вложено в* X.

Доказательство. Следует из теоремы 3.1.1 и того, что подпространство $\overline{Y}$ C^*-вложено в X, будучи замкнутым подпространством нормального пространства X. ■

Следствие 3.1.2. *Компакт* X *является* $\mathscr{R}_1$*-пространством тогда и только тогда, когда замыкание в* X *любого его счётного подпространства* Y *является стоун-чеховской компактификацией* βY *пространства* Y.

Доказательство. Следует из теоремы 3.1.1 и следствия 3.6.3 из книги [37]. ■

Следствие 3.1.3. *Пусть* X *— сепарабельное* $\mathscr{R}_1$*-пространство и* $Y \subset X$ *— счётное подпространство пространства* X*. Тогда* Y C^**-вложено в* X.

Доказательство. Возьмём счётное всюду плотное в X подпространство A. Множество $U = X \setminus \overline{Y}$ открыто в X и Y замкнуто в счётном подпространстве $(A \cap U) \cup Y$ пространства X. Заметим, что пространство $(A \cap U) \cup Y$ линделёфово, а значит, нормально [37, теорема 3.8.2]. Из теоремы Титце–Урысона вытекает, что Y C^*-вложено в $(A \cap U) \cup Y$, а по теореме 3.1.1 $(A \cap U) \cup Y$ C^*-вложено в $\overline{(A \cap U) \cup Y} = X$. ■

Предложение 3.1.3 [15, 1H]. *Пространство* X *экстремально несвязно тогда и только тогда, когда всякое открытое множество* C^**-вложено в* X.

Предложение 3.1.4. *Пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества $Y \subset X$ каждое множество $A \subset Y$, открытое в Y, C^*-вложено в $\overline{Y}$.*

Доказательство. Из предложения 3.1.3 и теоремы 3.1.1 немедленно вытекает требуемое утверждение. ■

Следствие 3.1.4. *Нормальное пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного подпространства $Y \subset X$ каждое множество $A \subset Y$, открытое в Y, C^*-вложено в X.*

Доказательство. Это следует из предложения 3.1.4 и того, что любое замкнутое подмножество нормального пространства X C^*-вложено в X. ■

Имеют место следующие характеризации $\mathscr{R}_3$-пространств:

Теорема 3.1.2. (i) *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное множество $D \subset X$ C^*-вложено в $\overline{D}$.*

(ii) *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного подпространства $Y \subset X$ каждое множество $A \subset Y$ C^*-вложено в $\overline{Y}$.*

(iii) *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда замыкание любого счётного дискретного множества $D \subset X$ является стоун-чеховской компактификацией βD множества D.*

(iv) *Пространство X является $\beta\omega$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное множество $D \subset X$ с компактным замыканием $\overline{D}$ C^*-вложено в X.*

Доказательство. (i) Согласно предложению 2.2.5 X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда любые два непересекающиеся подмножества A и B счётного дискретного множества D имеют непересекающиеся замыкания в X, а значит, и в D. Следовательно, D C^*-вложено в $\overline{D}$ по теореме 2.3.1. Обратно, пусть A и B — любые отделённые дискретные множества в X. Тогда $D = A \cup B$ дискретно. По предположению D C^*-вложено в $\overline{D}$. Возьмём функцию $f\colon D \to [0,1]$ со свойством $f(A) \equiv 0$ и $f(B) \equiv 1$, она непрерывна, поскольку множество D дискретно. Продолжим её на $\overline{D}$ до непрерывной функции $\widetilde{f}\colon \overline{D} \to [0,1]$. Ясно, что $\overline{A} \subset \widetilde{f}^{-1}(0)$ и $\overline{B} \subset \widetilde{f}^{-1}(1)$, значит, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, т.е. X — $\mathscr{R}_3$-пространство.

Утверждения (ii), (iii) и (iv) следуют из (i), следствия 3.6.3 из книги [37], определения $\beta\omega$-пространства и того, что всякое компактное подпространство пространства X C^*-вложено в X. ■

Следствие 3.1.5. *Нормальное пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное подпространство $D \subset X$ C^*-вложено в X.*

Доказательство. Следует из теоремы 3.1.2 и того, что подпространство $\overline{Y}$ C^*-вложено в X, будучи замкнутым подпространством нормального пространства X. ■

3.2. Алгебраическая характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств

3.2.1. Основные понятия и обозначения

В данном разделе мы приведём описание классов $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций. Напомним основные определения и обозначения.

Определение 3.2.1. *Полукольцо* — алгебраическая структура $(K, +, \cdot)$ с двумя операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, для которых $(K, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0 и $(K, \cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, причём для любых элементов a, b и c полукольца K выполняются соотношения:

1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

2) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Определение 3.2.2. *Кольцо* — множество K с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, обладающимим следующими свойствами:

1) относительно сложения K есть абелева группа;

2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c$.

Определение 3.2.3. *Идеалом* кольца K называется подкольцо I такое, что

1) для любых $i \in I$ и $r \in K$ произведение $i \cdot r$ принадлежит I (условие на *правые* идеалы);

2) для любых $i \in I$ и $r \in K$ произведение $r \cdot i$ принадлежит I (условие на *левые* идеалы).

Идеал, являющийся одновременно правым и левым, называется *двусторонним* идеалом.

Определение 3.2.4. *Конечно порождённым* (правым) идеалом I кольца K называется идеал, который порождается конечным числом своих элементов, т.е. существуют такие $i_1, i_2, \ldots, i_m$, что

$$I = \{i_1 \cdot k_1 + i_2 \cdot k_2 + \ldots + i_m \cdot k_m : k_j \in K,\ j = \overline{1, m}\}.$$

Идеал, порождённый одним элементом, называется *главным.*

Определение 3.2.5. Идеал I в кольце K называется *простым*, если из $a \cdot b \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$.

Через A° обозначается внутренность множества A, через $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ — кольцо всех непрерывных вещественнозначных функций на произвольном топологическом пространстве X с поточечными операциями сложения и умножения, через $C(X, \mathbb{I})$ — полукольцо всех непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце $\mathbb{I} = [0, 1]$, через $C^{+}(X) = C(X, \mathbb{R}^{+})$ — полукольцо всех непрерывных неотрицательных функций на X, а через C^{+}_{∞} — частичное полукольцо всех непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве X со значениями в $[0, \infty]$ с поточечными операциями сложения и умножения функций. (Частичные полукольца отличаются от полуколец только тем, что сумма или произведение некоторых элементов в них могут быть не определены.) Нуль-множество функции f обозначается через $Z(f)$, т.е. $Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$.

3.2.2. Кольцо $C(X)$ над $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространствами

Тихоновское пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда каждый конечно порождённый идеал в $C(X)$ является главным [41].

Замечание 3.2.1. Из предложения 2.2.3 мы имеем, что счётное пространство экстремально несвязно тогда и только тогда, когда оно является F-пространством.

Предложение 3.2.1. *Компакт X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда замыкание любого счётного подпространства $A \subset X$ — F-пространство.*

Доказательство. Необходимость. В силу следствия 3.1.2 замыкание любого счётного подпространства $A \subset X$ — стоун-чеховская компактификация βA. Из замечания 3.2.1 следует, что A является F-пространством, а значит, $\beta A = \overline{A}$ — также F-пространство в силу теоремы 2.2.2.

Достаточность. Свойство быть F-пространством наследуется счётными подпространствами (см. [15, 14N.5]), следовательно, любое счётное подпространство $A \subset \overline{A} \subset X$ является F-пространством. Согласно замечанию 3.2.1 A экстремально несвязно, поэтому X — $\mathscr{R}_1$-пространство. ■

Предложение 3.2.2. *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда замыкание любого счётного дискретного подпространства $D \subset X$ — F-пространство.*

Доказательство. Необходимость. Из предложения 2.2.6 вытекает, что X — $\beta\omega$-пространство, следовательно, для любого дискретного множества D замыкание $\overline{D}$ гомеоморфно экстремально несвязному пространству $\beta\omega$, и поэтому $\overline{D}$ является F-пространством.

Достаточность. Замыкание любого счётного дискретного подпространства D в компактном пространстве X — F-пространство, следовательно, по теореме 2.2.4 $\overline{D}$ — $\beta\omega$-пространство, а значит, $\overline{D}$ гомеоморфно $\beta\omega$. В силу предложения 2.2.6 X является компактным $\mathscr{R}_3$-пространством. ■

Из замечания 3.2.1 и предложений 3.2.1 и 3.2.2 следует, что $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространства можно описать так:

Предложение 3.2.3. *Тихоновское пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(A)$ является главным.*

Предложение 3.2.4. *Компакт X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(\overline{A})$ является главным.*

Предложение 3.2.5. *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(\overline{A})$ является главным.*

В книге Гиллмана и Джериссона [15] определяются следующие идеалы O_x и O^p:

$$O_x = \{f \in C(X) : x \in Z^\circ(f)\} \quad \text{и} \quad O^p = \left\{f \in C(X) : p \in \left(\overline{Z(f)}^{\beta X}\right)^\circ\right\}.$$

Замечание 3.2.2. Заметим, что идеалы O_x и O^p совпадают для любого компакта X, поскольку $Z(f)$ замкнуто и X совпадает с βX.

Е. М. Вечтомову принадлежит следующее определение *F-точки* (см. [42]):

Определение 3.2.6 [42]**.** Точка x пространства X называется *F-точкой*, если для любых функций $f, g \in C(X)$ из $x \in Z^\circ(fg)$ следует, что либо $x \in Z^\circ(f)$, либо $x \in Z^\circ(g)$; или, что равносильно, из $fg \in O_x$ вытекает, что либо $f \in O_x$, либо $g \in O_x$.

