МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

***На правах рукописи***

Быков Владимир Владиславович

# Верхнепредельные ляпуновские характеристики линейных дифференциальных систем

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор
Сергеев Игорь Николаевич

Москва – 2022

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории линейных систем привело к возникновению целого ряда характеристик асимптотического поведения их решений, а также характеристик, описывающих реакцию различных свойств системы на возмущения её коэффициентов, таких как показатели Боля, центральные показатели Винограда—Миллионщикова, сигма-показатели и экспоненциальные показатели Изобова, показатели Перрона, коэффициенты неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, частоты Сергеева (нулей, знаков и корней) и многие другие. Библиография в обзорах Н. А. Изобова [81; 92] и его монографии [94] по теории показателей Ляпунова насчитывает несколько сотен наименований.

Направление в теории показателей Ляпунова, ставящее своей целью исследование зависимости от параметра асимптотических свойств и характеристик параметризованных семейств дифференциальных уравнений и систем, своим возникновением обязано В. М. Миллионщикову, начавшему систематические исследования по этой тематике серией работ [130]. Ему же принадлежит идея использовать теорию Бэра разрывных функций для описания такой зависимости. Эти работы В. М. Миллионщикова были продолжены и продолжаются учениками его научной школы И. Н. Сергеевым, О. И. Морозовым, В. Г. Агафоновым, В. Г. Феклиным, К. Е. Ширяевым, А. Н. Ветохиным, Ю. И. Дементьевым, Е. Е. Саловым, А. Ф. Рожиным и многими другими, а также представителями алмаатинской школы — М. И. Рахимбердиевым, Т. М. Алдибековым, А. М. Дауылбаевым, Т. И. Смирновым, А. О. Султанбековой и другими.

В тот же период времени (80-е годы прошлого столетия) в минской школе по асимптотической теории дифференциальных уравнений начали исследовать асимптотические свойства однопараметрических линейных дифференциальных систем как функции параметра. Эти исследования инициировала поставленная Ю. С. Богдановым задача о сохранении свойства правильности линейной дифференциальной системы после умножения её матрицы коэффициентов на ненулевое вещественное число. Как показал Н. А. Изобов, эта задача имеет отрицательное решение. Вследствие этого естественно возникает задача [92, с. 2037, задача 2] полного описания совокупности множеств неправильности, т. е. значений параметра-множителя, при умножении на которые матрицы коэффициентов некоторой линейной системы последняя становится неправильной. Задачу Н. А. Изобова можно ставить для любого асимптотического свойства — например, для свойств типа устойчивости, и не только для семейств линейных дифференциальных систем с линейной зависимостью от параметра, но и для семейств общего вида с непрерывной зависимостью их коэффициентов от параметра. К тому же кругу исследований примыкает и поставленная В. И. Зубовым [79, с. 408, проблема 1] задача об описании показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем как функций параметра. В направлении решения этих и родственных с ними задач ряд важных результатов получен Н. А. Изобовым, Е. А. Барабановым, Е. К. Макаровым, А. В. Липницким, С. Г. Красовским, А. Ф. Касабуцким, М. В. Карпуком и А. С. Войделевичем (см. обзор литературы в разделе 1.11).

Исследование вида зависимости асимптотической характеристики (или свойства) от параметра может быть условно разделено на три этапа. На первом этапе ищется наименьший класс Бэра [106, § 31, IX], которому принадлежит соответствующая функция параметра. Для некоторых характеристик удаётся получить только оценку его номера (сверху, снизу или двустороннюю). На следующем этапе ищется точный борелевский класс [207, § 32] её лебеговских множеств [207, § 37], а затем — полное описание этих множеств. На заключительном этапе ищется полное описание множества, которое пробегает изучаемая функция при изменении параметризованного семейства в пределах того или иного класса таких семейств. Отметим, что содержание и трудность каждого из описанных выше этапов могут существенно зависеть от того, накладывается ли на системы рассматриваемых семейств условие ограниченности их коэффициентов на полуоси или нет.

Напомним кратко определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения (см. также раздел 1.9). Пусть $M$ — топологическое пространство, а $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ — совокупности его открытых и замкнутых подмножеств соответственно. Подмножества пространства $M$, представимые в виде счётного пересечения (объединения) открытых (соответственно, замкнутых) множеств пространства $M$ называются [207, § 32] $\mathscr{G}_\delta$-множествами ($\mathscr{F}_\sigma$-множествами) пространства $M$, а $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-множествами ($\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множествами) — его подмножества, представимые в виде счётного пересечения (объединения) $\mathscr{F}_\sigma$-множеств ($\mathscr{G}_\delta$-множеств) пространства $M$.

Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ *расширенную числовую прямую*, которую мы наделим стандартным порядком и порядковой топологией.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — какие-либо системы подмножеств пространства $M$. Будем говорить [207, с. 223–224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathscr{M}, ^*)$ (классу $(^*, \mathscr{N})$), если для всякого $r \in \overline{\mathbb{R}}$ справедливо включение $f^{-1}((r, +\infty]) \in \mathscr{M}$ (соответственно, включение $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathscr{N}$). Наконец, скажем, что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$, если она одновременно принадлежит классам $(\mathscr{M}, ^*)$ и $(^*, \mathscr{N})$.

Классы Бэра с конечными номерами определяются по индукции следующим образом [106, § 31, IX]. Нулевой класс Бэра состоит из всех непрерывных функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$. Первый класс Бэра состоит из функций $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, представимых в виде поточечного предела от последовательности функций нулевого класса. Второй класс Бэра состоит из функций $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, представимых в виде поточечного предела от последовательности функций первого класса, и так далее.

Отметим, что нулевой класс Бэра совпадает с классом $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$, а классы $(\mathscr{G}, ^*)$ и $(^*, \mathscr{F})$ состоят из функций полунепрерывных снизу и сверху соответственно [207, § 38]. Для метрического пространства $M$ первый класс Бэра совпадает с классом $(\mathscr{F}_\sigma, \mathscr{G}_\delta)$, а второй — с классом $(\mathscr{G}_{\delta\sigma}, \mathscr{F}_{\sigma\delta})$ [207, § 39, 2].

Функции класса $(^*, \mathscr{G}_\delta)$ мы в дальнейшем будем называть *верхнепредельными*, так как для метрического пространства $M$ этот класс совпадает с классом функций, представимых в виде верхнего предела от последовательности непрерывных функций (подробнее см. в разделе 1.10). Они обладают следующим замечательным свойством: для полного пространства $M$ множество точек полунепрерывности сверху верхнепредельной функции является плотным $\mathscr{G}_\delta$-множеством [4].

Пусть $M$ — метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{0.1}$$

с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов $A(\cdot, \mu)$, зависящей от параметра $\mu \in M$. Зафиксировав $i \in \mathbb{N}_n \equiv \{1, \ldots, n\}$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие $i$-й (в порядке нестрогого возрастания) показатель Ляпунова системы (0.1), получим функцию параметра $\lambda_i(\,\cdot\,; A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, которая называется $i$-м *показателем Ляпунова семейства* (0.1). Аналогично определяются и другие характеристики семейства (0.1).

Простейшие примеры показывают, что для непрерывного отображения $A(\cdot, \cdot)$ показатели Ляпунова семейства (0.1) могут быть всюду разрывными функциями параметра (и следовательно, не принадлежат в этом случае первому классу Бэра [207, § 38, 4]).

В цикле работ [133–135, 137, 138] В.М. Миллионщиков обобщил определение показателей Ляпунова на случай неограниченных коэффициентов линейной системы, описал их свойства, а также поставил задачу описания показателей Ляпунова семейств систем (0.1) с неограниченными коэффициентами как функций параметра. Им же был сделан принципиально важный шаг в направлении её решения, а именно, установлено, что каждый из показателей Ляпунова всякого семейства (0.1), задаваемого непрерывным отображением $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$ принадлежит второму классу Бэра. Более того, он показал, что если $M$ полно, то в любой точке некоторого плотного $\mathscr{G}_\delta$-подмножества пространства $M$ все показатели Ляпунова этого семейства полунепрерывны сверху.

Фактически, В. М. Миллионщиков доказал несколько больше (не сформулировав этого явно) — что каждый из показателей Ляпунова непрерывного семейства является верхнепредельной функцией. Этот результат впоследствии уточнил А. Н. Ветохин [41], показав, что для $n \geqslant 2$ существуют непрерывное семейство (0.1), для которого множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) < 0\}$ не является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством, и непрерывное семейство (0.1), для которого множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \leqslant 0\}$ не является $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множеством (в силу результата В. М. Миллионщикова первое из указанных множеств всегда имеет тип $\mathscr{G}_\delta$, а второе — $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$). А. Н. Ветохин также установил [43; 45], что даже для полного пространства $M$ множество точек полунепрерывности снизу каждого из показателей Ляпунова непрерывного семейства (0.1) может оказаться пустым.

В работах [97; 100] М. В. Карпуком полностью решена задача В. М. Миллионщикова об описании показателей Ляпунова непрерывного семейства систем (0.1). В первой работе рассматриваются семейства систем с ограниченными на полуоси коэффициентами, а во второй — с необязательно ограниченными. Для каждого показателя Ляпунова соответствующий класс функций состоит в первом случае из верхнепредельных функций $M \to \mathbb{R}$, имеющих полунепрерывную сверху миноранту, а во втором — из всех верхнепредельных функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$. В этих же работах получено также полное описание наборов $(\lambda_1(\cdot\,; A), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A))$ показателей Ляпунова семейств рассматриваемых типов; они состоят из наборов функций указанных выше классов, подчинённых естественному условию упорядоченности. На основе приведённого описания М. В. Карпук получил [99] полное описание множества точек полунепрерывности снизу (для произвольного пространства $M$) и множества точек полунепрерывности сверху (для полного пространства $M$) показателей Ляпунова непрерывных семейств (0.1) (они получаются одними и теми же для семейств обоих типов).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с кусочно-непрерывными функциями $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (которые мы отождествляем с соответствующими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ наделим структурой линейного пространства над $\mathbb{R}$ с естественными для функций операциями сложения и умножения на число.

В теории показателей Ляпунова чаще всего используются две топологии на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$: *компактно-открытая,* задаваемая метрикой

$$\rho_C(A, B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1/(t+1)\}, \quad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

и *равномерная,* задаваемая метрикой

$$\rho_U(A,B)=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\min\{|A(t)-B(t)|,1\},\quad A,B\in\widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Полученные топологические пространства условимся обозначать через $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ соответственно, аналогичные обозначения будем использовать и для их подпространств.

Всякому семейству (0.1) соответствует отображение $\mu\mapsto A(\cdot\,,\mu)$ пространства параметров $M$ в множество $\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Отметим, что непрерывность отображения $A(\cdot\,,\cdot)$, задающего семейство (0.1), равносильна (см. раздел 1.5) одновременной непрерывности коэффициентов всех систем семейства и указанного выше отображения в компактно-открытой топологии на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Таким образом, компактно-открытая топология приспособлена для изучения параметрических семейств линейных систем. Равномерная же топология используется при изучении реакции различных характеристик решений линейной системы на возмущения её коэффициентов. Заметим, что пространство $\mathcal{M}^n_U$ нормируемо с нормой

$$\|A\|=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|A(t)|,\quad A\in\mathcal{M}^n.$$

Естественно возникает задача описания показателей Ляпунова непрерывных семейств (0.1), для которых отображение $\mu\mapsto A(\cdot\,,\mu)$ непрерывно в равномерной топологии на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Последнее требование равносильно выполнению условия

$$\lim_{\nu\to\mu}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|A(t,\nu)-A(t,\mu)|=0,\quad \mu\in M.$$

Класс непрерывных отображений $A\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих этому условию, будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$, а его подкласс, состоящий из отображений, ограниченных по $t\in\mathbb{R}_+$ при каждом фиксированном $\mu\in$ $\in M$ (т. е. задающих семейства систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами) — через $\mathcal{U}^n(M)$. Всюду ниже условимся отождествлять семейство (0.1) и задающее его отображение $A(\cdot\,,\cdot)$.

Из приведённого выше результата В. М. Миллионщикова очевидно следует, что показатели Ляпунова семейства (0.1) из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ принадлежат второму классу Бэра (и более того, являются верхнепредельными функциями). Также сохраняется результат о том, что если $M$ полно, то в любой точке некоторого плотного $\mathscr{G}_\delta$-подмножества пространства $M$ все показатели Ляпунова такого семейства полунепрерывны сверху. М. И. Рахимбердиев для каждых $n\geqslant 2$ и $i\in\mathbb{N}_n$ построил [166] пример семейства из класса $\mathcal{U}^n([0,1])$, для которого $i$-й показатель Ляпунова является всюду разрывной функцией и, следовательно [207, § 38, 4], не принадлежит первому классу Бэра, а А. Н. Ветохин в работе [47] усилил этот результат, указав пример семейства из того же класса, для которого множество точек полунепрерывности снизу $i$-го показателя Ляпунова пусто. А. Н. Ветохин развил результат М. И. Рахимбердиева и в другом отношении: для $n \geqslant 2$ он построил [40] такие пространство $M$ и семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, для которых множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) < 0\}$ не является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством, а также пространство $M$ и семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, для которых множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \leqslant 0\}$ не является $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множеством.

Таким образом, изучение характера зависимости показателей Ляпунова от параметра для семейств систем, непрерывных в равномерной топологии, до недавнего времени находилось в начале второго этапа по нашей классификации.

В диссертации доказано следующее утверждение, обобщающее приведённые выше результаты М. И. Рахимбердиева и А. Н. Ветохина и полностью решающее задачу В. М. Миллионщикова об описании каждого из показателей Ляпунова линейной параметрической системы (0.1) как функции параметра для семейств систем с ограниченными коэффициентами, непрерывных в равномерной топологии.

**Теорема I (теорема 2.1).** *Для любых чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$ и метрического пространства $M$ функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ является $i$-м показателем Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она верхнепредельна и обладает непрерывными минорантой и мажорантой.*

Из теоремы I в качестве следствий для каждого из показателей Ляпунова как функции параметра получаются полные описания: а) множества точек полунепрерывности сверху для полного пространства $M$ (следствие 2.2); б) множества точек полунепрерывности снизу для произвольного пространства $M$ (следствие 2.2); в) лебеговских множеств и множеств уровня (следствие 2.4); г) множества значений (следствие 2.3).

В диссертации получено также описание *спектра показателей Ляпунова* $(\lambda_1(\cdot\,; A), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A))$ для семейств из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$, а именно, установлена

**Теорема II (следствие 2.5).** *Для любых числа $n \geqslant 2$ и метрического пространства $M$ функция $f\colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ является спектром показателей Ляпунова некоторого семейства $A \in \widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ тогда и только тогда, когда её компоненты являются верхнепредельными функциями и удовлетворяют условию упорядоченности $f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n$.*

Отметим, что аналогичная задача для семейств систем с ограниченными коэффициентами решена в работе [261].

Из теоремы II легко извлекается полное описание отдельного показателя Ляпунова как функции параметра для семейств из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ (следствие 2.6), а также её лебеговских множеств (следствие 2.8) и множества значений (следствие 2.7).

Таким образом, теорема II полностью решает задачу В. М. Миллионщикова об описании показателей Ляпунова как функций параметра для семейств систем (0.1) с необязательно ограниченными коэффициентами, непрерывно зависящими от параметра в равномерной топологии.

О. Перрон в работе [243, с. 761] построил пример, показывающий, что при $n \geqslant 2$ каждый из показателей Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве $\mathcal{M}_U^n$, разрывен. Более того, из этого примера следует, что ни один из показателей Ляпунова не является даже полунепрерывным. В частности, под действием малых возмущений коэффициентов устойчивая система может стать неустойчивой и наоборот. По этой причине важное значение приобретает изучение минимальной полунепрерывной сверху мажоранты $\overline{\lambda}_i$ и максимальной полунепрерывной снизу миноранты $\underline{\lambda}_i$ $i$-го ($i \in \mathbb{N}_n$) показателя Ляпунова в равномерной топологии, называемых также максимальным [176] и минимальным [82] $i$-м показателем соответственно.

В докладе [148] В. М. Миллионщиков поставил задачу о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит каждый из максимальных показателей линейной параметрической системы как функция параметра. Им же было установлено [149], что при выполнении некоторого дополнительного условия на непрерывное отображение $A(\cdot\,,\cdot)$ (которому, в частности, удовлетворяют все отображения, ограниченные по $\mu \in M$ при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$) каждый из максимальных показателей как функция параметра принадлежит второму классу Бэра. Аналогичное утверждение вытекает из результата И. Н. Сергеева [194] в случае, когда при каждом значении параметра $\mu$ система (0.1) имеет ограниченные коэффициенты. То, что указанные функции параметра, вообще говоря, не принадлежат первому классу Бэра, установлено А. Н. Ветохиным [38].

Следующая теорема, установленная в диссертации, полностью решает рассматриваемую задачу В. М. Миллионщикова.

**Теорема III (теорема 3.2).** *Для любых числа $n \in \mathbb{N}$, топологического пространства $M$ и непрерывного отображения $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ каждый из максимальных показателей является верхнепредельной функцией параметра и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

Теорема III вместе с результатами М. В. Карпука [97; 100] даёт полное описание каждого из максимальных показателей как функции параметра.

Следующая теорема решает другую задачу В. М. Миллионщикова [151] — об одновременной достижимости максимальных показателей.

**Теорема IV (теорема 3.4).** *Для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющая условиям*

$$\rho_U(A, B) < \varepsilon, \quad \lim_{t\to+\infty} |B(t) - A(t)| = 0, \quad \lambda_i(B) = \overline{\lambda}_i(A), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

В. М. Миллионщиковым была также поставлена [152] задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит минимальный $i$-й ($i \in \mathbb{N}_n$) показатель семейства (0.1). Последняя равносильна задаче о наименьшем классе Бэра минимального $i$-го показателя как функционала на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n$.

А. Н. Ветохин установил [39], что для любого $n \geqslant 2$ все минимальные показатели не принадлежат второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$. Из результатов Р. Э. Винограда [57], [58] и В. М. Миллионщикова [126], вследствие установленной ими формулы вычисления величины $\underline{\lambda}_1(A)$ по матрице Коши системы $A$, следует, что младший минимальный показатель $\underline{\lambda}_1$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$, а значит, при $n \geqslant 2$ в силу результата А. Н. Ветохина — в точности третьему классу Бэра. И. Н. Сергеевым [181; 190] на основании полученных им формул вычисления минимальных показателей системы по её матрице Коши была установлена принадлежность величин $\underline{\lambda}_n$ при $n = 3$ и $\underline{\lambda}_2$ для произвольного $n$ третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$. Для произвольного $n$ принадлежность третьему классу Бэра на том же пространстве старшего минимального показателя $\underline{\lambda}_n$ установлена В. В. Быковым [24], а остальных минимальных показателей — Е. Е. Саловым [171; 252].

В диссертации получено обобщение приведённых выше результатов.

**Теорема V (теорема 3.6).** *Для любых числа $n \in \mathbb{N}$ и непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ сужение каждого из минимальных показателей на подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n$, состоящее из систем, удовлетворяющих условию $|A(t)| \leqslant f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, принадлежит третьему классу Бэра.*

Из теоремы V в качестве следствия извлекается частичное решение задачи В. М. Миллионщикова о минимальных показателях непрерывного семейства (0.1) для случая, когда пространство параметров $M$ метризуемо и локально компактно (см. теорему 3.5).

Уже упоминавшийся пример Перрона показывает, что показатели Ляпунова линейной системы не инвариантны относительно экспоненциально убывающих возмущений её коэффициентов. С другой стороны, для всякой системы с ограниченными коэффициентами инвариантность показателей Ляпунова имеет место относительно возмущений, убывающих быстрее некоторой (своей для каждой системы) экспоненты [23; 67]. Естественно возникают задачи вычисления точных границ подвижности показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях, а также описания свойств этих границ как функций параметра.

Определим следующие классы экспоненциально убывающих возмущений:

$$\mathcal{E}_\sigma^n = \{Q \in \mathcal{M}^n : \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |Q(t)|e^{\sigma t} < \infty\}, \quad \hat{\mathcal{E}}_\sigma^n = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] \leqslant -\sigma\},$$

$$\mathcal{E}^n = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] < 0\}, \text{ где } \lambda[Q] = \varlimsup_{t\to+\infty} \ln |Q(t)|^{1/t}.$$

Для каждого $\sigma > 0$ *верхними* [80] и *нижними* [84; 88] *сигма-показателями Изобова* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ называются, соответственно, величины

$$\nabla_{\sigma,i}(A) = \sup_{Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad \Delta_{\sigma,i}(A) = \inf_{Q \in \mathcal{E}^n_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n,$$

а её *верхними* и *нижними экспоненциальными показателями Изобова* [84] — величины

$$\nabla_i(A) = \sup_{Q \in \mathcal{E}^n} \lambda_i(A+Q), \quad \Delta_i(A) = \inf_{Q \in \mathcal{E}^n} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

В работе [80] Н. А. Изобовым получена формула вычисления старшего верхнего сигма-показателя $\nabla_{n,\sigma}(A)$ системы $A$ с ограниченными коэффициентами по её матрице Коши, а в работе [84] им же найдены аналогичные формулы для показателей $\nabla_n(A)$ и $\Delta_1(A)$. Относительно недавно А. С. Войделевичем получены [60] формулы для остальных верхних экспоненциальных показателей Изобова $\nabla_i(A)$, $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, системы $A \in \mathcal{M}^n$.

В. Г. Агафонов установил [1], что старший верхний экспоненциальный показатель Изобова $\nabla_n$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_U$ и принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. А. Н. Ветохин уточнил [44] эти результаты, показав, что при $n \geqslant 2$ этот показатель не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. Таким образом, функционал $\nabla_n \colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ принадлежит в точности третьему классу Бэра. Эти результаты обобщает следующая

**Теорема VI (теорема 4.7).** *Для любых чисел $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\nabla_i \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит третьему классу Бэра, а его сужение на подпространство $\mathcal{M}^n_C$ не принадлежит второму классу Бэра.*

Отметим, что полученное в диссертации доказательство принадлежности верхних экспоненциальных показателей Изобова третьему классу Бэра опирается непосредственно на их определение, поскольку какие-либо формулы их вычисления для систем с неограниченными коэффициентами не известны.

Таким образом, результаты настоящей работы завершают первый этап в исследовании зависимости экспоненциальных показателей Изобова от параметра для семейств (0.1), непрерывных в компактно-открытой топологии.

В работе [44] А. Н. Ветохиным также доказано, что для каждого $\sigma > 0$ старший верхний сигма-показатель Изобова $\nabla_{\sigma,n} \colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ является верхнепредельным. В диссертации этот результат усиливает

**Теорема VII (следствие 4.1).** *Для любых чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$ и $\sigma > 0$ функционал $\nabla_{\sigma,i} \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельным и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

Эта теорема вытекает из полученного в диссертации полного описания лебеговских множеств верхних сигма-показателей Изобова как функций параметра для семейств (0.1), непрерывных в компактно-открытой топологии. Тем самым для этих величин завершён второй этап их исследования.

В. М. Миллонщиков установил [150; 153], что младший нижний экспоненциальный показатель Изобова $\Delta_1$ на пространстве $\mathcal{M}^n_C$ принадлежит второму классу Бэра. В работе [24] показано, что старший нижний экспоненциальный показатель Изобова $\Delta_n$ и для каждого $\sigma > 0$ старший нижний сигма-показатель Изобова $\Delta_{\sigma,n}$ также обладают этим свойством, а Е. Е. Салов распространил [172] эти результаты на остальные нижние экспоненциальные показатели и сигма-показатели Изобова (ещё и явно указав, что все перечисленные функционалы являются верхнепредельными).

В диссертации установлена обобщающая эти результаты

**Теорема VIII (следствие 4.2 и теорема 4.8).** *Для любых чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$, $\sigma > 0$ и непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ сужение каждого из показателей $\Delta_{\sigma,i}$ и $\Delta_i$ на подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, состоящее из систем, удовлетворяющих условию $|A(t)| \leqslant f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, является верхнепредельным и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

Пусть $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Будем говорить [180], что функционал $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет *компактный носитель*, если существует такое $T > 0$, что для любой пары функций $A, B \in \mathcal{M}$, совпадающих на отрезке $[0, T]$, выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Отметим, что в докладе [180] функционалы с компактным носителем называются ограниченно-зависимыми.

Пусть функционал на пространстве систем представлен в виде повторного предела от последовательности непрерывных функционалов. Желание вычислять значения этих функционалов, пользуясь информацией о системе лишь на конечных участках времени, приводит к естественному требованию компактности их носителей [180]. Следуя [180], определим по аналогии с классами Бэра *классы формул* функционалов на $\mathcal{M}$ по индукции следующим образом.

Нулевой класс формул состоит из непрерывных функционалов $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ с компактным носителем. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$ класс формул с номером $(m + 1)$ состоит из функционалов $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$, представимых в виде поточечного предела от последовательности функционалов $m$-го класса.

И. Н. Сергеев показал [180], что если функционал $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит $m$-му классу Бэра ($m \in \mathbb{Z}_+$), то он принадлежит $(m+1)$-му классу формул и поставил вопрос о совпадении $m$-го класса Бэра и $m$-го класса формул при $m \geqslant 1$ (для $m = 0$ эти классы различаются [180]). Ответ содержит

**Теорема IX (теорема 7.1).** *Для любых $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и $m \in \mathbb{N}$ $m$-й класс Бэра и $m$-й класс формул функционалов $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ совпадают между собой.*

Другими словами, любой функционал некоторого класса Бэра можно получить при помощи того же количества предельных переходов, отправляясь от непрерывных функционалов с компактным носителем.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли уменьшить количество предельных переходов в формуле, если разрешить фигурирующим в ней функционалам с компактным носителем быть разрывными?

Ответ оказывается, вообще говоря, отрицательным, даже в классе инвариантов преобразований Ляпунова [29, с. 247], как показывает следующая

**Теорема X (теорема 7.3).** *Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует функционал $\mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$, инвариантный относительно преобразований Ляпунова и принадлежащий $(m+1)$-му классу Бэра, но не представимый с помощью $m$ предельных переходов от последовательности функционалов с компактным носителем.*

Приведённые результаты составляют основное содержание диссертации и опубликованы в работах [252]–[268] и тезисах докладов [269]–[320].

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение работы и ценные замечания и Е. А. Барабанову за помощь и поддержку на всех этапах подготовки диссертации.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена описанию ряда характеристик асимптотического поведения решений параметрических семейств линейных дифференциальных систем как функций параметра с точки зрения дескриптивной теории функций. В работе рассматриваются следующие характеристики: показатели Ляпунова, их мажоранты и миноранты в равномерной топологии на пространстве линейных дифференциальных систем, сигма-показатели и экспоненциальные показатели Изобова, относительные и условные показатели Боля, а также мажоранты последних в равномерной топологии.

**Цель и задачи исследования.** Основной целью диссертации является изучение свойств верхнепредельных ляпуновских характеристик на пространстве линейных систем с компактно-открытой или равномерной топологией с точки зрения дескриптивной теории функций. В исследовании делается акцент на отказе от требования ограниченности коэффициентов рассматриваемых систем на временно́й полуоси.

В работе поставлены и решены следующие задачи:

— построить семейство линейных дифференциальных систем с коэффициентами, непрерывно в равномерной топологии зависящими от параметра из метрического пространства, показатели Ляпунова которого совпадают с заданными функциями на этом пространстве (во всех случаях, когда это в принципе возможно);

— установить признаки принадлежности второму классу Бэра верхней и нижней границ подвижности верхнепредельных ляпуновских характеристик при возмущениях коэффициентов линейной системы, ограниченных заданной функцией;

— для каждой пары порядковых чисел, подчинённых естественным ограничениям, построить ляпуновскую характеристику, имеющую указанные наименьшие номера классов Бэра в компактно-открытой и равномерной топологиях;

— доказать, что в пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией каждый функционал первого класса Бэра представляется в виде поточечного предела от последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем.

*Объектом исследования* являются пространство линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами, наделённое одной из двух топологий: компактно-открытой или равномерной, а также непрерывные параметрические семейства таких систем.

*Предметом исследования* являются свойства характеристик асимптотического поведения решений линейных систем, рассматриваемых как функционалы на пространстве систем, а также порождаемых ими функций параметра с точки зрения дескриптивной теории функций.

**Методика исследования.** При доказательстве утверждений в диссертации широко используются методы и результаты теории линейных дифференциальных систем, линейной алгебры, математического анализа, теории функций действительного переменного и общей топологии. В качестве специального метода применяется метод поворотов В.М. Миллионщикова.

**Научная новизна.** Все результаты диссертации являются существенно новыми. Даны окончательные ответы на некоторые долгое время остававшиеся открытыми вопросы о характере зависимости от коэффициентов показателей Ляпунова и ряда других характеристик асимптотического поведения решений линейных дифференциальных систем. В частности, в работе:

1) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова об описании каждого из показателей Ляпунова параметрического семейства линейных дифференциальных систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от параметра равномерно на временно́й полуоси (при условии ограниченности коэффициентов систем семейства и без него);

2) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем номере бэровского класса каждого из максимальных показателей линейной системы как функции параметра;

3) получено частичное решение задачи В. М. Миллионщикова о минимальных показателях: вычислен точный номер бэровского класса каждого из минимальных показателей линейной системы как функции параметра для семейства систем с ограниченной скоростью роста коэффициентов;

4) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова об одновременной достижимости максимальных показателей показателями Ляпунова для системы с неограниченными коэффициентами;

5) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем номере бэровского класса мажоранты (минимальной полунепрерывной сверху в равномерной топологии на пространстве линейных систем) каждого из условных показателей Боля как функции параметра;

6) получено полное решение задачи И. Н. Сергеева о совпадении класса Бэра и класса формул с одинаковым положительным номером.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Полное описание каждого из показателей Ляпунова параметрического семейства линейных дифференциальных систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от параметра равномерно на временно́й полуоси (для систем с ограниченными и неограниченными коэффициентами).

2. Полное описание максимальных показателей непрерывного параметрического семейства линейных систем как функций параметра.

3. Принадлежность третьему классу Бэра минимальных показателей непрерывного параметрического семейства линейных систем для локально компактного метрического пространства параметров.

4. Верхнепредельность верхних сигма-показателей Изобова непрерывного параметрического семейства линейных систем.

5. Представимость всякого функционала $m$-го класса Бэра ($m \in \mathbb{N}$) на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией в виде $m$-кратного повторного предела от $m$-индексной последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем.

**Теоретическая и практическая ценность.**

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть полезны специалистам, занимающимся качественной теорией дифференциальных уравнений, в частности, теорией показателей Ляпунова и её приложениями к вопросам устойчивости.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности "математика".

**Достоверность результатов** обоснована строгими математическими доказательствами.

**Апробация результатов диссертации**

Основные результаты диссертации докладывались:

— на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете (сделано более 20 докладов по теме диссертации в 1999–2021 гг.);

— на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой памяти И. Г. Петровского (Москва; май 2004 г., май 2007 г., май-июнь 2011 г., декабрь 2021 г.);

— на международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посвящённой 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва; март–апрель 2009 г);

— на международной математической конференции «Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвящённой памяти профессора Ю. С. Богданова (Респ. Беларусь, Минск; декабрь 2010 г., декабрь 2015 г., июнь 2021 г.);

— на международной научной конференции «Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова», посвящённой 75-летию со дня рождения В. М. Миллионщикова (Москва; декабрь 2014 г.);

— на международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2014» (Респ. Беларусь, Новополоцк; май 2014 г.), «Еругинские чтения – 2017» (Респ. Беларусь, Минск; май 2017 г.), «Еругинские чтения – 2018» (Респ. Беларусь, Гродно; май 2018 г.) и «Еругинские чтения – 2019» (Респ. Беларусь, Могилев; май 2019 г.);
— на Всероссийской математической конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящённой памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск; июнь 2015 г. и июнь 2020 г.);
— на международных математических конференциях по качественной теории дифференциальных уравнений (Грузия, Тбилиси; декабрь 2016 г., декабрь 2017 г., декабрь 2018 г., декабрь 2019 г., декабрь 2020 г., декабрь 2021 г.);
— на международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп; октябрь 2017 г., октябрь 2021 г.);
— на IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик; май 2018 г.);
— на международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика В.А. Садовничего (Москва; май 2019 г);
— на международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвящённой 95-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург; сентябрь 2019 г.);
— на международной научной конференции «Качественная теория дифференциальных уравнений», посвящённой 80-летию со дня рождения В. М. Миллионщикова (Москва; ноябрь 2019 г.);
— на IV Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», посвящённой 95-летию со дня рождения чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича (Респ. Беларусь, Гродно; декабрь 2019 г.);
— на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль; июль 2020 г.);
— на XIII Белорусской математической конференции (Респ. Беларусь, Минск; ноябрь 2021 г.).

**Опубликование результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 69 печатных работах, среди которых 17 статей в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК [252–268] (из них 12 без соавторов) и 52 публикации с тезисами выступлений на математических конференциях и семинарах.

**Личный вклад автора.** В диссертацию включены только результаты, полученные лично автором. В совместных работах [252, 261, 262, 264, 265] применяются методы, разработанные в настоящей диссертации её автором; результаты этих работ не включены в диссертацию и на защиту не выносятся. В совместной работе [252] автору диссертации принадлежат леммы 2–5, в работе [261] — следствия 1 и 2, в работе [262] — доказательства теорем 5 и 6, в работе [264] — теоремы 2 и 3, а в работе [265] – леммы 1–3 и следствие 1.

**Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, перечня условных обозначений, семи глав, содержащих 29 разделов, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объём диссертации составляет 252 страницы текста, из которых 27 страниц занимает библиографический список, содержащий 320 наименований (с учётом 69 публикаций соискателя).

# ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | — | множество натуральных чисел; |
| $\mathbb{N}_n$ | — | множество $\{1, \ldots, n\}$; |
| $\mathbb{Z}_+$ | — | множество целых неотрицательных чисел; |
| $\mathbb{R}$ | — | множество вещественных (действительных) чисел; |
| $\mathbb{C}$ | — | множество комплексных чисел; |
| $\mathbb{R}_+$ | — | множество неотрицательных вещественных чисел; |
| $\mathbb{R}_+^*$ | — | множество положительных вещественных чисел; |
| $\overline{\mathbb{R}}$ | — | расширенная числовая прямая (с. 25); |
| $\mathbb{Q}$ | — | множество рациональных чисел; |
| $\mathbb{I}$ | — | множество иррациональных чисел; |
| $\mathbb{R}^n$ | — | $n$-мерное евклидово пространство; |
| $e_i$ | — | вектор-столбец с 1 на $i$-ом месте и нулями на остальных местах; |
| $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ | — | стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; |
| $\lvert \cdot \rvert$ | — | евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы; |
| $\angle$ | — | знак угла между векторами, подпространствами или вектором и подпространством; |
| $\perp$ | — | знак ортогональности векторов, вектора подпространству или подпространств; |
| $\dim$ | — | размерность линейного пространства; |
| $L_*$ | — | множество $L\backslash\{0\}$, т. е. звёздочка справа внизу обозначает выбрасывание нуля из подпространства; |
| $\oplus$ | — | знак прямой суммы подпространств; |
| $G_i(L)$ | — | множество $i$-мерных подпространств векторного пространства $L$; |
| $\mathbb{R}^{n\times n}$ | — | пространство $n \times n$-матриц; |
| $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ | — | пространство операторов, действующих в $\mathbb{R}^n$; |
| $O_n$ | — | нулевая $n \times n$-матрица; |
| $E_n$ | — | единичная $n \times n$-матрица; |
| $\operatorname{tr} A$ | — | след квадратной матрицы $A$; |
| $A\vert_L$ | — | сужение отображения $A$ на подмножество $L$; |
| $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ | — | линейная оболочка векторов $x_1$, $\ldots$, $x_k$; |
| $\operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_n]$ | — | диагональная $n \times n$-матрица, $(i, i)$-элемент которой равен $a_i$, $i = 1, \ldots, n$; |
| $\operatorname{diag}[A_1, \ldots, A_k]$ | — | блочно-диагональная матрица, $i$-ый блок которой равен $A_i$, $i = 1, \ldots, k$; |

$S(A)$ — пространство решений системы $\dot{x} = A(t)x$ (с. 25);

$X_A(\cdot,\cdot)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$ (с. 25);

$\lambda[x]$ — характеристический показатель функции $x(\cdot)$ (с. 25);

$\lambda_i(A)$ — $i$-ый показатель Ляпунова системы $\dot{x} = A(t)x$ (с. 25);

$\Lambda(A)$ — спектр показателей Ляпунова системы $\dot{x} = A(t)x$ (с. 26);

$\widetilde{\mathcal{M}}^n$ — пространство линейных дифференциальных систем порядка $n$ с кусочно-непрерывными коэффициентами (с. 23);

$C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ — подпространство $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, состоящее из систем с непрерывными коэффициентами (с. 24);

$\mathcal{M}^n$ — подпространство $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, состоящее из систем с ограниченными коэффициентами (с. 23);

$C\mathcal{M}^n$ — подпространство $\mathcal{M}^n$, состоящее из систем с непрерывными коэффициентами (с. 24);

$\rho_U$ — метрика, задающая равномерную топологию (с. 24);

$\|\cdot\|$ — равномерная на полупрямой норма матричнозначной функции;

$\rho_C$ — метрика, задающая компактно-открытую топологию (с. 24);

$\mathcal{M}_U$ — класс систем $\mathcal{M}$, наделённый равномерной топологией;

$\mathcal{M}_C$ — класс систем $\mathcal{M}$, наделённый компактно-открытой топологией;

$\mathcal{B}^n_f$ — класс систем $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющих условию $|Q(t)| \leqslant f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (с. 24);

$\check{\mathcal{B}}^n_f$ — подкласс класса $\mathcal{B}^n_f$, состоящий из систем с непрерывными коэффициентами (с. 24);

$\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ — класс непрерывных отображений $M \to C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ (с. 30);

$\mathcal{C}^n(M)$ — класс непрерывных отображений $M \to C\mathcal{M}^n_C$ (с. 31);

$\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ — класс непрерывных отображений $M \to C\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ (с. 31);

$\mathcal{U}^n(M)$ — класс непрерывных отображений $M \to C\mathcal{M}^n_U$ (с. 31);

$\mathcal{B}^n(M)$ — класс отображений $M \to \mathcal{M}^n$ (с. 31);

$\mathcal{B}\mathcal{C}^n(M)$ — подкласс класса $\mathcal{C}^n(M)$, состоящий из ограниченных по норме $\|\cdot\|$ отображений (с. 31);

$\mathcal{B}\mathcal{U}^n(M)$ — подкласс класса $\mathcal{U}^n(M)$, состоящий из ограниченных по норме $\|\cdot\|$ отображений (с. 31);

$\hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$ — множество тех $Q \in \mathcal{M}^n$, для которых $\lambda[Q] \leqslant -\sigma$ (с. 40);

$\mathcal{E}^n_\sigma$ — множество тех $Q \in \mathcal{M}^n$, для которых величина $|Q(t)|e^{\sigma t}$ ограничена на $\mathbb{R}_+$ (с. 40);

$\mathcal{E}^n$ — множество тех $Q \in \mathcal{M}^n$, для которых $\lambda[Q] < 0$ (с. 40);

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{S}$ | — | топологическое замыкание множества $S$; |
| $\omega_1$ | — | первое несчётное порядковое число; |
| $\mathscr{G}_\alpha(M)$ и $\mathscr{F}_\alpha(M)$ | — | борелевские классы множеств топологического пространства $M$ (с. 46); |
| $[f>r]$ и $[f\geqslant r]$ | — | лебеговы множества функции $f$ (с. 48); |
| $[f=r]$ | — | множество уровня функции $f$ (с. 48); |
| $({}^*,\mathfrak{N})$ | — | класс, состоящий из функций $f$, для которых $[f\geqslant r]\in\mathfrak{N}$ при всех $r\in\mathbb{R}$ (с. 48); |
| $(\mathfrak{M},{}^*)$ | — | класс, состоящий из функций $f$, для которых $[f>r]\in\mathfrak{M}$ при всех $r\in\mathbb{R}$ (с. 48); |
| $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ | — | пересечение классов $(\mathfrak{M},{}^*)$ и $({}^*,\mathfrak{N})$ (с. 48); |
| $\widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha(M)$ | — | $\alpha$-й класс $B$-измеримых функций $M\to\overline{\mathbb{R}}$ (с. 48); |
| $\mathfrak{B}_\alpha(M)$ | — | $\alpha$-й класс $B$-измеримых функций $M\to\mathbb{R}$ (с. 48); |
| $\widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$ | — | $\alpha$-й класс Бэра функций $M\to\overline{\mathbb{R}}$ (с. 49); |
| $\mathfrak{F}_\alpha(M)$ | — | $\alpha$-й класс Бэра функций $M\to\mathbb{R}$ (с. 49); |
| $\Phi$ | — | ограничивающий гомеоморфизм (с. 49); |
| $\mathfrak{S}(X)$ | — | класс суслинских подмножеств топологического пространства $X$ (с. 50); |
| $\overline{\varphi}$ | — | минимальная полунепрерывная сверху мажоранта функционала $\varphi$ (с. 35); |
| $\overline{\lambda}_i(A)$ | — | максимальный $i$-й показатель системы $A$ (с. 33); |
| $\underline{\varphi}$ | — | максимальная полунепрерывная снизу миноранта функционала $\varphi$ (с. 35); |
| $\underline{\lambda}_i(A)$ | — | минимальный $i$-й показатель системы $A$ (с. 33); |
| $\nabla_{\sigma,i}(A)$ | — | $i$-й верхний сигма-показатель Изобова системы $A$ (с. 41); |
| $\Delta_{\sigma,i}(A)$ | — | $i$-й нижний сигма-показатель Изобова системы $A$ (с. 41); |
| $\nabla_i(A)$ | — | $i$-й верхний экспоненциальный показатель Изобова системы $A$ (с. 41); |
| $\Delta_i(A)$ | — | $i$-й нижний экспоненциальный показатель Изобова системы $A$ (с. 41); |
| $\beta_i(A)$ | — | $i$-й условный показатель Боля системы $A$ (с. 42); |
| $\beta^{(i)}(A)$ | — | $i$-й относительный показатель Боля системы $A$ (с. 43); |
| $\beta_i(f,x)$ | — | $i$-й условный показатель Боля локального диффеоморфизма $f$ в точке $x$ (с. 46); |
| $\beta^{(i)}(f,x)$ | — | $i$-й относительный показатель Боля локального диффеоморфизма $f$ в точке $x$ (с. 46). |

# Глава 1

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕ́ДЕНИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

## 1.1 Вещественное евклидово пространство

Всюду далее считаем $\mathbb{R}^n$ $n$-мерным евклидовым вещественным векторным пространством с заданным на нём скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, относительно которого ортонормирован базис $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, где $e_i$ — вектор-столбец с 1 на $i$-ом месте и нулями на остальных местах, $i \in \mathbb{N}_n$.

Под матрицей линейного оператора в $\mathbb{R}^n$ будем понимать его матрицу в базисе $\mathbf{e}$. Всюду ниже $O_n$ и $E_n$ обозначают нулевую и единичную матрицы соответственно. Определим *евклидову* норму вектора равенством $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, а соответствующую ей *спектральную* норму линейного оператора (а также его матрицы) — равенством

$$|A| = \sup\{|Ax| : |x| = 1\}.$$

Нормированное векторное пространство линейных операторов, действующих в $\mathbb{R}^n$, обозначим через $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, а изоморфное ему пространство $(n \times n)$-матриц — через $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Если $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, то норма его сужения $A|_L \colon L \to \mathbb{R}^n$ на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ определяется стандартным образом при помощи равенства

$$|A|_L| = \sup\{|Ax| : |x| = 1 \ \& \ x \in L\}.$$

Пусть $S$ — $n$-мерное векторное пространство. Всюду далее условимся через $G_i(S)$, $i \in \mathbb{N}_n$, обозначать множество его $i$-мерных подпространств, а звездочкой внизу обозначать выбрасывание нуля, т. е. через $S_*$ будем обозначать множество $S \backslash \{0\}$.

## 1.2 Пространство линейных дифференциальных систем

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

с кусочно-непрерывными матричнозначными функциями $A \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n \times n}$ (которые мы отождествляем с соответствующими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами.

*Кусочная непрерывность* матричнозначной функции $A(\cdot)$ означает, что она непрерывна всюду на $\mathbb{R}_+$ за исключением точек, принадлежащих некоторому множеству $T_A$, не имеющему конечных предельных точек; при этом в каждой точке $t_0 \in T_A$ разрыва у функции $A(\cdot)$ существуют левый, если $t_0 \neq 0$, и правый односторонние пределы, т. е. в точках множества $T_A$ матричнозначная функция $A(\cdot)$ имеет разрывы только первого рода.

Множество $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ наделим структурой линейного пространства над $\mathbb{R}$ с естественными для матричнозначных функций операциями сложения и умножения на число.

Подпространства пространств $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$, состоящие из систем с непрерывными коэффициентами, будем обозначать через $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $C\mathcal{M}^n$ соответственно.

Мы будем использовать две топологии на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ — *равномерную,* задаваемую метрикой

$$\rho_U(A,B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t)-B(t)|, 1\}, \qquad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n, \tag{1.2}$$

и *компактно-открытую,* задаваемую метрикой [156, с. 533]

$$\rho_C(A,B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t)-B(t)|, 1/(t+1)\}, \quad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n. \tag{1.3}$$

Полученные топологические пространства условимся обозначать через $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ соответственно, аналогичные обозначения будем использовать и для их подпространств. Отметим, что линейные операции в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ непрерывны в обеих введённых топологиях. Другими словами, $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ являются топологическими векторными пространствами.

Равномерная топология на подпространстве $\mathcal{M}^n$ задаётся также нормой

$$\|A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t)|, \quad A \in \mathcal{M}^n. \tag{1.4}$$

Действительно, всякий шар в этой норме с радиусом, не превосходящим единицы, совпадает с шаром с теми же центром и радиусом в метрике $\rho_U$.

Для каждой непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (в частности, константы) обозначим через $\mathcal{B}^n_f$ подпространство метрического пространства $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, состоящее из систем, удовлетворяющих условию

$$|A(t)| \leqslant f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.5}$$

а через $\check{\mathcal{B}}^n_f$ — подпространство пространства $\mathcal{B}^n_f$, состоящее из систем с непрерывными коэффициентами, т. е. $\mathcal{B}^n_f \bigcap C\widetilde{\mathcal{M}}^n$.

*Решением* системы (1.1) называется любая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и дифференцируемая всюду за исключением, быть может, точек множества $T_A$

вектор-функция $x(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая системе (1.1) при всех $t \in \mathbb{R}_+ \backslash T_A$. Для каждого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(\cdot)$ системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0$ существует и единственно [201, с. 55].

Совокупность решений системы (1.1) относительно обычных операций сложения вектор-функций и умножения их на вещественное число образует вещественное векторное пространство, которое обозначается через $S(A)$. Пространство $S(A)$ изоморфно $\mathbb{R}^n$ — канонический изоморфизм задаётся биекцией $x(\cdot) \mapsto x(0)$. Любой базис в векторном пространстве $S(A)$ называется *фундаментальной системой решений* системы (1.1). Фундаментальная система решений $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ системы (1.1), записанная в виде $(n \times n)$-матрицы $[x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)]$, $i$-ый столбец ($i \in \mathbb{N}_n$) которой — вектор-функция $x_i(\cdot)$, называется *фундаментальной матрицей* системы (1.1).

Если $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — фундаментальная матрица системы (1.1), то матрица $X_A(t, \tau) \equiv X(t) X^{-1}(\tau)$, где $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, называется *матрицей* или *оператором Коши* системы (1.1).

Пусть $A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$. Тогда для матрицы Коши $X_A(\cdot, \cdot)$ этой системы при всех $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ имеет место двойное неравенство [94, формула (3.3)]

$$\exp(-a_{\tau,t}|t-\tau|) \leqslant |X_A(t,\tau)| \leqslant \exp(a_{\tau,t}|t-\tau|), \tag{1.6}$$

где

$$a_{\tau,t} = \sup\{|A(s)| : s \in [\min\{\tau, t\}, \max\{\tau, t\}]\}.$$

## 1.3 Показатели Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений

Пусть $\mathrm{P}$ — неограниченное подмножество полуоси $\mathbb{R}_+$. *Характеристическим показателем* вектор-функции $f\colon \mathrm{P} \to \mathbb{R}^n$ называется величина (считаем, что $\ln 0 = -\infty$)

$$\lambda[f] = \varlimsup_{\mathrm{P} \ni t \to +\infty} \ln |f(t)|^{1/t}. \tag{1.7}$$

В дальнейшем, если не указано иного, для любого решения $x(\cdot)$ системы (1.1) в определении выше считаем, что $\mathrm{P} = \mathbb{R}_+$.

*Показателями Ляпунова* системы (1.1) называются величины [137]

$$\lambda_i(A) = \inf_{L \in G_i(S(A))} \sup_{x \in L} \lambda[x], \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{1.8}$$

В наших обозначениях показатели Ляпунова нумеруются, в отличие от [137], в порядке неубывания.

Так как мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которую мы наделим стандартным порядком (считаем, что $-\infty < r < +\infty$ для любого $r \in \mathbb{R}$ и что $-\infty < +\infty$) и порядковой топологией. Если все показатели Ляпунова системы (1.1) конечны (что заведомо имеет место, когда коэффициенты системы ограничены на полуоси), то они совпадают с величинами, определёнными в [116, с. 34; 76, гл. III, § 4].

Столбец $(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))^{\mathsf{T}} \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$ называют *спектром показателей Ляпунова* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$.

В случае, когда коэффициенты системы (1.1) ограничены, т. е. $A \in \mathcal{M}^n$, из неравенств (1.6) получаем оценку для её показателей Ляпунова [29, формула (1.9)]

$$-\|A\| \leqslant \lambda_i(A) \leqslant \|A\|, \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{1.9}$$

Говорят, что система (1.1) *условно экспоненциально устойчива* с индексом $i \in \mathbb{N}_n$, если существуют такие $i$-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ и положительные числа $\alpha$ и $C$, что для всякого решения $x(\cdot)$ этой системы, удовлетворяющего условию $x(0) \in L$, выполнено неравенство

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Непосредственно из приведённых определений следует, что для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ неравенство $\lambda_i(A) < 0$ равносильно условной экспоненциальной устойчивости системы $A$ с индексом $i$.

Для всяких $k, l \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ определим функционал $\varphi_i^{kl} \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \mathbb{R}$ равенством

$$\varphi_i^{kl}(A) = \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \max_{t \in [k, k+l]} \frac{1}{t} \ln |X_A(t,0)|_L|, \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n. \tag{1.10}$$

Приводимый ниже результат получен В. М. Миллионщиковым; первое из утверждений доказано в [136, лемма 3], а второе — в [137, теорема 2].

**Лемма 1.1.** *Справедливы следующие утверждения:*

1) *для любых $k, l \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\varphi_i^{kl} \colon \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \to \mathbb{R}$ непрерывен;*
2) *для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ имеет место равенство*

$$\lambda_i(A) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_i^{kl}(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n. \tag{1.11}$$

## 1.4 Преобразования линейных систем

Через $\mathcal{T}^n$ обозначим множество всех непрерывных кусочно-дифференцируемых матричнозначных функций $V \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n \times n}$, таких, что $\det V(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Кусочная дифференцируемость функции $V(\cdot)$ означает, что её производная $\dot{V}(t)$ существует при всех $t \in \mathbb{R}_+$ за исключением, быть может, точек некоторого множества $T_V$, не имеющего предельных точек в $\mathbb{R}_+$; при этом сама производная $\dot{V}(\cdot)$ кусочно-непрерывна (в каждой из точек, где производная $\dot{V}(t)$ не существует, мы, для определённости, полагаем её равной значению предела справа).

Сделав в системе (1.1) замену переменных $x = V(t)y$, придём к системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где матричнозначная функция $B(\cdot)$ задаётся равенством

$$B(t) = V^{-1}(t)A(t)V(t) - V^{-1}(t)\dot{V}(t). \tag{1.12}$$

Преобразование $\mathfrak{T}_V \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \widetilde{\mathcal{M}}^n$, определяемое равенством (1.12), называется:

1) *преобразованием Ляпунова* [116, с. 42] (см. также [29, с. 247] и [117, с. 16]), если выполняется условие

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \bigl\{|V(t)| + |V^{-1}(t)| + |\dot{V}(t)|\bigr\} < +\infty; \tag{1.13}$$

2) *слабым преобразованием Ляпунова* [68, гл. IV, § 2], если выполняется условие

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \bigl\{|V(t)| + |V^{-1}(t)|\bigr\} < +\infty; \tag{1.14}$$

3) *обобщённым преобразованием Ляпунова* [3, с. 92; 22], если выполняется условие

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \ln |V(t)| = \lim_{t \to +\infty} t^{-1} \ln |V^{-1}(t)| = 0. \tag{1.15}$$

В дальнейшем будем отождествлять преобразование $\mathfrak{T}_V$ с матричнозначной функцией $V(\cdot)$ и называть её саму (слабым, обобщённым) преобразованием Ляпунова.

Непосредственно из определений следует, что всякое ляпуновское преобразование является слабо ляпуновским, а всякое слабо ляпуновское — обобщённо ляпуновским.

Как следует из (1.12) и (1.13), множество $\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными коэффициентами инвариантно относительно преобразований Ляпунова. Для слабых и обобщённых преобразований Ляпунова это уже не имеет места.

Отметим, что если $X(\cdot)$ — фундаментальная матрица системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, то для любой матричнозначной функции $V \in \mathcal{T}^n$ матричнозначная функция $t \mapsto V^{-1}(t)X(t)$ является фундаментальной матрицей преобразованной системы $\mathfrak{T}_V(A)$.

Хорошо известно и легко доказывается (см. ссылки выше), что множество преобразований каждого из трёх указанных типов образует группу относительно операции композиции отображений.

Будем говорить, что система $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *ляпуновски эквивалентна* системе $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, если существует преобразование Ляпунова $V(\cdot)$, удовлетворяющее равенству (1.12). В силу сказанного выше, введённое отношение на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ является отношением эквивалентности. Аналогично определяются отношения слабой и обобщённой ляпуновской эквивалентности. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения, характеризующего введённые отношения (см., например, [117, Теорема 1.1]).

**Лемма 1.2.** *Системы $A$ и $B$ ляпуновски (слабо ляпуновски, обобщённо ляпуновски) эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие фундаментальные матрицы $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем, что матричнозначная функция $V(t) = X(t)Y^{-1}(t)$ удовлетворяет условию* (1.13) *(соответственно, условию* (1.14) *или* (1.15)*).*

Пользуясь леммой 1.2, легко проверить, что отношения обобщённой ляпуновской эквивалентности и слабой ляпуновской эквивалентности различаются уже на множестве $\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Рассмотрим следующий

**Пример 1.1.** Системы

$$\dot{x} = O_n x \quad \text{и} \quad \dot{x} = (t+1)^{-1} E_n x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

обобщённо ляпуновски эквивалентны, но не являются слабо ляпуновски эквивалентными. Действительно, любая фундаментальная матрица первой системы постоянна, а любая фундаментальная матрица второй имеет вид $(t+1)C$, где $C$ — постоянная постоянная невырожденная $(n \times n)$-матрица. См. также [18, теорема 7 и абзац перед ней].

Что касается отношений ляпуновской и слабой ляпуновской эквивалентности, то на множестве $\mathcal{M}^n$ они совпадают между собой: если выполнено условие (1.14) и коэффициенты одной из рассматриваемых систем ограничены, то дополнительное условие

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\dot{V}(t)| < +\infty$$

равносильно ограниченности коэффициентов другой системы [29, §18.2]. На множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ эти отношения уже различаются. Рассмотрим такой

**Пример 1.2.** Системы

$$\dot{x} = O_n x \quad \text{и} \quad \dot{x} = 2t\cos(t^2) E_n x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

слабо ляпуновски эквивалентны, но не являются ляпуновски эквивалентными. Действительно, у первой системы всякая фундаментальная матрица постоянна, а фундаментальная матрица второй системы имеет вид

$$Y(t) = \exp\left(\int_0^t 2\tau\cos(\tau^2)\,d\tau\right) C = \exp(\sin(t^2))C,$$

где $C$ — постоянная невырожденная $(n \times n)$-матрица.

Пусть $S \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Функционал $\varphi\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *ляпуновским инвари-*

*антом*, если для любых ляпуновски эквивалентных систем $A, B \in S$ выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Аналогично определяются слабо ляпуновский инвариант и обобщённо ляпуновский инвариант.

Из включений между классами преобразований следует, что всякий обобщённо ляпуновский инвариант является слабо ляпуновским инвариантом, а всякий слабо ляпуновский инвариант — ляпуновским инвариантом.

Напомним, что система $A \in \mathcal{M}^n$ называется *правильной*, если выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau.$$

Имеет место следующий критерий В. П. Басова [22]: система $A \in \mathcal{M}^n$ является правильной тогда и только тогда, когда она обобщённо ляпуновски эквивалентна некоторой диагональной системе с постоянными коэффициентами. Последнее условие естественно принять [22; 3, с. 91–92] за определение правильности системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n \backslash \mathcal{M}^n$.

Мы будем рассматривать ещё один вид инвариантности, относительно отношения более узкого, чем ляпуновская эквивалентность.

Назовём системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *совпадающими на бесконечности*, если они совпадают на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ за исключением, быть может, некоторого (конечного) отрезка.

Пусть $S \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Функционал $\varphi\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$, принимающий одинаковые значения на любых совпадающих на бесконечности системах, будем называть *остаточным* [176]. Нетрудно видеть, что справедлива следующая

**Лемма 1.3.** *Всякий слабо ляпуновский инвариант является остаточным.*

**Доказательство.** Покажем, что если системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ совпадают при всех $t \geqslant T$, где $T \in \mathbb{R}_+$, то они ляпуновски эквивалентны [177, лемма 1.1]. В самом деле, положим $X(t) = X_A(t,T)$, $Y(t) = X_B(t,T)$ и $V(t) = X(t)Y^{-1}(t)$. Тогда $V(t) = E_n$ при всех $t \geqslant T$, поэтому матричнозначные функции $V(t)$, $V^{-1}(t)$ и $\dot{V}(t)$ ограничены. Лемма доказана.

Следующее известное утверждение неоднократно используется в различных разделах диссертации, поэтому приведём его вместе с доказательством.

**Лемма 1.4.** *Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\lambda_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ является обобщённо ляпуновским инвариантом. В частности, функционал $\lambda_i$ является остаточным.*

**Доказательство.** Пусть $V \in \mathcal{T}^n$ — обобщённо ляпуновское преобразование, переводящее систему $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ в систему $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Покажем, что отображение $\widehat{V}\colon S(B) \to S(A)$, ставящее в соответствие решению $y \in S(B)$ второй системы решение $t \mapsto V(t)y(t)$ первой системы, сохраняет характеристический показатель. В самом деле, из равенства $x(t) = V(t)y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, получаем двустороннюю оценку

$$|V^{-1}(t)|^{-1} \cdot |y(t)| \leqslant |x(t)| \leqslant |V(t)| \cdot |y(t)|, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

откуда, логарифмируя и деля на $t > 0$, получим

$$\frac{1}{t} \ln |y(t)| - \frac{1}{t} \ln |V^{-1}(t)| \leqslant \frac{1}{t} \ln |x(t)| \leqslant \frac{1}{t} \ln |y(t)| + \frac{1}{t} \ln |V(t)|, \quad t > 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к верхнему пределу при $t \to +\infty$ и учитывая (1.15), приходим к нужному равенству $\lambda[y] = \lambda[x]$.

Поскольку $\widehat{V}$ — линейный изоморфизм, то он порождает биекцию $G_i(S(B)) \to G_i(S(A))$ между множествами $i$-мерных подпространств (линеалов) соответствующих пространств решений, действующую по правилу $L \mapsto \widehat{V} L$. Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\lambda_i(A) = \inf_{L \in G_i(S(A))} \sup_{x \in L} \lambda[x] = \inf_{L \in G_i(S(A))} \sup_{y \in \widehat{V}^{-1} L} \lambda[\widehat{V}(y)] =$$
$$= \inf_{N \in G_i(S(B))} \sup_{y \in N} \lambda[y] = \lambda_i(B).$$

Лемма доказана.

## 1.5 Непрерывные семейства линейных систем

Пусть $M$ — топологическое (в частности, метрическое) пространство. Рассмотрим семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.16}$$

зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом $\mu \in M$ система (1.16) имеет кусочно-непрерывные коэффициенты.

Следующая конструкция будет многократно использоваться в дальнейшем. Зафиксировав функционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ (как правило, слабо ляпуновский инвариант) и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие значение этого функционала на системе (1.16), получим функцию $\varphi(\,\cdot\,; A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$. Таким образом, всякий функционал на пространстве систем и семейство (1.16) определяют функцию параметра.

Очевидно, что если не наложить каких-либо дополнительных условий на отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$, то в случае, когда $M$ имеет мощность, не меньшую мощности континуума, для произвольной функции $f\colon M \to \varphi(\widetilde{\mathcal{M}}^n)$ найдётся семейство (1.16), для которого $\varphi(\,\cdot\,; A) = f$. Как правило, требуют непрерывной (в том или ином смысле) зависимости коэффициентов систем семейства (1.16) от параметра $\mu \in M$.

Выделим следующие классы отображений $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$. Через $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ обозначим класс отображений $A(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющих для каждого

$\mu \in M$ условиям:

$$1)\ A(\cdot,\mu) \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n; \quad 2)\ \lim_{\nu\to\mu} \rho_C(A(\cdot,\nu), A(\cdot,\mu)) = 0,$$

т. е. задающих семейства (1.16), непрерывные в компактно-открытой топологии на пространстве $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Другими словами, класс $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ состоит из отображений, задающих семейства систем с непрерывными (при каждом $\mu \in M$) коэффициентами, и обладающих свойством: если в пространстве параметров последовательность $(\mu_k)$ сходится к некоторому элементу $\mu_0$, то последовательность $(A(\cdot\,,\mu_k))$ сходится к матричнозначной функции $A(\cdot\,,\mu_0)$ равномерно на каждом отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}_+$. На самом деле, класс $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ совпадает с классом всех непрерывных отображений $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (см. лемму 1.5 ниже).

Через $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ обозначим класс всех отображений $A(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющих для каждого $\mu \in M$ условиям:

$$1)\ A(\cdot,\mu) \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n; \quad 2)\ \lim_{\nu\to\mu} \rho_U(A(\cdot,\nu), A(\cdot,\mu)) = 0, \tag{1.17}$$

т. е. задающих семейства (1.16), непрерывные в равномерной топологии на пространстве $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Иначе говоря, принадлежность отображения $A(\cdot,\cdot)$ классу $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ означает, что оно непрерывно и обладает свойством: если в пространстве параметров последовательность $(\mu_k)$ сходится к некоторому $\mu_0$, то последовательность $(A(\cdot\,,\mu_k))$ сходится к матричнозначной функции $A(\cdot\,,\mu_0)$ равномерно на полуоси $\mathbb{R}_+$. Далее, через $\mathcal{B}^n(M)$ обозначим класс отображений $A(\cdot,\cdot)$, таких, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t,\mu)| < \infty, \quad \mu \in M,$$

т. е. задающих семейства (1.16) систем с ограниченными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Кроме того, положим

$$\mathcal{C}^n(M) = \widetilde{\mathcal{C}}^n(M) \bigcap \mathcal{B}^n(M), \quad \mathcal{U}^n(M) = \widetilde{\mathcal{U}}^n(M) \bigcap \mathcal{B}^n(M). \tag{1.18}$$

Наконец, через $\mathcal{BC}^n(M)$ и $\mathcal{BU}^n(M)$ будем обозначать подмножества $\mathcal{C}^n(M)$ и $\mathcal{U}^n(M)$, состоящие из ограниченных отображений. В дальнейшем условимся отождествлять семейство (1.16) и задающее его матричнозначное отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Следующее хорошо известное утверждение объясняет роль компактно-открытой топологии на пространстве $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ при изучении непрерывных семейств линейных дифференциальных систем.

**Лемма 1.5.** *Пусть $M$ — произвольное топологическое пространство. Тогда отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно тогда и только тогда,* *когда отображение $M \to C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, ставящее в соответствие точке $\mu \in M$ систему* (1.16) *с непрерывными коэффициентами, непрерывно.*

**Доказательство.** 1. Пусть $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно. Зафиксируем $\mu_0 \in M$. Достаточно установить, что для всяких $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U$ точки $\mu_0$, что

$$\sup_{\mu\in U}\sup_{t\in[0,k]} |A(t,\mu) - A(t,\mu_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.19}$$

В силу непрерывности отображения $A(\cdot,\cdot)$ для всякого $t \in [0,k]$ существует такая открытая окрестность $V_t \times U_t$ точки $(t,\mu_0)$, что выполнено неравенство

$$\sup\{|A(s,\mu) - A(u,\mu_0)| :\ \mu \in U_t,\ u,s \in V_t\} < \varepsilon.$$

Множества $V_t$, $t \in [0,k]$, образуют открытое покрытие компакта $[0,k]$. Пусть $V_{t_i}$, $i \in \mathbb{N}_q$, — его конечное подпокрытие. Положим $U = \bigcap_{i=1}^q U_{t_i}$. Тогда $U$ — открытая окрестность точки $\mu_0$, удовлетворяющая условию (1.19). Действительно, рассмотрим произвольное $t \in [0,k]$. Тогда $t \in V_{t_i}$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_q$. По построению имеем

$$\sup\{|A(s,\mu) - A(u,\mu_0)| :\ \mu \in U_{t_i},\ u,s \in V_{t_i}\} < \varepsilon.$$

В силу включения $U \subset U_{t_i}$ имеем $\sup\limits_{\mu\in U}|A(t,\mu) - A(t,\mu_0)| < \varepsilon$, откуда ввиду произвольности $t \in [0,k]$ получаем неравенство (1.19).

2. Обратно, пусть отображение $M \to C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, ставящее в соответствие точке $\mu \in M$ систему (1.16), непрерывно. Зафиксируем $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M$ и $\varepsilon > 0$. Пользуясь непрерывностью функции $A(\cdot\,,\mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, выберем такую ограниченную окрестность $V$ точки $t$, чтобы для всякого $s \in V$ выполнялось неравенство $|A(t,\mu) - A(s,\mu)| < \varepsilon/2$. Выберем теперь число $T > 2/\varepsilon$ так, чтобы $V \subset [0,T]$. По условию найдётся такая окрестность $U$ точки $\mu$, что при всех $\nu \in U$ выполнено $\rho_C(A(\cdot,\mu),A(\cdot,\nu)) < 1/(T+1)$ (см. (1.3)), откуда получаем $\sup_{t\in[0,T]}|A(t,\mu) - A(t,\nu)| < 1/T$. Тогда для всякого $(s,\nu) \in V \times U$ имеем цепочку неравенств

$$|A(t,\mu) - A(s,\nu)| \leqslant |A(t,\mu) - A(s,\mu)| + |A(s,\mu) - A(s,\nu)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

## 1.6 Максимальные и минимальные показатели

Как известно, отрицательность $i$-го показателя Ляпунова линейной нестационарной системы может не сохраняться при сколь угодно малом возмущении её коэффициентов. Как указано в обзоре литературы, этот эффект был открыт О. Перроном [243, с. 761] (см. также [29, пример 13.5.1] и пример 1.3 ниже). Следуя [176], дадим следующее

**Определение 1.1.** Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ назовём [176] *максимальным $i$-м показателем* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ значение в точке $A$ минимальной полунепрерывной сверху мажоранты $i$-го показателя Ляпунова, рассматриваемого как функционал на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$, т. е. величину, задаваемую равенством

$$\overline{\lambda}_i(A) = \lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{\rho_U(B,A)\leqslant\varepsilon} \lambda_i(B), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

или, что равносильно, равенством

$$\overline{\lambda}_i(A) = \lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{\|Q\|\leqslant\varepsilon} \lambda_i(A+Q), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Максимальный $i$-й показатель системы однозначно отвечает на вопрос, сохраняется ли свойство условной экспоненциальной устойчивости с индексом $i$ (см. определение на с. 26) системы $A$ при достаточно малых возмущениях её коэффициентов, а именно: для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $i \in \mathbb{N}_n$ неравенство $\overline{\lambda}_i(A) < 0$ выполнено тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, что всякая система $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющая условию $\rho_U(B,A) \leqslant \varepsilon$, условно экспоненциально устойчива с индексом $i$.

Для максимальных показателей системы $A \in \mathcal{M}^n$ известны явные формулы их вычисления через оператор Коши исходной системы. В случае $i = n$ соответствующая формула называется *старшим центральным показателем* и предложена Р. Э. Виноградом [57; 58], а В. М. Миллионщиковым была установлена [126] достижимость центрального показателя старшими показателями возмущённых систем. Для каждого $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ ($n \geqslant 2$) формула для вычисления максимального $i$-го показателя получена И. Н. Сергеевым [176] (и в той же работе введено само их название).

Упомянутый выше пример 13.5.1 из монографии [29] (а также пример 1.3 ниже) показывает, что каждый из показателей Ляпунова может совершать конечный скачок вниз под действием сколь угодно малых (равномерно на полуоси) возмущений коэффициентов, т. е. не является полунепрерывным снизу функционалом в смысле равномерной топологии. Таким образом, целесообразно дать следующее

**Определение 1.2.** Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ назовём [82] *минимальным $i$-м показателем* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ значение в точке $A$ максимальной полунепрерывной снизу миноранты $i$-го показателя Ляпунова, рассматриваемого как функционал на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$, т. е. величину, задаваемую равенством

$$\underline{\lambda}_i(A) = \lim_{\varepsilon\to+0} \inf_{\rho_U(B,A)\leqslant\varepsilon} \lambda_i(B), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

или, что равносильно, равенством

$$\underline{\lambda}_i(A) = \lim_{\varepsilon\to+0} \inf_{\|Q\|\leqslant\varepsilon} \lambda_i(A+Q), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Поскольку отрицательность $i$-го показателя Ляпунова равносильна условной экспоненциальной устойчивости с индексом $i$, положительность минимального $i$-го показателя Ляпунова равносильна грубой условной экспоненциальной неустойчивости с тем же индексом, т. е. неустойчивости, которая выдерживает малые возмущения матрицы коэффициентов.

Для минимальных показателей системы $A \in \mathcal{M}^n$ (т. е. системы с ограниченными коэффициентами) явные формулы получены: в случае $i = 1$ — Р. Э. Виноградом [57; 58] и В. М. Миллионщиковым [126] (последний уточнил оценку Р. Э. Винограда и доказал её неулучшаемость), в случае $n = i = 2$ — Н. А. Изобовым [82; 83], а в случаях $n = i = 3$ и $i = 2$ (для всех $n \geqslant 2$) — И. Н. Сергеевым [189; 191].

Сформулируем в виде лемм некоторые известные свойства максимальных и минимальных показателей, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем.

**Лемма 1.6.** *Для любого уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{M}}^1$ имеет место равенство*

$$\overline{\lambda}_1(a) = \underline{\lambda}_1(a) = \lambda_1(a).$$

*Другими словами, функционал $\lambda_1 \colon \widetilde{\mathcal{M}}^1_U \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывен.*

**Доказательство.** Как известно, показатель Ляпунова уравнения

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

задаётся формулой

$$\lambda_1(a) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t a(s)\, ds.$$

Зафиксируем произвольное уравнение $a \in \widetilde{\mathcal{M}}^1$. Если $\lambda_1(a) \in \mathbb{R}$, то для любого уравнения $b \in \widetilde{\mathcal{M}}^1$, удовлетворяющего условию $\rho_U(a,b) < 1$, величина $\lambda_1(b)$ также конечна и выполнена оценка

$$|\lambda_1(a) - \lambda_1(b)| \leqslant \rho_U(a,b).$$

Если же $\lambda_1(a) = \pm\infty$, то для тех же $b$ выполнено равенство $\lambda_1(a) = \lambda_1(b)$. Таким образом, нами установлено, что функционал $\lambda_1 \colon \widetilde{\mathcal{M}}^1_U \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывен в точке $a$. Лемма доказана.

**Лемма 1.7.** *Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ при всех $i \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$-\|A\| \leqslant \underline{\lambda}_i(A) \leqslant \overline{\lambda}_i(A) \leqslant \|A\|.$$

**Доказательство.** Если $\|A\| = +\infty$, то доказывать нечего. В противном случае, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\|Q\| \leqslant \varepsilon$. Тогда из (1.9) получаем, что

$$-(\|A\| + \varepsilon) \leqslant -\|A + Q\| \leqslant \lambda_i(A + Q) \leqslant \|A + Q\| \leqslant \|A\| + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$-(\|A\| + \varepsilon) \leqslant \inf_{\|Q\|\leqslant\varepsilon} \lambda_i(A+Q) \leqslant \sup_{\|Q\|\leqslant\varepsilon} \lambda_i(A+Q) \leqslant \|A\| + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим требуемое. Лемма доказана.

**Лемма 1.8** ([94, теорема 1.5]). *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ с постоянными коэффициентами для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ имеют место равенства*

$$\underline{\lambda}_i(A) = \lambda_i(A) = \overline{\lambda}_i(A).$$

*Другими словами, функционал $\lambda_i\colon \mathcal{M}^n_U \to \mathbb{R}$ непрерывен в каждой такой (стационарной) точке $A \in \mathcal{M}^n_U$.*

**Лемма 1.9.** *Максимальные и минимальные показатели являются слабо ляпуновскими инвариантами.*

На самом деле, для заключения леммы 1.9 существенно только то, что сами показатели Ляпунова являются слабо ляпуновскими инвариантами. Поэтому введём следующую, более общую, конструкцию и докажем более общее утверждение, из которого лемма 1.9 будет тривиально следовать.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое подмножество пространства $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$, не имеющее изолированных точек. Для каждого функционала $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ условимся обозначать через $\overline{\varphi}$ его *минимальную полунепрерывную сверху мажоранту* в смысле равномерной топологии, т. е. функционал, определяемый равенством

$$\overline{\varphi}(A) = \lim_{\varepsilon\to+0} \sup\{\varphi(A+Q):\ \|Q\| \leqslant \varepsilon,\ A+Q \in \mathcal{M}\}, \quad A \in \mathcal{M}.$$

Аналогично определяется *максимальная полунепрерывная снизу миноранта* функционала $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ в смысле равномерной топологии, которую мы будем обозначать $\underline{\varphi}$.

**Лемма 1.10.** *Пусть множество $\mathcal{M}$ инвариантно относительно слабо ляпуновских преобразований. Тогда если $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ — слабо ляпуновский инвариант, то $\overline{\varphi}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ и $\underline{\varphi}\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ — тоже слабо ляпуновские инварианты.*

**Доказательство.** В силу равенства $\underline{\varphi} = -\overline{(-\varphi)}$ достаточно установить утверждение для $\overline{\varphi}$. Выберем произвольно и зафиксируем систему $A \in \mathcal{M}$. Пусть матричнозначная функция $V \in \mathcal{T}^n$ (см. определение в разделе 1.4) удовлетворяет условию (1.14). Положим

$$K = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \bigl\{|V(t)| \cdot |V^{-1}(t)|\bigr\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо включение (определение множества $\mathcal{B}^n_\varepsilon$ см. на с. 24)

$$\{\varphi(A+Q) : Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon \bigcap \mathcal{M}_A\} \subset \{\varphi(\mathfrak{T}_V(A) + \tilde{Q}) : \tilde{Q} \in \mathcal{B}^n_{K\varepsilon} \bigcap \mathcal{M}_{\mathfrak{T}_V(A)}\}, \quad (1.20)$$

где $\mathcal{M}_A = \{Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : A + Q \in \mathcal{M}\}$, а преобразование $\mathfrak{T}_V \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \widetilde{\mathcal{M}}^n$, определяется равенством (1.12). Действительно, пользуясь слабо ляпуновской инвариантностью функционала $\varphi$, из равенства (1.12) для любого $Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon \bigcap \mathcal{M}_A$ получаем цепочку

$$\varphi(A+Q) = \varphi(\mathfrak{T}_V(A+Q)) = \varphi(\mathfrak{T}_V(A) + V^{-1}(\cdot)Q(\cdot)V(\cdot)),$$

причём для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$|V^{-1}(t)Q(t)V(t)| \leqslant |V^{-1}(t)| \cdot |Q(t)| \cdot |V(t)| \leqslant K\varepsilon.$$

Переходя во включении (1.20) к точной верхней грани, а затем к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим, что $\overline{\varphi}(A) \leqslant \overline{\varphi}(\mathfrak{T}_V(A))$. В силу произвольности $A \in \mathcal{M}$ и $V \in \mathcal{T}^n$ из последнего неравенства вытекает, что

$$\overline{\varphi}(\mathfrak{T}_V(A)) \leqslant \overline{\varphi}(\mathfrak{T}_V^{-1}(\mathfrak{T}_V(A))) = \overline{\varphi}(A).$$

Таким образом, $\overline{\varphi}(A) = \overline{\varphi}(\mathfrak{T}_V(A))$. Лемма доказана.

**Замечание 1.1.** Отметим, что в случае $n \geqslant 2$ максимальные и минимальные показатели не являются обобщённо ляпуновскими инвариантами. Причина этого в том, что обобщённо ляпуновские преобразования, вообще говоря, не сохраняют малость возмущений, другими словами, они могут быть разрывны в равномерной топологии на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Приведём примеры, показывающие, что ни один из максимальных и минимальных показателей не является обобщённо ляпуновским инвариантом.

**Пример 1.3.** (ср. [124]) 1. Определим сначала три последовательности $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ равенствами

$$\Delta_k = k^2, \quad \delta_k = k, \quad t_k = t_{k-1} + 2\Delta_k + 2\delta_k, \quad t_0 = 0.$$

Кроме того, для удобства ещё положим

$$t^1_{k-1} = t_{k-1} + \Delta_k, \quad t^2_{k-1} = t^1_{k-1} + \delta_k, \quad t^3_{k-1} = t^2_{k-1} + \Delta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, определим функцию $a \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ при помощи равенств

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [t_{k-1}, t^1_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{при } t \in [t^2_{k-1}, t^3_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Наконец, положим $A(t) = \operatorname{diag}[a(t), -a(t)], \quad t \in \mathbb{R}_+$. Вычислим показатели Ляпунова построенной системы. Поскольку эта система диагональная, то её показатели Ляпунова суть числа [29, 4.1]

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t a(s)\,ds \quad \text{и} \quad \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (-a(s))\,ds$$

упорядоченные по (нестрогому) возрастанию. Легко видеть, что существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t a(s)\,ds = 0.$$

Действительно, если для некоторого $k\in\mathbb{N}$ имеем

1) $t\in[t_{k-1},t_{k-1}^1]$, то $I(t)=t-t_{k-1}\in[0,\Delta_k]$;
2) $t\in[t_{k-1}^1,t_{k-1}^2]$, то $I(t)=\Delta_k$;
3) $t\in[t_{k-1}^2,t_{k-1}^3$, то $I(t)=\Delta_k-(t-t_{k-1}^2)\in[0,\Delta_k]$;
4) $t\in[t_{k-1}^3,t_k]$, то $I(t)=0$,

где $I(t)=\int_0^t a(s)\,ds$. Замечая, что при $t\in[t_{k-1},t_k]$

$$\frac{\Delta_k}{t}\leqslant\frac{\Delta_k}{t_{k-1}}\leqslant\frac{\Delta_k}{2\sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j}\leqslant\frac{3k^2}{2(k-1)^3}\to 0 \quad \text{при } k\to\infty, \tag{1.21}$$

получим требуемое. Таким образом, система $A\in\mathcal{M}^2$ имеет нулевые показатели Ляпунова: $\lambda_1(A)=\lambda_2(A)=0$.