Предложение 3.2.6. *Компакт X является* F-пространством *тогда и только тогда, когда каждая его точка является F-точкой.*

Доказательство. Согласно теореме 14.25 из книги [15] пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда идеал O^p простой для любого $p \in \beta X$. В силу замечания 3.2.2 идеал O^p совпадает с O_x, отсюда и из определения F-точки получаем требуемое. ■

Замечание 3.2.3. В произвольных F-пространствах каждая точка является F-точкой.

Предложение 3.2.7. *Если пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством, то в каждом счётном подмножестве $Y \subset X$ каждая точка Y является F-точкой.*

Доказательство. Действительно, каждое счётное подмножество $Y \subset X$ экстремально несвязно. Из замечаний 3.2.1 и 3.2.3 имеем, что каждая точка Y является F-точкой. ■

Теорема 3.2.1. *Тихоновское пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда каждая точка $p \in \beta X$ является F-точкой.*

Доказательство. Следует из теоремы 14.25 в [15] и определения F-точки. ■

Теорема 3.2.2. *Тихоновское пространство X является F'-пространством тогда и только тогда, когда каждая его точка — F-точка.*

Доказательство. Необходимость. Переходя к дополнениям, получим эквивалентное определение F'-пространства: для любых $f, g \in C(X)$ из $Z(f) \cup Z(g) = X$ следует $Z^\circ(f) \cup Z^\circ(g) = X$. Покажем, что $(Z(f) \cup Z(g))^\circ \subset Z^\circ(f) \cup Z^\circ(g)$. Возьмём произвольную точку $x \in (Z(f) \cup Z(g))^\circ$. Зафиксируем открытую окрестность $U_x \subset Z(f) \cup Z(g)$ точки x. Поскольку X — тихоновское пространство, найдётся непрерывная функция $h\colon X \to [0,1]$ такая, что $h(x) = 1$, $h \upharpoonright X \setminus U_x \equiv 0$. Положим $V_x = h^{-1}((0,1])$, тогда V_x — открытая окрестность точки x и $V_x \subset U_x$. Имеем $Z^\circ(hf) \cap V_x = Z^\circ(f) \cap V_x$, $Z^\circ(hg) \cap V_x = Z^\circ(g) \cap V_x$ и $Z(hf) \cup Z(hg) = X$, поскольку $Z(f) \cup Z(g) = X$. В силу того, что X — F'-пространство, $x \in Z^\circ(hf) \cup Z^\circ(hg)$, т.е. существует окрестность $W_x \subset Z^\circ(hf) \cup Z^\circ(hg)$. Следовательно, $W_x \cap V_x \subset Z^\circ(f) \cup Z^\circ(g)$.

Достаточность. Возьмём непересекающиеся функционально открытые множества A и B, имеем $A = X \setminus Z(f)$ и $B = X \setminus Z(g)$ для некоторых непрерывных функций $f, g\colon X \to \mathbb{R}$. Покажем, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Заметим, что $x \notin \overline{A \cap B}$, т.е. $x \notin \overline{X \setminus (Z(f) \cup Z(g))}$, а значит, $x \in (Z(f) \cup Z(g))^\circ = Z^\circ(fg)$. По определению F-точки точка x должна принадлежать множеству $Z^\circ(f) \cup Z^\circ(g)$, но $x \in \overline{X \setminus Z(f)} \cap \overline{X \setminus Z(g)} = (X \setminus Z^\circ(f)) \cup (X \setminus Z^\circ(g))$. Противоречие. ■

Замечание 3.2.4. В примере 8.14 из [41] построено пространство, которое является F'-, но не F-пространством.

Теорема 3.2.3. *Пространство X — $\mathscr{R}_3$-пространство тогда и только тогда, когда замыкание любого счётного дискретного подмножества является F'-пространством.*

Доказательство. Необходимость. Возьмём счётное дискретное подмножество $D \subset X$. Пусть A и B — непересекающиеся функционально открытые множества в $\overline{D}$. Они, очевидно, открыты в $\overline{D}$ и D плотно в $\overline{D}$. Нетрудно показать, что $\overline{A}^{\overline{D}} = \overline{A \cap D}^{\overline{D}}$ и $\overline{B}^{\overline{D}} = \overline{B \cap D}^{\overline{D}}$. Из предложения 2.2.5 вытекает, что $\overline{A \cap D} \cap \overline{B \cap D} = \varnothing$, а значит, $\overline{A}^{\overline{D}} \cap \overline{B}^{\overline{D}} = \varnothing$, т.е. $\overline{D}$ — F'-пространство.

Достаточность. Пусть A и B — счётные отделённые дискретные подмножества X. Тогда $A \cup B$ дискретно и по предположению $\overline{A \cup B}$ — F'-

пространство. Отсюда и из [15, 3B.4] следует, что найдутся непересекающиеся функционально открытые множества $V \supset A$ и $W \supset B$ со свойством $\overline{V} \cap \overline{W} = \varnothing$. Следовательно, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, т.е. X — $\mathscr{R}_3$-пространство. ■

Следствие 3.2.1. *Тихоновское пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного подмножества $D \subset X$ каждая точка x из $\overline{D}$ — F-точка.*

Доказательство. Следует из теорем 3.2.2 и 3.2.3. ■

3.2.3. Полукольцо $C(X, \mathbb{I})$ над $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространствами

Из теоремы 4.20 статьи [42], замечания 3.2.1 и предложений 3.2.1 и 3.2.2 получаем следующие характеризации $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств:

Теорема 3.2.4. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_1$-пространство;*

2) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(Y, \mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*

3) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*

4) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(Y, \mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*

5) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*

6) *для любого счётного $Y \subset X$ все простые идеалы полукольца $C(Y, \mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь (т.е. линейно упорядочены по включению);*

7) *для любого счётного $Y \subset X$ все простые идеалы полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

Теорема 3.2.5. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_3$-пространство;*

2) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*

3) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*

4) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ все простые идеалы полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

3.2.4. Полукольцо $C^+(X)$ над $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространствами

Напомним следующие определения:

Определение 3.2.7. *Решёткой* называется алгебра $(L, +, \cdot)$ с двумя коммутативными, ассоциативными и идемпотентными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, которые связаны законами поглощения $x + x \cdot y = x$ и $x \cdot (x + y) = x$.

В любой решетке вводится отношение порядка $\leq$: $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y$ (равносильно, $x \cdot y = x$), при этом $x + y = \sup(x, y), x \cdot y = \inf(x, y)$ и порядок согласован с операциями:

$$(x \leq y) \& (x_1 \leq y_1) \Longrightarrow (x + x_1 \leq y + y_1) \& (xx_1 \leq yy_1).$$

Определение 3.2.8. Решётка называется *дистрибутивной*, если в ней выполняется тождество $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Определение 3.2.9. Решётка называется *модулярной*, если в ней выполняется тождество модулярности $x \cdot (x \cdot y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (вместо дистрибутивного закона).

Определение 3.2.10 [42]**.** Идеал I в кольце R называется *полустрогим*, если $a + b \in I$ влечёт за собой $a \in I$ для любых $a \in R$ и $b \in I$.

Определение 3.2.11 [42]**.** Идеалы вида $I - I = \{a - b : a, b \in I\}$ называются *разностными идеалами* кольца разностей $S = \{x - y : x, y \in R\}$.

Через $\operatorname{Id} C(X)$ ($\operatorname{Id} C^+(X)$) обозначается множество всех идеалов полукольца $C(X)$ ($C^+(X)$). Относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$ получаем решётки $\operatorname{Id} C(X)$ ($\operatorname{Id} C^+(X)$) с операциями $\sup(I, J) = I \cup J \cup (I + J)$ и $\inf(I, J) = I \cap J$.

Пользуясь теоремой 2.1 из статьи [43], предложениями 3.2.1 и 3.2.2, $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространствам можно дать следующее описание:

Теорема 3.2.6. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_1$-пространство;*
2) *для любого счётного $Y \subset X$ решётки $\operatorname{Id} C(Y)$ и $\operatorname{Id} C^+(Y)$ изоморфны;*
3) *для любого счётного $Y \subset X$ решётки $\operatorname{Id} C(\overline{Y})$ и $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ изоморфны;*
4) *для любого счётного $Y \subset X$ решётка $\operatorname{Id} C^+(Y)$ модулярна;*
5) *для любого счётного $Y \subset X$решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ модулярна;*
6) *для любого счётного $Y \subset X$решётка $\operatorname{Id} C^+(Y)$ дистрибутивна;*
7) *для любого счётного $Y \subset X$решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ дистрибутивна;*
8) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C^+(Y)$ полустрогие;*
9) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C^+(\overline{Y})$ полустрогие;*
10) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C(Y)$ разностные;*
11) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C(\overline{Y})$ разностные.*

Теорема 3.2.7. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_3$-пространство;*
2) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ решётки $\operatorname{Id} C(\overline{Y})$ и $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ изоморфны;*
3) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ модулярна;*
4) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ дистрибутивна;*

5) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C^+(\overline{Y})$ *полустрогие;*

6) *для любого счётного дискретного* $Y \subset X$ *все идеалы в* $C(\overline{Y})$ *разностные.*

3.2.5. Полукольцо C^+_∞ над $\mathscr{R}_1$-пространствами

Если зафиксировать точку $p \in \beta X$, то множество

$$O^p = \left\{ f \in C^+_\infty(X) : p \in \left(\overline{Z(f)}^{\beta X} \right)^\circ \right\}$$

будет идеалом в $C^+_\infty(X)$. Пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда минимальные простые идеалы в $C^+_\infty(X)$ — это в точности идеалы O^p (см. [42, следствие 6.16]). Из этого эквивалентного условия и замечания 3.2.1 $\mathscr{R}_1$–пространства можно охарактеризовать в терминах идеалов так:

Предложение 3.2.8. *Для любого тихоновского пространства* X *эквивалентны следующие условия:*

1) X — $\mathscr{R}_1$*-пространство;*

2) *для любого счётного* $Y \subset X$ *минимальные простые идеалы в* $C^+_\infty(Y)$ — *это в точности идеалы* O^p, $p \in \beta Y$.

Глава 4

Однородность в произведениях топологических пространств

4.1. Лемма Кунена для $\mathscr{R}_2$-пространств

Определение 4.1.1 [1]**.** Топологическое пространство X называется *однородным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдётся гомеоморфизм $f\colon X \to X$ такой, что $y = f(x)$.

В 1990 г. К. Кунен доказал теорему о сравнимости ультрафильтров специального вида, по которым могут сходиться к одной и той же точке последовательности в компактном F-пространстве, и использовал её для доказательства неоднородности бесконечных компактных F-пространств [16]:

Лемма Кунена. *Пусть p, $q \in \omega^*$ — слабые P-точки, не сравнимые в смысле порядка Рудин–Кейслера, и X — произвольное компактное F-пространство. Возьмём в X произвольную дискретную последовательность $\{d_m : m \in \omega\}$ попарно различных точек и последовательность точек $\{e_n : n \in \omega\}$ (возможно, не различных). Предположим, что $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$. Тогда $\{n : e_n = x\} \in q$.*

Следующая теорема усиливает результат Кунена в нескольких направлениях: мы расширяем класс рассматриваемых пространств до класса $\mathscr{R}_2$ и не требуем, чтобы оба ультрафильтра в формулировке теоремы являлись слабыми P-точками. Кроме того, мы явно указываем, какой именно из ультрафильтров меньше другого в смысле порядка Рудин–Кейслера (это уточнение можно извлечь и из доказательства Кунена, но явно оно нигде не формулировалось). Общая схема нашего доказательства подобна схеме Кунена из [16], но в её реализации имеются существенные отличия, связанные, в частности, с тем, что оригинальное доказательство Кунена содержало пробелы.

Теорема 4.1.1. *Пусть $q \in \omega^*$ — любой неглавный ультрафильтр на ω и $p \in \omega^*$ — неглавный ультрафильтр, являющийся слабой P-точкой. Предположим, что существуют компактное $\mathscr{R}_2$-пространство X, точка $x \in X$ и две последовательности $(d_m)_{m\in\omega}$ и $(e_n)_{n\in\omega}$ точек X такие, что $\{d_m : m \in \omega\}$ — дискретное множество попарно различных точек и $e_n \neq x$ для всех $n \in \omega$, причем $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$. Тогда $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

Доказательство. Положим $D = \{d_m : m \in \omega\}$, $E = \{e_n : n \in \omega\}$ и $D^* = \overline{D}\setminus D$. Из леммы 1.1.3 следует, что существуют открытые непересекающиеся множества U_m, $m \in \omega$, такие, что $d_m \in U_m$ и $U_m \cap D^* = \varnothing$ для всех $m \in \omega$. Введем обозначение $B = \{n : e_n \in \bigcup\limits_{m\in\omega} U_m\}$. Для $P, Q \subset \omega$ положим $D_P = \{d_m : m \in P\}$ и $E_Q = \{e_n : n \in Q\}$. Заметим, что для любых $P \in p$ и $Q \in q$ точка x принадлежит пересечению $\overline{E}_Q \cap \overline{D}_P$.

Возможны следующие случаи:

1. Найдется $Q \in q$, для которого $E_Q \subset \overline{D}$.

   1.1. Если $E_Q \cap D = \varnothing$ (см. рис. 2), то определим отображение $f\colon \omega \to D$ правилом $f(m) = d_m$. По свойству стоун-чеховской компактификации f продолжается до непрерывного отображения $\widetilde{f}\colon \beta\omega \to \overline{D}$. Так как X — компактное $\mathscr{R}_2$-пространство, а поэтому и $\beta\omega$-пространство (в силу предложения 2.2.6 и включения $\mathscr{R}_2 \subset \mathscr{R}_3$), имеем $\overline{D} = \beta D$, а значит, $\widetilde{f}$ — гомеоморфизм. Пусть $g = \widetilde{f}^{-1}$. Поскольку $E_Q \cap D = \varnothing$, имеем $g(e_n) \in \omega^*$ для $n \in Q$, а поскольку g — гомеоморфизм, по замечанию 1.1.3 имеем $g(x) = q\text{-}\lim_n\big(g(e_n)\big)$. С другой стороны,

$$g(x) = p\text{-}\lim_m\big(g(d_m)\big) = p\text{-}\lim_m m = p.$$

То, что ультрафильтр p является слабой P-точкой, означает, что p может быть предельной точкой для не более чем счётного множества $\{g(e_n) : n \in Q\} \subset \omega^*$ только в том случае, если бесконечное число элементов этого множества равно p, т.е. $e_n = x$ для бесконечно многих n, а это противоречит условиям теоремы.

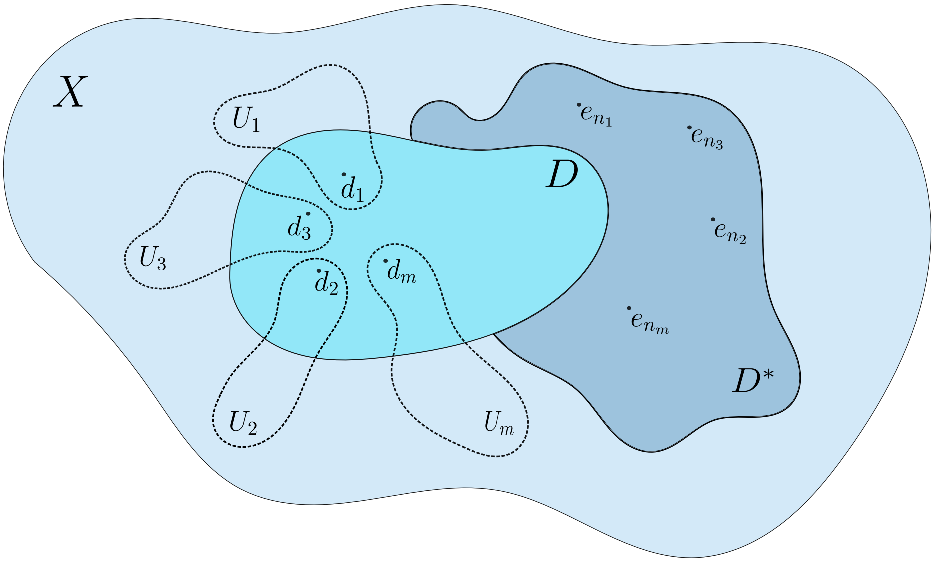


Рис. 2. Для каждого $n_m \in Q$, $m \in \omega$, выполнено $e_{n_m} \in D^*$.

1.2. В случае, когда $E_Q \subset D$ (см. рис. 3), рассмотрим отображение $\varphi\colon \omega \to \omega$, определённое правилом $\varphi(n) = m \iff e_n = d_m$ для $n \in Q$ и $\varphi(n) = 0$ для $n \notin Q$.

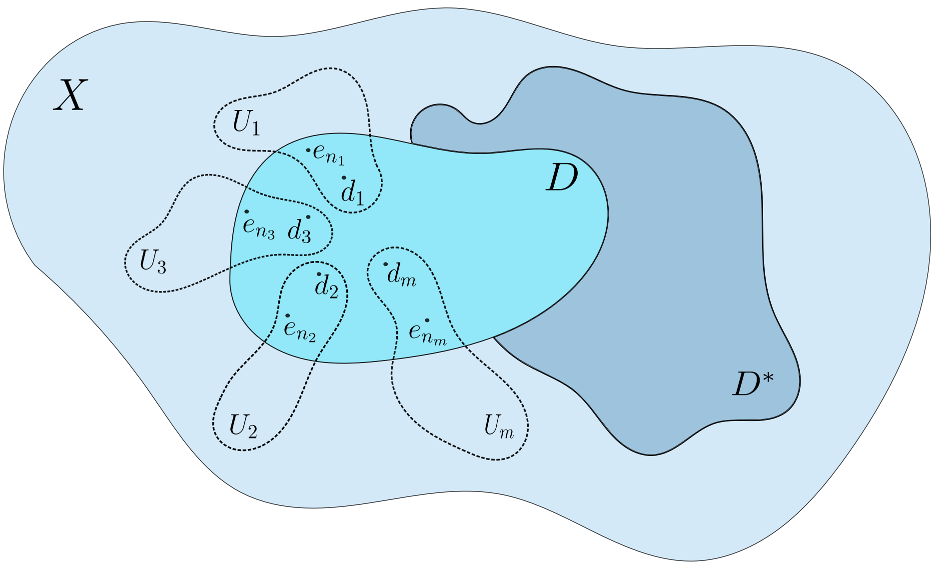


Рис. 3. Для каждого $n_m \in Q$, $m \in \omega$, выполнено $e_{n_m} \in D$.

Возможны следующие варианты:

1.2.1) для любого множества $Q' \subset Q$ такого, что $Q' \in q$, имеем $\varphi(Q') \in p$. Тогда $p = \beta\varphi(q)$, так что $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.