Определим возмущение $Q\in\mathcal{M}^2$, полагая

$$Q(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2k}J & \text{при } t\in[t_{k-1}^1,t_{k-1}^2),\\ -\frac{\pi}{2k}J & \text{при } t\in[t_{k-1}^3,t_k),\\ O_2 & \text{при остальных } t,\end{cases}$$

где $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Непосредственными подсчётами получаем, что

$$X_{A+Q}(t_j,t_{j-1})=\operatorname{diag}[\exp(2\Delta_j),\exp(-2\Delta_j)],\quad j\in\mathbb{N},$$

откуда следует, что

$$X_{A+Q}(t_{k-1},0)=\operatorname{diag}[\exp(2\sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j),\exp(-2\sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j)].$$

Пусть $x(\cdot)$ — произвольное решение системы $A+Q$. Тогда, если для некоторого $k\in\mathbb{N}$ имеем $t\in[t_{k-1},t_k)$, то из равенства $x(t)=X_{A+Q}(t,t_{k-1})x(t_{k-1})$ получаем двустороннюю оценку

$$e^{-(t_k-t_{k-1})}|x(t_{k-1})|\leqslant|x(t_{k-1})|\cdot|X_{A+Q}(t_{k-1},t)|^{-1}\leqslant|x(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|x(t_{k-1})|\cdot|X_{A+Q}(t,t_{k-1})|\leqslant|x(t_{k-1})|e^{t_k-t_{k-1}}.$$

Учитывая (1.21), получаем, что

$$\lambda[x] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{k-1}} \ln|x(t_{k-1})|.$$

Обозначим через $x_l(\cdot)$, $l \in \mathbb{N}_2$, решение системы $A+Q$ с начальным условием $x_l(0) = e_l$. Тогда

$$\lambda[x_1] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{k-1}} \ln|x_1(t_{k-1})| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2\sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j}{2\sum_{j=1}^{k-1}(\Delta_j+\delta_j)} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2k-1}{2k+2} = 1.$$

Аналогично получаем, что

$$\lambda[x_2] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{k-1}} \ln|x_1(t_{k-1})| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{-2\sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j}{2\sum_{j=1}^{k-1}(\Delta_j+\delta_j)} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{-(2k-1)}{2k+2} = -1.$$

Нетрудно убедиться в том, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ векторы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ перпендикулярны (см. [124]).

2. Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Положим

$$\tilde{A}(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{-1,\ldots,-1}_{i-1}, A(t), \underbrace{1,\ldots,1}_{n-i-1}], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Поскольку система $\tilde{A}$ диагональная, то с учётом проделанных выше вычислений получаем, что

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\tilde{A}) = \ldots = \lambda_{i-1}(\tilde{A}) = -1, \quad \lambda_i(\tilde{A}) = \lambda_{i+1}(\tilde{A}) = 0,\\
&\lambda_{i+2}(\tilde{A}) = \ldots = \lambda_n(\tilde{A}) = 1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим возмущенную систему $\tilde{A} + \tilde{Q}$, где

$$\tilde{Q}(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1}, Q(t), \underbrace{0,\ldots,0}_{n-i-1}], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Обозначим через $y_l(\cdot)$, $l \in \mathbb{N}_n$, решение системы $\tilde{A}+\tilde{Q}$ с начальным условием $y_l(0) = e_l$. Тогда в силу сказанного выше при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $l', l'' \in \mathbb{N}_n$, $l' \neq l''$, имеем $y_{l'}(t) \perp y_{l''}(t)$. Следовательно, совокупность решений $\{y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)\}$ обладает свойством несжимаемости [3, гл. 2, § 4], поэтому в силу [3, теорема 2.4.1] реализует спектр показателей Ляпунова системы $\tilde{A} + \tilde{Q}$. Таким образом, имеем

$$\lambda_1(\tilde{A}+\tilde{Q}) = \ldots = \lambda_i(\tilde{A}+\tilde{Q}) = -1, \quad \lambda_{i+1}(\tilde{A}+\tilde{Q}) = \ldots = \lambda_n(\tilde{A}+\tilde{Q}) = 1.$$

Определим функцию $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ равенством

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Тогда последовательность систем $\tilde{Q}_m$, $m \in \mathbb{N}$, задаваемая равенством

$$\tilde{Q}_m(t) = \theta(t-m)\tilde{Q}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m \in \mathbb{N},$$

обладает свойствами:

$$\lim_{m\to\infty} \|\tilde{Q}_m\| = 0, \quad \lambda_i(\tilde{A} + \tilde{Q}_m) = -1, \quad \lambda_{i+1}(\tilde{A} + \tilde{Q}_m) = 1.$$

Первое свойство вытекает из равенства $\lim\limits_{t\to+\infty} |\tilde{Q}(t)| = 0$, а два других — из остаточности показателей Ляпунова (см. лемму 1.4), поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ системы $\tilde{Q}_m$ и $\tilde{Q}$ совпадают на бесконечности.

Таким образом, получаем, что

$$\underline{\lambda}_i(\tilde{A}) \leqslant -1 < \lambda_i(\tilde{A}) \quad \text{и} \quad \overline{\lambda}_{i+1}(\tilde{A}) \geqslant 1 > \lambda_{i+1}(\tilde{A}).$$

Система $\tilde{A}$ — правильная, поскольку имеет нулевые показатели Ляпунова и тождественно нулевой след [3, гл. 3, § 5]. Следовательно, систему $\tilde{A}$ некоторым обобщённо ляпуновским преобразованием можно привести [3, теорема 3.7.1] к постоянной системе $B = \operatorname{diag}[\lambda_1(\tilde{A}), \ldots, \lambda_n(\tilde{A})]$. Но по лемме 1.8 максимальные и минимальные показатели системы с постоянной матрицей совпадают с её показателями Ляпунова, поэтому

$$\underline{\lambda}_i(\tilde{A}) < \underline{\lambda}_i(B) = \lambda_i(B) = \lambda_i(\tilde{A}), \qquad \overline{\lambda}_{i+1}(B) = \lambda_{i+1}(B) = \lambda_{i+1}(\tilde{A}) < \overline{\lambda}_{i+1}(\tilde{A}).$$

Таким образом, установлено, что минимальный $i$-й показатель не является обобщённо ляпуновским инвариантом для всех $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, а максимальный — для всех $i \in \{2, \ldots, n\}$.

3. Для доказательства неинвариантности $\underline{\lambda}_n$ рассмотрим систему $\tilde{A} \in \mathcal{M}^n$, задаваемую равенством $\tilde{A}(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-2}, A(t) + Q(t)]$. Тогда по предыдущему имеем $\lambda_n(\tilde{A}) = 1$. Рассматривая последовательность её возмущений $Q_m$, $m \in \mathbb{N}$, определяемых равенством

$$Q_m(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, -\theta(t-m)Q(t)], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m \in \mathbb{N},$$

и рассуждая, как выше, получим, что $\underline{\lambda}_n(\tilde{A}) \leqslant 0$. Нетрудно убедиться, что система $\tilde{A}$ является правильной и, следовательно, некоторым обобщённо ляпуновским преобразованием приводится к постоянной системе

$$B = \mathrm{diag}[\lambda_1(\tilde{A}), \dots, \lambda_n(\tilde{A})] = \mathrm{diag}[-1, \dots, -1, 1].$$

По лемме 1.8 имеем

$$\underline{\lambda}_n(B) = \lambda_n(B) = 1 < \underline{\lambda}_n(\tilde{A}).$$

4. Наконец, для доказательства неинвариантности $\overline{\lambda}_1$ рассмотрим систему $\tilde{A} \in \mathcal{M}^n$, задаваемую равенством $\tilde{A}(t) = \mathrm{diag}[A(t) + Q(t), \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}]$. Тогда по предыдущему имеем $\lambda_1(\tilde{A}) = -1$. Рассматривая последовательность её возмущений $Q_m$, $m \in \mathbb{N}$, определяемых равенством

$$Q_m(t) = \mathrm{diag}[-\theta(t-m)Q(t), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m \in \mathbb{N},$$

получим, что $\overline{\lambda}_1(\tilde{A}) \geqslant 0$. Как и выше, система $\tilde{A}$ является правильной и, следовательно, некоторым обобщённо ляпуновским преобразованием приводится к постоянной системе $B = \mathrm{diag}[\lambda_1(\tilde{A}), \dots, \lambda_n(\tilde{A})] = \mathrm{diag}[-1, 1, \dots, 1]$. По лемме 1.8 имеем

$$\overline{\lambda}_1(B) = \lambda_1(B) = -1 < \overline{\lambda}_1(\tilde{A}).$$

## 1.7 Сигма-показатели и экспоненциальные показатели Изобова

Ещё Перроном [243, с. 761] (см. также [94, § 1.4]) построен пример линейной системы с ограниченной матричнозначной функцией $A$, показатели Ляпунова которой не инвариантны относительно экспоненциально убывающих возмущений её коэффициентов. С другой стороны, для всякой системы с ограниченной матричнозначной функцией инвариантность показателей Ляпунова имеет место относительно возмущений, убывающих быстрее некоторой (своей для каждой системы) экспоненты [23; 67]. Естественно возникают задачи получения оценок и вычисления точных границ подвижности показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях, а также описания свойств этих границ.

Определим следующие классы экспоненциально убывающих возмущений:

$$\hat{\mathcal{E}}^n_\sigma = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] \leqslant -\sigma\}, \tag{1.23}$$

$$\mathcal{E}^n_\sigma = \{Q \in \mathcal{M}^n : \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |Q(t)| e^{\sigma t} < \infty\}, \tag{1.24}$$

$$\mathcal{E}^n = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] < 0\}. \tag{1.25}$$

Поясним определение класса $\mathcal{E}^n_\sigma$. Он состоит из всех кусочно-непрерывных матричнозначных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, таких, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо неравенство $|Q(t)| \leqslant c_Q \exp(-\sigma t)$, где $c_Q$ — положительная постоянная, зависящая от выбора функции $Q(\cdot)$. Очевидно, $\mathcal{E}^n_\sigma \subset \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma \subset \mathcal{E}^n$.

**Определение 1.3.** Для каждого $\sigma > 0$ определим *верхние сигма-показатели Изобова* [80] системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ равенством

$$\nabla_{\sigma,i}(A) = \sup_{Q\in\hat{\mathcal{E}}^n_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{1.26}$$

В работе [80] в случае, когда коэффициенты системы ограничены, установлена следующая вычислительная формула для показателя $\nabla_{\sigma,n}$:

$$\nabla_{\sigma,n}(A) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\xi_k(\sigma)}{k}, \tag{1.27}$$

где

$$\xi_k(\sigma) = \max_{i<k}\{\ln|X_A(k,i)| + \xi_i(\sigma) - \sigma i\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \xi_0(\sigma) \equiv 0.$$

**Определение 1.4.** Для каждого $\sigma > 0$ определим *нижние сигма-показатели Изобова* [84; 88] системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ равенствами

$$\Delta_{\sigma,i}(A) = \inf_{Q\in\mathcal{E}^n_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{1.28}$$

Отметим, что вычислительные формулы, подобные формуле, полученной в работе [80] для старшего верхнего сигма-показателя Изобова, для нижних сигма-показателей Изобова неизвестны даже для $i = 1$. Это обстоятельство значительно усложняет исследование свойств этих величин.

**Определение 1.5.** *Верхними* и *нижними экспоненциальными показателями Изобова* [84] системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ называются, соответственно, величины

$$\nabla_i(A) = \sup_{Q\in\mathcal{E}^n} \lambda_i(A+Q), \quad \Delta_i(A) = \inf_{Q\in\mathcal{E}^n} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

В работе [84] доказаны формулы для вычисления показателей $\nabla_n(A)$ и $\Delta_1(A)$ через оператор Коши системы $A \in \mathcal{M}^n$:

$$\begin{gathered}\nabla_n(A) = \lim_{\theta\to1+0}\ \varlimsup_{\mathbb{N}\ni m\to+\infty} \theta^{-m}\sum_{j=1}^{m} \ln|X_A(\theta^j,\theta^{j-1})|,\\ \Delta_1(A) = \lim_{\theta\to1+0}\ \varlimsup_{\mathbb{N}\ni m\to+\infty} \theta^{-m}\sum_{j=1}^{m} \ln|X_A^{-1}(\theta^j,\theta^{j-1})|^{-1},\end{gathered} \tag{1.29}$$

а в работе [60] аналогичные формулы получены для остальных верхних экспоненциальных показателей $\nabla_i(A)$, $i \in \mathbb{N}_{n-1}$.

## 1.8 Показатели Боля (генеральные показатели)

Показатели Боля служат для равномерной по начальному моменту оценки роста в экспоненциальной шкале решений линейных дифференциальных систем и траекторий диффеоморфизмов гладкого многообразия.

**Показатели Боля линейной дифференциальной системы.** Всюду ниже условимся считать, что $\inf\varnothing = \infty$.

**Определение 1.6** ([68, гл. 3, § 4, 2]). *Показателем Боля* (*генеральным показателем*), отвечающим нетривиальному подпространству $L \subset \mathbb{R}^n$ начальных значений решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, называется величина

$$\varkappa_g(A, L) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \sup_{\substack{t\geqslant\tau\geqslant 0\\ \xi\in L_*}} |x(t,\xi)| \cdot |x(\tau,\xi)|^{-1} e^{-\lambda(t-\tau)} < \infty\},$$

где $x(\,\cdot\,,\xi)$ — решение системы $A$, удовлетворяющее условию $x(0,\xi) = \xi$.

Иначе говоря, показатель Боля, отвечающий подпространству $L$ начальных значений решений системы $A$, есть наименьшая точная нижняя грань чисел $\lambda$, осуществляющих оценку вида

$$|x(t)| \leqslant C_\lambda |x(\tau)| e^{\lambda(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau \geqslant 0, \tag{1.30}$$

равномерную по всем $t \geqslant \tau \geqslant 0$ и всем решениям $x(\cdot)$ системы $A$, удовлетворяющим условию $x(0) \in L$.

**Определение 1.7** ([147]). Будем называть *условными показателями Боля* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ величины

$$\beta_i(A) = \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \varkappa_g(A, L), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

Напомним ещё следующее

**Определение 1.8.** Скажем, что система (1.1) *условно равномерно экспоненциально устойчива* с индексом $i \in \mathbb{N}_n$, если существуют такие $i$-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ и положительные числа $\alpha$ и $C$, что для всякого решения $x(\cdot)$ этой системы, удовлетворяющего начальному условию $x(0) \in L$, выполнено неравенство

$$|x(t)| \leqslant C|x(\tau)| e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau \geqslant 0.$$

Из приведённых определений следует, что для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ неравенство $\beta_i(A) < 0$ равносильно условной равномерной экспоненциальной устойчивости системы $A$ с индексом $i$.

Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ обозначим через $E_i(A)$ множество начальных значений тех решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, характеристические показатели которых не превосходят $\lambda_i(A)$. Хорошо известно и легко доказывается, что $E_i(A)$ является векторным подпространством $\mathbb{R}^n$ [29, 3.1.1].

**Определение 1.9** (ср. [144])**.** *Относительными показателями Боля* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ будем называть величины

$$\beta^{(i)}(A) = \varkappa_g(A, E_i(A)), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

**Замечание 1.2.** Наше определение отличается от определения в докладе [144], так как мы не требуем ограниченности коэффициентов рассматриваемых систем и, кроме того, в отличие от [144], мы нумеруем показатели в порядке нестрогого возрастания. В случае, когда коэффициенты системы $A$ ограничены, данное определение согласуется (с точностью до порядка нумерации) с определением в докладе [144], если положить в нём $D = \mathbb{R}_+$, $f^t x = t + x$, $x \in D$, $t \in \mathbb{R}$, и $x = 0$.

**Лемма 1.11.** *Условные показатели Боля и относительные показатели Боля являются слабо ляпуновскими инвариантами.*

**Доказательство.** Зафиксируем $i \in \mathbb{N}_n$. Пусть $V \in \mathcal{T}^n$ — слабо ляпуновское преобразование, переводящее систему $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ в систему $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Предположим, что для некоторого подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ и каждого решения $x(\cdot)$ системы $A$, удовлетворяющего условию $x(0) \in L$, выполнено неравенство (1.30). Положим

$$K = \sup\{|V(t)| + |V^{-1}(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Заметим, что если $x(\cdot)$ — решение системы $A$, то $V(\cdot)x(\cdot)$ — решение системы $B$. Следовательно, имеем

$$|y(t)| \leqslant C_\lambda K^2 |y(\tau)| e^{\lambda(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

для всякого решения $y(\cdot)$ системы $B$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) \in V(0)L$. Из сказанного следует, что $\varkappa_g(B, V(0)L) \leqslant \varkappa_g(A, L)$. Так как преобразование $\mathfrak{T}_V$ обратимо, меняя в предыдущих рассуждениях системы $A$ и $B$ местами и рассматривая вместо подпространства $L$ подпространство $V(0)L$, получим обратное неравенство, а вместе с ним и равенство показателей $\varkappa_g(B, V(0)L) = \varkappa_g(A, L)$.

Поскольку $V(0)$ — линейный изоморфизм, то он порождает биекцию $G_i(\mathbb{R}^n) \to G_i(\mathbb{R}^n)$, действующую по правилу $L \mapsto V(0)L$. Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\beta_i(A) = \inf_{L \in \mathbb{R}^n} \varkappa_g(A, L) = \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \varkappa_g(B, V(0)L) = \inf_{N \in G_i(\mathbb{R}^n)} \varkappa_g(B, N) = \beta_i(B).$$

Утверждение для условных показателей Боля установлено.

Утверждение для относительных показателей вытекает из предыдущего и равенства $E_i(B) = V(0)E_i(A)$, поскольку слабо ляпуновское преобразование сохраняет характеристические показатели решений и показатели Ляпунова системы (см. лемму 1.4 и её доказательство). Лемма доказана.

Отметим, что рассматриваемые показатели не являются обобщённо ляпуновскими инвариантами. Рассмотрим следующий

**Пример 1.4.** Определим последовательность $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ равенствами

$$t_{2k+1} = t_{2k} + k + 1, \quad t_{2k+2} = t_{2k+1} + k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t_0 = 0.$$

Зададим теперь функцию $a\colon \mathbb{R}_+ \to \{-1, 1\}$ равенством $a(t) = (-1)^m$ при $t \in [t_m, t_{m+1})$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Положим $A(t) = a(t)E_n$, $t \in \mathbb{R}_+$. Покажем, что у построенной системы все показатели Боля равны единице (а все показатели Ляпунова — нулю). Действительно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим неравенство (1.30) при $t = t_{2k+1}$ и $\tau = t_{2k}$. Поскольку для любого нетривиального решения $x(\cdot)$ системы $A$ имеем $x(t_{2k+1}) = x(t_{2k})e^{k+1}$, то

$$|x(t_{2k})|e^{k+1} \leqslant C_\lambda |x(t_{2k})| e^{\lambda(k+1)},$$

что равносильно неравенству

$$e^{(k+1)(1-\lambda)} \leqslant C_\lambda.$$

Последнее возможно, только если $\lambda \geqslant 1$. Следовательно, для любого нетривиального решения $x(\cdot)$ системы $A$ имеем $\varkappa_g(A, \operatorname{span}(x(0))) \geqslant 1$. С другой стороны, из оценки (1.6) вытекает, что $\varkappa_g(A, \mathbb{R}^n) \leqslant 1$. Таким образом, для любого подпространства $\{0\} \neq L \subset \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\varkappa_g(A, L) = 1$.

Покажем, что преобразование $V(t) = \exp(\int_0^t a(s)\,ds)E_n$, $t \in \mathbb{R}_+$, является обобщённо ляпуновским. Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]$, то справедливо равенство

$$\int_0^t a(s)\,ds = t - t_{2k} \in [0, k+1].$$

Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}]$, то

$$\int_0^t a(s)\,ds = (k+1) - (t - t_{2k+1}) \in [0, k+1].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t}\int_0^t a(s)\,ds \leqslant \frac{k+1}{t_{2k}} = \frac{1}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t a(s)\,ds = 0.$$

Нетрудно видеть, что преобразование $\mathfrak{T}_V$ переводит систему $A$ в систему с нулевой матрицей $O_n$. Последняя, очевидно, имеет нулевые показатели Боля.

**Показатели Боля локального диффеоморфизма гладкого многообразия.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $M$ — связное $n$-мерное $C^1$-многообразие со счётной базой, на котором задана риманова метрика $\delta$ (класса $C^0$).

Обозначим через $S$ множество отображений $M \to M$ класса $C^1$, производная которых невырождена в каждой точке $x \in M$, наделённое $C^1$-компактно-открытой топологией [209, § 2.1]. Напомним, как она определяется.

Пусть $f \in S$ и пусть $(\varphi, U)$, $(\psi, W)$ — карты многообразия $M$. Пусть, далее, $K \subset U$ — такой компакт, что $f(K) \subset W$. Для всякого $\varepsilon > 0$ определим множество (функцию $f$ назовём его центром)

$$\mathcal{K}(f; (\varphi, U), (\psi, W), K, \varepsilon) \tag{1.31}$$

как множество таких $g \in S$, что $g(K) \subset W$ и выполнены неравенства (здесь и всюду ниже норма линейного отображения нормированных пространств определяется стандартным образом — как максимум нормы образа нормированного вектора)

$$\max_{x \in \varphi(K)} |(\psi f \varphi^{-1})(x) - (\psi g \varphi^{-1})(x)| < \varepsilon,$$
$$\max_{x \in \varphi(K)} |(\psi f \varphi^{-1})'(x) - (\psi g \varphi^{-1})'(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку функции $\psi f \varphi^{-1}$ и $\psi g \varphi^{-1}$ определены на открытом множестве $\varphi(U \bigcap g^{-1}(W) \bigcap f^{-1}(W)) \supset \varphi(K)$, производные, фигурирующие в последнем неравенстве, имеют смысл. $C^1$-компактно-открытая топология порождается множествами (1.31), т. е. конечные пересечения множеств указанного вида образуют базу этой топологии.

Через $TM$ будем обозначать многообразие касательных векторов к многообразию $M$, через $T_xM$ — касательное пространство к $M$ в точке $x \in M$, а через $df\colon TM \to TM$ — дифференциал гладкого отображения $f\colon M \to M$. Касательное пространство к $M$ во всякой точке $x \in M$ наделим нормой

$$|\eta| = \sqrt{\delta(\eta, \eta)}, \quad \eta \in T_xM.$$

**Определение 1.10** ([132, формула (3)]). *Показателями Ляпунова* (локального) диффеоморфизма $f \in S$ в точке $x \in M$ будем называть величины

$$\lambda_i(f, x) = \inf_{L \in G_i(T_xM)} \sup_{\zeta \in L} \lambda(f, \zeta), \quad i \in \mathbb{N}_n,$$

где функция $\lambda\colon S\times TM\to\overline{\mathbb{R}}$ определяется равенством [132, формула (4’’’)]

$$\lambda(f,\zeta)=\begin{cases}\varlimsup\limits_{m\to+\infty} m^{-1}\ln|df^m\zeta| & \text{при } |\zeta|\neq 0,\\ -\infty & \text{при } |\zeta|=0.\end{cases} \tag{1.32}$$

**Определение 1.11.** *Показателем Боля* (локального) диффеоморфизма $f\in S$, отвечающим нетривиальному подпространству $L\subset T_xM$, $x\in M$, будем называть величину

$$\varkappa_g(f,L)=\inf\{\lambda\in\mathbb{R}:\sup_{\substack{m\geqslant l\geqslant 0\\ \zeta\in L_*}}|df^m\zeta|\cdot|df^l\zeta|^{-1}e^{-\lambda(m-l)}<\infty\}.$$

**Определение 1.12.** *Условными показателями Боля* (локального) диффеоморфизма $f\in S$ в точке $x\in M$ будем называть величины

$$\beta_i(f,x)=\inf_{L\in G_i(T_xM)}\varkappa_g(f,L),\quad i\in\mathbb{N}_n.$$

Для каждого $i\in\mathbb{N}_n$ обозначим через $E_i(f,x)$ множество

$$\{\zeta\in T_xM:\lambda(f,\zeta)\leqslant\lambda_k(f,x)\}.$$

Как известно, $E_i(f,x)$ — векторное подпространство $T_xM$ [29, 2.3.3].

**Определение 1.13** (ср. [142])**.** Будем называть *относительными показателями Боля* (локального) диффеоморфизма $f\in S$ в точке $x\in M$ величины

$$\beta^{(i)}(f,x)=\varkappa_g(f,E_i(f,x)),\quad i\in\mathbb{N}_n.$$

**Замечание 1.3.** В случае компактного многообразия $M$ введённые величины совпадают с определёнными в [142] и не зависят от выбора римановой метрики на $M$ (поскольку всякие две римановы метрики на компактном многообразии эквивалентны).

## 1.9 Необходимые све́дения из дескриптивных теорий множеств и функций

**Классы Бореля множеств.** Пусть $M$ — топологическое (в частности, метрическое) пространство. Для всякого порядкового [106, § 3, XI; 207, гл. III] числа $\alpha\in[0,\omega_1)$ (здесь и далее $\omega_1$ — первое несчётное порядковое число) определим [106, § 30, II–III] *борелевские* классы $\mathscr{G}_\alpha(M)$ и $\mathscr{F}_\alpha(M)$ подмножеств $M$ при помощи трансфинитной индукции следующим образом:

1) класс $\mathscr{G}_0(M)$, называемый *аддитивным классом* 0, состоит из всех открытых множеств пространства $M$, а класс $\mathscr{F}_0(M)$, называемый *мультипликативным классом* 0, — из их дополнений (т. е. из всех замкнутых множеств пространства $M$);

2) если число $\alpha > 0$ чётно (предельные числа считаются чётными), то элементы класса $\mathscr{G}_\alpha(M)$ представляют собой объединения счётных последовательностей множеств, принадлежащих классам $\mathscr{G}_\xi(M)$, $\xi < \alpha$, и называются множествами *аддитивного класса* $\alpha$, а их дополнения составляют класс $\mathscr{F}_\alpha(M)$ и называются множествами *мультипликативного класса* $\alpha$;
3) если число $\alpha$ нечётно, то элементы класса $\mathscr{G}_\alpha(M)$ представляют собой пересечения счётных последовательностей множеств, принадлежащих классам $\mathscr{G}_\xi(M)$, $\xi < \alpha$, и называются множествами *мультипликативного класса* $\alpha$, а их дополнения составляют класс $\mathscr{F}_\alpha(M)$ и называются множествами *аддитивного класса* $\alpha$.

Элементы класса $\mathscr{F}_\alpha(M) \bigcap \mathscr{G}_\alpha(M)$ называются *двусторонними множествами класса* $\alpha$. Классы с конечными индексами обозначаются также следующим образом:

$$\mathscr{F}(M), \mathscr{F}_\sigma(M), \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M), \mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma}(M), \ldots; \quad \mathscr{G}(M), \mathscr{G}_\delta(M), \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M), \mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}(M), \ldots.$$

В приведённых выше обозначениях борелевских классов символ «$\sigma$» обозначает счётное объединение и символ «$\delta$» — счётное пересечение, а конечная последовательность этих чередующихся символов в индексе показывает в каком порядке (читая слева направо) и сколько раз нужно применить эти операции, отправляясь соответственно от совокупностей $\mathscr{F}(M)$ замкнутых и $\mathscr{G}(M)$ открытых множеств. Для наиболее важных для нас в дальнейшем первых двух борелевских классов получаем: классы $\mathscr{F}_\sigma(M)$ и $\mathscr{G}_\delta(M)$ состоят из множеств, являющихся соответственно счётными объединениями замкнутых и счётными пересечениями открытых множеств, а классы $\mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$ и $\mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$ — из множеств, являющихся соответственно счётными пересечениями $\mathscr{F}_\sigma(M)$-множеств и счётными объединениями $\mathscr{G}_\delta(M)$-множеств (т. е., в конечном итоге, класс $\mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$ состоит из счётных пересечений счётных объединений замкнутых множеств, а класс $\mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$ — из счётных объединений счётных пересечений открытых множеств).

Там, где это не будет вызывать недоразумений, топологическое пространство в обозначениях будем опускать. Кроме того, фразами «$S$ является $\mathscr{K}$-множеством» и «$S$ является множеством типа $\mathscr{K}$» будем выражать тот факт, что множество $S$ принадлежит классу множеств $\mathscr{K}$.

В важнейшем для нас случае метрического пространства справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.12** ([106, § 30, III]). *Если $M$ метрическое пространство, то для любого порядкового числа $\alpha \in [0, \omega_1)$ справедливы включения*

$$\mathscr{F}_\alpha(M) \subset \mathscr{F}_{\alpha+1}(M) \bigcap \mathscr{G}_{\alpha+1}(M), \quad \mathscr{G}_\alpha(M) \subset \mathscr{F}_{\alpha+1}(M) \bigcap \mathscr{G}_{\alpha+1}(M).$$

**Доказательство.** Утверждение вытекает по индукции из того, что каждое открытое множества является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством, а каждое замкнутое множество — $\mathscr{G}_\delta$-множеством [106, § 21, IV]. Лемма доказана.

**Лебеговские множества.** Пусть $M$ — некоторое множество. Для каждого числа $r \in \overline{\mathbb{R}}$ *лебеговские множества* [207, с. 221] $[f > r]$ и $[f \geqslant r]$ функции $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ — это, по определению, прообразы при отображении $f$ промежутков $(r, +\infty]$ и $[r, +\infty]$ соответственно. *Множество уровня* $[f = r]$ есть прообраз одноточечного множества $\{r\}$.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — какие-либо системы подмножеств множества $M$. Будем говорить [207, с. 223–224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathscr{M}, {}^*)$ (классу $({}^*, \mathscr{N})$), или что $f$ есть функция класса $(\mathscr{M}, {}^*)$ (соответственно, класса $({}^*, \mathscr{N})$), если для всякого $r \in \overline{\mathbb{R}}$ справедливо включение $[f > r] \in \mathscr{M}$ (соответственно, включение $[f \geqslant r] \in \mathscr{N}$). Наконец, скажем, что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$, если она одновременно принадлежит классам $(\mathscr{M}, {}^*)$ и $({}^*, \mathscr{N})$.

Для каждого порядкового числа $\alpha \in [0, \omega_1)$ определим класс $\widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha(M)$ *$B$-измеримых функций класса $\alpha$* равенством (предельные числа считаются чётными)

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha(M) = \begin{cases} (\mathscr{G}_\alpha(M), \mathscr{F}_\alpha(M)) & \text{при чётном } \alpha, \\ (\mathscr{F}_\alpha(M), \mathscr{G}_\alpha(M)) & \text{при нечётном } \alpha. \end{cases}$$

Отметим, что класс $\widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha(M)$ содержит функции, принимающие "несобственные" значения $\pm\infty$. Его подкласс, состоящий из функций $M \to \mathbb{R}$, условимся обозначать через $\mathfrak{B}_\alpha(M)$.

В дальнейшем изложении особую роль играют заданные на метрическом пространстве $M$ функции класса $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$, т. е. функции $M \to \overline{\mathbb{R}}$, для которых при любом $r \in \overline{\mathbb{R}}$ прообраз полуинтервала $[r, +\infty]$ является $\mathscr{G}_\delta$-множеством. Заметим, что в определении класса $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$ можно ограничиться рассмотрением $r \in \mathbb{R}$. Действительно, $[f \geqslant -\infty] = M$, а $[f \geqslant +\infty] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [f \geqslant k]$.

Пусть $\mathscr{K}$ — система подмножеств в $M$, являющаяся кольцом (т. е. объединение и пересечение двух множеств из $\mathscr{K}$ принадлежит $\mathscr{K}$). Через $\mathscr{K}_\sigma$ обозначается класс счётных объединений множеств из $\mathscr{K}$, а через $\mathscr{K}_\delta$ — класс счётных пересечений множеств из $\mathscr{K}$. Следующие два утверждения многократно используются в диссертации, мы называем их *первым* и *вторым правилами Юнга-Хаусдорфа* [207, с. 224]:

$1^0$. Пусть $\mathscr{M}$ — кольцо множеств. Если функции $f$ и $g$ принадлежат классу $(\mathscr{M}, {}^*)$, то функции $f + g$, $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ принадлежат классу $(\mathscr{M}_\sigma, {}^*)$. Если каждая из функций последовательности $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ принадлежит классу $(\mathscr{M}, {}^*)$, то функции $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$ и $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$ принадлежат соответственно классам $(^*, \mathscr{M}_\delta)$ и $(\mathscr{M}_\sigma, ^*)$.

$2^0$. Пусть $\mathscr{N}$ — кольцо множеств. Если функции $f$ и $g$ принадлежат классу $(^*, \mathscr{N})$, то функции $f+g$, $\max\{f,g\}$ и $\min\{f,g\}$ принадлежат классу $(^*, \mathscr{N}_\delta)$. Если каждая из функций последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ принадлежит классу $(^*, \mathscr{N})$, то функции $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ и $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ принадлежат соответственно классам $(^*, \mathscr{N}_\delta)$ и $(\mathscr{N}_\sigma, ^*)$.

**Классы Бэра функций.** Пусть $M$ — топологическое пространство. Напомним определение *бэровских классов* [106, § 31, IX]. Сначала введём удобное обозначение. Пусть $F$ — некоторая совокупность функций $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$. Для всякого счётного порядкового числа $\alpha$ определим множество $[F]_\alpha$ по (трансфинитной) индукции следующим образом:

1) $[F]_0$ совпадает с $F$;
2) $[F]_\alpha$ состоит из функций $f\colon M \to \mathbb{R}$, представимых в виде
$$f(\mu) = \lim_{k\to\infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M,$$
где функции $f_k$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат множествам $[F]_\xi$ с номерами $\xi$, меньшими $\alpha$.

Для всякого счётного порядкового числа $\alpha$ определим $\alpha$-й *класс Бэра* $\mathfrak{F}_\alpha(M)$ равенством $\mathfrak{F}_\alpha(M) = [C(M)]_\alpha$, где $C(M)$ — множество всех непрерывных функций $f\colon M \to \mathbb{R}$. Положим $\mathfrak{F}^0_\alpha(M) = \mathfrak{F}_\alpha(M) \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{F}_\xi(M)$. Если $f \in \mathfrak{F}^0_\alpha(M)$, то будем говорить, что функция $f$ имеет *в точности* $\alpha$-й класс Бэра. Для удобства условимся ещё обозначать через $\mathfrak{F}^0_{\omega_1}(M)$ множество функций, не принадлежащих ни одному из классов $\mathfrak{F}_\alpha(M)$, $\alpha \in [0, \omega_1)$.

Классы $\widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$, $\alpha \in [0, \omega_1)$, определяются так же, с той лишь разницей, что всюду вместо функций $M \to \mathbb{R}$ рассматриваются функции $M \to \overline{\mathbb{R}}$. Очевидно включение $\mathfrak{F}_\alpha(M) \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$. Классы $\widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$, $\alpha \in [0, \omega_1)$, мы тоже будем называть классами Бэра.

Дадим другое (равносильное) определение классов $\widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$, $\alpha \in [0, \omega_1)$.

Определим гомеоморфизм $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ равенством
$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1} & \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{sgn} x & \text{при } x = \pm\infty. \end{cases} \tag{1.33}$$

Гомеоморфизм $\Phi$ называется *ограничивающим* [207, § 37, VII] и является, очевидно, возрастающей функцией.

Заметим, что для всяких $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство
$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant |x - y|. \tag{1.34}$$

Нетрудно убедиться, что для любого $\alpha \in [0, \omega_1)$ функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$, если и только если композиция $\Phi \circ f\colon M \to \mathbb{R}$

принадлежит классу $\mathfrak{F}_\alpha(M)$.

Связь между классами Бэра функций и классами Бореля множеств устанавливает следующая теорема Лебега-Хаусдорфа [207, с. 248 – 249].

**Предложение 1.1.** *Пусть $M$ — метрическое пространство. Тогда для всякого порядкового числа $\alpha \in [0, \omega_1)$ класс $\mathfrak{F}_\alpha(M)$ совпадает с классом $\mathfrak{B}_\alpha(M)$, если $\alpha$ конечно, и с классом $\mathfrak{B}_{\alpha+1}(M)$, если $\alpha$ бесконечно.*

Аналогичное соотношение имеет место и между парой классов $\widetilde{\mathfrak{F}}_\alpha(M)$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha(M)$. Для доказательства заметим, что включение $f \in \widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha(M)$ равносильно включению $\Phi \circ f \in \mathfrak{B}_\alpha(M)$. Предложение доказано.

**Суслинские множества.** Дадим теперь определение суслинских множеств [207, § 20]. Через $E$ обозначим множество всех конечных последовательностей натуральных чисел, т. е.

$$E = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^l,$$

а через $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — совокупность функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которые мы отождествляем с бесконечными последовательностями натуральных чисел. Для $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $m \in \mathbb{N}$ через $\varphi|_m$ обозначим сужение отображения $\varphi$ на множество $\mathbb{N}_m$.

Пусть $X$ — топологическое пространство, а $\mathscr{F}(X)$ — совокупность его замкнутых множеств. Любое отображение $O\colon E \to \mathscr{F}(X)$ называется *определяющей системой*, а A-*операцией* на определяющей системе $O$ — множество

$$\mathrm{A}(O) = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} O\left(\varphi|_m\right).$$

Подчеркнём, что в этом определении объединение является континуальным. Множество называется *суслинским множеством*, или A-*множеством*, пространства $X$, если оно может быть получено в результате A-операции на некоторой определяющей системе $O$. Класс суслинских множеств пространства $X$ обозначим $\mathfrak{S}(X)$. Суслинские множества называются также [115; 106, § 39] *аналитическими множествами.*

Далее рассматриваем только интересующие нас случаи $X = \mathbb{R}$ и $X = \overline{\mathbb{R}}$. Из приведённого определения вытекает следующая

**Лемма 1.13.** *Всякое суслинское множество пространства $\overline{\mathbb{R}}$ является объединением суслинского множества пространства $\mathbb{R}$ и некоторого (возможно, пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.*

**Доказательство.** Действительно, если $F \in \mathscr{F}(\overline{\mathbb{R}})$, то $F \bigcap \mathbb{R} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$. Поэтому если отображение $\overline{O}\colon E \to \mathscr{F}(\overline{\mathbb{R}})$ является определяющей системой для множества $S \in \mathfrak{S}(\overline{\mathbb{R}})$, то, задав определяющую систему $O\colon E \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ равенством $O(\nu) = \overline{O}(\nu) \bigcap \mathbb{R}$, $\nu \in E$, получим, что результатом A-операции на системе $O$ будет множество $S \bigcap \mathbb{R}$.

Обратно, зафиксируем множество $D \subset \{-\infty, +\infty\}$. Если $F \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, то множества $(F \bigcap [-k,k]) \bigsqcup D$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат классу $\mathscr{F}(\overline{\mathbb{R}})$. Пусть $O\colon E \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ — определяющая система для множества $S \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$. Положим по определению $O(\varnothing) = \varnothing$ и зададим определяющую систему $\overline{O}\colon E \to \mathscr{F}(\overline{\mathbb{R}})$ равенством:

$$\overline{O}((k,\nu)) = (O(\nu) \bigcap [-k,k]) \bigsqcup D, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \nu \in E.$$

Тогда результатом A-операции на системе $\overline{O}$ является, очевидно, множество $S \bigsqcup D$. Лемма доказана.

В силу установленного соотношения между классами $\mathfrak{S}(\overline{\mathbb{R}})$ и $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ для описания свойств этих классов достаточно описать только свойства класса $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$. Поэтому до конца этого пункта термин «суслинское множество» означает суслинское множество пространства $\mathbb{R}$.

Класс суслинских множеств замкнут относительно счётных объединений и счётных пересечений, но $\sigma$-алгеброй не является. Он содержит в качестве собственного подкласса класс борелевских множеств (теорема М. Я. Суслина [249]), и любое суслинское множество измеримо по Лебегу, т. е. класс суслинских множеств занимает промежуточное положение между классами борелевских и измеримых множеств вещественной прямой. Связь между борелевскими множествами пространства $\mathbb{R}^2$ и суслинскими множествами в $\mathbb{R}$ устанавливает данное М. Я. Суслиным другое их определение: подмножество прямой $\mathbb{R}$ является суслинским, если оно является ортогональной проекцией на $\mathbb{R}$ борелевского множества в $\mathbb{R}^2$.

Приведём ещё два определения суслинских множеств. Через $\mathbb{I}$ обозначим пространство иррациональных чисел с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$. Как доказано Н. Н. Лузиным [236], множество является суслинским, если оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой непрерывной функции $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$. Из этого определения легко вытекает следующее (также принадлежащее Н. Н. Лузину) определение суслинских множеств: множество является суслинским, если оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ первого бэровского класса. В последнем определении первый класс можно заменить на любой другой бэровский класс, кроме нулевого, т. е. непустые суслинские множества суть множества значений, принимаемых бэровскими функциями.

## 1.10 Верхнепредельные функции

Пусть $M$ — топологическое (в частности, метрическое) пространство.

**Определение 1.14.** Будем называть функцию $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ *верхнепредельной*, если существует такая последовательность непрерывных функций

$f_k\colon M\to\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$, что
$$f(\mu)=\varlimsup_{k\to\infty} f_k(\mu),\quad \mu\in M. \tag{1.35}$$

**Лемма 1.14.** *Пусть $M$ — метрическое пространство. Тогда функция $f\colon M\to\overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельной тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:*

1) *функция $f$ представляется как поточечный предел убывающей последовательности функций первого класса Бэра;*
2) *функция $f$ принадлежит классу $({}^*,\mathscr{G}_\delta(M))$.*

**Доказательство.** Равносильность условий 1) и 2) установлена в монографии [207, § 37, 1] (для случая всюду конечной функции $f$; общий случай сводится к этому при помощи ограничивающего гомеоморфизма $\Phi$), а равносильность условия 1) и определения 1.14 вытекает из [230; 251] (см. также [97, замечание 3]). Лемма доказана.

Отметим, что из п. 1 леммы 1.14 следует, что всякая верхнепредельная функция принадлежит второму классу Бэра (это также легко получается и непосредственно из определения 1.14).

Следующая лемма описывает некоторые хорошо известные свойства верхнепредельных функций (см. [207, § 37], где они называются функциями класса $({}^*,\mathscr{G}_\delta)$). Для удобства читателя мы приводим их здесь вместе с доказательствами.

**Лемма 1.15.** *Пусть $M$ — метрическое пространство. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) если $S\in\mathscr{G}_\delta(M)$, то характеристическая функция $\chi_S\colon M\to\{0,1\}$ множества $S$ является верхнепредельной;*

*2) если функция $f\colon M\to[-1,1]$ является верхнепредельной, то тем же свойством обладают функции $\Phi^{-1}\circ f$ и $\alpha f$ для всякого $\alpha>0$;*

*3) если функции $f\colon M\to\mathbb{R}$ и $g\colon M\to\mathbb{R}$ являются верхнепредельными, то тем же свойством обладают функции $f+g$, $\max\{f,g\}$ и $\min\{f,g\}$;*

*4) если функции $f_k\colon M\to\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$, являются верхнепредельными, то тем же свойством обладает и функция $\inf\{f_k : k\in\mathbb{N}\}$;*

*5) если последовательность $(f_k)$ верхнепредельных функций $M\to\mathbb{R}$ сходится равномерно к функции $f$, то функция $f$ также является верхнепредельной.*

**Доказательство.** В силу леммы 1.14 функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ является верхнепредельной тогда и только тогда, когда для любого $r\in\mathbb{R}$ выполнено включение $[f\geqslant r]\in\mathscr{G}_\delta(M)$.

Докажем утверждение 1). Для любого $r\leqslant 0$ множество $[\chi_S\geqslant r]$ совпадает со всем пространством $M$, для $r\in(0,1]$ – с множеством $S\in\mathscr{G}_\delta(M)$, а для $r>1$ пусто. Таким образом, $[\chi_S\geqslant r]\in\mathscr{G}_\delta(M)$ при всех $r\in\mathbb{R}$.

Утверждение 2) вытекает из свойств верхнего предела, утверждения 3) и 4) — из второго правила Юнга-Хаусдорфа, поскольку $(\mathscr{G}_\delta(M))_\delta = \mathscr{G}_\delta(M)$. Для доказательства утверждения 5) установим справедливость равенства

$$f(\mu) = \inf_{k\in\mathbb{N}}(f_k(\mu) + \varepsilon_k) \equiv \tilde{f}(\mu), \quad \mu \in M,$$

где $\varepsilon_k = \sup_{\nu\in M} |f(\nu) - f_k(\nu)|$. Зафиксируем произвольное $\mu \in M$. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств

$$f_k(\mu) + \varepsilon_k \geqslant f_k(\mu) + |f(\mu) - f_k(\mu)| \geqslant f(\mu),$$

откуда, переходя к точной нижней грани по $k \in \mathbb{N}$, получим неравенство $\tilde{f}(\mu) \geqslant f(\mu)$. Переходя в полученном выше неравенстве $f_k(\mu) + \varepsilon_k \geqslant \tilde{f}(\mu)$ к пределу при $k \to \infty$, получим обратное неравенство. Таким образом, функция $f$ совпадает с функцией $\tilde{f}$, а последняя является верхнепредельной в силу утверждения 4). Лемма доказана.

**Лемма 1.16.** *Пусть $M$ метризуемо полной метрикой, а $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ — верхнепредельная функция. Тогда множество точек полунепрерывности сверху функции $f$ является плотным множеством типа $\mathscr{G}_\delta$.*

**Доказательство.** В работе [4, с. 106] доказано, что множество точек полунепрерывности сверху любой верхнепредельной функции $f$ содержит плотное $\mathscr{G}_\delta$-множество. Много лет спустя этот факт был переоткрыт В. М. Миллионщиковым [130, теорема 3] (который, очевидно, не знал о работе Е. Г. Ариньша), но не был оформлен в виде самостоятельного утверждения. Наконец, в работе [99, лемма 2] установлено, что множество точек полунепрерывности сверху любой функции класса $({}^*,\mathscr{G}_\delta)$ (т. е. верхнепредельной функции, см. лемму 1.14) само является $\mathscr{G}_\delta$-множеством. Лемма доказана.

Следующее утверждение установлено В. М. Миллионщиковым (см., например, [136]). Приведём его в нужной нам для дальнейшего форме с соответствующим доказательством.

**Лемма 1.17.** *Для любого $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\lambda_i\colon \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельным.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}_n$. Согласно лемме 1.1 каждый из функционалов $\varphi_i^{kl}\colon \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \to \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$, определяемых равенством (1.10), непрерывен. Применяя второе правило Юнга-Хаусдорфа, получаем, что каждый из функционалов $\psi_i^k\colon \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, задаваемых равенством

$$\psi_i^k(A) = \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_i^{kl}(A), \quad A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n,$$

принадлежит классу $(\mathscr{G}(\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C),{}^*)$. Теперь применяя первое правило Юнга-

Хаусдорфа, получаем, что функционал $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$, действующий по правилу

$$A \mapsto \inf_{k\in\mathbb{N}} \psi_i^k(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

принадлежит классу $(^*, \mathscr{G}_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C))$. Требуемое утверждение следует теперь из леммы 1.14. Лемма доказана.

**Следствие 1.1.** *Для любого $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\lambda_i \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_U \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельным.*

**Доказательство.** Из очевидного неравенства (см. равенства (1.2) и (1.3))

$$\rho_C(A,B) \leqslant \rho_U(A,B), \quad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

следует, что всякий функционал, непрерывный в компактно-открытой топологии, непрерывен и в равномерной топологии. Требуемое вытекает теперь из леммы 1.17. Следствие доказано.

## 1.11 Обзор литературы по теме диссертации

Важным направлением качественной теории дифференциальных уравнений, основы которой были заложены ещё в работах А. Пуанкаре [161] – [163] и А. М. Ляпунова [116], является изучение характеристических показателей, введённых А. М. Ляпуновым [116] в связи с исследованием устойчивости. Вопрос о характере зависимости показателей Ляпунова, а также других асимптотических характеристик дифференциальных систем, от их правых частей занимает центральное место в современной теории показателей Ляпунова.

**Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейной системы при возмущениях её коэффициентов.**

О. Перрон в своей пионерской работе [243] установил, что при $n \geqslant 2$ каждый из показателей Ляпунова $\lambda_i$, $i \in \mathbb{N}_n$, рассматриваемый как функционал на пространстве $\mathcal{M}^n_U$, не является непрерывным. Он построил пример таких диагональной системы $A \in C\mathcal{M}^2$ и её возмущения $Q \in \mathcal{E}^2$, что старший и младший показатели Ляпунова возмущённой системы $A + Q$ строго больше соответствующих показателей Ляпунова исходной системы.

В дальнейшем пример Перрона усиливался многими авторами в смысле ужесточения требований к исходной системе. Так, подобные примеры были построены К. П. Персидским [158], [159, с. 147 – 148] (возмущения в этих примерах убывают к нулю степенным образом, но они обладают некоторыми специальными свойствами, отсутствующими в примерах Перрона). В работах [51; 52] Р. Э. Виноград построил пример правильной системы (система, построенная Перроном, не является правильной), старший показатель которой совершает скачок вверх при некотором бесконечно малом возмущении её коэффициентов, а в работе [53] — пример правильной системы, у которой старший показатель совершает скачок вверх, а младший — вниз при сколь угодно малых возмущениях. Возмущения в работах [51–53] не являются экспоненциально убывающими, поскольку, в силу теоремы Богданова – Гробмана [23; 67] экспоненциально убывающие возмущения матрицы коэффициентов не изменяют показателей Ляпунова правильных систем. Весьма тонкий пример построен В. М. Миллионщиковым в работе [124]: существует двумерная статистически правильная система (статистически правильная система является правильной, но не наоборот), у которой старший показатель совершает скачок вниз, а младший — вверх при сколь угодно малых (фактически — при бесконечно малых) возмущениях её матрицы коэффициентов (в противоположных направлениях скачки показателей невозможны [125]). А. В. Липницким [110] построен довольно изощрённый пример несколько другого рода: система с почти периодическими коэффициентами, старший показатель Ляпунова которой совершает скачок вверх при экспоненциально убывающем возмущении.

Перечисленные выше примеры демонстрируют эффект резкого изменения характера поведения или асимптотики решений системы при сколь угодно малых (даже экспоненциально убывающих на бесконечности) возмущениях её матрицы коэффициентов. Отсюда естественно возникает задача вычисления точных границ подвижности каждого из показателей Ляпунова под действием возмущений заданного класса. Первые исследования в этом направлении касались равномерно малых возмущений, т. е. вычисления максимальных и минимальных показателей.

Р. Э. Виноград в своих основополагающих работах [57; 58] ввёл так называемые верхний $\Omega(A)$ и младший $\omega(A)$ центральные показатели системы $A \in \mathcal{M}^n$, вычисляемые по матрице Коши системы $A$ (формально, Р. Э. Виноградом в [57] был определён не младший центральный показатель, а аналогичная, но несколько другая характеристика — нижний центральный показатель) и доказал неравенства $\overline{\lambda}_n(A) \leqslant \Omega(A)$ и $\underline{\lambda}_1(A) \geqslant \omega(A)$. Им же установлено [57; 29, с. 168 – 180; 59], что эти оценки достижимы на любой диагональной системе и любой треугольной системе с неположительными внедиагональными элементами. То, что эти оценки достижимы для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$, установлено В. М. Миллионщиковым [126] с помощью открытого им метода поворотов (он же уточнил определение младшего центрального показателя).

Основываясь на этих результатах и результатах работ [129] и [30] (о их содержании будет сказано ниже), И. Н. Сергеев [173] (см. также [176]) получил для $n \geqslant 2$ формулы вычисления величин $\overline{\lambda}_i(A)$, $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, и тем самым критерий полунепрерывности сверху отдельно взятого показателя Ляпунова. Кроме того И. Н. Сергеевым доказано [173; 176], что максимальный $i$-й показатель $\overline{\lambda}_i(A)$ совпадает с верхней границей подвижности $i$-ого показателя Ляпунова при бесконечно малых возмущениях, и что аналогичное утверждение справедливо для младшего минимального показателя $\underline{\lambda}_1(A)(=\omega(A))$.

Отметим ещё недавние работы [225; 239], в которых определён и исследован аналог центрального показателя для линейной системы разностных уравнений.

Минимальные показатели (за исключением младшего) имеют существенно более сложную природу и изучены значительно меньше: Н. А. Изобовым [83] получена формула вычисления $\underline{\lambda}_2$ для $n = 2$, а И. Н. Сергеевым — формулы вычисления $\underline{\lambda}_3$ для $n = 3$ [191] и $\underline{\lambda}_2$ для любого $n \geqslant 2$ [189].

Опишем теперь наиболее существенные результаты для остальных классов возмущений. В работе Н. А. Изобова [80] получена формула вычисления точной верхней границы старшего показателя Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^n$ при возмущениях из класса $\mathcal{E}^n_\sigma$, т. е. старшего верхнего сигма-показателя $\nabla_{n,\sigma}(A)$. С помощью этой формулы в работе Н.А. Изобова и Е.А. Барабанова [87] получено полное описание класса функций $\sigma \mapsto \nabla_{n,\sigma}(A)$, представимых старшими верхними сигма-показателями систем из $\mathcal{M}^n$. В работе [84] Н. А. Изобовым был получен принципиально важный результат: им найдены формулы вычисления по матрице Коши системы $A \in \mathcal{M}^n$ точных границ подвижности старшего показателя Ляпунова вверх и младшего вниз при возмущениях из класса $\mathcal{E}^n$, т. е. её старшего верхнего $\nabla_n(A)$ и младшего нижнего $\Delta_1(A)$ экспоненциальных показателей (см. формулы (1.29)) — и доказано [85], что отрицательность старшего верхнего экспоненциального показателя $\nabla_n(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ равносильна её сильной экспоненциальной устойчивости в классе нелинейных возмущений высшего порядка малости. Совсем недавно А. С. Войделевичем в работе [60] получены формулы для остальных верхних экспоненциальных показателей $\nabla_i(A)$, $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, системы $A \in \mathcal{M}^n$. В работе [223] получена формула вычисления сигма-показателя линейной системы разностных уравнений по её матрице перехода, а в работе [224] аналогичные формулы установлены для старшего верхнего и младшего нижнего экспоненциальных показателей.

В третьей главе диссертации [6] (результаты этой главы опубликованы только в автореферате) Е. А. Барабанов для каждой кусочно-непрерывной функции $\Theta(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, такой, что $\Theta(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$, и числа $\sigma > 0$ рассмотрел класс $\mathfrak{M}^n_\sigma[\Theta]$ кусочно-непрерывных матричнозначных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке $|Q(t)| \leqslant c_Q \exp\bigl(-\sigma\Theta(t)\bigr)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, где $c_Q$ — постоянная (своя для каждой функции $Q(\cdot)$), и, развивая технику работ [80] и [87], получил алгоритмы вычисления по матрице Коши системы $A \in \mathcal{M}^n$ точных границ подвижности старшего вверх $\Gamma^\sigma_\Theta(A)$ и младшего вниз $\gamma^\sigma_\Theta(A)$ показателей Ляпунова при возмущениях из класса $\mathfrak{M}^n_\sigma[\Theta]$ (для последнего — при дополнительном предположении $t^{-1}\Theta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$) и при условии $\dot{\Theta}(t) \downarrow 0$ при $t \to +\infty$ дал полное описание их как функций переменной $\sigma > 0$. Кроме того, там же получены аналогичные формулам вычисления центральных и экспоненциальных показателей формулы вычисления точных границ подвижности старшего вверх $\Gamma^0_\Theta(A)$ и младшего вниз $\gamma^0_\Theta(A)$ показателей Ляпунова при возмущениях из класса $\mathfrak{M}^n_0[\Theta] \equiv \bigcup\limits_{\sigma>0} \mathfrak{M}^n_\sigma[\Theta]$, справедливые для любой функции $\Theta(\cdot)$, такой, что $\Theta(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$. В работе Е. А. Барабанова и О. Г. Вишневской [10] точные крайние границы подвижности показателей Ляпунова $A \in \mathcal{M}^n$ вычислены при интегрально ограниченных на полуоси возмущениях её коэффициентов. В частности, в [10] получен следующий весьма неожиданный результат: точные границы изменения показателей Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^n$ при возмущениях $Q(\cdot)$, удовлетворяющих условию $\int_0^{+\infty} |Q(\tau)|\, d\tau < +\infty$, совпадают с границами их изменения при возмущениях из класса $\mathfrak{M}^n_1[\ln t]$, т. е. при возмущениях $Q(\cdot)$, для которых $|Q(t)| \leqslant c_Q(t+1)^{-1}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ (при этом для последних $\int_0^{+\infty} |Q(\tau)|\, d\tau$, вообще говоря, расходится).

Результаты работ [126], [80], [84], [6] и [10] обобщались в различных направлениях Е. К. Макаровым, И. В. Марченко и Н. В. Кожуренко (Семериковой) [103; 104; 121–123].

Отметим, что все результаты о границах подвижности показателей Ляпунова, упомянутые выше, относятся к случаю, когда исходная система имеет ограниченные на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициенты. Для систем с неограниченными коэффициентами подобные формулы неизвестны. В работе [213] показано, что для системы с неограниченными коэффициентами (в том числе, при $n = 1$) значение верхнего центрального показателя $\Omega(A)$ на системе $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, вообще говоря, не служит оценкой сверху для её показателя Ляпунова, не говоря уже о возмущённых системах.

**Множества точек непрерывности и полунепрерывности показателей Ляпунова на пространстве $\mathcal{M}^n_U$.**

К задаче вычисления точных границ подвижности показателей Ляпунова при равномерно малых возмущениях коэффициентов тесно примыкают задачи описания точек непрерывности, а также точек полунепрерывности сверху и точек полунепрерывности снизу каждого из функционалов $\lambda_i \colon \mathcal{M}^n_U \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}_n$, а в случае непрерывности — и наборов этих функционалов. Полностью эти задачи не решены до сих пор. Как сказано выше, для систем с ограниченными коэффициентами формулы вычисления всех максимальных показателей известны, поэтому задача описания точек полунепрерывности сверху каждого отдельного показателя Ляпунова решена, то же справедливо по отношению к точкам полунепрерывности снизу в тех случаях, для которых формулы вычисления минимальных показателей получены.

Сосредоточимся на задаче нахождения условий непрерывности (или, как говорят, устойчивости при малых возмущениях) всех показателей Ляпунова в точке $A \in \mathcal{M}^n$, которая восходит к работе [243]. В ней О. Перроном доказано, что показатели Ляпунова диагональной системы с равномерно отделёнными друг от друга диагональными коэффициентами инварианты относительно бесконечно малых возмущений. Этой фундаментальной работе предшествовала его работа [241; 242], в которой он, в частности, доказал, что показатели Ляпунова системы с постоянными коэффициентами инварианты относительно бесконечно малых возмущений (эта теорема в другой форме была известна ещё А. Пуанкаре [245]). Следующий шаг в решении рассматриваемой задачи был сделан К. П. Персидским [158; 159, с. 116–133], который доказал устойчивость показателей Ляпунова для одного класса систем (точное его описание довольно громоздко), содержащего, в частности, системы с постоянными коэффициентами и треугольные системы, диагональные элементы которых стремятся на бесконечности к постоянным.

Затем Б. Ф. Быловым [25] было дано принципиально важное определение интегрально разделённой диагональной системы и доказано, что показатели Ляпунова диагональной правильной интегрально разделённой системы устойчивы при малых возмущениях её матрицы коэффициентов. Позднее Р. Э. Виноград показал [54], что требование правильности в этом утверждении можно опустить. Для общих (не обязательно диагональных) систем понятие интегральной разделённости ввёл Дж. Лилло [235]. Современное, наиболее полно отвечающее существу рассматриваемых вопросов, определение систем с интегральной разделённостью решений дано Б. Ф. Быловым в работе [26], в которой он также доказал ляпуновскую эквивалентность таких систем диагональным системам Перрона (т. е. системам с разделённой диагональю), а тем самым — и устойчивость показателей Ляпунова таких систем при малых возмущениях их матриц коэффициентов. Затем Р. Э. Виноград в докторской диссертации [55; 56] и Б. Ф. Былов в работах [27; 28] доказали общую теорему о геометрическом расположении и оценке роста решений систем с малыми возмущениями, из которой вытекали достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова блочно-треугольной системы с интегрально разделёнными блоками. В дальнейшем свойства систем с интегральной разделённостью изучались в целом ряде работ, среди которых отметим [31; 128; 129; 173; 176; 240]. В недавней работе [220] понятие интегральной разделённости (называемое в ней экспоненциальной разделённостью) рассмотрено применительно к системам с неограниченными коэффициентами.

Метод поворотов позволил решить ряд задач, которые до его изобретения В. М. Миллионщиковым [126; 128] представлялись неприступными. В частности, с использованием этого метода было установлено, что условия Былова – Винограда [27; 28; 55; 56] устойчивости всех показателей Ляпунова при малых возмущениях матрицы коэффициентов являются не только достаточными, но и необходимыми. Это было доказано независимо В. М. Миллионщиковым [129] и Б. Ф. Быловым и Н. А. Изобовым [31]. Таким образом, задача Перрона описания точек непрерывности в равномерной топологии спектра показателей Ляпунова получила полное решение для класса $\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными на полуоси коэффициентами.

Отметим ещё работы И. Н. Сергеева [173; 176], в которых им получен критерий грубой непрерывности первых $k$ ($k \in \mathbb{N}_n$) показателей Ляпунова в точке $A \in \mathcal{M}^n_U$ (грубая непрерывность в точке есть непрерывность в некоторой её окрестности), а также необходимое условие грубой непрерывности отдельно взятого показателя. В работе [174] для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ И. Н. Сергеев описал открытое ядро множества точек непрерывности функционала $\lambda_i \colon \mathcal{M}^n_U \to \mathbb{R}$.

**Множества точек полунепрерывности показателей Ляпунова непрерывных параметрических семейств.**

В предыдущем пункте рассматривалась исключительно равномерная топология на пространстве систем, поскольку функционалы $\lambda_i \colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ не имеют точек полунепрерывности. Совсем иначе обстоит дело в случае параметрических семейств (1.16) линейных дифференциальных систем.

Пусть $M$ — метрическое пространство. В работе [138] В. М. Миллионщиков доказал, что если $M$ полно, то для любых $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_n$ и непрерывного семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ функция $\lambda_i(\cdot\,; A) \colon M \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху в каждой точке некоторого плотного $\mathscr{G}_\delta$-множества. Другими словами, полунепрерывность сверху показателей Ляпунова непрерывного семейства типична по Бэру. Как установил А. Н. Ветохин [43; 45], множество точек полунепрерывности снизу каждого из показателей Ляпунова непрерывного семейства $A \in \mathcal{C}^n(M)$ для полного пространства параметров $M$ может оказаться пустым (пространство $M$ в работе [43] — канторово совершенное множество, а в работе [45] — отрезок $[0, 1]$).

В. М. Миллионщиковым получен [154; 155] следующий результат: если отображение $A \colon \mathbb{R}_+ \times D \to \operatorname{End} \mathbb{C}^n$ непрерывно и при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ аналитично по $\mu$ в области $D \subset \mathbb{C}$, а функция $\mu \mapsto \|A(\cdot, \mu)\|$ локально ограничена в $D$, то старший показатель Ляпунова семейства (1.16) полунепрерывен сверху в каждой точке некоторого $\mathscr{G}_\delta$-множества полной меры, а его сужение на некоторое подмножество полной меры непрерывно. Для семейств

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.36}$$

с параметром-множителем и ограниченной непрерывной матрицей коэффициентов первый из этих результатов, как установил М. И. Рахимбердиев [168], также имеет место, но второй из них, как показано А. В. Липницким [112], вообще говоря, нет.

Задача полного описания множества точек полунепрерывности снизу (для произвольного пространства $M$) и множества точек полунепрерывности сверху (для полного пространства $M$) показателей Ляпунова семейств из классов $\mathcal{C}^n(M)$ и $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ решена в работе М. В. Карпука [99]. Отметим, что в этой работе (как и в работах [97; 100]) рассматривается более общая ситуация — показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения; параметрические семейства систем являются её частным случаем. Отметим, что указанные описания получены М. В. Карпуком из общих теорем о множествах точек полунепрерывности функций класса $(^*, \mathscr{G}_\delta)$, установленных им в той же работе. Кроме того, в [99] (при тех же предположениях относительно пространства $M$) описаны $n$-наборы множеств точек полунепрерывности сверху и множеств точек полунепрерывности снизу всех показателей Ляпунова семейств из классов $\mathcal{C}^n(M)$ и $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$.

Из примеров Перрона следует, что даже если наложить на семейство (1.16) более жёсткое требование непрерывности в равномерной топологии, т. е. потребовать, чтобы $A \in \mathcal{U}^n(M)$, то показатели Ляпунова всё равно могут быть не полунепрерывными сверху функциями параметра. Тем не менее, в силу приведённого выше результата В. М. Миллионщикова [138] для полного пространства параметров $M$ полунепрерывность сверху показателей Ляпунова является типичной по Бэру. В работе [47] показано, что для $M = [0, 1]$ множество точек полунепрерывности снизу любого показателя Ляпунова может оказаться пустым и для семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$. До недавнего времени полное описание множества точек полунепрерывности сверху и множества точек полунепрерывности снизу каждого из показателей Ляпунова семейств, принадлежащих классам $\mathcal{U}^n(M)$ и $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ было неизвестно.

**Ляпуновские инварианты в равномерной и компактно-открытой топологиях с точки зрения классификации Бэра разрывных функций.**

В. М. Миллионщиковым [130] доказано, что каждый из показателей Ляпунова $\lambda_i$, $i \in \mathbb{N}_n$, рассматриваемый как функционал на пространстве $\mathcal{M}^n_C$, представляется как предел убывающей последовательности функций первого класса Бэра и, следовательно, принадлежит второму классу Бэра (для пространства $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ соответствующий результат установлен в работе [138]). Отсюда немедленно следует аналогичное утверждение для пространства $\mathcal{M}^n_U$. М. И. Рахимбердиев показал, что указанный номер класса является наименьшим для обеих рассматриваемых топологий: в работе [166] для всяких $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ построен пример такого семейства $A \in \mathcal{BU}^n([0, 1])$, что функция $\lambda_i(\cdot\,; A)$ всюду разрывна и, следовательно [207, § 38, 4], не принадлежит первому классу Бэра. Тогда этому классу тем более не принадлежит функционал $\lambda_i \colon \mathcal{M}^n_U \to \mathbb{R}$. Для $n = 1$ функционал $\lambda_n \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_U \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывен (т. е. принадлежит нулевому классу Бэра), а функционал $\lambda_n \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ (как и его сужение на подпространство $\mathcal{M}^n_C$ систем с ограниченными коэффициентами) принадлежит в точности второму классу Бэра.

В [42] А. Н. Ветохиным доказано, что сужение каждого из функционалов $\lambda_i\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$, на множество правильных систем не является полунепрерывным в равномерной топологии, а то же сужение в компактно-открытой топологии принадлежит в точности первому классу Бэра.

Типичные свойства показателей Ляпунова, рассматриваемых как функционалы на пространстве линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с компактно-открытой топологией, исследовались Э. Гонсалесом [66].

Фактически В. М. Миллионщиковым в работе [138] установлено (хотя и не отмечено), что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\lambda_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $({}^*,\mathscr{G}_\delta)$. Этот результат усилен А. Н. Ветохиным в работах [40; 41], доказавшим, что для $n \geqslant 2$ всякое лебеговское множество $[\lambda_i \geqslant r]$, $i \in \mathbb{N}_n$, $r \in \mathbb{R}$, является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$ и не является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ в каждом из пространств $\mathcal{M}^n_C$ и $\mathcal{M}^n_U$, а всякое лебеговское множество $[\lambda_i > r]$, $i \in \mathbb{N}_n$, $r \in \mathbb{R}$, является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ и не является множеством типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ в указанных пространствах. Также он установил, что всякое множество уровня $[\lambda_i = r]$, $i \in \mathbb{N}_n$, $r \in \mathbb{R}$, является множеством типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ в тех же пространствах. В работе [46] А. Н. Ветохин рассмотрел функции $d^\alpha_k\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{N}_n \bigsqcup\{0\}$ и $D^\alpha_k\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{N}_n \bigsqcup\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, задаваемые равенствами

$$d^\alpha_k(A) = \dim\{x \in S(A) : \lambda[x] < \alpha\}, \quad D^\alpha_k(A) = \dim\{x \in S(A) : \lambda[x] \leqslant \alpha\},$$

и показал, что первая из них принадлежит в точности второму классу Бэра как на пространстве $\mathcal{M}^n_C$, так и на пространстве $\mathcal{M}^n_U$, а вторая — в точности третьему классу на тех же пространствах.

И. Н. Сергеев определил свойство остаточности функционала, присущее всем ляпуновским инвариантам и доказал [175], что если остаточный функционал полунепрерывен на пространстве $\mathcal{M}^n_U$, то он инвариантен относительно бесконечно малых возмущений. Как показал А. Н. Ветохин в работе [38], то же справедливо и для остаточных функционалов, принадлежащих первому классу Бэра на пространстве $C\mathcal{M}^n_U$. В той же работе А. Н. Ветохиным доказано, что остаточные функционалы, принадлежащие первому классу Бэра на пространстве $C\mathcal{M}^n_C$, обязаны быть тождественно постоянными. Эти утверждения дают, таким образом, достаточные условия не принадлежности остаточного функционала первому классу Бэра на пространствах $C\mathcal{M}^n_U$ и $C\mathcal{M}^n_C$ соответственно.

Из указанного признака Ветохина для пространства $\mathcal{M}^n_U$, примера Перрона [243] и теоремы Миллионщикова [130] о классе Бэра показателей Ляпунова получается другое доказательство теоремы Рахимбердиева [166] о принадлежности показателей Ляпунова в точности второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_U^n$ при $n \geqslant 2$.

В. М. Миллионщиков поставил [148] задачу о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит максимальный $i$-й ($i \in \mathbb{N}_n$) показатель $\overline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ непрерывного семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$, где $M$ — топологическое пространство. Им же было показано [149], что при выполнении некоторого дополнительного условия на отображение $A(\cdot,\cdot)$ (которому, в частности, удовлетворяют все отображения, ограниченные по $\mu \in M$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$) функция $\overline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ принадлежит второму классу Бэра. То, что функционал $\overline{\lambda}_i\colon C\mathcal{M}_C^n \to \mathbb{R}$ (который можно рассматривать как максимальный $i$-й показатель семейства $A(t,\mu) = \mu(t)$, $\mu \in C\mathcal{M}_C^n$, $t \in \mathbb{R}_+$) не принадлежит первому классу Бэра, установлено А. Н. Ветохиным [38] с помощью указанного выше признака непринадлежности остаточного функционала первому классу Бэра. И. Н. Сергеевым доказано [194], что для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\overline{\lambda}_i\colon \mathcal{M}_C^n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра, что решает задачу В. М. Миллионщикова для семейств из класса $\mathcal{C}^n(M)$, т. е. таких, которые при каждом значении параметра $\mu$ задают систему с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Задача об оценке сверху номера бэровского класса максимальных показателей для произвольных топологического пространства $M$ и семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ до недавнего времени оставалась нерешённой.

Ещё более сложной оказалась также поставленная В. М. Миллионщиковым [152] задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит минимальный $i$-й ($i \in \mathbb{N}_n$) показатель непрерывного семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$, где $M$ — топологическое пространство. При $n = 1$ минимальный показатель $\underline{\lambda}_1$ совпадает с показателем Ляпунова $\lambda_1$ и по этой причине принадлежит в точности второму классу Бэра на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^1$. Для каждых $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ А. Н. Ветохиным [39] было построено непрерывное ограниченное отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, для которого функция $\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ не принадлежат второму классу Бэра.

Таким образом, при $n \geqslant 2$ минимальные показатели $\underline{\lambda}_i\colon \mathcal{M}_C^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}_n$, принадлежат не ниже чем третьему классу Бэра. Из результатов Р. Э. Винограда [57], [58] и В. М. Миллионщикова [126], вследствие установленной ими формулы вычисления величины $\underline{\lambda}_1(A)$ $(\equiv \omega(A))$ по матрице Коши системы $A$, следует, что младший минимальный показатель $\underline{\lambda}_1$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$, $n \geqslant 2$, а значит, в силу цитированного выше результата [39] он принадлежит в точности третьему классу Бэра на этом пространстве. И. Н. Сергеевым [181; 190] была установлена принадлежность величин $\underline{\lambda}_n$ при $n = 3$ и $\underline{\lambda}_2$ для произвольного $n$ третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$ — это доказано на основании полученных им формул вычисления этих величин в точке $A$ по матрице Коши системы $A$. То, что старший минимальный показатель $\underline{\lambda}_n$ при любом $n \geqslant 2$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$ установлено В. В. Быковым [24]. Наконец, в [171] и [252] Е. Е. Саловым доказано, что для любых $n \geqslant 2$ и $i \in \in \mathbb{N}_{n-1}$ минимальный показатель $\underline{\lambda}_i \colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ принадлежит третьему классу Бэра, а значит, в силу результата А. Н. Ветохина [39] — в точности третьему классу.

В. Г. Агафонов установил [1], что старший верхний экспоненциальный показатель Изобова $\nabla_n$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_U$ и принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. А. Н. Ветохин уточнил [44] эти результаты, показав, что при $n \geqslant 2$ старший верхний экспоненциальный показатель Изобова не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. Таким образом, функционал $\nabla_n \colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ принадлежит в точности третьему классу Бэра. Для остальных верхних экспоненциальных показателей Изобова класс Бэра до последнего времени был неизвестен. В той же работе [44] А. Н. Ветохиным доказано, что для каждого $\sigma > 0$ старший верхний сигма-показатель Изобова $\nabla_{n,\sigma}$ принадлежит в точности второму классу Бэра на каждом из пространств $\mathcal{M}^n_C$ и $\mathcal{M}^n_U$. Более того, в доказательстве теоремы указано, что рассматриваемый показатель является пределом невозрастающей последовательности функций первого класса Бэра, т. е. является верхнепредельным. Для остальных верхних сигма-показателей Изобова класс Бэра до последнего времени не был известен.

В. М. Миллонщиков установил [150; 153], что младший нижний экспоненциальный показатель Изобова $\Delta_1$ на пространстве $\mathcal{M}^n_C$ принадлежит второму классу Бэра. В. В. Быков показал, что старший нижний экспоненциальный показатель Изобова $\Delta_n$ [270] и для каждого $\sigma > 0$ старший нижний сигма-показатель Изобова $\Delta_{n,\sigma}$ [269] также обладают этим свойством, а Е. Е. Салов обобщил [172] этот результат на остальные нижние экспоненциальные показатели и сигма-показатели Изобова и явно указал, что все эти функционалы являются верхнепредельными.

Отметим, что все результаты о границах подвижности показателей, процитированные в этом разделе, касаются исключительно систем с ограниченными коэффициентами. До недавнего времени не было почти никаких результатов в этом направлении, относящихся к системам с неограниченными коэффициентами (из известных нам исключений — работа [149]), для которых, как сказано выше, не известны формулы вычисления максимальных и минимальных показателей. В частности, оценка сверху номера бэровского класса какого-либо из минимальных показателей в наиболее общей ситуации — для непрерывного семейства систем с необязательно ограниченными коэффициентами или, что равносильно, на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ всех систем с кусочно-непрерывными коэффициентами — не найдена до сих пор.

Фундаментальное понятие показателя Боля (генерального показателя) было введено П. Болем в работе [221] и независимо К. П. Персидским [157] (подробнее см. [68, с. 211–212]), его также называют особым показателем [29, с. 116–117]. Показатель Боля можно рассматривать для произвольной совокупности решений системы; для линейной системы естественно рассматривать показатель Боля, отвечающий тому или иному линейному подпространству пространства её решений (или их начальных значений). В. М. Миллионщиков определил для каждой линейной системы два набора показателей Боля — условные [147] и относительные [144]; и те, и другие являются слабо ляпуновскими инвариантами. В. М. Миллионщиков установил [147], что все условные показатели Боля принадлежат второму классу Бэра на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$. А. Н. Ветохин доказал [33], что все относительные показатели Боля, кроме старшего, не принадлежат второму классу Бэра на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$. До недавнего времени оценка сверху для номера бэровского класса относительных показателей Боля (кроме старшего) оставалась неизвестна.

Результаты о бэровской классификации других разновидностей показателей Боля (также предложенных В. М. Миллионщиковым) — т. н. вспомогательных и экстраординарных показателей Боля — получены К. Е. Ширяевым в работах [211; 212] и уточнены А. Н. Ветохиным [36].

Показатель Боля, отвечающий одномерному подпространству, порождённому данным нетривиальным решением линейной системы, называется его равномерным показателем. Если система имеет ограниченные коэффициенты, то равномерный показатель любого его нетривиального решения $x(\cdot)$ конечен и вычисляется по формуле

$$\beta[x] = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{|x(t)|}{|x(\tau)|}.$$

Если зафиксировать систему $A \in \mathcal{M}^n$, то равномерный показатель можно рассматривать как функцию $\beta^A\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$, определённую на множестве начальных условий. В работе [9] получено полное описание класса функций $\{\beta^A : A \in \mathcal{M}^n\}$, а именно: функция $\mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда она является ограниченной, принадлежит классу $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$ и удовлетворяет равенству $\beta(\alpha) = \beta(r\alpha)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}^n_*$ и $r \in \mathbb{R}_*$.

Старший показатель Боля $\beta_n$ полунепрерывен сверху [68, теорема 4.6] на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$. В. М. Миллионщиков показал [127], что его сужение на подпространство $\mathcal{M}^n_U$ не является полунепрерывным снизу. Остальные условные показатели Боля $\beta_i$, $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, уже не являются полунепрерывными сверху на пространстве $\mathcal{M}^n_U$. В докладе [145] В. М. Миллионщиковым поставлена задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежат минимальные полунепрерывные сверху мажоранты $\overline{\beta}_i$ этих показателей в равномерной топологии как функции параметра, от которого непрерывно зависят коэффициенты системы. До последнего времени оценка сверху для номера бэровского класса этих мажорант была неизвестна (оценка снизу вытекает из признака Ветохина [38]).