1.2.2) существует элемент $Q' \in q$, для которого $\varphi(Q') \notin p$, т.е. $\omega \setminus \varphi(Q') \in p$. Без ограничения общности можно считать, что $Q' \subset Q$ (иначе рассмотрим $Q' \cap Q$). Имеем

$$\bigcup\{U_n : n \in \omega \setminus \varphi(Q')\} \cap \bigcup\{U_n : n \in \varphi(Q')\} = \varnothing,$$

причём

$$D_{\omega\setminus\varphi(Q')} = \{d_m : m \in \omega \setminus \varphi(Q')\} \subset \bigcup\{U_m : m \in \omega \setminus \varphi(Q')\}$$

и

$$E_{Q'} \subset \bigcup\{U_n : n \in \varphi(Q')\}.$$

Значит, $D_{\omega\setminus\varphi(Q')}$ и $E_{Q'}$ отделены в $\mathscr{R}_2$-пространстве X, причём $D_{\omega\setminus\varphi(Q')}$ дискретно. Поэтому $\overline{D}_{\omega\setminus\varphi(Q')} \cap \overline{E}_{Q'} = \varnothing$ в противоречие со сделанным в начале доказательства замечанием, что $x \in \overline{E}_Q \cap \overline{D}_P$ для любых $P \in p$ и $Q \in q$.

1.3. Если $E_{Q'} \cap D \neq \varnothing$ для любого $Q' \subset Q$, то $\omega \setminus \{n : e_n \in D\} \notin q$, а значит, $\{n : e_n \in D\} \in q$, поскольку q — ультрафильтр, так что в этом случае выполнено условие 1.2.

2. Предположим, что найдётся $Q \in q$ такое, что $E_Q \cap \overline{D} = \varnothing$ (см. рис. 4).

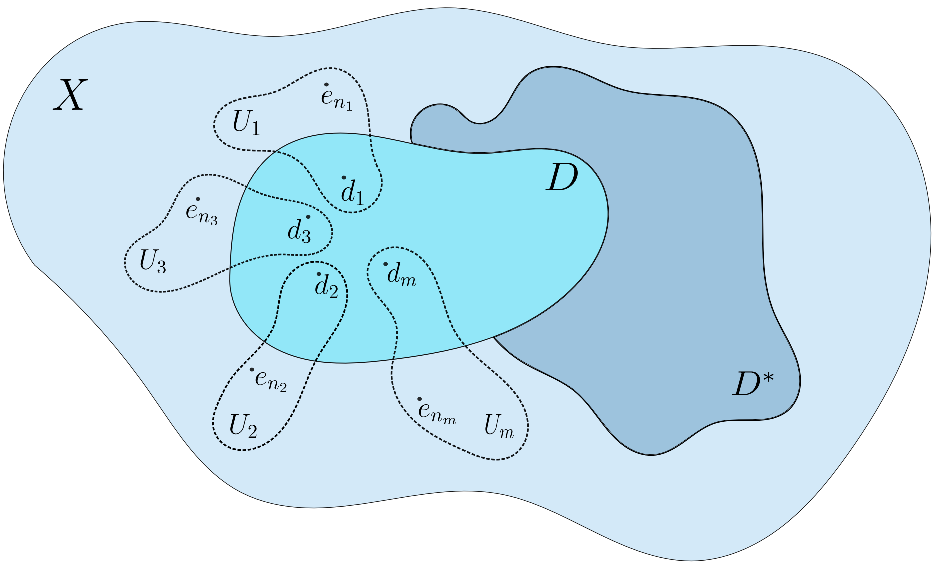


Рис. 4. Для каждого $n_m \in Q$, $m \in \omega$, выполнено $e_{n_m} \notin \overline{D}$.

Снова рассмотрим два случая:

2.1. Пусть $B \in q$. Определим отображение $\varphi\colon \omega \to \omega$ правилом $\varphi(n) = m \iff e_n \in U_m$ для $n \in B$ и $\varphi(n) = 0$ для $n \notin B$.

2.1.1) предположим, что для каждого элемента $B' \in q$, $B' \subset B$, имеем

$$\varphi(B') = \{m : e_n \in U_m \text{ для некоторого } n \in B'\} \in p.$$

Тогда $p = \beta\varphi(q)$, так что $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.

2.1.2) предположим, что найдётся элемент $B' \in q$, $B' \subset B$, такой, что множество $\{m : e_n \in U_m$ для некоторого $n \in B'\}$ не принадлежит p; тогда его дополнение $A = \{n : U_n \cap E_{B'} = \varnothing\}$ принадлежит p. Имеем $D_A \cap \overline{E}_{B'} = \varnothing$, так как $D_A \subset \bigcup\limits_{n\in A} U_n$. Поскольку по предположению $E_Q \cap \overline{D} = \varnothing$, видим, что для $C = Q \cap B' \in q$ множества D_A и E_C отделены в противоречие с тем, что X — $\mathscr{R}_2$-пространство (действительно, $x \in \overline{D}_A \cap \overline{E}_C$ и множество D_A дискретно).

2.2. Если $B \notin q$, то $\omega \setminus B \in q$ и, очевидно, $\overline{E}_{\omega\setminus B} \cap D = \varnothing$, так что множества $E_{(\omega\setminus B)\cap Q}$ и D отделены и мы снова приходим к противоречию с тем, что X — $\mathscr{R}_2$-пространство.

3. Если $E_Q \cap X \setminus \overline{D} \neq \varnothing$ для всех $Q \in q$, то $\omega \setminus \{n : e_n \in \overline{D}\} \in q$, поскольку q — ультрафильтр, так что в этом случае выполнено условие 2.

■

В статье [11] Е. А. Резниченко доказал, что однородные подпространства третьей степени X^3 произвольного F-пространства X не могут содержать бесконечных компактов. При этом он использовал предположение о том, что X — F-пространство, лишь в одном месте — при доказательстве предложения 19 [11], существенно опирающемся на теорему Кунена о сравнимости ультрафильтров, по которым сходятся последовательности в F-пространстве; во всех остальных местах достаточно требовать, чтобы X являлось $\beta\omega$-пространством. С помощью доказанного выше усиления теоремы Кунена мы получаем следующее обобщение теоремы Резниченко:

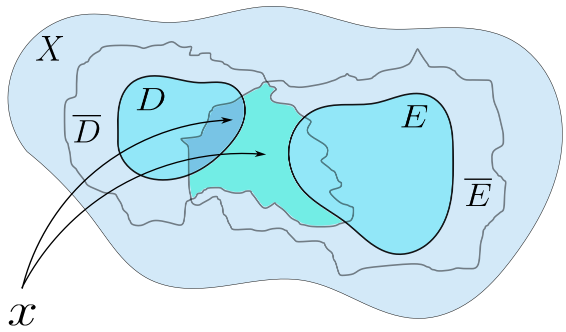
Теорема 4.1.2. *Пусть Y — $\mathscr{R}_2$-пространство и $X \subset Y^3$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X конечно.*

4.2. Лемма Кунена для $\beta\omega$-пространств

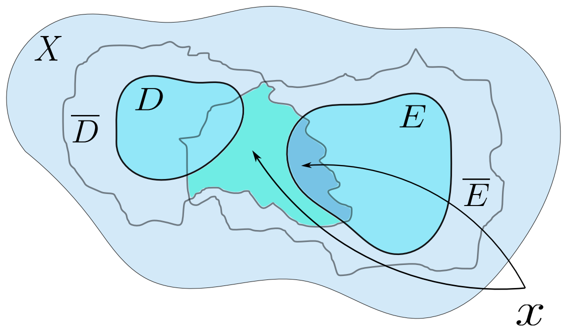
Теорема 4.2.1. *Пусть X — компактное $\beta\omega$-пространство. Предположим, что $x \in X$, $(d_m)_{m\in\omega}$ — дискретная последовательность различных точек X, $(e_n)_{n\in\omega}$ — произвольная последовательность точек X и $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$, где $p, q \in \omega^*$, p — дискретно слабая P-точка и q — дискретный ультрафильтр. Если $\{n : e_n = x\} \notin q$, то $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

Доказательство. Ультрафильтр q дискретный и $\{n : e_n = x\} \notin q$, следовательно, можно взять элемент $Q \in q$ такой, что множество $E = \{e_n : n \in Q\}$ дискретно и $x \in \overline{E} \setminus E$. По предположению $D = \{d_m : m \in \omega\}$ также дискретно и можно считать, что $x \in \overline{D} \setminus D$. Поскольку X — компактное $\beta\omega$-пространство, у точки x найдётся окрестность U такая, что $U \cap (D \setminus \overline{E}) = \varnothing$ или $U \cap (E \setminus \overline{D}) = \varnothing$ (в противном случае точка x принадлежит пересечению замыканий счётных отделённых дискретных подмножеств $E \setminus \overline{D}$ и $D \setminus \overline{E}$). По определению q-предела множество $\{n \in \omega : e_n \in U\}$ принадлежит q. Без потери общности можно считать, что Q содержится в этом множестве.

В силу того, что $x \in \overline{D} \cap \overline{E}$ и $x \notin \overline{D \setminus \overline{E}}$ или $x \notin \overline{E \setminus \overline{D}}$, мы имеем $x \in \overline{D \cap \overline{E}}$ или $x \in \overline{\overline{D} \cap E}$ соответственно.