**Показатели Ляпунова непрерывных параметрических семейств.** Рядом авторов исследовался вопрос о том, что представляют собой с точки зрения классификации Бэра показатели Ляпунова семейств линейных систем, отвечающих линейным дифференциальным уравнениям. Так, М. И. Рахимбердиевым и А. М. Дауылбаевым построено [167] семейство линейных уравнений второго порядка $\ddot{x} = a(t, \mu)x$ с непрерывным коэффициентом $a\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, показатели Ляпунова которого принадлежат в точности второму классу Бэра. На общие уравнения $n$-ого порядка ($n \geqslant 2$) этот результат перенесён А. О. Султанбековой [206]. М. И. Рахимбердиевым и А. О. Султанбековой [169] доказано существование уравнений второго порядка вида $\ddot{x} = \mu a(t)x$ с непрерывным и ограниченным на полуоси коэффициентом $a(\cdot)$, показатели Ляпунова которых как функции параметра $\mu \in \mathbb{R}$ принадлежат в точности второму классу Бэра (см. также работы А. О. Султанбековой [204; 205], в которых этот результат перенесён на общие уравнения второго порядка с линейной и аффинной зависимостью коэффициентов от вещественного параметра $\mu$).

Ещё отметим работу А. В. Липницкого [111], в которой установлена разрывность старших показателей Боля и Ляпунова для почти периодических линейных систем, аффинно зависящих от параметра.

В. И. Зубов поставил [79, с. 408, проблема 1] задачу описания для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ класса $\mathfrak{L}_i^n$ функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$, действующих по правилу $\mu \mapsto \lambda_i(\mu A)$, где $A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$, т. е. показателей Ляпунова семейств (1.36).

Случай $n = 1$ тривиален: класс $\mathfrak{L}_1^1$ состоит из всех функций $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, равных нулю в нуле, таких, что $-f(-1) \leqslant f(1)$ и их сужение на открытую полуось — линейная однородная функция (для каждых функции $f$ и полуоси своя, возможно, равная $-\infty$ или $+\infty$) [98].

М. В. Карпуком в работе [98] получено решение задачи Зубова для старшего показателя Ляпунова, т. е. дано полное описание класса $\mathfrak{L}_n^n$, $n \geqslant 2$. Приведём это описание: $f \in \mathfrak{L}_n^n$ тогда и только тогда, когда выполнены три условия: 1) $f$ принадлежит классу $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$; 2) $f(0) = 0$; 3) если функция $f$ не равна тождественно $+\infty$ ни на одной из открытых полуосей, то существует число $b \in \mathbb{R}$, такое, что $f(\mu) \geqslant b\mu$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$.

В качестве следствия приведённого описания класса $\mathfrak{L}_n^n$ в [98] получено полное описание множества значений старшего показателя семейства (1.36): множество $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда является множеством значений старшего показателя Ляпунова некоторого такого семейства, когда оно представляет собой суслинское множество, содержащее нуль.

Для общих семейств (1.16) М. В. Карпуком в работе [97] для любых метрического пространства $M$ и чисел $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ получено полное описание классов функций $\{\lambda_i(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ и $\{\Lambda(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, т. е. $i$-го показателя Ляпунова и спектра показателей Ляпунова непрерывного семейства (1.16), задающего при каждом $\mu \in M$ систему с ограниченными коэффициентами. Первый класс состоит из функций $M \to \mathbb{R}$ класса $(^*, \mathscr{G}_\delta)$, имеющих полунепрерывную сверху миноранту, а второй — из наборов $(f_1, \ldots, f_n)$ таких функций, подчинённых дополнительному условию упорядоченности: $f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n$. В работе [100] аналогичное описание получено для классов $\{\lambda_i(\cdot\,;A) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\}$ и $\{\Lambda(\cdot\,;A) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\}$. Первый из них совпадает с классом $(^*, \mathscr{G}_\delta)$ (при этом допускаются функции, принимающие значения $\pm\infty$), а второй — из $n$-наборов таких функций, подчинённых условию порядка, приведённому выше.

Вопрос о полном описании каждого из показателей Ляпунова и их спектра как функций параметра для семейств (1.16), непрерывных в равномерной топологии (задающих системы с ограниченными на полуоси коэффициентами или произвольные), т. е. классов

$$\{\lambda_i(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}, \quad \{\Lambda(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$$

и классов

$$\{\lambda_i(\cdot\,;A) : A \in \widetilde{\mathcal{U}}^n(M)\}, \quad \{\Lambda(\cdot\,;A) : A \in \widetilde{\mathcal{U}}^n(M)\},$$

до недавнего времени оставался открытым.

**Асимптотические свойства параметрических семейств линейных систем.**

Будем называть *множеством неправильности* $W_A$ системы $A$ множество тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, для которых система (1.36) является неправильной. Аналогично, множество неправильности определяется и для других видов зависимости от параметра (в том числе, для семейства общего вида (1.16)).

В работе Н. А. Изобова и Е. К. Макарова [90] установлено существование такой правильной системы $A \in \mathcal{M}^n$, $n \geqslant 2$, что её множество неправильности $W_A$ непусто. Вследствие этого результата Н. А. Изобовым поставлена [92] задача полного описания класса $\{W_A : A \in \mathcal{M}^n\}$. Различные примеры множества неправильности построены Е. К. Макаровым [118] – [120], А. В. Липницким [109] и А. Ф. Касабуцким [101]. А. В. Липницким построен [113] пример системы с аффинной зависимостью от вещественного параметра, множество неправильности которой совпадает с отрезком $[0, 1]$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность подмножеств $\mathbb{R}$, не содержащих нуля. Е. А. Барабановым доказано [15] включение $\{W_A : A \in \mathcal{M}^n\} \supset \mathscr{G}(\mathbb{R}) \bigcap \mathfrak{N}$, а А. В. Липницким в работе [114] — включение $\{W_A : A \in \mathcal{M}^n\} \supset \mathscr{F}(\mathbb{R}) \bigcap \mathfrak{N}$. Е. К. Макаровым установлено [120], что $\{W_A : A \in \mathcal{M}^n\} \subset \mathscr{G}_{\delta\sigma} \bigcap \mathfrak{N}$. Е. А. Барабанов доказал [15] обратное включение $\{W_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n\} \supset \mathscr{G}_{\delta\sigma} \bigcap \mathfrak{N}$, допустив неограниченность матрицы коэффициентов системы. А. Н. Ветохиным [37] получено полное обобщение результата Е. К. Макарова [120] о борелевском типе множества неправильности: если $n \geqslant 2$, то множество правильных систем является $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-множеством и не является $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множеством в пространстве $\mathcal{M}^n_U$; в частности, это означает, что множество неправильности любого непрерывного семейства (а не только вида (1.36)) обязано быть $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множеством. Для семейств (1.16) общего вида Е. А. Барабановым [15] доказано равенство $\{W_A : A \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})\} = \mathscr{G}_{\delta\sigma}(\mathbb{R})$.

Множество устойчивости (асимптотической, неасимптотической, экспоненциальной устойчивости) системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ определяется как множество тех значений параметра, для которых система (1.36) обладает соответствующим свойством. Аналогично определяются множества устойчивости для семейства (1.16) общего вида.

Для множеств $S_A$ устойчивости и множеств $Sa_A$ асимптотической устойчивости систем из $\mathcal{M}^n$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, $n \geqslant 2$, Е. А. Барабановым доказано [16; 17], что множество вещественной прямой тогда и только тогда является множеством устойчивости (соответственно, множеством асимптотической устойчивости) некоторой линейной системы, когда оно является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством, содержащим нуль (соответственно, $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-множеством, целиком лежащим на открытом луче с началом в нуле). Для семейств общего вида установлены цепочки равенств (первая — в работах [13; 16], а вторая — в работе [16])

$$\{S_A : A \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})\} = \{S_A : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(\mathbb{R})\} = \mathscr{F}_\sigma(\mathbb{R}),$$
$$\{Sa_A : A \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})\} = \{Sa_A : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(\mathbb{R})\} = \mathscr{F}_{\sigma\delta}(\mathbb{R}).$$

Ранее А. Н. Ветохиным было доказано [34], что множество устойчивых систем является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством и не является $\mathscr{G}_\delta$-множеством в каждом из пространств $\mathcal{M}^n_U$ и $\mathcal{M}^n_C$, $n \in \mathbb{N}$, а множество асимптотически устойчивых систем в каждом из этих пространств является $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-множеством и не является $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множеством [35].

Для множеств неасимптотической устойчивости в работе [14] получены следующие результаты: подмножество вещественной прямой тогда и только тогда является множеством неасимптотической устойчивости некоторого семейства из $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ (семейства из $\widetilde{\mathcal{C}}^n(\mathbb{R})$), $n \geqslant 2$, когда оно представляет собой $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множество, и множеством неасимптотической устойчивости некоторой системы из $\mathcal{M}^n$ (системы из $\widetilde{\mathcal{M}}^n$), $n \geqslant 2$, когда оно представляет собой либо $\mathscr{F}_\sigma$-множество, либо $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$-множество, содержащее нуль и целиком лежащее на одном из замкнутых лучей с началом в нуле. Эти результаты являются следствием полученного в [14] полного описания пар $(S_A, Sa_A)$ для семейств из $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ и $\widetilde{\mathcal{C}}^n(\mathbb{R})$ и систем из $\mathcal{M}^n$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ соответственно.

Множества $Se_A$ экспоненциальной устойчивости семейств из $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ описаны в [13] — ими являются $\mathscr{F}_\sigma$-множества вещественной прямой. Более того, в [13] показано, что для любого $M \in \mathscr{F}_\sigma(\mathbb{R})$ найдётся семейство из $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, для которого $M = S_A = Se_A$. Для множеств $Se_A$ экспоненциальной устойчивости систем из $\mathcal{M}^n$ А.Ф. Касабуцким [102] получены следующие результаты. Для семейства (1.36) ($n \geqslant 2$) и числа $\lambda < 0$ обозначим через $Se_A(\lambda)$ множество тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых старший показатель Ляпунова системы (1.36) меньше $\lambda$, а через $l(A)$ и $u(A)$ — нижнее и верхнее средние значения следа матричнозначной функции $A(\cdot)$, т. е.

$$l(A) = \varliminf_{t\to+\infty} i_A(t), \quad u(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} i_A(t), \text{ где } i_A(t) = t^{-1}\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau.$$

Тогда [102] множество $Se_A(\lambda)$ является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством, причём:
- если $l(A)u(A) \leqslant 0$, то $Se_A(\lambda) = \varnothing$;
- если $u(A) < 0$, то $Se_A(\lambda) \subset (n\lambda u^{-1}(A), +\infty)$;
- если $l(A) > 0$, то $Se_A(\lambda) \subset (-\infty, n\lambda l^{-1}(A))$.

Кроме того, в работе [102] получено обращение последнего утверждения для открытых множеств, дополнение которых до соответствующего полубесконечного интервала ограничено.

Для каждой пары $(A, B) \in \mathcal{M}^n \times \mathcal{M}^n$ определим [19] множество $c(A, B)$ кинематического подобия систем $A$ и $B$, состоящее из всех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых система $\mu A$ и система $\mu B$ приводимы друг к другу преобразованием Ляпунова (т. е. кинематически подобны). В работе [19] доказано, что для каждого $n \geqslant 2$ подмножество вещественной прямой является множеством кинематического подобия некоторой пары $(A, B) \in \mathcal{M}^n \times \mathcal{M}^n$ систем, если и только если оно представляет собой $\mathscr{F}_\sigma$-множество, содержащее нуль.

Близким к рассмотренным в этом разделе является вопрос о том, как могут быть устроены сужения показателей Ляпунова на непрерывные кривые в пространстве линейных систем, проходящие через заданную систему. В частности, один из вопросов, поставленных в [188] — о существовании для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ во всякой окрестности $W \subset \mathcal{M}^n_U$ любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ такой непрерывной (гладкой) кривой $\ell\colon [-1, 1] \to W$, $\ell(0) = A$, что функция $\lambda_i \circ \ell$ монотонно пробегает все значения из отрезка $[\underline{\lambda}_i(A), \overline{\lambda}_i(A)]$. Частичный ответ на этот вопрос получен Ю. И. Дементьевым [72; 74]: если не требовать монотонности функции $\lambda_i \circ \ell$, то при $i \in \{1, 2, n\}$ такие гладкие кривые существуют.

И. Н. Сергеев построил [186] непрерывную кривую $\ell\colon [0, 1] \to \mathcal{M}^n_U$, такую, что все показатели Ляпунова и характеристическая функция множества правильных систем как функции параметра этой кривой являются всюду разрывными. Другой возможный характер зависимости этих характеристик показывает построенный И. Н. Сергеевым [185] пример непрерывной кривой $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_U^n$, $n \geqslant 2$, со ступенчатой зависимостью от параметра этой кривой всех показателей Ляпунова и характеристической функции множества правильных систем (при всех $i \in \mathbb{N}_n$ если $\mu \leqslant 0$, то $\lambda_i(\ell(\mu)) = 0$ и система $\ell(\mu)$ правильна, иначе $\lambda_i(\ell(\mu)) = 1$ и система $\ell(\mu)$ неправильна). Последний результат усилен Ю. И. Дементьевым, показавшим [70; 73], что среди кривых с такими свойствами существуют бесконечно дифференцируемые кривые, для которых матрица $\ell(\mu)$ получается из матрицы $\ell(0)$ некоторым (своим для каждого $\mu$) бесконечно малым возмущением. В работе [187] И. Н. Сергеевым построены две кривые с аффинной зависимостью от параметра $\mu \in [-1, 1]$ и общим началом (т. е. семейства вида $A(\cdot) + \mu Q_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}_2$), такие, что все показатели Ляпунова и характеристическая функция множества правильных систем как функции $\mu$ вдоль одной кривой всюду разрывны, а вдоль другой — имеют ступенчатый характер. Аналогичный пример построен Ю. И. Дементьевым [69; 71]: существуют три семейства с аффинной зависимостью от параметра $\mu \in [-1, 1]$ и общим началом, такие, что старший показатель Ляпунова как функция $\mu$ на одном семействе является непрерывным, а на втором и третьем — принадлежит в точности первому и второму классам Бэра соответственно.

В приведённом обзоре мы ограничились только теми вопросами, которые имеют непосредственное отношение к теме диссертации. За его рамками, в частности, остались работы, где изучаются асимптотические характеристики, отличные от рассматриваемых в диссертации, такие как сингулярные показатели [11; 219; 233], болевский спектр [227], генеральный показатель [237], показатель Перрона [7; 8; 62–64; 89], показатели неправильности [61; 215], спектральное множество [5; 160], дихотомический спектр [222; 226; 246–248], топологическая энтропия [48–50], характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости [20; 21; 195–200; 202; 203] и многие другие.

# Глава 2

# Функции, определяемые показателями Ляпунова

## 2.1 Показатели Ляпунова параметрических семейств линейных дифференциальных систем

В этом разделе рассматриваются семейства линейных дифференциальных систем, непрерывно в смысле равномерной топологии на пространстве систем зависящие от параметра, пробегающего некоторое метрическое пространство. Для таких семейств, состоящих из систем с ограниченными коэффициентами, получено полное описание каждого отдельного показателя Ляпунова как функции параметра, а для семейств, состоящих из систем с не обязательно ограниченными коэффициентами — полное описание спектра показателей Ляпунова как функции параметра.

Пусть $M$ — метрическое пространство. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu$ система (2.1) принадлежит пространству $C\widetilde{\mathfrak{M}}^n$, т.е. имеет непрерывные на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициенты. Зафиксировав $i \in \mathbb{N}_n$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие $i$-й показатель Ляпунова системы (2.1), получим функцию $\lambda_i(\cdot\,; A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, которая называется $i$-м *показателем Ляпунова* семейства (2.1), и кроме того, функцию $\Lambda(\cdot\,; A)\colon M \to \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$, определённую равенством

$$\Lambda(\mu; A) = \left(\lambda_1(\mu; A), \ldots, \lambda_n(\mu; A)\right)^{\mathsf{T}}, \quad \mu \in M,$$

которую будем называть *спектром показателей Ляпунова* семейства (2.1).

В разделе 2.1.1 для каждых пространства $M$ и чисел $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ получена характеризация $i$-го показателя Ляпунова семейства (2.1) из класса $\mathcal{U}^n(M)$ (см. (1.18)) на языке дескриптивной теории функций: показатели Ляпунова являются верхнепредельными функциями (см. определение 1.14) и имеют непрерывные мажоранту и миноранту.

В разделе 2.1.2 на основе приведённой характеризации для каждых пространства $M$ и чисел $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ описаны множество точек полунепрерывности сверху и множество точек полунепрерывности снизу $i$-го показателя Ляпунова семейства (2.1) из класса $\mathcal{U}^n(M)$.

В разделе 2.1.3 полностью описаны лебеговские множества, а также множества значений показателей Ляпунова семейства из класса $\mathcal{U}^n(M)$.

В разделе 2.1.4 получено полное описание спектра показателей Ляпунова семейства из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ (его определение см. на с. 31), т. е. семейства систем (2.1), коэффициенты которых непрерывны, но не обязательно ограничены на полуоси $\mathbb{R}_+$.

### 2.1.1 Описание отдельного показателя (случай ограниченных коэффициентов)

Функция $g\colon M \to \mathbb{R}$ называется *мажорантой* (*минорантой*) функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, если для всех $\mu \in M$ выполняется неравенство $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ (соответственно, неравенство $g(\mu) \leqslant f(\mu)$).

Следующая теорема [260] для каждых метрического пространства $M$ и чисел $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ даёт полное описание класса функций

$$\{\lambda_i(\cdot\,; A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}.$$

**Теорема 2.1.** *Для любых чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$, метрического пространства $M$ и функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, удовлетворяющее равенству*

$$\lambda_i(\mu; A) = f(\mu), \quad \mu \in M, \tag{2.2}$$

*существует тогда и только тогда, когда функция $f$ верхнепредельна и имеет непрерывные миноранту и мажоранту. Более того, если функция $f$ ограничена, то отображение, задающее семейство, может быть выбрано ограниченным.*

**Замечание 2.1.** В случае $n = 1 = i$ семейство (2.1) с требуемыми свойствами существует тогда и только тогда, когда $f$ непрерывна. Действительно, пусть $A \in \mathcal{U}^n(M)$. Тогда отображение $M \to \mathcal{M}^n_U$, действующее по правилу $\mu \mapsto A(\cdot\,, \mu)$, непрерывно. В силу леммы 1.6 функционал $\lambda_1\colon \mathcal{M}^n_U \to \mathbb{R}$ также непрерывен. Следовательно, функция $\lambda_1(\cdot\,; A)$ непрерывна как композиция непрерывных отображений. Необходимость указанного условия установлена. Для доказательства достаточности положим $A(t, \mu) = f(\mu)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mu \in M$. Замечание доказано.

**Замечание 2.2.** В работе [261] получено обобщение утверждения теоремы 2.1, а именно, получено полное описание спектра показателей Ляпунова семейств из $\mathcal{U}^n(M)$.

Для сравнения приведём результат работы [97] в приложении к отдельному показателю Ляпунова: для заданных метрического пространства $M$, функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ и чисел $n \geqslant 1$ и $i \in \mathbb{N}_n$ семейство (2.1) с непрерывным отображением $A$, удовлетворяющее равенству (2.2), существует тогда и только тогда, когда $f$ является верхнепредельной и имеет полунепрерывную сверху миноранту. Нетрудно показать, что эти требования на функцию $f$, вообще говоря, шире тех, что указаны в формулировке теоремы 2.1.

**Пример 2.1.** Пусть $M = [0, 1]$, а функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ задаётся ра-

венством
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in[0,1]\bigcap\mathbb{Q},\\ 1/x+1/(1-x) & \text{при остальных } x.\end{cases}$$
Тогда для всякого $r\leqslant 0$ прообраз луча $[r,+\infty)$ при отображении $f$ совпадает с отрезком $[0,1]$, а для $r>0$ — с множеством $\{x\in[0,1]\backslash\mathbb{Q}:x(1-x)\leqslant r^{-1}\}$. Покажем, что последнее является счётным пересечением открытых множеств. Занумеруем элементы множества $\mathbb{Q}$ каким-либо образом: $\mathbb{Q}=\{q_1,q_2,\ldots\}$. Тогда для $r>0$ имеем
$$[f\geqslant r]=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{x\in[0,1]:x(1-x)<r^{-1}+k^{-1}\}\cap(\mathbb{R}\backslash\{q_k\}).$$
В силу леммы 1.14 функция $f$ является верхнепредельной. Поскольку $f$ ограничена снизу, то для всяких $n\geqslant 1$ и $i\in\mathbb{N}_n$ функция $f$ удовлетворяет равенству (2.2) для некоторого непрерывного семейства (2.1). С другой стороны, $f$ определена на компакте и не ограничена сверху, поэтому не имеет непрерывной мажоранты и, следовательно, не удовлетворяет равенству (2.2) ни для какого семейства из $\mathfrak{U}^n(M)$.

Для доказательства теоремы 2.2 нам понадобится ряд обозначений и две леммы.

Положим $\check\beta=-e^{3\pi/2}/(e^{3\pi/2}-1)\in(-\sqrt{2},-1)$ и определим функции $\varphi$, $\Phi$ и $\Psi$ равенствами
$$\varphi(\beta,\theta)=e^{\theta}(\beta-\sin\theta),\quad \beta\in[\check\beta,0],\quad \theta\in[-\pi,0],\tag{2.3}$$
$$\Phi(\beta)=\max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant 0}\varphi(\beta,\theta),\quad \beta\in[\check\beta,0],\tag{2.4}$$
$$\Psi(\beta)=\max_{0\leqslant\eta\leqslant 2\pi}(\tilde\Phi(\beta)e^{-\eta}+\sin\eta),\quad \beta\in[\check\beta,0],\tag{2.5}$$
где
$$\tilde\Phi(\beta)=\begin{cases}\Phi(\beta), & \beta\in[-1,0],\\ \Phi(\beta)e^{2\pi}, & \beta\in[\check\beta,-1).\end{cases}$$

**Лемма 2.1.** *Функция $\Phi$ непрерывна, строго возрастает, удовлетворяет равенствам*
$$\Phi(\beta)=\varphi(\beta,\theta_\beta),\quad \text{где } \theta_\beta=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\beta}{\sqrt{2}},\quad \beta\in[\check\beta,0],\tag{2.6}$$
$$\operatorname{sgn}\Phi(\beta)=\operatorname{sgn}(\beta+1),\quad \beta\in[\check\beta,0],\tag{2.7}$$
*и цепочке неравенств*
$$\Phi(\beta)\geqslant(\beta+1)e^{-\frac{\pi}{2}}\geqslant\beta e^{-2\pi},\quad \beta\in[\check\beta,0],\tag{2.8}$$

*а функция* $\Psi$ *непрерывна, строго возрастает, удовлетворяет равенству*

$$\Psi(\beta) = \max_{0\leqslant\eta\leqslant\pi}(\tilde{\Phi}(\beta)e^{-\eta} + \sin\eta), \quad \beta \in [\check{\beta}, 0], \tag{2.9}$$

*и неравенствам*

$$2 > \Psi(\beta) \geqslant 1, \quad \beta \in [-1, 0], \tag{2.10}$$

$$1 > \Psi(\beta) > 0, \quad \beta \in [\check{\beta}, -1). \tag{2.11}$$

**Доказательство.** Строгое возрастание функции $\Phi$ вытекает из строгого возрастания каждой из функций $\varphi(\cdot, \theta)$, $\theta \in [-\pi, 0]$. Первое неравенство цепочки (2.8) следует из определения функции $\Phi$ и равенства

$$\varphi(\beta, -\pi/2) = (\beta + 1)e^{-\pi/2},$$

второе — из неравенства $\beta \geqslant \check{\beta}$.

Проверим (2.6). Из равенства

$$\varphi'_\theta(\beta, \theta) = \sqrt{2}e^\theta \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad \beta \in [\check{\beta}, 0], \quad \theta \in [-\pi, 0], \tag{2.12}$$

заключаем, что если $\beta \in [-1, 0]$, то функция $\varphi(\beta, \cdot)$ имеет единственную внутреннюю критическую точку — максимум в точке $\theta_\beta$; если же $\beta \in [\check{\beta}, -1)$, то она имеет минимум в точке $-3\pi/2-\theta_\beta < \theta_\beta$ и максимум в точке $\theta_\beta < -\pi/2$. В последнем случае, замечая, что $\varphi(\beta, \theta_\beta) \geqslant \varphi(\beta, -\pi/2) = (\beta + 1)e^{-\pi/2}$ и $\varphi(\beta, -\pi) = \beta e^{-\pi} \leqslant \beta e^{-2\pi}$, из второго неравенства цепочки (2.8) получаем требуемое неравенство $\varphi(\beta, -\pi) \leqslant \varphi(\beta, \theta_\beta)$.

Используя (2.6), получим $\Phi(-1) = 0$, откуда в силу возрастания $\Phi$ вытекает (2.7).

Непрерывность и строгое возрастание функции $\Psi$ являются следствием соответствующих свойств функции $\tilde{\Phi}$, которые, в свою очередь, вытекают из свойств функции $\Phi$ и равенства (2.7). Второе неравенство в (2.10) и первое неравенство в (2.11) вытекают из возрастания $\Psi$ и равенства $\Psi(-1) = 1$, первое неравенство в (2.10) — из возрастания $\Psi$ и неравенства

$$\Psi(0) \leqslant e^{-\pi/4}/\sqrt{2} + 1,$$

а второе неравенство в (2.11) — из цепочки

$$\Psi(\beta) \geqslant \Phi(\beta)e^{3\pi/2} + 1 \geqslant (\beta + 1)e^{\pi} + 1 > 0,$$

в которой первое неравенство следует из равенства (2.5), второе — из первого неравенства (2.8), а третье — из неравенства $\beta \geqslant \check{\beta}$. Для $\beta \in [-1, 0]$ равенство (2.9) вытекает из цепочки неравенств

$$\Psi(\beta) \geqslant \Phi(\beta)e^{-\pi/2} + 1 > \max_{\eta\in[\pi,2\pi]}(\Phi(\beta)e^{-\eta} + \sin\eta),$$

в которой первое неравенство следует из равенства (2.5), а второе — из равенства (2.7), а для остальных $\beta$ — из второго неравенства (2.11) и вытекающего из равенства (2.7) неравенства

$$\max_{\eta\in[\pi,2\pi]}(\Phi(\beta)e^{2\pi-\eta}+\sin\eta)<0.$$

Лемма доказана.

В следующей лемме используется конструкция, аналогичная предложенным в работах [47, леммы 3 и 4] и [46, теорема 3].

**Лемма 2.2.** *Пусть* $s\colon [1,+\infty)\to[0,1]$ *— непрерывная функция, равная единице на отрезках* $[\tau_{k+1}e^{-\pi},\tau_{k+1}e^{-\pi/8}]$, *где* $\tau_k=\exp(2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$. *Каждой последовательности* $(\alpha_k)$ *вещественных чисел поставим в соответствие систему*

$$\dot x=B_\alpha(t)x,\quad B_\alpha(t)=\begin{pmatrix}\dot q(t) & s(t)b_\alpha(t)\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad t\geqslant 1,$$

*где* $q(t)=t\sin\ln t,\ t\geqslant 1,$ *а*

$$b_\alpha(t)=e^{\alpha_k t},\quad t\in[\tau_{k-1},\tau_k),\quad k\in\mathbb{N}.$$

*Положим* $\overline{\alpha}=\overline{\lim}_{k\to\infty}\alpha_k$. *Тогда*

*1) если* $\overline{\alpha}\in(-1,0)$, *то* $\lambda_2(B_\alpha)=\Psi(\overline{\alpha})$;

*2) если* $\overline{\alpha}\in(\check\beta,-1)$, *то* $\lambda_1(B_\alpha)=\Psi(\overline{\alpha})$.

**Доказательство.** 1. Для доказательства первого утверждения вычислим, следуя [94, 1.4], характеристический показатель функции

$$J_\alpha(t)=e^{q(t)}\int_1^t s(\tau)b_\alpha(\tau)e^{-q(\tau)}d\,\tau,\quad t\geqslant 1.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,-\overline{\alpha})$ и положим $\beta_\varepsilon=\overline{\alpha}+\varepsilon\in(-1,0)$. Тогда существует такое $C_\varepsilon>0$, что $|b_\alpha(\tau)|\leqslant C_\varepsilon e^{\beta_\varepsilon\tau}$ для всех $\tau\geqslant 1$. Производя в интеграле замену $\tau=\tau_k e^\theta$, получим для всех $k\geqslant 1$ оценку

$$\int_{\tau_k e^{-\pi/2}}^{\tau_k}\exp\{\beta_\varepsilon\tau-q(\tau)\}\,d\tau\leqslant\tau_k\int_{-\pi/2}^0\exp\{\tau_k\varphi(\beta_\varepsilon,\theta)\}\,d\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\tau_k\exp\{\tau_k\Phi(\beta_\varepsilon)\},$$

где функции $\varphi$ и $\Phi$ определены равенствами (2.3) и (2.4) соответственно.

Пусть для некоторого $k\in\mathbb{N}$ справедливо включение $t\in[\tau_k,\tau_k e^\pi]$. Тогда

$$|J_\alpha(t)|\leqslant C_\varepsilon e^{q(t)}\left(\int_1^{\tau_k e^{-\pi/2}}e^{\beta_\varepsilon\tau+\tau}\,d\tau+\int_{\tau_k e^{-\pi/2}}^{\tau_k}e^{\beta_\varepsilon\tau-q(\tau)}\,d\tau+\int_{\tau_k}^t d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon e^{q(t)}\left(\frac{1}{\beta_\varepsilon+1}\exp\{(\beta_\varepsilon+1)\tau_k e^{-\pi/2}\}+2\tau_k\exp\{\tau_k\Phi(\beta_\varepsilon)\}+t\right).$$

Полагая $t = \tau_k e^{\eta}$ и применяя (2.5), первое неравенство (2.8) и (2.10), получим

$$|J_\alpha(t)| \leqslant C_\varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon} \exp\{((\beta_\varepsilon + 1)e^{-\pi/2-\eta} + \sin\eta)t\} + \right.$$
$$\left. + 2t\exp\{(\Phi(\beta_\varepsilon)e^{-\eta} + \sin\eta)t\} + te^{t} \right) \leqslant \frac{4C_\varepsilon}{\varepsilon} t\exp(\Psi(\beta_\varepsilon)t).$$

Если же для некоторого $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $t \in [\tau_k e^{\pi}, \tau_{k+1}]$, то $|J_\alpha(t)| \leqslant C_\varepsilon \int_1^t e^{\tau}\, d\tau \leqslant C_\varepsilon e^t$. Учитывая (2.10), получаем окончательную оценку

$$|J_\alpha(t)| \leqslant \frac{4C_\varepsilon}{\varepsilon} t\exp(\Psi(\beta_\varepsilon)t), \quad t \geqslant \tau_1,$$

из которой вытекает неравенство $\lambda[J_\alpha] \leqslant \Psi(\beta_\varepsilon)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получим $\lambda[J_\alpha] \leqslant \Psi(\overline{\alpha})$.

Установим обратное неравенство. По условию найдётся подпоследовательность $(\alpha_{k_j})$ последовательности $(\alpha_k)$, сходящаяся к $\overline{\alpha}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \min\{\overline{\alpha} + 1, \pi/8\})$ и положим $\gamma_\varepsilon = \overline{\alpha} - \varepsilon \in (-1, 0)$. Тогда существует такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что $\alpha_{k_j} \geqslant \gamma_\varepsilon$ для всех $j \geqslant j_0$. Пусть $\eta_0 \in [0, 2\pi]$ — точка, в которой достигается максимум в определении числа $\Psi(\overline{\alpha})$. Рассмотрим последовательность $t_j = \tau_{k_j} e^{\eta_0}$, $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что справедлива цепочка неравенств $-\pi/2 < \theta_{\gamma_\varepsilon} < \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon < -\pi/8$, откуда следуют равенство $s(\tau) = 1$ для всех $\tau \in [\tau_{k_j}\exp(\theta_{\gamma_\varepsilon}), \tau_{k_j}\exp(\theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon)]$ и неравенство $\tau_{k_j}\exp(\theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon) < t_j$. Производя в интеграле замену $\tau = \tau_{k_j} e^{\theta}$ и учитывая, что в силу (2.12) функция $\varphi(\gamma_\varepsilon, \cdot)$ убывает на отрезке $[\theta_{\gamma_\varepsilon}, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon]$, получим для всех $j \geqslant j_0$

$$J_\alpha(t_j) \geqslant \exp(t_j \sin\eta_0) \int_{\tau_{k_j}\exp(\theta_{\gamma_\varepsilon})}^{\tau_{k_j}\exp(\theta_{\gamma_\varepsilon}+\varepsilon)} \exp(\gamma_\varepsilon \tau - q(\tau))\, d\tau =$$
$$= \tau_{k_j} \exp(t_j \sin\eta_0) \int_{\theta_{\gamma_\varepsilon}}^{\theta_{\gamma_\varepsilon}+\varepsilon} \exp\{\varphi(\gamma_\varepsilon, \theta)\tau_{k_j}\} e^{\theta}\, d\theta \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon \tau_{k_j} e^{-\pi/2} \exp(t_j \sin\eta_0) \min_{\theta \in [\theta_{\gamma_\varepsilon}, \theta_{\gamma_\varepsilon}+\varepsilon]} \exp\{\varphi(\gamma_\varepsilon, \theta)\tau_{k_j}\} \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon \exp\{(\sin\eta_0 + \varphi(\gamma_\varepsilon, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon)e^{-\eta_0})t_j\}.$$

Следовательно,

$$\lambda[J_\alpha] \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{1}{t_j} \ln J_\alpha(t_j) \geqslant \sin\eta_0 + \varphi(\gamma_\varepsilon, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon)e^{-\eta_0},$$

откуда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получаем $\lambda[J_\alpha] \geqslant \Psi(\overline{\alpha})$. Таким образом, установлено, что $\lambda[J_\alpha] = \Psi(\overline{\alpha})$, причём $\Psi(\overline{\alpha}) \geqslant 1$ в силу (2.10).

Функции

$$u_1(t)=\begin{pmatrix} e^{q(t)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(t)=\begin{pmatrix} J_\alpha(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\geqslant 1,$$

образуют фундаментальную систему решений системы $B_\alpha$. Требуемое следует теперь из цепочки

$$\lambda[u_1]=1\leqslant \Psi(\overline{\alpha})=\lambda[J_\alpha]=\lambda[u_2].$$

Первое утверждение доказано.

2. Для доказательства второго утверждения вычислим характеристический показатель функции

$$I_\alpha(t)=e^{q(t)}\int_t^\infty s(\tau)b_\alpha(\tau)e^{-q(\tau)}d\,\tau, \quad t\geqslant 1.$$

Оценим величину $\lambda[I_\alpha]$ сверху, заодно установив сходимость несобственного интеграла. Выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon\in(0,-1-\overline{\alpha})$ и положим $\beta_\varepsilon=\overline{\alpha}+\varepsilon\in(\check{\beta},-1)$. Тогда существует такое $C_\varepsilon>0$, что $|b_\alpha(\tau)|\leqslant C_\varepsilon e^{\beta_\varepsilon\tau}$ для всех $\tau\geqslant 1$. Производя в интеграле замену $\tau=\tau_{k+1}e^\theta$, получим для всех $k\geqslant 0$ оценку

$$\int_{\tau_k e^\pi}^{\tau_{k+1}}\exp\{\beta_\varepsilon\tau-q(\tau)\}\,d\tau\leqslant\tau_{k+1}\int_{-\pi}^{0}\exp\{\tau_{k+1}\varphi(\beta_\varepsilon,\theta)\}\,d\theta\leqslant\pi\tau_{k+1}e^{\tau_{k+1}\Phi(\beta_\varepsilon)},$$

где функции $\varphi$ и $\Phi$ определены равенствами (2.3) и (2.4) соответственно.

Пусть для некоторого $k\geqslant 0$ справедливо включение $t\in[\tau_k,\tau_{k+1}]$. Тогда

$$\begin{aligned}I_\alpha(t)\leqslant C_\varepsilon e^{q(t)}\Bigg(&\int_{\tau_k}^{\tau_k e^\pi}\exp(\beta_\varepsilon\tau)\,d\tau+\int_{\tau_k e^\pi}^{\tau_{k+1}}\exp\{\beta_\varepsilon\tau-q(\tau)\}\,d\tau+\\ &+\int_{\tau_{k+1}}^{+\infty}\exp\{\beta_\varepsilon\tau+\tau\}\,d\tau\Bigg)\leqslant C_\varepsilon e^{q(t)}\left(-\frac{1}{\beta_\varepsilon}\exp(\beta_\varepsilon\tau_k)+\right.\\ &\left.+\pi\tau_{k+1}\exp\{\tau_{k+1}\Phi(\beta_\varepsilon)\}-\frac{1}{\beta_\varepsilon+1}\exp\{(\beta_\varepsilon+1)\tau_{k+1}\}\right).\end{aligned}$$

Полагая $t=\tau_k e^\eta$ и применяя (2.8) и (2.5), получим оценку

$$\begin{aligned}|I_\alpha(t)|\leqslant C_\varepsilon&\left(-\frac{1}{\beta_\varepsilon}\exp\{(\beta_\varepsilon e^{-\eta}+\sin\eta)t\}+\pi e^{2\pi}t\exp\{(\Phi(\beta_\varepsilon)e^{2\pi-\eta}+\sin\eta)t\}\right.\\ &\left.-\frac{1}{\beta_\varepsilon+1}\exp\{((\beta_\varepsilon+1)e^{2\pi-\eta}+\sin\eta)t\}\right)\leqslant\frac{3C_\varepsilon\pi e^{2\pi}t}{|\beta_\varepsilon+1|}\exp\left(\Psi(\beta_\varepsilon)t\right), \quad t\geqslant 1,\end{aligned}$$

из которой вытекает неравенство $\lambda[I_\alpha]\leqslant\Psi(\beta_\varepsilon)$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0+$, получим $\lambda[I_\alpha]\leqslant\Psi(\overline{\alpha})$.

Установим обратное неравенство. По условию найдётся подпоследовательность $(\alpha_{k_j})$ последовательности $(\alpha_k)$, сходящаяся к $\overline{\alpha}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \overline{\alpha} - \check{\beta})$ и положим $\gamma_\varepsilon = \overline{\alpha} - \varepsilon \in (\check{\beta}, -1)$. Тогда существует такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что $\alpha_{k_j} \geqslant \gamma_\varepsilon$ для всех $j \geqslant j_0$. Пусть $\eta_0 \in [0, \pi]$ — точка, в которой достигается максимум в равенстве (2.9). Рассмотрим последовательность $t_j = \tau_{k_j - 1} e^{\eta_0}$, $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что справедлива цепочка неравенств $-3\pi/4 < \theta_{\gamma_\varepsilon} < \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon < -\pi/8$, откуда следуют равенство $s(\tau) = 1$ для всех $\tau \in [\tau_{k_j} \exp(\theta_{\gamma_\varepsilon}), \tau_{k_j} \exp(\theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon)]$ и неравенство $\tau_{k_j} \exp(\theta_{\gamma_\varepsilon}) > t_j$. Производя в интеграле замену $\tau = \tau_{k_j} e^\theta$ и учитывая, что в силу (2.12) функция $\varphi(\gamma_\varepsilon, \cdot)$ убывает на отрезке $[\theta_{\gamma_\varepsilon}, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon]$, получим для всех $j \geqslant j_0$ оценку

$$
\begin{aligned}
I_\alpha(t_j) \geqslant \exp(t_j \sin \eta_0) \int_{\tau_{k_j} \exp(\theta_{\gamma_\varepsilon})}^{\tau_{k_j} \exp(\theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon)} \exp(\gamma_\varepsilon \tau - q(\tau))\, d\tau = \\
= \tau_{k_j} \exp(t_j \sin \eta_0) \int_{\theta_{\gamma_\varepsilon}}^{\theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon} \exp\{\varphi(\gamma_\varepsilon, \theta) \tau_{k_j}\} e^\theta \, d\theta \geqslant \\
\geqslant \varepsilon \tau_{k_j} e^{-3\pi/4} \exp(t_j \sin \eta_0) \min_{\theta \in [\theta_{\gamma_\varepsilon}, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon]} \exp\{\varphi(\gamma_\varepsilon, \theta) \tau_{k_j}\} \geqslant \\
\geqslant \varepsilon \exp\{(\sin \eta_0 + \varphi(\gamma_\varepsilon, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon) e^{2\pi - \eta_0}) t_j\}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\lambda[I_\alpha] \geqslant \varlimsup_{j \to \infty} \frac{1}{t_j} \ln I_\alpha(t_j) \geqslant \sin \eta_0 + \varphi(\gamma_\varepsilon, \theta_{\gamma_\varepsilon} + \varepsilon) e^{2\pi - \eta_0},
$$

откуда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получаем $\lambda[I_\alpha] \geqslant \Psi(\overline{\alpha})$. Таким образом, установлено, что $\lambda[I_\alpha] = \Psi(\overline{\alpha})$, причём $\Psi(\overline{\alpha}) \in (0, 1)$ в силу (2.11).

Функции

$$
u_1(t) = \begin{pmatrix} -I_\alpha(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} e^{q(t)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 1,
$$

образуют фундаментальную систему решений системы $B_\alpha$. В силу доказанного выше получаем цепочку

$$
\lambda[u_1] = \Psi(\overline{\alpha}) < 1 = \lambda[u_2],
$$

откуда вытекает требуемое. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 2.1.** 1. Установим необходимость условий теоремы. Из формулы (1.11) получаем

$$
f(\mu) = \lambda_i(A(\cdot, \mu)) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{q \in \mathbb{N}} \varphi_i^{mq}(A(\cdot, \mu)), \quad \mu \in M.
$$

Так как $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, то отображение, действующее из $M$ в $\mathcal{M}_C^n$ по правилу $\mu \mapsto A(\cdot, \mu)$, непрерывно (см. лемму 1.5). Последовательно применяя первое и второе правила Юнга-Хаусдорфа, получим, что функция $f$ принадлежит классу $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$, т.е. прообраз всякого луча $[r, +\infty)$ $(r \in \mathbb{R})$ при отображении $f$ является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$. Тогда в силу леммы 1.14 функция $f$ является верхнепредельной. Существование непрерывных миноранты и мажоранты вытекает из оценки (1.9) и неравенства

$$\big|\|A(\cdot,\nu)\| - \|A(\cdot,\mu)\|\big| \leqslant \|A(\cdot,\nu) - A(\cdot,\mu)\|, \quad \mu,\nu \in M.$$

2. Докажем теперь достаточность. Пользуясь [208, теорема 1.4.1], выберем произвольную бесконечно дифференцируемую функцию $r\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, имеющую носитель, содержащийся в интервале $(-2\pi, 0)$, и тождественно равную единице на отрезке $[-\pi, -\pi/8]$. Определим функцию $s\colon [1,+\infty) \to [0,1]$ равенством

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r(\ln(x/\tau_k)), \quad x \geqslant 1, \tag{2.13}$$

где $\tau_k = \exp(2\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что носители слагаемых ряда (2.13) попарно не пересекаются, поэтому ряд (2.13) всюду сходится, а функция $s$ бесконечно дифференцируема, тождественно равна 1 на множестве

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\tau_k e^{-\pi}, \tau_k e^{-\pi/8}]$$

и обращается в нуль в некоторой окрестности каждой из точек $\tau_k$, $k \in \mathbb{N}$.

По условию найдутся непрерывные функции $g, h\colon M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$g(\mu) \leqslant f(\mu) \leqslant h(\mu), \quad \mu \in M,$$

причём будем предполагать, что $h(\mu) - g(\mu) \geqslant 1$ для всех $\mu \in M$ (иначе заменим функцию $h$ функцией $h + 1$).

Пусть $f_k\colon M \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность непрерывных функций, удовлетворяющая равенству

$$f(\mu) = \varlimsup_{k\to\infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств

$$g(\mu) \leqslant f_k(\mu) \leqslant h(\mu), \quad \mu \in M$$

(в противном случае заменим каждую из функций $f_k$, $k \in \mathbb{N}$, функцией $\max\{\min\{f_k(\cdot), h(\cdot)\}, g(\cdot)\}$).

Если $i \geqslant 2$, то положим $I = (-1, -1/2)$, иначе положим $I = (\check{\beta}, -1)$, где число $\check{\beta}$ определено перед леммой 2.1. Выберем произвольный (не сводящийся к точке) отрезок $[p_1, p_2] \subset I$.

Зафиксируем $\mu \in M$. Пусть $l_\mu\colon u \mapsto \xi_\mu u + \upsilon_\mu$ – возрастающая линейная функция, переводящая отрезок $[g(\mu), h(\mu)]$ в отрезок $[\Psi(p_1), \Psi(p_2)]$, где функция $\Psi$ определена равенством (2.5). Функция $\Psi\colon [p_1, p_2] \to \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна (см. лемму 2.1), поэтому обратная к ней функция определена и непрерывна на отрезке $[\Psi(p_1), \Psi(p_2)]$. Определим последовательность $\alpha^\mu$ равенством

$$\alpha_k^\mu = \Psi^{-1}(l_\mu(f_k(\mu))), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если $i \leqslant 2$, то положим

$$\tilde{A}_\mu(t) = \operatorname{diag}[B_{\alpha^\mu}(t+1), \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-2}], \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

иначе положим

$$\tilde{A}_\mu(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-2}, B_{\alpha^\mu}(t+1), \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-i}], \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $B_{\alpha^\mu}$ – система, построенная в лемме 2.2 по функции $s$, определённой равенством (2.13). В силу леммы 2.2 имеем цепочку

$$\lambda_i(\tilde{A}_\mu) = \lambda_{\min\{i,2\}}(B_{\alpha^\mu}) = \Psi\left(\varlimsup_{k\to\infty} \alpha_k^\mu\right) = l_\mu\left(\varlimsup_{k\to\infty} f_k(\mu)\right) = l_\mu(f(\mu)).$$

Пусть $\tau \mapsto \eta_\mu \tau + \zeta_\mu$ — функция, обратная к функции $l_\mu$. Положим

$$A(t, \mu) = \eta_\mu \tilde{A}_\mu(\eta_\mu t) + \zeta_\mu E_n, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда если функция $x(\cdot)$ — нетривиальное решение системы $\tilde{A}_\mu(\cdot)$, то функция $y\colon t \mapsto x(\eta_\mu t)e^{\zeta_\mu t}$ — решение системы $A(\cdot, \mu)$, причём $y(0) = x(0)$ и $\lambda[y] = \eta_\mu \lambda[x] + \zeta_\mu$. Следовательно, $\lambda_i(A(\cdot, \mu)) = \eta_\mu \lambda_i(\tilde{A}_\mu) + \zeta_\mu = f(\mu)$.

Коэффициенты системы $\tilde{A}_\mu$ ограничены (числом 2) и бесконечно дифференцируемы, поскольку функция $b_{\alpha^\mu}$, фигурирующая в определении системы $B_{\alpha^\mu}$, бесконечно дифференцируема на интервалах $(\tau_k, \tau_{k+1})$, а функция $s(\cdot)$ всюду бесконечно дифференцируема и обращается в нуль в окрестности каждой из точек $\tau_k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, система $A(\cdot, \mu)$ имеет бесконечно дифференцируемые и ограниченные на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициенты.

Покажем теперь, что отображение $A$ удовлетворяет условию (1.17). Пусть задано $\varepsilon \in (0, 1)$. Выберем такое $T > 1$, что $e^{-T/2} < \varepsilon$. В силу равномерной непрерывности функции $s(\cdot)b_{\alpha^\mu}(\cdot)$ на отрезке $[1, 3T+1]$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для всяких $t', t'' \in [1, 3T+1]$, удовлетворяющих условию

$|t'-t''|<\delta$, выполнено неравенство $|s(t')b_{\alpha^\mu}(t')-s(t'')b_{\alpha^\mu}(t'')|<\varepsilon$. Из равенств

$$\xi_\nu=\frac{\Phi(p_2)-\Phi(p_1)}{h(\nu)-g(\nu)}=1/\eta_\nu,\quad \upsilon_\nu=\Phi(p_1)-\xi_\nu g(\nu),\quad \zeta_\nu=-\upsilon_\nu\eta_\nu,\quad \nu\in M, \tag{2.14}$$

получаем, что функции $\nu\mapsto\alpha_k^\nu$, $\nu\mapsto\eta_\nu$ и $\nu\mapsto\zeta_\nu$, $k\in\mathbb{N}$, непрерывны. Следовательно, существует такая окрестность $U$ точки $\mu$, что

$$|\eta_\nu-\eta_\mu|<\delta/(2T)\quad\text{ и }\quad|\zeta_\nu-\zeta_\mu|<\varepsilon\quad\text{ для всех }\nu\in U.$$

Выберем такое $m\in\mathbb{N}$, что $\tau_m>T$ и такую окрестность $V\subset U$ точки $\mu$, что $|\alpha_k^\nu-\alpha_k^\mu|<\ln(1+\varepsilon)/\tau_m$ для всех $\nu\in V$ и $k\in\mathbb{N}_m$. Тогда для любых $\nu\in V$, $k\in\mathbb{N}_m$ и $t\in[\tau_{k-1},\tau_k)$ справедлива цепочка неравенств

$$|e^{\alpha_k^\nu t}-e^{\alpha_k^\mu t}|=e^{\alpha_k^\mu t}|e^{(\alpha_k^\nu-\alpha_k^\mu)t}-1|\leqslant e^{|\alpha_k^\nu-\alpha_k^\mu|t}-1<\varepsilon,$$

откуда получаем, что $|(sb_{\alpha^\nu})(t)-(sb_{\alpha^\mu})(t)|\leqslant|b_{\alpha^\nu}(t)-b_{\alpha^\mu}(t)|<\varepsilon$ для всех $\nu\in V$ и $t\in[1,T]$. В то же время $0\leqslant s(t)b_{\alpha^\nu}(t)\leqslant e^{-t/2}$ для всех $\nu\in M$ и $t\geqslant 1$, поэтому $|(sb_{\alpha^\nu})(t)-(sb_{\alpha^\mu})(\tau)|\leqslant e^{-T/2}<\varepsilon$ для всех $\nu\in M$ и $\tau,t\geqslant T$.

Из (2.10) и (2.11) вытекает, что $\Psi(p_2)-\Psi(p_1)<1$, поэтому $\eta_\nu>1$ для всех $\nu\in M$. Следовательно, $|\eta_\nu-\eta_\mu|<\eta_\mu/2$ для всех $\nu\in V$. По предыдущему получаем $|(sb_{\alpha^\mu})(\eta_\nu t+1)-(sb_{\alpha^\mu})(\eta_\mu t+1)|<\varepsilon$ для всех $\nu\in V$ и $t\geqslant 2T/\eta_\mu$. Если же $t\in[0,2T/\eta_\mu]$, то $\eta_\nu t+1\in[1,3T+1]$ и $|\eta_\nu t-\eta_\mu t|<\delta$ для всех $\nu\in V$, поэтому $|(sb_{\alpha^\mu})(\eta_\nu t+1)-(sb_{\alpha^\mu})(\eta_\mu t+1)|<\varepsilon$. Далее, для всех $\nu\in V$ справедлива цепочка

$$|q'(\eta_\nu t+1)-q'(\eta_\mu t+1)|\leqslant\max_{\theta\in[\eta_\mu t+1,\eta_\nu t+1]}\left|\frac{\cos(\ln\theta)-\sin(\ln\theta)}{\theta}\right|\cdot|\eta_\nu-\eta_\mu|t\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{(\eta_\mu/2)t+1}\cdot|\eta_\nu-\eta_\mu|t<2\varepsilon,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Поскольку свойство (1.17) не зависит от выбора матричной нормы, воспользуемся для следующих оценок *столбцовой* нормой

$$|T|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n|t_{ij}|,\quad T\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Замечая, что $|\tilde{A}_\mu(t)|_1 \leqslant 2,\ t \in \mathbb{R}_+$, для всякого $\nu \in V$ получаем

$$
\begin{aligned}
|A(t,\nu) - A(t,\mu)|_1 = |(\eta_\nu \tilde{A}_\nu(\eta_\nu t) + \zeta_\nu E) - (\eta_\mu \tilde{A}_\mu(\eta_\mu t) + \zeta_\mu E)|_1 \leqslant \\
\leqslant |\zeta_\nu - \zeta_\mu| + \eta_\nu \cdot |\tilde{A}_\nu(\eta_\nu t) - \tilde{A}_\mu(\eta_\nu t)|_1 + \\
+|\eta_\nu - \eta_\mu| \cdot |\tilde{A}_\mu(\eta_\nu t)|_1 + \eta_\mu \cdot |\tilde{A}_\mu(\eta_\nu t) - \tilde{A}_\mu(\eta_\mu t)|_1 \leqslant \\
\leqslant \varepsilon + 2\eta_\mu \cdot |(sb_{\alpha^\nu})(\eta_\nu t + 1) - (sb_{\alpha^\mu})(\eta_\nu t + 1)| + \varepsilon + \\
+\eta_\mu \max\{|(sb_{\alpha^\mu})(\eta_\nu t + 1) - (sb_{\alpha^\mu})(\eta_\mu t + 1)|, |q'(\eta_\nu t + 1) - q'(\eta_\mu t + 1)|\} \leqslant \\
\leqslant 2\varepsilon + 4\eta_\mu \varepsilon < 6\eta_\mu \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}
$$

3. Если функция $f$ ограничена, то в качестве миноранты $g$ и мажоранты $h$ в предыдущих построениях возьмём, соответственно, константы

$$
g_0 \equiv \inf_{\mu \in M} f(\mu) \quad \text{и} \quad h_0 \equiv \sup_{\mu \in M} f(\mu) + 1.
$$

Тогда в силу (2.14) величины $\eta_\mu \equiv \eta$ и $\zeta_\mu \equiv \zeta$ не зависят от $\mu$, поэтому для отображения, построенного в п. 2, справедлива оценка

$$
|A(t,\mu)|_1 \leqslant \eta |\tilde{A}_\mu(\eta t)|_1 + \zeta \leqslant 2\eta + \zeta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M.
$$

Теорема доказана.

В случае, когда $M$ — отрезок вещественной оси, утверждение теоремы 2.1 (точнее, его достаточная часть) может быть усилено следующим образом.

**Следствие 2.1.** *Пусть функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ограничена и является верхнепредельной. Тогда для всяких $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ существует ограниченное бесконечно дифференцируемое по первому аргументу и аналитическое по второму отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющее условию* (1.17) *и равенству (2.2) для $M = [0,1]$.*

**Доказательство следствия 2.1** проводится аналогично пп. 2 и 3 доказательства теоремы 2.1. Укажем необходимые изменения в построениях. В качестве функций $g$ и $h$, как и в п. 3 доказательства теоремы, возьмём константы. Тогда $l_\mu \equiv l,\ \eta_\mu \equiv \eta$ и $\zeta_\mu \equiv \zeta,\ \mu \in M = [0,1]$. Положим

$$
\tilde{\alpha}_k^\mu = \Psi^{-1}(l(f_k(\mu))), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in M.
$$

Как установлено в п. 2 доказательства теоремы, функции $\mu \mapsto \tilde{\alpha}_k^\mu,\ k \in \mathbb{N}$, непрерывны, поэтому по теореме Вейерштрасса [78, гл. XVI, § 4, теорема 2] для всякого $k \in \mathbb{N}$ найдётся многочлен $p_k$, такой, что

$$
\sup_{\mu \in M} |p_k(\mu) - \tilde{\alpha}_k^\mu| < 1/k.
$$

Положим $\alpha_k^\mu = p_k(\mu)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\mu \in M$. Для любого $t \in \mathbb{R}_+$ функция

$\mu \mapsto b_{\alpha^\mu}(t+1)$ — аналитическая, поэтому функция

$$\mu \mapsto A(t,\mu) \equiv \eta \tilde{A}_\mu(\eta t) + \zeta E_n, \quad \mu \in M,$$

— тоже аналитическая. Поскольку

$$\varlimsup_{k\to\infty} \alpha_k^\mu = \varlimsup_{k\to\infty} \tilde{\alpha}_k^\mu \quad \text{для всех } \mu \in M,$$

то показатели Ляпунова указанного семейства и семейства, построенного в п. 2 доказательства теоремы, совпадают между собой. Следствие доказано.

### 2.1.2 Строение множеств точек полунепрерывности

Для семейств (2.1), непрерывных в равномерной топологии, полное описание множеств точек полунепрерывности сверху показателей Ляпунова для полного метрического пространства $M$ и множеств точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова для любого метрического пространства содержит следующее [258]

**Следствие 2.2.** *Пусть $M$ — метрическое пространство, не обязательно полное. Для каждого $n \geqslant 2$ и любого $i \in \mathbb{N}_n$ справедливы следующие утверждения:*

1) *множество $S$ является множеством точек полунепрерывности снизу $i$-го показателя Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда $S$ есть множество типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, содержащее все изолированные точки пространства $M$;*
2) *для того, чтобы множество $S$ было множеством точек полунепрерывности сверху $i$-го показателя Ляпунова семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ достаточно, а в случае полноты $M$ и необходимо, чтобы $S$ было плотным множеством типа $\mathscr{G}_\delta$.*

**Замечание 2.3.** Как уже отмечалось в разделе 2.1.1, при $n = 1$ (единственный) показатель Ляпунова уравнения (2.1) для любого отображения $A \in \mathcal{U}^n(M)$ является непрерывной функцией параметра $\mu$.

**Замечание 2.4.** Как будет показано ниже, в случае $M = [0,1]$ семейство (2.1) с требуемыми свойствами может быть выбрано аналитическим по параметру $\mu$ (при каждом значении $t$).

**Замечание 2.5.** Как известно, для семейства систем, заданного непрерывным отображением $A\colon \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{C}^{n\times n}$, аналитическим по $\mu$ в области $D \subset \mathbb{C}$ при каждом значении $t$, множество точек полунепрерывности сверху старшего показателя Ляпунова имеет полную меру [154]. Из замечания 2.4 следует, что для вещественно-аналитического по $\mu \in [0,1]$ отображения $A(\cdot,\cdot)$ это уже не так: взяв в качестве $S \subset [0,1]$ плотное множество типа $\mathscr{G}_\delta$ нулевой меры [65, с. 130], получим семейство (2.1) из класса $\mathcal{U}^n(M)$, для которого множество точек полунепрерывности сверху старшего показателя

Ляпунова имеет меру нуль.

**Доказательство следствия 2.2.** 1. В силу включения $\mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M)$ необходимость условий следствия вытекает из результатов работы [99].

2. Пусть $U \subset M$ — плотное множество типа $\mathscr{G}_\delta$. Согласно лемме 1.15 характеристическая функция $\chi_U$ множества $U$ является верхнепредельной. Очевидно, что множество точек её полунепрерывности сверху совпадает с множеством $U$ (см. [99, лемма 3]). По теореме 2.1 существует такое семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = \chi_U$.

3. Пусть теперь $L \subset M$ — множество типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, содержащее все изолированные точки пространства $M$. Согласно [99, лемма 5] существует верхнепредельная функция $f\colon M \to [0,1]$, такая, что множество точек её полунепрерывности снизу совпадает с множеством $L$. По теореме 2.1 существует семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, такое, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = f$.

4. Наконец, замечание 2.4 вытекает из следствия 2.1. Следствие доказано.

### 2.1.3 Строение множеств значений и лебеговских множеств (случай ограниченных коэффициентов)

Установленная в разделе 2.1.1 теорема позволяет в случае полного сепарабельного пространства $M$ для всяких $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ описать совокупность множеств значений $i$-го показателя Ляпунова семейств из $\mathcal{U}^n(M)$, т. е. множество $\{\lambda_i(M; A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\} \equiv \mathfrak{R}_i^n(M)$. Через $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ условимся обозначать совокупности соответственно непустых суслинских (их определение см. на с. 50), ограниченных и не более чем счётных подмножеств вещественной прямой, а через $\mathfrak{P}(M)$ — совокупность подмножеств вещественной прямой, имеющих мощность, не превосходящую мощности множества $M$.

**Следствие 2.3.** *Для любых метрического пространства $M$ и натуральных чисел $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_n$ справедливы следующие утверждения:*

*1) если $M$ компактно, то $\mathfrak{R}_i^n(M) = \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$;*

*2) если $M$ некомпактно, но является объединением компактного и счётного подмножеств, то $\mathfrak{R}_i^n(M)$ состоит из всех множеств вида $S \cup C$, где $S \in \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$, а $C \in \mathfrak{C}$;*

*3) если $M$ полно, сепарабельно и не является объединением компактного и не более чем счётного подмножеств, то $\mathfrak{R}_i^n(M) = \mathfrak{S}$.*

Для вывода следствия 2.3 из теоремы 2.1 нам потребуется следующая

**Лемма 2.3.** *Пусть $X$ — несчётное $\mathscr{G}_\delta$-множество, лежащее в полном сепарабельном метрическом пространстве, а $S \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное суслинское множество. Тогда существует $B$-измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ класса 1, такая, что $f(X) = S$.*

**Доказательство леммы 2.3.** По теореме Александрова-Хаусдорфа [106, § 33, VI] множество $X$ гомеоморфно полному метрическому пространству.

Согласно [106, § 36, V, следствие 2] найдётся подмножество $N \subset X$ типа $\mathscr{G}_\delta$, гомеоморфное пространству $\mathbb{I}$ иррациональных чисел. Пользуясь теоремой [106, § 35, VI], продолжим гомеоморфизм $h\colon N \to \mathbb{I}$ до $B$-измеримой класса 1 функции $\hat{h}\colon X \to \mathbb{I}$. Согласно [207, § 35, III], существует такая непрерывная функция $g\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, что $g(\mathbb{I}) = S$. Положим $f = g \circ \hat{h}$. Тогда $f(X) = S$ и $f$ является $B$-измеримой класса 1 как композиция функции класса 1 и непрерывной функции [106, § 31, III, теорема 2]. Лемма доказана.

**Доказательство следствия 2.3.** 1) Пусть $M$ компактно. Для любого семейства $A \in \mathfrak{U}^n(M)$ из теоремы 2.1 и леммы 1.14 получаем, что функция $\lambda_i(\cdot\,; A) : M \to \mathbb{R}$ принадлежит второму бэровскому классу. Тогда в силу [207, § 39, IX] её образ $\lambda_i(M; A)$ является суслинским множеством. Далее, в силу теоремы 2.1 функция $\lambda_i(\cdot\,; A)$ имеет непрерывные, а значит, ограниченные миноранту и мажоранту. Следовательно, множество $\lambda_i(M; A)$ ограничено. Наконец, мощность множества $\lambda_i(M; A)$ не превосходит мощности множества $M$. Таким образом, получаем включение $\mathfrak{R}_i^n(M) \subset \mathfrak{S} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{P}(M)$.

Установим обратное включение. Пусть задано $S \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{P}(M)$. Построим верхнепредельную функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$, такую, что $f(M) = S$. Если $M$ несчётно, то существование требуемой функции следует из леммы 2.3 (поскольку всякое компактное метрическое пространство полно и сепарабельно, а любая $B$-измеримая функция класса 1 является верхнепредельной). Рассмотрим теперь случай, когда $M$ не более чем счётно. Поскольку $S \in \mathfrak{P}(M)$, существует сюръекция $f\colon M \to S$. Прообраз всякого (в частности, открытого) подмножества $\mathbb{R}$ при отображении $f$ является не более чем счётным объединением своих одноточечных подмножеств. Переходя к дополнениям, получим, что прообраз всякого замкнутого подмножества $\mathbb{R}$ при отображении $f$ является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$. В частности, для всякого $r \in \mathbb{R}$ лебеговское множество $[f \geqslant r]$ является $\mathscr{G}_\delta$-множеством. Следовательно, по лемме 1.14 функция $f$ является верхнепредельной, и в силу теоремы 2.1 найдётся семейство $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, для которого $\lambda_i(M; A) = f(M) = S$. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $M$ некомпактно и представляется в виде $K \bigcup D$, где $K$ компактно, а $D$ счётно. Применяя уже доказанное утверждение 1), для всякого семейства $A \in \mathfrak{U}^n(M)$ получаем, что $\lambda_i(K; A) \in \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$. Из равенства $\lambda_i(M; A) = \lambda_i(K; A) \bigcup \lambda_i(D; A)$ и включения $\lambda_i(D; A) \in \mathfrak{C}$ получаем включение

$$\mathfrak{R}_i^n(M) \subset \{R : R = S \bigcup C,\ S \in \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M),\ C \in \mathfrak{C}\}.$$

Установим обратное включение. Пусть $S \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{P}(M)$, а $C \in \mathfrak{C}$. В силу леммы 2.3 существует такая $B$-измеримая функция $\varphi\colon K \to \mathbb{R}$ класса 1, что $\varphi(K) = S$. Поскольку $M$ некомпактно, существует неограниченная непрерывная функция $u\colon M \to \mathbb{R}_+$. Зафиксируем какую-нибудь сюръекцию $c\colon \mathbb{N} \to C$. Тогда по выбору функции $u$ существует такая последовательность $(d_i)$ попарно различных точек множества $D \backslash K$, что $u(d_i) > |c_i|$, $i \in \mathbb{N}$. Выберем произвольную точку $s \in S$. Определим функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$ равенством

$$f(\mu) = \begin{cases} \varphi(\mu), & \text{если } \mu \in K, \\ c_i, & \text{если } \mu = d_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\ s & \text{для остальных } \mu. \end{cases}$$

По построению $f(M) = S \bigcup C$, а функции

$$\mu \mapsto \max\{u(\mu), \sup S\} \quad \text{и} \quad \mu \mapsto \min\{-u(\mu), \inf S\}$$

являются, соответственно, мажорантой и минорантой функции $f$. В силу теоремы [106, § 31, IV, теорема 1] функция $f$ является $B$-измеримой класса 1 и, следовательно, является верхнепредельной (см. лемму 1.14). По теореме 2.1 найдётся семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, для которого

$$\lambda_i(M; A) = f(M) = S \bigcup C.$$

Утверждение 2) доказано.

3) Пусть $M$ полно, сепарабельно и не является объединением компактного и не более чем счётного подмножеств. Обозначим через $C$ его множество точек конденсации [106, § 23, III]. Множество $M \backslash C$ счётно, поэтому множество $C$ несчётно и некомпактно. Следовательно, существует неограниченная непрерывная функция $u\colon C \to \mathbb{R}_+$. Выберем последовательность $(c_i)$ точек множества $C$ так, чтобы для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $u(c_i) + 2 < u(c_{i+1})$. Поскольку множество $C$ замкнуто [106, § 23, IV], то по теореме Титце [106, § 14, IV] существует непрерывное продолжение функции $u$ на все пространство $M$; сохраним за ним прежнее обозначение.

Зафиксируем произвольную точку $s \in S$. Для всякого $i \in \mathbb{N}$ выберем (в пространстве $M$) открытую окрестность $U_i$ точки $c_i$ так, чтобы для всех $\mu \in U_i$ выполнялось неравенство $|u(\mu) - u(c_i)| < 1$. Положим

$$S_i = (S \bigcap [-u(c_i), u(c_i)]) \bigcup \{s\}.$$

В силу леммы 2.3 существует $B$-измеримая функция $f_i\colon U_i \to \mathbb{R}$ класса 1, такая, что $f_i(U_i) = S_i$.

Наконец, определим функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$ равенством

$$f(\mu) = \begin{cases} f_i(\mu) & \text{при } \mu \in U_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\ s & \text{для остальных } \mu. \end{cases}$$

Заметим, что окрестности $U_i$, $i \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, поэтому определение $f$ корректно. В силу теоремы [106, § 31, IV, теорема 1] функция $f$ является $B$-измеримой класса 1 и, значит, является верхнепредельной (см. лемму 1.14).

По построению функции $\mu \mapsto \max\{u(\mu)+1, s\}$ и $\mu \mapsto \min\{-u(\mu)-1, s\}$ являются, соответственно, мажорантой и минорантой функции $f$. В силу выбора последовательности $(c_i)$ имеем $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i = S$, откуда получаем $f(M) = S$. Применяя теорему 2.1, получим требуемое. Утверждение 3) доказано. Следствие доказано.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый подкласс класса $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$. Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ условимся обозначать через $\mathfrak{N}_i(\mathcal{K}, r)$, $\mathfrak{P}_i(\mathcal{K}, r)$ и $\mathfrak{Z}_i(\mathcal{K}, r)$ соответственно совокупности лебеговских (см. определение на с. 48) множеств

$$\{[\lambda_i(\cdot\,; A) \geqslant r] : A \in \mathcal{K}\}, \quad \{[\lambda_i(\cdot\,; A) > r] : A \in \mathcal{K}\} \text{ и } \{[\lambda_i(\cdot\,; A) = r] : A \in \mathcal{K}\}.$$

Для класса $\mathcal{U}^n(M)$ эти совокупности полностью описывает

**Следствие 2.4.** *Для любых метрического пространства $M$, натуральных чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$ и вещественного числа $r$ справедливы следующие утверждения:*

*1)* $\mathfrak{N}_i(\mathcal{U}^n(M), r) = \mathfrak{N}_i(\mathcal{B}\mathcal{U}^n(M), r) = \mathscr{G}_\delta(M)$;

*2)* $\mathfrak{P}_i(\mathcal{U}^n(M), r) = \mathfrak{P}_i(\mathcal{B}\mathcal{U}^n(M), r) = \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$;

*3)* $\mathfrak{Z}_i(\mathcal{U}^n(M), r) = \mathfrak{Z}_i(\mathcal{B}\mathcal{U}^n(M), r) = \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$.

**Доказательство следствия 2.4.** 1. Пусть $A \in \mathcal{U}^n(M)$. Тогда из теоремы 2.1 следует, что функция $\lambda_i(\cdot\,; A)$ является верхнепредельной. В силу леммы 1.14 для всякого $q \in \mathbb{R}$ множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \geqslant q\}$ является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$. Замечая, что

$$\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) > r\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \geqslant r + k^{-1}\},$$

получаем, что множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) > r\}$ является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$, а его дополнение — множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \leqslant r\}$ — является множеством типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$. Следовательно, множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) = r\}$ также является множеством типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ в силу очевидного равенства

$$\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) = r\} = \{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \leqslant r\} \bigcap \{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \geqslant r\}$$

и того факта, что в метрическом пространстве всякое открытое множество есть множество типа $\mathscr{F}_\sigma$ (см. предложение 1.12).

2. Обратно, пусть $S \subset M$ — множество типа $\mathscr{G}_\delta$. Положим $f = \chi_S + r - 1$, где $\chi_S \colon M \to \{0, 1\}$ — характеристическая функция множества $S$. В силу леммы 1.15 функция $f$ является верхнепредельной. По теореме 2.1 существует семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, такое, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = f$. Тогда имеем $S = \{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \geqslant r\}$.

3. Пусть теперь $S \subset M$ — множество типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$. Тогда $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, где $S_k$, $k \in \mathbb{N}$, — подмножества пространства $M$ типа $\mathscr{G}_\delta$. Определим функцию $f : M \to [r, r+1]$ равенством

$$f(\mu) = r + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\chi_{S_k}(\mu), \quad \mu \in M. \tag{2.15}$$

По лемме 1.15 функция $\chi_{S_k}$ является верхнепредельной. Снова применяя эту лемму, получим, что тем же свойством обладают и частичные суммы ряда (2.15), а также его сумма, поскольку ряд (2.15) сходится равномерно. Таким образом, функция $f$ является верхнепредельной. По теореме 2.1 существует семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, такое, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = f$. В силу выбора функции $f$ имеем $S = \{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) > r\}$.

4. Наконец, пусть $S$ — множество типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$. Тогда его дополнение $M\backslash S$ является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$. Применяя рассуждения п. 3 к множеству $M\backslash S$, построим верхнепредельную функцию $f\colon M \to [r, r+1]$, для которой выполнено равенство $\{\mu \in M : f(\mu) > r\} = M\backslash S$. Поскольку для любого $\mu \in M$ неравенства $f(\mu) \leqslant r$ и $f(\mu) = r$ равносильны, то справедливо равенство $\{\mu \in M : f(\mu) = r\} = S$. По теореме 2.1 существует семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, такое, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = f$. Тогда $S = \{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) = r\}$. Следствие доказано.

### 2.1.4 Случай неограниченных коэффициентов

Для каждого класса отображений $\mathcal{K} \subset \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ (см. определение на с. 30) определим классы функций

$$\lambda_i(\mathcal{K}) = \{\lambda_i(\cdot\,; A) : A \in \mathcal{K}\}, \quad i \in \mathbb{N}_n, \quad \text{и} \quad \Lambda(\mathcal{K}) = \{\Lambda(\cdot\,; A) : A \in \mathcal{K}\},$$

состоящие, соответственно, из отдельных показателей Ляпунова и их спектров для семейств, задаваемых отображениями из класса $\mathcal{K}$.

Настоящая глава посвящена описанию для каждых метрического пространства $M$ и числа $n \geqslant 2$ классов функций $\lambda_i(\widetilde{\mathcal{U}}^n(M))$, $i \in \mathbb{N}_n$, и соответствующего класса функций $\Lambda(\widetilde{\mathcal{U}}^n(M))$, т. е. показателей Ляпунова и их спектров для семейств систем с коэффициентами (вообще говоря, неограниченными), непрерывно зависящими от параметра в смысле равномерной топологии на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ (определение класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ см. на с. 31). В качестве следствий получены описания множеств значений и лебеговских множеств показателей Ляпунова семейств из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$. Прежде чем сформулировать наши результаты, приведём для сравнения результат работы [97].

**Теорема 2.2** ([97, следствие 1])**.** *Для каждого натурального $n \geqslant 1$ функция $f\colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ является спектром показателей Ляпунова некоторого* *семейства* $A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$ *тогда и только тогда, когда её компоненты удовлетворяют следующим двум условиям: 1) для любого* $\mu \in M$ *справедливы неравенства* $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$*; 2) функция* $f_i \colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ *является верхнепредельной,* $i \in \mathbb{N}_n$.

Полученная ниже характеризация класса $\Lambda(\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M))$ совпадает с приведённой выше, но выводится из более сильного утверждения, составляющего содержание основной теоремы данной главы.

Сначала для всякой системы $B \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ определим класс $\mathcal{E}^n[B](M)$ отображений $A \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вида $A(t,\mu) = B(t) + Q(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$, где отображение $Q \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно и удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln \sup_{\mu\in M} |Q(t,\mu)|^{1/t} = -\infty. \tag{2.16}$$

Другими словами, $Q(t,\mu)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ быстрее любой экспоненты, причём равномерно по $\mu \in M$.

**Теорема 2.3** ([268]). *Для любого* $n \geqslant 2$ *существует система* $B \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ *с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, обладающая свойством: для каждой функции* $f \colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$*, компоненты которой удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 2.2, найдётся семейство* $A \in \mathcal{E}^n[B](M)$ *систем с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, такое, что*

$$\Lambda(\cdot\,; A) = f.$$

**Замечание 2.6.** Если $M$ — отрезок вещественной прямой, то семейство $A(\cdot,\cdot)$ может быть выбрано аналитическим по параметру.

**Замечание 2.7.** В работе [165] получено обобщение теоремы 2.3 на случай возмущений, убывающих к нулю заданным образом. Близкие вопросы для линейных систем разностных уравнений рассмотрены в работе [218].

Приведённая теорема позволяет полностью описать каждый из классов $\lambda_i(\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M))$, $i \in \mathbb{N}_n$, а также класс функций $\Lambda(\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M))$.

**Следствие 2.5.** *Для каждого* $n \geqslant 2$ *функция* $f \colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ *является спектром показателей Ляпунова некоторого семейства* $A \in \widetilde{\mathfrak{U}}^n(M)$ *тогда и только тогда, когда её компоненты удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 2.2.*

**Теорема 2.4** ([268]). *Класс* $\Lambda(\widetilde{\mathfrak{U}}^1(M))$ *состоит из всех непрерывных функций* $M \to \overline{\mathbb{R}}$ *таких, что прообразы множеств* $\{-\infty\}$ *и* $\{+\infty\}$ *являются открыто-замкнутыми (или, что равносильно, прообраз множества* $\mathbb{R}$ *является открыто-замкнутым).*

**Замечание 2.8.** Если $M$ связно, то класс $\Lambda(\widetilde{\mathfrak{U}}^1(M))$ состоит из всюду конечных непрерывных функций, функции, тождественно равной $-\infty$, и функции, тождественно равной $+\infty$.

**Следствие 2.6.** *Для каждых* $n \geqslant 2$ *и* $i \in \mathbb{N}_n$ *функция* $f \colon M \to \overline{\mathbb{R}}$

*является $i$-м показателем Ляпунова некоторого семейства $A \in \widetilde{\mathfrak{U}}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она верхнепредельная.*

В силу теоремы 2.2 для любых метрического пространства $M$ и натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ $i$-й показатель Ляпунова всякого семейства $A \in \widetilde{\mathfrak{U}}^n(M)$ является функцией второго бэровского класса, поэтому [207, § 39, IX] множество $\lambda_i(M; A)$ его значений является суслинским (см. определение на с. 50) подмножеством расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Это утверждение допускает следующее обращение.

**Следствие 2.7.** *Для любого $n \geqslant 2$ существует система $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, обладающая свойством: для всяких суслинского множества $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ и полного сепарабельного несчётного метрического пространства $M$ найдётся семейство $A \in \mathcal{E}^n[B](M)$, такое, что для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ выполнено равенство $\lambda_i(M; A) = S$.*

Строение лебеговских множеств (см. обозначения на с. 86) показателей Ляпунова семейств из $\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M)$ полностью описывает

**Следствие 2.8.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$ и число $n \geqslant 2$. Тогда для некоторой системы $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ при всех $i \in \mathbb{N}_n$ справедливы следующие равенства:*

*1)* $\mathfrak{N}_i(\widetilde{\mathfrak{C}}^n(M), r) = \mathfrak{N}_i(\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M), r) = \mathfrak{N}_i(\mathcal{E}^n[B](M), r) = \mathscr{G}_\delta(M),\ r \in \overleftarrow{\mathbb{R}}$;

*2)* $\mathfrak{P}_i(\widetilde{\mathfrak{C}}^n(M), r) = \mathfrak{P}_i(\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M), r) = \mathfrak{P}_i(\mathcal{E}^n[B](M), r) = \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M),\ r \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$;

*3)* $\mathfrak{Z}_i(\widetilde{\mathfrak{C}}^n(M), r) = \mathfrak{Z}_i(\widetilde{\mathfrak{U}}^n(M), r) = \mathfrak{Z}_i(\mathcal{E}^n[B](M), r) = \mathfrak{F}_{\sigma\delta}(M),\ r \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$,

*где обозначено $\overleftarrow{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ и $\overrightarrow{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$.*

Перейдём к доказательствам сформулированных выше утверждений.