$x \in \overline{D}$, $x \notin \overline{D \setminus \overline{E}} \Rightarrow x \in \overline{D \cap \overline{E}}$



$x \in \overline{D}$, $x \notin \overline{E \setminus \overline{D}} \Rightarrow x \in \overline{E \cap \overline{D}}$

Пусть $x \in \overline{E \cap \overline{D}} \subset \overline{D}$, в этом случае $U \cap (E \setminus \overline{D}) = \varnothing$. Поскольку X — компактное $\beta\omega$-пространство, $\overline{D} = \beta D$. Определим отображение $f \colon d_m \mapsto m$. Так как $x = p\text{-}\lim_m d_m$, имеем $\beta f(x) = p\text{-}\lim_m \beta f(d_m) = p\text{-}\lim_m f(d_m) = p\text{-}\lim_m m = p$ (см. замечание 1.1.1). С другой стороны, положив $e'_n = e_n$ для $n \in Q$ и $e'_n = x$ для $n \in \omega \setminus Q$, мы получим последовательность $(e'_n)_{n\in\omega}$, для которой $x = q\text{-}\lim_n e'_n$ (так как $(e'_n)_{n\in\omega}$ совпадает с $(e_n)_{n\in\omega}$ на некотором элементе ультрафильтра q), поэтому $p = \beta f(x) = q\text{-}\lim_n \beta f(e'_n)$ в силу замечания 1.1.1 (ii). Из предложений 1.3.1 и 1.3.3 (iii) мы имеем $r \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ для некоторого $r \leqslant_{\mathrm{RF}} p$. Поскольку p — дискретно слабая P-точка, $p = r$ по теореме 1.2.2 Значит, $p \leqslant_{RK} q$.

Пусть теперь $x \in \overline{D \cap \overline{E}} \subset \overline{E}$. В этом случае $U \cap (D \setminus \overline{E}) = \varnothing$, так что

$$\{m \in \omega : d_m \in \overline{E}\} \in p. \qquad (*)$$

Перенумеруем точки множества E: $E = \{e'_n : n \in \omega\}$, тогда $(e'_n)_{n\in\omega}$ — дискретная последовательность различных точек с областью значений E. Определим отображение $\varphi\colon \omega \to \omega$, положив $\varphi(n)$ равным 0 при $n \in \omega \setminus Q$ и числу k такому, что $e_n = e'_k$, для $n \in Q$. Заметим, что $x = \beta\varphi(q)$-$\lim_n e'_n$ согласно замечанию 1.1.1 (iii). Определим инъективное отображение $g\colon E \to \omega$ правилом $g(e'_n) = n$. Получим, что $\overline{E} = \beta E$ и $\beta g(x) = \beta\varphi(q)$-$\lim_n \beta g(e'_n) = \beta\varphi(q)$-$\lim_n n = \beta\varphi(q)$.

Пусть $\{m : d_m \notin E\} \in p$. В силу условия $(*)$ найдётся $P' \in p$ такой, что $\{d_m : m \in P'\} \subset \overline{E} \setminus E = \beta E \setminus E = E^*$. Выберем $P \in p$, для которого разность $P' \setminus P$ бесконечна. Понятно, что разность $\omega \setminus P$ тоже бесконечна. Возьмём биекцию $\Psi\colon P' \setminus P \to \omega \setminus P$. Положив $d_m = d'_m$ для $m \in P$ и $d'_m = d_{\Psi^{-1}(m)}$ для $m \in \omega \setminus P$, мы определим новую дискретную последовательность различных точек $(d'_m)_{m\in\omega}$ с областью определения $D' \subset D \cap E^*$, которая совпадает с $(d_m)_{m\in\omega}$ на $P \in p$. Ясно, что $x = p$-$\lim_m d'_m$ и $\beta g(x) = p$-$\lim_m \beta g(d'_m)$. В силу следствия 1.2.1 и из того, что $\beta g(x) = \beta\varphi(q)$ (а значит, $\beta g(x) \leqslant_{\mathrm{RK}} q$), имеем $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.

Таким образом, существует $P' \in p$, для которого $\{d_m : m \in P'\} \subset E$. Снова возьмём элемент $P \in p$, $P \subset P'$, такой, что $P' \setminus P$ бесконечно и переопределим последовательность $(d_m)_{m\in\omega}$ на $\omega \setminus P$ так же, как и выше. Получим $D' = \{d'_m : m \in \omega\} \subset E$, поэтому $(\beta g) \restriction D' = g \restriction D'$. Заметим также, что $d'_m = d_m$ для $m \in P$.

Поскольку элемент $P \in p$ имеет бесконечное дополнение до ω, найдётся биекция $\psi\colon \omega \to \omega$ такая, что $\psi(g(d'_m)) = m$ для $m \in P$. Заметим, что $\beta\psi(\beta g(d'_m)) = \psi(g(d'_m))$ для всех m, так как $g(d'_m) \in \omega$. Следовательно, последовательность $(m)_{m\in\omega}$, которая совпадает с $(\psi(g(d'_m)))_{m\in\omega}$ и, следовательно, с $(\psi(g(d_m)))_{m\in\omega}$, при сужении на P, сходится к $\beta\psi(\beta g(x))$ по ультрафильтру p. Значит, $\beta\psi(\beta g(x)) = p$. Так как ψ инъективно, p эквивалентен $\beta g(x)$, и поскольку $\beta g(x) = \beta\varphi(q)$, мы имеем $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$. ■

Замечание 4.2.1. Для любого ультрафильтра $q \in \omega^*$ найдётся слабая P-точка $p \in \omega^*$, для которой $p \nleqslant_{\mathrm{RK}} q$.

Действительно по замечанию 1.2.2 q имеет не более 2^ω $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественников, в то время как количество слабых P-точек в ω^* равно 2^{ω^ω} [25].

Следствие 4.2.1. *Если существует дискретный ультрафильтр в ω^*, то не существует однородных компактных $\beta\omega$-пространств.*

Доказательство. Пусть q — дискретный ультрафильтр в ω^* и пусть $p \in \omega^*$ — слабая P-точка, для которой $p \nleqslant_{\mathrm{RK}} q$. Предположим, что X — однородное компактное $\beta\omega$-пространство и $(e_n)_{n\in\omega}$ — произвольная последовательность различных точек в X. Возьмём $x = p\text{-}\lim_n e_n$ и $y = q\text{-}\lim_n e_n$. Поскольку X однородно, найдётся гомеоморфизм $h\colon X \to X$, переводящий y в x, и так как ультрафильтр q дискретный, существует $A \in q$, для которого множество $\{h(e_n) : n \in A\}$ дискретно. Без ограничения общности можно считать, что $(h(e_n))_{n\in\omega}$ образует дискретную последовательность различных точек. По предложению 4.2.1 мы имеем $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$, противоречие. ■

4.3. Теоремы об однородности в произведениях пространств

В определении 4.3.1, замечании 4.3.1, предложении 4.3.1 и теореме 4.3.2 для удобства обозначений точки из произведений и их окрестности будем нумеровать верхними индексами.

Определение 4.3.1. Назовём множество $D = \{d^n : n \in \omega\}$ в произвольном компакте X *S-разделённым*, если найдутся открытые окрестности $U^n \ni d^n$, $n \in \omega$, такие, что для любых $y^n \in U^n$, $n \in \omega$, и для всех $I \subseteq \omega$

$$\overline{\{y^n : n \in I\}} \cap \overline{\{y^n : n \notin I\}} = \varnothing.$$

Замечание 4.3.1. Ясно, что окрестности U^n попарно не пересекаются, поэтому всякое S-разделённое множество D дискретно. Кроме того, очевидно, что для любого множества $I \subset \omega$

$$\overline{\{d^n : n \in I\}} \cap \overline{\{d^n : n \notin I\}} = \varnothing,$$

так что по следствию 3.6.4 из [37] имеем $\overline{\{d^n : n \in \omega\}} \cong \beta\omega$.

В доказательстве нашего первого основного результата используются следующие три утверждения.

Предложение 4.3.1. *Пусть κ — бесконечный кардинал и $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, где каждый X_α — компакт, и предположим, что $d^n \in X$ для $n \in \omega$. Тогда следующие условия связаны импликациями 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longleftrightarrow$ 3):*

1) *для некоторого $\alpha \in \kappa$ множество $\{d_\alpha^n : n \in \omega\}$ является S-разделённым в X_α;*

2) *для некоторого счётного множества $B \subseteq \kappa$ множество $\{\pi_B(d^n) : n \in \omega\}$ является S-разделённым в $\prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$;*

3) *множество $\{d^n : n \in \omega\}$ является S-разделённым в X.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны. Докажем 3) $\Longrightarrow$ 2). Любая окрестность U^n точки d^n содержит каноническую окрестность V^n, которая зависит от конечного множества координат B_n, т.е. $V^n = \prod\limits_{\alpha<\kappa} W_\alpha$, где W_α — открытое подмножество X_α для $\alpha \in B_n$ и $W_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \in \kappa \setminus B_n$. Покажем, что для $B = \bigcup B_n$ множество $\{\pi_B(d^n) : n \in \omega\} = \{(d_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \in \omega\}$ является S-разделённым в $X_B = \prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$, причём в качестве окрестностей из определения S-разделённости можно взять $\pi_B(V^n)$.

Пусть $y^n \in \pi_B(V^n)$. Зафиксируем произвольную точку $x = (x_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in X$ и множество $I \subseteq \omega$. Для каждого n дополним координаты точки y^n, положив $y_\alpha^n = x_\alpha$ для $\alpha \in \kappa \setminus B_n$. Обозначим полученную точку $\widetilde{y^n}$. Ясно, что $\widetilde{y^n} \in V^n \subset U^n$ и

$$\overline{\{\widetilde{y^n} : n \in I\}} \cap \overline{\{\widetilde{y^n} : n \notin I\}} = \varnothing \qquad (*)$$

в силу условия 3).