**Лемма 2.4.** *Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и отрезок $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$. Тогда для любых $i \in \mathbb{N}_n$ и решения $x(\cdot)$ системы*

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_n]x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [c, d], \tag{2.17}$$

*функция $\chi_i^x \colon [c, d] \to \overrightarrow{\mathbb{R}}$, определяемая равенством*

$$\chi_i^x(t) = \ln |x_i(t)|^{1/t}, \quad t \in [c, d],$$

*монотонна (вообще говоря, нестрого).*

**Доказательство леммы 2.4.** Для всяких $i \in \mathbb{N}_n$ и решения $x(\cdot)$ системы (2.17) справедливо равенство $x_i(t) = e^{a_i(t-c)}x_i(c)$, $t \in [c, d]$. Следовательно, если $x_i(c) \neq 0$, то $\chi_i^x(t) = a_i + (\ln |x_i(c)| - a_i c)/t$, $t \in [c, d]$, а если $x_i(c) = 0$, то $\chi_i^x(t) = -\infty$ при всех $t \in [c, d]$. Лемма доказана.

**Лемма 2.5.** *Пусть $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество. Тогда для всякой вектор-функции $x \colon \mathrm{P} \to \mathbb{R}^n$ справедливо равенство*

$$\lambda[x] = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda[x_i].$$

**Доказательство леммы 2.5.** По определению

$$\lambda[x] = \varlimsup_{\mathrm{P}\ni t\to+\infty} \ln(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i(t)|)^{1/t}.$$

Для любых $i \in \mathbb{N}_n$ и $t > 0$ из неравенства $\max_{1\leqslant l\leqslant n} |x_l(t)| \geqslant |x_i(t)|$ вытекает неравенство $\ln(\max_{1\leqslant l\leqslant n} |x_l(t)|)^{1/t} \geqslant \ln |x_i(t)|^{1/t}$, откуда, переходя к верхнему пределу при $t \to +\infty$ по множеству P, получаем неравенство $\lambda[x] \geqslant \lambda[x_i]$. Следовательно, $\lambda[x] \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda[x_i]$.

Установим обратное неравенство. Предположим, что, напротив, для некоторого числа $r \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $\lambda[x] > r > \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda[x_i]$. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ существует такое $T_i > 0$, что при всех $t \geqslant T_i$ выполнено неравенство $\ln |x_i(t)|^{1/t} < r$, или, что равносильно, неравенство $|x_i(t)| < e^{rt}$. Положим $T = \max_{1\leqslant i\leqslant n} T_i$. Тогда при всех $t \geqslant T$ справедливо неравенство $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i(t)| < e^{rt}$, или, что равносильно, неравенство $\ln |x(t)|^{1/t} < r$. Переходя в последнем неравенстве к верхнему пределу при $t \to +\infty$ по множеству P, получим, что $\lambda[x] \leqslant r$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следующее утверждение является адаптацией для нашего случая [93, теорема 1] (определение множества $\mathcal{B}^n_f$ см. на с. 24, а слабой ляпуновской эквивалентности — в разделе 1.4).

**Лемма 2.6** (ср. [77, лемма 2]). *Если системы $A, B \in \mathcal{B}^n_f$ для некоторого числа $K > 0$ удовлетворяют условию*

$$\left| \int_t^{+\infty} (B(\tau) - A(\tau))\, d\tau \right| \leqslant \frac{K \exp(-2\int_0^t f(\tau)\, d\tau - t)}{2f(t) + 1}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.18}$$

*то системы $A$ и $B$ слабо ляпуновски эквивалентны.*

**Доказательство.** Наши рассуждения аналогичны приведённым в [93, теорема 1]. Пусть $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ — нормированные в нуле фундаментальные матрицы систем $A$ и $B$ соответственно. Положим

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau, \quad Q(t) = B(t) - A(t), \quad R(t) = \int_{+\infty}^t Q(\tau)\, d\tau,$$
$$P(t) = A(t)R(t) - R(t)B(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

По формуле вариации произвольных постоянных [94, 3.1] матрица $Y(t)$ допускает представление

$$Y(t) = X(t) \left( E_n + \int_0^t X^{-1}(\tau) Q(\tau) Y(\tau)\, d\tau \right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.19}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^t X^{-1}(\tau)Q(\tau)Y(\tau)\,d\tau = X^{-1}(t)R(t)Y(t) - R(0) + \int_0^t X^{-1}(\tau)P(\tau)Y(\tau)\,d\tau.$$

Используя оценку (1.6) и условие (2.18), получим

$$|X^{-1}(\tau)P(\tau)Y(\tau)| \leqslant |X^{-1}(\tau)| \cdot |R(\tau)|(|A(\tau)| + |B(\tau)|) \cdot |Y(\tau)| \leqslant Ke^{-\tau}.$$

Следовательно, интеграл $R_1 \equiv \int_0^{+\infty} X^{-1}(\tau)P(\tau)Y(\tau)\,d\tau$ сходится. Тогда из представления (2.19) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$Y(t) = X(t)\left(E_n - R(0) + R_1 + X^{-1}(t)R(t)Y(t) + \int_{+\infty}^t X^{-1}(\tau)P(\tau)Y(\tau)\,d\tau\right),$$

что равносильно

$$E_n = X(t)CY^{-1}(t) + R(t) + \int_{+\infty}^t X(t,\tau)P(\tau)Y(\tau,t)\,d\tau, \qquad (2.20)$$

где $X(\cdot,\cdot)$ и $Y(\cdot,\cdot)$ — матрицы Коши систем $A$ и $B$ соответственно, а матрица $C$ задаётся равенством $C = E_n - R(0) + R_1$. Аналогично предыдущему заключаем, что

$$|X(t,\tau)P(\tau)Y(\tau,t)| \leqslant Ke^{-\tau},$$

и, стало быть, третье слагаемое в (2.20) стремится к нулю при $t \to +\infty$. Следовательно, $L(t) \equiv X(t)CY^{-1}(t)$ стремится к $E_n$ при $t \to +\infty$. Очевидно, то же справедливо и для её обратной матрицы $L^{-1}(t)$. Тогда матрица $C$ обязана быть невырожденной. По непрерывности матричнозначная функция $L(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, и то же верно для $L^{-1}(\cdot)$. Поскольку $X(t)C$ является фундаментальной матрицей системы $A$, то системы $A$ и $B$ слабо ляпуновски эквивалентны. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 2.3.** Приводимое доказательство является модификацией рассуждений работы [261].

1. По условию для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ существует последовательность непрерывных функций $f_m^i\colon M \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что справедливо представление

$$f_i(\mu) = \overline{\lim_{m\to\infty}} f_m^i(\mu), \quad \mu \in M. \qquad (2.21)$$

Без ограничения общности можно считать, что для всех $i \in \mathbb{N}_n$, $m \in \mathbb{N}$ и $\mu \in M$ выполнено неравенство $f_m^i(\mu) \leqslant m$ (в противном случае заменим функцию $f_m^i$ функцией $\min\{f_m^i(\cdot), m\}$).

Для всякого $m \in \mathbb{Z}_+$ определим функцию $\sigma_m\colon M \to \mathbb{R}$, положив

$$\sigma_m(\mu) = (8m - 6f^i_{\max\{q,1\}}(\mu))/5, \quad \mu \in M,$$

где $q \in \mathbb{Z}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ однозначно определяются из условия $m = qn + i$.

2. Для всякого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$T_m^0 = 4(2^{m+1} - 2) + 2m \quad \text{и} \quad T_m^j = T_m^{j-1} + \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; j = 2, 5, \\ 2^{m+1}, & \text{если} \;\; j = 1, 3, 4, 6. \end{cases}$$

Заметим, что $T_m^6 = T_{m+1}^0$ при всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, через $\Delta_m^j$ для каждого $j \in \mathbb{N}_6$ будем обозначать полуинтервал $[T_m^{j-1}, T_m^j)$, через $\Delta_m$ — полуинтервал $[T_m^0, T_{m+1}^0)$, а через $\bar{\Delta}_m^j$ и $\bar{\Delta}_m$ — соответствующие отрезки.

Для всяких $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\sigma > 0$ определим на отрезке $\bar{\Delta}_m$ матричнозначную функцию $B_m$ при помощи равенства

$$B_m(t) = \begin{cases} \operatorname{diag}[0, -12m] & \text{при} \;\; t \in \Delta_m^1 \bigsqcup \Delta_m^4, \\ O_2 & \text{при} \;\; t \in \Delta_m^2 \bigsqcup \Delta_m^5, \\ \operatorname{diag}[0, 12m] & \text{при} \;\; t \in \Delta_m^3, \\ \operatorname{diag}[(mT_m^0 - (m+n)T_{m+n}^0)/2^{m+1}, 12m] & \text{при} \;\; t \in \bar{\Delta}_m^6, \end{cases}$$

а матричнозначную функцию $Q_{m,\sigma}$ — при помощи равенства

$$Q_{m,\sigma}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-\sigma T_m^2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при} \;\; t \in \Delta_m^2, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e^{-\sigma T_m^2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при} \;\; t \in \Delta_m^5, \\ O_2 & \text{при остальных} \;\; t \in \bar{\Delta}_m. \end{cases}$$

Положим $C_{m,\sigma} = B_m + Q_{m,\sigma}$. Тогда для матрицы Коши $X_{C_{m,\sigma}}(\cdot, \cdot)$ системы

$$\dot{x} = C_{m,\sigma}(t)x, \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \bar{\Delta}_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения:

$$X_{C_{m,\sigma}}(T_m^1, T_m^0) = X_{C_{m,\sigma}}(T_m^5, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-c_m} \end{pmatrix},$$

$$X_{C_{m,\sigma}}(T_m^2, T_m^0) = X_{C_{m,\sigma}}(T_m^4, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\sigma T_m^2} & e^{-c_m} \end{pmatrix},$$

$$X_{C_{m,\sigma}}(T_m^3, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{c_m - \sigma T_m^2} & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{C_{m,\sigma}}(T_m^6, T_m^0) = \begin{pmatrix} e^{mT_m^0 - (m+n)T_{m+n}^0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

где $c_m = 12m \cdot 2^{m+1}$.

3. Построим кусочно-постоянную матричнозначную функцию $\widetilde{B}(\cdot)$ и семейство кусочно-постоянных матричнозначных функций $\widetilde{Q}(\cdot, \mu)$, $\mu \in M$, со следующими свойствами: 1) все точки разрыва функции $\widetilde{B}(\cdot)$ и всех функций $\widetilde{Q}(\cdot, \mu)$, $\mu \in M$, содержатся в множестве $\{T_m^j : m \in \mathbb{Z}_+, \; j \in \mathbb{N}_6\}$; 2) функция $\widetilde{Q}(\cdot, \cdot)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относи-

тельно $\mu \in M$; 3) спектр $\Lambda(\cdot; \widetilde{B} + \widetilde{Q})$ показателей Ляпунова семейства $\widetilde{B} + \widetilde{Q}$ совпадает с функцией $f(\cdot)$.

3.1. Для всяких $\mu \in M$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ определим системы $\widetilde{B}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\cdot, \mu)$ на полуинтервале $\Delta_m$ равенствами

$$\begin{gathered} \dot{x}_j = 0, \quad \text{если} \quad j \notin \{\theta(k(m)), k(m)+1\}, \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_{\theta(k(m))} \\ \dot{x}_{k(m)+1} \end{pmatrix} = D_m(t,\mu) \begin{pmatrix} x_{\theta(k(m))} \\ x_{k(m)+1} \end{pmatrix}, \quad t \in \Delta_m, \end{gathered} \tag{2.23}$$

где $D_m(t,\mu) = B_m(t)$ и $D_m(t,\mu) = Q_{m,\sigma_m(\mu)}(t)$, $t \in \Delta_m$, соответственно, $k(m)$ — остаток от деления $m$ на $n$, а функция $\theta\colon \{0, \ldots, n-1\} \to \{1, \ldots, n\}$ задаётся правилом: $\theta(k) = k$ при $k \neq 0$ и $\theta(0) = n$.

Свойство 1) выполнено по построению. Для доказательства свойства 2) заметим, что из равенства $m = qn + i$ вытекает неравенство $m \geqslant q$, откуда получаем, что $\sigma_m(\mu) \geqslant 2m/5$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\mu \in M$. Следовательно,

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln \sup_{\mu\in M} |\widetilde{Q}(t,\mu)|^{1/t} = \varlimsup_{m\to+\infty} -\frac{2mT_m^2}{5T_m^5} = -\infty. \tag{2.24}$$

3.2. Теперь зафиксируем $\mu \in M$ и вычислим показатели Ляпунова системы $\widetilde{A}(\cdot,\mu) \equiv \widetilde{B}(\cdot) + \widetilde{Q}(\cdot,\mu)$. Рассмотрим произвольное ненулевое решение $x(\cdot)$ этой системы. Поскольку $|\widetilde{A}(t,\mu)| \leqslant 1$ при всех $t \in \bar{\Delta}_m^j$, $j \in \{2,5\}$, в силу известной оценки для нормы матрицы Коши (1.6) выполнено неравенство $|X^{\pm 1}_{\widetilde{A}(\cdot,\mu)}(t, T_m^j)| \leqslant e$. Тогда из равенства $x(t) = X_{\widetilde{A}(\cdot,\mu)}(t,T_m^j)x(T_m^j)$ получаем двустороннюю оценку

$$-1 \leqslant \ln|x(t)| - \ln|x(T_m^j)| \leqslant 1, \quad t \in \bar{\Delta}_m^j, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \{2,5\}.$$

Следовательно, характеристический показатель решения $x(\cdot)$ совпадает с характеристическим показателем $\lambda[x|_{\mathrm{T}}]$ его сужения на множество

$$\mathrm{T} = \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{Z}_+ \\ j\neq 2,5}} \bar{\Delta}_m^j.$$

Из леммы 2.5 следует, что упомянутый показатель равен наибольшему из характеристических показателей $\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}]$, $i \in \mathbb{N}_n$. Так как на отрезках $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,3,4,6\}$, составляющих множество $\mathrm{T}$, система $\widetilde{A}(\cdot,\mu)$ является автономной и диагональной, в силу леммы 2.4 каждая из функций $\chi_i^x$, $i \in \mathbb{N}_n$, монотонна, поэтому верхний предел в определении характеристического показателя $\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}]$ можно вычислять по последовательности концов отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{N}_6$:

$$\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}] = \varlimsup_{q\to\infty} \ln|x_i(T_q)|^{1/t}, \quad T_{6m+j} = T_m^j, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \{0,\ldots,5\}.$$

Подытоживая сказанное и применяя лемму 2.5 к сужению функции $x(\cdot)$ на множество $\{T_q : q \in \mathbb{Z}_+\}$, получаем цепочку

$$\lambda[x] = \lambda[x|_{\mathrm{T}}] = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda[x_i|_{\mathrm{T}}] = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \varlimsup_{q\to\infty} \ln |x_i(T_q)|^{1/t} = \varlimsup_{q\to\infty} \frac{1}{t} \ln |x(T_q)|.$$

3.3. Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}_n$. Вычислим характеристический показатель $\lambda[x^i]$ решения $x^i(\cdot)$ рассматриваемой системы, выходящего в момент времени $t = 0$ из вектора $e_i$.

Заметим, что из последнего равенства в (2.22) и равенств (2.23) следует, что при всех $m \in \mathbb{Z}_+$ матрица Коши $X_{\widetilde{A}(\cdot,\mu)}(T^0_{m+1}, T^0_m)$ является диагональной, поэтому вектор $x^i(T^0_m)$ коллинеарен вектору $e^i$. Далее, если $m - i$ не делится на $n$, то в силу предыдущего замечания и тех же равенств $i$-я компонента всякого решения принимает одинаковые значения в точках $T^0_m$ и $T^0_{m+1}$. Если же $m - i$ делится на $n$, то для всякого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы выполнено соотношение $x_i(T^0_{m+1}) = x_i(T^0_m)e^{mT^0_m-(m+n)T^0_{m+n}}$. Из сказанного выше индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$ получаем, что при всех $q \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} x_i(T^0_{m^i_q}) = x_i(T^0_{m^i_q-1}) = x_i(T^0_{m^i_{q-1}+1}) = \\ = \exp(\theta^{-1}(i)T^0_{\theta^{-1}(i)} - m^i_q T^0_{m^i_q})x_i(T^0_0), \text{ где } m^i_q = qn + i. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Из равенств (2.23) следует, что если ни одно из чисел $m - i$ и $m - i + 1$ не делится на $n$, то решение $x^i(\cdot)$ на отрезке $\bar{\Delta}_m$ не меняется, а функция $t^{-1} \ln |x^i(t)|$ монотонна на всяком связном объединении таких отрезков. Следовательно, при вычислении верхнего предела в определении величины $\lambda[x^i]$ можно ограничиться только концами отрезков $\bar{\Delta}^j_m$, $j \in \mathbb{N}_6$, для которых одно из чисел $m - i$ или $m - i + 1$ делится на $n$.

Для всякого $t > 0$ положим $\chi_i(t) = t^{-1} \ln |x^i(t)|$. Из равенств (2.22)–(2.25) получаем соотношения

$$\begin{gathered} |x^i(T^0_{m^i_q-1})| = |x^i(T^3_{m^i_q-1})| = |x^i(T^0_{m^i_q})| = |x^i(T^1_{m^i_q})| = |x^i(T^2_{m^i_q})| = \\ = |x^i(T^4_{m^i_q})| = |x^i(T^5_{m^i_q})| = \exp(\theta^{-1}(i)T^0_{\theta^{-1}(i)} - m^i_q T^0_{m^i_q}) < 1, \end{gathered}$$

откуда вытекает цепочка

$$\begin{gathered} \chi_i(T^0_{m^i_q-1}) \leqslant \chi_i(T^3_{m^i_q-1}) \leqslant \chi_i(T^0_{m^i_q}) \leqslant \chi_i(T^1_{m^i_q}) \leqslant \\ \leqslant \chi_i(T^2_{m^i_q}) \leqslant \chi_i(T^4_{m^i_q}) \leqslant \chi_i(T^5_{m^i_q}). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^0_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^3_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^0_{m^i_q}) =$$
$$= \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^1_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^2_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^4_{m^i_q}) =$$
$$= \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^5_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\frac{\theta^{-1}(i)T^0_{\theta^{-1}(i)} - m^i_q T^0_{m^i_q}}{T^5_{m^i_q}} = -\infty.$$

Аналогично получаем цепочку равенств

$$\varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^1_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^2_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^4_{m^i_q-1}) =$$
$$= \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^5_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\frac{-c_{m^i_q-1} + \theta^{-1}(i)T^0_{\theta^{-1}(i)} - m^i_q T^0_{m^i_q}}{T^5_{m^i_q-1}} = -\infty.$$

Далее,

$$\varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^0_{m^i_q+1}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\frac{\theta^{-1}(i)T^0_{\theta^{-1}(i)} - (m^i_q+n)T^0_{m^i_q+n}}{T^0_{m^i_q+1}} = -\infty.$$

Учитывая неравенство $f^i_q(\mu) \leqslant q$, получаем

$$\varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^3_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\frac{c_{m^i_q} - \sigma_{m^i_q}(\mu)T^2_{m^i_q} + \theta^{-1}(i)T^0_{\theta^{-1}(i)} - m^i_q T^0_{m^i_q}}{T^3_{m^i_q}} =$$
$$= \varlimsup_{q\to+\infty}\frac{2}{5}\cdot\frac{30\cdot 2^{m^i_q}\cdot f^i_q(\mu) - 13(m^i_q)^2 + (6m^i_q - 21)\cdot f^i_q + 48m^i_q}{12\cdot 2^{m^i_q} + 2m^i_q - 7} =$$
$$= \varlimsup_{q\to+\infty} f^i_q(\mu) = f_i(\mu).$$

Окончательно получаем

$$\lambda[x^i] = \max_{1\leqslant j\leqslant 6}\varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^j_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to+\infty}\chi_i(T^3_{m^i_q}) = f_i(\mu).$$

3.4. Покажем, что базис $(x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot))$ решений системы $\widetilde{A}(\cdot,\mu)$ является нормальным [29, 2.2]. Заметим, что в силу п. 3.3 этот базис является упорядоченным: $\lambda[x^1] \leqslant \ldots \leqslant \lambda[x^n]$. Докажем, что никакое подмножество набора решений $\{x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)\}$ не допускает понижающей комбинации [29, 2.3.4], т. е. что для каждого $i \in \{2,\ldots,n\}$ и произвольного набора чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$, где $\alpha_i \neq 0$, выполняется равенство

$$\lambda[\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k] = \lambda[x^i]. \tag{2.26}$$

Пусть $\mathrm{P}$ — какое-либо неограниченное подмножество временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$. Тогда функционал

$$\lambda[x|_{\mathrm{P}}] = \varlimsup_{\mathrm{P}\ni t\to+\infty} \ln|x(t)|^{1/t},$$

определённый на линейном пространстве решений какой-либо линейной системы, является показателем на этом пространстве в смысле [29, 2.1], а именно, обладает свойствами:

$$\begin{gathered} \lambda[(cx)|_{\mathrm{P}}] = \lambda[x|_{\mathrm{P}}] \text{ при } c \neq 0, \\ \lambda[(x+y)|_{\mathrm{P}}] \leqslant \max\{\lambda[x|_{\mathrm{P}}], \lambda[y|_{\mathrm{P}}]\}. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Если $\lambda[x^i] = -\infty$, то требуемое равенство (2.26) вытекает из упорядоченности базиса и соотношений (2.27) при $\mathrm{P} = \mathbb{R}_+$. Пусть теперь $\lambda[x^i] > -\infty$. Положим $\mathrm{P}_i = \{T^3_{m^i_q} : q \in \mathbb{Z}_+\}$. В силу п. 3.3 справедливы равенства

$$\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\mathrm{P_i}}] = f_i(\mu), \quad \lambda[x^k|_{\mathrm{P_i}}] = -\infty, \quad k \in \{1, \ldots, i-1\}.$$

Предположим, что равенство (2.26) не выполняется. Тогда при $\mathrm{P} = \mathbb{R}_+$ из соотношений (2.27) получаем цепочку

$$\lambda[(\sum_{k=1}^{i} \alpha_k x^k)|_{\mathrm{P_i}}] \leqslant \lambda[\sum_{k=1}^{i} \alpha_k x^k] < \lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\mathrm{P_i}}].$$

Применяя (2.27) при $\mathrm{P} = \mathrm{P_i}$, приходим к противоречию:

$$\lambda[x^i|_{\mathrm{P_i}}] = \lambda[(\sum_{k=1}^{i} \alpha_k x^k - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k x^k)|_{\mathrm{P_i}}] \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\lambda[(\sum_{k=1}^{i} \alpha_k x^k)|_{\mathrm{P_i}}], \lambda[x^1|_{\mathrm{P_i}}], \ldots, \lambda[x^{i-1}|_{\mathrm{P_i}}]\} < \lambda[x^i|_{\mathrm{P_i}}].$$

В силу [29, 2.3.10] базис $(x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot))$ является нормальным, а показатели его решений суть показатели системы $\widetilde{A}(\cdot, \mu)$. Таким образом, имеем $\Lambda(\mu; \widetilde{A}) = f(\mu)$.

4. Построим теперь бесконечно дифференцируемую функцию $B(\cdot)$ и семейство бесконечно дифференцируемых матричнозначных функций $Q(\cdot, \mu)$, $\mu \in M$, такие, что спектры показателей Ляпунова семейств $\widetilde{B} + \widetilde{Q}$ и $B + Q$ совпадают между собой и выполнены неравенства

$$|B(t)| \leqslant |\widetilde{B}(t)|, \quad |Q(t,\mu)| \leqslant |\widetilde{Q}(t,\mu)|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M. \tag{2.28}$$

Положим $\delta_k = 2^{-2k}\exp(-(T_{k+1})^3)$, $k \in \mathbb{N}$. Пользуясь [208, теорема 1.4.1], для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем произвольную бесконечно дифференцируемую функцию $s_k \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, имеющую носитель, содержащийся в интервале

$(T_k, T_{k+1})$, и тождественно равную 1 на отрезке $[T_k + \delta_k, T_{k+1} - \delta_{k+1}]$. Определим функцию $s\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ равенством

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.29}$$

Заметим, что носители слагаемых ряда (2.29) попарно не пересекаются, поэтому ряд (2.29) всюду сходится, а функция $s$ бесконечно дифференцируема, тождественно равна 1 на множестве $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[T_k + \delta_k, T_{k+1} - \delta_{k+1}]$ и обращается в нуль в некоторой окрестности каждой из точек $T_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Положим $B(t) = s(t)\widetilde{B}(t)$, $Q(t,\mu) = s(t)\widetilde{Q}(t,\mu)$, $A(t,\mu) = s(t)\widetilde{A}(t,\mu)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Поскольку матричнозначные функции $\widetilde{B}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, постоянны на каждом из интервалов $(T_k, T_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, матричнозначные функции $B(\cdot)$ и $Q(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, бесконечно дифференцируемы. Проверим, что $A \in \mathcal{E}^n[B](M)$. Условие (2.16) вытекает из (2.24) и (2.28). Покажем, что матричнозначная функция $Q(\cdot,\cdot)$ непрерывна. Пусть заданы $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\mu_0 \in M$. Если $t_0$ совпадает с одной из точек $T_k$, $k \in \mathbb{N}$, или лежит внутри одного из промежутков $\Delta_m^j$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1,3,4,6$, то по построению найдётся такая окрестность $U$ точки $t_0$, что $Q(t,\mu)$ — нулевая матрица при всех $t \in U$ и $\mu \in M$. Если $t_0$ лежит внутри одного из промежутков $\Delta_m^j$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $j = 2,5$, то $Q(t,\mu)$ непрерывна в точке $(t_0,\mu_0)$ как произведение постоянной по $t$ в некоторой окрестности точки $t_0$ и непрерывной по $\mu$ матричнозначной функции $\widetilde{Q}(\cdot,\cdot)$ и непрерывной функции $s(\cdot)$.

Заметим, что по построению $|\widetilde{A}(t,\mu)| \leqslant 2^{n+3}\cdot(t+n)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Пусть для некоторых $k', k'' \in \mathbb{N}$ выполнены включения $t' \in [T_{k'}, T_{k'+1})$ и $t'' \in [T_{k''}, T_{k''+1})$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\int_{t'}^{t''} |s(\tau)\widetilde{A}(\tau,\mu) - \widetilde{A}(\tau,\mu)|\, d\tau \leqslant \sum_{k=k'}^{k''+1} \int_{T_k-\delta_k}^{T_k+\delta_k} 2^{n+3}\cdot(\tau+n)d\tau \leqslant$$
$$\leqslant 2^{n+3}\cdot \sum_{k=k'}^{k''+1} 2\delta_k\cdot(T_{k+1}+n) \leqslant n\cdot 2^{n+4}\cdot \sum_{k=k'}^{k''+1} 2^{-2k}\exp(-(T_{k+1})^3)T_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant 20n\cdot 2^{n+4}\cdot\exp(-(T_{k'+1})^3) \leqslant 2^{2(n+5)}\cdot\exp(-t'^3),$$

из которой получаем, что при всех $\mu \in M$ и $t \in \mathbb{R}_+$ интеграл

$$I(t,\mu) = \int_t^{+\infty} |A(\tau,\mu) - \widetilde{A}(\tau,\mu)|\, d\tau$$

сходится и удовлетворяет оценке

$$I(t,\mu)\exp\left(2^{n+4}\cdot\int_0^t (s+n)\,ds+t\right)(2^{n+4}\cdot(t+n)+1)\leqslant \\ \leqslant \exp(2(n+5)-t^3+2^{n+6}\cdot(t+n)^2).$$

Правая часть последнего неравенства непрерывна и стремится к нулю при $t\to+\infty$ и, следовательно, ограничена, поэтому по лемме 2.6 (для функции $f(t)=2^{n+3}\cdot(t+n)$, $t\in\mathbb{R}_+$) системы $A(\cdot,\mu)$ и $\widetilde{A}(\cdot,\mu)$ слабо ляпуновски эквивалентны при каждом $\mu\in M$. По лемме 1.4 спектры показателей Ляпунова этих систем совпадают между собой. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.4.** Как известно, в случае $n=1$ показатель Ляпунова семейства (2.1) задаётся формулой

$$\lambda_1(\mu;A)=\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t A(\tau,\mu)\,d\tau,\quad \mu\in M.$$

Зафиксируем произвольное $\mu_0\in M$. Тогда если $\lambda_1(\mu_0;A)\in\mathbb{R}$, то для любого $\mu\in M$, удовлетворяющего условию $d(\mu)\equiv\rho_U(A(\cdot,\,\mu_0),A(\cdot,\,\mu))<1$, величина $\lambda_1(\mu;A)$ также конечна и выполнена оценка $|\lambda_1(\mu;A)-\lambda_1(\mu_0;A)|\leqslant d(\mu)$. Если $\lambda_1(\mu_0;A)=\pm\infty$, то для тех же $\mu$ имеем $\lambda_1(\mu;A)=\lambda_1(\mu_0;A)$. Таким образом, для всякого $A\in\widetilde{\mathfrak{U}}^1(M)$ функция $\lambda_1(\cdot\,;A)\colon M\to\overline{\mathbb{R}}$ непрерывна. Из сказанного также следует, что множества $[\lambda_1(\cdot\,;A)=+\infty]$ и $[\lambda_1(\cdot\,;A)=-\infty]$ открыто-замкнуты в пространстве $M$.

Обратно, пусть задана непрерывная функция $f\colon M\to\overline{\mathbb{R}}$, такая, что множества $f^{-1}(\{\pm\infty\})$ открыто-замкнуты. Определим функцию $a\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}$ следующим образом. Для каждых $t\in\mathbb{R}_+$ и $\mu\in M$ положим $a(t,\mu)=f(\mu)$, если $f(\mu)\in\mathbb{R}$, и $a(t,\mu)=t\operatorname{sgn}f(\mu)$, если $f(\mu)=\pm\infty$. Тогда показатель Ляпунова семейства уравнений $\dot{x}=a(t,\mu)x$, $x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$, совпадает с функцией $f$.

Покажем теперь, что $a\in\widetilde{\mathfrak{U}}^1(M)$. Зафиксируем $\mu\in M$ и $\varepsilon>0$. Пусть $f(\mu)=+\infty$. Тогда по построению $a(t,\nu)=a(t,\mu)=t$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$ и $\nu\in f^{-1}(\{+\infty\})\equiv U$, причём по условию множество $U$ является открытым. Случай $f(\mu)=-\infty$ рассматривается аналогично. Если значение $f(\mu)$ конечно, то существует такая окрестность $U$ точки $\mu$, что для всех $\nu\in U$ значение $f(\nu)$ конечно и выполнено неравенство $|f(\mu)-f(\nu)|<\varepsilon$. Тогда по построению $|a(t,\mu)-a(t,\nu)|<\varepsilon$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$ и $\nu\in U$.

Наконец, покажем, что для непрерывной функции $f\colon M\to\overline{\mathbb{R}}$ множества $f^{-1}(\{\pm\infty\})$ открыто-замкнуты тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает множество $f^{-1}(\mathbb{R})$. Действительно, если оба множества $f^{-1}(\{\pm\infty\})$ открыто-замкнуты, то и дополнение к ним — множество тех $\mu\in M$, для которых значение $\lambda_1(\mu; A)$ конечно, — также является открыто-замкнутым. Наоборот, если множество $f^{-1}(\mathbb{R})$ открыто-замкнуто, то это же справедливо и для его дополнения $f^{-1}(\{-\infty, +\infty\}) \equiv I$. В силу непрерывности функции $f$ множества $f^{-1}(\{\pm\infty\})$ замкнуты, поэтому остаётся показать, что они открыты. Требуемое следует из очевидных равенств

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = I \bigcap (M \backslash f^{-1}(\{+\infty\})), \quad f^{-1}(\{+\infty\}) = I \bigcap (M \backslash f^{-1}(\{-\infty\})).$$

Теорема доказана.

**Доказательство следствия 2.6.** Необходимость установлена в следствии 2.5, а достаточность получается из следствия 2.5, применённого к функции $(f, \ldots, f)$. Следствие доказано.

**Доказательство следствия 2.7.** Пусть $B \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ — система, существование которой утверждается в теореме 2.3, а $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ — заданное суслинское множество. По лемме 2.3 существует такая $B$-измеримая функция $f$ класса 1, что $f(M) = \Phi(S)$. Тогда $\Phi^{-1}(f(M)) = S$, а функция $\Phi^{-1} \circ f$ является $B$-измеримой класса 1 как композиция [106, § 31, III, теорема 2] функции $f$ класса 1 и непрерывной функции $\Phi^{-1}$. В силу леммы 1.14 функция $\Phi^{-1} \circ f$ верхнепредельна, поэтому по теореме 2.3 существует семейство $A \in$ $\in \mathcal{E}^n[B](M)$, для которого $\lambda_i(\cdot\,; A) = \Phi^{-1} \circ f$ при всех $i \in \mathbb{N}_n$. Следствие доказано.

**Доказательство следствия 2.8.** 1. Выберем произвольно и зафиксируем $A \in \widetilde{\mathfrak{U}}^n(M)$, $i \in \mathbb{N}_n$ и $r \in \overline{\mathbb{R}}$. По теореме 2.3 функция $\lambda_i(\cdot\,; A)$ является верхнепредельной, откуда в силу леммы 1.14 получаем включение

$$[\lambda_i(\cdot\,; A) \geqslant r] \in \mathscr{G}_\delta(M).$$

Включение $[\lambda_i(\cdot\,; A) > r] \in \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$ для любого $r \in \mathbb{R}$ вытекает из равенства $[\lambda_i(\cdot\,; A) > r] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\lambda_i(\cdot\,; A) \geqslant r + k^{-1}]$, включение $[\lambda_i(\cdot\,; A) > -\infty] \in \mathscr{G}_\delta(M)$ — из равенства

$$[\lambda_i(\cdot\,; A) > -\infty] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\lambda_i(\cdot\,; A) \geqslant -k],$$

а лебеговское множество $[\lambda_i(\cdot\,; A) > +\infty]$ пусто (и, следовательно, является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$). Переходя к дополнениям, получим, что для всякого числа $r \in \overline{\mathbb{R}}$ справедливо включение $[\lambda_i(\cdot\,; A) \leqslant r] \in \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$. Наконец, для всякого $r \in \overline{\mathbb{R}}$ из равенства

$$[\lambda_i(\cdot\,; A) = r] = [\lambda_i(\cdot\,; A) \geqslant r] \bigcap [\lambda_i(\cdot\,; A) \leqslant r]$$

и включения $\mathscr{G}(M) \subset \mathscr{F}_\sigma(M)$ (см. лемму 1.12) следует требуемое включение $[\lambda_i(\cdot\,; A) = r] \in \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$.

2. Пусть $B \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ — система, существование которой утверждается в теореме 2.3. Зафиксируем произвольное $r \in \overleftarrow{\mathbb{R}}$ и покажем, что для всех $i \in \mathbb{N}_n$

справедливо включение $\mathfrak{N}_i(\mathcal{E}^n[B](M), r) \supset \mathscr{G}_\delta(M)$. Для заданного множества $S \in \mathscr{G}_\delta(M)$ определим функцию $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ равенством $f = r - 1 + \chi_S$, если $r \in \mathbb{R}$, и равенством $f = \Phi^{-1} \circ \chi_S$, если $r = +\infty$. Очевидно, $[f \geqslant r] = S$. В силу леммы 1.15 функция $f$ является верхнепредельной, поэтому по теореме 2.3 существует семейство $A \in \mathcal{E}^n[B](M)$, такое, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = f$ при всех $i \in \mathbb{N}_n$.

Зафиксируем произвольное $r \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$ и покажем, что для всех $i \in \mathbb{N}_n$ справедливо включение $\mathfrak{P}_i(\mathcal{E}^n[B](M), r) \supset \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$. Действительно, пусть $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, где $S_k \in \mathscr{G}_\delta(M)$, $k \in \mathbb{N}$. Определим функцию $g\colon M \to [0,1]$ равенством

$$g(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \chi_{S_k}(\mu), \quad \mu \in M, \tag{2.30}$$

а функцию $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ равенством $f(\mu) = r + g(\mu)$, $\mu \in M$, если $r \in \mathbb{R}$, и равенством $f(\mu) = \Phi^{-1}(-1 + g(\mu))$, $\mu \in M$, если $r = -\infty$. Легко видеть, что $[f > r] = [f \neq r] = S$. Так как ряд (2.30) сходится равномерно, в силу леммы 1.15 функция $f$ является верхнепредельной. Тогда по теореме 2.3 существует семейство $A \in \mathcal{E}^n[B](M)$, такое, что $\lambda_i(\cdot\,; A) = f$, $i \in \mathbb{N}_n$.

Включение $\mathfrak{Z}_i(\mathcal{E}^n[B](M), r) \supset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$ для любых $r \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ вытекает из доказанного выше, поскольку совокупность множеств $\mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$ состоит из дополнений к множествам совокупности $\mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$.

Из леммы 1.5 вытекает, что класс $\widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$ содержит все непрерывные отображения $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, поэтому $\mathcal{E}^n[B](M) \subset \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$. Следовательно, все доказанные выше включения для совокупностей лебеговских множеств на самом деле являются равенствами. Следствие доказано.

## ВЫВОДЫ

В заключение опишем кратко результаты этого раздела. Получена полная характеризация на языке теории Бэра разрывных функций отдельных показателей Ляпунова параметрических семейств линейных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами, непрерывно зависящими от параметра в смысле равномерной топологии. Приведённая характеризация отличается от аналогичной, полученной в работе [97] для семейств, непрерывных в компактно-открытой топологии. На основе этой характеризации получены полные описания множества значений и лебеговских множеств каждого из показателей Ляпунова семейств рассматриваемого класса. Кроме того, установлено, что для отдельного показателя Ляпунова совокупности множеств точек его полунепрерывности сверху (снизу) для семейств, непрерывных по параметру в смысле равномерной топологии, оказываются такими же, что и в случае непрерывности по параметру в смысле компактно-открытой топологии, рассмотренном в работе [99].

Получена полная характеризация спектров показателей Ляпунова параметрических семейств линейных дифференциальных систем с непрерывными неограниченными коэффициентами, непрерывно зависящими от параметра в смысле равномерной топологии. Как оказалось, она совпадает с аналогичной характеризацией, полученной в [100] для семейств, непрерывно зависящих от параметра в компактно-открытой топологии. Однако методы доказательства соответствующих утверждений принципиально различны: в работе [100] нужное поведение реализуется в подклассе диагональных (даже скалярных) семейств, в то время как в ситуации, рассматриваемой в настоящей работе, указанный подкласс реализует только непрерывные функции. В теореме 2.2 все возможные функции реализуются на семействах, представляющих собой фиксированную систему (единую для всех пространств параметров и реализуемых функций!) с параметрическим возмущением, стремящимся к нулю на бесконечности быстрее всякой экспоненты, причём равномерно относительно параметра.

Методы, описанные в данном разделе, могут быть успешно применены к решению целого ряда актуальных задач теории показателей Ляпунова, таких как описание индекса экспоненциальной устойчивости [262] и коэффициента неправильности Ляпунова [264] линейных параметрических систем как функций параметра, описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности [265] и других.

## 2.2 О локальной бэровской классификации показателей Ляпунова

Всюду в пределах данного раздела считаем пространство $\mathcal{M}^n$ наделённым равномерной нормой $\|\cdot\|$ (её определение даётся равенством (1.4)) и соответствующей топологией и не будем каждый раз указывать это в обозначениях.

Как отмечено выше в обзоре литературы, из результатов В. М. Миллионщикова [130] и М. И. Рахимбердиева [166] следует, что показатели Ляпунова являются функционалами в точности второго класса Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n$. В то же время, показатели Ляпунова имеют “достаточно много” точек непрерывности в этом пространстве: таковыми являются, в частности, все системы с интегральной разделённостью, которые образуют открытое плотное подмножество.

Таким образом, наименьший номер бэровского класса, которому принадлежит показатель Ляпунова (или другой функционал на пространстве систем), мало сообщает нам о его поведении в окрестности отдельных точек. Чтобы характеризовать локальное поведение функционалов на пространстве $\mathcal{M}^n$, было предложено несколько вариантов локализации понятия бэровского класса (определение бэровских классов см. на с. 49). Так, в докладе [182] предлагалось считать, что функционал принадлежит $k$-му локальному бэровскому классу по отношению к данной точке, если его сужение на некоторую окрестность этой точки принадлежит $k$-му бэровскому классу. В том же докладе показано, что младший показатель Ляпунова $\lambda_1$ по отношению к любой точке пространства $\mathcal{M}^n$ имеет либо нулевой локальный бэровский класс, либо в точности второй, а в докладе [183] аналогичное утверждение установлено для старшего показателя двумерной системы. Затем этот же результат (об отсутствии точек, в которых функционал принадлежит в точности первому классу) был обобщён на более широкий класс функционалов [184].

Недостатком приведённого выше варианта локализации является то, что множество точек, в которых функционал принадлежит какому-либо локальному классу Бэра, всегда открыто. В частности, функционал, непрерывный в некоторой точке, не обязан иметь нулевой класс Бэра относительно этой точки.

В докладе [193] был предложен другой, улучшенный, вариант локальной классификации Бэра.

**Определение 2.1** ([193])**.** Будем говорить, что функционал $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит $k$-му ($k \in \mathbb{Z}_+$) классу Бэра в точке $A \in \mathcal{M}^n$ в узком смысле, если для любой открытой окрестности $G \subset \mathbb{R}$ точки $\varphi(A)$ существует такая открытая окрестность $U \subset \mathcal{M}^n$ точки $A$, что $\varphi^{-1}(G) \bigcap U$ есть множество аддитивного класса $k$ (см. определение на с. 46).

В том же докладе [193] был поставлен вопрос: может ли какой-либо из показателей Ляпунова принадлежать первому классу Бэра в точке, не будучи непрерывным в этой точке? Ниже получен частичный ответ на этот вопрос, а также исследован аналогичный вопрос для приведённого ниже модифицированного определения.

**Определение 2.2** ([271])**.** Скажем, что функционал $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит $k$-му ($k \in \mathbb{Z}_+$) классу Бэра в точке $A \in \mathcal{M}^n$ в широком смысле, если для любого открытого интервала $I \subset \mathbb{R}$, содержащего точку $\varphi(A)$, существует такая открытая окрестность $U \subset \mathcal{M}^n$ точки $A$, что $\varphi^{-1}(I) \bigcap U$ есть множество аддитивного класса $k$.

**Замечание 2.9.** Поскольку всякий открытый интервал, содержащий точку $\varphi(A)$, является открытой окрестностью этой точки, всякий функционал, принадлежащий $k$-му классу Бэра в некоторой точке $A \in \mathcal{M}^n$ в узком смысле, также принадлежит $k$-му классу Бэра в этой точке в широком смысле. Обратное, как будет видно из дальнейшего, неверно.

В случае любого из двух последних определений справедливы следующие свойства [193]:

1) функционал $\varphi$ принадлежит $k$-му классу Бэра в каждой точке пространства $\mathcal{M}^n$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ — функция $k$-го класса

Бэра;

2) функционал $\varphi$ принадлежит нулевому классу Бэра в какой-либо точке пространства $\mathcal{M}^n$ тогда и только тогда, когда он непрерывен в этой точке.

Докажем свойство 1). Пусть функционал $\varphi$ принадлежит $k$-му классу Бэра в каждой точке пространства $\mathcal{M}^n$ в любом из двух смыслов, определенных выше. Рассмотрим произвольный открытый интервал $I \subset \mathbb{R}$. Поскольку для всякого $A \in \varphi^{-1}(I)$ найдется такая открытая окрестность $U$ точки $A$, что $\varphi^{-1}(I) \bigcap U$ есть множество аддитивного класса $k$, из [106, § 30, X, теорема 1] заключаем, что прообраз $\varphi^{-1}(I)$ интервала $I$ есть множество аддитивного класса $k$. Открытые интервалы с рациональными концами образуют счётную базу топологии $\mathbb{R}$, поэтому по [106, § 31, II, теорема 1] получаем, что $\varphi$ является $B$-измеримой функцией класса $k$ (см. определение на с. 48). По теореме Лебега-Хаусдорфа 1.1 функция $\varphi$ принадлежит $k$-му классу Бэра.

Обратно, пусть $\varphi$ — функция $k$-го класса Бэра. Тогда по теореме Лебега-Хаусдорфа $\varphi$ является $B$-измеримой функцией класса $k$. Следовательно, в любом из двух определений выше можно взять $U = \mathcal{M}^n$.

Для доказательства свойства 2) достаточно заметить, что при $k = 0$ оба определения превращаются в определение непрерывности функции в точке.

Основным результатом данного раздела являются следующие две теоремы [253].

**Теорема 2.5.** *Для всякого $n \geqslant 2$ показатель Ляпунова $\lambda_i$, $i \in \mathbb{N}_2$, принадлежит первому классу Бэра в точке $A \in \mathcal{M}^n$ в широком смысле тогда и только тогда, когда он полунепрерывен снизу в этой точке.*

**Теорема 2.6.** *Если показатель Ляпунова $\lambda_i$, $i \in \mathbb{N}_n$, принадлежит первому классу Бэра в точке $A \in \mathcal{M}^n$ в узком смысле, то он полунепрерывен сверху в этой точке, а при $i \in \mathbb{N}_2$ — также и снизу.*

Доказательству теорем предпошлём ряд вспомогательных обозначений и лемм.

**Лемма 2.7.** *Для любых систем $A, B \in \mathcal{M}^n$ и чисел $\tau, t \in \mathbb{R}_+$ из неравенства*

$$|B(s) - A(s)| \leqslant \delta, \quad s \in [\tau, t],$$

*вытекает неравенство для операторов Коши*

$$|X_B(t,\tau)X_A^{-1}(t,\tau) - E_n| \leqslant \delta|t-\tau|e^{2(\|A\|+\|B\|)|t-\tau|}.$$

**Доказательство.** Из соотношения (см. [29, 13.4])

$$X_B(t,\tau) - X_A(t,\tau) = \int_\tau^t X_A(t,s)(B(s)-A(s))X_B(s,\tau)\,ds,$$

используя оценки (см. (1.6))

$$|X_A(t_2,t_1)| \leqslant e^{\|A\|\cdot|t_2-t_1|}, \quad |X_B(t_2,t_1)| \leqslant e^{\|B\|\cdot|t_2-t_1|}, \quad t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+,$$

получаем цепочку

$$|X_B(t,\tau)X_A^{-1}(t,\tau)-I| \leqslant |X_B(t,\tau)-X_A(t,\tau)|\cdot|X_A^{-1}(t,\tau)| \leqslant \delta|t-\tau|e^{2(\|A\|+\|B\|)|t-\tau|}.$$

Лемма 2.7 доказана.

Для всякого $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathfrak{B}(A)$ множество систем $B$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to+\infty} |B(t)-A(t)| = 0,$$

а через $\check{\mathfrak{B}}(A)$ — множество систем $B \in \mathfrak{B}(A)$ таких, что матричнозначная функция $(B-A)$ непрерывна.

Для всяких $A \in \mathcal{M}^n$ и $\delta > 0$ будем обозначать через $\mathcal{B}_\delta(A)$ множество систем $B \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих условию $\|B-A\| \leqslant \delta$, а через $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ — множество систем $B \in \check{\mathfrak{B}}(A)$, удовлетворяющих тому же условию, т. е. множество $\check{\mathfrak{B}}(A) \bigcap \mathcal{B}_\delta(A)$.

**Лемма 2.8.** *Для любых $A \in \mathcal{M}^n$ и $\delta > 0$ множество $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ полно относительно индуцированной метрики и замкнуто в $\mathcal{M}^n$.*

**Доказательство.** Первое утверждение получаем, замечая, что $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ изометрично $\check{\mathfrak{B}}_\delta(0) = \mathfrak{B}(0) \bigcap \mathcal{B}_\delta(0) \bigcap C\mathcal{M}^n$, которое полно как замкнутое подмножество полного пространства $C\mathcal{M}^n$ непрерывных ограниченных матричнозначных функций, заданных на $\mathbb{R}_+$. Второе утверждение вытекает из первого. Лемма 2.8 доказана.

Отметим, что пространство $\mathcal{M}^n$ неполно. Действительно, последовательность матричнозначных функций $A_k(t) = f_k(t)E_n$, где функции $f_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задаются формулами

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 2^{-k}), \\ 2^{-j}, & t \in [2^{-j}, 2^{1-j}),\ j \in \mathbb{N}_k, \\ 1, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

фундаментальна, поскольку при $l > k$ имеем $\|A_k - A_l\| = 2^{-k-1}$, но не сходится в пространстве $\mathcal{M}^n$, поскольку функция, являющаяся поточечным пределом данной последовательности, имеет разрывы во всех точках вида $2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, и, таким образом, не является кусочно-непрерывной.

Следующая лемма связывает поведение остаточного (см. определение на с. 29) функционала на множествах $\check{\mathfrak{B}}(A)$ и $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$, где $\delta > 0$.

**Лемма 2.9.** *Пусть заданы остаточный функционал $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$, система $A \in \mathcal{M}^n$ и множество $E \subset \mathbb{R}$ такое, что $\varphi^{-1}(E) \bigcap \check{\mathfrak{B}}(A) \neq \varnothing$. Тогда* *для каждого $\delta > 0$ множество $\varphi^{-1}(E)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ всюду плотно в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные $\delta, \varepsilon > 0$ и $C \in \check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ и укажем систему $\widetilde{C} \in \varphi^{-1}(E)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ такую, что $\|\widetilde{C} - C\| \leqslant \varepsilon$, причём без ограничения общности считаем, что $\varepsilon < \delta/2$. Выберем произвольные систему $B \in \varphi^{-1}(E)\bigcap\check{\mathfrak{B}}(A)$ и $T > 0$ такие, что при всех $t \geqslant T$ выполнены неравенства

$$|B(t) - A(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad |C(t) - A(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при всех $t \geqslant T$ имеем

$$|B(t) - C(t)| < \varepsilon. \tag{2.31}$$

Положим

$$\widetilde{C}(t) = \begin{cases} C(t), & \text{если } t \in [0, T], \\ (t - T)(B(t) - C(t)) + C(t), & \text{если } t \in (T, T+1), \\ B(t), & \text{если } t \geqslant T + 1. \end{cases}$$

Построенная система $\widetilde{C}$ обладает требуемыми свойствами:
1) $\varphi(\widetilde{C}) = \varphi(B) \in E$ в силу остаточности функционала $\varphi$;
2) $\lim\limits_{t\to+\infty} |\widetilde{C}(t) - A(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |B(t) - A(t)| = 0$;
3) матричнозначная функция $(\widetilde{C} - A)$ непрерывна;
4) $\|\widetilde{C} - C\| \leqslant \varepsilon$ в силу (2.31);
5) $\|\widetilde{C} - A\| \leqslant \delta$ в силу (2.31), так как $\varepsilon < \delta/2$.
Лемма 2.9 доказана.

Следующая лемма показывает, что верхнепредельный (определение 1.14) остаточный функционал первого класса Бэра в некоторой точке обязан быть в этой точке "устойчивым вниз" под действием бесконечно малых непрерывных возмущений.

**Лемма 2.10.** *Пусть $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ – остаточный верхнепредельный функционал. Тогда если $\varphi$ принадлежит первому классу Бэра в точке $A \in \mathcal{M}^n$ в широком смысле, то выполнено равенство*

$$\inf_{B\in\check{\mathfrak{B}}(A)} \varphi(B) = \varphi(A).$$

**Доказательство.** Пусть, напротив, найдётся система $B \in \check{\mathfrak{B}}(A)$ такая, что справедливо неравенство

$$\varphi(B) < \varphi(A). \tag{2.32}$$

Обозначим $S = \varphi^{-1}\left((\varphi(B), +\infty)\right)$. По условию найдётся такая открытая окрестность $U$ точки $A$, что $S\bigcap U$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Выберем $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{B}_\delta(A) \subset U$. Тогда множество $S\bigcap\mathcal{B}_\delta(A) = S\bigcap U\bigcap\mathcal{B}_\delta(A)$

также является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Учитывая теперь, что $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ замкнуто (по лемме 2.8), получаем, что множество $S\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A) = S\bigcap\mathcal{B}_\delta(A)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$, а множество

$$Q = \varphi^{-1}\left((-\infty,\varphi(B)]\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A) = \left(\mathcal{M}^n\setminus\left(S\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)\right)\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$$

является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$. По лемме 2.9 множество $Q$ всюду плотно в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$, поскольку $B\in\varphi^{-1}\left((-\infty,\varphi(B)]\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}(A)\neq\varnothing$.

Так как всякое замкнутое множество есть множество типа $\mathscr{G}_\delta$ (см. лемму 1.12), из леммы 1.14 получаем, что множество

$$P = \varphi^{-1}\left([\varphi(A),+\infty)\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$$

также есть множество типа $\mathscr{G}_\delta$. По лемме 2.9 множество $P$ всюду плотно в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$, поскольку $A\in\varphi^{-1}\left([\varphi(A),+\infty)\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}(A)\neq\varnothing$.

По теореме Бэра [106, § 34, V, 1] множество $P\bigcap Q$ обязано быть всюду плотным в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ как пересечение всюду плотных множеств типа $\mathscr{G}_\delta$, лежащих в полном (по лемме 2.8) пространстве $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$. Но в силу (2.32) имеем $P\bigcap Q=\varnothing$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Нижеследующая лемма разъясняет, как с помощью метода поворотов В. М. Миллионщикова *подвергнуть систему $A$ преобразованию $S$* на интервале $(T-\Delta,T)$, получив систему $B$.

**Лемма 2.11** (ср. [178])**.** *Пусть заданы произвольные система $A\in\mathcal{M}^n$ и матрица $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что $|S-E_n|<\nu\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда для любых $T>1$ и $\Delta\in(0,1)$ существует система $B\in\mathcal{M}^n$, удовлетворяющее требованиям:*

*1) $B(t)=A(t)$ при $t\notin(T-\Delta,T)$;*

*2) $|B(t)-A(t)|\leqslant\frac{10\nu}{\Delta}(\|A\|+1)$ при $t\in(T-\Delta,T)$;*

*3) $Y(T,T-\Delta)=SX(T,T-\Delta)$, где $X$ и $Y$ — операторы Коши систем $A$ и $B$ соответственно;*

*4) если матричнозначная функция $A$ непрерывна в точке $t_0\in\mathbb{R}_+$, то матричнозначная функция $B$ также непрерывна в этой точке.*

**Доказательство.** Обозначим $R=SA(T-0)-A(T-0)S$. Тогда

$$|R|\leqslant|S-I|\cdot|A(T-0)|+|A(T-0)|\cdot|I-S|<2\|A\|\nu. \tag{2.33}$$

Выберем число $\eta\in(0,1/2)$ из условия

$$|S-I|+\eta|R|<\nu. \tag{2.34}$$

Для всякого $\gamma\in[0,1]$ определим функцию $\sigma_\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ равенством

$$\sigma_\gamma(\tau)=(3-\gamma)\tau^2-(2-\gamma)\tau^3.$$

Непосредственно устанавливается справедливость следующих соотношений ($\gamma, \tau \in [0,1]$):

$$0 = \sigma_\gamma(0) \leqslant \sigma_\gamma(\tau) \leqslant \sigma_\gamma(1) = 1, \quad \sigma'_\gamma(0) = 0,\ \sigma'_\gamma(1) = \gamma, \tag{2.35}$$

$$0 \leqslant \sigma'_\gamma(\tau) \leqslant \frac{3}{2}. \tag{2.36}$$

Положим

$$S_1(\sigma) = I + \sigma(S + \eta R - I), \quad S_2(\sigma) = S + \eta R(1-\sigma),$$

$$S(\tau) = \begin{cases} S_1\left(\sigma_0\left(\frac{\tau}{1-\eta}\right)\right), & \text{если } 0 \leqslant \tau < 1-\eta, \\ S_2\left(\sigma_\Delta\left(\frac{\tau-(1-\eta)}{\eta}\right)\right), & \text{если } 1-\eta \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &S(0) = I,\ S(1) = S,\ S'(0) = 0,\ S'(1) = -\Delta \cdot R, \\ &|S(\tau) - I| < \nu, \\ &|S^{-1}(\tau)| \leqslant \tfrac{1}{1-\nu} \leqslant 2. \end{aligned}$$

Из равенств

$$S_1(1) = S_2(0), \quad \sigma'_0(1) = \sigma'_\Delta(0) = 0$$

вытекает непрерывная дифференцируемость функции $S(\cdot)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, а из неравенств (2.33), (2.34) и (2.36) — оценка

$$|\dot S(\tau)| \leqslant \max\left\{|S + \eta R - I| \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\eta}, |R| \cdot \frac{3}{2}\right\} \leqslant 3\nu(\|A\| + 1).$$

Система с матричнозначной функцией

$$B(t) = \begin{cases} S(\tau)A(t)S^{-1}(\tau) + \dot S(\tau)S^{-1}(\tau), & t \in (T-\Delta, T), \\ A(t), & t \notin (T-\Delta, T), \end{cases}$$

где обозначено $\tau = \frac{t-(T-\Delta)}{\Delta}$, удовлетворяет требованию 1), а также 3), поскольку при $t \in (T-\Delta, T)$ имеем

$$Y(t, T-\Delta) = S(\tau)X(t, T-\Delta).$$

Выполнение требования 4) следует из непрерывной дифференцируемости функции $S(\cdot)$ и равенств

$$\begin{aligned} &B(T-\Delta+0) = S(0)A(T-\Delta+0)S^{-1}(0) + \dot S(0)S^{-1}(0) = A(T-\Delta+0), \\ &B(T-0) = SA(T-0)S^{-1} - RS^{-1} = A(T-0). \end{aligned}$$

Требование 2) проверяем непосредственно: если $t \in (T-\Delta, T)$, то

$$\begin{gathered} |B(t) - A(t)| \leqslant |S(\tau) - I| \cdot \|A\| \cdot |S^{-1}(\tau)| + \|A\| \cdot |S^{-1}(\tau)| \cdot |I - S(\tau)| + \\ + |\dot S(\tau)| \cdot |S^{-1}(\tau)| \leqslant \nu(4\|A\| + \tfrac{6}{\Delta}(\|A\| + 1)) \leqslant \tfrac{10\nu}{\Delta}(\|A\| + 1). \end{gathered}$$

Лемма 2.11 доказана.

Следующая лемма показывает, что при изучении значений ляпуновского инварианта (см. определение на с. 29) бесконечно малые возмущения без ограничения общности можно считать непрерывными.

**Лемма 2.12** (ср. [179]). *Пусть функционал* $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ *является ляпуновским инвариантом. Тогда в каждой точке* $A \in \mathcal{M}^n$ *справедливо равенство*

$$\varphi(\check{\mathfrak{B}}(A)) = \varphi(\mathfrak{B}(A)).$$

**Доказательство.** Покажем, что для всякой системы $B \in \mathfrak{B}(A)$ найдётся такая система $\widetilde{B} \in \check{\mathfrak{B}}(A)$, что $\varphi(B) = \varphi(\widetilde{B})$.

Выберем произвольно и зафиксируем $B \in \mathfrak{B}(A)$. Без ограничения общности можно считать, что матричнозначная функция $B - A$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и

$$\|B - A\| < \frac{1}{100e^{8(\|A\|+1)}(\|A\| + 2)}.$$

В противном случае заменим систему $B$ системой $A$ на некотором конечном отрезке, при этом значение функционала $\varphi$ не изменится в силу его остаточности (см. лемму 1.3).

Построим теперь систему $\widetilde{B} \in \check{\mathfrak{B}}(A)$ такую, что система $B$ приводится к системе $\widetilde{B}$ некоторым ляпуновским преобразованием.

Из кусочной непрерывности матричнозначных функций $A$ и $B$ вытекает существование такой последовательности $(t_k)$ неотрицательных чисел, монотонно стремящейся к бесконечности, что матричнозначная функция $(B - A)$ непрерывна всюду на $\mathbb{R}_+$, кроме, быть может, точек этой последовательности.

Систему $\widetilde{B}$ будем строить по индукции, отправляясь из точки $t_0 = 0$. Положим $\widetilde{B}(t) = B(t)$ при $t \in [0, t_1)$.

Пусть система $\widetilde{B}$ уже построена на промежутке $[0, t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, причём матричнозначная функция $\widetilde{B} - A$ непрерывна на этом промежутке и для $i = k$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{t\in[0,t_i)} |(\widetilde{B} - A)(t)| < \frac{1}{2}, \quad (\widetilde{B} - A)(t_i - 0) = (B - A)(t_i - 0), \tag{2.37}$$

$$\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} |(\widetilde{B} - A)(t)| \leqslant 50\delta_i e^{8(\|A\|+1)}(\|A\| + 2), \tag{2.38}$$

где обозначено

$$\delta_i = \sup_{t\in[t_{i-1},t_{i+1}]} |B(t) - A(t)|.$$

Выберем число $\Delta_k \in (0, 1/3 \min\{t_{k+1} - t_k, 1\})$ так, чтобы матричнозначная функция $A$ была непрерывна на промежутке $(t_k, t_k + 3\Delta_k]$. Положим

$$C(t) = \begin{cases} \widetilde{B}(t), & t \in [0, t_k), \\ A(t) + \frac{\Delta_k + t_k - t}{\Delta_k}(\widetilde{B} - A)(t_k - 0), & t \in [t_k, t_k + \Delta_k], \\ A(t), & t \in [t_k + \Delta_k, t_k + 2\Delta_k], \\ A(t) + \frac{t - t_k - 2\Delta_k}{\Delta_k}(B - A)(t_k + 3\Delta_k), & t \in [t_k + 2\Delta_k, t_k + 3\Delta_k], \\ B(t), & t > t_k + 3\Delta_k. \end{cases}$$

Тогда матричнозначная функция $C$ непрерывна на промежутке $(t_k, t_k+3\Delta_k)$, а матричнозначная функция $(C - A)$ — на промежутке $[0, t_{k+1})$, и справедливы неравенства

$$\sup_{t \in [t_k, t_{k+1})} |(C - A)(t)| \leqslant \delta_k, \quad \|C - A\| < 1/2.$$

Пусть $X$, $Y$ и $Z$ — операторы Коши систем $A$, $B$ и $C$ соответственно. Для сокращения записи введём ещё следующие обозначения:

$$X_i = X(t_k + i\Delta_k, t_k + (i-1)\Delta_k), \quad Y_i = Y(t_k + i\Delta_k, t_k + (i-1)\Delta_k),$$
$$Z_i = Z(t_k + i\Delta_k, t_k + (i-1)\Delta_k),\ i = 1, 2, 3, \quad S = Z_3^{-1} Y_3 Y_2 Y_1 Z_1^{-1} X_2^{-1}.$$

Применяя лемму 2.7, получаем оценки

$$|Z_3^{-1} Y_3 - I| \leqslant 2\delta_k \Delta_k e^{2(\|B\|+\|C\|)\Delta_k} \leqslant 2\delta_k \Delta_k e^{2(2\|A\|+1)},$$
$$|Y_1 Z_1^{-1} - I| \leqslant 2\delta_k \Delta_k e^{2(\|B\|+\|C\|)\Delta_k} \leqslant 2\delta_k \Delta_k e^{2(2\|A\|+1)},$$
$$|Y_2 X_2^{-1} - I| \leqslant \delta_k \Delta_k e^{2(\|A\|+\|B\|)\Delta_k} \leqslant \delta_k \Delta_k e^{2(2\|A\|+1)}.$$

Используя эти оценки и оценки

$$|X_i^{-1}| \leqslant e^{\Delta_k \|A\|} \leqslant e^{\|A\|}, \quad |Y_i| \leqslant e^{\Delta_k \|B\|} \leqslant e^{\|A\|+1},$$
$$|Z_i^{-1}| \leqslant e^{\Delta_k \|C\|} \leqslant e^{\|A\|+1},\ i = 1, 2, 3,$$

получаем цепочку

$$|S - I| \leqslant |Z_3^{-1} Y_3 - I| \cdot |Y_2| \cdot |Y_1| \cdot |Z_1^{-1}| \cdot |X_2^{-1}| + |Y_2| \cdot |Y_1 Z_1^{-1} - I| \cdot |X_2^{-1}| +$$
$$+ |Y_2 X_2^{-1} - I| < 5\delta_k \Delta_k e^{8(\|A\|+1)} < 1/2.$$

При помощи леммы 2.11 построим непрерывную на интервале $(t_k, t_k + 3\Delta_k)$ систему $D \in \mathcal{M}^n$, обладающую свойствами:

1) $D(t) = C(t)$ при $t \notin (t_k + \Delta_k, t_k + 2\Delta_k)$;
2) $|D(t) - A(t)| \leqslant 50\delta_k e^{8(\|A\|+1)}(\|A\| + 2) < 1/2$ при $t \in (t_k + \Delta_k, t_k + 2\Delta_k)$;
3) $W(t_k + 2\Delta_k, t_k + \Delta_k) = SX(t_k + 2\Delta_k, t_k + \Delta_k)$, где $W$ — оператор Коши системы $D$. По выбору $S$ тогда $W(t_k + 3\Delta_k, t_k) = Y(t_k + 3\Delta_k, t_k)$.

Наконец, положим $\widetilde{B}(t) = D(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда $\widetilde{B}$ удовлетворяет условиям (2.37) и (2.38) для $i = k + 1$.

Поскольку $\bigcup\limits_{k\geqslant 0}[t_k,t_{k+1})=\mathbb{R}_+$, система $\widetilde{B}$ построена на всей полуоси $\mathbb{R}_+$.

По построению матричнозначная функция $(\widetilde{B}-A)$ непрерывна и стремится к нулю на бесконечности (поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$), а для операторов Коши $X_B(\cdot,\cdot)$ и $X_{\widetilde{B}}(\cdot,\cdot)$ систем $B$ и $\widetilde{B}$ соответственно имеем $X_B(t,0)=X_{\widetilde{B}}(t,0)$ при всех $t\notin(t_k,t_k+3\Delta_k)$, $k\in\mathbb{N}$.

По лемме 2.7 для $t\in(t_k,t_k+3\Delta_k)$ справедлива оценка

$$|X_{\widetilde{B}}(t,t_k)X_B^{-1}(t,t_k)-I|\leqslant(\|B\|+\|\widetilde{B}\|)e^{2(\|B\|+\|\widetilde{B}\|)}.$$

Таким образом, для всякого $t\in(t_k,t_k+3\Delta_k)$ имеем

$$\begin{aligned}&|X_{\widetilde{B}}(t,0)X_B^{-1}(t,0)-I|=|X_{\widetilde{B}}(t,t_k)X_{\widetilde{B}}(t_k,0)X_B^{-1}(t_k,0)X_B^{-1}(t,t_k)-I|=\\&=|X_{\widetilde{B}}(t,t_k)X_B^{-1}(t,t_k)-I|\leqslant(\|B\|+\|\widetilde{B}\|)e^{2(\|B\|+\|\widetilde{B}\|)}.\end{aligned}$$

Мы установили, что величина $|X_{\widetilde{B}}(t,0)X_B^{-1}(t,0)|$ ограничена. Меняя в предыдущих рассуждениях системы $B$ и $\widetilde{B}$ местами, получим ограниченность величины $|X_B(t,0)X_{\widetilde{B}}^{-1}(t,0)|$. Таким образом, преобразование

$$L(t)=X_B(t,0)X_{\widetilde{B}}^{-1}(t,0),$$

переводящее систему $B$ в систему $\widetilde{B}$, является ляпуновским. Лемма 2.12 доказана.

**Лемма 2.13.** *Пусть верхнепредельный функционал $\varphi\colon\mathcal{M}^n\to\mathbb{R}$ полунепрерывен снизу в точке $A\in\mathcal{M}^n$. Тогда он принадлежит первому классу Бэра в этой точке в широком смысле.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольный интервал $(a,b)$, содержащий точку $\varphi(A)$ $(a,b\in\overline{\mathbb{R}})$.

Пользуясь полунепрерывностью снизу функционала $\varphi$ в точке $A$, выберем такую открытую окрестность $U$ точки $A$, чтобы $\varphi(U)\subset(a,+\infty)$. Тогда по свойствам прообраза множества имеем цепочку

$$\varphi^{-1}\left((a,b)\right)\bigcap U=\varphi^{-1}\left((-\infty,b)\right)\bigcap\varphi^{-1}\left((a,+\infty)\right)\bigcap U=\varphi^{-1}\left((-\infty,b)\right)\bigcap U.$$

Из леммы 1.14 получаем, что множество $\varphi^{-1}\left([b,+\infty)\right)$ есть множество типа $\mathscr{G}_\delta$, следовательно, множество $\varphi^{-1}\left((-\infty,b)\right)$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Учитывая, что всякое открытое множество есть множество типа $\mathscr{F}_\sigma$ (см. лемму 1.12), приходим к выводу, что множество $\varphi^{-1}((a,b))\bigcap U$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Лемма 2.13 доказана.

**Доказательство теоремы 2.5.** Для каждого $i\in\mathbb{N}_n$ показатель Ляпунова $\lambda_i\colon\mathcal{M}^n\to\mathbb{R}$ является верхнепредельным функционалом (см. лемму 1.17) и ляпуновским инвариантом (см. лемму 1.4) и, стало быть, в силу леммы 1.3 является остаточным функционалом.

Необходимость вытекает теперь из леммы 2.10, леммы 2.12 и равенства

$$\inf_{B\in\mathfrak{B}(A)} \lambda_i(B) = \varliminf_{B\to A} \lambda_i(B),$$

установленного для $i = 1$ в [176], а для $i = 2$ — в [192].

Достаточность указанного условия вытекает из леммы 2.13 и была ранее сообщена в докладе [170] для значений $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Теорема 2.5 доказана.

**Лемма 2.14.** *Пусть заданы остаточный функционал* $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ *и система* $A \in \mathcal{M}^n$. *Пусть, далее, существуют системы* $B, C \in \check{\mathfrak{B}}(A)$ *такие, что*

$$\varphi(A) \neq \varphi(B), \quad \varphi(A) \neq \varphi(C), \quad \varphi(B) \neq \varphi(C). \tag{2.39}$$

*Тогда* $\varphi$ *не принадлежит первому классу Бэра в точке* $A$ *в узком смысле.*

**Доказательство.** Допустим противное. Положим

$$S = \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}\backslash\{\varphi(B)\}\right).$$

Поскольку множество $\mathbb{R}\backslash\{\varphi(B)\}$ является открытой окрестностью точки $\varphi(A)$, по предположению найдется открытая окрестность $U_1$ точки $A$ такая, что $S\bigcap U_1$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Аналогично, найдётся открытая окрестность $U_2$ точки $A$ такая, что $\varphi^{-1}\left(\mathbb{R}\backslash\{\varphi(C)\}\right)\bigcap U_2$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Выберем $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{B}_\delta(A) \subset U_1\bigcap U_2$. Тогда множество $S\bigcap\mathcal{B}_\delta(A) = S\bigcap U_1\bigcap\mathcal{B}_\delta(A)$ также является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Учитывая теперь, что $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ замкнуто (по лемме 2.8), получаем, что множество $S\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A) = S\bigcap\mathcal{B}_\delta(A)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$, а множество

$$P = \varphi^{-1}(\{\varphi(B)\})\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A) = \left(\mathcal{M}^n\backslash\left(S\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)\right)\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$$

является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$. По лемме 2.9 множество $P$ всюду плотно в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$, поскольку $B \in \varphi^{-1}(\{\varphi(B)\})\bigcap\check{\mathfrak{B}}(A) \neq \varnothing$.

Аналогично получаем, что множество

$$Q = \varphi^{-1}\left(\{\varphi(C)\}\right)\bigcap\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$$

есть $\mathscr{G}_\delta$-множество, всюду плотное в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$.

По теореме Бэра [106, § 34, V, 1] множество $P\bigcap Q$ обязано быть всюду плотным в $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$ как пересечение всюду плотных множеств типа $\mathscr{G}_\delta$, лежащих в полном (по лемме 2.8) пространстве $\check{\mathfrak{B}}_\delta(A)$. Но $P\bigcap Q = \varnothing$, поскольку $\varphi(B) \neq \varphi(C)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Замечание 2.10.** Как показывает следующий пример, условие (2.39) нельзя, вообще говоря, заменить условием $\varphi(A) < \varphi(B)$, даже дополнительно предположив, что $\varphi$ — верхнепредельный функционал.

**Пример 2.2.** Зафиксируем $A_0 \in \mathcal{M}^2$ такое, что (см. [29, пример 13.5.1])

$$\lambda_2(A_0) < \varlimsup_{B \to A_0} \lambda_2(B) \equiv \Omega(A_0).$$

Положим

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2(A) \geqslant \Omega(A_0), \\ 0, & \text{если } \lambda_2(A) < \Omega(A_0). \end{cases}$$

Так как $\lambda_2$ — ляпуновский инвариант (в силу леммы 1.4), то $\varphi$ — тоже ляпуновский инвариант. В частности, $\varphi$ является остаточным функционалом (см. лемму 1.3). Поскольку $\lambda_2 \colon \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R}$ — верхнепредельный функционал (см. лемму 1.17), из леммы 1.14 получаем, что множество

$$\{A \in \mathcal{M}^n : \lambda_2(A) \geqslant \Omega(A_0)\}$$

есть $\mathscr{G}_\delta$-множество, а его характеристическая функция $\varphi$ по лемме 1.15 является верхнепредельной. В силу сказанного выше множество $[\varphi = 0]$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$, поэтому для всякого $r \in \mathbb{R}$ множество $\varphi^{-1}\left((-\infty, r)\right)$ также является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Так как $\varphi(A_0) = 0$, то $\varphi$ принадлежит первому классу Бэра в точке $A_0$ в узком смысле. Далее, как показано в теореме 8.1 работы [177], справедливо включение $\lambda_2(\mathfrak{B}(A_0)) \ni \Omega(A_0)$, поэтому с учетом леммы 2.12 имеем

$$\varphi(\check{\mathfrak{B}}(A_0)) = \varphi(\mathfrak{B}(A_0)) = \{0, 1\},$$

т. е. найдётся такое $B_0 \in \check{\mathfrak{B}}(A_0)$, что

$$0 = \varphi(A_0) < \varphi(B_0) = 1.$$

**Доказательство теоремы 2.6.** Докажем сначала полунепрерывность сверху. Выберем произвольно и зафиксируем $i \in \mathbb{N}_n$. Предположим, что, напротив,

$$\lambda_i(A) < \varlimsup_{B \to A} \lambda_i(B).$$

Согласно результату [75]

$$\lambda_i\left(\mathfrak{B}(A)\right) \supset [\lambda_i(A), \varlimsup_{B \to A} \lambda_i(B)].$$

Но в силу леммы 2.12

$$\lambda_i\left(\mathfrak{B}(A)\right) = \lambda_i(\check{\mathfrak{B}}(A)),$$

поэтому найдутся $B, C \in \check{\mathfrak{B}}(A)$ такие, что выполнено $\lambda_i(A) < \lambda_i(B) < \lambda_i(C)$. Применяя лемму 2.14, получим противоречие.

Вторая часть утверждения вытекает из теоремы 2.5 с учётом замечания 2.9. Теорема 2.6 доказана.

# Глава 3

# Границы подвижности верхнепредельной ляпуновской характеристики при ограниченных возмущениях

## 3.1 Бэровский класс верхней границы подвижности

Основным результатом этого раздела является следующее утверждение (см. обозначения на с. 35).

**Теорема 3.1.** *Если* $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ *— верхнепредельный слабо ляпуновский инвариант, то* $\overline{\varphi}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ *— тоже верхнепредельный слабо ляпуновский инвариант. В частности,* $\overline{\varphi}$ *принадлежит второму классу Бэра.*

**Замечание 3.1.** Из результата [38] следует, что если функционал $\overline{\varphi}$ не равен тождественно константе, то он не принадлежит первому классу Бэра, т. е. принадлежит в точности второму классу.

Перед доказательством теоремы установим несколько лемм.

Следующая лемма показывает, что при изучении значений слабо ляпуновского инварианта в окрестности данной системы малые возмущения без ограничения общности можно считать непрерывными.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $\delta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— ограниченная непрерывная функция,* $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *— слабо ляпуновский инвариант. Тогда для любой системы* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *справедливо равенство* (определения классов $\mathcal{B}^n_\delta$ и $\check{\mathcal{B}}^n_\delta$ см. на с. 24)

$$\{\varphi(A+Q) : Q \in \mathcal{B}^n_\delta\} = \{\varphi(A+Q) : Q \in \check{\mathcal{B}}^n_\delta\}.$$

**Доказательство.** Положим $K = \sup\{\delta(s) : s \in \mathbb{R}_+\}$,

$$f(t) = \sup_{s\in[0,t]} |A(s)|, \quad g(t) = \frac{\exp(-2\int_0^t (f(\tau)+K)\,d\tau - t)}{2(f(t)+K)+1}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Заметим, что функция $f$ неубывает, а функция $g$ убывает. Выберем произвольно и зафиксируем $Q \in \mathcal{B}^n_\delta$. Пусть матричнозначная функция $Q$ непрерывна всюду на $\mathbb{R}_+$, кроме, быть может, точек возрастающей последовательности $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ положительных чисел, причём $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_k = \min\{t_k - t_{k-1}, t_{k+1} - t_k, g(t_{k+1})2^{-k}\}/2$, где $t_0 \equiv 0$.

Пусть $s\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ — какая-нибудь непрерывная функция, равная нулю в точках последовательности $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и единице на множестве

$$\mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (t_k - \varepsilon_k, t_k + \varepsilon_k).$$

Пусть $t'' \geqslant t' \geqslant 0$. Тогда для некоторых натуральных $k'' \geqslant k'$ выполнены включения $t' \in [t_{k'}, t_{k'+1})$ и $t'' \in [t_{k''}, t_{k''+1})$. Справедлива цепочка неравенств

$$\int_{t'}^{t''} |Q(\tau) - s(\tau)Q(\tau)|\, d\tau \leqslant \sum_{k=k'}^{k''+1} 2K\varepsilon_k \leqslant Kg(t_{k'+1})2^{1-k'} \leqslant Kg(t') \leqslant Ke^{-t'},$$

из которой получаем, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ интеграл

$$I(t) = \int_t^{+\infty} |Q(\tau) - s(\tau)Q(\tau)|\, d\tau$$

сходится и удовлетворяет оценке

$$I(t) \leqslant Kg(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Замечая, что $A+Q, A+sQ \in \mathcal{B}^n_{f+\delta}$ и применяя лемму 2.6, приходим к выводу, что системы $A+Q$ и $A+sQ$ слабо ляпуновски эквивалентны. Следовательно, $\varphi(A+Q) = \varphi(A+sQ)$, причём по построению $sQ \in \check{\mathcal{B}}^n_\delta$. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** *Пусть $X$ — полное сепарабельное метрическое пространство, а для функции $\varphi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ справедливо представление*

$$\varphi(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{kl}(x), \quad x \in X, \tag{3.1}$$

*где $\varphi_{kl}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $k, l \in \mathbb{N}$, — непрерывные функции. Тогда если для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $[\varphi \geqslant r]$ либо пусто, либо плотно в $X$, то выполнено равенство*

$$S \equiv \sup_{x\in X} \varphi(x) = \inf_{j,k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in U_j} \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{kl}(x) \equiv \tilde{S},$$

*где $U_j$, $j \in \mathbb{N}$, — произвольная счётная база топологии пространства $X$.*

**Доказательство.** Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi_k(x) = \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{kl}(x), \quad x \in X.$$

Выберем произвольно и зафиксируем $r \in \mathbb{R}$.

1. Предположим, что $S > r$. Тогда множество $X_r \equiv [\varphi \geqslant r]$ непусто и, следовательно, плотно в пространстве $X$. Тогда для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем $X_r \bigcap U_j \neq \varnothing$, откуда вытекает

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{x\in U_j} \varphi(x) \geqslant r. \tag{3.2}$$

В силу (3.1) для любых $k, j \in \mathbb{N}$ и $x \in U_j$ справедливо неравенство $\varphi_k(x) \geqslant \varphi(x)$, беря от обеих частей которого сначала точную верхнюю грань по $x \in U_j$, а затем точную нижнюю грань по $j, k \in \mathbb{N}$, получим

$$\inf_{j,k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in U_j} \varphi_k(x) \geqslant \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{x\in U_j} \varphi(x).$$

Из полученного неравенства с учётом (3.2) заключаем, что $\tilde S \geqslant r$.

2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $Q_k = [\varphi_k > r]$. Предположим, что $\tilde S > r$. Тогда для всякого $j \in \mathbb{N}$ имеем $Q_k \bigcap U_j \neq \varnothing$, поэтому $Q_k$ плотно в $X$. Далее, $Q_k$ открыто в силу равенства

$$Q_k = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} [\varphi_{kl} > r]$$

и непрерывности функционалов $\varphi_{kl}$, $k, l \in \mathbb{N}$. Из теоремы Бэра [106, § 34, V, 1] получаем, что множество $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ плотно в $X$ и, стало быть, непусто. Пусть $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_k(x_0) > r$, откуда вытекает, что $\varphi(x_0) \geqslant r$ и, тем более, $S \geqslant r$.

3. Если допустить, что $S \neq \tilde S$, то для некоторого $r \in \mathbb{R}$ имели бы одно из двойных неравенств: $\tilde S < r < S$ либо $S < r < \tilde S$. Но первое неравенство противоречит п. 1, а второе — п. 2. Лемма доказана.

**Лемма 3.3.** *Метрическое пространство* $(C\widetilde{\mathcal{M}}^n, \rho_C)$ *сепарабельно.*

**Доказательство.** Покажем, что множество $\mathcal{P}^n$ систем, коэффициенты которых (в базисе $\mathbf{e}$, см. раздел 1.1) являются многочленами с рациональными коэффициентами, плотно в $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Пусть заданы произвольные $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $T > 1/\varepsilon$. Тогда из определения метрики $\rho_C$ получаем, что для любого $B \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ выполнено неравенство

$$\rho_C(A, B) \leqslant \max\{\sup_{t \in [0,T]} |A(t) - B(t)|, \varepsilon\}. \tag{3.3}$$

Поскольку множество многочленов с рациональными коэффициентами, заданных на отрезке $[0, T]$, плотно в пространстве $C[0, T]$ непрерывных функций $[0, T] \to \mathbb{R}$ с равномерной метрикой, то существует система $B \in \mathcal{P}^n$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{t \in [0,T]} |A(t) - B(t)| < \varepsilon.$$

Из (3.3) тогда вытекает, что $\rho_C(A, B) \leqslant \varepsilon$. Лемма доказана.

Ключевым утверждением данного раздела является следующая

**Лемма 3.4.** *Если* $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ *— верхнепредельный слабо ляпуновский инвариант, то для любой ограниченной непрерывной функции* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *функционал* $\tilde\varphi_f\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$, *задаваемый равенством,*

$$\tilde\varphi_f(A) = \sup_{Q \in \mathcal{B}^n_f} \varphi(A + Q), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

*является верхнепредельным.*

**Доказательство.** Выберем произвольно и зафиксируем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. По условию существует такая последовательность непрерывных функционалов

$\varphi_m\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}$, что

$$\varphi(A+Q)=\varlimsup_{m\to\infty}\varphi_m(A+Q),\quad Q\in\check{\mathcal{B}}^n_f.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\varphi(A+Q)=\inf_{k\in\mathbb{N}}\sup_{l\in\mathbb{N}}\varphi_{k+l}(A+Q),\quad Q\in\check{\mathcal{B}}^n_f,$$

и определим функционалы $\varphi_{kl}\colon \check{\mathcal{B}}^n_f\to\mathbb{R},\ k,l\in\mathbb{N}$, при помощи равенства $\varphi_{kl}(Q)=\varphi_{k+l}(A+Q),\ Q\in\check{\mathcal{B}}^n_f$. Множество $\check{\mathcal{B}}^n_f$ замкнуто в полном пространстве $C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и, следовательно, само полно. Кроме того, оно сепарабельно как подпространство сепарабельного пространства $(C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C,\rho_C)$ (см. лемму 3.3).

Для каждого $r\in\mathbb{R}$ положим $F_r=\{Q\in\check{\mathcal{B}}^n_f : \varphi(A+Q)\geqslant r\}$. Пусть для некоторых $r\in\mathbb{R}$ и $\tilde{Q}\in\check{\mathcal{B}}^n_f$ выполнено включение $\tilde{Q}\in F_r$. Покажем, что множество $F_r$ плотно в пространстве $\check{\mathcal{B}}^n_f$. Действительно, пусть заданы $D\in\check{\mathcal{B}}^n_f$ и $\varepsilon>0$. Положим

$$\tilde{D}(t)=\begin{cases} D(t) & \text{при } t\in[0,T],\\ (T+1-t)D(t)+(t-T)\tilde{Q}(t) & \text{при } t\in(T,T+1),\\ \tilde{Q}(t) & \text{при } t\geqslant T+1,\end{cases}$$

где $T=1/\varepsilon$. Тогда по построению $\rho_C(D,\tilde{D})<\varepsilon$ и в силу остаточности функционала $\varphi$ (см. лемму 1.3) выполнено $\varphi(A+\tilde{D})=\varphi(A+\tilde{Q})\geqslant r$, откуда вытекает, что $\tilde{D}\in F_r$. Применяя лемму 3.2, получаем

$$\check{\varphi}_f(A)\equiv\sup_{Q\in\check{\mathcal{B}}^n_f}\varphi(A+Q)=\inf_{j,k\in\mathbb{N}}\sup_{Q\in U_j}\sup_{l\in\mathbb{N}}\varphi_{k+l}(A+Q),\tag{3.4}$$

где $U_j,\ j\in\mathbb{N}$, — какая-нибудь счётная база топологии пространства $\check{\mathcal{B}}^n_f$.

Зафиксируем $j,k\in\mathbb{N}$. Для любого $r\in\mathbb{R}$ справедливо представление

$$\{A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n : \sup_{Q\in U_j}\sup_{l\in\mathbb{N}}\varphi_{k+l}(A+Q)>r\}=\bigcup_{Q\in U_j}\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\{A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n : \varphi_{k+l}(A+Q)>r\}.$$

Множества, стоящие под знаком объединения, открыты в силу непрерывности функционалов $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C\to\mathbb{R}$, действующих по правилу $A\mapsto\varphi_{k+l}(A+Q)$, $l\in\mathbb{N},\ Q\in U_j$, поэтому их объединение тоже открыто. Следовательно, функционал $\psi_{jk}\colon\widetilde{\mathcal{M}}^n_C\to\overline{\mathbb{R}}$, задаваемый равенством

$$\psi_{jk}(A)=\sup_{Q\in U_j}\sup_{l\in\mathbb{N}}\varphi_{kl}(A+Q),\quad A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

принадлежит классу $(\mathscr{G},{}^*)$, т. е. полунепрерывен снизу. Из (3.4) и первого правила Юнга-Хаусдорфа получаем, что функционал $\check{\varphi}_f$ принадлежит классу $(^*, \mathscr{G}_\delta)$, т. е. является верхнепредельным (см. лемму 1.14). Требуемое вытекает теперь из леммы 3.1. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 3.1.** В лемме 1.10 установлено, что $\overline{\varphi}$ — слабо ляпуновский инвариант. Остаётся доказать, что функционал $\overline{\varphi}$ является верхнепредельным. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ функционал $\tilde{\varphi}_{1/m} \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$, задаваемый равенством

$$\tilde{\varphi}_{1/m}(A) = \sup_{Q \in \mathcal{B}^n_{1/m}} \varphi(A+Q), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

по лемме 3.4 является верхнепредельным. Требуемое вытекает теперь из равенства

$$\overline{\varphi}(A) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_{1/m}(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

и п. 4 леммы 1.15. Теорема доказана.

## 3.2 Максимальные показатели систем с неограниченными коэффициентами

В этом разделе ряд известных результатов о максимальных показателях Ляпунова (см. определение в разделе 1.6) линейных дифференциальных систем с ограниченными на полуоси коэффициентами (таких, как их одновременная достижимость в классе бесконечно малых возмущений, принадлежность второму классу Бэра в компактно-открытой топологии и др.) перенесён на системы с неограниченными коэффициентами.

Показатель Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве линейных уравнений $\widetilde{\mathcal{M}}^1_U$, непрерывен (см. лемму 1.6), поэтому всюду в пределах данного раздела считаем, что $n \geqslant 2$.

Пусть $M$ — метрическое пространство. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.5}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, с непрерывной матричнозначной функцией $A \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$. Класс всех таких семейств (и соответствующих им отображений $A(\cdot,\cdot)$) мы ранее условились обозначать через $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ (см. определение на с. 30 и лемму 1.5). Зафиксировав $i \in \mathbb{N}_n$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие максимальный $i$-й показатель системы (3.5), получим функцию $\overline{\lambda}_i(\cdot\,; A) \colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, которая называется *максимальным $i$-м показателем семейства* (3.5).

В. М. Миллионщиковым в докладе [148] поставлена задача о нахождении минимального класса Бэра (см. определение на с. 49), которому принадлежит максимальный $i$-й показатель семейства (3.5), и о плотности точек полунепрерывности сверху этой функции, а затем в [149] анонсировано её частичное решение при следующем дополнительном условии на отображение $A(\cdot,\cdot)$: у всякой точки $\mu \in M$ найдётся такая окрестность $U_\mu$, что для любого $T > 0$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\nu\in U_\mu} |A(t,\nu)| < +\infty.$$

А. Н. Ветохин доказал [38], что для пространства $M = \mathcal{M}^n_C$ (а также для $M = C\mathcal{M}^n_C$) и отображения $A(\cdot,\mu) = \mu$ указанные функции не принадлежат первому классу Бэра, а И. Н. Сергеевым для тех же пространства и отображения анонсирована теорема [194] о принадлежности этих функций второму классу Бэра.

Следующая теорема полностью решает задачу В. М. Миллионщикова о классе Бэра максимальных показателей непрерывного семейства линейных дифференциальных систем.

**Теорема 3.2** ([254]). *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_n$, топологического пространства $M$ и семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ функция $\overline{\lambda}_i(\cdot\,;A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму классу Бэра. Если $M$ метризуемо полной метрикой, то в $M$ существует плотное подмножество типа $\mathscr{G}_\delta$, в каждой точке которого функция $\overline{\lambda}_i(\cdot\,;A)$ полунепрерывна сверху.*

Следующая теорема утверждает, что максимальные показатели оценивают не только характеристические показатели решений систем, достаточно близких к исходной, но и дают равномерную оценку их роста (определение пространства $\check{\mathcal{B}}^n_f$ см. на стр. 24).

**Теорема 3.3** ([254]). *Если для $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, $i \in \mathbb{N}_n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\overline{\lambda}_i(A) < -\alpha$, то существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $C > 0$, что для всякого $Q \in \check{\mathcal{B}}^n_\varepsilon$ система $A + Q$ обладает $i$-мерным подпространством решений, удовлетворяющих оценке*

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.6}$$

**Замечание 3.2.** В случае, когда коэффициенты системы $A$ ограничены, утверждение теоремы 3.3 вытекает из [176, теорема 11.3] и [29, теорема 15.2.1], а в случае неограниченных коэффициентов для $i = n$ — из результата, анонсированного в докладе [141].

Следующая теорема решает задачу, поставленную В. М. Миллионщиковым в докладе [151].

**Теорема 3.4** ([254]). *Для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющая условиям*

$$\rho_U(A,B) < \varepsilon, \quad \lim_{t\to+\infty} |B(t) - A(t)| = 0, \quad \lambda_i(B) = \overline{\lambda}_i(A), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

Другими словами, теорема 3.4 утверждает, что максимальные показатели любой системы достигаются все одновременно, причём даже во множестве бесконечно малых возмущений.

**Замечание 3.3.** Соответствующее утверждение для системы $A$ с ограниченными коэффициентами вытекает из результатов работы [176].

Сначала установим несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 3.5.** *Пусть заданы система* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, *непрерывная функция* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *и убывающая (нестрого) последовательность полунепрерывных снизу функционалов* $\varphi_k\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, *со следующим свойством: для любых* $\varepsilon, T > 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *существует такое* $k_0 \geqslant k$, *что для всяких* $B_1, B_2 \in \check{\mathcal{B}}^n_f$, *совпадающих при всех* $t \geqslant T$, *выполнено неравенство*

$$|\Phi(\varphi_{k_0}(A + B_1)) - \Phi(\varphi_{k_0}(A + B_2))| < \varepsilon, \tag{3.7}$$

*где* $\Phi$ *— ограничивающий гомеоморфизм* (1.33). *Тогда имеет место равенство*

$$\zeta \equiv \sup_{B \in \check{\mathcal{B}}^n_f} \inf_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(A + B) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{B \in \check{\mathcal{B}}^n_f} \varphi_k(A + B) \equiv \eta. \tag{3.8}$$

**Доказательство.** 1. Неравенство $\varphi_k(A + B) \leqslant \sup\limits_{C \in \check{\mathcal{B}}^n_f} \varphi_k(A + C)$ очевидно выполнено для любых $k \in \mathbb{N}$ и $B \in \check{\mathcal{B}}^n_f$. Переходя в этом неравенстве сначала к точной нижней грани по $k \in \mathbb{N}$, а затем к точной верхней грани по $B \in \check{\mathcal{B}}^n_f$, получаем $\zeta \leqslant \eta$.

2. Докажем обратное неравенство. Зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого $\xi > 0$ выполнено неравенство

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{B \in \check{\mathcal{B}}^n_f} \varphi_k(A + B) > \lambda + \xi. \tag{3.9}$$

Выберем произвольно и зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$\mathcal{P}_k = \{B \in \check{\mathcal{B}}^n_f : \varphi_k(A + B) > \lambda\}.$$

Так как по условию функционал $\varphi_k$ полунепрерывен снизу, то это же верно и для функционала $\varphi^A_k\colon \check{\mathcal{B}}^n_f \to \overline{\mathbb{R}}$, действующего по правилу

$$\varphi^A_k(B) = \varphi_k(A + B), \quad B \in \check{\mathcal{B}}^n_f.$$

Следовательно, множество $\mathcal{P}_k$ открыто относительно $\check{\mathcal{B}}^n_f$.

3. Покажем, что $\mathcal{P}_k$ плотно в $\check{\mathcal{B}}^n_f$. Действительно, пусть заданы $B \in \check{\mathcal{B}}^n_f$ и $\delta > 0$. Выберем по $T = 1+\delta^{-1}$ и $\varepsilon = \Phi(\lambda+\xi)-\Phi(\lambda)$ такое $k_0 \geqslant k$, что для всяких $B_1, B_2 \in \check{\mathcal{B}}^n_f$, совпадающих при всех $t \geqslant T$, выполнено неравенство (3.7). В силу неравенства (3.9) существует такое $B_0 \in \check{\mathcal{B}}^n_f$, что $\varphi_{k_0}(A + B_0) > \lambda + \xi$.

Положим

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(t) & \text{при } t \in [0, T-1], \\ (T-t)B(t) + (t-T+1)B_0(t) & \text{при } t \in [T-1, T], \\ B_0(t) & \text{при } t \geqslant T. \end{cases}$$

Из определения $\tilde{B}$ получаем, что $\tilde{B} \in \check{\mathcal{B}}^n_f$, причём $\rho_C(B, \tilde{B}) \leqslant T^{-1} < \delta$ и по выбору $k_0$ имеем

$$\Phi(\varphi_{k_0}(A + \tilde{B})) > \Phi(\varphi_{k_0}(A + B_0)) - \varepsilon > \Phi(\lambda + \xi) - \varepsilon = \Phi(\lambda).$$

Следовательно, $\varphi_{k_0}(A+\tilde{B}) > \lambda$, откуда в силу неравенства $k_0 \geqslant k$ и убывания последовательности $(\varphi_i)$ получаем включение $\tilde{B} \in \mathcal{P}_{k_0} \subset \mathcal{P}_k$.

4. Множество $\check{\mathcal{B}}^n_f$ замкнуто в полном пространстве $C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и, следовательно, само полно. Согласно теореме Бэра [207, § 28, IX] получаем, что множество $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_k$ плотно в $\check{\mathcal{B}}^n_f$ и, следовательно, непусто. Пусть $B_* \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_k$. Тогда имеем цепочку неравенств

$$\sup_{B\in\check{\mathcal{B}}^n_f} \inf_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(A+B) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(A+B_*) \geqslant \lambda.$$

5. В силу произвольности $\lambda$ из доказанного выше вытекает неравенство $\zeta \geqslant \eta$. В противном случае для некоторого $\lambda$ имели бы $\zeta < \lambda < \eta$, что противоречит доказанному. Итак, неравенство $\zeta \geqslant \eta$, а вместе с ним и утверждение леммы установлены. Лемма доказана.

**Лемма 3.6** (ср. [135, лемма 3])**.** *Пусть $K$ — компактное топологическое пространство, а $(f_i)$ — возрастающая (нестрого) последовательность полунепрерывных снизу функций $K \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда справедливо равенство*

$$A \equiv \inf_{x\in K} \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \inf_{x\in K} f_i(x) \equiv B.$$

**Доказательство.** 1. Очевидно, что неравенство $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \geqslant f_i(x)$ справедливо для любых $x \in K$ и $i \in \mathbb{N}$. Переходя в этом неравенстве сначала к точной нижней грани по $x \in K$, а затем к точной верхней грани по $i \in \mathbb{N}$ (от которого левая часть не зависит), получаем неравенство $A \geqslant B$.

2. Докажем обратное неравенство. Предположим, что $B < r$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$. Тогда для всякого $i \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент $x \in K$, для которого $f_i(x) < r$. Значит, для всякого $i \in \mathbb{N}$ множество

$$F_i = \{x \in K : f_i(x) \leqslant r\}$$

непусто. Так как по условию функция $f_i$ полунепрерывна снизу, то множество $F_i$ замкнуто.

3. Совокупность множеств $F_i$, $i \in \mathbb{N}$, является центрированной, поскольку $\bigcap_{i=1}^q F_i = F_q$ в силу возрастания последовательности $(f_i)$. Как известно, в компактном пространстве $K$ всякая центрированная совокупность замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Поэтому найдётся такой элемент $x_* \in K$, для которого при любом $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $f_i(x_*) \leqslant r$. Тогда и $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i(x_*) \leqslant r$, откуда получаем, что $A \leqslant r$. Следовательно, неравенство $A > B$ невозможно, так как в противном случае для некоторого $r \in \mathbb{R}$ имели бы $A > r > B$, что противоречит уже доказанному. Лемма доказана.

**Лемма 3.7.** *Для любых* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, *непрерывной функции* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *и* $i \in \mathbb{N}_n$ *выполнено равенство*

$$\check{\lambda}_i^f(A) \equiv \sup_{B\in\check{\mathfrak{B}}_f^n} \lambda_i(A+B) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{B\in\check{\mathfrak{B}}_f^n} \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \frac{1}{t} \ln |X_{A+B}(t,0)|_L|. \qquad (3.10)$$

*Кроме того, функционал* $\tilde{\lambda}_i^f : \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *является верхнепредельным.*

**Доказательство.** В пределах доказательства считаем, где это нужно, что пространство $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ наделено компактно-открытой топологией.

1. Пусть $\varphi_i^{kl}$, $k,l \in \mathbb{N}$, — функционалы, определённые равенством (1.10). Тогда в силу леммы 1.1 и первого правила Юнга-Хаусдорфа функционалы $\psi_i^k\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, задаваемые равенством

$$\psi_i^k(A) = \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_i^{kl}(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

полунепрерывны снизу.

Заметим, что $G_i(\mathbb{R}^n)$ со стандартной топологией – компакт, а функции $G_i(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ переменной $L \in G_i(\mathbb{R}^n)$, стоящие в (1.10) под знаком точной нижней грани по $L$, непрерывны [136, лемма 2]. В силу леммы 3.6 имеем

$$\psi_i^k(A) = \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{l\in\mathbb{N}} \max_{t\in[k,k+l]} \frac{1}{t} \ln |X_A(t,0)|_L| = \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \frac{1}{t} \ln |X_A(t,0)|_L|, \qquad (3.11)$$

откуда для всякого $k \in \mathbb{N}$ имеем неравенство $\psi_i^{k+1}(A) \leqslant \psi_i^k(A)$, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$.

2. Проверим, что для любых $\varepsilon, T > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $k_0 \geqslant k$, что для всяких $B_1, B_2 \in \check{\mathfrak{B}}_f^n$, совпадающих при всех $t \geqslant T$, выполнено неравенство

$$|\Phi(\psi_i^{k_0}(A+B_1)) - \Phi(\psi_i^{k_0}(A+B_2))| < \varepsilon. \qquad (3.12)$$

Для всяких $C \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, $L \in G_i(\mathbb{R}^n)$ и $t \in \mathbb{R}_+$ из соотношений

$$X_C(t,0)|_L = X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L} X_C(T,0)|_L,$$
$$X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L} = X_C(t,0)|_L X_C^{-1}(T,0)|_{X_C(T,0)L}$$

получаем двустороннюю оценку

$$\ln|X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L}| - \ln|X_C^{-1}(T,0)| \leqslant \ln|X_C(t,0)|_L| \leqslant \\ \leqslant \ln|X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L}| + \ln|X_C(T,0)|.$$

Используя оценку (1.6), получаем

$$|\ln|X_C(t,0)|_L| - \ln|X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L}|| \leqslant Tc_T,$$

где $c_T \equiv \sup\limits_{\tau\in[0,T]} |C(\tau)|$, откуда, используя свойство (1.34) ограничивающего гомеоморфизма, имеем

$$\left|\Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_C(t,0)|_L|\bigr) - \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L}|\bigr)\right| \leqslant t^{-1}Tc_T.$$

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу свойств точных граней имеем

$$\Bigl|\inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_C(t,0)|_L|\bigr) - \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_C(t,T)|_{X_C(T,0)L}|\bigr)\Bigr| \leqslant \\ \leqslant k^{-1}Tc_T.$$

Так как $X_C(T,0) \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$, то отображение $L \mapsto X_C(T,0)L$ – биекция $G_i(\mathbb{R}^n)$, поэтому

$$\Bigl|\inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_C(t,0)|_L|\bigr) - \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_C(t,T)|_L|\bigr)\Bigr| \leqslant \frac{Tc_T}{k}.$$

Полагая в полученном неравенстве $C = A + B_1$, получаем

$$\Bigl|\inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_{A+B_1}(t,0)|_L|\bigr) - \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_{A+B_1}(t,T)|_L|\bigr)\Bigr| \leqslant \\ \leqslant k^{-1}Tc_{A,f},$$

где $c_{A,f} \equiv \sup\limits_{\tau\in[0,T]} (|A(\tau)| + f(\tau))$. Аналогичное неравенство выполнено и для $A + B_2$. Учитывая, что $B_1$ и $B_2$ (а значит, $A + B_1$ и $A + B_2$) совпадают при всех $t \geqslant T$, при $k \geqslant T$ имеем

$$\Bigl|\inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_{A+B_1}(t,0)|_L|\bigr) - \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \Phi\bigl(t^{-1}\ln|X_{A+B_2}(t,0)|_L|\bigr)\Bigr| \leqslant \\ \leqslant 2k^{-1}Tc_{A,f}.$$

Поскольку $\Phi$ — возрастающая функция, то она перестановочна со знаками точной верхней и нижней граней. Тогда любое $k_0 \geqslant T + k + 2Tc_{A,f}/\varepsilon$ гарантирует выполнение неравенства (3.12). Применяя леммы 1.1 и 3.5, получим (3.10).

3. Используя равенство (3.11), запишем выражение (3.10) в виде

$$\check{\lambda}_i^f(A) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{B\in\check{\mathfrak{B}}_f^n} \sup_{l\in\mathbb{N}} \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \max_{t\in[k,k+l]} \frac{1}{t} \ln |X_{A+B}(t,0)|_L|.$$

Из леммы 1.1 вытекает, что функционалы $A \mapsto \varphi_i^{kl}(A+B)$, $k,l\in\mathbb{N}$, $B\in\check{\mathfrak{B}}_f^n$, непрерывны. В силу первого правила Юнга-Хаусдорфа функционалы

$$\eta_i^k(A) \equiv \sup_{B\in\check{\mathfrak{B}}_f^n} \sup_{l\in\mathbb{N}} \psi_i^{kl}(A+B) = \sup_{(B,l)\in\check{\mathfrak{B}}_f^n\times\mathbb{N}} \psi_i^{kl}(A+B)$$

принадлежат классу $(\mathscr{G},^*)$ (т. е. полунепрерывны снизу). Из представления

$$\check{\lambda}_i^f(A) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \eta_i^k(A), \quad A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

и первого правила Юнга-Хаусдорфа получаем, что функционал $\check{\lambda}_i^f$ принадлежит классу $(^*,\mathscr{G}_\delta)$, т. е. является верхнепредельным (см. лемму 1.14). Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 3.3.** Пусть заданы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$, такие, что $\overline{\lambda}_i(A) < -\alpha$. Тогда из определения максимального показателя вытекает, что для некоторого $\varepsilon\in(0,1)$ выполнено неравенство $\sup\limits_{B\in\check{\mathfrak{B}}_\varepsilon} \lambda_i(A+B) < -\alpha$. Применяя лемму 3.7, получаем, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{B\in\check{\mathfrak{B}}_\varepsilon} \inf_{L\in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t\geqslant k} \frac{1}{t} \ln |X_{A+B}(t,0)|_L| < -\alpha.$$

Следовательно, для некоторого $k\in\mathbb{N}$ справедливо следующее: для любого $B\in\check{\mathfrak{B}}_\varepsilon$ существует такое $i$-мерное подпространство $L\subset\mathbb{R}^n$, что для всех $t\geqslant k$ выполнено неравенство $t^{-1}\ln|X_{A+B}(t,0)|_L| < -\alpha$ или, что равносильно, $|X_{A+B}(t,0)|_L|e^{\alpha t} < 1$. Для $t\in[0,k]$ в силу оценки (1.6) имеем

$$|X_{A+B}(t,0)|_L|\cdot e^{\alpha t} \leqslant \exp\Big(\big(\sup_{\tau\in[0,k]} |A(\tau)| + \varepsilon + |\alpha|\big)k\Big) \equiv C.$$

Итак, получили, что $|X_{A+B}(t,0)|_L| \leqslant Ce^{-\alpha t}$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$. Вследствие определения оператора Коши получаем неравенство (3.6) для всякого решения системы $A+B$, удовлетворяющего условию $0\neq x(0)\in L$. Для тривиального решения неравенство (3.6) также выполнено. Теорема 3.3 доказана.

**Доказательство теоремы 3.2.** 1. Зафиксируем $i\in\mathbb{N}_n$ и заметим, что по лемме 3.1 для любого $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ выполнено равенство

$$\overline{\lambda}_i(A) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{B\in\check{\mathfrak{B}}_{1/m}} \lambda_i(A+B).$$

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ в силу леммы 3.7 функционал $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n \to \overline{\mathbb{R}}$, действующий по правилу $A \mapsto \sup_{B \in \check{\mathcal{B}}_{1/m}} \lambda_i(A+B)$, является верхнепредельным. Тогда из п. 4 леммы 1.15 получаем, что функционал $\overline{\lambda}_i \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ также верхнепредельный.

2. В силу леммы 1.5 функция $\mu \mapsto A(\cdot, \mu) \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ непрерывна, поэтому функция $\overline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ является верхнепредельной и, следовательно, принадлежит второму классу Бэра. Утверждение о множестве точек полунепрерывности сверху этой функции следует из леммы 1.16. Теорема доказана.

Хотя точность указанного в теореме 3.2 класса Бэра максимальных показателей следует из результата [38], всё же построим явно пример семейства систем (3.5) с непрерывной функцией $A \colon \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, для которого все максимальные показатели не принадлежат первому классу Бэра.

**Пример 3.1.** Зададим матричнозначную функцию $A \colon \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ на отрезках $[2k-2, 2k-1]$, $k \in \mathbb{N}$, равенством

$$A(t,\mu) = \cos^2(\pi 3^k \mu/2) E_n, \quad t \in [2k-2, 2k-1], \ k \in \mathbb{N},$$

а на интервалы $(2k-1, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$, при каждом фиксированном $\mu$ продолжим её по непрерывности линейным образом. Непрерывность построенной функции следует непосредственно из её определения.

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}_n$ и покажем, что функция $\overline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0,1]$.

Обозначим через $M_1$ ($M_2$) множество точек отрезка $[0,1]$ вида $m3^{-j}$, где $j \in \mathbb{N}$, а $m \in \mathbb{N}$ – нечётно (соответственно чётно).

Если $\mu \in M_1$, то число $3^k\mu$ нечётно для всех достаточно больших $k$, и, стало быть, $\cos(\pi 3^k \mu/2) = 0$. Поэтому $A(t,\mu) = O_n$ для всех достаточно больших $t$ и $\lambda_i(A(\cdot,\mu)) = 0$.

Если $\mu \in M_2$, то число $3^k\mu$ чётно для всех достаточно больших $k$, и, следовательно, $|\cos(\pi 3^k \mu/2)| = 1$. Поэтому $A(t,\mu) = E_n$ для всех достаточно больших $t$ и $\lambda_i(A(\cdot,\mu)) = 1$.

Поскольку для всякого $\mu \in M_1 \sqcup M_2$ для всех достаточно больших $t$ система $A(t,\mu)$ постоянна, её максимальный $i$-й показатель совпадает с её $i$-м показателем Ляпунова (см. лемму 1.8).

Замечая, что каждое из множеств $M_1$ и $M_2$ плотно на отрезке $[0,1]$, получаем, что функция $\overline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0,1]$ (на $M_1$ она равна нулю, а на $M_2$ — единице) и поэтому не принадлежит первому классу Бэра [207, § 38, V].

Будем говорить, что множество $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *допускает кусочную составляемость*, если выполнены следующие условия:

$\mathrm{K}_1$) для любых систем $B_1, B_2 \in \mathcal{M}$ и любого числа $t \in \mathbb{R}_+$ найдется система $B \in \mathcal{M}$, которая во-первых, на отрезке $[0,t]$ совпадает с $B_1$; вовторых, на луче $[t+1,\infty)$ совпадает с $B_2$; в-третьих, на отрезке $\tau\in[t,t+1]$ удовлетворяет условию

$$|B(\tau)-B_2(\tau)|\leqslant\sup_{s\in[t,t+1]}|B_1(s)-B_2(s)|;$$

K$_2$) если система $B\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ на каждом отрезке $[0,t]$, $t\in\mathbb{R}_+$, совпадает с некоторой системой $B_t\in\mathcal{M}$, то $B\in\mathcal{M}$.

Например, все пространство $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ допускает кусочную составляемость, а при чётном $n$ подмножество гамильтоновых систем также обладает этим свойством.

Как и раньше, для каждого $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ будем обозначать через $\mathfrak{B}(A)$ множество систем $B\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to+\infty}|B(t)-A(t)|=0.$$

**Лемма 3.8** (ср. [176, лемма 7.1]). *Пусть множество систем $\mathcal{M}\subset\widetilde{\mathcal{M}}^n$ допускает кусочную составляемость, а $\varphi\colon\mathcal{M}\to\overline{\mathbb{R}}$ – остаточный функционал. Пусть, далее, заданы произвольные $A\in\mathcal{M}$ и $B\in\mathfrak{B}(A)\bigcap\mathcal{M}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая система $B_\varepsilon\in\mathcal{M}$, что*

$$\rho_U(A,B_\varepsilon)<\varepsilon,\quad \varphi(B_\varepsilon)=\varphi(B). \tag{3.13}$$

**Доказательство.** По условию для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $T_\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, что

$$\sup_{t\geqslant T_\varepsilon}|B(t)-A(t)|<\varepsilon/2.$$

В силу условия K$_1$) найдется система $B_\varepsilon\in\mathcal{M}$, которая на отрезке $[0,T_\varepsilon]$ совпадает с $A$, на луче $[T_\varepsilon+1,\infty)$ совпадает с $B$, а кроме того, удовлетворяет условию

$$\sup_{t\in\mathcal{T}}|B_\varepsilon(t)-B(t)|\leqslant\sup_{t\in\mathcal{T}}|B(t)-A(t)|,\quad \mathcal{T}\equiv[T_\varepsilon,T_\varepsilon+1],$$

откуда получаем цепочку

$$\sup_{t\in\mathcal{T}}|B_\varepsilon(t)-A(t)|\leqslant\sup_{t\in\mathcal{T}}|B_\varepsilon(t)-B(t)|+\sup_{t\in\mathcal{T}}|B(t)-A(t)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathcal{T}}|B(t)-A(t)|<\varepsilon.$$

Тогда для системы $B_\varepsilon$ будет выполнено первое соотношение в (3.13), а так как функционал $\varphi$ остаточный, то выполнено и второе соотношение в (3.13). Лемма доказана.

Из леммы 3.8 непосредственно вытекает (определение $\overline{\varphi}$ см. на с. 35)

**Лемма 3.9.** *Пусть множество систем $\mathcal{M}\subset\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ не имеет изолиро-*

*ванных точек и допускает кусочную составляемость, а $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ – остаточный функционал. Тогда для всяких $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathfrak{B}(A) \bigcap \mathcal{M}$ справедливо неравенство $\overline{\varphi}(A) \geqslant \varphi(B)$.*

**Лемма 3.10.** *Пусть множество систем $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_U^n$ не имеет изолированных точек и допускает кусочную составляемость, а $\{\varphi_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ – совокупность функционалов на $\mathcal{M}$, каждый из которых является остаточным и верхнепредельным в смысле компактно-открытой топологии на $\mathcal{M}$. Тогда для любых системы $A \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \mathcal{M}$, обладающая свойствами:*
*1) $\rho_U(B, A) < \varepsilon$; 2) $\lim\limits_{t\to+\infty} |B(t) - A(t)| = 0$; 3) $\varphi_i(B) = \overline{\varphi}_i(A)$ для всех $i \in \mathbb{N}$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности считаем, что все функционалы $\varphi_i$, $i \in \mathbb{N}$, принимают конечные значения. Общий случай сводится к этому применением ограничивающего гомеоморфизма (1.33).

Пусть $\tau$ — произвольная биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^3$. Пусть, далее, $p_i\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_3$, – проектор на $i$-ю компоненту тройки, т. е. отображение, определяемое для всякой тройки натуральных чисел $(m_1, m_2, m_3)$ равенством

$$p_i\bigl((m_1, m_2, m_3)\bigr) = m_i, \quad i \in \mathbb{N}_3.$$

Положим $\varepsilon_k = \varepsilon/(3k+3)$ для всякого $k \in \mathbb{Z}_+$.

"Возмущенную" систему $B$ будем строить по индукции, отправляясь из точки $t_0 = 0$. Положим $B_0 = C_0 = A$ и $B(t_0) = B_0(t_0)$.

Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ система $B$ уже построена на отрезке $[0, t_{k-1}]$. Положим $i_k = p_1(\tau(k))$. Согласно определению величины $\overline{\varphi}_{i_k}$, существует такая система $C_k \in \mathcal{M}$, что $\rho_U(C_k, A) < \varepsilon_k$, $\varphi_{i_k}(C_k) > \overline{\varphi}_{i_k}(A) - \varepsilon_k$. Так как $\mathcal{M}$ допускает кусочную составляемость, то найдётся система $B_k \in \mathcal{M}$, которая на отрезке $[0, t_{k-1}]$ совпадает с $B_{k-1}$, на луче $[t_{k-1}+1, \infty)$ – с $C_k$, а также удовлетворяет условию

$$\sup_{t\in\mathcal{T}_k} |B_k(t) - C_k(t)| \leqslant \sup_{t\in\mathcal{T}_k} |B_{k-1}(t) - C_k(t)|, \quad \mathcal{T}_k \equiv [t_{k-1}, t_{k-1}+1].$$

Тогда, учитывая, что (по предположению индукции) системы $B_{k-1}$ и $C_{k-1}$ совпадают при $t \geqslant t_{k-1}$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} &\sup_{t\geqslant t_{k-1}} |B_k(t) - C_k(t)| = \sup_{t\in\mathcal{T}_k} |B_k(t) - C_k(t)| \leqslant \sup_{t\in\mathcal{T}_k} |B_{k-1}(t) - C_k(t)| = \\ &= \sup_{t\in\mathcal{T}_k} |C_{k-1}(t) - C_k(t)| \leqslant \sup_{t\in\mathcal{T}_k} |C_{k-1}(t) - A(t)| + \sup_{t\in\mathcal{T}_k} |A(t) - C_k(t)| < \\ &< \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

В силу остаточности функционала $\varphi_{i_k}$ имеем равенство $\varphi_{i_k}(B_k) = \varphi_{i_k}(C_k)$.

По условию
$$\varphi_{i_k}(B_k) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_{i_k}^{mq}(B_k), \tag{3.15}$$
причём функционалы $\varphi_{i_k}^{mq}$, $m, q \in \mathbb{N}$, непрерывны в метрике $\rho_C$ (1.3). Положим $m_k = p_2(\tau(k))$. В силу (3.15) найдётся такое $q_k$, что
$$\varphi_{i_k}^{m_k q_k}(B_k) > \varphi_{i_k}(B_k) - \varepsilon_k.$$
Так как функционал $\varphi_{i_k}^{m_k q_k}$ непрерывен в точке $B_k$, существует такое число $t_k > t_{k-1} + 1$, что для любой системы $\widetilde{B} \in \mathcal{M}$, совпадающей с системой $B_k$ на отрезке $[0, t_k]$, выполнено неравенство
$$|\varphi_{i_k}^{m_k q_k}(B_k) - \varphi_{i_k}^{m_k q_k}(\widetilde{B})| < \varepsilon_k.$$
Положим $B(t) = B_k(t)$ при $t \in (t_{k-1}, t_k]$.

Так как $\mathbb{R}_+ = \{t_0\} \bigcup \bigcup_{k=1}^{\infty} (t_{k-1}, t_k]$, то система $B$ построена на всей полупрямой $\mathbb{R}_+$. Из построения следует, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ система $B$ совпадает на отрезке $[0, t_k]$ с системой $B_k \in \mathcal{M}$, откуда в силу условия $\mathrm{K}_2$) получаем, что $B \in \mathcal{M}$.

Покажем, что она обладает нужными свойствами. Учитывая неравенства (3.14), получаем цепочку неравенств
$$\begin{aligned}\sup_{t\in[t_{k-1},t_k]} |B(t) - A(t)| = \sup_{t\in[t_{k-1},t_k]} |B_k(t) - A(t)| \leqslant \sup_{t\in[t_{k-1},t_k]} |B_k(t) - C_k(t)| + \\ + \sup_{t\in[t_{k-1},t_k]} |C_k(t) - A(t)| \leqslant \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k + \varepsilon_k < 3\varepsilon_{k-1}.\end{aligned}$$

Свойства 1) и 2) вытекают из полученного неравенства с учётом выбора последовательности $(\varepsilon_k)$.

Проверим свойство 3). Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$. Для любого $\delta > 0$ существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что $3\varepsilon_k < \delta$ для всякого $k \geqslant k_0$. Далее, поскольку $\tau(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^3$, для всякого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $k \geqslant k_0$, что
$$i_k \equiv p_1(\tau(k)) = i, \quad m_k \equiv p_2(\tau(k)) = m.$$
Тогда по построению
$$\varphi_i^{m q_k}(B) = \varphi_{i_k}^{m_k q_k}(B) > \varphi_{i_k}^{m_k q_k}(B_k) - \varepsilon_k > \varphi_{i_k}(B_k) - 2\varepsilon_k > \overline{\varphi}_i(A) - 3\varepsilon_k > \overline{\varphi}_i(A) - \delta,$$
откуда получаем, что
$$\varphi_i(B) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_i^{mq}(B) \geqslant \overline{\varphi}_i(A) - \delta.$$
Так как число $\delta$ произвольно мало́, из последнего неравенства вытекает неравенство $\varphi_i(B) \geqslant \overline{\varphi}_i(A)$. Обратное неравенство выполнено в силу леммы 3.9.

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 3.4.** Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ показатель Ляпунова $\lambda_i \colon \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \to \overline{\mathbb{R}}$ является остаточным (лемма 1.4) и верхнепредельным (лемма 1.17) функционалом. Применяя лемму 3.10 к набору функционалов

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots\},$$

получим требуемое. Теорема 3.4 доказана.

## 3.3 Бэровский класс минимальных показателей

Как и в предыдущем разделе, всюду ниже считаем, если не сказано обратного, что $n \geqslant 2$.

Пусть $M$ — метрическое пространство. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.16}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, с непрерывной матричнозначной функцией $A \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$. Зафиксировав $i \in \mathbb{N}_n$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие минимальный $i$-й показатель (см. определение в разделе 1.6) системы (3.16), получим функцию $\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A) \colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, которая называется *минимальным $i$-м показателем семейства* (3.16).

В. М. Миллионщиков в докладе [152] поставил задачу о нахождении минимального класса Бэра (см. определение на с. 49), которому принадлежит минимальный $i$-й показатель непрерывного семейства (3.16).

Как указано в обзоре литературы, рядом авторов были получены продвижения в этой задаче, но все они относятся к случаю, когда при каждом $\mu \in M$ система (3.16) имеет ограниченные на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициенты.

Цель настоящего раздела — распространить результаты о бэровской классификации минимальных показателей на случай неограниченных коэффициентов. Главная трудность здесь заключается в том, что в этом случае не известно никаких формул для вычисления минимальных показателей. Основным результатом диссертации в данном направлении является следующая

**Теорема 3.5.** *Для любых $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$ и локально компактного метрического пространства $M$ выполнено включение*

$$\{\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A) : A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)\} \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_3(M).$$

*Другими словами, минимальный $i$-й показатель всякого непрерывного семейства* (3.16) *является функцией третьего класса Бэра.*

**Замечание 3.4.** При $n = 1$ минимальный показатель совпадает с показателем Ляпунова (см. лемму 1.6), поэтому принадлежит второму классу Бэра (по поводу бэровской классификации показателей Ляпунова см. раздел 2.1.1).

**Замечание 3.5.** Отметим, что утверждение теоремы 3.5 справедливо для миноранты любого верхнепредельного слабо ляпуновского инварианта, а не только $i$-го показателя Ляпунова.

Таким образом, теорема утверждает, что минимальный показатель любого семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$, $n \geqslant 2$, может быть представлен как повторный предел от тройной последовательности непрерывных функций. Однако, автору не известно, можно ли уменьшить количество пределов в общем случае, т. е. верно ли включение $\{\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\} \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_2(M)$ для всех локально компактных пространств $M$. Чтобы доказать обратное, нужно построить пример семейства (3.16), для которого минимальный $i$-й показатель не принадлежит второму классу Бэра. В настоящее время единственный известный такой пример [39] использует не локально компактное пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в качестве пространства параметров. Кроме того, представляет интерес вопрос, можно ли избавиться от предположения локальной компактности пространства параметров $M$.

С другой стороны, пример 3.1 показывает, что

$$\{\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A) : A \in \mathcal{BC}^n([0,1])\} \not\subset \mathfrak{F}_1([0,1])$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$.

Мы выведем утверждение теоремы 3.5 из более общего результата (определение пространства $\mathcal{B}^n_f$ см. на с. 24, а обозначения $\underline{\varphi}$ — на с. 35).

**Теорема 3.6.** *Если $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, а функционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ — верхнепредельный слабо ляпуновский инвариант, то функционал $\underline{\varphi}|_{\mathcal{B}^n_f}$ принадлежит третьему классу Бэра.*

Сначала установим две леммы. Следующая лемма показывает, что для слабо ляпуновского инварианта можно ограничиться рассмотрением малых возмущений коэффициентов из специально построенного компактного подмножества пространства $\mathcal{M}^n_C$.

**Лемма 3.11.** *Пусть $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, а функционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — слабо ляпуновский инвариант. Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует компактное подмножество $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon} \subset \mathcal{B}^n_\varepsilon$ такое, что для всех $A \in \mathcal{B}^n_f$ выполнено равенство*

$$\{\varphi(A+Q) : Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon\} = \{\varphi(A+\tilde{Q}) : \tilde{Q} \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}\}. \tag{3.17}$$

**Доказательство.** Без ограничения общности считаем, что $f$ неубывает. Положим

$$g(t) = \frac{\exp(-2\int_0^t (f(\tau)+1)\,d\tau - t)}{2(f(t)+1)+1}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.18}$$

Заметим, что функция $g$ убывает. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ разобьём отрезок $[k-1,k]$ точками $\xi_{km}$, $m = 0,\ldots,m_k$, на $m_k$ частей, полагая $\xi_{k0} = k-1$,

$\xi_{km_k} = k$ и выбирая остальные точки разбиения так, чтобы выполнялось условие

$$0 < \xi_{km+1} - \xi_{km} \leqslant g(k), \quad m = 0, \ldots, m_k - 1. \tag{3.19}$$

Далее, занумеруем точки множества $\{\xi_{km} : k \in \mathbb{N},\ m = 1, \ldots, m_k\}$ возрастающей последовательностью $\tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Для удобства положим ещё $\tau_0 = 0$.

Обозначим через $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ подмножество множества $\mathcal{B}^n_\varepsilon$, состоящее из матричнозначных функций, постоянных на каждом промежутке $[\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что множество $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ компактно.

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\exp(-\tau_k) < \eta$. Пусть $N_\eta$ — конечная $\eta$-сеть для компактного множества матриц $\{C \in \mathbb{R}^{n\times n} : |C| \leqslant \varepsilon\}$. Тогда подмножество множества $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$, состоящее из матричнозначных функций, принимающих значения из множества $N_\eta$ при всех $t \in [0, \tau_k)$ и тождественно равных нулю при $t \geqslant \tau_k$, является конечной $\eta$-сетью для множества $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$. Таким образом, множество $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ вполне ограничено. Поскольку $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ замкнуто в полном пространстве всех матричнозначных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ с метрикой $\rho_C$ (см. (1.3)), то множество $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ является компактным.

Включение

$$\{\varphi(A+Q) : Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon\} \supset \{\varphi(A+\tilde{Q}) : \tilde{Q} \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}\}, \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

является следствием включения $\mathcal{B}^n_\varepsilon \supset \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$.

Зафиксируем $A \in \mathcal{B}^n_f$ и докажем обратное включение. Так как по условию $\varphi$ — слабо ляпуновский инвариант, то достаточно установить, что для любого $Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon$ существует такая система $\tilde{Q} \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$, что системы $A+Q$ и $A+\tilde{Q}$ слабо ляпуновски эквивалентны.

Пусть задано произвольное $Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon$. Определим $\tilde{Q} \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ равенством

$$\tilde{Q}(t) = \frac{1}{\tau_k - \tau_{k-1}} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} Q(\tau)\, d\tau, \quad t \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Покажем, что выполнено условие (2.18), в котором $A$, $B$ и $f$ заменены на $A+Q$, $A+\tilde{Q}$ и $f+1$ соответственно, а $K = 4$. Пусть $t'' \geqslant t' \geqslant 0$. Тогда $t' \in [\tau_{k'-1}, \tau_{k'})$ и $t'' \in [\tau_{k''-1}, \tau_{k''})$ для некоторых натуральных $k'' \geqslant k'$. По построению $\tilde{Q}$ имеем

$$\begin{aligned}\left|\int_{t'}^{t''} (\tilde{Q}(\tau) - Q(\tau))\, d\tau\right| &\leqslant \int_{t'}^{\tau_{k'}} \left|\tilde{Q}(\tau) - Q(\tau)\right| d\tau + \int_{\tau_{k''-1}}^{t''} \left|\tilde{Q}(\tau) - Q(\tau)\right| d\tau \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon((\tau_{k'} - \tau_{k'-1}) + (\tau_{k''} - \tau_{k''-1})) \leqslant 4\varepsilon g(t').\end{aligned}$$

Так как $g(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то интеграл $I(t) \equiv \int_t^{+\infty} (\tilde{Q}(\tau) - Q(\tau))\, d\tau$ сходится и $|I(t)| \leqslant 4g(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Заметим, что справедливы включения

$A+Q, A+\tilde{Q} \in \mathcal{B}^n_{f+1}$. По лемме 2.6 системы $A+Q$ и $A+\tilde{Q}$ слабо ляпуновски эквивалентны. Лемма доказана.

**Лемма 3.12.** *Пусть $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, а функционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — верхнепредельный слабо ляпуновский инвариант. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ функционал $\breve{\varphi}_\varepsilon\colon \mathcal{B}^n_f \to \overline{\mathbb{R}}$, задаваемый равенством*

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(A) = \inf_{Q \in \mathcal{B}^n_\varepsilon} \varphi(A+Q), \quad A \in \mathcal{B}^n_f,$$

*является верхнепредельным.*

**Доказательство.** 1. По лемме 3.11 имеем равенство

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(A) = \inf_{Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi(A+Q), \quad A \in \mathcal{B}^n_f.$$

По условию существует такая последовательность непрерывных функционалов $\varphi_m\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, что

$$\varphi(A) = \varlimsup_{m\to\infty} \varphi_m(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\varphi(A) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \max_{1\leqslant p\leqslant q} \varphi_{m+p}(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

и определим функционалы $\varphi_{mq}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \mathbb{R}$, $m, q \in \mathbb{N}$, равенством

$$\varphi_{mq}(A) = \max_{1\leqslant p\leqslant q} \varphi_{m+p}(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Таким образом,

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(A) = \inf_{Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_{mq}(A+Q), \quad A \in \mathcal{B}^n_f. \tag{3.21}$$

2. Положим

$$f_m(A) = \inf_{Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_{mq}(A+Q), \quad A \in \mathcal{B}^n_f, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{B}^n_f$. Покажем, что

$$f_m(A) = \sup_{q\in\mathbb{N}} \inf_{Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi_{mq}(A+Q). \tag{3.23}$$

Очевидно, что правая часть предполагаемого равенства не превосходит левой. Остаётся доказать обратное неравенство. Предположим, напротив, что существует такое число $r \in \mathbb{R}$, что

$$f_m(A) > r > \sup_{q\in\mathbb{N}} \inf_{Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi_{mq}(A+Q).$$

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ определим множество $\mathcal{C}_q$ равенством

$$\mathcal{C}_q = \{Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon} : \varphi_{mq}(A+Q) > r\}.$$

Поскольку функция $\varphi_{mq}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathbb{R}$ непрерывна, то непрерывна и функция $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon} \to \mathbb{R}$, действующая по правилу $Q \mapsto \varphi_{mq}(A+Q)$. Следовательно, множество $\mathcal{C}_q$ открыто относительно множества $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ для всех $q \in \mathbb{N}$. По предположению, для любого $Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$ существует число $q \in \mathbb{N}$, такое, что $Q \in \mathcal{C}_q$. Таким образом, $\{\mathcal{C}_q : q \in \mathbb{N}\}$ является открытым покрытием компакта $\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$. Пусть $\{\mathcal{C}_{q_j} : j \in J\}$ — его конечное подпокрытие и $\tilde{q} = \max\{q_j : j \in J\}$. Так как $\varphi_{mq}(A+Q)$ неубывает по $q$ для фиксированного $Q$, имеем $\mathcal{C}_{\tilde{q}} \supset \mathcal{C}_{q_j}$ для всех $j \in J$, поэтому $\mathcal{C}_{\tilde{q}} = \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$. Следовательно, $\varphi_{m\tilde{q}}(A+Q) > r$ для всех $Q \in \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}$, откуда получаем

$$\sup_{q\in\mathbb{N}} \inf_{Q\in\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi_{mq}(A+Q) \geqslant \inf_{Q\in\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi_{m\tilde{q}}(A+Q) \geqslant r.$$

Полученное противоречие доказывает равенство (3.23). Из рассуждений выше ясно, что для каждого $q \in \mathbb{N}$ точная нижняя грань в равенстве (3.23) достигается, т. е. может быть заменена минимумом.

3. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и докажем, что функция $f_m$ полунепрерывна снизу. Функция $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C \times \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, задаваемая равенством $(A,Q) \mapsto A+Q$, непрерывна, поэтому для любого $q \in \mathbb{N}$ функция $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C \times \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathbb{R}$, действующая по правилу $(A,Q) \mapsto \varphi_{mq}(A+Q)$, также непрерывна. Следовательно, для любых $a \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{N}$ множество

$$\{(A,Q) \in \mathcal{B}^n_f \times \mathcal{K}^n_{f,\varepsilon} : \varphi_{mq}(A+Q) \leqslant a\}$$

замкнуто. Тогда замкнута и его проекция на первый сомножитель [228, XI, 2.5] произведения, т. е. множество

$$\{A \in \mathcal{B}^n_f : \min_{Q\in\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi_{mq}(A+Q) \leqslant a\}.$$

Для всякого $a \in \mathbb{R}$ из равенства (3.23) с точной нижней гранью заменённой минимумом получаем

$$\{A \in \mathcal{B}^n_f : f_m(A) > a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \{A \in \mathcal{B}^n_f : \min_{Q\in\mathcal{K}^n_{f,\varepsilon}} \varphi_{mq}(A+Q) > a\}$$

Следовательно, для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : f_m(\nu) > a\}$ открыто, что равносильно полунепрерывности снизу функции $f_m$.

4. Комбинируя равенства (3.21) и (3.22), получаем

$$\breve{\varphi}_\varepsilon(A) = \inf_{m\in\mathbb{N}} f_m(A), \quad A \in \mathcal{B}^n_f.$$

Из первого правила Юнга-Хаусдорфа (см. с. 48) приходим к выводу, что функционал $\breve{\varphi}_\varepsilon$ принадлежит классу $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$ (см. с. 48), т. е. является верхнепредельным (см. лемму 1.14). Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 3.6.** Из определения максимальной полунепрерывной снизу миноранты вытекает, что

$$\underline{\varphi}(A) = \lim_{k\to\infty} \breve{\varphi}_{1/k}(A), \quad A \in \mathcal{B}^n_f.$$

По лемме 3.12 для каждого $k \in \mathbb{N}$ функционал $\breve{\varphi}_{1/k} \colon \mathcal{B}^n_f \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельным и, следовательно (см. лемму 1.14), принадлежит второму классу Бэра. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 3.5.** Пусть заданы $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$ и семейство систем $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$. Нужно доказать, что $\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A) \in \widetilde{\mathfrak{F}}_3(M)$.

Зафиксируем $\mu \in M$. В силу локальной компактности $M$ существуют открытое множество $U(\mu)$ и компактное множество $K(\mu)$, такие, что

$$\mu \in U(\mu) \subset K(\mu).$$

Положим

$$f(t) = \max_{\xi \in K(\mu)} |A(t, \xi)|, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Очевидно, $A(\cdot\,, \nu) \in \mathcal{B}^n_f$ для всех $\nu \in U(\mu)$.

Поскольку $\lambda_i$ — верхнепредельный (см. лемму 1.17) слабо ляпуновский инвариант (см. лемму 1.4), то из теоремы 3.6 получаем, что функционал $\underline{\lambda}_i|_{\mathcal{B}^n_f} \colon \mathcal{B}^n_f \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит третьему классу Бэра. Далее, в силу леммы 1.5 отображение, действующее из $U(\mu)$ в $\mathcal{B}^n_f$ по правилу $\nu \mapsto A(\cdot\,, \nu)$, непрерывно. Тогда сужение функции $\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A)$ на множество $U(\mu)$ принадлежит третьему классу Бэра как композиция указанного выше непрерывного отображения и функционала $\underline{\lambda}_i|_{\mathcal{B}^n_f}$ третьего класса Бэра.

Для каждого $\mu \in M$ по теореме Лебега-Хаусдорфа 1.1 имеем включение $\underline{\lambda}_i(\cdot\,; A)|_{U(\mu)} \in \widetilde{\mathfrak{B}}_3(U(\mu))$. Следовательно, прообраз

$$\{\mu \in M : \underline{\lambda}_i(\mu, A) \in F\}$$

любого замкнутого множества $F \subset \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}$-множеством в каждой своей точке [106, § 30, X]. Тогда в силу [106, § 30, X, теорема 1] это множество является $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}$-множеством относительно всего пространства $M$. Таким образом, $\underline{\lambda}_i \in \widetilde{\mathfrak{B}}_3(M)$ и требуемое вытекает теперь из теоремы Лебега-Хаусдорфа 1.1. Теорема доказана.

# Глава 4

# Лебеговские множества показателей Изобова

В этой главе изучаются границы подвижности показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях (соответствующие определения см. в разделе 1.7) с точки зрения дескриптивной теории функций, при этом мы не требуем от коэффициентов рассматриваемых систем ограниченности на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Получено полное описание лебеговских множеств верхних (в разделе 4.1) и нижних (в разделе 4.2) сигма-показателей Изобова для семейств линейных систем, непрерывно зависящих от параметра в смысле компактно-открытой и равномерной топологий на пространстве систем. Для верхних экспоненциальных показателей Изобова в разделе 4.3 установлен точный бэровский класс в компактно-открытой топологии.

Поскольку показатель Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве линейных уравнений $\widetilde{\mathcal{M}}^1_U$, непрерывен (см. лемму 1.6), то он инвариантен относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности [176, лемма 7.3]. По этой причине всюду в пределах данной главы считаем, что $n \geqslant 2$.

## 4.1 Верхний сигма-показатель Изобова

В работе [244, с. 705] О. Перрон показал, что при возмущениях коэффициентов линейной системы членами высшего порядка малости свойство устойчивости нулевого решения, вообще говоря, не сохраняется. Приведём пример Перрона.

**Пример 4.1.** Рассмотрим линейную дифференциальную систему $A \in \mathcal{M}^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 \\ \dot{x}_2 = (\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a)x_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

где постоянная $a$ удовлетворяет условию $2a \in (1, 1 + e^{-\pi}/2)$. Нетрудно убедиться, что общее решение этой системы есть

$$\bigl(C_1 \exp(-a(t+1)), C_2 \exp((\sin\ln(t+1) - 2a)(t+1))\bigr)^{\mathsf{T}},$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а её показателями Ляпунова являются числа $\lambda_1(A) = -a$ и $\lambda_2(A) = 1 - 2a < 0$. Таким образом, нулевое решение системы (4.1) экспоненциально устойчиво. Рассмотрим теперь, следуя [244], нелинейную систему, для которой система (4.1) является первым приближением:

$$\begin{cases} \dot y_1 = -ay_1 \\ \dot y_2 = (\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a)y_2 + y_1^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.2}$$

Общее решение этой, возмущённой, системы есть вектор-функция

$$(C_1\exp(-a(t+1)), \exp((\sin\ln(t+1)-2a)(t+1))\left(C_2 + C_1^2\int_0^{t+1} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau\right)^{\mathsf{T}}.$$

Можно показать [244; 94, § 1.4], что для любых $C_1 \neq 0$ и $C_2 \in \mathbb{R}$ это решение имеет положительный характеристический показатель. Поскольку система (4.2) имеет неограниченное решение, начинающееся сколь угодно близко от начала координат, то её нулевое решение неустойчиво. Таким образом, отрицательность старшего показателя Ляпунова системы первого приближения не гарантирует устойчивости нулевого решения нелинейной системы.

Этот пример Перрона послужил отправной точкой многочисленных исследований влияния различных классов нелинейных возмущений на показатели Ляпунова линейной системы. Эффект изменения значений показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}^n$ при тех или иных «малых» её возмущениях назван в монографии [108, гл. 4] эффектом Перрона. Его изучению посвящено огромное количество работ, среди которых укажем лишь [95; 96; 105; 234].

Старший верхний сигма-показатель Изобова $\nabla_{\sigma,n}$ может быть использован для исследования устойчивости по первому приближению, как показывает следующая

**Теорема 4.1** ([266]). *Если для системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и чисел $m > 1$ и $\sigma > 0$ выполнено условие*

$$\nabla_{\sigma,n}(A) < -\frac{\sigma}{m-1},$$

*а непрерывная функция $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ имеет неположительный характеристический показатель, то для каждого числа $\alpha > \nabla_{\sigma,n}(A)$ существуют такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что каковы бы ни были область $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, и непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию*

$$|f(t,x)| \leqslant \Psi(t)|x|^m, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times U, \tag{4.3}$$

*для любого решения системы*

$$\dot x = A(t)x + f(t,x), \quad x \in U, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

*с начальным условием $|x(0)| < \delta$ справедлива оценка*

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.5}$$

*В частности, нулевое решение системы (4.4) экспоненциально устойчиво.*

Из доказательства формулы (1.27), полученной в работе [80] для случая, когда коэффициенты системы $A$ ограничены на полуоси $\mathbb{R}_+$, следует, что если $A \in \mathcal{M}^n$ и $i = n$, то точная верхняя грань в равенстве (1.26) достигается. Оказывается, это верно и без предположения об ограниченности коэффициентов системы и более того, точные верхние грани в равенстве (1.26) достигаются одновременно для всех $i \in \mathbb{N}_n$, а именно, справедлива

**Теорема 4.2** ([266]). *Для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\sigma > 0$ существует такая система $Q \in \hat{\mathcal{E}}_\sigma$, что*

$$\lambda_i(A+Q) = \nabla_{\sigma,i}(A), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

Множество функций $\{\sigma \mapsto \nabla_{\sigma,n}(A) : A \in \mathcal{M}^n\}$ полностью описано в работе [87]: оно состоит из всех ограниченных, вогнутых вниз функций, равных постоянной при всех $\sigma$, начиная с некоторого (своего для каждой функции). В частности, все эти функции непрерывны. В то же время для любых $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ и $\sigma_0 > 0$ существует система $A \in \mathcal{M}^n$, такая, что функция $\sigma \mapsto \nabla_{\sigma,i}(A)$ не является полунепрерывной снизу в точке $\sigma_0$ [91]. Возникает естественный вопрос: является ли указанная функция полунепрерывной сверху для всякой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$?

**Теорема 4.3** ([266]). *Для любых $i \in \mathbb{N}_n$ и $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ функция, действующая из $(0, +\infty)$ в $\overline{\mathbb{R}}$ по правилу $\sigma \mapsto \nabla_{\sigma,i}(A)$, является полунепрерывной сверху.*

**Замечание 4.1.** Автору неизвестно, является ли функция $\sigma \mapsto \nabla_{\sigma,n}(A)$ полунепрерывной снизу во всякой точке $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n \backslash \mathcal{M}^n$ (для $A \in \mathcal{M}^n$ непрерывность этой функции установлена в работе [80]).

Пусть $M$ — метрическое пространство. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.6}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, с непрерывной матричнозначной функцией $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Зафиксировав какой-либо функционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие значение этого функционала на системе (4.6), получим функцию параметра $\varphi(\,\cdot\,; A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$.

Ниже описаны лебеговские множества (см. с. 48) таких функций, определяемых верхними сигма-показателями Изобова.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый подкласс класса $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$. Для любых $\sigma > 0$ и $i \in \mathbb{N}_n$ условимся обозначать через $\hat{\mathfrak{N}}_{\sigma,i}(\mathcal{K}, r)$, $\hat{\mathfrak{P}}_{\sigma,i}(\mathcal{K}, r)$ и $\hat{\mathfrak{Z}}_{\sigma,i}(\mathcal{K}, r)$ соответственно совокупности множеств $\{[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,; A) \geqslant r] : A \in \mathcal{K}\}$, $\{[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,; A) > r] : A \in \mathcal{K}\}$ и $\{[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,; A) = r] : A \in \mathcal{K}\}$.

Указанные совокупности множеств, отвечающие семействам (4.6), непрерывно зависящим от параметра как в смысле компактно-открытой, так и в смысле равномерной топологий на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, полностью описывает

**Теорема 4.4** ([266]). *Для любых чисел $i \in \mathbb{N}_n$, $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{R}$ и метрического пространства $M$ справедливы следующие равенства:*

*1)* $\hat{\mathfrak{N}}_{\sigma,i}(\widetilde{\mathcal{C}}^n(M), r) = \hat{\mathfrak{N}}_{\sigma,i}(\mathcal{BU}^n(M), r) = \mathscr{G}_\delta(M)$;

*2)* $\hat{\mathfrak{P}}_{\sigma,i}(\widetilde{\mathcal{C}}^n(M), r) = \hat{\mathfrak{P}}_{\sigma,i}(\mathcal{BU}^n(M), r) = \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$;

*3)* $\hat{\mathfrak{Z}}_{\sigma,i}(\widetilde{\mathcal{C}}^n(M), r) = \hat{\mathfrak{Z}}_{\sigma,i}(\mathcal{BU}^n(M), r) = \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$.

Условимся обозначать через $US(f)$ и $LS(f)$ соответственно множества точек полунепрерывности сверху и снизу функции $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$. Кроме того, через $\mathfrak{D}(M)$ обозначим совокупность $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-подмножеств пространства $M$, содержащих все его изолированные точки, а через $\mathfrak{G}(M)$ – совокупность его плотных $\mathscr{G}_\delta$-подмножеств.

Используя формулу (1.27), А. Н. Ветохин установил [44], что для любых $\sigma > 0$ и семейства $A \in \mathcal{C}^n(M)$ функция $\nabla_{\sigma,n}(\cdot\,; A)$ принадлежит второму бэровскому классу, а множество $US(\nabla_{\sigma,n}(\cdot\,; A))$ в случае полного $M$ содержит плотное в $M$ множество типа $\mathscr{G}_\delta$. Этот результат усиливает следующее

**Следствие 4.1.** *Для произвольных чисел $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_n$, $\sigma > 0$, метрического пространства $M$ и семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ функция $\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,; A)$ является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму бэровскому классу. Кроме того, справедливы соотношения*

$$\{LS(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,; A)) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\} = \{LS(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,; A)) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} = \mathfrak{D}(M),$$
$$\mathscr{G}_\delta(M) \supset \{US(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,; A)) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\},$$
$$\{US(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,; A)) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\} \supset \{US(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,; A)) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathfrak{G}(M),$$

*причём если $M$ полно, то последние два включения являются равенствами.*

Перейдём к доказательствам сформулированных утверждений. Сначала введём следующее обозначение $(\sigma, C > 0)$:

$$\mathcal{E}^n_{\sigma,C} = \{Q \in \mathcal{M}^n : |Q(t)| \leqslant Ce^{-\sigma t},\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Заметим, что $\mathcal{E}^n_\sigma = \bigcup_{C>0} \mathcal{E}^n_{\sigma,C}$ (см. (1.24)).

Следующая лемма описывает, как изменяются верхние сигма-показатели Изобова при прибавлении к системе постоянного скалярного возмущения.

**Лемма 4.1.** *Для любых $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, $i \in \mathbb{N}_n$, $\sigma > 0$ и $r \in \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\nabla_{\sigma,i}(A) \in \mathbb{R}$, то $\nabla_{\sigma,i}(A + rE_n) = \nabla_{\sigma,i}(A) + r$;*

2) *если $\nabla_{\sigma,i}(A) \in \{-\infty, +\infty\}$, то $\nabla_{\sigma,i}(A + rE_n) = \nabla_{\sigma,i}(A)$.*

**Доказательство.** Заметим, что если вектор-функция $x(\cdot)$ является решением некоторой системы $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ то вектор-функция $t \mapsto y(t) \equiv x(t)e^{rt}$, $t \in \mathbb{R}_+$, является решением системы $B + rE_n$, причём $x(0) = y(0)$. Следовательно, если характеристический показатель $\lambda[x]$ решения $x(\cdot)$ конечен, то $\lambda[y] = \lambda[x] + r$, а если $\lambda[x] \in \{-\infty, +\infty\}$, то $\lambda[y] = \lambda[x]$. Так как пространство решений линейной системы изоморфно пространству их начальных (при $t = 0$) значений, из сказанного вытекает, что если $i$-й показатель Ляпунова $\lambda_i(B)$ системы $B$ конечен, то $\lambda_i(B + rE_n) = \lambda_i(B) + r$, в противном случае $\lambda_i(B + rE_n) = \lambda_i(B)$.

Пусть $\nabla_{\sigma,i}(A) = -\infty$. Тогда для каждого $Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$ имеем $\lambda_i(A+Q) = -\infty$, откуда по предыдущему получаем $\lambda_i(A + rE_n + Q) = \lambda_i(A + Q) = -\infty$. Следовательно, $\nabla_{\sigma,i}(A + rE_n) = -\infty$.

Пусть теперь $\nabla_{\sigma,i}(A) = +\infty$. Тогда для любого $M > 0$ существует такое $Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$, что $\lambda_i(A + Q) > M - r$. По предыдущему имеем

$$\lambda_i(A + rE_n + Q) = \lambda_i(A + Q) + r > M.$$

Следовательно, $\nabla_{\sigma,i}(A + rE_n) = +\infty$.

Пусть, наконец, $\nabla_{\sigma,i}(A) = \xi \in \mathbb{R}$. Тогда для каждого $Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$ имеем $\lambda_i(A + Q) \leqslant \xi$. Если $\lambda_i(A + Q) = -\infty$, то по предыдущему

$$\lambda_i(A + rE_n + Q) = \lambda_i(A + Q) = -\infty.$$

Если же $\lambda_i(A + Q) > -\infty$, то по предыдущему

$$\lambda_i(A + rE_n + Q) = \lambda_i(A + Q) + r \leqslant \xi + r.$$

Таким образом, для любого $Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$ выполнено неравенство $\lambda_i(A+Q) \leqslant \xi+r$, откуда получаем $\nabla_{\sigma,i}(A + rE_n) \leqslant \xi + r$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует $Q_\varepsilon \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$, такое, что $\lambda_i(A + Q_\varepsilon) > \xi - \varepsilon$. Тогда

$$\lambda_i(A + rE_n + Q_\varepsilon) = \lambda_i(A + Q_\varepsilon) + r > \xi + r - \varepsilon.$$

Следовательно, $\nabla_{\sigma,i}(A + rE_n) = \xi + r = \nabla_{\sigma,i}(A) + r$. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.1.** Без ограничения общности можно считать область $U$ шаром радиуса $\rho \in (0, 1)$ с центром в начале координат, а число $\alpha > \nabla_{\sigma,n}(A)$ таким, что $(m - 1)\alpha + \sigma < 0$. Подстановка $x(t) = e^{\alpha t}y(t)$ переводит исходную систему в систему

$$\dot{y} = \tilde{A}(t)y + g(t, y), \quad \tilde{A}(t) = A(t) - \alpha E_n, \quad g(t, y) = e^{-\alpha t}f(t, e^{\alpha t}y), \quad (t, y) \in V, \tag{4.7}$$

где $V = \{(t, y) : t \in \mathbb{R}_+, e^{\alpha t}y \in U\}$. Далее будем рассматривать сужение системы (4.7) на множество $\tilde{V} \equiv \mathbb{R}_+ \times U \subset V$. Для всякой точки $(t, y) \in \tilde{V}$ имеем цепочку

$$|g(t, y)| \leqslant e^{\alpha(m-1)t}\Psi(t)|y|^m \leqslant e^{((m-1)\alpha+\sigma)t}\Psi(t)e^{-\sigma t}|y| \leqslant Ke^{-\sigma t}|y|,$$

где $K = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} e^{((m-1)\alpha+\sigma)t}\Psi(t)$. Величина $K$ конечна, поскольку $\lambda[\Psi] \leqslant 0$.

По лемме 4.1 если $\nabla_{\sigma,n}(A) = -\infty$, то $\nabla_{\sigma,n}(\tilde{A}) = \nabla_{\sigma,n}(A) = -\infty$, в ином случае $\nabla_{\sigma,n}(\tilde{A}) = \nabla_{\sigma,n}(A) - \alpha$. Учитывая включение $\mathcal{E}^n_{\sigma,K} \subset \hat{\mathcal{E}}^n_{\sigma}$, получаем

$$\sup_{Q\in\mathcal{E}^n_{\sigma,K}} \lambda_n(\tilde{A}+Q) \leqslant \nabla_{\sigma,n}(\tilde{A}) < 0.$$

Применяя лемму 3.7 к функции $f(t) = Ke^{-\sigma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, получим, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{Q\in\check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,K}} \sup_{t\geqslant k} \frac{1}{t} \ln|X_{\tilde{A}+Q}(t,0)| < 0, \text{ где } \check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,K} = \mathcal{E}^n_{\sigma,K} \bigcap C\mathcal{M}^n.$$

Следовательно, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $Q \in \check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,K}$ и $t \geqslant k$ выполнено неравенство $t^{-1}\ln|X_{\tilde{A}+Q}(t,0)| < 0$ или, что равносильно,

$$|X_{\tilde{A}+Q}(t,0)| < 1.$$

Для $t \in [0,k]$ в силу известной оценки (1.6) имеем

$$|X_{\tilde{A}+Q}(t,0)| \leqslant \exp((\sup_{0\leqslant\tau\leqslant k} |\tilde{A}(\tau)| + K)k) \equiv C.$$

Тогда $|X_{\tilde{A}+Q}(t,0)| \leqslant C$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, для любого решения $y(\cdot)$ всякой линейной системы $\tilde{A}+Q$, где $Q \in \check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,K}$, при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнена оценка

$$|y(t)| \leqslant C|y(0)|. \tag{4.8}$$

Положим $\delta = \rho(2C)^{-1}$. Пусть $y\colon [0,T) \to U$, $T \in (0,+\infty]$, — непродолжаемое нетривиальное решение системы (4.7), удовлетворяющее условию $|y(0)| < \delta$. Тогда в силу принципа линейного включения [29, 12.3] функция $y(\cdot)$ служит также решением линейной системы $\tilde{A}+Q$, где матричнозначная функция $Q\colon [0,T) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ задаётся равенствами

$$q_{ij}(t) = \frac{y_j(t)}{|y(t)|^2} \cdot g_i(t,y(t)), \quad i,j \in \mathbb{N}_n, \quad t \in [0,T),$$

непрерывна и удовлетворяет условию

$$|Q(t)| \leqslant Ke^{-\sigma t} \tag{4.9}$$

при всех $t \in [0,T)$. Предположим, что $T < \infty$. Поскольку функция $g$ ограничена на множестве $\tilde{V}$, функция $y(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, существует предел $\lim_{t\to T-0} y(t)$, причём не равный нулю в силу теоремы о продолжаемости [201, теорема 23]. Значит, существует и предел $\lim_{t\to T-0} Q(t)$. Непрерывно продолжим матричнозначную функцию $Q(\cdot)$ на всю полуось $\mathbb{R}_+$ так, чтобы при всех $t \geqslant 0$ выполнялось условие (4.9), сохранив за продолженной функцией прежнее обозначение. Тогда $Q \in \check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,K}$ и при всех $t \in [0,T)$ выполнено (4.8), откуда вытекает, что график функции $y(\cdot)$

не покидает компакта

$$[0,T]\times\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi|\leqslant\rho/2\}.$$

Последнее противоречит вышеупомянутой теореме о продолжаемости для системы (4.7). Следовательно, $T=\infty$, а неравенство (4.8) выполнено при всех $t\geqslant 0$.

Возвращаясь к исходной системе (4.4), получаем, что всякое её решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее условию $|x(0)|<\delta$, продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет оценке (4.5). Теорема доказана.

**Лемма 4.2.** *Для любых системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и числа $\sigma>0$ найдётся система $B\in\hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$, такая, что*

$$\lambda_i(A+B)\geqslant\inf_{\varepsilon\in(0,\sigma)}\sup_{Q\in\mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon,1}}\lambda_i(A+Q)\equiv\tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A),\quad i\in\mathbb{N}_n.$$

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать, что все величины, фигурирующие в доказательстве, принимают конечные значения. Общий случай сводится к этому применением сохраняющего порядок ограничивающего гомеоморфизма (1.33).

Пусть $\tau$ — какая-нибудь биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}^2$, а $p_i\colon\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$, $i\in\mathbb{N}_3$, — проекция произведения на $i$-й сомножитель. Для всякого $k\in\mathbb{N}$ положим $i_k=p_1(\tau(k))$ и $m_k=p_2(\tau(k))$.

Зафиксируем произвольную последовательность $(\varepsilon_k)_{k=0}^\infty$ чисел из интервала $(0,\sigma)$, монотонно стремящуюся к нулю. Построим по индукции строго возрастающую последовательность $(t_k)_{k=0}^\infty$ точек полуоси $\mathbb{R}_+$, последовательность $(q_k)_{k=0}^\infty$ натуральных чисел и последовательность $(B_k)_{k=0}^\infty$ систем из $\mathcal{M}^n$, удовлетворяющие для всякого $j\in\mathbb{N}$ условиям

$$t_j\geqslant t_{j-1}+1,\qquad B_j(t)=B_{j-1}(t),\quad t\in[0,t_{j-1}],\tag{4.10}$$

$$|B_j(t)|\leqslant\exp(-(\sigma-\varepsilon_j)t),\quad t\geqslant t_{j-1}+1,\tag{4.11}$$

$$|B_j(t)|\leqslant\exp(-(\sigma-\varepsilon_{j-1})t),\quad t\in[t_{j-1},t_{j-1}+1],\tag{4.12}$$

$$\lambda_{i_j}(A+B_j)>\tilde{\nabla}_{\sigma,i_j}(A)-\varepsilon_j,\tag{4.13}$$

$$\varphi_{i_j}^{m_jq_j}(A+B_j)>\lambda_{i_j}(A+B_j)-\varepsilon_j,\tag{4.14}$$

где $\varphi_i^{mq}$, $m,q\in\mathbb{N}$, $i\in\mathbb{N}_n$, — функции, определённые равенством (1.10).

Положим $t_0=0$, $q_0=1$, $B_0=0$. Пусть для некоторого $k\in\mathbb{N}$ уже определены числа $t_j$, $q_j$ и системы $B_j\in\mathcal{M}^n$, $j\in\{0,\ldots,k-1\}$, удовлетворяющие для всякого $j\in\mathbb{N}_{k-1}$ условиям (4.10)-(4.14).

В силу определения величины $\tilde{\nabla}_{\sigma,i_k}(A)$ существует система $C_k\in\mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon_k,1}$, такая, что $\lambda_{i_k}(A+C_k) > \tilde{\nabla}_{\sigma,i_k}(A) - \varepsilon_k$. Положим

$$B_k(t) = \begin{cases} B_{k-1}(t), & t \in [0, t_{k-1}], \\ (1-t+t_{k-1})B_{k-1}(t) + (t-t_{k-1})C_k(t), & t \in [t_{k-1}, t_{k-1}+1], \\ C_k(t), & t \geqslant t_{k-1}+1. \end{cases}$$

Используя предположение индукции (для $k=1$ базу индукции), получаем, что система $B_k$ имеет кусочно-непрерывные коэффициенты и удовлетворяет условиям (4.11)-(4.12) для $j=k$. Поскольку системы $B_k$ и $C_k$ совпадают при всех $t \geqslant t_{k-1}+1$, в силу свойства остаточности показателей Ляпунова (см. лемму 1.4) имеем $\lambda_{i_k}(A+B_k) = \lambda_{i_k}(A+C_k)$, откуда получаем неравенство (4.13) для $j=k$. В силу (1.11) найдётся такое $q_k \in \mathbb{N}$, что для $j=k$ выполнено неравенство (4.14). Положим $t_k = \max\{t_{k-1}+1, m_k+q_k\}$. На этом индуктивный переход, а с ним и построение последовательностей $(t_k)$, $(q_k)$ и $(B_k)$ закончены.