Покажем, что замыкания проекций на B тоже не пересекаются, т.е.

$$\overline{\{(y_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \in I\}} \cap \overline{\{(y_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \notin I\}} = \varnothing.$$

Пусть

$$z \in \overline{\{(y_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \in I\}} \cap \overline{\{(y_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \notin I\}}.$$

Дополним координаты точки z, положив $z_\alpha = x_\alpha$ для $\alpha \in \kappa \setminus B$, получим точку $\widetilde{z} \in X$. Возьмём каноническую окрестность $W \subset X$ точки $\widetilde{z}$ такую, что $W \cap \{\widetilde{y^n} : n \in I\} = \varnothing$ или $W \cap \{\widetilde{y^n} : n \notin I\} = \varnothing$ (такая окрестность найдётся в силу условия $(*)$). Тогда проекция $\pi_B(W)$ окрестности W на подпространство X_B не пересекается с одним из множеств $\{(y_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \in I\}$ или $\{(y_\alpha^n)_{\alpha\in B} : n \notin I\}$ в силу выбора окрестности W и определения точек y^n. Противоречие. ■

Лемма 4.3.1. *Любая дискретная последовательность в $\mathscr{R}_3$-пространстве X является S-разделённой.*

Доказательство. Возьмём произвольное дискретное множество $D = \{d_n : n \in \omega\}$ из X. В силу леммы 1.2.1 для всех $n \in \omega$ существуют открытые попарно непересекающиеся множества U_n такие, что $d_n \in U_n$.

Для всякого n выберем произвольную точку $y_n \in U_n$. Зафиксируем произвольное множество индексов $I \subseteq \omega$. Заметим, что множества $\{y_n : n \in I\}$ и $\{y_n : n \in \omega \setminus I\}$ дискретные и отделённые по построению. Из определения $\mathscr{R}_3$-пространства получаем требуемое. ■

Определение 4.3.2 [16]. Топологическое пространство X называется *секвенциально малым*, если любое бесконечное множество из X содержит бесконечное подмножество, замыкание которого не содержит копию $\beta\omega$.

Теорема 4.3.1 [45]. *Если $\beta\omega$ вкладывается в $\prod\limits_{\alpha\in\omega} X_\alpha$, то $\beta\omega$ вкладывается по крайней мере в один X_α.*

Следующая теорема — первый основной результат главы. В её доказательстве используется идея Кунена, теорема 4.1.1 и понятие S-разделённости.

Теорема 4.3.2. *Пусть κ — кардинал и $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ — компакт, причём каждый X_α удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:* (i) *является $\mathscr{R}_2$-пространством;* (ii) *содержит слабую P-точку;* (iii) *содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество. Пусть также X_α — бесконечное компактное $\mathscr{R}_2$-пространство для хотя бы одного $\alpha \in A$. Тогда X неоднородно.*

Доказательство. Разобьём κ на три подмножества R, S и T такие, что $R \neq \varnothing$ и каждое X_α является бесконечным компактным $\mathscr{R}_2$-пространством для $\alpha \in R$, содержит слабую P-точку для $\alpha \in S$ и содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество для $\alpha \in T$.

Выберем $d^n \in X$ следующим образом. Для каждого $\alpha \in R$ $\{d^n_\alpha : n \in \omega\}$ — дискретная последовательность в X_α. Для каждого $\alpha \in S$ d^n_α — одна и та же слабая P-точка в X_α для всех $n \in \omega$. Для каждого $\alpha \in T$ d^n_α — один и тот же элемент множества U_α для всех $n \in \omega$, где U_α — непустое открытое подмножество X_α, замыкание которого является секвенциально малым.

Пусть $p, q \in \omega^*$, $p \not\leq q$ и p — слабая P-точка, такие ультрафильтры существуют по замечанию 4.2.1. Положим $x = p\text{-}\lim_m d^m$, $y = q\text{-}\lim_m d^m$. Допустим, что $h\colon X \to X$ — гомеоморфизм такой, что $h(y) = x$, и придём к противоречию.

Положим $e^n = h(d^n)$. Последовательность $(d^n)_{n\in\omega}$ дискретная, поскольку $R \neq \varnothing$ и множество $\{d^n_\alpha : n \in \omega\}$ образует дискретную последовательность в X_α для $\alpha \in R$. Следовательно, в силу леммы 4.3.1, точки d^n S-разделены в X; таким образом, точки e^n тоже S-разделены в X, так как h — гомеоморфизм. В соответствии с предложением 4.3.1 зафиксируем счётное $J \subseteq \kappa$ такое, что точки $\pi_J(e^n)$ S-разделены в $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Заметим, что для каждого α выполнено $x_\alpha = q\text{-}\lim e^m_\alpha = p\text{-}\lim d^m_\alpha$ по замечанию 1.1.1, поскольку π_α является непрерывным отображением. Рассмотрим три типа пространств X_α отдельно.

Во-первых, для каждого $\alpha \in J \cap R$ мы можем применить теорему 4.1.1 к X_α и выбрать $A_\alpha \in q$ так, чтобы выполнялось $e^m_\alpha = x_\alpha$ для всех $m \in A_\alpha$. Аналогично поступим с каждым $\alpha \in J \cap S$, пользуясь тем, что x_α — слабая P-точка, а значит, обладает окрестностью, не содержащей ни одной точки $e^n_\alpha \neq x_\alpha$. Также для каждого $\alpha \in J \cap T$ найдётся $A_\alpha \in q$ такой, что $e^n_\alpha \in U_\alpha$ для любого $n \in A_\alpha$. Перенумеруем элементы счётного множества J: $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. В каждом пересечении $A_{\alpha_1} \cap \ldots \cap A_{\alpha_k}$ выберем точку a_k так, что $a_i \neq a_j$ для любых $i \neq j$, и получим бесконечное множество $\widetilde{A} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ такое, что $|\widetilde{A} \setminus A_\alpha| < \infty$для всех $\alpha \in J$. Для $\alpha \in J \cap (R \cup S)$ имеем $e^m_\alpha = x_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, $m \in \widetilde{A}$. Так что для каждого из этих α множество $\{e^m_\alpha : m \in \widetilde{A}\}$ конечно.

Теперь, пользуясь определением секвенциальной малости, для α_1 выберем бесконечное подмножество $B_1 \subset \widetilde{A}$ такое, что множество $\overline{\{e^m_{\alpha_1} : m \in B_1\}}$ не содержит копию $\beta\omega$, для α_2 выберем $B_2 \subset B_1$ такое, что $\overline{\{e^m_{\alpha_2} : m \in B_2\}}$ не содержит копию $\beta\omega$. Продолжая этот процесс, получим вложенную последовательность множеств $\widetilde{A} \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$. Выберем попарно различные точки $b_n \in B_n$ для всех $n \in \omega$. Получим множество $\widetilde{B} = \{b_n : n \in \omega\}$ со свойством $|\widetilde{B} \setminus B_n| < \infty$ для любого $n \in \omega$.

Для каждого $\alpha \in J$ положим $P_\alpha = \overline{\{e^m_\alpha : m \in \widetilde{B}\}}$. Стоун-чеховская компактификация $\beta\omega$ не вкладывается ни в одно P_α, следовательно, она не вкладывается и в произведение $\prod\limits_{\alpha\in J} P_\alpha$ по теореме 4.3.1. Это противоречие, потому что произведение содержит замыкание $\overline{\{\pi_J(e^n) : n \in \widetilde{B}\}}$, которое по замечанию 4.3.1 гомеоморфно $\beta\omega$, поскольку точки $\pi_J(e^n)$ S-разделены. ■

Следствие 4.3.1. *Произведение компактных $\mathscr{R}_2$-пространств неоднородно.*

Теорема 4.3.3. *Предположим, что существует дискретный ультрафильтр* $q \in \omega^*$, κ *— кардинал и* $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *— компакт, причём каждый* X_α *удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:* (i) *является* $\beta\omega$*-пространством;* (ii) *содержит слабую* P*-точку;* (iii) *содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество. Пусть также* X_α *— бесконечное компактное* $\beta\omega$*-пространство для хотя бы одного* $\alpha \in A$. *Тогда* X *неоднородно.*

Доказательство. Доказательство практически полностью повторяет предыдущее с той разницей, что вместо теоремы 4.1.1 используется теорема 4.2.1. ■

Следствие 4.3.2. *Если существует дискретный ультрафильтр в* ω^*, *то произведение компактных* $\beta\omega$*-пространств неодноднородно.*

Следующее следствие использует предположение $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Через $\mathfrak{d}$ обозначают наименьшую мощность *доминирующего* семейства $\mathscr{D}$ функций $\omega \to \omega$, т.е. семейства с тем свойством, что для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся функция $g \in \mathscr{D}$ такая, что $g(n) \geqslant f(n)$ для всех, кроме конечного числа, $n \in \omega$, и $\mathfrak{c}$ — стандартное обозначение для 2^ω. Очевидно, что CH влечёт за собой $\omega_1 = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, однако утверждение $\omega_1 < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ также совместимо с ZFC.

Следствие 4.3.3. *В предположении* $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ *произведение компактных* $\beta\omega$*-пространств неоднородно.*

Доказательство. Кетонен доказал, что $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ влечёт за собой существование P-точек в ω^* [39]. По замечанию 1.3.1 любая P-точка является дискретным ультрафильтром. ■

4.4. Метризуемость однородных подпространств произведений

Результаты этого раздела обобщают теоремы Е. А. Резниченко. В доказательствах используются его идеи.

Предложение 4.4.1. *Пусть* X *— топологическое пространство,* $p \in \omega^*$ *—* P*-точка,* $\zeta = (z_n)_{n\in\omega}$ *— последовательность точек произведения* X^ω *и*

$z = p\text{-}\lim_n \zeta \in X^\omega$. Предположим, что множество $Z_M = \{z\} \cup \{z_n : n \in M\}$ не метризуемо ни для какого $M \in p$. Пусть $\pi_k \colon X^\omega \to X$ — проекция X^ω на k-й множитель. Тогда существуют $m \in \omega$ и $N \in p$ такие, что множество $\{\pi_m(z_n) : n \in N\}$ дискретно и для каждого $i \in N$ количество индексов j таких, что $\pi_m(z_j) = \pi_m(z_i)$, конечно.