Теперь положим $B(t_0)=0$ и $B(t)=B_k(t)$ при $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k \in \mathbb{N}$. В силу первого условия (4.10) имеем $\mathbb{R}_+ = \{t_0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}(t_{k-1}, t_k]$, поэтому система $B$ определена на всей полуоси $\mathbb{R}_+$. Покажем, что она обладает нужными свойствами.

По построению для всякого $k \in \mathbb{N}$ система $B$ совпадает с системой $B_k$ на отрезке $[0, t_k]$, поэтому $B$ имеет кусочно-непрерывные коэффициенты и удовлетворяет неравенству

$$|B(t)| \leqslant \exp(-(\sigma - \varepsilon_{k-1})t), \quad t \geqslant t_{k-1},$$

откуда получаем $\lambda[B] \leqslant -\sigma + \varepsilon_{k-1}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $B \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$.

Зафиксируем произвольные $i \in \mathbb{N}_n$ и $\delta > 0$. Выберем такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что $2\varepsilon_{k_0} < \delta$. Поскольку $\tau(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, для всякого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $k \geqslant k_0$, что $i_k = i$, $m_k = m$. Поскольку значение функции $\varphi_{i_k}^{m_k q_k}$ на системе зависит только от ее сужения на отрезок $[0, m_k+q_k]$, на котором системы $B$ и $B_k$ совпадают, справедлива цепочка

$$\varphi_i^{mq_k}(A+B) = \varphi_{i_k}^{m_k q_k}(A+B) = \varphi_{i_k}^{m_k q_k}(A+B_k) > \lambda_{i_k}(A+B_k) - \varepsilon_k > \\ > \tilde{\nabla}_{\sigma,i_k}(A) - 2\varepsilon_k > \tilde{\nabla}_{\sigma,i_k}(A) - \delta,$$

откуда получаем

$$\lambda_i(A+B) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{q\in\mathbb{N}} \varphi_i^{mq}(A+B) \geqslant \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A) - \delta.$$

Так как число $\delta > 0$ произвольно мало́, из последнего неравенства получаем требуемое. Лемма доказана.

**Лемма 4.3.** *Для любых* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *и* $\sigma > 0$ *справедливы равенства*

$$\nabla_{\sigma,i}(A) = \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A) = \hat{\nabla}_{\sigma,i}(A) \equiv \inf_{\varepsilon \in (0,\sigma)} \sup_{Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon}} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

**Доказательство.** Пусть задано произвольное $i \in \mathbb{N}_n$. Покажем, что для всякого $\varepsilon \in (0, \sigma/2)$ справедлива цепочка включений

$$\{\lambda_i(A+Q) : Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma\} \subset \{\lambda_i(A+Q) : Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon}\} \subset \{\lambda_i(A+Q) : Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-2\varepsilon,1}\}. \tag{4.15}$$

Действительно, для всякого $Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$ имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln |Q(t)| < -\sigma + \varepsilon.$$

Из определения верхнего предела получаем, что существует такое $T > 0$, что для всех $t \geqslant T$ выполнено $|Q(t)| \leqslant e^{(-\sigma+\varepsilon)t}$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ имеем $|Q(t)| \leqslant Ce^{-(\sigma-\varepsilon)t}$, где $C = \sup_{t\in[0,T]} |Q(t)|e^{(\sigma-\varepsilon)t} + 1$. Таким образом, приходим к выводу, что $\hat{\mathcal{E}}^n_\sigma \subset \mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon}$, и первое включение в (4.15) установлено.

Установим второе включение. Пусть $Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon}$. Тогда для некоторого числа $C > 0$ имеем $|Q(t)| \leqslant Ce^{-(\sigma-\varepsilon)t}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Выберем такое $T > 0$, что $Ce^{-\varepsilon T} \leqslant 1$. Положим

$$\tilde{Q}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,T], \\ (t-T)Q(t), & t \in [T, T+1], \\ Q(t), & t \geqslant T+1. \end{cases}$$

Тогда $\lambda_i(A+Q) = \lambda_i(A+\tilde{Q})$, причем $\tilde{Q} \in \mathcal{E}^n_{\sigma-2\varepsilon,1}$ в силу цепочки

$$|\tilde{Q}(t)| \leqslant |Q(t)| \leqslant Ce^{-(\sigma-\varepsilon)t} = Ce^{-\varepsilon t}e^{-(\sigma-2\varepsilon)t} \leqslant e^{-(\sigma-2\varepsilon)t}, \quad t \geqslant T.$$

Переходя в (4.15) к точной верхней грани, получим

$$\begin{aligned} &\sup\{\lambda_i(A+Q) : Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma\} \leqslant \sup\{\lambda_i(A+Q) : Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-\varepsilon}\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\lambda_i(A+Q) : Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-2\varepsilon,1}\}. \end{aligned}$$

Переходя в первом неравенстве к точной нижней грани по $\varepsilon \in (0,\sigma)$, а во втором — по $\varepsilon \in (0, \sigma/2)$, получим $\nabla_{\sigma,i}(A) \leqslant \hat{\nabla}_{\sigma,i}(A) \leqslant \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A)$. Но в силу леммы 4.2 имеем $\nabla_{\sigma,i}(A) \geqslant \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A)$, откуда получаем требуемое. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.2.** По лемме 4.2 существует такая система $Q \in \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma$, что $\lambda_i(A+Q) \geqslant \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A)$, $i \in \mathbb{N}_n$. Утверждение теоремы вытекает теперь из цепочки

$$\lambda_i(A+Q) \leqslant \nabla_{\sigma,i}(A) = \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A), \quad i \in \mathbb{N}_n,$$

в которой первое соотношение есть следствие определения величины $\nabla_{\sigma,i}(A)$, а второе установлено в лемме 4.3. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 4.3.** Пользуясь леммой 4.3, установим утверждение для функции $\hat{\nabla}_{\sigma,i}$. Пусть для некоторых $\sigma > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}$ выполнено $\hat{\nabla}_{\sigma,i}(A) < \mu$. Тогда найдется такое $\delta \in (0, \sigma)$, что $\sup_{Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-\delta}} \lambda_i(A + Q) < \mu$. Если теперь $\sigma' > \sigma - \delta$, то существует $\eta > 0$, для которого $\sigma' - \eta > \sigma - \delta$. Тогда $\mathcal{E}^n_{\sigma'-\eta} \subset \mathcal{E}^n_{\sigma-\delta}$ и справедлива цепочка

$$\hat{\nabla}_{\sigma',i}(A) \leqslant \sup_{Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma'-\eta}} \lambda_i(A + Q) \leqslant \sup_{Q \in \mathcal{E}^n_{\sigma-\delta}} \lambda_i(A + Q) < \mu.$$

Таким образом, прообраз всякого луча $[-\infty, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, при отображении $\sigma \mapsto \hat{\nabla}_{\sigma,i}(A)$ является открытым множеством, поскольку вместе с каждой своей точкой $\sigma$ содержит некоторую её окрестность $(\sigma - \delta, +\infty)$. Теорема доказана.

Следующая лемма до некоторой степени сводит задачу реализации заданной функции сигма-показателем Изобова к аналогичной задаче для показателя Ляпунова.

**Лемма 4.4.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$ и числа $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$ и $\sigma > 0$. Тогда для любой ограниченной верхнепредельной функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ существуют семейство $A \in \mathcal{BU}^n(M)$ и число $\alpha > 0$, такие, что*

$$\Delta_{\sigma,i}(\mu; A) = \nabla_{\sigma,i}(\mu; A) = \lambda_i(\mu; A) = \alpha f(\mu), \quad \mu \in M.$$

**Доказательство.** По теореме 2.1 существует семейство $B \in \mathcal{BU}^n(M)$, удовлетворяющее условию $\lambda_i(\,\cdot\,; B) = f$. Положим $L = \sup_{\mu \in M} \|B(\cdot, \mu)\| + 1$. Определим семейство $A \in \mathcal{BU}^n(M)$ равенством

$$A(t, \mu) = \alpha B(\alpha t, \mu), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

где $\alpha = \sigma(3L)^{-1}$. Тогда если для некоторого $\mu \in M$ вектор-функция $x(\cdot)$ является решением системы $B(\,\cdot\,, \mu)$, то вектор-функция $t \mapsto y(t) \equiv x(\alpha t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, является решением системы $A(\,\cdot\,, \mu)$, причём $x(0) = y(0)$. Очевидно, $\lambda[x] = \alpha\lambda[y]$. Следовательно, $\lambda_i(\mu; A) = \alpha\lambda_i(\mu; B) = \alpha f(\mu)$, $\mu \in M$.

Для коэффициента неправильности Гробмана (см. например, [94, 1.3]) систем построенного семейства справедлива (вытекающая из (1.6)) оценка

$$\sigma_{\text{г}}(A(\cdot, \mu)) \leqslant 2 \cdot \|A(\cdot, \mu)\| < \sigma, \quad \mu \in M.$$

Требуемое вытекает теперь из теоремы Гробмана [94, 8.1]. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.4.** 1. Покажем, что функция действующая из $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C \times \mathbb{R}^*_+$ в $\overline{\mathbb{R}}$ по правилу $(A, \sigma) \mapsto \nabla_{\sigma,i}(A)$, является верхнепредельной (см. определение 1.14).

a. Зафиксируем $k, l \in \mathbb{N}$. Для всякого $q \in \mathbb{N}$ положим

$$\psi_q(B,\sigma) = \sup_{t\in[0,q]} |B(t)|e^{\sigma t}, \quad B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+^*.$$

Докажем, что функция $F_i^{kl}\colon \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством

$$F_i^{kl}(A,\sigma) = \sup\{\varphi_i^{kl}(A+B) : \psi_{k+l}(B,\sigma) < 1\}, \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+^*,$$

где функция $\varphi_i^{kl}$ определена равенством (1.10), принадлежит классу $(\mathscr{G}, *)$, т. е. полунепрерывна снизу. Действительно, пусть задано произвольное число $r \in \mathbb{R}$. Множество $\mathcal{A} = \{(A,B) \in \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \widetilde{\mathcal{M}}^n : \varphi_i^{kl}(A+B) > r\}$ открыто в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n \times \widetilde{\mathcal{M}}_C^n$ как прообраз открытого множества $(r, +\infty)$ при непрерывном (в силу леммы 1.1) отображении $(A,B) \mapsto \varphi_i^{kl}(A+B)$, а множество $\mathcal{Q} = \{(B,\sigma) \in \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \times \mathbb{R}_+^* : \psi_{k+l}(B,\sigma) < 1\}$ открыто в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n \times \mathbb{R}_+^*$ как прообраз открытого множества $(-\infty, 1)$ при непрерывном отображении $\psi_{k+l}$. Тогда по теореме 1 [106, § 15, II] множество $\{(A,\sigma) : F_i^{kl}(A,\sigma) > r\}$ открыто как проекция открытого множества $(\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^*) \cap (\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathcal{Q})$, лежащего в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n \times \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \times \mathbb{R}_+^*$, на произведение первого и третьего сомножителей.

b. Зафиксируем произвольные $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\sigma > 0$ и установим справедливость равенства

$$\xi \equiv \sup_{B\in\mathcal{E}_{\sigma,1}^n} \varphi_i^{kl}(A+B) = \sup\{\varphi_i^{kl}(A+B) : \psi_{k+l}(B,\sigma) \leqslant 1\} \equiv \mu. \tag{4.16}$$

В силу включения $\mathcal{E}_{\sigma,1}^n \subset \{B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : \psi_{k+l}(B,\sigma) \leqslant 1\}$ имеем $\xi \leqslant \mu$. С другой стороны, для всякого $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющего условию $\psi_{k+l}(B,\sigma) \leqslant 1$, положим

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(t), & t \in [0, k+l], \\ B(k+l)\cdot e^{-\sigma(t-(k+l))}, & t \geqslant k+l. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{B} \in \mathcal{E}_{\sigma,1}^n$ и $\varphi_i^{kl}(A+\tilde{B}) = \varphi_i^{kl}(A+B)$, поскольку значение функции $\varphi_i^{kl}$ на системе определяется её сужением на отрезок $[0, k+l]$, на котором системы $B$ и $\tilde{B}$ совпадают. Таким образом, $\xi \geqslant \mu$, и равенство (4.16) установлено.

Теперь установим равенство

$$\sup\{\varphi_i^{kl}(A+B) : \psi_{k+l}(B,\sigma) \leqslant 1\} = \sup\{\varphi_i^{kl}(A+B) : \psi_{k+l}(B,\sigma) < 1\}. \tag{4.17}$$

Множество $\{B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : \psi_{k+l}(B,\sigma) \leqslant 1\}$ является замыканием в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n$ множества $\{B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : \psi_{k+l}(B,\sigma) < 1\}$. Из непрерывности отображения $B \mapsto \varphi_i^{kl}(A+B)$ на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n$ получаем, что первое из множеств, стоящих в (4.17) под знаком точной верхней грани, является замыканием второго. Следовательно, их точные верхние грани совпадают.

с. Покажем теперь, что функция $\eta_i : \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \times \mathbb{R}^*_+ \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством

$$\eta_i(A,\sigma) = \sup_{B \in \mathcal{E}^n_{\sigma,1}} \lambda_i(A+B), \quad A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^*_+,$$

является верхнепредельной. По лемме 3.1 имеем

$$\eta_i(A,\sigma) = \sup_{B \in \check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,1}} \lambda_i(A+B), \quad A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^*_+,$$

Теперь, используя лемму 3.7, получим

$$\eta_i(A,\sigma) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{B \in \check{\mathcal{E}}_{\sigma,1}} \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t \geqslant k} \frac{1}{t} \ln |X_{A+B}(t,0)|_L|, \quad A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+_*.$$

Для всяких $C \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$, $t > 0$ и $L \in G_i(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\chi(C,t,L) = t^{-1} \ln |X_C(t,0)|_L|.$$

В силу [136, лемма 2] для любых $C \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ и $t > 0$ функция $L \mapsto \chi(C,t,L)$ непрерывна (множество $G_i(\mathbb{R}^n)$ наделяется стандартной топологией, в которой оно является компактом). Применяя лемму 3.6, получаем для всякого $C \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ цепочку равенств

$$\begin{aligned}\inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{t \geqslant k} \chi(C,t,L) &= \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \sup_{l \in \mathbb{N}} \max_{t \in [k,k+l]} \chi(C,t,L) = \\ &= \sup_{l \in \mathbb{N}} \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \max_{t \in [k,k+l]} \chi(C,t,L) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi^{kl}_i(C),\end{aligned}$$

откуда получаем

$$\eta_i(A,\sigma) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{l \in \mathbb{N}} \sup_{B \in \check{\mathcal{E}}^n_{\sigma,1}} \varphi^{kl}_i(A+B), \quad A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^*_+.$$

Наконец, используя (4.16) и (4.17), окончательно получим

$$\eta_i(A,\sigma) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{l \in \mathbb{N}} F^{kl}_i(A,\sigma), \quad A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^*_+.$$

В п. а установлено, что функции $F^{kl}_i : \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \times \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}$, $k,l \in \mathbb{N}$, принадлежат классу $(\mathscr{G}, *)$. Тогда согласно первому правилу Юнга-Хаусдорфа (см. с. 48) функции $(A,\sigma) \mapsto \sup_{l \in \mathbb{N}} F^{kl}_i(A,\sigma)$, $k \in \mathbb{N}$, также принадлежат этому классу, а значит, и классу $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$ в силу очевидного равенства

$$[r, +\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (r - k^{-1}, +\infty), \quad r \in \mathbb{R},$$

и свойств прообраза множества. Снова применяя первое правило Юнга-Хаусдорфа, получим, что функция $\eta_i$ принадлежит классу $({}^*, \mathscr{G}_\delta)$, т. е. является верхнепредельной (см. лемму 1.14).

Пусть $\sigma'' > \sigma' > 0$. Тогда $\mathcal{E}^n_{\sigma'',1} \subset \mathcal{E}^n_{\sigma',1}$, откуда для всякого $A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ получаем неравенство $\eta_i(A,\sigma'') \leqslant \eta_i(A,\sigma')$. Следовательно, для любых системы $A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ и числа $\sigma \in \mathbb{R}^*_+$ справедлива цепочка равенств

$$\tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A) = \inf_{\varepsilon\in(0,\sigma)} \eta_i(A,\sigma-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \eta_i(A,\sigma-\varepsilon) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \eta_i(A,\sigma(1-2^{-m})).$$

Замечая, что $\nabla_{\sigma,i}(A) = \tilde{\nabla}_{\sigma,i}(A)$ (в силу леммы 4.3), с учётом предыдущего из леммы 1.15 получаем, что функция $(A,\sigma) \mapsto \nabla_{\sigma,i}(A)$ является верхнепредельной.

2. a. Теперь зафиксируем произвольные $\sigma > 0$ и $r \in \mathbb{R}$. В силу п. 1 множество

$$\{(A,\varsigma) \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n \times \mathbb{R}^*_+ : \nabla_{\varsigma,i}(A) \geqslant r\} \cap (\widetilde{\mathfrak{M}}^n \times \{\sigma\})$$

является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$ в произведении $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \times \{\sigma\}$. Следовательно, его проекция на первый сомножитель $\{A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n : \nabla_{\sigma,i}(A) \geqslant r\}$ является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$ в пространстве $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C$, поскольку сужение на подпространство $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \times \{\sigma\}$ проекции произведения $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \times \mathbb{R}^*_+$ на первый сомножитель является гомеоморфизмом.

Пусть теперь задано произвольное семейство $A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$. Тогда множество $[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) \geqslant r]$ есть прообраз при непрерывном (см. лемму 1.5) отображении, действующем из $M$ в $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C$ по правилу $\mu \mapsto A(\,\cdot\,,\mu)$, множества $\{A \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n : \nabla_{\sigma,i}(A) \geqslant r\}$ и, следовательно, является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$ в пространстве $M$. Таким образом, мы установили включение

$$\{[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) \geqslant r] : A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)\} \subset \mathscr{G}_\delta(M). \tag{4.18}$$

b. Из включения (4.18) и равенства

$$[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) > r] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) \geqslant r + k^{-1}]$$

получаем включение

$$\{[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) > r] : A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)\} \subset \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M). \tag{4.19}$$

Наконец, из включений (4.18), (4.19), включения $\mathscr{G}_\delta(M) \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$ (см. лемму 1.12) и равенства

$$[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) = r] = [\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) \geqslant r] \cap (M \backslash [\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) > r])$$

получаем включение

$$\{[\nabla_{\sigma,i}(\,\cdot\,;A) = r] : A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)\} \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M).$$

3. Теперь зафиксируем произвольное $r \in \mathbb{R}$ и докажем включение

$$\{[\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r] : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathscr{G}_\delta(M). \tag{4.20}$$

Пусть задано множество $S \in \mathscr{G}_\delta(M)$. Согласно следствию 2.4 существует семейство $A \in \mathcal{BU}^n(M)$, для которого $S = [\lambda_i(\cdot\,;A) \geqslant r]$. Из теоремы 2.1 получаем, что функция $f(\cdot) \equiv \lambda_i(\cdot\,;A)$ является верхнепредельной, а в силу оценки (1.9) эта функция ограничена. Тогда согласно лемме 4.4 существуют семейство $A \in \mathcal{BU}^n(M)$ и $\alpha > 0$, удовлетворяющие условию

$$\nabla_{\sigma,i}(\mu; A) = \alpha f(\mu), \quad \mu \in M.$$

Положим $B(t,\mu) = A(t,\mu) + (1-\alpha)rE_n$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Из леммы 4.1 получаем, что справедлива цепочка равенств

$$\nabla_{\sigma,i}(\mu; B) = \nabla_{\sigma,i}(\mu; A) + (1-\alpha)r = \alpha f(\mu) + (1-\alpha)r, \quad \mu \in M.$$

Остается заметить, что $[\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;B) \geqslant r] = [f \geqslant r] = S$. Включение (4.20) установлено. Включения

$$\{[\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A) > r] : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M), \tag{4.21}$$

$$\{[\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A) = r] : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M) \tag{4.22}$$

проверяются аналогично. Утверждение теоремы вытекает из (очевидного) включения $\mathcal{BU}^n(M) \subset \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ и включений (4.18)–(4.22). Теорема доказана.

**Доказательство следствия 4.1.** 1. Пусть задано семейство $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$. В силу теоремы 4.4 для всякого $r \in \overline{\mathbb{R}}$ множество $[\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r]$ является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$. По лемме 1.14 функция $\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ является пределом убывающей последовательности функций первого бэровского класса. Таким образом, функция $\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A)$ принадлежит второму бэровскому классу.

2. Поскольку, как сказано выше, функция $\nabla_{\sigma,i}(\cdot;A)$ принадлежит классу $({}^*,\mathscr{G}_\delta)$, из [99, лемма 2] получаем включения $\mathit{LS}(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) \in \mathfrak{D}(M)$ и $\mathit{US}(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) \in \mathscr{G}_\delta(M)$. Если $M$ полно, то из леммы 1.16 следует, что множество $\mathit{US}(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A))$ плотно в $M$.

3. Пусть теперь задано произвольное множество $S \in \mathfrak{G}(M)$. Согласно следствию 2.2 найдётся семейство $B \in \mathcal{BU}^n(M)$, для которого выполнено $\mathit{US}(\lambda_i(\cdot\,;B)) = S$. В силу теоремы 2.1 функция $\lambda_i(\cdot\,;A)$ является верхнепредельной, а в силу оценки (1.9) — ограниченной. Пользуясь леммой 4.4, построим семейство $A \in \mathcal{BU}^n(M)$, такое, что для некоторого $\alpha > 0$ выполнено $\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A) = \alpha\lambda_i(\cdot\,;B)$. Тогда очевидно $\mathit{US}(\nabla_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) = \mathit{US}(\lambda_i(\cdot\,;B)) = S$. Таким образом, установлено включение

$$\{\mathit{US}(\nabla_{\sigma,i}(\cdot;A)) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathfrak{G}(M).$$

Включение $\{LS(\nabla_{\sigma,i}(\cdot;A)) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathfrak{D}(M)$ устанавливается аналогично. Учитывая результаты п. 2 и включение $\mathcal{BU}^n(M) \subset \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$, получим требуемое. Следствие доказано.

**Замечание 4.2.** Используя те же рассуждения и результат работы [261], нетрудно показать справедливость соотношений

$$\{(LS(\nabla_{\sigma,1}(\cdot\,;A)),\dots,LS(\nabla_{\sigma,n}(\cdot\,;A))) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} = (\mathfrak{D}(M))^n,$$

$$(\mathscr{G}_\delta(M))^n \supset \{(US(\nabla_{\sigma,1}(\cdot\,;A)),\dots,US(\nabla_{\sigma,n}(\cdot\,;A))) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset (\mathfrak{G}(M))^n,$$

описывающих наборы множеств точек полунепрерывности снизу (соответственно сверху) верхних сигма-показателей Изобова семейств (4.6). В случае, когда пространство $M$ полно, последнее включение является равенством.

## 4.2 Нижний сигма-показатель Изобова

В этом разделе получено полное описание лебеговских множеств и множеств точек полунепрерывности сверху и снизу нижних сигма-показателей Изобова как функций параметра для семейств систем (4.6), рост коэффициентов которых подчинён специальному ограничению.

Перейдём к точным определениям.

Через $\mathcal{F}^n(M)$ обозначим совокупность *локально равномерно оцениваемых* отображений $A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$, определяемых следующим свойством: для каждой точки $\mu \in M$ найдутся такие её окрестность $U_\mu$ и непрерывная функция $f_\mu\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t,\nu)|/f_\mu(t) < \infty \quad \text{при всех} \quad \nu \in U_\mu.$$

Отметим, что отображение $A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$ обладает указанным свойством, например, в следующих случаях: 1) если при каждом $\mu \in M$ система (4.6) имеет ограниченные коэффициенты (тогда для всякого $\mu \in M$ положим просто $U_\mu = M$ и $f_\mu(t) \equiv 1$). Совокупность таких семейств мы ранее обозначили через $\mathfrak{C}^n(M)$; 2) если пространство $M$ локально компактно (в этом случае для всякого $\mu$ положим $f_\mu(t) = \sup\limits_{\nu\in U_\mu} |A(t,\nu)| + 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $U_\mu$ — какая-нибудь компактная окрестность точки $\mu$).

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый подкласс класса $\widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)$. Для любых $\sigma > 0$ и $i \in \mathbb{N}_n$ условимся обозначать через $\check{\mathfrak{N}}_{\sigma,i}(\mathcal{K},r)$, $\check{\mathfrak{P}}_{\sigma,i}(\mathcal{K},r)$ и $\check{\mathfrak{Z}}_{\sigma,i}(\mathcal{K},r)$ соответственно совокупности множеств $\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r] : A \in \mathcal{K}\}$, $\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) > r] : A \in \mathcal{K}\}$ и $\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) = r] : A \in \mathcal{K}\}$.

Указанные совокупности множеств, отвечающие семействам (4.6) из класса $\mathcal{F}^n(M)$, полностью описывает следующая

**Теорема 4.5** ([267]). *Для любых метрического пространства $M$ и чисел*

$n \geqslant 2,\ i \in \mathbb{N}_n,\ \sigma > 0$ *и* $r \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие равенства:*

*1)* $\check{\mathfrak{N}}_{\sigma,i}(\mathcal{F}^n(M), r) = \check{\mathfrak{N}}_{\sigma,i}(\mathcal{BU}^n(M), r) = \mathscr{G}_\delta(M)$;

*2)* $\check{\mathfrak{P}}_{\sigma,i}(\mathcal{F}^n(M), r) = \check{\mathfrak{P}}_{\sigma,i}(\mathcal{BU}^n(M), r) = \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$;

*3)* $\check{\mathfrak{Z}}_{\sigma,i}(\mathcal{F}^n(M), r) = \check{\mathfrak{Z}}_{\sigma,i}(\mathcal{BU}^n(M), r) = \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$.

**Замечание 4.3.** Для всяких $r \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ включение

$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,; A) \geqslant r] : A \in \mathcal{C}^n(M)\} \subset \mathscr{G}_\delta(M)$$

вытекает из результата, анонсированного для $i = n$ автором [270], а для остальных $i$ — Е. Е. Саловым [172]. Доказательства этих результатов не были опубликованы, но близкие рассуждения содержатся в работе [252].

Перед доказательством теоремы 4.5 установим две леммы.

Следующая лемма показывает, что с точки зрения спектра показателей Ляпунова экспоненциальные возмущения системы можно считать кусочно-постоянными с разрывами в точках последовательности, зависящей только от скорости роста коэффициентов исходной системы.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество строго возрастающих последовательностей положительных вещественных чисел, стремящихся к бесконечности. Для всякой последовательности $\tau \in \mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{P}^n_\tau$ множество кусочно-постоянных матричнозначных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ с разрывами разве что в точках последовательности $\tau$.

**Лемма 4.5.** *Для каждой непрерывной функции* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *существует последовательность* $\tau \in \mathcal{T}$, *обладающая свойством: для любых системы* $A \in \mathcal{B}^n_f$ *и чисел* $\sigma > 0$ *и* $i \in \mathbb{N}_n$ *справедливо равенство* (определение множества $\mathcal{B}^n_f$ см. на с. 24)

$$\{\lambda_i(A+Q) : Q \in \mathcal{E}^n_\sigma\} = \{\lambda_i(A+\tilde{Q}) : \tilde{Q} \in \mathcal{E}^n_\sigma \textstyle\bigcap \mathcal{P}^n_\tau\}. \tag{4.23}$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что функция $f$ возрастает, в противном случае заменим её функцией $t + \max_{s\in[0,t]} f(s)$. Определим функцию $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*_+$ равенством (3.18). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ разобьём отрезок $[k-1, k]$ точками $\xi_{km}$, $m = 0, \ldots, m_k$, на $m_k$ частей, полагая $\xi_{k0} = k-1$, $\xi_{km_k} = k$ и выбирая остальные точки разбиения так, чтобы выполнялось условие (3.19). Занумеруем точки множества

$$\{\xi_{km} : k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_{m_k}\}$$

возрастающей последовательностью $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Для удобства положим ещё $\tau_0 = 0$. Выберем произвольно и зафиксируем $A \in \mathcal{B}^n_f$, $\sigma > 0$ и $i \in \mathbb{N}_n$. Покажем, что справедливо равенство (4.23). Включение

$$\{\lambda_i(A+Q) : Q \in \mathcal{E}^n_\sigma\} \supset \{\lambda_i(A+\tilde{Q}) : \tilde{Q} \in \mathcal{E}^n_\sigma \textstyle\bigcap \mathcal{P}^n_\tau\}$$

вытекает из очевидного включения $\mathcal{E}^n_\sigma \supset \mathcal{E}^n_\sigma \bigcap \mathcal{P}^n_\tau$.

Докажем обратное включение. Пусть $\hat{Q} \in \mathcal{E}^n_\sigma$. Из определения множества $\mathcal{E}^n_\sigma$ следует, что найдётся $k_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $|\hat{Q}(t)| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant \tau_{k_0}$. Зададим функцию $Q \in \mathcal{M}^n$, положив $Q(t) = O_n$ при $t \in [0, \tau_{k_0})$ и $Q(t) = \hat{Q}(t)$ при $t \geqslant \tau_{k_0}$. Поскольку системы $A + Q$ и $A + \hat{Q}$ совпадают при всех $t \geqslant \tau_{k_0}$, то в силу свойства остаточности показателя Ляпунова (см. лемму 1.4) имеем $\lambda_i(A + \hat{Q}) = \lambda_i(A + Q)$. Определим теперь $\tilde{Q} \in \mathcal{P}^n_\tau$ равенством (3.20). Тогда если $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$|\tilde{Q}(t)| \leqslant \max_{s \in [\tau_{k-1}, \tau_k)} |Q(s)| \leqslant Ce^{-\sigma\tau_{k-1}} \leqslant Ce^{\sigma(t-\tau_{k-1})}e^{-\sigma t} \leqslant Ce^{\sigma}e^{-\sigma t},$$

где $C = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\hat{Q}(s)|e^{\sigma s}$. Таким образом, $\tilde{Q} \in \mathcal{E}^n_\sigma$.

Рассуждая, как в доказательстве леммы 3.11, получим, что выполнено условие (2.18), в котором $A$, $B$ и $f$ заменены на $A+Q$, $A+\tilde{Q}$ и $f+1$ соответственно, а $K = 1$. Заметим, что справедливы включения $A+Q, A+\tilde{Q} \in \mathcal{B}^n_{f+1}$. По лемме 2.6 системы $A+Q$ и $A+\tilde{Q}$ слабо ляпуновски эквивалентны, откуда (см. лемму 1.4) получаем, что $\lambda_i(A + Q) = \lambda_i(A + \tilde{Q})$. Лемма доказана.

**Лемма 4.6.** *Для любых непрерывной функции $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и последовательности $\tau \in \mathcal{T}$ множество $\mathcal{B}^n_g \bigcap \mathcal{P}^n_\tau$ компактно в топологии, индуцированной из $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$.*

**Доказательство.** Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{S}_k = \{Y \in \mathbb{R}^{n\times n} : |Y| \leqslant g_k\},$$

где $g_k = \min\limits_{t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]} g(t)$ (считаем $\tau_0 = 0$). Наделим произведение $\mathcal{S} = \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_k$ тихоновской топологией и определим отображение $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{B}^n_g \bigcap \mathcal{P}^n_\tau$, поставив каждому набору $(Y_1, Y_2, \ldots) \in \mathcal{S}$ в соответствие матричнозначную функцию $A$, определяемую набором равенств $A(t) = Y_k$ при $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Непосредственно из определений вытекает, что $\varphi$ — гомеоморфизм. В силу теоремы Тихонова [106, § 41, IV, теорема 4] пространство $\mathcal{S}$ компактно, поэтому $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{B}^n_g \bigcap \mathcal{P}^n_\tau$ тоже компактно. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.5.**

1. Докажем сначала включение

$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,; A) \geqslant r] : A \in \mathcal{F}^n(M)\} \subset \mathscr{G}_\delta(M). \tag{4.24}$$

Пусть задано семейство $A \in \mathcal{F}^n(M)$. Выберем произвольно и зафиксируем точку $\mu \in M$. Тогда (в силу определения класса $\mathcal{F}^n(M)$) найдутся её открытая окрестность $U_\mu$ и непрерывная функция $f_\mu\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*_+$, такие, что

$$U_\mu = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} U^l_\mu, \quad U^l_\mu = \{\nu \in U_\mu : |A(t,\nu)| \leqslant lf_\mu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $l \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tau^l$ последовательность, существование которой утверждается в лемме 4.5 для функции $t \mapsto lf_\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Положим

$$\mathcal{K}_{l,j} = \mathcal{E}^n_{\sigma,j} \bigcap \mathcal{P}^n_{\tau^l}, \quad l, j \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\Delta_{\sigma,i}(\nu; A) = \inf_{l \in \mathbb{N}} \inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{B \in \mathcal{K}_{l,j}} \lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + B), \quad \nu \in U_\mu. \tag{4.25}$$

Действительно, для любых $l, j \in \mathbb{N}$ имеет место включение $\mathcal{K}_{l,j} \subset \mathcal{E}^n_\sigma$, из которого получаем, что при всех $\nu \in M$

$$\Delta_{\sigma,i}(\nu; A) \leqslant \inf_{B \in \mathcal{K}_{l,j}} \lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + B).$$

Переходя в полученном неравенстве последовательно к точной нижней грани по $j \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$, заключаем, что левая часть (4.25) не превосходит правой.

Теперь установим обратное неравенство. Пусть $\nu \in U_\mu$ и $B \in \mathcal{E}^n_\sigma$. Тогда для некоторого $l_0 \in \mathbb{N}$ имеем $\nu \in U^{l_0}_\mu$. По лемме 4.5 (для функции $t \mapsto l_0 f_\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$) существует такое $\tilde{B} \in \mathcal{E}^n_\sigma \cap \mathcal{P}^n_{\tau^{l_0}}$, что $\lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + B) = \lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + \tilde{B})$. Поскольку $\mathcal{E}^n_\sigma = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^n_{\sigma,j}$, то для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ имеем $\tilde{B} \in \mathcal{K}_{l_0,j_0}$. Следовательно, справедлива цепочка неравенств

$$\lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + B) \geqslant \inf_{Q \in \mathcal{K}_{l_0,j_0}} \lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + Q) \geqslant \inf_{l \in \mathbb{N}} \inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{Q \in \mathcal{K}_{l,j}} \lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + Q),$$

откуда, переходя к точной нижней грани по $B \in \mathcal{E}^n_\sigma$, получим, что правая часть (4.25) не превосходит левой. Таким образом, равенство (4.25) установлено.

По лемме 1.1 при всех $l, j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\inf_{B \in \mathcal{K}_{l,j}} \lambda_i(A(\cdot\,,\nu) + B) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{B \in \mathcal{K}_{l,j}} \sup_{q \in \mathbb{N}} \varphi^{mq}_i(A(\cdot\,,\nu) + B), \quad \nu \in U_\mu, \tag{4.26}$$

где функции $\varphi^{mq}_i$, $m, q \in \mathbb{N}$, определены равенством (1.10). В силу леммы 4.6 для всяких $l, j \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{K}_{l,j}$ компактно в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$. Из леммы 1.1 следует, что для каждых $l, j, m, q \in \mathbb{N}$ и $\nu \in U_\mu$ функция, действующая из $\mathcal{K}_{l,j}$ в $\mathbb{R}$ по правилу $B \mapsto \varphi^{mq}_i(A(\cdot\,,\nu) + B)$, непрерывна. Кроме того, при любых $m, q \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{K}_{l,j}$ и $\nu \in U_\mu$ выполнено

$$\varphi^{mq}_i(A(\cdot\,,\nu) + B) \leqslant \varphi^{m,q+1}_i(A(\cdot\,,\nu) + B).$$

Из равенств (4.25) и (4.26), применяя лемму 3.6, получаем

$$\Delta_{\sigma,i}(\nu; A) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{l \in \mathbb{N}} \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{q \in \mathbb{N}} \inf_{B \in \mathcal{K}_{l,j}} \varphi^{mq}_i(A(\cdot\,,\nu) + B), \quad \nu \in U_\mu.$$

Пусть задано произвольное $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\nu \in U_\mu : \Delta_{\sigma,i}(\nu; A) < r\} = \bigcup_{j,k,l,m\in\mathbb{N}} \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^{mq}_{jkl},$$

где

$$\mathcal{D}^{mq}_{jkl} = \{\nu \in U_\mu : \inf_{B\in\mathcal{K}_{l,j}} \varphi^{mq}_i(A(\cdot\,,\nu)+B) \leqslant r - 1/k\}.$$

По лемме 1.5 отображение, действующее из $U_\mu$ в $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C$ по правилу $\nu \mapsto A(\cdot\,,\nu)$, непрерывно. Тем же свойством обладает и отображение, действующее из $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \times \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C$ в $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_C$ по правилу $(A,B) \mapsto A+B$, а также (в силу леммы 1.1) функции $\varphi^{mq}_i\colon \widetilde{\mathfrak{M}}^n_C \to \mathbb{R}$, $m,q \in \mathbb{N}$. Следовательно, для всяких $j,k,l,m,q \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{N} = \{(\nu,B) \in U_\mu \times \mathcal{K}_{l,j} : \varphi^{mq}_i(A(\cdot\,,\nu)+B) \leqslant r - 1/k\}$ замкнуто в произведении $U_\mu \times \mathcal{K}_{l,j}$, а точная нижняя грань, фигурирующая в определении множества $\mathcal{D}^{mq}_{jkl}$, достигается. Проекция множества $\mathcal{N}$ на первый сомножитель произведения есть множество $\mathcal{D}^{mq}_{jkl}$, которое замкнуто в $U_\mu$ в силу [107, § 41, IV, теорема 1], откуда получаем, что множество $\{\nu \in U_\mu : \Delta_{\sigma,i}(\cdot\,; A) < r\}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ в пространстве $U_\mu$. Таким образом, множество $[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) < r] = \{\nu \in M : \Delta_{\sigma,i}(\nu;A) < r\}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ во всякой точке $\mu \in M$ [106, § 30, X]. Тогда в силу [106, § 30, X, теорема 1] оно является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ во всём пространстве $M$, а значит, его дополнение $[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r]$ является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$ в том же пространстве. Таким образом, мы установили включение (4.24).

2. Из включения (4.24) и равенства

$$[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) > r] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r + k^{-1}]$$

получаем включение

$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) > r] : A \in \mathcal{F}^n(M)\} \subset \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M). \tag{4.27}$$

Наконец, из включений (4.24), (4.27), равенства

$$[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) = r] = [\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r] \bigcap (M \backslash [\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) > r])$$

и включения $\mathscr{G}_\delta(M) \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$ (см. лемму 1.12) получаем включение

$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) = r] : A \in \mathcal{F}^n(M)\} \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M). \tag{4.28}$$

3. Включения

$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) \geqslant r] : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathscr{G}_\delta(M),$$
$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) > r] : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M) \quad \text{и}$$
$$\{[\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A) = r] : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$$

устанавливаются теми же рассуждениями, как в п. 3 доказательства теоремы 4.4. Утверждение теоремы вытекает из этих включений, включений (4.24)–(4.28) и включения $\mathcal{BU}^n(M) \subset \mathcal{F}^n(M)$. Теорема доказана.

Множества точек полунепрерывности нижних сигма-показателей Изобова семейств из класса $\mathcal{F}^n(M)$ описывает следующее (см. обозначения в разделе 4.1)

**Следствие 4.2.** *Для произвольных чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$, $\sigma > 0$, метрического пространства $M$ и семейства $A \in \mathcal{F}^n(M)$ функция $\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,; A)$ является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму бэровскому классу. Кроме того, справедливы соотношения*

$$
\begin{aligned}
&\{LS(\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) : A \in \mathcal{F}^n(M)\} = \{LS(\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} = \mathfrak{F}(M),\\
&G_\delta(M) \supset \{US(\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) : A \in \mathcal{F}^n(M)\},\\
&\{US(\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) : A \in \mathcal{F}^n(M)\} \supset \{US(\Delta_{\sigma,i}(\cdot\,;A)) : A \in \mathcal{BU}^n(M)\} \supset \mathfrak{G}(M),
\end{aligned}
$$

*причём если $M$ полно, то последние два включения являются равенствами.*

**Доказательство следствия 4.2** проводится аналогично доказательству следствия 4.1. Следствие доказано.

## 4.3 Экспоненциальные показатели Изобова

В работе [86] установлено, что для линейной системы (1.1) с ограниченными коэффициентами отрицательность старшего экспоненциального показателя Изобова $\nabla_n(A)$ достаточна, а его неположительность необходима для устойчивости всякой нелинейной системы (4.4) с возмущением $f$ высшего порядка малости. Из теоремы 4.1 вытекает, что достаточность имеет место и для систем с неограниченными коэффициентами, а именно, справедливо

**Следствие 4.3** ([267]). *Пусть для системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ выполняется неравенство $\nabla_n(A) < 0$, а непрерывная функция $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ имеет неположительный характеристический показатель: $\lambda[\Psi] \leqslant 0$. Тогда для любых чисел $\alpha > \nabla_n(A)$ и $m > 1$ существуют такие постоянные $\delta > 0$ и $C > 0$, что каковы бы ни были область $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, и непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию* (4.3)*, для всякого решения системы* (4.4) *с начальным условием $|x(0)| < \delta$ справедлива оценка* (4.5)*. В частности, нулевое решение системы* (4.4) *экспоненциально устойчиво.*

Из теоремы 4.2 вытекает, что верхние экспоненциальные показатели Изобова достигаются показателями Ляпунова одновременно, как это утверждает

**Следствие 4.4** ([267]). *Для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и набора чисел $\alpha_i < \nabla_i(A)$, $i \in \mathbb{N}_n$, найдётся такая система $Q \in \mathcal{E}$, что $\lambda_i(A+Q) > \alpha_i$, $i \in \mathbb{N}_n$.*

Для нижних экспоненциальных показателей Изобова одновременная их достижимость показателями Ляпунова, вообще говоря, не имеет места, как показывает следующая

**Теорема 4.6** ([267]). *Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, существуют такие система $A \in \mathcal{M}^n$ и $\varepsilon > 0$, что $\Delta_1(A) = \alpha$, $\Delta_2(A) = \beta$, и для каждой системы $Q \in \mathcal{E}$ из неравенства $\lambda_1(A + Q) < \alpha + \varepsilon$ вытекает неравенство $\lambda_2(A + Q) \geqslant \beta + \varepsilon$.*

В работе [44] установлено, что функционал $\nabla_n \colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит третьему классу Бэра и не принадлежит второму (первое утверждение ранее было анонсировано в докладе [2]). Этот результат обобщает

**Теорема 4.7** ([267]). *Для каждого $i \in \mathbb{N}_n$ функционал $\nabla_i \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ является пределом возрастающей последовательности функционалов второго класса Бэра (и, следовательно, принадлежит третьему классу), а его сужение на подпространство $\mathcal{M}^n_C$ не принадлежит второму классу Бэра.*

**Замечание 4.4.** Непринадлежность функции $\nabla_i|_{\mathcal{M}^n}$ второму бэровскому классу для всех $i \in \{2, \ldots, n\}$ легко вытекает из результата [44].

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый подкласс класса $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$. Для любых $n \geqslant 2$, $i \in \in \mathbb{N}_n$ и $r \in \mathbb{R}$ условимся обозначать через $\check{\mathfrak{N}}_i(\mathcal{K}, r)$, $\check{\mathfrak{P}}_i(\mathcal{K}, r)$ и $\check{\mathfrak{Z}}_i(\mathcal{K}, r)$ соответственно совокупности множеств $\{[\Delta_i(\cdot\,; A) \geqslant r] : A \in \mathcal{K}\}$, $\{[\Delta_i(\cdot\,; A) > r] : A \in \mathcal{K}\}$ и $\{[\Delta_i(\cdot\,; A) = r] : A \in \mathcal{K}\}$.

Следующая теорема полностью описывает указанные совокупности множеств, отвечающие семействам (4.6) с непрерывными локально равномерно оцениваемыми коэффициентами.

**Теорема 4.8** ([267]). *Для любых чисел $n \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}_n$, метрического пространства $M$ и семейства $A \in \mathcal{F}^n(M)$ функция $\Delta_i(\cdot\,; A)$ является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму бэровскому классу. Кроме того, для всякого $r \in \mathbb{R}$ справедливы следующие равенства:*

*1)* $\check{\mathfrak{N}}_\sigma(\mathcal{F}^n(M), r) = \check{\mathfrak{N}}_\sigma(\mathcal{BC}^n(M), r) = \mathscr{G}_\delta(M)$;

*2)* $\check{\mathfrak{P}}_\sigma(\mathcal{F}^n(M), r) = \check{\mathfrak{P}}_\sigma(\mathcal{BC}^n(M), r) = \mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$;

*3)* $\check{\mathfrak{Z}}_\sigma(\mathcal{F}^n(M), r) = \check{\mathfrak{Z}}_\sigma(\mathcal{BC}^n(M), r) = \mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$.

**Замечание 4.5.** Для любого $r \in \mathbb{R}$ включение $\check{\mathfrak{N}}_i(\mathcal{C}^n(M), r) \subset \mathscr{G}_\delta(M)$ вытекает из результатов, анонсированных для $i = n$ в докладе [270], а для остальных значений $i$ — в докладе [172].

Перейдём к доказательству сформулированных утверждений.

**Доказательство следствия 4.3.** Без ограничения общности можно считать, что $\alpha < 0$, поэтому найдётся такое $\sigma > 0$, что $\alpha < -\sigma/(m-1)$, откуда получаем цепочку

$$\nabla_{\sigma,n}(A) \equiv \sup\{\lambda_n(A+Q) : \lambda[Q] \leqslant -\sigma\} \leqslant \nabla_n(A) < \alpha < -\sigma/(m-1).$$

Требуемое вытекает теперь из теоремы 4.1. Следствие доказано.

**Доказательство следствия 4.4.** Напомним, что верхние сигма-показатели Изобова системы (1.1) задаются равенствами

$$\nabla_{\sigma,i}(A) = \sup_{Q\in\hat{\mathcal{E}}_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad i \in \mathbb{N}_n,$$

где $\hat{\mathcal{E}}_\sigma = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] \leqslant -\sigma\}$. Заметим, что для всяких $\sigma'' > \sigma' > 0$ справедливо включение $\hat{\mathcal{E}}_{\sigma''} \subset \hat{\mathcal{E}}_{\sigma'}$, откуда, учитывая равенство $\mathcal{E} = \bigcup_{\sigma>0} \hat{\mathcal{E}}_\sigma$, получаем цепочку

$$\nabla_i(A) = \sup_{\sigma>0} \nabla_{\sigma,i}(A) = \lim_{\sigma\to 0+} \nabla_{\sigma,i}(A) = \lim_{k\to\infty} \nabla_{1/k,i}(A), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n, \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{4.29}$$

Пусть заданы произвольные система $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и набор чисел $\alpha_i < \nabla_i(A)$, $i \in \mathbb{N}_n$. В силу (4.29) найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $\nabla_{1/k,i}(A) > \alpha_i$, $i \in \mathbb{N}_n$. Согласно теореме 4.2 существует система $Q \in \hat{\mathcal{E}}_{1/k} \subset \mathcal{E}$, такая, что для всех $i \in \mathbb{N}_n$ выполнено равенство $\lambda_i(A+Q) = \nabla_{1/k,i}(A)$. Следствие доказано.

**Доказательство теоремы 4.6.**

1. Выберем произвольное $\theta > 1$ и рассмотрим построенную в работе [84] систему $B(t) = \mathrm{diag}[b(t), -b(t)]$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $b(t) = (-1)^k$ при $t \in [\theta^k, \theta^{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $b(t) = 0$ при $t \in [0,1)$. В силу [29, 11.6.1] справедливо равенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t b(\tau)\,d\tau = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\theta^{2k+1}} \int_1^{\theta^{2k+1}} b(\tau)\,d\tau = \frac{\theta-1}{\theta+1}.$$

Аналогично,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t (-b(\tau))\,d\tau = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\theta^{2k}} \int_1^{\theta^{2k}} (-b(\tau))\,d\tau = \frac{\theta-1}{\theta+1}.$$

Следовательно [29, 4.1], имеем $\lambda_1(B) = \lambda_2(B) = (\theta-1)/(\theta+1)$. Используя формулу для вычисления нижнего экспоненциального показателя [84]

$$\Delta_1(B) = \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \vartheta_r^{-m} \sum_{j=1}^m \ln |X_B(\vartheta_r^{j-1}, \vartheta_r^j)|^{-1}, \quad \text{где} \quad \vartheta_r = \theta^{1/r},$$

получаем, что $\Delta_1(B) = -1$. В силу неравенства Ляпунова [29, с. 72] для всякого $Q \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка

$$2\lambda_2(B+Q) \geqslant \lambda_1(B+Q) + \lambda_2(B+Q) \geqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}(B+Q)(\tau)\,d\tau = 0,$$

откуда получаем $\lambda_2(B+Q) \geqslant 0$. Следовательно, $\Delta_2(B) \geqslant 0 > \Delta_1(B)$.

Положим $\varepsilon = 1/(\theta+1)$. Предположим, что $\lambda_1(B+Q) < \Delta_1(B) + \varepsilon$. Тогда по предыдущему

$$\lambda_2(B+Q) \geqslant -\lambda_1(B+Q) > -\Delta_1(B) - \varepsilon = \lambda_2(B) + \varepsilon \geqslant \Delta_2(B) + \varepsilon.$$

2. Пусть заданы произвольные числа $\alpha < \beta$. Пусть $l(s) = \gamma s + \delta$, $s \in \mathbb{R}$, — линейная функция, удовлетворяющая условиям

$$l(-1) = \alpha, \quad l(\Delta_2(B)) = \beta,$$

где $B$ — система из п. 1. Определим отображение $\Psi\colon \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}^n$ равенством $\Psi(C)(t) = \gamma C(\gamma t) + \delta E_n$, $C \in \mathcal{M}^n$. Заметим, что если $x(\cdot)$ — решение системы $C$, то $y(t) \equiv x(\gamma t) \cdot e^{\delta t}$, $t \in \mathbb{R}_+$ – решение системы $\Psi C$, причём $x(0) = y(0)$. Следовательно, $\lambda[y] = \gamma\lambda[x] + \delta$, откуда получаем

$$\lambda_i(\Psi C) = \gamma\lambda_i(C) + \delta = l(\lambda_i(C)), \quad i \in \mathbb{N}_2.$$

Далее, из равенства

$$\{\Psi(C+Q) : Q \in \mathcal{E}\} = \{\Psi(C) + Q : Q \in \mathcal{E}\}$$

получаем $\Delta_i(\Psi C) = \gamma\Delta_i(C) + \delta = l(\Delta_i(C))$, $i \in \mathbb{N}_2$. Тогда система $A_2 = \Psi(B)$ и число $\varepsilon = \gamma/(\theta+1)$ обладают требуемым свойством в силу выбора функции $l(\cdot)$. Утверждение для $n = 2$ установлено.

3. Наконец, для всякого $n \geqslant 3$ положим $A(t) = \Psi(\operatorname{diag}[\underbrace{2, \ldots, 2}_{n-2}, B(t)])$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $B$ — система, построенная в п. 1, а $\Psi$ – отображение, определённое в п. 2. Теорема доказана.

Скажем [60], что подпространство $N$ решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ сильно экспоненциально больше её подпространства решений $L$ (далее это отношение будем обозначать как $N \succ_{\mathrm{e}} L$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $T \geqslant 0$, что для любых ненулевых решений $x_1 \in N$ и $x_2 \in L$ выполнено неравенство

$$(|x_1(t)|/|x_1(\tau)|) : (|x_2(t)|/|x_2(\tau)|) \geqslant \exp(-\varepsilon t) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant \tau \geqslant T,$$

и, кроме того, выполнено равенство

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \angle(L(t), N(t)) = 0,$$

где угол между подпространствами есть наименьший из углов, образуемых ненулевыми векторами, лежащими в этих подпространствах.

*Старшим экспоненциальным показателем подпространства* $L$ решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ будем называть величину [60]

$$\nabla|_L(A) = \lim_{\theta\to 1+0} \varlimsup_{m\to\infty} \theta^{-m} \sum_{j=1}^{m} \ln |X_A(\theta^j, \theta^{j-1})|_L|.$$

Следующее утверждение установлено в работе [60].

**Лемма 4.7.** *Пусть $A \in \mathcal{M}^n$, $i \in \mathbb{N}_n$, а $k$ — наименьшее число, большее или равное $i$, для которого существует такое разложение пространства решений $S(A) = L \bigoplus N$, что $N >_{\mathrm{e}} L$ и $\dim L = k$, либо $k = n$, если такого разложения не существует. Тогда показатель $\nabla_i(A)$ совпадает со старшим экспоненциальным показателем $\nabla|_L(A)$ подпространства $L$.*

**Доказательство теоремы 4.7.**

1. Положим $M = \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и определим отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ равенством $A(t,\mu) = \mu(t)$, $\mu \in M$. В силу следствия 4.1 для всякого $k \in \mathbb{N}$ функция $\nabla_{1/k,i}(\cdot\,; A) = \nabla_{1/k,i}(\cdot)$ принадлежит второму бэровскому классу (хотя утверждение следствия 4.1 сформулировано для непрерывного отображения $A(\cdot,\,\cdot)$, фактически в доказательстве используется только непрерывность отображения, действующего из $M$ в $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ по правилу $\mu \mapsto A(\cdot\,,\mu)$). Из (4.29) тогда получаем, что функция $\nabla_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ есть предел возрастающей последовательности функций второго бэровского класса.

2. Уточняя рассуждения доказательства [44, теорема 3], покажем, что функция $\nabla_i\colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму бэровскому классу (как сказано выше, рассуждения работы [44] фактически годятся для всех значений $i \in \{2,\dots,n\}$).

а) Обозначим через $\mathcal{P}$ *пространство Бэра* всех последовательностей натуральных чисел с метрикой

$$d(\mu,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \mu = \nu, \\ 1/\min\{k : \mu_k \ne \nu_k\}, & \text{если } \ \mu \ne \nu, \end{cases}$$

а через $\mathcal{P}_\omega$ — его подмножество, состоящее из всех последовательностей, стремящихся к бесконечности.

По всякой последовательности $\mu = (\mu_k) \in \mathcal{P}$ определим последовательности чисел $n_k = 2^{k+\mu_k}$, $q_k = 2^{2^{-\mu_k}}$, $p_k = 1 - q_k^{-1}$ и $t_{k,l} = 2^{2^k}(q_k)^l$, $k \in \mathbb{N}$, $l = \overline{0, n_k - 1}$ (для краткости мы не отмечаем в обозначениях введённых величин их зависимости от $\mu$). Перенумеруем точки $t_{k,l}$ в порядке возрастания, получив последовательность $(t_m)_{m=1}^{\infty}$. Положим

$$U_\mu(t) = \operatorname{diag}[u_\mu(t), -u_\mu(t), \underbrace{-2,\dots,-2}_{i'-2}, \underbrace{2,\dots,2}_{n-i'}], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

где $i' = \max\{i, 2\}$, а функция $u_\mu \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задаётся равенством

$$u_\mu(t) = (-1)^m \quad \text{при} \quad t \in [t_m, t_{m+1}), \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad (t_0 \equiv 0).$$

Покажем, что отображение, действующее из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{M}^n_C$ по правилу $\mu \mapsto U_\mu(\cdot)$, непрерывно. Действительно, если $d(\mu, \nu) < 1/k$, то первые $k$ элементов последовательностей $\mu$ и $\nu$ совпадают. Тогда системы $U_\mu$ и $U_\nu$ совпадают на отрезке $[0, 2^{2^{k+1}}]$, поэтому $\rho_C(U_\mu, U_\nu) < 2^{-2^{k+1}}$.

Для вычисления показателя $\nabla_i$ построенной системы введём некоторые дополнительные обозначения. Положим для всех $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}_{n_k}$

$$t_{k,n_k} = t_{k+1,0}, \quad \delta_{k,l} = t_{k,l} - t_{k,l-1}, \quad \sigma_{k,l} = \sum_{s=1}^{l} (-1)^s \delta_{k,s}, \quad \sigma_{k,0} = 0.$$

Поскольку в сумме $\sigma_{k,l}$ слагаемые возрастают по модулю, для всяких $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}_{n_k}$ справедливы соотношения

$$\operatorname{sgn} \sigma_{k,l} = (-1)^l, \quad \delta_{k,l} - \delta_{k,l-1} \leqslant |\sigma_{k,l}| \leqslant \delta_{k,l} \quad (\delta_{k,0} \equiv 0). \tag{4.30}$$

б) Пусть $\mu \in \mathcal{P}_\omega$. Покажем, что система $U_\mu$ является правильной. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для всех $k$, начиная с некоторого $k_0$, выполнено неравенство $p_k \leqslant \varepsilon$. Из равенства

$$\int_{t_{k',0}}^{t_{k,l}} u_\mu(\tau)\, d\tau = \sum_{s=k'}^{k-1} \sigma_{s,n_s} + \sigma_{k,l}, \quad k \geqslant k' \geqslant 1, \quad l = \overline{0, n_k - 1}, \tag{4.31}$$

и последнего неравенства (4.30) вытекает оценка

$$\left| \int_{t_{k_0,0}}^{t_{k,l}} u_\mu(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \sum_{s=k_0}^{k-1} \delta_{s,n_s} + \delta_{k,l}, \quad k \geqslant k_0, \quad l = \overline{0, n_k - 1},$$

откуда, учитывая неравенство $t_{s+1,0} \geqslant 2t_{s,0}$, $s \in \mathbb{N}$, получаем для всех $k \geqslant k_0$

$$\left| \int_{t_{k_0,0}}^{t_{k,l}} u_\mu(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \sum_{s=k_0}^{k-1} t_{s+1,0} p_s + t_{k,l} p_k \leqslant \left( \sum_{s=k_0}^{k-1} 2(t_{s+1,0} - t_{s,0}) + t_{k,l} \right) \varepsilon \leqslant 3 t_{k,l} \varepsilon.$$

Следовательно,

$$-3\varepsilon \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \frac{1}{t_m} \int_{t_{k_0,0}}^{t_m} u_\mu(\tau)\, d\tau \leqslant \varlimsup_{m \to \infty} \frac{1}{t_m} \int_{t_{k_0,0}}^{t_m} u_\mu(\tau)\, d\tau \leqslant 3\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ в предыдущих рассуждениях произвольно мало́, справедливы равенства

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} u_\mu(\tau)\, d\tau = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} u_\mu(\tau)\, d\tau = 0,$$

из которых в силу [29, 11.6.1] получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^{t} u_\mu(\tau)\, d\tau = 0.$$

По теореме Ляпунова [29, 11.1.2] система $U_\mu$ является правильной. Поскольку показатели Ляпунова правильной системы инвариантны относительно экспоненциально убывающих возмущений [94, 8.1], имеем $\nabla_i(U_\mu) = \lambda_i(U_\mu) = 0$.

в) Пусть теперь $\mu \notin \mathcal{P}_\omega$. Тогда существуют подпоследовательность $(q_{k_s})$ последовательности $(q_k)$ и число $q > 1$, такие, что $q_{k_s} = q$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L_p$ $(\widehat{L}_p)$, $p \in \mathbb{N}_n$, подпространство тех решений системы $U_\mu$, начальные условия которых принадлежат линейной оболочке первых $p$ (соответственно, последних $n-p$) стандартных базисных векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

Для любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$ справедливо равенство (ниже оператор Коши системы $U_\mu$ будем для краткости обозначать через $X(\cdot\,,\cdot)$)

$$\ln|X(t,\tau)|_{L_{i'}}| = \max\left\{ \int_\tau^t u_\mu(\xi)\, d\xi, -\int_\tau^t u_\mu(\xi)\, d\xi, -2(t-\tau) \right\} = \left| \int_\tau^t u_\mu(\xi)\, d\xi \right|,$$

откуда получаем двустороннюю оценку

$$0 \leqslant \ln|X(t,\tau)|_{L_{i'}}| \leqslant t - \tau.$$

Для каждых $r, s \in \mathbb{N}$ положим $\theta_r = q^{1/r}$ и

$$\Theta_{r,s} = \{ j \in \mathbb{N} : t_{k_s,0} \leqslant \theta_r^{j-1} < t_{k_s+1,0} \}.$$

Заметим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, \ldots, n_{k_s}\}$ число $t_{k_s,l}$ есть целая положительная степень числа $\theta_r$, поэтому для всякого $j \in \Theta_{r,s}$ отрезок $[\theta_r^{j-1}, \theta_r^j]$ содержится в одном из отрезков $[t_m, t_{m+1}]$, $m \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\ln|X(\theta_r^j, \theta_r^{j-1})|_{L_{i'}}| = \theta_r^j - \theta_r^{j-1}$. В силу вышесказанного имеем цепочку неравенств

$$1 = \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \theta_r^{-m} \sum_{j=1}^{m} (\theta_r^j - \theta_r^{j-1}) \geqslant \nabla|_{L_{i'}}(U_\mu) =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \theta_r^{-m} \sum_{j=1}^{m} \ln|X(\theta_r^j, \theta_r^{j-1}|_{L_{i'}})| \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{s\to\infty}}\, t_{k_s+1,0}^{-1} \sum_{j\in\Theta_{r,s}} \ln|X(\theta_r^j, \theta_r^{j-1})|_{L_{i'}}| = \overline{\lim_{s\to\infty}}\, t_{k_s+1,0}^{-1}(t_{k_s+1,0} - t_{k_s,0}) = 1,$$

откуда получаем $\nabla|_{L_{i'}}(U_\mu) = 1$.

Проверим, что подпространство $\widehat{L}_{i'}$ сильно экспоненциально больше подпространства $L_{i'}$. Действительно, выполняется цепочка неравенств

$$|X^{-1}|_{\widehat{L}_{i'}}(t,\tau)|^{-1} : |X|_{L_{i'}}(t,\tau)| \geqslant e^{2(t-\tau)} : e^{(t-\tau)} \geqslant 1, \quad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

и всякие два решения $x \in L_{i'}$ и $y \in \widehat{L}_{i'}$ ортогональны во все моменты времени $t \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, при $i \geqslant 2$ в силу леммы 4.7 справедливо равенство $\nabla_i(U_\mu) = \nabla|_{L_{i'}}(U_\mu) = 1$.

г) Осталось рассмотреть случай $i = 1$. Покажем, что $\nabla_1(U_\mu) = \nabla|_{L_2}(U_\mu)$. Из равенства (4.31) и соотношений (4.30) получаем цепочку

$$\int_{t_{1,0}}^{t_{k,n_k}} u_\mu(\tau)\, d\tau \geqslant \delta_{k,n_k} - \delta_{k,n_k-1} = t_{k,n_k} p_k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t u_\mu(\tau)\, d\tau \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{k,n_k}} \int_{t_{1,0}}^{t_{k,n_k}} u_\mu(\tau)\, d\tau \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} p_k^2 \geqslant (1-q^{-1})^2 > 0.$$

Далее, из тех же равенства (4.31) и соотношений (4.30) получаем цепочку

$$\int_{t_{1,0}}^{t_{k,n_k-1}} u_\mu(\tau)\, d\tau \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} \delta_{s,n_s} - (\delta_{k,n_k-1} - \delta_{k,n_k-2}) \leqslant t_{k,0} - t_{k,n_k-1} p_k^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда получаем

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t (-u_\mu(\tau))\, d\tau \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{k,n_k-1}} \int_{t_{1,0}}^{t_{k,n_k-1}} (-u_\mu(\tau))\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} p_k^2 \geqslant (1-q^{-1})^2 > 0.$$

Таким образом, $\lambda_2(U_\mu) \geqslant \lambda_1(U_\mu) > 0$.

Предположим теперь, что пространство решений системы $U_\mu$ раскладывается в прямую сумму подпространств $L$ и $N$, удовлетворяющих условиям

$N \succ_{\mathrm{e}} L$ и $\dim L = 1$. Тогда согласно [12] существует обобщённое ляпуновское преобразование $V(\cdot)$, такое, что $V(t)L(t) \perp V(t)N(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Поскольку обобщённое ляпуновское преобразование не меняет характеристических показателей, для всяких ненулевых решений $x \in L$ и $y \in N$ выполнено равенство $\lambda[x + y] = \max\{\lambda[x], \lambda[y]\}$. Кроме того, из определения отношения $\succ_{\mathrm{e}}$ вытекает, что $\lambda[x] \leqslant \lambda[y]$. Принимая во внимание цепочку неравенств $\lambda_1(U_\mu) \leqslant \lambda_2(U_\mu) \leqslant 1 < 2 = \lambda_3(U_\mu)$, приходим к выводу, что найдутся ненулевые решения $v \in L$ и $w \in N$, удовлетворяющие условиям $\lambda[v] = \lambda_1(U_\mu)$ и $\lambda[w] = \lambda_2(U_\mu)$. Из той же цепочки вытекает, что $\operatorname{span}\{v, w\} = L_2$. Пусть $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, стремящаяся к бесконечности, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k} \ln |v(\tau_k)| = \lambda_1(U_\mu).$$

По предыдущему $\operatorname{span}\{w\} \succ_{\mathrm{e}} \operatorname{span}\{v\}$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $T \geqslant 0$, что

$$\frac{|w(t)|}{|w(T)|} \geqslant e^{-\varepsilon t} \cdot \frac{|v(t)|}{|v(T)|}, \quad t \geqslant T,$$

откуда получаем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k} \ln |w(\tau_k)| \geqslant \lambda_1(U_\mu) - \varepsilon.$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности (за которой мы сохраним прежнее обозначение), в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k} \ln |w(\tau_k)| \geqslant \lambda_1(U_\mu).$$

Пусть $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ — вектор-функции $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, получаемые из вектор-функций $v$ и $w$ выбрасыванием всех координат, кроме двух первых. Тогда вектор-функции $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ образуют фундаментальную систему решений системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[u_\mu(t), -u_\mu(t)]x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть $\tilde{X}(\cdot)$ — соответствующая фундаментальная матрица. В силу формулы Лиувилля-Остроградского величина $\det \tilde{X}(\cdot)$ постоянна, откуда вытекает, что $\lambda[\det \tilde{X}(\cdot)] = 0$. С другой стороны, из равенства

$$|\det \tilde{X}(\tau_k)| = |v(\tau_k)| w(\tau_k)| \sin \angle(v(\tau_k), w(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N},$$

получаем цепочку

$$\lambda[\det \tilde{X}(\cdot)] \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k} \ln |\det \tilde{X}(\tau_k)| \geqslant 2\lambda_1(U_\mu) + \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k} \ln \sin \angle(v(\tau_k), w(\tau_k)).$$

Следовательно,

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\angle(L(t),N(t))\leqslant\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\angle(\operatorname{span}\{v(t)\},\operatorname{span}\{w(t)\})<0.$$

Получили противоречие. Таким образом, $L_2$ — подпространство наименьшей размерности, для которого найдётся сильно экспоненциально большее алгебраическое дополнение в пространстве решений системы $U_\mu$. Следовательно, согласно лемме 4.7 имеем $\nabla_1(U_\mu)=\nabla|_{L_2}(U_\mu)=1$.

д) Выше мы показали, что функция $\nabla_i(\cdot\,;U)$ совпадает с характеристической функцией множества $\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}_\omega$. Последняя в силу результата Бэра [217] (см. также [115, с. 95]) не принадлежит второму классу Бэра. Следовательно, функция $\nabla_i\colon\mathcal{M}^n_C\to\mathbb{R}$ также не принадлежит второму классу Бэра, так как функция $\nabla_i(\cdot\,;U)$ является композицией непрерывного отображения, действующего из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{M}^n_C$ по правилу $\mu\mapsto U_\mu(\cdot)$, и функции $\nabla_i$ [106, § 31, III, теорема 2]. Теорема доказана.

**Лемма 4.8.** *Для любых числа $n\geqslant 1$ и ограниченной верхнепредельной функции $f\colon M\to\mathbb{R}$ существует семейство $A\in\mathcal{BC}^n(M)$, для которого $\nabla_i(\cdot\,;A)=\Delta_i(\cdot\,;A)=\lambda_i(\cdot\,;A)=f(\cdot)$, $i\in\mathbb{N}_n$.*

**Доказательство.** Пусть задана ограниченная верхнепредельная функция $f\colon M\to[-K,K]$, где $K>1$. Тогда по определению существует последовательность непрерывных функций $f_k\colon M\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, такая, что

$$f(\mu)=\varlimsup_{k\to\infty}f_k(\mu),\quad \mu\in M.$$

Без ограничения общности можно считать, что для каждого $k\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство $|f_k(\mu)|\leqslant K$, $\mu\in M$ (в противном случае заменим функцию $f_k$ функцией $\min\{K,\max\{f,-K\}\}$).

Определим последовательность $\tau$ равенством $\tau_k=k!$, $k\in\mathbb{N}$. Для удобства положим ещё $\tau_0=0$. Далее, зададим функцию $a\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}$ равенством $a(t,\mu)=f_k(\mu)$, $t\in[\tau_{k-1},\tau_k)$, $k\in\mathbb{N}$. Положим $\varepsilon=1/(2K)<1/2$. Пусть $s\colon\mathbb{R}_+\to[0,1]$ — какая-нибудь непрерывная функция, равная 0 в некоторой окрестности каждой из точек последовательности $\tau$ и равная 1 на множестве $\mathbb{R}_+\backslash\bigcup_{m\in\mathbb{N}}(\tau_m-\varepsilon,\tau_m+\varepsilon)$.

Наконец, определим отображение $A\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times n}$ при помощи равенства $A(t,\mu)=s(t)a(t,\mu)E_n$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\mu\in M$.

Проверим, что семейство систем, задаваемое отображением $A$, обладает нужными свойствами. Покажем сначала, что функция $(t,\mu)\mapsto s(t)a(t,\mu)$ непрерывна. Выберем произвольно и зафиксируем $(t,\mu)\in\mathbb{R}_+\times M$. Если для некоторого $k\in\mathbb{N}$ имеем $t=\tau_k$, то рассматриваемая функция равна нулю в некоторой окрестности точки $(t,\mu)$. Если $t=0$ или является внутренней точкой некоторого промежутка $[\tau_{k-1},\tau_k)$, $k\in\mathbb{N}$, то функция $(t,\mu)\mapsto s(t)a(t,\mu)$

непрерывна в точке $(t, \mu)$ как произведение непрерывных функций $t \mapsto s(t)$ и $\mu \mapsto f_k(\mu)$. Следовательно, отображение $A(\cdot, \cdot)$ непрерывно. По построению если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, то

$$|A(t, \mu)| \leqslant |a(t, \mu)| = |f_k(\mu)| \leqslant K, \quad \mu \in M.$$

Таким образом, установлено, что $A \in \mathcal{BC}^n(M)$.

Система (4.6) диагональная и даже скалярная, поэтому все её показатели Ляпунова равны числу

$$\lambda(\mu) \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t s(t) a(t, \mu)\, ds.$$

Заметим, что если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, то

$$\left| \int_0^t a(t, \mu)\, ds - \int_0^t s(t) a(t, \mu)\, ds \right| = \left| \int_0^t (1 - s(t)) a(t, \mu)\, ds \right| \leqslant K \sum_{m=1}^{k} 2\varepsilon \leqslant k,$$

откуда получаем, что

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t a(t, \mu)\, ds - \frac{1}{t} \int_0^t s(t) a(t, \mu)\, ds \right| \leqslant \frac{k}{\tau_{k-1}} = \frac{k}{(k-1)!}.$$

Следовательно,

$$\lambda(\mu) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t a(t, \mu)\, ds.$$

Для всяких $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mu \in M$ положим $I(t, \mu) = \int_0^t a(t, \mu)\, ds$. Кроме того, для всяких $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\mu \in M$ положим $I_k(\mu) = I(\tau_k, \mu)$. Тогда если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, то

$$\frac{I(t, \mu)}{t} = \frac{I_{k-1}(\mu) + f_k(\mu)(t - \tau_{k-1})}{t} = f_k(\mu) + \frac{I_{k-1}(\mu) - \tau_{k-1}}{t}.$$

Поскольку при любом $\mu \in M$ функция $t \mapsto \frac{I(t,\mu)}{t}$ монотонна (вообще говоря, нестрого) на отрезке $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, то наибольшее значение на этом отрезке она принимает (по крайней мере) в одном из его концов. Следовательно,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t a(t, \mu)\, ds = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{I_k(\mu)}{\tau_k}.$$

Заметим, что справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} f_k(\mu)(\tau_k - \tau_{k-1}) - K\tau_{k-1} \leqslant I_k(\mu) = I_{k-1}(\mu) + f_k(\mu)(\tau_k - \tau_{k-1}) \leqslant \\ \leqslant f_k(\mu)(\tau_k - \tau_{k-1}) + K\tau_{k-1}, \end{aligned}$$

откуда, деля на $\tau_k$ и переходя к верхнему пределу при $k \to \infty$, с учётом соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\tau_{k-1}}{\tau_k} = 0$ получим

$$\lambda(\mu) = \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(\mu) = f(\mu), \quad \mu \in M.$$

Таким образом, построено семейство $A \in \mathcal{BC}^n(M)$, все показатели Ляпунова которого равны заданной функции $f$.

Вычислим теперь экспоненциальные показатели построенного семейства. Зафиксируем произвольное $\mu \in M$. Заметим, что если вектор-функция $x(\cdot)$ является решением системы $Q \in \mathcal{M}^n$, то вектор-функция

$$t \mapsto y(t) \equiv \exp(I(t,\mu))x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

является решением системы $A(\cdot,\mu)+Q(\cdot)$, причём $x(0) = y(0)$. Из обобщения леммы Гроноулла-Беллмана [76, с. 109] следует [76, с. 135], что для любого решения $x(\cdot)$ системы $Q(\cdot)$ справедлива оценка

$$|x(0)|\exp(-\int_0^t |Q(s)|\,ds) \leqslant |x(t)| \leqslant |x(0)|\exp(\int_0^t |Q(s)|\,ds).$$

Тогда для любого решения $y(\cdot) \neq 0$ системы $A(\cdot,\mu)+Q(\cdot)$ справедлива оценка

$$|y(0)|\exp(I(t,\mu) - \int_0^t |Q(s)|\,ds) \leqslant |y(t)| \leqslant |y(0)|\exp(I(t,\mu) + \int_0^t |Q(s)|\,ds),$$

откуда получаем, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{I(t,\mu)}{t} - \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t |Q(s)|\,ds \leqslant \lambda[y] \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{I(t,\mu)}{t} + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t |Q(s)|\,ds.$$

Тогда если $Q \in \mathcal{E}$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |Q(s)|\,ds = 0$, поэтому все нетривиальные решения системы $A(\cdot,\mu)+Q(\cdot)$ имеют характеристический показатель, равный $f(\mu)$. Следовательно, все показатели Ляпунова системы $A(\cdot\,,\mu)$, а также все её верхние и нижние экспоненциальные показатели Изобова также совпадают с этим числом. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.8.**

1. Установим сначала включение $\{[\Delta_i(\cdot\,;A) \geqslant r] : A \in \mathcal{F}^n(M)\} \subset \mathscr{G}_\delta(M)$. Пусть задано семейство $A \in \mathcal{F}^n(M)$. Из равенства $\mathcal{E} = \bigcup_{\sigma>0}\mathcal{E}_\sigma$ вытекает представление $\Delta_i(\cdot\,;A) = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \Delta_{1/k,i}(\cdot\,;A)$, откуда получаем равенство

$$[\Delta_i(\cdot\,;A) \geqslant r] = \bigcap\nolimits_{k\in\mathbb{N}}[\Delta_{1/k,i}(\cdot\,;A) \geqslant r].$$

В силу утверждения 1) теоремы 4.5 множества, стоящие под знаком счётного пересечения, а значит, и результат этого пересечения являются множествами типа $\mathscr{G}_\delta$ в пространстве $M$. Рассуждая далее как в п. 2 доказательства теоремы 4.5, получим включения

$$\{[\Delta_i(\cdot\,;A)>r]: A\in\mathcal{F}^n(M)\}\subset\mathscr{G}_{\delta\sigma}(M),$$
$$\{[\Delta_i(\cdot\,;A)=r]: A\in\mathcal{F}^n(M)\}\subset\mathscr{F}_{\sigma\delta}(M).$$

2. Пусть теперь задано произвольное множество $S\in\mathscr{G}_\delta(M)$. Положим $f=\chi_S+r-1$, где $\chi_S\colon M\to\{0,1\}$ — характеристическая функция множества $S$. Тогда $[f\geqslant r]=S$. В силу леммы 1.15 функция $f\colon M\to\{r-1,r\}$ является верхнепредельной. По лемме 4.8 существует семейство $A\in\mathcal{CB}^n(M)$, для которого $\Delta_i(\cdot\,;A)=f$. Таким образом, установлено включение

$$\{[\Delta_i(\cdot\,;A)\geqslant r]: A\in\mathcal{CB}^n(M)\}\supset\mathscr{G}_\delta(M).$$

Включения
$$\{[\Delta_i(\cdot\,;A)>r]: A\in\mathcal{CB}^n(M)\}\supset\mathscr{G}_{\delta\sigma}(M)$$
и
$$\{[\Delta_i(\cdot\,;A)=r]: A\in\mathcal{CB}^n(M)\}\supset\mathscr{F}_{\sigma\delta}(M)$$
проверяются аналогично. Утверждение теоремы вытекает из этих включений, включений, полученных в п. 1, и включения $\mathcal{CB}^n(M)\subset\mathcal{F}^n(M)$. Теорема доказана.

# Глава 5

# Бэровская классификация показателей Боля

Эта глава посвящена бэровской классификации показателей Боля (генеральных показателей) линейных систем и диффеоморфизмов гладкого риманова многообразия, рассматриваемых как функции на соответствующих пространствах (необходимые определения и обозначения см. в разделе 1.8).

В разделах 5.1–5.3 получено частичное решение задачи [142], усиливающее результат доклада [143], а также доказаны утверждения, анонсированные в докладах [146] и [147]. Раздел 5.5 содержит полное решение задачи о бэровской классификации мажорант условных показателей Боля [145]. Перейдём к точным формулировкам.

Соотношения между различными показателями Боля линейной системы, а также их связь с показателями Ляпунова, описывает следующая

**Теорема 5.1** ([255]). *Для любой системы* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$*:*

*1) выполнены соотношения*

$$\beta_k(A) \leqslant \beta_{k+1}(A), \quad \beta^{(k)}(A) \leqslant \beta^{(k+1)}(A), \quad k \in \mathbb{N}_{n-1}, \tag{5.1}$$

$$\lambda_k(A) \leqslant \beta_k(A) \leqslant \beta^{(k)}(A), \quad k \in \mathbb{N}_n, \tag{5.2}$$

$$\beta_n(A) = \beta^{(n)}(A) \leqslant |||A|||, \tag{5.3}$$

*где* $|||A||| = \varlimsup\limits_{t\to+\infty} |A(t)|$;

*2) если число* $k \in \mathbb{N}_n$ *таково, что* $\beta^{(k)}(A) < \infty$, *то справедлива формула [144]*

$$\beta^{(k)}(A) = \lim_{q\to\infty} \sup_{t-s\geqslant q} \frac{1}{t-s} \ln |X_A(t,s)|_{X_A(s,0)E_k(A)}|. \tag{5.4}$$

Следующие два результата о бэровской классификации условных показателей Боля линейных систем были анонсированы в докладе [147] (а для $k = n$ — ещё и в докладе [146]), но доказательства этих утверждений так и не были опубликованы их автором. В нашей диссертации этот пробел восполнен.

**Теорема 5.2** ([147]). *Для всякого* $k \in \mathbb{N}_n$ *функция* $\beta_k\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ *является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

**Следствие 5.1** ([147]). *Если топологическое пространство* $X$ *метризуемо полной метрикой, а отображение* $A\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *непрерывно, то в пространстве* $X$ *типична по Бэру полунепрерывность сверху всех функций* $\mu \mapsto \beta_k(A(\cdot,\mu))$, $k \in \mathbb{N}_n$, *т. е. в пространстве* $X$ *имеется такое всюду плотное множество* $D$ *типа* $\mathcal{G}_\delta$, *что все указанные функции полунепрерывны сверху в каждой точке множества* $D$.

**Замечание 5.1.** Оценка для номера бэровского класса условных показателей Боля, приведённая в теореме 5.2, является неулучшаемой. Действительно, рассмотрим семейство $A\colon \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ линейных систем, построенное в примере 3.1 (ср. [38]). Согласно лемме 1.11 условные показатели Боля являются слабо ляпуновскими инвариантами и, следовательно (см. лемму 1.3), являются остаточными. Если $\mu \in M_1$, то $A(t,\mu) = O_n$ для всех достаточно больших $t$, поэтому в силу сказанного выше для всех $i \in \mathbb{N}_n$ имеем $\beta_i(A(\cdot\,,\mu)) = \beta_i(O_n) = 0$. Если же $\mu \in M_2$, то $A(t,\mu) = E_n$ для всех достаточно больших $t$ и, следовательно, $\beta_i(A(\cdot\,,\mu)) = \beta_i(E_n) = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}_n$. Рассуждая далее как в примере 3.1, приходим к выводу, что функция $\beta_i(\cdot\,; A)$ всюду разрывна и, стало быть, не принадлежит первому классу Бэра. Из этого следует, что функционал $\beta_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ (и даже его сужение на $\mathcal{M}^n_C$) также не принадлежит первому классу Бэра.

Для относительных показателей Боля удалось получить только оценку для номера бэровского класса, а именно, справедлива следующая

**Теорема 5.3** ([255]). *Для каждого* $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ *функция* $\beta^{(k)}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ *принадлежит четвёртому классу Бэра.*

**Замечание 5.2.** Согласно результату [33], теорема 5.3 будет неверна, если в её формулировке заменить “четвёртому” на “второму”. Останется ли эта теорема справедливой, если заменить “четвёртому” на “третьему”, автору неизвестно.

Поскольку всякая бэровская функция является непрерывной по модулю некоторого множества первой категории, то справедливо

**Следствие 5.2.** *Если топологическое пространство* $X$ *метризуемо полной метрикой, а отображение* $A\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *непрерывно, то сужения всех функций* $\mu \mapsto \beta_k(A(\cdot\,,\mu))$ *и* $\mu \mapsto \beta^{(k)}(A(\cdot\,,\mu))$, $k \in \mathbb{N}_n$, *на некоторое всюду плотное множество типа* $\mathscr{G}_\delta$ *непрерывны.*

Сформулируем теперь результаты о показателях Боля локальных диффеоморфизмов гладкого риманова многообразия. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $M$ — связное $n$-мерное $C^1$-многообразие со счётной базой, на котором задана риманова метрика $\delta$ (класса $C^0$).

Следующая теорема описывает различные соотношения между показателями Боля и Ляпунова локального диффеоморфизма многообразия $M$ (определение множества $S$ см. в разделе 1.8).

**Теорема 5.4** ([255]). *Для любых* $f \in S$ *и* $x \in M$*:*

*1) выполнены соотношения*

$$\beta_k(f,x) \leqslant \beta_{k+1}(f,x), \quad \beta^{(k)}(f,x) \leqslant \beta^{(k+1)}(f,x), \quad k \in \mathbb{N}_{n-1}, \qquad (5.5)$$

$$\lambda_k(f,x) \leqslant \beta_k(f,x) \leqslant \beta^{(k)}(f,x), \quad k \in \mathbb{N}_n, \qquad (5.6)$$

$$\beta_n(f,x) = \beta^{(n)}(f,x) \leqslant \sup_{x\in M} \ln |df_x|; \qquad (5.7)$$

2) *если число $k \in \mathbb{N}_n$ таково, что $\beta^{(k)}(f,x) < \infty$, то справедлива следующая формула [142]*

$$\beta^{(k)}(f,x) = \lim_{q\to\infty} \sup_{m-l\geqslant q} \frac{1}{m-l} \ln |df^{m-l}|_{df^l E_k(f,x)}|. \tag{5.8}$$

Приведённые ниже утверждения содержат наши результаты о бэровской классификации показателей Боля локальных диффеоморфизмов многообразия $M$.

**Теорема 5.5** ([255]). *Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ функция $\beta_k\colon S \times M \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

**Следствие 5.3** ([255]). *Если топологическое пространство $X$ метризуемо полной метрикой, а отображения $f\colon X \to S$ и $x\colon X \to M$ непрерывны, то в пространстве $X$ типична по Бэру полунепрерывность сверху всех функций $\mu \mapsto \beta_k(f(\mu), x(\mu))$, $k \in \mathbb{N}_n$, т. е. в $X$ имеется такое всюду плотное множество $D$ типа $\mathscr{G}_\delta$, что все указанные функции полунепрерывны сверху во всякой точке множества $D$.*

**Теорема 5.6** ([255]; ср. [143]). *Для каждого $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ функция $\beta^{(k)}\colon S \times M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит четвёртому классу Бэра.*

**Следствие 5.4** ([255]). *Если топологическое пространство $X$ метризуемо полной метрикой, а отображения $f\colon X \to S$ и $x\colon X \to M$ непрерывны, то сужения всех функций $\mu \mapsto \beta_k(f(\mu), x(\mu))$ и $\mu \mapsto \beta^{(k)}(f(\mu), x(\mu))$, $k \in \mathbb{N}_n$, на некоторое всюду плотное множество типа $\mathscr{G}_\delta$ непрерывны.*

Чтобы не повторять одни и те же или весьма сходные рассуждения при доказательстве теорем о двух рассматриваемых разновидностях показателей Боля, воспользуемся методом, предложенным и развитым В. М. Миллионщиковым в работах [130; 131]. А именно, мы установим соответствующие утверждения в более общей ситуации — для семейства автоморфизмов метризованного векторного расслоения. Затем теоремы о показателях Боля линейных систем дифференциальных уравнений и диффеоморфизмов гладкого риманова многообразия будут получены как следствия (“конкретизации”) этих общих утверждений.

## 5.1 Показатели Боля семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения

Напомним стандартные определения, следуя изложению [138].

*Векторным расслоением* со стандартным слоем $\mathbb{R}^n$ называется тройка $(E, p, B)$, где $E$ (*пространство* векторного расслоения) и $B$ (*база* векторного расслоения) — некоторые топологические пространства, а $p$ (*проекция*) — непрерывное отображение $E$ на $B$; при этом требуется, чтобы на полном прообразе всякой точки $b \in B$ (*слое* над точкой $b$) была задана структура $n$-мерного векторного пространства над полем $\mathbb{R}$; требуется, кроме того, чтобы выполнялось условие *локальной тривиальности*. Упомянутое условие состоит в следующем. У каждой точки $b \in B$ имеется окрестность $U_b$ и гомеоморфизм $h_b\colon U_b \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U_b)$ (называемый *координатным отображением*), обладающий свойством: для всякого $c \in U_b$ отображение $h_b(c, \cdot)$ является изоморфизмом векторного пространства $\mathbb{R}^n$ на векторное пространство $p^{-1}(c)$. Нуль слоя $p^{-1}(b)$, $b \in B$, условимся обозначать через $0_b$.

*Риманова метрика* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ на векторном расслоении $(E, p, B)$ есть непрерывное отображение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ множества пар $(\xi, \eta)$, где $\xi, \eta \in E$, удовлетворяющих условию $p\xi = p\eta$, в числовую прямую $\mathbb{R}$, причём от этого отображения требуется, чтобы при всяком $b \in B$ его сужение на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ было скалярным произведением на векторном пространстве $p^{-1}(b)$. Пара (векторное расслоение, риманова метрика на нём) называется *метризованным векторным расслоением.*

*Эндоморфизмом векторного расслоения* $(E, p, B)$ называется пара $(X, \chi)$ непрерывных отображений $X\colon E \to E$, $\chi\colon B \to B$, обладающих свойством: при всяком $b \in B$ сужение $X[b]$ отображения $X$ на слой $p^{-1}(b)$ есть линейный изоморфизм $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi b)$ (здесь мы немного отступаем от определения в книге [210], где требуется только линейность $X[b]$). Указанное свойство влечёт равенство $pX = \chi p$.

*Семейством эндоморфизмов векторного расслоения* $(E, p, B)$ мы называем отображение $\mathfrak{M}\colon \mathcal{T} \to \operatorname{End}(E, p, B)$ какого-либо множества $\mathcal{T}$ в множество эндоморфизмов векторного расслоения $(E, p, B)$. Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t \in \mathcal{T}$ будем обозначать $(X_t, \chi_t)$.

Мы будем рассматривать только такие семейства эндоморфизмов, у которых $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ или $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_+$.

**Определение 5.1.** *Показателем Боля* семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$, отвечающим (нетривиальному) подпространству $L \subset p^{-1}(b)$ слоя над точкой $b \in B$, будем называть величину

$$\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \sup_{\substack{\xi \in L_* \\ t \geqslant \tau}} |X_t\xi| \cdot |X_\tau\xi|^{-1} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} < \infty\},$$

где $|\eta| = \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}$, а $t, \tau \in \mathcal{T}$.

**Определение 5.2.** *Условными показателями Боля* семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ в точке $b \in B$ будем называть величины

$$\beta_k(\mathfrak{M}, b) = \inf_{L \in G_k(p^{-1}(b))} \varkappa_g(\mathfrak{M}, L), \quad k \in \mathbb{N}_n. \tag{5.9}$$

**Определение 5.3.** *Показателями Ляпунова* семейства эндоморфизмов

$\mathfrak{M}$ в точке $b \in B$ называются величины [133, § 3]

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \inf_{L \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in L} \lambda(\mathfrak{M}, \xi), \quad k \in \mathbb{N}_n, \tag{5.10}$$

где функция $\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ задаётся равенством [133, § 2, 1]

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \begin{cases} \varlimsup\limits_{t \to +\infty} t^{-1} \ln |X_t \xi| & \text{при } |\xi| \neq 0, \\ -\infty & \text{при } |\xi| = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Для всяких $k \in \mathbb{N}_n$ и $b \in B$ обозначим через $E_k(\mathfrak{M}, b)$ множество

$$\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{M}, b)\}.$$

Хорошо известно и легко доказывается, что $E_k(\mathfrak{M}, b)$ является векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$ [133, § 2, 3].

**Определение 5.4.** *Относительными показателями Боля* семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ в точке $b \in B$ будем называть величины

$$\beta^{(k)}(\mathfrak{M}, b) = \varkappa_g(\mathfrak{M}, E_k(\mathfrak{M}, b)), \quad k \in \mathbb{N}_n.$$

Следующая теорема описывает соотношения между условными показателями Боля, относительными показателями Боля и показателями Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения.

**Теорема 5.7.** *Для всякого $b \in B$ справедливы соотношения*

$$\Lambda_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \Lambda_{k+1}(\mathfrak{M}, b), \quad \Lambda^{(k)}(\mathfrak{M}, b) \leqslant \Lambda^{(k+1)}(\mathfrak{M}, b), \quad k \in \mathbb{N}_{n-1}, \tag{5.12}$$

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \beta_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \beta^{(k)}(\mathfrak{M}, b), \quad k \in \mathbb{N}_n, \tag{5.13}$$

$$\beta_n(\mathfrak{M}, b) = \beta^{(n)}(\mathfrak{M}, b). \tag{5.14}$$

**Доказательство.**

1. Отметим, что для любых $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ справедливо утверждение: если для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ из неравенства $a < \lambda$ вытекает неравенство $b \leqslant \lambda$, то $a \geqslant b$.

2. Покажем сначала, что из включения $L' \subset L$ вытекает неравенство $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L') \leqslant \varkappa_g(\mathfrak{M}, L)$. Действительно, пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) < \lambda$. Тогда

$$\sup_{\substack{\xi \in L'_* \\ t \geqslant \tau}} |X_t \xi| \cdot |X_\tau \xi|^{-1} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} \leqslant \sup_{\substack{\xi \in L_* \\ t \geqslant \tau}} |X_t \xi| \cdot |X_\tau \xi|^{-1} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} < \infty,$$

откуда получаем $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L') \leqslant \lambda$, что в силу п. 1 даёт требуемое неравенство.

3. Докажем (5.12). Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ и $b \in B$. Для всякого $L \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ найдется такое $L' \in G_k(p^{-1}(b))$, что $L' \subset L$. В силу п. 2 имеем $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L') \leqslant \varkappa_g(\mathfrak{M}, L)$, откуда получаем $\Lambda_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \varkappa_g(\mathfrak{M}, L)$. Переходя в полученном неравенстве к точной нижней грани по $L \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$,

получим первое из неравенств (5.12). Второе неравенство в (5.12) следует из включения $E_k(\mathfrak{M}, b) \subset E_{k+1}(\mathfrak{M}, b)$ (вытекающего, в свою очередь, из неравенства $\lambda_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \lambda_{k+1}(\mathfrak{M}, b)$) и п. 2.

4. Докажем (5.13). Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}_n$ и $b \in B$. Предположим, что $\Lambda_k(\mathfrak{M}, b) < \lambda$. Тогда найдётся такое $L \in G_k(p^{-1}(b))$, что

$$\sup_{\substack{\xi \in L_* \\ t \geqslant \tau}} |X_t\xi| \cdot |X_\tau\xi|^{-1} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} < \infty.$$

Следовательно, существует такое $C > 0$, что для всех $\xi \in L_*$ и $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|X_t\xi| \cdot |X_0\xi|^{-1} \leqslant Ce^{\lambda t}.$$

Беря от обеих частей полученного неравенства логарифм, деля на $t$ и переходя к верхнему пределу при $t \to +\infty$, получим

$$\sup_{\xi \in L_*} \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leqslant \lambda,$$

откуда, учитывая наше соглашение $\lambda(\mathfrak{M}, 0_b) = -\infty$, получаем $\lambda_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \lambda$. В силу п. 1 первое неравенство цепочки (5.13) установлено.

Для доказательства второго неравенства цепочки (5.13) воспользуемся тем фактом, что $\dim E_k(\mathfrak{M}, b) \geqslant k$ [133, предложение 5]. Следовательно, найдётся такое $L \in G_k(p^{-1}(b))$, что $L \subset E_k(\mathfrak{M}, b)$. Требуемое вытекает теперь из цепочки неравенств

$$\Lambda_k(\mathfrak{M}, b) \leqslant \varkappa_g(\mathfrak{M}, L) \leqslant \varkappa_g(\mathfrak{M}, E_k(\mathfrak{M}, b)) = \Lambda^{(k)}(\mathfrak{M}, b),$$

в которой первое неравенство выполнено в силу определения 5.2, второе — в силу п. 2, а последнее равенство есть определение 5.4.

5. Для любого $b \in B$ выполнены равенства $G_n(p^{-1}(b)) = \{p^{-1}(b)\}$ и $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$, откуда получаем, что

$$\Lambda_n(\mathfrak{M}, b) = \varkappa_g(\mathfrak{M}, p^{-1}(b)) = \Lambda^{(n)}(\mathfrak{M}, b).$$

Равенство (5.14), а вместе с ним и теорема 5.7, доказаны.

Всюду ниже будем предполагать, что пространство $B$ (база векторного расслоения) метризуемо, а семейство эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ удовлетворяет дополнительному условию $(*)$: отображение $\mathcal{T} \times E \to \mathbb{R}_+$, определённое равенством $(t, \xi) \mapsto |X_t\xi|$, непрерывно. При указанном предположении справедливы следующие утверждения.

**Теорема 5.8.** *Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ функция $\beta_k(\mathfrak{M}, \cdot)\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельной и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

**Теорема 5.9.** *Для каждого $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ функция $\beta^{(k)}(\mathfrak{M}, \cdot)\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит четвёртому классу Бэра.*

Прежде чем доказывать эти теоремы, введём ряд вспомогательных определений и установим несколько лемм.

Напомним, что *локально тривиальным расслоением* со стандартным слоем $\mathcal{F}$ называется тройка $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где $\mathcal{E}$ (*пространство* расслоения) и $\mathcal{B}$ (*база* расслоения) — топологические пространства, а $\pi$ (*проекция*) — непрерывное отображение $\mathcal{E}$ на $\mathcal{B}$, причём выполнено следующее требование: имеется топологическое пространство $\mathcal{F}$ (*стандартный слой*) такое, что для всякой точки $\beta \in \mathcal{B}$ существуют её окрестность $U_\beta$ и гомеоморфизм (*координатное отображение*) $h_\beta\colon U_\beta \times \mathcal{F} \to \pi^{-1}(U_\beta)$, обладающий свойством: $\pi \circ h_\beta = pr_1$, где $pr_1$ — проекция произведения $U_\beta \times \mathcal{F}$ на его первый сомножитель.

Условимся говорить, что топологическое пространство является пространством типа $K_\sigma$, если оно представимо в виде счётного объединения компактных подмножеств.

**Лемма 5.1** ([107, § 41, IV, замечание 2])**.** *Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства, причём $Y$ является пространством типа $K_\sigma$. Тогда проекция $pr_1(H)$ любого множества $H \subset X \times Y$ типа $\mathscr{F}_\sigma$ на $X$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$.*

**Лемма 5.2.** *Пусть $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — локально тривиальное расслоение с метризуемой базой $\mathcal{B}$ и стандартным слоем $\mathcal{F}$ типа $K_\sigma$. Тогда проекция $\pi(H)$ всякого подмножества $H \subset \mathcal{E}$ типа $\mathscr{F}_\sigma$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$.*

**Доказательство.** Покажем, что у всякой точки $\beta \in \mathcal{B}$ существует такая окрестность $U_\beta$, что множество $\pi(H) \bigcap U_\beta$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Действительно, по условию для всякой точки $\beta \in \mathcal{B}$ существуют её окрестность $U_\beta$ и такой гомеоморфизм $h_\beta\colon U_\beta \times \mathcal{F} \to \pi^{-1}(U_\beta)$, что $\pi \circ h_\beta = pr_1$, где $pr_1$ — проекция произведения $U_\beta \times \mathcal{F}$ на его первый сомножитель. Множество $H \bigcap \pi^{-1}(U_\beta)$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ относительно $\pi^{-1}(U_\beta)$. Поскольку $h_\beta$ — гомеоморфизм, множество $h_\beta^{-1}(H \bigcap \pi^{-1}(U_\beta))$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ в $U_\beta \times \mathcal{F}$. По лемме 5.1 его проекция на $U_\beta$

$$pr_1(h_\beta^{-1}(H \bigcap \pi^{-1}(U_\beta))) = \pi(H \bigcap \pi^{-1}(U_\beta))$$

является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ относительно $U_\beta$. По свойствам образа имеем

$$\pi(H \bigcap \pi^{-1}(U_\beta)) = \pi(H) \bigcap U_\beta.$$

Из определения относительной (индуцированной) топологии вытекает, что существует такое множество $S$ типа $\mathscr{F}_\sigma$ относительно $\mathcal{B}$, что выполнено равенство $\pi(H) \bigcap U_\beta = S \bigcap U_\beta$ [106, § 5, V]. Поскольку в метрическом пространстве всякое открытое множество есть множество типа $\mathscr{F}_\sigma$ (см. лемму 1.12), само $\pi(H) \bigcap U_\beta$ является множеством типа $F_\sigma$ относительно $\mathcal{B}$ как пересечение двух множеств типа $\mathscr{F}_\sigma$. Итак, установлено, что у всякой точки $\beta \in \mathcal{B}$ найдётся окрестность $U_\beta$, для которой множество $\pi(H) \bigcap U_\beta$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$.

Если пространство $\mathcal{B}$ обладает счётной базой $\mathfrak{B}$ (т. е. сепарабельно), то без ограничения общности можно считать, что для всякого $\beta \in \mathcal{B}$ выполнено $U_\beta \in \mathfrak{B}$. Тогда доказываемое утверждение вытекает из равенства

$$\pi(H) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} (\pi(H) \bigcap U_\beta),$$

поскольку объединение содержит не более чем счётное число различных множеств. В случае, когда $\mathcal{B}$ несепарабельно, требуемое вытекает из [106, § 30, X, теорема 1]. Лемма доказана.

**Лемма 5.3.** *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда каждое открытое и каждое замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, наделённое индуцированной топологией, является пространством типа $K_\sigma$.*

**Доказательство.** 1. Поскольку всякое открытое подмножество $\mathbb{R}^N$ является счётным объединением шаров, достаточно установить утверждение для шара. Для шара $B(x_0, r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}$ утверждение леммы вытекает из очевидного равенства

$$B(x_0, r) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_0, r - k^{-1}),$$

где черта сверху обозначает замыкание.

2. Для замкнутого подмножества $F$ утверждение вытекает из равенства

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F \bigcap \overline{B}(0, k)).$$

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 5.8.**

1. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}_n$ и покажем, что для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{b \in B : \Lambda_k(\mathfrak{M}, b) < r\}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$.

Через $V_k(\mathbb{R}^n)$ условимся обозначать множество упорядоченных наборов из $k$ линейно независимых векторов $\mathbb{R}^n$ с индуцированной из $(\mathbb{R}^n)^k$ топологией (некомпактное многообразие Штифеля). Отметим, что $V_k(\mathbb{R}^n)$ открыто в пространстве $(\mathbb{R}^n)^k$, которое гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^{nk}$, поэтому по лемме 5.3 $V_k(\mathbb{R}^n)$ является пространством типа $K_\sigma$.

Определим расслоение $(\mathcal{V}_k, \pi_k, B)$ следующим образом. $\mathcal{V}_k$ есть множество всех таких упорядоченных наборов $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in E^k$, что

$$p\xi_1 = \ldots = p\xi_k$$

и $\xi_1, \ldots, \xi_k$ линейно независимы. Последнее требование имеет смысл, поскольку $\xi_1, \ldots, \xi_k$ лежат в одном слое векторного расслоения $(E, p, B)$. Множество $\mathcal{V}_k \subset E^k$ наделим индуцированной топологией. Далее, проекцию

$\pi_k\colon \mathcal{V}_k \to B$ определим равенством $\pi_k(\xi_1, \dots, \xi_k) = p(\xi_1)$. Построенное расслоение является локально тривиальным со стандартным слоем $V_k(\mathbb{R}^n)$ (как отмечено выше, типа $K_\sigma$). Действительно, если $h\colon U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U)$ — координатное отображение для расслоения $(E, p, B)$, то отображение $\tilde{h}$, задаваемое равенством

$$\tilde{h}(b, (v_1, \dots, v_k)) = (h(b, v_1), \dots, h(b, v_k)), \quad b \in U, \quad (v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{R}^n),$$

есть координатное отображение для $(\mathcal{V}_k, \pi_k, B)$.

2. Обозначим через $E_*$ множество $\{\xi \in E : |\xi| \neq 0\}$, наделённое индуцированной топологией. Для каждого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию $g_\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)\colon E_* \times \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ равенством

$$g_\lambda(\mathfrak{M}, \xi, s, \tau) = |X_{\tau+s}\xi| \cdot |X_\tau \xi|^{-1} e^{-\lambda s}, \quad \xi \in E_*, \ s, \tau \in \mathcal{T}. \tag{5.15}$$

Отметим, что в силу условия $(*)$ функция $g_\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)$ непрерывна.

Далее, для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию $h_{k\lambda}\colon \mathcal{V}_k \to \overline{\mathbb{R}}$ равенством

$$h_{k\lambda}(\nu) = \sup\{\, g_\lambda(\mathfrak{M}, \sum_{i=1}^k c_i \nu_i, s, \tau) : s, \tau \in \mathcal{T} \;\&\; c \in \mathbb{R}^k_* \,\},$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, $c = (c_1, \dots, c_k)$. Поскольку $\nu_i$, $i \in \mathbb{N}_k$, принадлежат одному и тому же слою векторного расслоения $(E, p, B)$, их линейные комбинации имеют смысл.

Для фиксированных $\lambda \in \mathbb{R}$, $s, \tau \in \mathcal{T}$ и $c \in \mathbb{R}^k_*$ функция $\mathcal{V}_k \to \mathbb{R}$, действующая по правилу $\nu \mapsto g_\lambda(\mathfrak{M}, \sum_{i=1}^k c_i \nu_i, s, \tau)$, непрерывна как композиция непрерывных отображений $\nu \mapsto \sum_{i=1}^k c_i \nu_i$ и $g_\lambda(\mathfrak{M}, \cdot, s, \tau)$ (непрерывность первого из указанных отображений есть следствие локальной тривиальности расслоения $(E, p, B)$). Тогда для всяких $\lambda, C \in \mathbb{R}$ множество

$$\{\nu \in \mathcal{V}_k \mid h_{k\lambda}(\nu) \leqslant C\} = \bigcap_{\substack{s,\tau \in \mathcal{T} \\ c \in \mathbb{R}^k_*}} \{\nu \in \mathcal{V}_k : g_\lambda(\mathfrak{M}, \sum_{i=1}^k c_i \nu_i, s, \tau) \leqslant C\}$$

замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

Перепишем формулу (5.9) в виде

$$\Lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \inf_{\nu \in \pi_k^{-1}(b)} \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : h_{k\lambda}(\nu) < \infty\}, \quad b \in B.$$

Для всякого $r \in \mathbb{R}$ неравенство $\Lambda_k(\mathfrak{M}, b) < r$ равносильно условию: найдутся такие $\nu \in \pi_k^{-1}(b)$ и $\varepsilon, C > 0$, что $h_{k, r-\varepsilon}(\nu) \leqslant C$. Следовательно, множество $\{b \in B : \Lambda_k(\mathfrak{M}, b) < r\}$ есть образ при отображении $\pi_k$ множества

$$\bigcup_{\substack{C\in\mathbb{N}\\ \varepsilon>0}} \{\nu \in \mathcal{V}_k : h_{k,r-\varepsilon}(\nu) \leqslant C\} = \bigcup_{C,j\in\mathbb{N}} \{\nu \in \mathcal{V}_k : h_{k,r-j^{-1}}(\nu) \leqslant C\} \equiv H_{kr}.$$

Последнее равенство есть следствие нестрогого убывания при фиксированном $\nu$ функции $\lambda \mapsto h_{k\lambda}(\nu)$. По предыдущему $H_{kr}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. По лемме 5.2 получаем, что множество $\{b \in B : \Lambda_k(\mathfrak{M}, b) < r\}$ также есть множество типа $\mathscr{F}_\sigma$.

3. Множество $\{b \in B : \Lambda_k(\mathfrak{M}, b) \geqslant r\}$ есть множество типа $\mathscr{G}_\delta$ как дополнение к множеству типа $\mathscr{F}_\sigma$. По лемме 1.14 функция $b \mapsto \Lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ является верхнепредельной. Теорема доказана.

**Лемма 5.4.** *Для каждого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{\xi \in E_* : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) < r\}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$.*

**Доказательство.** Требуемое вытекает из равенства

$$\{\xi \in E_* : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) < r\} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{\mathcal{T}\ni t\geqslant s} \{\xi \in E_* : t^{-1} \ln |X_t\xi| \leqslant r - j^{-1}\},\ r \in \mathbb{R},$$

где множества, стоящие под знаком пересечения, а значит, и результаты пересечения замкнуты в силу непрерывности функций $\xi \mapsto t^{-1} \ln |X_t\xi|,\ t > 0$. Последняя вытекает из условия $(*)$. Лемма доказана.

Для всяких $k \in \mathbb{N}_n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию $f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, \cdot)\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ равенством

$$f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, b) = \sup\{\, g_\lambda(\mathfrak{M}, \xi, s, \tau) : s, \tau \in \mathcal{T}\ \&\ \xi \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{M}, b)\,\}, \quad b \in B, \tag{5.16}$$

где

$$\mathcal{S}_k(\mathfrak{M}, b) = E_k(\mathfrak{M}, b) \bigcap E_*,$$

а функция $g_\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)$ определена равенством (5.15).

**Лемма 5.5.** *Для любых $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ и $\lambda, r \in \mathbb{R}$ множество*

$$F^r_{k\lambda} \equiv \{b \in B : f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, b) \geqslant r\}$$

*является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}$.*

**Доказательство.** 1. Установим сначала равенство

$$F^r_{k\lambda} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left((p \circ pr_1)\left(\mathcal{A}^{\lambda r}_q\right) \bigcap \mathcal{B}^k_{qj}\right), \tag{5.17}$$

где

$$\mathcal{A}^{\lambda r}_q \equiv g^{-1}_\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)((r, +\infty)) \bigcap \left((\Phi \circ \lambda(\mathfrak{M}, \cdot))^{-1}([-\infty, q)) \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}\right),$$
$$\mathcal{B}^k_{qj} \equiv (\Phi \circ \lambda_k(\mathfrak{M}, \cdot))^{-1}((q - j^{-1}, +\infty]),$$

$p\colon E \to B$ — проекция расслоения $(E, p, B)$, $pr_1$ — проекция произведения $E_* \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ на первый сомножитель, а функция $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ задаётся равенством (1.33). Напомним, что $\Phi$ — сохраняющий порядок гомеоморфизм.

а) Пусть $f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, b) > r$. Тогда для некоторых $\xi_0 \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{M}, b)$, $s_0, \tau_0 \in \mathcal{T}$ выполнено $g_\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0, s_0, \tau_0) > r$, причём $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ в силу определения множества $\mathcal{S}_k(\mathfrak{M}, b)$. Поскольку функция $\Phi$ возрастает, для всякого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\Phi(\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0)) < \Phi(\lambda_k(\mathfrak{M}, b)) + j^{-1}$, следовательно, найдётся такое $q_j \in \mathbb{Q}$, что $\Phi(\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0)) < q_j < \Phi(\lambda_k(\mathfrak{M}, b)) + j^{-1}$. Поэтому $(\xi_0, s_0, \tau_0) \in \mathcal{A}_{q_j}^{\lambda r}$ и $b \in \mathcal{B}_{q_j j}^k$. Таким образом, установлено включение

$$F_{k\lambda}^r \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left((p \circ pr_1)(\mathcal{A}_q^{\lambda r}) \bigcap \mathcal{B}_{qj}^k\right).$$

б) Установим обратное включение. Пусть $b \in B$ таково, что для любого $j \in \mathbb{N}$ существует такое $q \in \mathbb{Q}$, что $b \in (p \circ pr_1)(\mathcal{A}_q^{\lambda r}) \bigcap \mathcal{B}_{qj}^k$. Выберем такое $j_0 \in \mathbb{N}$, чтобы в интервале $(\Phi(\lambda_k(\mathfrak{M}, b)), \Phi(\lambda_k(\mathfrak{M}, b)) + j_0^{-1})$ не содержалось значений сужения функции $\Phi \circ \lambda(\mathfrak{M}, \cdot)$ на множество $p^{-1}(b) \backslash \{0_b\}$. Это возможно, поскольку характеристический показатель $\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)$ на ненулевых векторах фиксированного слоя $p^{-1}(b)$ принимает не более $n$ различных значений [133, лемма 4] и $\lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ — одно из таких значений [133, предложение 2]. Пусть теперь $q_0 \in \mathbb{Q}$ таково, что $b \in (p \circ pr_1)(\mathcal{A}_{q_0}^{\lambda r}) \cap \mathcal{B}_{q_0 j_0}^k$. Тогда существуют такие $\xi_0 \in p^{-1}(b) \bigcap E_*$ и $s_0, \tau_0 \in \mathcal{T}$, что выполнены соотношения

$$g_\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0, s_0, \tau_0) > r, \tag{5.18}$$
$$\Phi(\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0)) < q_0, \quad \Phi(\lambda_k(\mathfrak{M}, b)) > q_0 - j_0^{-1}.$$

Но тогда $\Phi(\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0)) < \Phi(\lambda_k(\mathfrak{M}, b)) + j_0^{-1}$, откуда с учётом выбора $j_0$ получаем $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_0) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$, т. е. $\xi_0 \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{M}, b)$. Из неравенства (5.18) тогда следует, что $f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, b) > r$. Равенство (5.17) доказано.

2. Тройка $(E_*, p|_{E_*}, B)$ является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем $\mathbb{R}_*^n$. Действительно, если $h\colon U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U)$ — координатный гомеоморфизм расслоения $(E, p, B)$, то его сужение на $U \times \mathbb{R}_*^n$ есть координатный гомеоморфизм расслоения $(E_*, p|_{E_*}, B)$, поскольку для любого $b \in U$ имеем $h(b, 0) = 0_b$. Отметим, что согласно лемме 5.3 стандартный слой построенного расслоения есть пространство типа $K_\sigma$.

3. Зафиксируем произвольные $q \in \mathbb{R}$ и $j \in \mathbb{N}$. Как уже отмечалось, из условия $(*)$, наложенного на семейство эндоморфизмов $\mathfrak{M}$, вытекает, что функция $g_\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)$ непрерывна. Следовательно, для всякого $m \in \mathbb{N}$ множество $g_\lambda^{-1}(\mathfrak{M}, \cdot)([r + m^{-1}, +\infty))$ замкнуто, откуда получаем, что множество

$$g_\lambda^{-1}(\mathfrak{M}, \cdot)((r, +\infty)) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} g_\lambda^{-1}(\mathfrak{M}, \cdot)([r + m^{-1}, +\infty))$$

является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. По лемме 5.4 множество

$$(\Phi \circ \lambda(\mathfrak{M}, \cdot))^{-1}([-\infty, q)) = \lambda^{-1}(\mathfrak{M}, \cdot)([-\infty, \Phi^{-1}(q)))$$

также является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. А тогда и множество $\mathcal{A}_q^{\lambda r}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Из леммы 5.3 следует, что $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ есть пространство типа $K_\sigma$. Последовательно применяя леммы 5.1 и 5.2, получаем, что множество $(p \circ pr_1)(\mathcal{A}_q^{\lambda r})$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ и, следовательно, множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ (см. лемму 1.12).

Согласно результату [138] функция $\lambda_k(\mathfrak{M}, \cdot)\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит второму классу Бэра, поэтому множество

$$\mathcal{B}_{qj}^k = (\Phi \circ \lambda_k(\mathfrak{M}, \cdot))^{-1}((q - j^{-1}, +\infty]) = \lambda_k^{-1}(\mathfrak{M}, \cdot)((\Phi^{-1}(q - j^{-1}), +\infty])$$

является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ как прообраз луча вида $(y, +\infty]$ [207, § 39, 2].

Итак, множества, стоящие под знаком счётного объединения в (5.17), а значит, и результаты этого объединения, являются множествами типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$. Следовательно, множество $F_{k\lambda}^r$ является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}$. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 5.9.** Отметим, что непосредственно из определения 5.1 вытекает, что для любого $p \in \mathbb{R}$ неравенство $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) < p$ равносильно условию: найдётся такое $\varepsilon > 0$, что

$$\sup_{\substack{\tau, s \in \mathcal{T} \\ \xi \in L_*}} |X_{\tau+s}\xi| \cdot |X_\tau \xi|^{-1} \cdot e^{-(p-\varepsilon)s} < \infty.$$

В частности, для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ неравенство $\beta^{(k)}(\mathfrak{M}, b) < p$ равносильно условию: найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $f_{k,p-\varepsilon}(\mathfrak{M}, b) < \infty$, где функция $f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, \cdot)$ определена равенством (5.16). Учитывая, что при фиксированном $b \in B$ функция $\lambda \mapsto f_{k\lambda}(\mathfrak{M}, b)$ нестрого убывает, для всякого $p \in \mathbb{R}$ имеем

$$\{b \in B : \beta^{(k)}(\mathfrak{M}, b) < p\} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{r \in \mathbb{N}} f_{k,p-l^{-1}}^{-1}(\mathfrak{M}, \cdot)([-\infty, r]).$$

По лемме 5.5 с учетом свойств прообраза и законов двойственности получаем, что множества, стоящие под знаком объединения, являются множествами типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma}$. Следовательно, результат их счётного объединения также является множеством типа $\mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma}$. Применяя свойства прообраза и законы двойственности, получаем, что множество $\{b \in B : \Lambda^{(k)}(\mathfrak{M}, b) \geqslant p\}$ есть множество типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}$. В силу [207, § 39, 2] функция $\Lambda^{(k)}(\mathfrak{M}, \cdot)\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ может быть представлена как предел убывающей последовательности функций третьего класса Бэра и следовательно, принадлежит четвёртому классу Бэра. Теорема доказана.

**Лемма 5.6.** *Пусть $L$ — нетривиальное подпространство произвольного* *слоя* $p^{-1}(b),\ b \in B,$ *причём* $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) < \infty$. *Тогда*

$$\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) = \lim_{q \to +\infty} \sup_{t-s \geqslant q} \frac{1}{t-s} \ln \sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} \equiv \tilde{\varkappa}_g(\mathfrak{M}, L).$$

**Доказательство.**

1. Покажем, что $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) \geqslant \tilde{\varkappa}_g(\mathfrak{M}, L)$. Действительно, пусть выполнено $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) < \lambda$. Тогда существует такое $C > 1$, что для всяких $t, s \in \mathfrak{T},\ t \geqslant s$, справедливо неравенство

$$\sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} \leqslant C e^{\lambda(t-s)},$$

откуда получаем для любого $q \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t-s \geqslant q} \frac{1}{t-s} \ln \sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} \leqslant \frac{\ln C}{q} + \lambda.$$

Переходя к пределу при $q \to \infty$, получаем, что $\tilde{\varkappa}_g(\mathfrak{M}, L) \leqslant \lambda$. В силу п. 1 доказательства теоремы 5.7 требуемое неравенство установлено.

2. Докажем теперь обратное неравенство $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) \leqslant \tilde{\varkappa}_g(\mathfrak{M}, L)$. Пусть $\tilde{\varkappa}_g(\mathfrak{M}, L) < \lambda$. Тогда найдётся такое $q \in \mathbb{N}$, что для любых $t - s \geqslant q$

$$\frac{1}{t-s} \ln \sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} < \lambda,$$

откуда получаем

$$\sup_{t-s \geqslant q} \sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} e^{-\lambda(t-s)} \leqslant 1.$$

По условию для некоторых $\mu \in \mathbb{R}$ и $C > 0$ имеем

$$\sup_{0 \leqslant t-s \leqslant q} \sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} e^{-\mu(t-s)} \leqslant C.$$

Тогда

$$\sup_{0 \leqslant t-s \leqslant q} \sup_{\xi \in L_*} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} e^{-\lambda(t-s)} \leqslant C e^{|\lambda - \mu| q}.$$

Таким образом,

$$\sup_{t \geqslant s} \sup_{\xi \in L_0} |X_t \xi| \cdot |X_s \xi|^{-1} e^{-\lambda(t-s)} < \infty,$$

откуда получаем $\varkappa_g(\mathfrak{M}, L) \leqslant \lambda$. В силу п. 1 доказательства теоремы 5.7 требуемое неравенство, а вместе с ним и равенство $\varkappa(\mathfrak{M}, L) = \tilde{\varkappa}(\mathfrak{M}, L)$ установлены. Лемма доказана.

## 5.2 Показатели Боля линейных дифференциальных систем

Как уже было сказано в начале главы, результаты о показателях Боля линейных систем будут получены в качестве следствий результатов раздела 5.1. Но сначала установим две леммы.

Теперь определим векторное расслоение $(E, p, B)$ следующим образом: $E = \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \times \mathbb{R}^n$, $B = \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, $p$ — проекция произведения $\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n$ на первый сомножитель. Риманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на векторном расслоении $(E, p, B)$ определим равенством $\langle\xi, \eta\rangle = \langle pr_2\xi, pr_2\eta\rangle$, где $pr_2$ — проекция произведения $\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n$ на второй сомножитель.

При всяком $t \in \mathbb{R}_+ \equiv \mathcal{T}$ положим $\mathcal{X}_t\xi = (p(\xi), X_{p(\xi)}(t, 0)pr_2\xi)$, где $X_A(\cdot,\cdot)$ — оператор Коши системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Линейность сужений $\mathcal{X}_t$ на слои расслоения $(E, p, B)$ есть следствие соответствующего свойства оператора Коши линейной системы. Отображение $\mathcal{X}_t$ обратимо; обратное отображение задаётся формулой

$$\mathcal{X}_t^{-1}\xi = (p(\xi), X^{-1}_{p(\xi)}(t, 0)pr_2\xi).$$

Вследствие непрерывной зависимости решения линейной системы от начального условия и правой части отображения $\mathcal{X}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, непрерывны и выполнено условие $(*)$.

Для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ положим $\chi_t = 1_{\widetilde{\mathcal{M}}_n}$ (тождественное отображение) и определим семейство автоморфизмов $\mathfrak{N}$ равенством $\mathfrak{N}t = (\mathcal{X}_t, \chi_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

**Лемма 5.7.** *Для любых $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $k \in \mathbb{N}_n$ справедливы равенства*

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(\mathfrak{N}, A), \tag{5.19}$$

$$\Lambda_k(A) = \Lambda_k(\mathfrak{N}, A), \tag{5.20}$$

$$\{A\} \times E_k(A) = E_k(\mathfrak{N}, A), \tag{5.21}$$

$$\Lambda^{(k)}(A) = \Lambda^{(k)}(\mathfrak{N}, A). \tag{5.22}$$

**Доказательство.** Зафиксируем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $k \in \mathbb{N}_n$. Из равенств (1.7), (5.10) и определения семейства $\mathfrak{N}$ следует, что для всякого $\zeta \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\lambda[X_A(\cdot, 0)\zeta] = \lambda(\mathfrak{N}, (A, \zeta)). \tag{5.23}$$

Равенство (5.19) вытекает из равенств (5.23), (1.8) и (5.10) с учётом изоморфизма между пространством решений линейной системы и пространством их начальных условий.

Из определений 1.6 и 5.1 вытекает, что для всякого нетривиального подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\varkappa_g(A, L) = \varkappa_g(\mathfrak{N}, \{A\} \times L). \tag{5.24}$$

Равенство (5.20) вытекает из равенства (5.24) и определений 1.7 и 5.2.

Из равенств (5.23) и (5.19) следует равенство (5.21). Равенство (5.22) вытекает из равенств (5.21) и (5.24) и определений 1.9 и 5.4. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 5.1.** В силу леммы 5.7 все утверждения п. 1 теоремы, за исключением последнего неравенства цепочки (5.3), следуют из теоремы 5.7.

Докажем упомянутое неравенство. Если $|||A||| = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $|||A||| < \infty$. Выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $T_\varepsilon > 0$ такое, что $|A(t)| \leqslant |||A|||+\varepsilon$ для всех $t \geqslant T_\varepsilon$. Поскольку наибольший показатель Боля $\beta_n$ является остаточным функционалом (см. леммы 1.11 и 1.3), то без ограничения общности можно считать, что неравенство $|A(t)| \leqslant |||A||| + \varepsilon$ выполнено для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда из оценки (1.6) и равенства

$$|X_A(t,\tau)| = \max_{x\neq 0} |x(t)| \cdot |x(\tau)|^{-1},$$

в котором максимум берётся по всем ненулевым решениям системы $A$, вытекает, что $\beta_n(A) \leqslant |||A||| + \varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим требуемое.

Утверждение п. 2 следует из леммы 5.6, равенства

$$|X_A(t,\tau)|_{X_A(\tau,0)L}| = \sup_{\xi\in\{A\}\times L_*} |\mathfrak{X}_t\xi| \cdot |\mathfrak{X}_\tau\xi|^{-1},$$

выполненного для всяких $t,\tau \in \mathbb{R}_+$ в силу определения семейства $\mathfrak{N}$, равенства (5.24) и определения 1.9. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 5.2.** Требуемое вытекает из леммы 5.7 и теоремы 5.8. Теорема доказана.

**Доказательство следствия 5.1.** По лемме 1.5 отображение $X \to \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, действующее по правилу $\mu \mapsto A(\cdot\,,\mu)$, непрерывно. Из этого и теоремы 5.2 вытекает, что функция $X \to \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $\mu \mapsto \Lambda_k(A(\cdot\,,\mu))$, является верхнепредельной. Применяя лемму 1.16, получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}_n$ существует такое плотное в $X$ множество $D_k$ типа $\mathscr{G}_\delta$, что функция $\mu \mapsto \Lambda_k(A(\cdot\,,\mu))$ полунепрерывна сверху в каждой точке множества $D_k$. Тогда в силу [207, § 28, IX] множество $D = \bigcap_{k=1}^n D_k$ есть плотное $\mathscr{G}_\delta$-множество, причём каждая из рассматриваемых функций полунепрерывна сверху во всякой точке множества $D$. Следствие доказано.

**Доказательство теоремы 5.3.** Требуемое вытекает из леммы 5.7 и теоремы 5.9. Теорема доказана.

**Доказательство следствия 5.2.** По лемме 1.5 отображение $X \to \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, действующее по правилу $\mu \mapsto A(\cdot\,,\mu)$, непрерывно. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество рассматриваемых функций. Из теорем 5.2 и 5.3 следует, что всякая функция $f \in \mathcal{F}$ является бэровской. Тогда по теореме [207, § 39, VI] для каждой из функций $f \in \mathcal{F}$ найдётся такое всюду плотное в $X$ множество $C_f$ типа $\mathscr{G}_\delta$, что сужение функции $f$ на это множество непрерывно. Пересечение $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} C_f$ обладает требуемыми свойствами: по построению, сужения всех функций из $\mathcal{F}$ на это множество непрерывны, оно является множеством типа $\mathscr{G}_\delta$ как конечное пересечение множеств типа $\mathscr{G}_\delta$ и плотно в $X$ в силу [207, § 28, IX]. Следствие доказано.

## 5.3 Показатели Боля локальных диффеоморфизмов риманова многообразия

В этом разделе результаты о показателях Боля локальных диффеоморфизмов риманова многообразия будут получены в качестве следствий результатов раздела 5.1.

В обозначениях раздела 1.8 определим векторное расслоение $(E, p, B)$ следующим образом: положим $E = S \times TM$, $B = S \times M$, а $p$ зададим равенством $p(f, \zeta) = (f, \pi(\zeta))$, $f \in S$, $\zeta \in TM$, где $\pi$ — каноническая проекция касательного расслоения $TM$. Локальная тривиальность построенного расслоения есть следствие локальной тривиальности касательного расслоения $(TM, \pi, M)$: действительно, если $(U_\alpha, h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ есть атлас расслоения $(TM, \pi, M)$, то $(S \times U_\alpha, 1_S \times h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, где $1_S \colon S \to S$ — тождественное отображение, есть атлас построенного расслоения.

Риманову метрику $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ на векторном расслоении $(E, p, B)$ определим равенством $\langle\xi, \eta\rangle = \delta(pr_2\xi, pr_2\eta)$, где $\delta(\cdot\,,\cdot)$ — риманова метрика на многообразии $M$, а $pr_2$ — проекция произведения $S \times TM$ на второй сомножитель.

При всяких $m \in \mathbb{Z}_+$, $f \in S$ и $\zeta \in TM$ положим $\mathcal{X}_m(f, \zeta) = (f, df^m\zeta)$ и $\chi_m(f, x) = (f, f^m(x))$, где $f^m$ — $m$-я итерация отображения $f$. Линейность сужений $\mathcal{X}_m$ на слои расслоения $(E, p, B)$ есть следствие линейности дифференциала гладкого отображения. Поскольку мы требуем, чтобы отображение $df_x$ было невырождено в каждой точке $x \in M$, то $\mathcal{X}_m[b] \colon p^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$ — линейный изоморфизм. Определим теперь семейство эндоморфизмов $\mathfrak{N}$ равенством $\mathfrak{N}_m = (\mathcal{X}_m, \chi_m)$, где $m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathcal{T}$.

Остаётся проверить свойство $(*)$. Для этого удобно воспользоваться другим, бескоординатным, способом определения $C^1$-компактно-открытой топологии на пространстве $S$. С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную конструкцию.

Пусть $X$ и $Y$ — топологические многообразия с выбранными на них атласами (не обязательно максимальными). Пространство $C(X, Y)$ непрерывных отображений из $X$ в $Y$ наделим $C^0$-компактно-открытой топологией, определяемой следующим образом [209, §2.1]. Пусть $f \in C(X, Y)$, и пусть $(\varphi, U)$, $(\psi, V)$ — карты, принадлежащие выбранным атласам многообразий $X$ и $Y$ соответственно. Пусть, далее, $K \subset U$ — такой компакт, что $f(K) \subset V$. Для всякого $\varepsilon > 0$ определим множество (функцию $f$ назовём его центром)

$$\mathcal{N}(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) \tag{5.25}$$

как множество таких $g \in C(X, Y)$, что $g(K) \subset V$ и выполнено неравенство

$$\max_{x \in \varphi(K)} |(\psi f \varphi^{-1})(x) - (\psi g \varphi^{-1})(x)| < \varepsilon.$$

Множества вида (5.25) образуют предбазу $C^0$-компактно-открытой топологии на пространстве $C(X, Y)$.

Следующее утверждение показывает, как задать ту же топологию без использования координатных карт, а заодно и доказывает её независимость от выбора атласов многообразий $X$ и $Y$.

**Лемма 5.8.** *Пусть $X$ и $Y$ — топологические многообразия с выбранными на них атласами (не обязательно максимальными). Тогда $C^0$-компактно-открытая топология на пространстве $C(X, Y)$, задаваемая посредством этих атласов, имеет предбазу, состоящую из множеств*

$$\nu(K, W) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset W\}, \tag{5.26}$$

*где $K \subset X$ — компакт, а $W \subset Y$ — открытое множество.*

**Доказательство.** 1. Сначала установим, что топология, порождённая множествами (5.26), не изменится, если рассматривать только такие компактные множества $K \subset X$ и открытые множества $W \subset Y$, которые лежат в области действия одной из карт выбранных атласов. Пусть $f \in \nu(K, W)$. В силу локальной компактности многообразий $X$ и $Y$ и непрерывности функции $f$ для любой точки $x \in K$ существует её окрестность $O(x)$, обладающая следующими свойствами: а) $f(\overline{O(x)}) \subset W$; б) множество $\overline{O(x)}$ лежит в области действия одной из карт заданного атласа многообразия $X$; в) множество $f(\overline{O(x)})$ лежит в области действия $V(x)$ одной из карт заданного атласа многообразия $Y$. Пусть $O(x_i)$, $i \in \mathbb{N}_m$, — конечное покрытие компакта $K$. Положим $K_i = K \bigcap \overline{O(x_i)}$, $i \in \mathbb{N}_m$. Тогда $f \in \bigcap_{i=1}^m \nu(K_i, W \cap V(x_i)) \subset \nu(K, W)$.

2. Пусть $(\varphi, U)$ и $(\psi, V)$ — карты многообразий $X$ и $Y$ соответственно. Пусть, далее, $f \in \nu(K, W)$, где $K \subset U$ — компакт, а $W \subset V$ — открытое множество. Покажем, что в множестве $\nu(K, W)$ найдётся содержащее точку $f$ подмножество вида (5.25). Положим

$$d = \inf\{|x - y| : x \in \psi(f(K)),\ y \in \psi(V \backslash W)\}.$$

Учитывая, что $\psi(f(K))$ — компакт, не пересекающийся с замкнутым относительно $\psi(V)$ множеством $\psi(V \backslash W)$, получаем, что $d > 0$. Тогда имеем $f \in \mathcal{N}(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, d) \subset \nu(K, W)$.

3. Покажем, что для всяких множества $P$ вида (5.25) и его точки $g$ найдёт-

ся открытое в порождённой множествами вида (5.26) топологии множество $Q$, такое, что $g \in Q \subset P$. Пусть $P = \mathcal{N}(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ и $g \in P$. Положим $\eta = (\varepsilon - \max_{x \in \varphi(K)} |(\psi f \varphi^{-1})(x) - (\psi g \varphi^{-1})(x)|)/4$. Далее через $B_r(z)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке $z$ и радиусом $r > 0$, лежащий в соответствующем пространстве. В силу непрерывности функции $\psi g \varphi^{-1}$ для каждого $x \in \varphi(K)$ существует такой шар $B_{r(x)}(x) \subset \varphi(U)$, что $(\psi g \varphi^{-1})(B_{r(x)}(x)) \subset B_\eta((\psi g \varphi^{-1})(x))$. Выберем из покрытия компакта $\varphi(K)$ шарами $B_{r(x)/2}(x)$ конечное подпокрытие $B_{r(x_i)/2}(x_i)$, $i \in \mathbb{N}_m$. Тогда

$$\varphi(K) = \bigcup_{i=1}^{m} C_i, \quad C_i = \overline{B}_{r(x_i)/2}(x_i) \bigcap \varphi(K) \subset B_{r(x_i)}(x_i).$$

Положим

$$Q = \bigcap_{i=1}^{m} \nu(\varphi^{-1}(C_i), \psi^{-1}(B_\eta((\psi g \varphi^{-1})(x_i)) \bigcap \psi(V))).$$

По построению $g \in Q$. Покажем, что $Q \subset P$. Пусть $h \in Q$ и $x \in \varphi(K)$. Тогда $x \in C_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_m$ и $(h\varphi^{-1})(x) \in V$. Таким образом, $h(K) \subset V$. Из включений $(\psi h \varphi^{-1})(C_i) \subset B_\eta((\psi g \varphi^{-1})(x_i)$ и $(\psi g \varphi^{-1})(C_i) \subset B_\eta((\psi g \varphi^{-1})(x_i)$ получаем, что $|(\psi h \varphi^{-1})(x) - (\psi g \varphi^{-1})(x)| < 2\eta$. Следовательно, выполнено неравенство $|(\psi h \varphi^{-1})(x) - (\psi f \varphi^{-1})(x)| \leqslant \varepsilon - 2\eta$, откуда получаем $h \in P$. Лемма доказана.

Если $(\varphi, U)$ — карта многообразия $M$, то через $T\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ будем обозначать отображение, действующее по правилу

$$T\varphi(\xi) = (\varphi(\pi(\xi)), \varphi'(\xi)), \quad \xi \in \pi^{-1}(U).$$

Пара $(T\varphi, \pi^{-1}(U))$ является картой на многообразии $TM$, которая называется *естественной* картой [209, §1.2], соответствующей карте $(\varphi, U)$. Аналогично определяется *естественный* атлас на $TM$.

Следующая лемма указывает способ определения топологии на пространстве $S$ без использования координатных карт, а также устанавливает некоторые важные для дальнейшего свойства этой топологии.

**Лемма 5.9.** *Справедливы следующие утверждения:*

1) *отображение* $\Upsilon\colon S \to C(TM, TM)$, *сопоставляющее отображению* $f$ *его дифференциал* $df$, *является гомеоморфизмом на свой образ;*

2) *функция, действующая из* $S \times TM$ *в* $\mathbb{R}$ *по правилу* $(f, \xi) \mapsto |df\xi|$, *непрерывна;*

3) *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *отображение, действующее из* $S$ *в* $S$ *по правилу* $f \mapsto f^k$, *непрерывно.*

**Доказательство.** 1. Выберем на многообразии $M$ какой-нибудь атлас, а на $TM$ — соответствующий естественный атлас. Заметим, что всякое множество вида (1.31) вместе с каждой своей точкой содержит и множество того же вида с центром в этой точке (с меньшим значением параметра $\varepsilon$). То же справедливо и для множеств вида (5.25). Далее, образ всякого множества $\mathcal{K}(f;(\varphi,U),(\psi,V),K,\varepsilon)$ при отображении $\Upsilon$ содержит множество

$$\mathcal{N}(df;(T\varphi,\pi^{-1}(U)),(T\psi,\pi^{-1}(V)),\Sigma,\varepsilon)\bigcap\Upsilon(S),$$

где $\Sigma=\{\xi\in\pi^{-1}(K):|\varphi'(\xi)|=1\}$. Из равенства $\Sigma=(T\varphi)^{-1}(\varphi(K)\times\overline{B_1(0)})$ получаем, что $\Sigma$ — компакт. Следовательно, образ всякого открытого множества при отображении $\Upsilon$ является открытым множеством в пространстве $\Upsilon(S)$.

С другой стороны, пусть $(\varphi,U)$ и $(\psi,V)$ — карты выбранного атласа многообразия $M$. Пусть, далее, заданы компакт $\Xi\subset\pi^{-1}(U)$, $\varepsilon>0$ и отображение $f\in S$, причем $df(\Xi)\subset\pi^{-1}(V)$. Положим $r=2\sup\{|\varphi'(\xi)|:\xi\in\Xi\}+2$. Тогда выполнено включение

$$\Upsilon(\mathcal{K}(f;(\varphi,U),(\psi,V),\pi(\Xi),\varepsilon/r))\subset\mathcal{N}(df;(T\varphi,\pi^{-1}(U)),(T\psi,\pi^{-1}(V)),\Xi,\varepsilon).$$

Из сказанного следует, что прообраз всякого открытого подмножества пространства $\Upsilon(S)$ при отображении $\Upsilon$ является открытым множеством в пространстве $S$. Наконец, $\Upsilon$ взаимно однозначно, ибо $f=\pi\circ df\circ O$, $f\in S$, где $O$ — нулевое векторное поле на $M$. Таким образом, установлено, что отображение $\Upsilon\colon S\to\Upsilon(S)$ — гомеоморфизм.

2. Заметим, что функция, действующая из $S\times TM$ в $\mathbb{R}$ по правилу $(f,\xi)\mapsto|df\xi|$, является композицией следующих непрерывных отображений: а) прямого произведения отображения $\Upsilon$ и тождественного отображения пространства $TM$; б) отображения вычисления, действующего из произведения $C(TM,TM)\times TM$ в $TM$ по правилу $(F,\xi)\mapsto F(\xi)$; в) функции $|\cdot|$, действующей из $TM$ в $\mathbb{R}$. Непрерывность первого из указанных отображений вытекает из п. 1, а второго — из теоремы 2.4 книги [228, Chap. XII]. Утверждение 2 доказано.

3. Пусть задано $k\in\mathbb{N}$. В силу п. 1 достаточно показать, что отображение, действующее из $C(TM,TM)$ в $C(TM,TM)$ по правилу $F\mapsto F^k$, непрерывно. Последнее вытекает по индукции из теоремы 2.2 книги [228, Chap. XII]. Утверждение 3 доказано. Лемма доказана.

**Лемма 5.10.** *Пространства $S$, $M$, $S\times M$ и $TM$ метризуемы.*

**Доказательство.** По определению многообразие является локально евклидовым пространством, поэтому любое многообразие локально компактно. В силу [107, § 41, X, теорема 2] такие пространства вполне регулярны [106, § 14, I] и, значит [106, § 14, I, теорема 1], регулярны [106, § 5, X]. Следовательно, по теореме Урысона [106, § 22, II, теорема 1] всякое многообразие со счётной базой метризуемо. В частности, метризуемо каждое из пространств $M$ и $TM$. Метризуемость пространства $S$ вытекает из утверждения 1 леммы 5.9 и теоремы 1 монографии [107, § 44, VII] (см. также [209, теорема 4.4]). Поскольку пространства $S$ и $M$ метризуемы, то и $S \times M$ тоже метризуемо [106, § 21, VI]. Лемма доказана.

По лемме 5.9 при каждом $m \in \mathbb{Z}_+$ отображение $\mathfrak{X}_m$ непрерывно, поэтому выполнено условие $(*)$. Таким образом, мы можем пользоваться результатами, полученными в разделе 5.1.

**Лемма 5.11.** *Для любых $f \in S$, $x \in M$ и $k \in \mathbb{N}_n$ справедливы равенства*

$$\lambda_k(f, x) = \lambda_k(\mathfrak{N}, (f, x)), \tag{5.27}$$

$$\Lambda_k(f, x) = \Lambda_k(\mathfrak{N}, (f, x)), \tag{5.28}$$

$$E_k(f, x) = E_k(\mathfrak{N}, (f, x)), \tag{5.29}$$

$$\Lambda^{(k)}(f, x) = \Lambda^{(k)}(\mathfrak{N}, (f, x)). \tag{5.30}$$

**Доказательство.** Зафиксируем $f \in S$, $x \in M$ и $k \in \mathbb{N}_n$. Тогда из равенств (1.32), (5.10) и определения семейства $\mathfrak{N}$ следует, что для всякого $\zeta \in TM$ выполнено равенство

$$\lambda(f, \zeta) = \lambda(\mathfrak{N}, (f, \zeta)). \tag{5.31}$$

Равенство (5.27) вытекает из равенства (5.31) и определений 1.10 и 5.3.

Из определений 1.11 и 5.1 вытекает, что для всякого нетривиального подпространства $L \subset T_xM$ выполнено равенство

$$\varkappa_g(f, L) = \varkappa_g(\mathfrak{N}, \{f\} \times L). \tag{5.32}$$

Равенство (5.28) вытекает из равенства (5.32) и определений 1.12 и 5.2.

Из равенств (5.31) и (5.27) следует равенство (5.29). Равенство (5.30) вытекает из равенств (5.29) и (5.32) и определений 1.13 и 5.4. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 5.4.** В силу леммы 5.11 все утверждения п. 1 теоремы, за исключением последнего неравенства цепочки (5.7), следуют из теоремы 5.7.

Докажем упомянутое неравенство. Если $a \equiv \sup_{x \in M} |df_x| = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $a < \infty$. По свойствам нормы для всяких $x \in M$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем неравенство $|df^k_x| \leqslant a^k$. Тогда для всяких $m \geqslant l \geqslant 0$ выполнена цепочка

$$\sup_{0 \neq \zeta \in T_xM} |df^m \zeta| \cdot |df^l \zeta|^{-1} = |df^{m-l}_{f^l(x)}| \leqslant a^{m-l} = e^{\ln a \cdot (m-l)},$$

откуда получаем требуемое.

Утверждение п. 2 следует из леммы 5.6, равенства

$$|df^{t-\tau}|_{df^\tau L}| = \sup_{\xi \in \{f\} \times L_*} |\mathfrak{X}_t \xi| \cdot |\mathfrak{X}_\tau \xi|^{-1},$$

выполненного для всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$ в силу определения семейства $\mathfrak{N}$, равенства (5.32) и определения 1.13. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 5.5.** Требуемое вытекает из леммы 5.11 и теоремы 5.8. Теорема доказана.

**Доказательство следствия 5.3.** По теореме 5.5 для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ функция $X \to \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $\mu \mapsto \Lambda_k(f(\mu), x(\mu))$, является вехнепредельной. Рассуждая далее как в доказательстве следствия 5.1, получим требуемое. Следствие доказано.

**Доказательство теоремы 5.6.** Требуемое вытекает из леммы 5.11 и теоремы 5.9. Теорема доказана.

**Доказательство следствия 5.4.** Из теорем 5.5 и 5.6 следует, что каждая из рассматриваемых функций является бэровской. Рассуждая далее как в доказательстве следствия 5.2, получим требуемое. Следствие доказано.

## 5.4 О бэровском классе центральных показателей локальных диффеоморфизмов

Ниже мы будем пользоваться обозначениями, введёнными в разделе 1.8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $M$ — $n$-мерное $C^1$-многообразие со счётной базой, на котором задана риманова метрика $\delta$ (класса $C^0$). Таким образом, для каждого $x \in M$ касательное пространство $T_xM$ наделяется нормой $|\xi| = \sqrt{\delta(\xi,\xi)}$, $\xi \in T_xM$.

**Определение 5.5.** *Центральные показатели* локального диффеоморфизма $f \in S$ в точке $x \in M$ определяются равенствами [132]:

$$\Omega^{(i)}(f,x) = \inf_{T\in\mathbb{N}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln |df^T|_{df^{(k-1)T}E_i(f,x)}|, \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

**Замечание 5.3.** Поскольку мы не требуем ограниченности на $M$ производных рассматриваемых отображений, введённые выше величины являются точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. В случае компактного многообразия $M$ они заведомо конечны и не зависят от выбора римановой метрики на нём (поскольку всякие две римановы метрики на компактном многообразии эквивалентны).

В докладе [139] В. М. Миллионщиковым была поставлена задача о нахождении наименьшего класса Бэра, содержащего функцию $\Omega^{(i)}$, и отмечено, что функция $\Omega^{(n)}$ принадлежит второму классу. Затем в [140] им же было сформулировано утверждение о принадлежности функций $\Omega^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, четвёртому классу (для случая диффеоморфизмов компактного многообразия), но в [143] это утверждение было заменено его автором на более слабое — о принадлежности указанных функций пятому классу. Доказательства приведённых утверждений опубликованы не были.

В этой главе мы докажем первоначальную гипотезу В. М. Миллионщикова о принадлежности центральных показателей локальных диффеоморфизмов четвёртому классу Бэра. Вопрос об оценке номера бэровского класса снизу остаётся открытым.

**Теорема 5.10** ([263]). *Каждая из функций* $\Omega^{(i)}\colon S\times M\to\overline{\mathbb{R}}$, $i\in\mathbb{N}_{n-1}$, *принадлежит четвёртому классу Бэра, а функция* $\Omega^{(n)}\colon S\times M\to\overline{\mathbb{R}}$ — *второму.*

Перед доказательством теоремы установим две леммы. Условимся обозначать через $p\colon S\times TM\to S\times M$ прямое произведение тождественного отображения $1_S$ пространства $S$ и канонической проекции $\pi$ касательного расслоения, т. е. отображение, действующее по правилу $(f,\xi)\mapsto(f,\pi(\xi))$, $f\in S$, $\xi\in TM$.

**Лемма 5.12.** *Пусть* $H\subset S\times TM$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если множество* $H$ *открыто, то множество* $p(H)$ *также открыто;*

2) *если множество* $H$ *является множеством типа* $\mathscr{F}_\sigma$, *то* $p(H)$ *также является множеством типа* $\mathscr{F}_\sigma$.

**Доказательство.** 1. Пусть $\{(\varphi_i,U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ — произвольный атлас многообразия $M$, а $(T\varphi_i,\pi^{-1}(U_i))_{i\in\mathbb{N}}$ — соответствующий естественный атлас его касательного расслоения. Для доказательства первого утверждения достаточно убедиться, что для любого $i\in\mathbb{N}$ сужение канонической проекции $\pi\colon TM\to M$ на пространство $\pi^{-1}(U_i)$ открыто. Действительно, указанное сужение есть композиция открытых отображений $T\varphi_i$, проекции произведения $\varphi_i(U_i)\times\mathbb{R}^n$ на первый сомножитель и отображения $\varphi_i^{-1}$.

2. Второе утверждение следует из леммы 5.2, применённой к векторному расслоению $(S\times TM,p,S\times M)$ и множеству $H$. Лемма доказана.

**Лемма 5.13.** *Для любого* $r\in\mathbb{R}$ *множество*

$$\{(f,\xi)\in S\times TM:\lambda(f,\xi)<r\}$$

*является множеством типа* $\mathscr{F}_\sigma$.

**Доказательство.** Требуемое вытекает из равенства (как и раньше, считаем $\ln 0=-\infty$)

$$\begin{aligned}&\{(f,\xi)\in S\times TM:\lambda(f,\xi)<r\}=\\&=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geqslant k}\{(f,\xi)\in S\times TM:\ln|df^m\xi|^{1/m}\leqslant r-j^{-1}\},\ r\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Действительно, функции, действующие из пространства $S\times TM$ в $\overline{\mathbb{R}}$ по правилу $(f,\xi)\mapsto\ln|df^m\xi|^{1/m}$, $m\in\mathbb{N}$, в силу утверждений 2 и 3 леммы 5.9 непрерывны, поэтому множества, стоящие под знаком пересечения, а значит, и результаты пересечения замкнуты. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 5.10.** 1. Обозначим через $(TM)_*$ подмножество касательного расслоения $TM$, получаемое из последнего выбрасыванием нулевого вектора в каждом слое. Зафиксируем произвольные $k, T \in \mathbb{N}$ и определим функцию $g^{k,T}\colon S \times (TM)_* \to \mathbb{R}$ равенством

$$g^{k,T}(f, \xi) = |df^{kT}\xi| \cdot |df^{(k-1)T}\xi|^{-1}, \quad f \in S, \quad \xi \in (TM)_*.$$

В силу утверждений 2 и 3 леммы 5.9 функция $g^{k,T}$ непрерывна.

Пусть задано $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Для каждого числа $j \in \mathbb{N}$ определим функцию $h^{k,T}_{i,j} : S \times M \to \mathbb{R}$ равенством

$$h^{k,T}_{i,j}(f, x) = \sup_{\xi \in E_{i,j}(f,x)\setminus\{0\}} g^{k,T}(f, \xi), \quad f \in S, \quad x \in M,$$

где $E_{i,j}(f, x) = \{\xi \in T_xM : \Phi(\lambda(f, \xi)) < \Phi(\lambda_i(f, x)) + j^{-1}\}$, а $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ — возрастающий гомеоморфизм (1.33).

Зафиксируем произвольное $r \in \mathbb{R}$ и покажем, что множество

$$C^{k,T}_{i,j,r} = \{(f, x) \in S \times M : h^{k,T}_{i,j}(f, x) > r\}$$

является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$. Положим

$$G^{k,T}_r = \{(f, \xi) \in S \times (TM)_* : g^{k,T}(f, \xi) > r\}.$$

Кроме того, для всякого $q \in \mathbb{Q}$ положим

$$\begin{aligned} A_q &= \{(f, \xi) \in S \times TM : \Phi(\lambda(f, \xi)) < q\}, \\ B^{i,j}_q &= \{(f, x) \in S \times M : \Phi(\lambda_i(f, x)) + j^{-1} > q\}. \end{aligned}$$

Тогда справедливо представление

$$C^{k,T}_{i,j,r} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} p(G^{k,T}_r \cap A_q) \cap B^{i,j}_q. \tag{5.33}$$

В силу непрерывности функции $g^{k,T}$ множество $G^{k,T}_r$ открыто в метризуемом (в силу леммы 5.10) пространстве $S \times TM$, поэтому является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ (см. лемму 1.12). Множество $A_q$ в силу леммы 5.13 также является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$. Следовательно, тем же свойством обладает и их пересечение, а также в силу леммы 5.12 и его образ при отображении $p$. Всякое множество типа $\mathscr{F}_\sigma$ в метризуемом (снова в силу леммы 5.10) пространстве $S \times M$ является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ (см. лемму 1.12). Согласно результату [138] функция $\lambda_i\colon S \times M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит второму классу Бэра, поэтому множество $B^{i,j}_q$ также является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ (см. теорему Лебега-Хаусдорфа 1.1). Следовательно, множества, стоящие в (5.33) под знаком счётного объединения, а значит, и результат этого объединения являются множествами типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ в пространстве $S \times M$.

2. Определим функции $s_{m,T,j}$, $\sigma_{l,T,j}$ и $\Omega^{(i)}_{T,j}$, $m, T, l, j \in \mathbb{N}$, из $S \times M$ в $\overline{\mathbb{R}}$

при помощи равенств ($f \in S,\ x \in M$)

$$
\begin{aligned}
&s_{m,T,j}(f,x) = \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m} \ln h_{i,j}^{k,T}(f,x), \quad \sigma_{l,T,j}(f,x) = \sup_{m \geqslant l} s_{m,T,j}(f,x), \\
&\Omega_{T,j}^{(i)}(f,x) = \inf_{l \in \mathbb{N}} \sigma_{l,T,j}(f,x).
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

Для каждого $T \in \mathbb{N}$ определим функцию $\Omega_T^{(i)} \colon S \times M \to \overline{\mathbb{R}}$ равенством

$$
\Omega_T^{(i)}(f,x) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m} \ln |df^T|_{df^{(k-1)T}E_i(f,x)}|, \quad f \in S, \quad x \in M,
$$

и покажем, что

$$
\Omega_T^{(i)}(f,x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \Omega_{T,j}^{(i)}(f,x), \quad f \in S, \quad x \in M. \tag{5.35}
$$

Зафиксируем $T > 0$, $f \in S$ и $x \in M$. Заметим, что для всяких $j, k \in \mathbb{N}$ из определения функции $h_{i,j}^{k,T}$ вытекает равенство $h_{i,j}^{k,T}(f,x) = |df^T|_{df^{(k-1)T}E_{i,j}(f,x)}|$. Далее, для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено включение $E_i(f,x) \subset E_{i,j}(f,x)$, причём для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ оно превращается в равенство, поскольку множество значений сужения функции $\lambda$ на касательное пространство $T_xM$ конечно [133]. Наконец, в силу определения верхнего предела справедливо равенство

$$
\Omega_{T,j}^{(i)}(f,x) = \varlimsup_{m\to\infty} s_{m,T,j}(f,x).
$$

3. Согласно п. 1 для каждой из функций $\ln h_{i,j}^{k,T}$, $j,k,T \in \mathbb{N}$, прообраз всякого луча $(r,+\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, является множеством типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$, поэтому в силу [207, § 37, I] тем же свойством обладают и их суммы $s_{m,T,j}$, а также функции $\sigma_{l,T,j}$, $m,T,l,j \in \mathbb{N}$. Из равенства $[r,+\infty] = \bigcap_{s\in\mathbb{N}}(r-1/s,+\infty]$ и свойств прообраза множества получаем, что прообраз всякого луча $[r,+\infty]$ для каждой из функций $\sigma_{l,T,j}$, $l,T,j \in \mathbb{N}$, есть множество типа $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}$. По лемме 1.12 имеем включение $\mathscr{G}_{\delta\sigma} \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma}$. Таким образом, указанные функции принадлежат классу $(\mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma}, \mathscr{G}_{\delta\sigma\delta})$. Согласно [207, § 39, 1–2] последний совпадает с третьим классом Бэра $\mathfrak{F}_3(S \times M)$. Из определения центральных показателей и равенств (5.34) и (5.35) вытекает представление

$$
\Omega^{(i)}(f,x) = \inf_{(l,T,j)\in\mathbb{N}^3} \sigma_{l,T,j}(f,x), \quad f \in S, \quad x \in M.
$$

Переписывая его в виде

$$
\Omega^{(i)}(f,x) = \lim_{k\to\infty} \min_{l+T+j \leqslant k} \sigma_{l,T,j}(f,x), \quad f \in S, \quad x \in M,
$$

получаем, что функция $\Omega^{(i)}$ является пределом невозрастающей последовательности функций третьего класса Бэра и, следовательно, принадлежит четвёртому классу.

4. Рассмотрим отдельно случай $i = n$. Определим функции $h^{k,T}$, $s_{m,T}$, $\sigma_{l,T}$, $k, l, m, T \in \mathbb{N}$, из $S \times M$ в $\overline{\mathbb{R}}$ при помощи равенств ($f \in S$, $x \in M$)

$$h^{k,T}(f,x) = \sup_{\xi \in T_x M \setminus \{0\}} g^{k,T}(f,\xi), \quad s_{m,T}(f,x) = \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln h^{k,T}(f,x),$$
$$\sigma_{l,T}(f,x) = \sup_{m \geqslant l} s_{m,T}(f,x).$$

Как отмечено в п. 1, для всякого $r \in \mathbb{R}$ множество $G_r^{k,T}$ открыто, поэтому из первого утверждения леммы 5.12 получаем, что множество

$$p(G_r^{k,T}) = \{(f,x) \in S \times M : h^{k,T}(f,x) > r\}$$

также открыто. Таким образом, функции $h^{k,T}$ являются полунепрерывными снизу, поэтому тем же свойством обладают и функции $\ln h^{k,T}$, а также в силу [207, § 37, I] их суммы $s_{m,T}$ и функции $\sigma_{l,T}$, $k, m, T, l \in \mathbb{N}$. Из определения верхнего предела получаем цепочку

$$\Omega^{(n)}(f,x) = \inf_{T \in \mathbb{N}} \varlimsup_{m \to \infty} s_{m,T}(f,x) = \lim_{k \to \infty} \min_{l+T \leqslant k} \sigma_{l,T}(f,x), \quad f \in S, \quad x \in M.$$

Поскольку всякая полунепрерывная функция принадлежит первому классу Бэра [207, § 38, I], учитывая [207, § 37, III], получаем, что функция $\Omega^{(n)}$ есть предел невозрастающей последовательности функций первого класса и, следовательно, принадлежит второму классу (и даже более того, является верхнепредельной). Теорема доказана.

## 5.5 Бэровский класс мажорант условных показателей Боля линейной системы

Пусть $M$ — метрическое пространство. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.36}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, с непрерывной матричнозначной функцией $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$.

В докладе [145] В.М. Миллионщиков поставил задачу о нахождении для всяких $m, n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_n$ и открытого множества $M \subset \mathbb{R}^m$ наименьшего класса Бэра, содержащего множество функций $\{\overline{\beta}_i(\cdot\,; A) : A \in \widetilde{\mathfrak{C}}^n(M)\}$, где черта сверху обозначает минимальную полунепрерывную сверху мажоранту в равномерной топологии (см. с. 35).

Отметим (как это сделано в [145]), что наибольший из показателей Боля $\beta_n\colon \widetilde{\mathfrak{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ является полунепрерывным сверху в равномерной топологии [68, теорема 4.6]. Таким образом, $\overline{\beta}_n(A) = \beta_n(A)$ при всех $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Из теоремы 5.2 следует, что для любых $n \in \mathbb{N}$, метрического пространства $M$ и семейства $A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$ функция $\beta_n(\cdot\,; A)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит второму классу Бэра. В замечании 5.1 для всех $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_n$ построено семейство $A \in \mathcal{C}^n([0,1])$, для которого функция $\beta_i(\cdot\,; A)$ не принадлежит первому классу Бэра. Положим $M = \mathbb{R}$ и определим семейство $\tilde{A} \in \mathcal{C}^n(M)$ равенством $\tilde{A}(t,\mu) = A(t, \pi^{-1}\arccos\cos(\pi\mu))$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Очевидно, что функция $\beta_i(\cdot\,; \tilde{A})\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тоже не принадлежит первому классу Бэра.