Доказательство. Заметим, что можно выбрать такое m, что проекция $\pi_m(\zeta_M)$ бесконечна для любого $M \in p$, где ζ_M — подмножество точек из последовательности ζ с номерами из множества M. В противном случае для каждого $m \in \omega$ возьмём $M_m \in p$ такое, что $|\pi_m(\zeta_{M_m})| < \infty$. Так как ультрафильтр p является P-точкой, существует $M \in p$ такое, что $M \setminus M_m$ конечно для любого $m \in \omega$. Тогда множество Z_M метризуемо, поскольку проекция множества Z_M на любую координату m конечна, так что Z_M содержится в произведении конечных пространств с тихоновской топологией. Противоречие.

Выберем m так, чтобы проекция $\pi_m(\zeta_M)$ была бесконечна для любого $M \in p$. Заметим, что $\pi_m(z) = p\text{-}\lim_n \pi_m(z_n)$ из-за непрерывности операции проектирования. В силу того, что всякая P-точка является дискретным ультрафильтром, существует $N \in p$ такое, что множество $\{\pi_m(z_n) : n \in N\}$ дискретно и не содержит точку $\pi_m(z)$. Для каждого $n \in N$ возьмём окрестность U_n точки $\pi_m(z)$ такую, что $\pi_m(z_n) \notin U_n$. Для всякого n окрестность U_n содержит все точки с номерами из некоторого элемента ультрафильтра p, обозначим его A_n. Получаем последовательность $A_1, A_2, \ldots$ элементов ультрафильтра p. Так как p является P-точкой, найдётся $A \in p$ такой, что $|A \setminus A_n|$ конечно для любого n. В силу выбора окрестностей U_n для каждого $i \in A$ имеем $\pi_m(z_i) \notin U_i$, причём $\pi_m(z_j) \notin U_i$ тогда и только тогда, когда $j \notin A_i$, а значит, если $\pi_m(z_j) = \pi_m(z_i)$, то $j \in A \setminus A_i$, т.е. количество таких индексов j конечно. ■

Для дальнейшего напомним формулировку аксиомы Мартина и необходимые для неё определения.

Пусть $\mathbb{P} = (P, \leqslant, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество (ч.у.м.), где P — множество, $\leqslant$ — порядок на P и $\mathbf{1}$ — наибольший элемент P. Скажем, что $x, y \in P$ *совместимы*, если существует элемент $z \in P$ такой, что $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$, в противном случае элементы x и y называются *несовместимыми*.

Определение 4.4.1. Множество $A \subset P$ называется *антицепью*, если оно состоит из попарно несовместимых элементов.

Определение 4.4.2. Множество $D \subset P$ называется *плотным* в P, если для любого $p \in P$ найдётся элемент $d \in D$ такой, что $d \leqslant p$.

Определение 4.4.3. Говорят, что ч.у.м. $\mathbb{P}$ удовлетворяет *условию счётности цепей (у.с.ц.)*, если $\mathbb{P}$ не содержит несчётных антицепей.

Определение 4.4.4. Пусть $\mathscr{D}$ — любое семейство подмножеств $\mathbb{P}$. Множество $F \subset P$ называется *$\mathscr{D}$-генерическим фильтром*, если

1) $\mathbf{1} \in F$;

2) для любых $p, q \in F$ существует $r \in F$ такое, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$;

3) если $p \in F, q \in P$ и $p \leqslant q$, то $q \in F$;

4) $F \cap D \neq \varnothing$ для любого $D \in \mathscr{D}$.

Аксиома Мартина (MA). *Для любого ч.у.м. $\mathbb{P}$, удовлетворяющего у.с.ц., и любого семейства $\mathscr{D}$ плотных подмножеств P мощности $|\mathscr{D}| < 2^\omega$ существует $\mathscr{D}$-генерический фильтр.*

Ясно, что если выполнена CH, то выполнена и MA, так что MA совместима с ZFC.

Введём следующее теоретико-множественное предположение:

NNCPP_κ: *Существует κ попарно $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-несовместимых (т.е. не почти когерентных) P-точек.*

Замечание 4.4.1. Это условие равносильно существованию κ попарно $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несовместимых P-точек, поскольку в классе P-точек порядок Рудин–Кейслера совпадает с порядком Рудин–Бласса (см. предложение 1.2.2).

Для $\kappa = \omega_1$ это предположение вытекает из аксиомы Мартина [46, теорема 2]. Действительно, если аксиома Мартина выполнена, то существует 2^{2^ω} попарно $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-неэквивалентных селективных ультрафильтров [46], а они не почти когерентны, поскольку являются минимальными в смысле порядка Рудин–Кейслера [22, теорема 9.6]. Заметим, что условие $\mathrm{NNCPP}_{\omega_1}$ строго слабее CH, т.е. есть модели, в которых условие $\mathrm{NNCPP}_{\omega_1}$ выполнено, а CH нет, поскольку аксиома Мартина совместима с отрицанием CH.

Теорема 4.4.1 ($\mathrm{NNCPP}_{\omega_1}$). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^\omega$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X метризуемо.*

Доказательство. От противного. Допустим, что X содержит неметризуемое компактное подпространство K. Из утверждения 7 в статье Резниченко [11] следует, что $\beta\omega$ вложено в K. Это означает, что в K найдётся дискретная последовательность $\zeta = (z_n)_{n\in\omega}$ (образ пространства ω при вложении) с компактным замыканием $\overline{\zeta}$, гомеоморфным $\beta\omega$. Возьмём точку $z \in X$. Для каждого $p \in \omega^*$ зафиксируем $f_p \in \mathrm{Aut(X)}$ такой, что $f_p(p\text{-}\lim\zeta) = z$ (это можно сделать в силу однородности пространства X).

Из условия $\mathrm{NNCPP}_{\omega_1}$ следует, что найдётся множество $C \subset \omega^*$, $|C| = \omega_1$, состоящее из попарно $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-несовместимых P-точек.

Из предложения 4.4.1 вытекает, что для каждого $p \in C$ существуют $m_p \in \omega$ и $N_p \in p$ такие, что множество $Y_p = \{\pi_{m_p}(f_p(z_n)) : n \in N_p\}$ дискретно и для каждого $i \in N_p$ количество индексов j таких, что $\pi_m(f_p(z_j)) = \pi_m(f_p(z_i))$, конечно. Поскольку $|C| > \omega$, найдутся два ультрафильтра p и q из C, для которых $m = m_p = m_q$. Перенумеруем точки множества Y_p натуральными числами и получим дискретную последовательность различных точек $(y^p_k)_{k\in\omega}$. Рассмотрим конечнократное отображение $g_p\colon \omega \to \omega$, которое каждому n ставит в соответствие k такое, что $\pi_m(f_p(z_n)) = y^p_k$. Отображение g_q для множества Y_q определим аналогично. Из замечания 1.1.1 (iii) имеем $z = \beta g_p(p)\text{-}\lim_k y^p_k = \beta g_q(q)\text{-}\lim_k y^q_k$. При этом множества $\{y^p_k\}$ и $\{y^q_k\}$ содержатся в компакте $\pi_m(f_p(K)) \cup \pi_m(f_q(K))$, который является $\beta\omega$-пространством как подпространство $\beta\omega$-пространства Y. Следовательно, $\beta g_p(p)$ и $\beta g_q(q)$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-сравнимы по теореме 4.2.1. Пусть для определённости $\beta g_p(p) \leqslant_{\mathrm{RK}} \beta g_q(q)$. По лемме 16.7 из [22] ультрафильтры $\beta g_p(p)$ и $\beta g_q(q)$ — P-точки. По предложению 4.4.1 $\beta g_p(p) \leqslant_{\mathrm{RB}} p$ и $\beta g_q(q) \leqslant_{\mathrm{RB}} q$, а значит, ультрафильтры p и q имеют общего $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-предшественника $\beta g_p(p)$ т.е. p и q $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-совместимые P-точки. Противоречие. ∎

Следствие 4.4.1 (MA). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^\omega$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X метризуемо.*

Теорема 4.4.2 (NNCPP_{n+1}). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^\omega$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X конечно.*

Доказательство. Пусть K — компактное подпространство X. Метризуемость K доказывается так же, как и в теореме 4.4.1. Предположим, что K бесконечно. Из утверждения 7 статьи Резниченко [11] вытекает, что $\beta\omega$ вкладывается в K. Противоречие с метризуемостью K, следовательно, K конечно. ∎

Следствие 4.4.2 (MA). *Пусть* Y *—* $\beta\omega$*-пространство,* $X \subset Y^\omega$ *— однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства* X *конечно.*

Заключение

В диссертации получены следующие результаты.

1. В главе 1 рассмотрены основные свойства ультрафильтров, порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика и взаимосвязь между ними. Особое внимание уделено дискретным ультрафильтрам, доказано, что они образуют подполугруппу в полугруппах $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ и в $(\beta\mathbb{N}, +)$.

2. В главе 2 введены классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, являющиеся естественными обобщениями классов экстремально несвязных пространств и F-пространств. Исследована их взаимосвязь друг с другом и с классами F- и $\beta\omega$-пространств. Доказано полезное общее утверждение о продолжении функций с подпространств на топологические произведения; с помощью него, в частности, показано, что классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств не сохраняются стоун-чеховской компактификацией. Определены и рассмотрены обобщения введённых классов пространств на несчётные кардиналы.

3. В главе 3 рассмотрено продолжение функций в классе $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств со счётных подпространств. Приведена алгебраическая характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

4. В главе 4 получены результаты о сравнимости в смысле порядка Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в $\mathscr{R}_2$- и $\beta\omega$-пространстве сходятся последовательности к одной и той же точке. Доказано, что произведение бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств пространств, а при условии существования дискретного ультрафильтра $\mathscr{R}_3$- и даже $\beta\omega$-пространств, не бывает однородным. Также в допол-

нительных теоретико-множественных предположениях доказана конечность компактов в однородных подпространствах конечных произведений однородных $\beta\omega$-пространств и метризуемость компактов в однородных подпространствах счётных произведений однородных $\beta\omega$-пространств.

Список литературы

[1] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Math. J., **23**(3), 409–419 (1956).

[2] L. Gillman, M. Henriksen, *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **77**(2), 340–362 (1954).

[3] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 87–91 (1967).

[4] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1982).

[5] W. Comfort, J. van Mill, *A homogeneous extremally disconnected countably compact space*, Topol. Appl., **25**(1), 65–73 (1987).

[6] W. F. Lindgren, A. A. Szymanski, *A non-pseudocompact product of countably compact spaces via seq*, Proc. Am. Math. Soc., **125**(12), 3741–3746 (1997).

[7] A. Kato, *A new construction of extremally disconnected topologies*, Topol. Appl., **58**(1), 1–16 (1994).

[8] Z. Frolík, *Homogeneity problems of extremally disconnected spaces*, Comment. Math. Univ. Carol., **8**(4), 87–91 (1967).

[9] A. Arhangelskii, *Groupes topologiques extremalement discontinus*, C. R. Acad. Sci. Paris, **265**, 822-825 (1967).

[10] E. K. van Douwen, *Homogeneity of βG if G is a topological group*, Collect. Math., **41**, 193–199 (1979).

[11] E. Reznichenko, *Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces*, Topol. Appl., **284**, 107403 (2020).

[12] A. M. Gleason, *Projective topological spaces*, Ill. J. Math., **2**(4A), 482–489 (1958).

[13] В. И. Пономарёв, *Об абсолюте топологического пространства*, Докл. АН СССР, **149**, 26–29 (1963).

[14] E. K. van Douwen, *Cardinal functions on Boolean spaces*, Handbook of Boolean algebras, North-Holland, Amsterdam, **2**, 417–467 (1989).

[15] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer, New York (1960).

[16] K. Kunen, *Large homogeneous compact spaces*, in J. van Mill, G. Reed (Eds.), Open Problems in Topology, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, Amsterdam, 261–270 (1990).

[17] E. K. van Douwen, *Prime Mappings, Number of Factors and Binary Operations*, Dissertationes Mathematicae, **119**, PWN, Warsaw (1981).

[18] W. W. Comfort, *Ultrafilters: some old and some new results*, Bull. Amer. Math. Soc., **83**, 417–455 (1977).

[19] M. Husek, *Continious mappings on subspaces of products*, Symposia Math., **17**, 25–41 (1976).

[20] J. E. Baumgartner, *Ultrafilters on* ω, J. Symb. Logic, **60**, 624–639 (1995).

[21] N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone–Čech Compactification*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1998).

[22] W. Comfort, S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974).

[23] J. van Mill, *An introduction to* $\beta\omega$, Chapter 11 in K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, Amsterdam, 503–567 (1984).

[24] M. E. Rudin, *Partial orders on the types in* βN, Trans. Amer. Math. Soc., **155**(2), 353–362 (1971).

[25] K. Kunen, *Weak P-points in* $\mathbb{N}^*$, Coll. Math. Soc. János Bolyai, **23**, 741–749 (1978).

[26] S. Shelah, *There may be no nowhere dense ultrafilter*, in Johann A. Makowsky, Elena V. Ravve (Eds.), Lecture Notes in Logic, Vol. 11: Logic Colloquium '95: Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association of Symbolic Logic, Haifa, Israel, August 9-18, 1995, in: Lecture Notes in Logic, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[27] J. L. Verner, *Lonely points revisited*, Comment. Math. Univ. Carol., **54**(1), 105–110 (2013).

[28] J. van Mill, *Sixteen topological types in $\beta\omega - \omega$*, Topol. Appl., **13**, 43–57 (1982).

[29] D. Booth, *Ultrafilters on a countable set*, Ann. Math. Logic, **2**(1), 1–24 (1970/71).

[30] A. W. Miller, *There are no Q-points in Laver's model for the Borel conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc., **78**(1), 103–106 (1980).

[31] K. Kunen, *Ultrafilters and independent sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **172**, 299–306 (1972).

[32] S. Shelah, M. E. Rudin, *Unordered types of ultrafilters*, Topology Proc., **3**, 199–204 (1978).

[33] A. R. Blass, *Orderings of ultrafilters*, Ph.D. thesis, Harvard Univ., Cambridge, Mass. (1970).

[34] A. Blass, S. Shelah, *There may be simple $P_{\aleph_1}$- and $P_{\aleph_2}$-points and the Rudin–Keisler ordering may be downward directed*, Ann. Pure Appl. Logic, **33**, 213–243 (1987).

[35] T. Banakh, A. Blass, *The number of near-coherence classes of ultrafilters is either finite or* $2^{\mathfrak{c}}$, in J. Bagaria, S. Todorcevic (Eds.), Set Theory. Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 257–273 (2006).

[36] Z. Frolík, *Maps of extremally disconnected spaces, theory of types, and applications*, in General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra: Proceedings of the Kanpur topological conference, 1968, Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 133–142 (1971).

[37] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, Москва (1986).

[38] N. Dobrinen, S. Todorcevic, *Tukey types of ultrafilters*, Illinois J. Math., **55**(3), 907–951 (2011).

[39] J. Ketonen, *On the existence of P-points in the Čech–Stone compactification of integers*, Fund. Math., **92**, 91–94 (1976).

[40] Е. А. Резниченко, *Псевдокомпактное пространство, в котором только множества неполной мощности не замкнуты и не дискретны*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем., мех., №6, 69–70 (1989).

[41] L. Gillman, M. Henriksen, *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal*, Trans. Amer. Math. Soc., **82**(2), 366–391 (1956).

[42] Е. М. Вечтомов, А. В. Михалёв, В. В. Сидоров, *Полукольца непрерывных функций*, Фундамент. и прикл. матем., **21**(2), 53–131 (2016).

[43] В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, И. А. Семёнова, *Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции*, Фундамент. и прикл. матем., **4**(2), 493–510 (1998).

[44] А. В. Архангельский, В. И. Пономарёв, *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, Москва (1974).

[45] V. I. Malykhin, *$\beta\mathbb{N}$ is prime*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys., **27**, 295–297 (1978).

[46] A. Blass, *The Rudin–Keisler ordering P-points*, American Mathematical Society, **179**, 145–166 (1973).

[47] I. Protasov, *Combinatorics of numbers*, VNTL Publishers, Ukraine (1997).

[48] Yevhen G. Zelenyuk, *Ultrafilters and Topologies on Groups*, de Gruyter, Germany (2011).

[49] А. Г. Елькин, *О регулярных максимальных пространствах*, Матем. заметки, **27**(2), 301–305 (1980).

[50] R. Levy, *Semi-F-spaces*, Bull. Canad. Math., **31**, 385–393 (1988).

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология») и входящие в базы цитирования Scopus, РИНЦ, RSCI, WoS

[51] А. Ю. Грознова, *О продолжении функций со счётных подпространств*, Функц. анализ и его прил., **56**(4), 35–42 (2022).

DOI: 10.4213/faa4038

Журнал индексируется в **Scopus**, **РИНЦ**, **RSCI**, **WoS**. IF[1]: SJR 0,354.

[52] A. Groznova, O. Sipacheva, *Discrete ultrafilters and homogeneity of product spaces*, Topol. Appl. Available online 14 December 2022, 108378 (2022).

Большинство результатов статьи получены в нераздельном соавторстве с О. В. Сипачевой, предложения 1.4.1 и 1.4.2, следствия 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 и 1.4.5 доказаны А. Ю. Грозновой.

DOI: 10.1016/j.topol.2022.108378

Журнал индексируется в **Scopus**, **WoS**. IF: 0,583.

[53] А. Ю. Грознова, О. В. Сипачева, *Новые свойства топологических пространств, обобщающие экстремальную несвязность*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем., мех., №1, 19–25 (2023).

Большинство результатов статьи получены в нераздельном соавторстве с О. В. Сипачевой, предложения 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 и 2.2.4 доказаны А. Ю. Грозновой.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-19-25

Журнал индексируется в **Scopus**, **РИНЦ**, **RSCI**, **WoS**. IF: SJR 0,417.

[54] А. Ю. Грознова, *Об однородности произведений топологических пространств*, Матем. заметки, **113**(2), 171–181 (2023).

DOI: 10.4213/mzm13634

Журнал индексируется в **Scopus**, **РИНЦ**, **RSCI**, **WoS**. IF: SJR 0,58.

[1]Указаны импакт–факторы SJR за 2021 год.

Тезисы докладов

[55] А. Ю. Грознова, *Новые свойства топологических пространств, связанные с экстремальной несвязностью*, Международная конференция по топологии и её приложениям, посвященной 100-летию со дня рождения Ю. М. Смирнова, 20–21 сентября 2021 г. (тезисы), https://sites.google.com/view/smirnov-100/abstracts?authuser=0.

[56] А. Ю. Грознова, *Свойства типа отделимости и их поведение при основных операциях над топологическими пространствами*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ–2022» / Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, Е. И. Зимакова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2022, https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2022/data/25625/142091_uid241578_report.pdf.