Следующая теорема показывает, что рассмотрение (минимальных полунепрерывных сверху в равномерной топологии) мажорант всех условных показателей Боля, кроме старшего, имеет смысл.

**Теорема 5.11.** *Для любых $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ функционал $\beta_i\colon \mathcal{M}^n_U \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывным сверху.*

**Доказательство.** Рассмотрим систему $\tilde{A} \in \mathcal{M}^n$, задаваемую равенством

$$\tilde{A}(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{-1,\ldots,-1}_{i-1}, A(t)+Q(t), \underbrace{1,\ldots,1}_{n-i-1}], \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ построены в примере 1.3. Положим $L_i = \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1}\}$. Тогда (см. пример 1.3) для любого решения $x(\cdot)$ системы $\tilde{A}$, удовлетворяющего условию $x(0) \in L_i$, имеем $|x(t)| \leqslant |x(s)|$ для всех $t \geqslant s \geqslant 0$. Следовательно, $\beta_i(\tilde{A}) \leqslant \varkappa_g(\tilde{A}, L_i) \leqslant 0$. С другой стороны, для любого $x \in S(\tilde{A})$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $x(t^2_{k-1}) = x(t^1_{k-1})$, причём $t^2_{k-1} - t^1_{k-1} = \delta_k = k$, откуда получаем, что $\beta_i(\tilde{A}) \geqslant 0$. Таким образом, $\beta_i(\tilde{A}) = 0$.

Определим теперь матричнозначную функцию $Q \in \mathcal{M}^n$ при помощи равенства

$$\tilde{Q}(t) = \operatorname{diag}[\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1}, -Q(t), \underbrace{0,\ldots,0}_{n-i-1}], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Положим $\tilde{L}_i = \operatorname{span}\{e_i,\ldots,e_n\}$ и покажем, что для каждого ненулевого решения системы $\tilde{A}+\tilde{Q}$, удовлетворяющего условию $x(0) \in \tilde{L}_i$ выполнено

$$\varkappa_g(\tilde{A}+\tilde{Q}, \operatorname{span} x(0)) \geqslant 1. \tag{5.37}$$

Пусть $x(0) = \alpha e_i + \beta e_{i+1} + \gamma h$, где $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $h \in \operatorname{span}\{e_{i+2},\ldots,e_n\}$, $|x(0)| = |h| = 1$. Тогда если $\gamma \neq 0$, то справедлива цепочка

$$\frac{|x(t_k)|}{|x(t_{k-1})|} \geqslant \frac{|\gamma| e^{t_k}}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|e^{t_{k-1}}} \geqslant \frac{|\gamma|}{3} e^{t_k - t_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда получаем (5.37). Если $\gamma = 0 \neq \alpha$, то

$$\frac{|x(t_{k-1}^1)|}{|x(t_{k-1})|} \geqslant \frac{|\alpha|e^{t_{k-1}^1} - t_{k-1}}{|\alpha| + |\beta|} \geqslant \frac{|\alpha|}{2} e^{t_{k-1}^1 - t_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда также получаем (5.37). Наконец, если $\gamma = \alpha = 0 \neq \beta$, то

$$\frac{|x(t_{k-1}^3)|}{|x(t_{k-1}^2)|} = e^{t_{k-1}^3 - t_{k-1}^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда снова следует (5.37). Замечая, что всякое $i$-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ имеет с $(n-i+1)$-мерным подпространством $\tilde{L}_i$ нетривиальное пересечение, приходим к выводу, что $\beta_i(\tilde{A} + \tilde{Q}) \geqslant 1$.

Тогда последовательность систем $\tilde{Q}_m$, $m \in \mathbb{N}$, задаваемая равенством

$$\tilde{Q}_m(t) = \theta(t - m)\tilde{Q}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m \in \mathbb{N},$$

где функция $\theta$ определена равенством (1.22), обладает свойствами:

$$1) \lim_{m\to\infty} \|\tilde{Q}_m\| = 0; \quad 2) \ \beta_i(\tilde{A} + \tilde{Q}_m) \geqslant 1.$$

Первое свойство вытекает из равенства $\lim\limits_{t\to+\infty} |\tilde{Q}(t)| = 0$, а второе — из остаточности показателей Боля (см. леммы 1.11 и 1.3), поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ системы $\tilde{Q}_m$ и $\tilde{Q}$ совпадают на бесконечности. Следовательно,

$$\overline{\beta}_i(\tilde{A}) \geqslant 1 > \beta_i(\tilde{A}).$$

Заметим, что из неравенств (5.1) и (5.3) вытекает, что $\overline{\beta}_i(\tilde{A}) \leqslant 1$, и, таким образом, $\overline{\beta}_i(\tilde{A}) = 1$. Теорема доказана.

Следующие две теоремы содержат полное решение задачи В.М. Миллионщикова о мажорантах показателей Боля.

**Теорема 5.12.** *Для любых $n \geqslant 2$ и $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ функционал $\overline{\beta}_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}_C^n \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельным и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

**Доказательство.** По лемме 1.11 функционал $\beta_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ является слабо ляпуновским инвариантом, а по теореме 5.2 он является верхнепредельным. Утверждение вытекает теперь из теоремы 3.1. Теорема доказана.

**Теорема 5.13.** *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_n$ и открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ существует непрерывное отображение $A\colon \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}^{n\times n}$, такое, что функция $\overline{\beta}_i(\cdot\,; A)$ не принадлежит первому классу Бэра.*

**Доказательство.** Выберем произвольно и зафиксируем точку $x_0 \in U$. Так как $U$ открыто, оно содержит некоторый замкнутый шар с центром в точке $x_0$ радиусом $r_0 > 0$. Определим семейство $\tilde{A} \in \mathcal{C}^n(U)$ равенством $\tilde{A}(t, \mu) = A(t, f(\mu))$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in U$, где функция $f\colon U \to [0, 1]$ задаётся равенством $f(\mu) = \sin^2(\pi(2r_0)^{-1}|\mu - x_0|)$, $\mu \in U$, а $A(\cdot, \cdot)$ — семейство, рассмотренное в замечании 5.1 (ниже мы будем пользоваться введёнными там обозначениями).

Отметим, что условные показатели Боля являются слабо ляпуновскими инвариантами (см. лемму 1.11), поэтому (см. лемму 1.10) их мажоранты обладают тем же свойством и, следовательно (см. лемму 1.3), являются остаточными функционалами, т. е. принимают одинаковые значения для систем, совпадающих на бесконечности.

Если $f(\mu) \in M_1$, то $\tilde{A}(t, \mu) = O_n$ для всех достаточно больших $t$, поэтому при каждом $i \in \mathbb{N}_n$ имеем $\overline{\beta}_i(\tilde{A}(\cdot\,, \mu)) = \overline{\beta}_i(O_n) = 0$. Поясним последнее равенство. В силу неравенств (5.1) и (5.3) при каждом $i \in \mathbb{N}_n$ имеем

$$\beta_i(Q) \leqslant \|Q\|, \quad Q \in \mathcal{M}^n,$$

откуда, переходя к верхнему пределу при $Q \to 0$, получаем $\overline{\beta}_i(O_n) \leqslant 0$. С другой стороны, $\overline{\beta}_i(O_n) \geqslant \beta_i(O_n) \geqslant \lambda_i(O_n) = 0$.

Если $f(\mu) \in M_2$, то $\tilde{A}(t, \mu) = E_n$ для всех достаточно больших $t$ и, следовательно, при каждом $i \in \mathbb{N}_n$ имеем $\overline{\beta}_i(A(\cdot\,, \mu)) = \overline{\beta}_i(E_n) = 1$. Поясним последнее равенство. В силу неравенств (5.1) и (5.3) при каждом $i \in \mathbb{N}_n$ имеем

$$\beta_i(E_n + Q) \leqslant \|E_n + Q\| \leqslant 1 + \|Q\|, \quad Q \in \mathcal{M}^n,$$

откуда, переходя к верхнему пределу при $Q \to 0$, получаем $\overline{\beta}_i(E_n) \leqslant 1$. С другой стороны, $\overline{\beta}_i(E_n) \geqslant \beta_i(E_n) \geqslant \lambda_i(E_n) = 1$.

Рассмотрим множество

$$S \equiv \{x_0 + ae_1 : a \in [0, r_0]\} \subset U.$$

Сужение функции $f$ на множество $S$ является гомеоморфизмом $S$ на $[0, 1]$, поэтому множества $f^{-1}(M_1) \bigcap S$ и $f^{-1}(M_2) \bigcap S$ плотны в $S$. С учётом предыдущего получаем, что сужение функции $\overline{\beta}_i(\cdot\,; \tilde{A})$ на множество $S$ всюду разрывно и, следовательно [207, § 38, V], не принадлежит первому классу Бэра. Тем более, первому классу не принадлежит сама функция $\overline{\beta}_i(\cdot\,; \tilde{A})$. Теорема доказана.

# Глава 6

## Связь классов Бэра ляпуновских инвариантов в равномерной и компактно-открытой топологиях

Как уже было отмечено ранее, на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ линейных систем принято рассматривать одну из двух топологий: равномерную или компактно-открытую (см. раздел 1.2). Первая топология используется для описания реакции тех или иных характеристик поведения решений системы на возмущение её коэффициентов, а также для определения некоторых таких характеристик (см. раздел 1.6). Вторая по существу отвечает часто встречающейся ситуации, когда коэффициенты системы непрерывно зависят от некоторого параметра (см. лемму 1.5).

Возникает естественный вопрос: как могут быть связаны наименьшие номера бэровских классов, которым принадлежит функционал на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, в одной и другой топологиях? Если не наложить на функционал никаких дополнительных ограничений, то нетрудно показать, что никакой связи, кроме естественной, вытекающей из неравенства

$$\rho_C(A, B) \leqslant \rho_U(A, B), \quad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n, \tag{6.1}$$

между этими номерами нет.

Поскольку основным предметом изучения современной теории показателей Ляпунова являются не произвольные функционалы на пространстве систем, а инварианты действия группы (слабо) ляпуновских преобразований, мы ограничимся рассмотрением только слабо ляпуновских инвариантов, заданных на всём пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, которые ниже для краткости будем называть *асимптотическими инвариантами.* В данной главе мы получим ответ на следующий вопрос: для каких $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \omega_1]$ найдётся асимптотический инвариант, принадлежащий классу $\mathfrak{F}^0_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U) \cap \mathfrak{F}^0_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$, сужение которого на подпространство $\mathcal{M}^n$ принадлежит классу $\mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U) \cap \mathfrak{F}^0_\beta(\mathcal{M}^n_C)$ (см. соответствующие определения в разделе 1.9)?

Добавочное ограничение, связанное с природой рассматриваемых функционалов, содержит следующее известное

**Предложение 6.1** ( [38]). *Классы $\mathfrak{F}_1(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ и $\mathfrak{F}_1(\mathcal{M}^n_C)$ не содержат остаточных функционалов, отличных от констант.*

Учитывая лемму 1.3, получаем следующее

**Следствие 6.1.** *Классы $\mathfrak{F}^0_1(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ и $\mathfrak{F}^0_1(\mathcal{M}^n_C)$ не содержат слабо ляпуновских инвариантов.*

Приведем теперь (вероятно, весьма неполный) список четвёрок $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, для которых известен какой-нибудь асимптотический инвариант, удовлетворяющий сформулированным выше условиям. Положим

$$\tau(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr} A(s)\,ds, \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

| $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ | Пример асимптотического инварианта |
|---|---|
| $(0,0,0,0)$ | тождественный 0 |
| $(0,2,0,2)$ | $\tau(\cdot)$ |
| $(1,2,1,2)$ | индикатор множества $[\tau < 0]$ |
| $(1,3,1,3)$ | индикатор множества $[\tau \leqslant 0]$ |
| $(2,2,2,2)$ | $\lambda_n(\cdot)$, $n \geqslant 2$ |
| $(3,3,3,3)$ | индикатор множества $[\lambda_n \leqslant 0]$, $n \geqslant 2$ |

Заметим, что все перечисленные выше функционалы являются обобщённо ляпуновскими инвариантами.

Очевидно, что наименьший номер бэровского класса функционала на каком-либо пространстве не меньше аналогичного номера для его сужения на подпространство, а также, что номер бэровского класса функционала на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ $(\mathcal{M}^n_C)$ не меньше аналогичного номера на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ $(\mathcal{M}^n_U)$, поскольку равномерная топология "тоньше" компактно-открытой, как следует из неравенства (6.1).

Следующая теорема устанавливает отсутствие какой-либо связи, кроме естественных неравенств, отмеченных выше и тех, что вытекают из следствия 6.1, между наименьшими номерами бэровских классов в компактно-открытой и равномерной топологиях, которым принадлежат асимптотический инвариант и его сужение на подпространство систем с ограниченными коэффициентами.

**Теорема 6.1.** *Асимптотический инвариант $\varphi$, удовлетворяющий для заданных порядковых чисел $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in [0,\omega_1]$ условиям:*

*1)* $\varphi \in \mathfrak{F}^0_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U) \cap \mathfrak{F}^0_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$;

*2)* $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U) \cap \mathfrak{F}^0_\beta(\mathcal{M}^n_C)$,

*существует тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$\alpha \leqslant \min\{\beta,\gamma\}, \quad \max\{\beta,\gamma\} \leqslant \delta, \quad \beta \neq 1, \quad \delta \neq 1.$$

Наложив более жесткие ограничения на номера классов, можно построить и обобщённо ляпуновский инвариант, удовлетворяющий условиям 1) и 2) выше.

**Теорема 6.2.** *Если для порядковых чисел $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in [0,\omega_1]$ выполнены соотношения*

$$\alpha \leqslant \min\{\beta-2,\gamma\}, \quad \max\{\beta,\gamma+2\} \leqslant \delta,$$

*то существует обобщённо ляпуновский инвариант $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы 6.1.*

**Замечание 6.1.** Автору неизвестно, существует ли обобщённо ляпуновский инвариант $\varphi \in \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U) \cap \mathfrak{F}^0_\beta(\mathcal{M}^n_C)$ при $\beta = \alpha + 1 \geqslant 3$ и при $\beta = \alpha \geqslant 4$.

Следующие два раздела содержат вспомогательные построения, используемые в доказательствах теорем 1–2, которые помещены в отдельный раздел 6.3.

## 6.1 Построение обобщённо ляпуновского инварианта, непрерывного на $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ и имеющего заданный класс Бэра на $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$

Всюду ниже условимся писать $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_C$, $\mathcal{E}_U$ и $\mathcal{U}$ вместо $\widetilde{\mathcal{M}}^1$, $\widetilde{\mathcal{M}}^1_C$, $\widetilde{\mathcal{M}}^1_U$ и $\mathcal{B}^1_1$ соответственно (см. раздел 1.2).

**Лемма 6.1.** *Функционал $\vartheta\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, определяемый равенством*

$$\vartheta(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \min\left\{\frac{1}{t}\left|\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right|, 4\right\}, \qquad x \in \mathcal{E},$$

*обладает следующими свойствами:*

*1)* $\vartheta(-x) = \vartheta(x)$, $x \in \mathcal{E}$;

*2)* $0 \leqslant \vartheta(x) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|$, $x \in \mathcal{E}$;

*3)* $\vartheta(x+y) \leqslant \vartheta(x) + \vartheta(y)$, $x, y \in \mathcal{E}$;

*4) для каждого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathcal{E} : \vartheta(x) < r\}$ является множеством типа $\mathscr{F}_\sigma$ в пространстве $\mathcal{E}_C$;*

*5) для любых непустого $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ и $x, y \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство*

$$|\inf_{z\in\mathcal{S}} \vartheta(x-z) - \inf_{z\in\mathcal{S}} \vartheta(y-z)| \leqslant \vartheta(x-y).$$

Свойства 1)-3) вытекают непосредственно из определения. Докажем свойство 4). Для всякого $x \in \mathcal{E}$ имеем

$$\vartheta(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l\in\mathbb{N}} \vartheta_{kl}(x), \text{ где } \vartheta_{kl}(x) = \max_{t\in[k,k+l]} \min\left\{\frac{1}{t}\left|\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right|, 4\right\}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

откуда для каждого $r \in \mathbb{R}$ получаем

$$\{x \in \mathcal{E} : \vartheta(x) < r\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathcal{E} : \vartheta_{kl}(x) \leqslant r - \frac{1}{m}\right\}.$$

Множества, стоящие под знаком счётного пересечения, а значит, и результаты пересечения, замкнуты в пространстве $\mathcal{E}_C$ в силу непрерывности функционалов $\vartheta_{kl}\colon \mathcal{E}_C \to \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$. Следовательно, множества, стоящие под знаком счётного объединения по $k \in \mathbb{N}$, а значит, и сам результат этого объединения, являются множествами типа $\mathscr{F}_\sigma$ в пространстве $\mathcal{E}_C$.

Установим свойство 5). В силу свойства 3) для любых $x, y, z \in \mathcal{E}$ имеем неравенства

$$\vartheta(x-z) \leqslant \vartheta(x-y) + \vartheta(y-z), \quad \vartheta(y-z) \leqslant \vartheta(y-x) + \vartheta(x-z).$$

Переходя в них к точной нижней грани по $z \in \mathcal{S}$, получим неравенства

$$\inf_{z\in\mathcal{S}} \vartheta(x-z) \leqslant \vartheta(x-y) + \inf_{z\in\mathcal{S}} \vartheta(y-z), \quad \inf_{z\in\mathcal{S}} \vartheta(y-z) \leqslant \vartheta(y-x) + \inf_{z\in\mathcal{S}} \vartheta(x-z),$$

откуда вытекает требуемое. Лемма доказана.

**Определение 6.1.** Через $\mathbb{B}_2$ будем обозначать *пространство Бэра*, построенное над множеством из двух символов, т. е. пространство, точками которого являются всевозможные последовательности из нулей и единиц, с метрикой $d$, заданной равенством $d(a,b) = 1/k$ при $a \neq b$, где $k = \min\{j : a_j \neq b_j\}$.

Как известно, $\mathbb{B}_2$ является полным сепарабельным компактным пространством мощности континуум, гомеоморфным канторову совершенному множеству.

**Лемма 6.2.** *Существуют подпространство $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ и гомеоморфизм $\Psi \colon \mathbb{B}_2 \to \mathcal{P}$, обладающие следующими свойствами:*

1) *для всяких различных $x, y \in \mathcal{P}$ выполнено неравенство $\vartheta(x-y) \geqslant 1/2$;*

2) *для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо утверждение: если первые $k$ элементов последовательностей $a, b \in \mathbb{B}_2$ совпадают, то функции $\Psi(a)$ и $\Psi(b)$ совпадают на промежутке $[0, k!)$.*

**Доказательство.** Выберем произвольно и зафиксируем такую последовательность $\tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, у которой множество частичных пределов совпадает с множеством $\mathbb{N}$, причём $\tau_k \leqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (например, годится последовательность $\tau_k = k - [\sqrt{k}\,]^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$, где $[k]$ обозначает целую часть числа $k$). Далее, определим последовательность $j \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ равенством $j_k = k!$, $k \in \mathbb{N}$ (на самом деле, годится любая возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию $\lim_{k\to\infty} j_{k-1}/j_k = 0$. Положим ещё $j_0 = 0$.

Определим теперь отображение $\Psi \colon \mathbb{B}_2 \to \mathcal{U}$ следующим образом: последовательности $a \in \mathbb{B}_2$ поставим в соответствие функцию $\mathbb{R}_+ \to [0,1]$, задаваемую формулой

$$\Psi(a)(t) = |\sin \pi t| \cdot a_{\tau_k} \quad \text{при } t \in [j_{k-1}, j_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что множество $\mathcal{P} = \Psi(\mathbb{B}_2)$ обладает требуемыми свойствами. Пусть $a, b \in \mathbb{B}_2$ и $a_m \neq b_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. По выбору последовательности $\tau$ найдётся такая её подпоследовательность $(\tau_{k_s})$, что $\tau_{k_s} = m$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива цепочка

$$\vartheta(\Psi(a) - \Psi(b)) \geqslant \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{j_{k_s}} \left( \int_{j_{k_s-1}}^{j_{k_s}} |\sin \pi\tau|\, d\tau - \int_0^{j_{k_s-1}} |\sin \pi\tau|\, d\tau \right) = \\ = \frac{2}{\pi} \lim_{s\to\infty} \frac{j_{k_s} - 2j_{k_s-1}}{j_{k_s}} > \frac{1}{2},$$

откуда следуют инъективность отображения $\Psi$ и требуемое свойство $\mathcal{P}$.

Заметим, что если первые $k$ элементов последовательностей $a, b \in \mathbb{B}_2$ совпадают, то функции $\Psi(a)$ и $\Psi(b)$ совпадают на промежутке $[0, j_k)$. Следовательно, отображение $\Psi$ непрерывно, а в силу компактности $\mathbb{B}_2$ ещё и замкнуто. Таким образом, $\Psi\colon \mathbb{B}_2 \to \mathcal{P}$ — гомеоморфизм. Лемма доказана.

Зададим отображение $\oplus\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ формулой $\oplus(x, y) = x + y$, $x, y \in \mathcal{E}$.

**Лемма 6.3.** *Пусть $\mathcal{K}$ — компактное подмножество $\mathcal{E}_C$, $\mathcal{X} \in \mathscr{F}_\alpha(\mathcal{K})$ для некоторого порядкового числа $\alpha \in [1, \omega_1)$, $\mathcal{Y} \in \mathscr{F}_\sigma(\mathcal{E}_C)$, а сужение $\oplus|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ является инъекцией. Тогда $\oplus(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \in \mathscr{F}_\alpha(\mathcal{E}_C)$.*

**Доказательство.** Докажем утверждение индукцией по $\alpha \geqslant 1$. При $\alpha = 1$ по условию имеем $\mathcal{X} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_k$, где $\mathcal{X}_k$, $k \in \mathbb{N}$, — замкнутые в $\mathcal{K}$, и следовательно, компактные множества. По свойствам декартова произведения и образа множества имеем

$$\oplus(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \oplus\left( \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_k \times \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_l \right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \oplus(\mathcal{X}_k \times \mathcal{Y}_l).$$

Покажем, что для всяких $k, l \in \mathbb{N}$ множество $\oplus(\mathcal{X}_k \times \mathcal{Y}_l)$ замкнуто. Действительно, пусть $(z_i)$ — сходящаяся последовательность точек множества $\oplus(\mathcal{X}_k \times \mathcal{Y}_l)$:

$$z_i = x_i + y_i, \quad x_i \in \mathcal{X}_k, \quad y_i \in \mathcal{Y}_l, \quad i \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{i\to\infty} z_i = z. \tag{6.2}$$

Пользуясь компактностью множества $\mathcal{X}_k$, выберем из последовательности $(x_i)$ сходящуюся подпоследовательность $(x_{i_s})$. Тогда подпоследовательность $(y_{i_s})$ будет тоже сходящейся в силу (6.2). Благодаря замкнутости множеств $\mathcal{X}_k$ и $\mathcal{Y}_l$ будем иметь

$$x \equiv \lim_{s\to\infty} x_{i_s} \in \mathcal{X}_k \quad \text{и} \quad y \equiv \lim_{s\to\infty} y_{i_s} \in \mathcal{Y}_l,$$

причем $z = x + y$ в силу (6.2). Таким образом, $z \in \oplus(\mathcal{X}_k \times \mathcal{Y}_l)$, и замкнутость множества $\oplus(\mathcal{X}_k \times \mathcal{Y}_l)$, а вместе с ней и утверждение леммы для $\alpha = 1$ установлены.

Предположим, что утверждение справедливо для всех $\alpha < \alpha'$, и покажем, что оно верно и при $\alpha = \alpha'$. Действительно, пусть $\mathcal{X} \in \mathscr{F}_{\alpha'}(\mathcal{K})$. Тогда, в зависимости от того, нечётно число $\alpha'$ или чётно, множество $\mathcal{X}$ является или объединением, или пересечением счётной последовательности множеств $\mathcal{X}_l$, $l \in \mathbb{N}$, каждое из которых принадлежит какому-либо классу $\mathscr{F}_\xi(\mathcal{K})$, где $\xi < \alpha'$, т.е. в первом случае имеем представление $\mathcal{X} = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_l$, а во втором — представление $\mathcal{X} = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_l$.

По свойствам декартова произведения и образа множества получаем в первом случае цепочку

$$\oplus(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \oplus(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_l \times \mathcal{Y}) = \oplus(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} (\mathcal{X}_l \times \mathcal{Y})) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \oplus(\mathcal{X}_l \times \mathcal{Y}),$$

а во втором, используя инъективность сужения $\oplus$ на $\mathcal{K} \times \mathcal{Y}$ и [106, § 3, III, равенство (2'a)], — цепочку

$$\oplus(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \oplus(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_l \times \mathcal{Y}) = \oplus(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} (\mathcal{X}_l \times \mathcal{Y})) = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \oplus(\mathcal{X}_l \times \mathcal{Y}),$$

откуда, используя предположение индукции, получаем требуемое. Лемма доказана.

Введём следующее обозначение. Положим для каждого порядкового числа $\alpha \in [1, \omega_1)$

$$\pi(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1, & \text{если } \alpha \text{ конечно}, \\ \alpha, & \text{если } \alpha \text{ бесконечно}. \end{cases}$$

Отметим, что если $\alpha < \beta$, то $\pi(\alpha) + 1 \leqslant \pi(\beta)$.

**Лемма 6.4.** *Для каждого порядкового числа $\nu \in [2, \omega_1]$ существует функционал $\xi_\nu \colon \mathcal{E} \to [0,1]$, обладающий следующими свойствами:*

1) *для любых $x, y \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих условию $\vartheta(x-y) = 0$, выполнено равенство $\xi_\nu(x) = \xi_\nu(y)$ (определение $\vartheta$ см. в лемме 6.1);*
2) *$\xi_\nu$ является непрерывным на $\mathcal{E}_U$;*
3) *если $\nu < \omega_1$, то $\xi_\nu \in \mathfrak{F}_\nu(\mathcal{E}_C)$;*
4) *$\xi_\nu|_{\mathcal{P}} \notin \mathfrak{F}_{\nu'}(\mathcal{P})$ для каждого $\nu' < \nu$, где $\mathcal{P}$ — пространство, построенное в лемме 6.2;*
5) *если $\vartheta(x) \geqslant 2$, то $\xi_\nu(x) = 0$.*

**Доказательство.** В силу [250, следствие 3.6.8] для всякого $\nu < \omega_1$ найдётся множество $\mathcal{S}_\nu \in \mathscr{F}_{\pi(\nu)}(\mathcal{P}) \backslash \mathscr{G}_{\pi(\nu)}(\mathcal{P})$, а в силу [250, теорема 4.1.5] найдётся неборелевское множество $\mathcal{S}_{\omega_1} \subset \mathcal{P}$, не принадлежащее ни одному из классов $\mathscr{G}_\alpha(\mathcal{P})$, $\alpha < \omega_1$.

Положим

$$\xi_\nu(x) = \max\{\, 1 - 4 \cdot \inf_{z\in\mathcal{S}_\nu} \vartheta(x - z), 0 \,\}, \;\; x \in \mathcal{E}. \tag{6.3}$$

Свойство 1) вытекает из свойства 5) функционала $\vartheta$, а свойство 2) — из свойств 5) и 2) того же функционала.

Для доказательства свойства 3) покажем сначала, что для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathcal{E} : \xi_\nu(x) > r\}$ принадлежит классу $\mathscr{F}_{\pi(\nu)}(\mathcal{E}_C)$. Для $r < 0$ это множество совпадает со всем $\mathcal{E}$, а для $r \geqslant 1$ — пусто, поскольку $0 \leqslant \xi_\nu(x) \leqslant 1$ при всех $x \in \mathcal{E}$. Для $r \in [0, 1)$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \{x \in \mathcal{E} : \xi_\nu(x) > r\} = \{x \in \mathcal{E} : \inf_{z \in \mathcal{S}_\nu} \vartheta(x - z) < (1 - r)/4\} = \\ = \{x \in \mathcal{E} : \exists z \in \mathcal{S}_\nu \;\; \vartheta(x - z) < (1 - r)/4\} = \{x \in \mathcal{E} : \exists z \in \mathcal{S}_\nu \;\; x - z \in \mathcal{D}_r\} = \\ = \{x \in \mathcal{E} : \exists z \in \mathcal{S}_\nu \;\; \exists w \in \mathcal{D}_r \;\; x = z + w\} = \oplus(\mathcal{S}_\nu \times \mathcal{D}_r), \end{aligned} \tag{6.4}$$

где обозначено $\mathcal{D}_r = \{x \in \mathcal{E} : \vartheta(x) < (1-r)/4\}$. Проверим, что для множества $\oplus(\mathcal{S}_\nu \times \mathcal{D}_r)$ выполнены условия леммы 6.3. Действительно, $\mathcal{P}$ гомеоморфно $\mathbb{B}_2$, а значит, компактно. В силу свойства 4) функционала $\vartheta$ имеем включение $\mathcal{D}_r \in \mathscr{F}_\sigma(\mathcal{E}_C)$. Наконец, убедимся, что $\oplus\,|_{\mathcal{P}\times\mathcal{D}_r}$ — инъекция. В самом деле, пусть для некоторых точек $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ и $b_1, b_2 \in \mathcal{D}_r$ выполнено равенство $p_1 + b_1 = p_2 + b_2$, которое мы перепишем в виде $p_1 - p_2 = b_2 - b_1$. По свойствам 1) и 3) функционала $\vartheta$ получаем цепочку

$$\vartheta(p_1 - p_2) = \vartheta(b_2 - b_1) \leqslant \vartheta(b_1) + \vartheta(b_2) < 2 \cdot \frac{1 - r}{4} \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда $\vartheta(p_1 - p_2) < 1/2$. В силу свойств множества $\mathcal{P}$ из полученного неравенства заключаем, что $p_1 = p_2$, но тогда и $b_1 = b_2$. Применяя лемму 6.3 к правой части цепочки (6.4), получим, что множество $\{x : \xi_\nu(x) > r\}$ принадлежит классу $\mathscr{F}_{\pi(\nu)}(\mathcal{E}_C)$.

В силу [106, § 30, III] указанное множество является двусторонним класса $\pi(\nu) + 1$ в пространстве $\mathcal{E}_C$. Но тогда и его дополнение $\{x : \xi_\nu(x) \leqslant r\}$ является двусторонним класса $\pi(\nu) + 1$ в том же пространстве, а множество

$$\{x : \xi_\nu(x) < r\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{x : \xi_\nu(x) \leqslant r - 1/m\}$$

является множеством аддитивного класса $\pi(\nu) + 1$, откуда по теореме [106, § 31, II, теорема 1] получаем включение $\xi_\nu \in \mathfrak{B}_{\pi(\nu)+1}(\mathcal{E}_C)$. Требуемое вытекает теперь из теоремы Лебега–Хаусдорфа 1.1.

Для доказательства 4) заметим, что из формулы (6.3) и свойств множества $\mathcal{P}$ следует, что сужение $\xi_\nu|_{\mathcal{P}}$ является индикатором множества $\mathcal{S}_\nu$. Зафиксируем теперь произвольное $\nu' < \nu$ и предположим, что $\xi_\nu|_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{F}_{\nu'}(\mathcal{P})$. Тогда в силу теоремы Лебега–Хаусдорфа 1.1 получили бы $\xi_\nu|_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{B}_{\pi(\nu')+1}(\mathcal{P})$. Последнее невозможно в силу [106, § 31, I, теорема 1], поскольку по построению множество $\mathcal{S}_\nu$ при $\nu < \omega_1$ не является двусторонним класса $\pi(\nu)$ (и тем более, класса $\pi(\nu') + 1 \leqslant \pi(\nu)$) в пространстве $\mathcal{P}$, а при $\nu = \omega_1$ не является двусторонним никакого класса в том же пространстве.

Проверим свойство 5). Для всяких $x, z \in \mathcal{E}$ по свойству 3) функционала

$\vartheta$ имеем $\vartheta(x-z) \geqslant \vartheta(x)-\vartheta(z)$. Если $\vartheta(x) \geqslant 2$, то для всякого $z \in \mathcal{S}_\nu \subset \mathcal{U}$ из свойства 2) функционала $\vartheta$ получаем $\vartheta(x-z) \geqslant 1$. Следовательно, $\xi_\nu(x) = 0$. Лемма доказана.

**Лемма 6.5.** *Пусть $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ — произвольные фундаментальные матрицы систем $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ соответственно. Тогда*

$$\left|\int_0^t \operatorname{tr}(A(\tau)-B(\tau))\,d\tau\right| \leqslant n\max\{\ln|L(t)|, \ln|L^{-1}(t)|\} + |\ln|\det L(0)||, \quad t \geqslant 0, \tag{6.5}$$

*где $L(t) = X(t)Y^{-1}(t)$.*

**Доказательство.** В силу формулы Лиувилля-Остроградского для всякого $t \in \mathbb{R}_+$ имеем равенства

$$\det X(t) = \det X(0)\exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau\right),$$
$$\det Y(t) = \det Y(0)\exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} B(\tau)\,d\tau\right),$$

откуда получаем

$$\ln|\det L(t)| = \ln|\det L(0)| + \int_0^t \operatorname{tr}(A(\tau)-B(\tau))\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Используя оценки $|\det L(t)| \leqslant |L(t)|^n$ и $|L(t)|^{-1} \leqslant |L^{-1}(t)|$, получаем цепочку

$$\left|\int_0^t \operatorname{tr}(A(\tau)-B(\tau))\,d\tau\right| \leqslant n|\ln|L(t)|| + |\ln|\det L(0)|| \leqslant$$
$$\leqslant n\max\{\ln|L(t)|, \ln|L^{-1}(t)|\} + |\ln|\det L(0)||, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.6.** *Функционал $\widetilde{\vartheta}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \mathbb{R}_+$, задаваемый равенством*

$$\widetilde{\vartheta}(A) = \vartheta(\operatorname{tr} A(\cdot)/n), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

*где функционал $\vartheta$ определен в лемме 6.1, обладает следующими свойствами:*

*1) $\widetilde{\vartheta} \in \mathfrak{F}_0(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U) \cap \mathfrak{F}_2(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$;*

*2) $\{A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : \widetilde{\vartheta}(A) < r\} \in \mathscr{F}_\sigma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ для всякого $r \in \mathbb{R}$;*

*3) если $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ обобщённо ляпуновски эквивалентны, то выполнена цепочка равенств $\widetilde{\vartheta}(A-B) = \widetilde{\vartheta}(A) - \widetilde{\vartheta}(B) = 0$.*

*4) если $A \in \mathcal{B}^n_1$, то $\widetilde{\vartheta}(A) \leqslant 1$.*

**Доказательство.** Покажем сначала, что $\vartheta \in \mathfrak{F}_0(\mathcal{E}_U)$. Применяя свойство 5) функционала $\vartheta$ для $\mathcal{S} = \{0\}$, а затем свойство 2) того же функционала, получим цепочку неравенств

$$|\vartheta(x)-\vartheta(y)| \leqslant \vartheta(x-y) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(x-y)(t)|, \quad x,y\in\mathcal{E}, \tag{6.6}$$

из которой вытекает требуемое. Включение $\widetilde{\vartheta} \in \mathfrak{F}_0(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$ следует теперь из непрерывности отображения $\operatorname{tr}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_U \to \mathcal{E}_U$.

Включение $\widetilde{\vartheta} \in \mathfrak{F}_2(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ вытекает из равенства

$$\widetilde{\vartheta}(A) = \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} \widetilde{\vartheta}_{kl}(A), \quad A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

где

$$\widetilde{\vartheta}_{kl}(A) = \max_{t\in[k,k+l]} \min\left\{\frac{1}{nt}\left|\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau\right|, 4\right\}, \quad k,l\in\mathbb{N}.$$

Свойство 2) получается из свойства 4) функционала $\vartheta$ и непрерывности отображения $\operatorname{tr}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathcal{E}_C$ применением [106, § 31, III, теорема 1]. Свойство 4) вытекает из оценки $|\operatorname{tr} Y| \leqslant n|Y|$, справедливой для всякого $Y \in \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ и свойства 2) функционала $\vartheta$.

Наконец, проверим свойство 3). Пусть системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ обобщённо ляпуновски эквиваленты. Тогда для некоторых фундаментальных матриц $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем выполнено (1.15), где $L(t) = X(t)Y^{-1}(t)$. По лемме 6.5 имеем оценку (6.5). Деля на $nt$ и переходя к верхнему пределу при $t\to+\infty$, получим $\vartheta(\operatorname{tr} A(\cdot)/n - \operatorname{tr} B(\cdot)/n) = 0$, что в силу первого неравенства (6.6) даёт требуемое. Лемма доказана.

Определим отображение $\Upsilon\colon \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{M}}^n$ следующим образом: функции $a\in\mathcal{E}$ поставим в соответствие систему с матричнозначной функцией $a(\cdot)E_n$.

**Лемма 6.7.** *Для всякого порядкового числа $\nu \in [2,\omega_1]$ существует обобщённо ляпуновский инвариант $\zeta_\nu\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \mathbb{R}_+$, обладающий следующими свойствами:*

*1) $\zeta_\nu$ является непрерывным на $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$;*

*2) если $\nu<\omega_1$, то $\zeta_\nu \in \mathfrak{F}_\nu(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$;*

*3) $\zeta_\nu|_{\mathcal{B}^n_1} \notin \mathfrak{F}_{\nu'}(\mathcal{B}^n_1)$ для любого $\nu'<\nu$;*

*4) если $\widetilde{\vartheta}(A) \geqslant 2$, то $\zeta_\nu(A) = 0$* (см. определение $\widetilde{\vartheta}$ в лемме 6.6)*;*

*5) $\zeta_\nu \circ \Upsilon = \xi_\nu$, где $\xi_\nu$ — функционал, построенный в лемме 6.4.*

*Доказательство.* Положим $\zeta_\nu(A) = \xi_\nu(\operatorname{tr} A(\cdot)/n)$ для всякого $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$.

Свойство 1) выполнено в силу свойства 2) функционала $\xi_\nu$ и непрерывности отображения $\operatorname{tr}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_U \to \mathcal{E}_U$. Свойство 2) выполнено в силу свойства 3) функционала $\xi_\nu$ и непрерывности отображения $\operatorname{tr}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathcal{E}_C$. Свойство 4) вытекает из свойства 5) функционала $\xi_\nu$, а свойство 5) следует непосредственно из определений.

Докажем свойство 3). Предположим, что для некоторого $\nu' < \nu$ выполнено включение $\zeta_\nu|_{\mathcal{B}_1^n} \in \mathfrak{F}_{\nu'}(\mathcal{B}_1^n)$. Тогда, тем более, $\zeta_\nu|_{\Upsilon(\mathcal{P})} \in \mathfrak{F}_{\nu'}(\Upsilon(\mathcal{P}))$, где $\mathcal{P}$ — пространство, построенное в лемме 6.2, а $\Upsilon(\mathcal{P}) \subset \mathcal{B}_1^n$ наделено топологией подпространства. Учитывая свойство 5) и непрерывность отображения $\Upsilon\colon \mathcal{E}_C \to \widetilde{\mathcal{M}}_C^n$, получим, что $\zeta_\nu \circ \Upsilon|_{\mathcal{P}} = \xi_\nu|_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{F}_{\nu'}(\mathcal{P})$, что противоречит свойству 4) функционала $\xi_\nu$.

Обобщённо ляпуновская инвариантность $\zeta_\nu$ следует из свойства 3) функционала $\widetilde{\vartheta}$ и свойства 1) функционала $\xi_\nu$. Лемма доказана.

## 6.2 Построение слабо ляпуновского инварианта, принадлежащего одному и тому же заданному классу Бэра на $\widetilde{\mathcal{M}}_U^n$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_C^n$

Обозначим через $\mathcal{I}$ множество функций $f \in \mathcal{E}$, имеющих ограниченную на $\mathbb{R}_+$ первообразную.

**Лемма 6.8.** *Для каждого порядкового числа $\mu \in [2, \omega_1]$ существует функционал $\eta_\mu\colon \mathcal{E} \to \{0, 1\}$, обладающий свойствами:*

*1) если $\mu < \omega_1$, то $\eta_\mu \in \mathfrak{F}_\mu(\mathcal{E}_C)$;*

*2) $\eta_\mu|_{\mathcal{M}^1} \notin \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}_U^1)$ для всякого $\mu' < \mu$;*

*3) если $x - y \in \mathcal{I}$, то $\eta_\mu(x) = \eta_\mu(y)$.*

*4) если $\vartheta(x) \notin [2, 3]$, то $\eta_\mu(x) = 0$* (см. определение $\vartheta$ в лемме 6.1).

**Доказательство.** Обозначим через $\mathcal{K}$ множество всех постоянных функций $\mathbb{R}_+ \to [2, 3]$ с топологией, индуцированной из $\mathcal{E}_C$ (которая совпадает с топологией, индуцированной из $\mathcal{E}_U$). Отметим, что $\mathcal{K}$ гомеоморфно отрезку $[0, 1]$.

В силу [250, следствие 3.6.8] для всякого порядкового числа $\mu < \omega_1$ найдётся множество $\mathcal{S}_\mu \in \mathscr{F}_{\pi(\mu)}(\mathcal{K}) \setminus \mathscr{G}_{\pi(\mu)}(\mathcal{K})$, а в силу [250, теорема 4.1.5] найдётся неборелевское множество $\mathcal{S}_{\omega_1} \subset \mathcal{K}$, не принадлежащее ни одному из классов $\mathscr{G}_\alpha(\mathcal{K})$, $\alpha < \omega_1$. Возьмём в качестве $\eta_\mu$ индикатор множества $\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$.

Докажем свойство 1). Проверим, что для множества $\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$ выполнены условия леммы 6.3. Включение $\mathcal{I} \in \mathscr{F}_\sigma(\mathcal{E}_C)$ вытекает из равенства

$$\mathcal{I} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \{f \in \mathcal{E} : \int_0^t f(\tau)\, d\tau \in [-m, m]\},$$

где множества, стоящие под знаком счётного пересечения, а значит, и результаты пересечения, замкнуты в пространстве $\mathcal{E}_C$ в силу непрерывности функционалов $f \mapsto \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Убедимся, что $\oplus|_{\mathcal{K} \times \mathcal{I}}$ — инъекция. В самом деле, пусть для некоторых $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ и $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$ выполнено равенство $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, которое мы перепишем в виде $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. Функция в левой части полученного равенства является постоянной на полуоси $\mathbb{R}_+$, а функция в правой части имеет ограниченную первообразную. Это возможно лишь в единственном случае, когда $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 = 0$.

По лемме 6.3 множество $\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$ принадлежит классу $\mathscr{F}_{\pi(\mu)}(\mathcal{E}_C)$ и следовательно [106, § 30, III], является двусторонним класса $\pi(\mu)+1$ в пространстве $\mathcal{E}_C$. Применяя последовательно [106, § 31, I, теорема 1] и теорему Лебега–Хаусдорфа 1.1, получим требуемое.

Для доказательства 2) установим сначала равенство

$$\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I}) \cap \mathcal{K} = \mathcal{S}_\mu. \tag{6.7}$$

Из включения $0 \in \mathcal{I}$ вытекает включение $\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I}) \supset \mathcal{S}_\mu$, откуда, учитывая, что $\mathcal{K} \supset \mathcal{S}_\mu$, получаем $\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I}) \cap \mathcal{K} \supset \mathcal{S}_\mu$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in \oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I}) \cap \mathcal{K}$. Тогда выполнено включение $x \in \mathcal{K}$ и для некоторых $u \in \mathcal{S}_\mu$ и $v \in \mathcal{I}$ имеем $x = u + v$. Поскольку функции, принадлежащие $\mathcal{K}$, являются постоянными, и то же верно для функций из $\mathcal{S}_\mu \subset \mathcal{K}$, функция $v$ также постоянна, а это возможно лишь когда $v = 0$. Таким образом, получаем, что $x = u \in \mathcal{S}_\mu$, и нужное включение, а вместе с ним и равенство (6.7), установлены.

Равенство (6.7) показывает, что сужение функционала $\eta_\mu$ на $\mathcal{K}$ является индикатором множества $\mathcal{S}_\mu$. Предположим теперь, что $\eta_\mu|_{\mathcal{M}^1} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}^1_U)$ для некоторого $\mu' < \mu$. Тогда, тем более, $\eta_\mu|_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{K})$. Из теоремы Лебега–Хаусдорфа 1.1 получаем, что $\eta_\mu|_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{B}_{\pi(\mu')+1}(\mathcal{K})$. Последнее невозможно в силу [106, § 31, I, теорема 1], поскольку по построению множество $\mathcal{S}_\mu$ при $\mu < \omega_1$ не является двусторонним класса $\pi(\mu)$ (и тем более, класса $\pi(\mu')+1 \leqslant \pi(\mu)$) в $\mathcal{K}$, а при $\mu = \omega_1$ не является двусторонним никакого класса в $\mathcal{K}$.

Покажем, что выполнено 3). Пусть $x - y \in \mathcal{I}$. Если $x \in \oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$, то для некоторых $u \in \mathcal{S}_\mu$ и $v \in \mathcal{I}$ имеем $x = u+v$, откуда $y = u+(v-(x-y))$, причём $v-(x-y) \in \mathcal{I}$, поскольку $v \in \mathcal{I}$ и $x - y \in \mathcal{I}$. Следовательно, $y \in \oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$. Если же $x \notin \oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$, то и $y \notin \oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})$, поскольку в противном случае, меняя в предыдущих рассуждениях $x$ и $y$ местами, получим противоречие.

Свойство 4) равносильно включению $\vartheta(\oplus(\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{I})) \subset [2,3]$. Пусть $x = u+v$, где $u \in \mathcal{S}_\mu \subset \mathcal{K}$, а $v \in \mathcal{I}$. Тогда в силу свойств 3) и 1) функционала $\vartheta$ имеем цепочку

$$\vartheta(u) - \vartheta(v) \leqslant \vartheta(u+v) \leqslant \vartheta(u) + \vartheta(v),$$

откуда, учитывая, что $\vartheta(v) = 0$, получим требуемое. Лемма доказана.

**Лемма 6.9.** *Для всякого порядкового числа $\mu \in [2,\omega_1]$ существует слабо ляпуновский инвариант $\theta_\mu \colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \{0,1\}$, обладающий свойствами:*

*1) если $\mu < \omega_1$, то $\theta_\mu \in \mathfrak{F}_\mu(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$;*

*2) $\theta_\mu|_{\mathcal{M}^n} \notin \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}^n_U)$ для всякого $\mu' < \mu$;*

*3) если $\widetilde{\vartheta}(A) \notin [2,3]$, то $\theta_\mu(A) = 0$. В частности, $\theta_\mu|_{\mathcal{B}_1^n} = 0$* (см. определение $\widetilde{\vartheta}$ в лемме 6.6, а определение $\mathcal{B}_1^n$ в разделе 1.2).

**Доказательство.** Положим $\theta_\mu(A) = \eta_\mu(\operatorname{tr} A(\cdot)/n)$ для всякого $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, где $\eta_\mu$ — функционал, построенный в лемме 6.8.

Покажем, что $\theta_\mu$ — слабо ляпуновский инвариант. В самом деле, пусть системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ слабо ляпуновски эквиваленты. Тогда для некоторых фундаментальных матриц $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем выполнено неравенство (1.14), где $L(t) = X(t)Y^{-1}(t)$. По лемме 6.5 имеем оценку (6.5), откуда по свойству 3) функционала $\eta_\mu$ получаем равенство $\theta_\mu(A) = \theta_\mu(B)$.

Свойство 1) выполнено в силу свойства 1) функционала $\eta_\mu$ и непрерывности отображения $\operatorname{tr}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathcal{E}_C$.

Проверим свойство 2). Предположим, что для некоторого $\mu' < \mu$ выполнено включение $\theta_\mu|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}^n_U)$. Тогда, тем более, $\theta_\mu|_{\Upsilon(\mathcal{M}^1)} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\Upsilon(\mathcal{M}^1))$, где отображение $\Upsilon$ определено перед леммой 6.7, а $\Upsilon(\mathcal{M}^1)$ наделено топологией подпространства $\mathcal{M}^n_U$. Замечая, что $\eta_\mu(a) = \theta_\mu(\Upsilon(a))$ для всякого $a \in \mathcal{M}^1$, из непрерывности отображения $\Upsilon\colon \mathcal{M}^1_U \to \mathcal{M}^n_U$ получаем, что $\eta_\mu|_{\mathcal{M}^1} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}^1_U)$, что противоречит свойству 2) функционала $\eta_\mu$.

Свойство 3) вытекает из свойства 4) функционала $\eta_\mu$ и свойства 4) функционала $\widetilde{\vartheta}$. Лемма доказана.

В следующей лемме построен обобщённо ляпуновский инвариант, но зато его бэровский класс в компактно-открытой топологии только оценивается.

**Лемма 6.10.** *Для всякого порядкового числа $\mu \in [1, \omega_1]$ существует обобщённо ляпуновский инвариант $\upsilon_\mu\colon \mathcal{M}^n \to \{0,1\}$, обладающий свойствами:*

*1) если $\mu < \omega_1$, то $\upsilon_\mu \in \mathfrak{F}_\mu(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U) \cap \mathfrak{F}_{\mu+2}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$;*

*2) $\upsilon_\mu|_{\mathcal{M}^n} \notin \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}^n_U)$ для всякого $\mu' < \mu$;*

*3) если $\widetilde{\vartheta}(A) \notin [2,3]$, то $\upsilon_\mu(A) = 0$. В частности, $\upsilon_\mu|_{\mathcal{B}_1^n} = 0$* (см. определение $\widetilde{\vartheta}$ в лемме 6.6, а определение $\mathcal{B}_1^n$ в разделе 1.2).

**Доказательство.** Положим $\mathcal{K} = [2,3]$. В силу [250, следствие 3.6.8] для всякого $\mu < \omega_1$ найдется множество $\mathcal{S}_\mu \in \mathscr{F}_{\pi(\mu)}(\mathcal{K}) \backslash \mathscr{G}_{\pi(\mu)}(\mathcal{K})$, а в силу [250, теорема 4.1.5] найдётся неборелевское множество $\mathcal{S}_{\omega_1} \subset \mathcal{K}$, не принадлежащее ни одному из классов $\mathscr{G}_\alpha(\mathcal{K})$, $\alpha < \omega_1$. Положим $\upsilon_\mu(A) = \chi_\mu(\widetilde{\vartheta}(A))$, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, где $\chi_\mu\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ — индикатор множества $\mathcal{S}_\mu$. Обобщённо ляпуновская инвариантность функционала $\upsilon_\mu$ следует из наличия этого свойства у функционала $\widetilde{\vartheta}$, а свойство 3) — из свойства 4) того же функционала.

Проверим свойство 1). Если $\mu < \omega_1$, то в силу [106, § 30, IV] множество $\mathcal{S}_\mu$ является двусторонним класса $\pi(\mu) + 1$ в $\mathcal{K}$, которое замкнуто в $\mathbb{R}$, поэтому [106, § 30, VIII, теорема 1] множество $\mathcal{S}_\mu$ является двусторонним класса

$\pi(\mu)+1$ в $\mathbb{R}$. Тогда [106, § 31, I, теорема 1] его индикатор $\chi_\mu \in \mathfrak{B}_{\pi(\mu)+1}(\mathbb{R})$. По свойству 1) функционала $\widetilde{\vartheta}$ из [106, § 31, III, теорема 2] получаем, что справедливо включение $\upsilon_\mu \in \mathfrak{B}_{\pi(\mu)+1}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U) \cap \mathfrak{B}_{\pi(\mu)+3}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. Наконец, в силу теоремы Лебега–Хаусдорфа 1.1 имеем $\upsilon_\mu \in \mathfrak{F}_\mu(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U) \cap \mathfrak{F}_{\mu+2}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$.

Проверим свойство 2). Пусть $\Upsilon\colon \mathcal{E}_U \to \widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ — отображение, определённое перед леммой 6.7, а $\Xi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}^1_U$ — отображение, ставящее в соответствие числу $x$ постоянную функцию, равную $x$. Тогда для всякого $x \in \mathcal{K}$ выполнено равенство $\upsilon_\mu(\Upsilon(\Xi(x))) = \chi_\mu(x)$. Предположим, что $\upsilon_\mu|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{M}^n_U)$ для некоторого $\mu' < \mu$. Тогда из непрерывности отображений $\Upsilon$ и $\Xi$ получаем, что $\chi_\mu|_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{F}_{\mu'}(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\pi(\mu')+1}(\mathcal{K})$, откуда в силу [106, § 30, VIII, теорема 1] следует включение $\mathcal{S}_\mu \in \mathscr{G}_{\pi(\mu')+1}(\mathcal{K})$. Последнее противоречит выбору множества $\mathcal{S}_\mu$, поскольку неравенство $\mu' < \mu$ влечет неравенство $\pi(\mu')+1 \leqslant \pi(\mu)$, откуда при $\mu < \omega_1$ получаем включение $\mathscr{G}_{\pi(\mu')+1}(\mathcal{K}) \subset \mathscr{G}_{\pi(\mu)}(\mathcal{K})$. Лемма доказана.

## 6.3 Построение слабо ляпуновского инварианта, принадлежащего заданной паре классов Бэра на пространствах $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$

В этом разделе мы, опираясь на результаты двух предыдущих разделов, докажем теоремы 6.1 и 6.2.

**Доказательство теоремы 6.1.**

1. Установим необходимость условий теоремы. Покажем сначала, что для всякого $\mu \in [0, \omega_1)$ справедливы включения

$$\mathfrak{F}_\mu(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C) \subset \mathfrak{F}_\mu(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U), \quad \mathfrak{F}_\mu(\mathcal{M}^n_C) \subset \mathfrak{F}_\mu(\mathcal{M}^n_U). \tag{6.8}$$

В самом деле, из неравенства (6.1) вытекают включения $\mathfrak{F}_0(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C) \subset \mathfrak{F}_0(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$ и $\mathfrak{F}_0(\mathcal{M}^n_C) \subset \mathfrak{F}_0(\mathcal{M}^n_U)$, откуда по индукции получаем требуемое.

Предположим, что $\beta < \alpha$. Учитывая (6.8), получим цепочку

$$\mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U) \cap \mathfrak{F}^0_\beta(\mathcal{M}^n_C) \subset \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U) \cap \mathfrak{F}_\beta(\mathcal{M}^n_C) \subset \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U) \cap \mathfrak{F}_\beta(\mathcal{M}^n_U) = \varnothing.$$

Необходимость условия $\alpha \leqslant \beta$ доказана. Условие $\gamma \leqslant \delta$ рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что $\gamma < \alpha$. Тогда из включения $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U)$ следует, что $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \notin \mathfrak{F}_\gamma(\mathcal{M}^n_U)$, откуда получаем, что $\varphi \notin \mathfrak{F}_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$. Необходимость условия $\alpha \leqslant \gamma$ доказана. Условие $\beta \leqslant \delta$ рассматривается аналогично.

Наконец, условия $\beta \neq 1$ и $\delta \neq 1$ вытекают из следствия 6.1.

2. Докажем достаточность условий теоремы. Сначала рассмотрим случай

$\alpha \neq 1,\ \gamma \neq 1$. Положим

$$\varphi(A) = \theta_\alpha(A) + \zeta_\beta(A) + \theta_\gamma(A + A_0) + \zeta_\delta(A + A_0), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

где $A_0$ — система

$$\dot{x}_i = 2tx_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{N}_n,$$

$\zeta_\nu$ — функционал, построенный в лемме 6.7, если $\nu \geqslant 2$, и 0 в противном случае, а $\theta_\mu$ — функционал, построенный в лемме 6.9, если $\mu \geqslant 2$, и 0 в противном случае.

Отметим, что если системы $A$ и $B$ слабо ляпуновски (обобщённо ляпуновски) эквивалентны, то это же верно и для систем $A + A_0$ и $B + A_0$. В самом деле, если $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ — фундаментальные матрицы систем $A$ и $B$ соответственно, удовлетворяющие условию (1.14) (условию (1.15)), где обозначено $L(t) = X(t)Y^{-1}(t)$, то [29, § 18, 3, 4] $t \mapsto e^{t^2}X(t)$ и $t \mapsto e^{t^2}Y(t)$ — фундаментальные матрицы систем $A + A_0$ и $B + A_0$ соответственно, удовлетворяющие тому же условию. Следовательно, если $\varkappa$ — слабо ляпуновский (обобщённо ляпуновский) инвариант, то тем же свойством обладает и функционал $A \mapsto \varkappa(A + A_0)$.

Заметим ещё, что

$$\theta_\gamma(A + A_0) = \theta_\alpha(A - A_0) = 0, \quad \zeta_\delta(A + A_0) = \zeta_\beta(A - A_0) = 0, \quad A \in \mathcal{M}^n. \quad (6.9)$$

Первая цепочка равенств вытекает из свойства 3) функционала $\theta$, а вторая — из свойства 4) функционала $\zeta$, поскольку

$$\widetilde{\vartheta}(A - A_0) = \widetilde{\vartheta}(A + A_0) = 4, \quad A \in \mathcal{M}^n. \quad (6.10)$$

а) Проверим включение $\varphi \in \mathfrak{F}^0_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$. Предположим сначала, что включение $\varphi \in \mathfrak{F}_{\gamma'}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$ выполнено для некоторого $\gamma' < \gamma$. В силу (6.9) для всякого $A \in \mathcal{M}^n$ имеем

$$\varphi(A - A_0) = \theta_\gamma(A) + \zeta_\delta(A), \quad (6.11)$$

откуда, учитывая свойство 1) функционала $\zeta_\delta$, получим $\theta_\gamma|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_{\gamma'}(\mathcal{M}^n_U)$, что противоречит свойству 2) функционала $\theta_\gamma$.

Если $\gamma < \omega_1$, то и $\alpha < \omega_1$, поэтому из свойства 1) функционала $\theta$ и (6.8) вытекают включения $\theta_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$, $\theta_\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$. Учитывая свойство 1) функционала $\zeta$ и неравенство $\alpha \leqslant \gamma$, получим $\varphi \in \mathfrak{F}_\gamma(\mathcal{M}^n_U)$.

б) Проверим включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U)$. В силу (6.9) имеем

$$\varphi(A) = \theta_\alpha(A) + \zeta_\beta(A), \quad A \in \mathcal{M}^n. \quad (6.12)$$

Требуемое включение вытекает из свойств 1) и 2) функционала $\theta_\alpha$, второго включения в (6.8) и свойства 1) функционала $\zeta_\beta$.

в) Проверим включение $\varphi \in \mathfrak{F}^0_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. Предположим сначала, что включение $\varphi \in \mathfrak{F}_{\delta'}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ выполнено для некоторого $\delta' < \delta$. Из равенства (6.11) и свойства 3) функционала $\theta_\gamma$ получаем

$$\varphi(A - A_0) = \zeta_\delta(A), \quad A \in \mathcal{B}^n_1,$$

откуда следует включение $\zeta_\delta|_{\mathcal{B}^n_1} \in \mathfrak{F}_{\delta'}(\mathcal{B}^n_1)$, которое противоречит свойству 3) функционала $\zeta_\delta$.

Если $\delta < \omega_1$, то в силу свойства 1) функционала $\theta$ справедливы включения $\theta_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ и $\theta_\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$, а в силу свойства 2) функционала $\zeta$ — включения $\zeta_\beta \in \mathfrak{F}_\beta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ и $\zeta_\delta \in \mathfrak{F}_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. Учитывая, что $\delta \geqslant \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$, получаем $\varphi \in \mathfrak{F}_\delta(\mathcal{M}^n_C)$.

г) Проверим теперь включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}^0_\beta(\mathcal{M}^n_C)$. Предположим сначала, что включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_{\beta'}(\mathcal{M}^n_C)$ выполнено для некоторого $\beta' < \beta$. Из равенств (6.9) и свойства 3) функционала $\theta_\alpha$ получаем

$$\varphi(A) = \zeta_\beta(A), \quad A \in \mathcal{B}^n_1,$$

откуда следует включение $\zeta_\beta|_{\mathcal{B}^n_1} \in \mathfrak{F}_{\beta'}(\mathcal{B}^n_1)$, которое противоречит свойству 3) функционала $\zeta_\beta$.

Если $\beta < \omega_1$, то в силу свойства 1) функционала $\theta_\alpha$ справедливо включение $\theta_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$, а в силу свойства 2) функционала $\zeta_\beta$ — включение $\zeta_\beta \in \mathfrak{F}_\beta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. Учитывая, что $\beta \geqslant \alpha$, из равенства (6.12) получаем включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_\beta(\mathcal{M}^n_C)$.

3. Рассмотрим теперь случай $\alpha = \gamma = 1$. Положим

$$\varphi(A) = \psi(A) + \psi(A + A_0) + \zeta_\beta(A) + \zeta_\delta(A + A_0), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

где $\psi$ — индикатор множества $\mathcal{T} = \{A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : \widetilde{\vartheta}(A) < 2\}$, а $\zeta_\beta$, $\zeta_\delta$ и $A_0$ описаны в п. 2 доказательства.

Из (6.10) получаем

$$\psi(A - A_0) = \psi(A + A_0) = 0, \quad A \in \mathcal{M}^n. \tag{6.13}$$

а) Функционалы $\zeta_\beta$ и $\zeta_\delta$ непрерывны на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ в силу свойства 1) леммы 6.7, а функционал $\widetilde{\vartheta}$ непрерывен на том же пространстве в силу свойства 1) леммы 6.6. Следовательно, множество $\mathcal{T}$ открыто, а его индикатор $\psi$ полунепрерывен снизу, и значит, принадлежит первому классу Бэра. Таким образом, $\varphi \in \mathfrak{F}_1(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$.

С другой стороны, в силу (6.9) и (6.13) имеем

$$\varphi(A) = \psi(A) + \zeta_\beta(A), \quad A \in \mathcal{M}^n. \tag{6.14}$$

Поскольку $\zeta_\beta$ непрерывен, а $\psi$ разрывен на $\mathcal{M}^n_U$, имеем $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \notin \mathfrak{F}_0(\mathcal{M}^n_U)$. С учётом предыдущего получаем $\varphi \in \mathfrak{F}^0_1(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$ и $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}^0_1(\mathcal{M}^n_U)$.

б) Предположим сначала, что $\varphi \in \mathfrak{F}_{\delta'}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ для некоторого $\delta' < \delta$. Для всякого $A \in \mathcal{B}^n_1$ из равенств (6.9) и (6.13) и свойства 4) функционала $\widetilde{\vartheta}$ получаем

$$\varphi(A - A_0) = 1 + \zeta_\delta(A),$$

откуда вытекает включение $\zeta_\delta|_{\mathcal{B}^n_1} \in \mathfrak{F}_{\delta'}(\mathcal{B}^n_1)$, противоречащее свойству 3) функционала $\zeta_\delta$.

Пусть $\delta < \omega_1$. В силу свойства 2) функционала $\widetilde{\vartheta}$ имеем $\mathcal{T} \in \mathscr{F}_1(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. В силу [106, § 30, III] множество $\mathcal{T}$ является двусторонним класса 2, поэтому из [106, § 31, I, теорема 1] и теоремы Лебега–Хаусдорфа 1.1 получаем $\psi \in \mathfrak{F}_2(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. По свойству 2) леммы 6.7 имеем включения $\zeta_\beta \in \mathfrak{F}_\beta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ и $\zeta_\delta \in \mathfrak{F}_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$, откуда, учитывая неравенство $\delta \geqslant \beta \geqslant 2$, получаем $\varphi \in \mathfrak{F}_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$.

в) Предположим сначала, что $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_{\beta'}(\mathcal{M}^n_C)$ для некоторого $\beta' < \beta$. Для всякого $A \in \mathcal{B}^n_1$ в силу (6.14) и свойства 4) функционала $\widetilde{\vartheta}$ имеем равенство $\varphi(A) = 1 + \zeta_\beta(A)$, откуда получаем $\zeta_\beta|_{\mathcal{B}^n_1} \in \mathfrak{F}_{\beta'}(\mathcal{B}^n_1)$, что противоречит свойству 3) функционала $\zeta_\beta$.

Пусть $\beta < \omega_1$. Из равенства (6.14), включений $\zeta_\beta \in \mathfrak{F}_\beta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$, $\psi \in \mathfrak{F}_2(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ и неравенства $\beta \geqslant 2$ получаем включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_\beta(\mathcal{M}^n_C)$.

4. Рассмотрим случай $\alpha = 0$, $\gamma = 1$. Положим

$$\varphi(A) = \psi(A + A_0) + \zeta_\beta(A) + \zeta_\delta(A + A_0), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Рассуждая аналогично п. 3, получим требуемое. Отметим, что в рассматриваемом случае, как и в п. 3, $\varphi$ является обобщённо ляпуновским инвариантом.

5. Наконец, рассмотрим случай $\alpha = 1$, $\gamma \geqslant 2$. Положим

$$\varphi(A) = \psi(A) + \theta_\gamma(A + A_0) + \zeta_\beta(A) + \zeta_\delta(A + A_0), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Рассуждая аналогично п. 3, получим требуемое. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 6.2.** Положим

$$\varphi(A) = \upsilon_\alpha(A) + \upsilon_\gamma(A + A_0) + \zeta_\beta(A) + \zeta_\delta(A + A_0), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

где $\zeta_\beta$, $\zeta_\delta$ и $A_0$ описаны в п. 2 доказательства теоремы 6.1, а $\upsilon_\mu$ — функционал, построенный в лемме 6.10, если $\mu \geqslant 1$, и 0 в противном случае.

Заметим, что из (6.10) и свойства 3) функционала $\upsilon$ следует цепочка

$$\upsilon_\gamma(A + A_0) = \upsilon_\alpha(A - A_0) = 0, \quad A \in \mathcal{M}^n. \tag{6.15}$$

а) Включения $\varphi \in \mathfrak{F}^0_\gamma(\widetilde{\mathcal{M}}^n_U)$ и $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}^0_\alpha(\mathcal{M}^n_U)$ устанавливаются теми же рассуждениями, что в пп. 2а) и б) доказательства теоремы 6.1 с заменой всюду $\theta$ на $\upsilon$.

б) Проверим включение $\varphi \in \mathfrak{F}^0_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$. Предположим сначала, что включение $\varphi \in \mathfrak{F}_{\delta'}(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C)$ выполнено для некоторого $\delta' < \delta$. Из равенств (6.9) и (6.15) и свойства 3) функционала $\upsilon_\gamma$ получаем

$$\varphi(A - A_0) = \zeta_\delta(A), \quad A \in \mathcal{B}_1^n,$$

откуда следует включение $\zeta_\delta|_{\mathcal{B}_1^n} \in \mathfrak{F}_{\delta'}(\mathcal{B}_1^n)$, которое противоречит свойству 3) функционала $\zeta_\delta$.

Если $\delta < \omega_1$, то в силу свойства 1) функционала $\upsilon$ справедливы включения $\upsilon_\alpha \in \mathfrak{F}_{\alpha+2}(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$ и $\upsilon_\gamma \in \mathfrak{F}_{\gamma+2}(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$, а в силу свойства 2) функционала $\zeta$ — включения $\zeta_\beta \in \mathfrak{F}_\beta(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$ и $\zeta_\delta \in \mathfrak{F}_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$. Учитывая, что по условию $\delta \geqslant \max\{\alpha + 2, \beta, \gamma + 2\}$, получаем $\varphi \in \mathfrak{F}_\delta(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$.

в) Наконец, проверим включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_\beta^0(\mathcal{M}_C^n)$. Предположим сначала, что включение $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_{\beta'}(\mathcal{M}_C^n)$ выполнено для некоторого $\beta' < \beta$. Из равенств (6.9) и (6.15) и свойства 3) функционала $\upsilon_\alpha$ для всякого $A \in \mathcal{B}_1^n$ получаем равенство $\varphi(A) = \zeta_\beta(A)$, откуда вытекает включение $\zeta_\beta|_{\mathcal{B}_1^n} \in \mathfrak{F}_{\beta'}(\mathcal{B}_1^n)$, противоречащее свойству 3) функционала $\zeta_\beta$.

Если $\beta < \omega_1$, то в силу свойства 1) функционала $\upsilon_\alpha$ справедливо включение $\upsilon_\alpha \in \mathfrak{F}_{\alpha+2}(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$, а в силу свойства 2) функционала $\zeta_\beta$ — включение $\zeta_\beta \in \mathfrak{F}_\beta(\widetilde{\mathcal{M}}_C^n)$. В силу (6.9) и (6.15) имеем равенство

$$\varphi(A) = \upsilon_\alpha(A) + \zeta_\beta(A), \quad A \in \mathcal{M}^n,$$

откуда, учитывая, что $\beta \geqslant \alpha+2$, получим $\varphi|_{\mathcal{M}^n} \in \mathfrak{F}_\beta(\mathcal{M}_C^n)$. Теорема доказана.

# Глава 7

## Бэровские классы формул

**Определение 7.1** ([180]). Пусть $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Будем говорить, что функционал $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ *имеет компактный носитель*, если существует такое $T > 0$, что для любой пары матричнозначных функций $A, B \in \mathcal{M}$, совпадающих на отрезке $[0, T]$, выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Множество всех функционалов на $\mathcal{M}$ с компактным носителем обозначим через $\mathfrak{C}(\mathcal{M})$.

**Замечание 7.1.** В докладе [180] функционалы с компактным носителем называются ограниченно зависимыми.

В определённом смысле функционалы с компактным носителем являются прямой противоположностью остаточным функционалам (см. с. 29), значение которых полностью определяется значениями коэффициентов системы в окрестности бесконечности.

Пусть функционал на пространстве систем представлен в виде повторного предела от последовательности непрерывных функционалов. Как отмечено в [180], желание вычислять значения этих функционалов, пользуясь информацией о системе лишь на конечных участках времени, приводит к естественному требованию компактности их носителей. Возникает естественный вопрос: можно ли получить все функционалы некоторого класса Бэра при помощи того же количества предельных переходов, отправляясь от непрерывных функционалов с компактным носителем?

Перейдём к точным формулировкам (см. обозначения на с. 49).

**Определение 7.2** ([180]). Пусть $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$. Определим $\alpha$-й *класс формул* равенством

$$\mathfrak{C}_\alpha(\mathcal{M}) = [\mathfrak{F}_0(\mathcal{M}) \cap \mathfrak{C}(\mathcal{M})]_\alpha, \quad \alpha \in [0, \omega_1).$$

**Замечание 7.2.** Определение в [180] несколько отличается от приведённого, но (в силу теоремы 7.1 ниже) задаёт те же самые классы. В работе [164] используется ещё один, также восходящий к [180], вариант определения классов формул.

**Предложение 7.1** ([180]). *Для всяких $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и $\alpha \in [0, \omega_1)$ справедлива цепочка включений $\mathfrak{C}_\alpha(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{C}_{\alpha+1}(\mathcal{M})$, причём в случае $\mathcal{M} = \mathcal{M}^n_C$ и $\alpha = 0$ первое включение строгое.*

Следующая теорема показывает, что все, кроме нулевых, классы Бэра в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и классы формул совпадают между собой. Другими словами, в представлении любого функционала на пространстве систем с компактно-открытой топологией в виде повторного предела от последовательности непрерывных функционалов, последние можно выбрать с компактным носителем.

**Теорема 7.1** ([259]). *Для всяких* $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ *и* $\alpha \in [1, \omega_1)$ *справедливо равенство* $\mathfrak{C}_\alpha(\mathcal{M}) = \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{M})$.

Для $\alpha = 0$ ситуация совершенно иная и описывается следующей теоремой.

**Теорема 7.2** ([259]). *Равенство* $\mathfrak{C}_0(\mathcal{M}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{M})$ *для* $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ *выполнено тогда и только тогда, когда существует такое* $T > 0$, *что никакие различные системы* $A, B \in \mathcal{M}$ *не совпадают на отрезке* $[0, T]$.

**Замечание 7.3.** Сформулированному выше условию удовлетворяет, например, множество систем с вещественно аналитическими коэффициентами.

Оказывается, что количество предельных переходов в формуле для слабо ляпуновского инварианта, вообще говоря, нельзя уменьшить, разрешив фигурирующим в ней функционалам с компактным носителем быть разрывными.

**Теорема 7.3** ([259]). *Если* $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}^n_1$ *наделено топологией подпространства* $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, *то для всякого* $\alpha \in [1, \omega_1)$ *найдётся обобщённо ляпуновский инвариант* $\varphi \in \mathfrak{F}_{\alpha+1}(\mathcal{M}) \backslash [\mathfrak{C}(\mathcal{M})]_\alpha$.

Для $\alpha = 1$ утверждение предыдущей теоремы может быть усилено следующим образом: никакой нетривиальный остаточный функционал (а тем более, слабо ляпуновский инвариант) нельзя представить как предел последовательности функционалов с компактным носителем.

**Теорема 7.4** ([259]). *Если* $\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}^n_C, \widetilde{\mathcal{M}}^n_C\}$, *то* $[\mathfrak{C}(\mathcal{M})]_1$ *не содержит остаточных функционалов, отличных от констант.*

В следующем разделе мы докажем три абстрактные теоремы о приближении функций, заданных на бесконечном произведении метрических пространств, функциями, зависящими только от конечного числа координат своего аргумента. В разделе 7.2 мы применим эти результаты, которые представляют и самостоятельный интерес, к рассматриваемой нами ситуации.

## 7.1 Функции первого класса Бэра на счётном произведении топологических пространств

Пусть $\mathcal{X}$ — тихоновское произведение [228, IV.I; 106, § 10] счётной совокупности вполне регулярных пространств [228, VII.7; 106, § 14] $\mathcal{X}_j$, $j \in \mathbb{N}$, каждое из которых содержит более одного элемента, $S$ — подмножество пространства $\mathcal{X}$, а $Y$ — метризуемое пространство.

Будем называть функцию $f\colon S \to Y$ *конечно определённой*, если она зависит только от конечного числа координат своего аргумента. Более формально, $f$ конечно определена, если существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $f(x) = f(y)$ для каждой пары точек $x, y \in S$, у которых первые $m$ координат совпадают. Обозначим через $\mathfrak{C}(S, Y)$ множество всех непрерывных конечно определённых функций из $S$ в $Y$. Для краткости, будем писать $\mathfrak{C}(S)$ вместо $\mathfrak{C}(S, \mathbb{R})$.

Заметим, что каждая функция $f\colon S \to \mathbb{R}$ является поточечным пределом некоторой направленности [214, 1.6] в $\mathfrak{C}(S)$. Действительно, для любого конечного множества $A \subset S$, найдётся функция в $\mathfrak{C}(S)$, совпадающая с $f$ на $A$, поэтому $\mathfrak{C}(S)$ плотно в множестве всех функций $f$ с поточечной топологией.

Естественно возникают следующие вопросы: верно ли, что 1) любая непрерывная функция из $\mathfrak{X}$ в $Y$ является равномерным пределом некоторой последовательности функций из $\mathfrak{C}(\mathfrak{X}, Y)$; 2) каждая вещественнозначная функция $f\colon S \to \mathbb{R}$, принадлежащая классу Бэра с номером $\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, является поточечным пределом некоторой последовательности конечно определённых функций, принадлежащих предыдущим бэровским классам.

Мы покажем, что 1) выполнено тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ псевдокомпактно [214, 3.10] и что для любого метризуемого пространства $\mathfrak{X}$ свойство 2) выполнено для любого $S \subset \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$. Отметим, что достаточность в первом утверждении для случая вещественнозначных функций на компактном пространстве $\mathfrak{X}$ хорошо известна [238]; оно следует из теоремы Вейерштрасса–Стоуна [228, XIII.3.3], поскольку $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$ является алгеброй с единицей, элементы которой разделяют точки пространства $\mathfrak{X}$.

Отметим, что функции на несчётном тихоновском произведении пространств рассматриваются в работе [229].

Следующая теорема описывает критерий равномерной аппроксимации непрерывных функций на $\mathfrak{X}$ непрерывными конечно определёнными функциями.

**Теорема 7.5** ([256]). *Следующие утверждения равносильны:*

*а)* $\mathfrak{X}$ *псевдокомпактно;*

*б) для любого метризуемого пространства* $Y$, *любая непрерывная функция* $f\colon \mathfrak{X} \to Y$ *является равномерным пределом некоторой последовательности функций из* $\mathfrak{C}(\mathfrak{X}, Y)$;

*в) каждая непрерывная функция* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ *является равномерным пределом некоторой последовательности функций из* $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$.

Для доказательства теоремы 7.5 нам понадобятся две леммы, утверждение первой из которых хорошо известно.

Всюду далее $d$ обозначает совместимую с топологией метрику на пространстве $Y$. Пусть $X$ — топологическое пространство. Напомним, что последовательность $(f_n)$ функций $X \to Y$ сходится к функции $f\colon X \to Y$ *равномерно в точке* $x$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U_x$ точки $x$ и число $N$ такие, что из условий $y \in U_x$ и $n \geqslant N$ вытекает, что $d(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$.

**Лемма 7.1.** *Пусть $X$ — псевдокомпактное пространство. Если последовательность непрерывных функций $X \to Y$ сходится равномерно в каждой точке $X$, то она сходится равномерно на $X$.*

**Доказательство.** Пусть $(f_n)$ — последовательность непрерывных функций $X \to Y$, сходящаяся к $f$ равномерно в каждой точке пространства $X$.

Тогда $f$ тоже непрерывна [207, § 38, IV]. Положим $g_n(x) = d(f_n(x), f(x))$ для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $(g_n)$ вещественнозначных непрерывных функций сходится к нулю равномерно в каждой точке пространства $X$. В силу [216, Theorem 2] последовательность $(g_n)$ сходится к нулю равномерно на $X$, что равносильно тому, что требовалось доказать. Лемма доказана.

До конца этого раздела выберем произвольно и зафиксируем $x^0 \in \mathfrak{X}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $p_n \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ правилом: точка $x \in \mathfrak{X}$ переходит в точку с первыми $n$ координатами, равными первым $n$ координатам точки $x$ и остальными координатами, равными соответствующим координатам точки $x^0$.

**Лемма 7.2.** *Пусть $f \colon \mathfrak{X} \to Y$ — непрерывная функция. Тогда последовательность $(f \circ p_n)$ сходится к $f$ равномерно в каждой точке пространства $\mathfrak{X}$. Более того, $f$ является равномерным пределом некоторой последовательности функций из $\mathfrak{C}(\mathfrak{X}, Y)$ тогда и только тогда, когда последовательность $(f \circ p_n)$ сходится к $f$ равномерно на $\mathfrak{X}$.*

**Доказательство.** Пусть заданы $x \in \mathfrak{X}$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции $f$ существует окрестность $U$ точки $x$ такая, что для всех $y \in U$ выполнено $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. По определению топологии произведения, существует базисное открытое множество $V$ вида $V = \prod_{i=1}^{N} V_i \times \prod_{i>N} \mathfrak{X}_i$, где $V_i \subset \mathfrak{X}_i$, $i \in \mathbb{N}_N$, такое, что $x \in V \subset U$. Для всех $y \in V$ и $n \geqslant N$ имеем $p_n(y) \in V$. Следовательно,

$$d((f \circ p_n)(y), f(y)) \leqslant d(f(p_n(y)), f(x)) + d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

и первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения предположим, что последовательность $(f \circ p_n)$ не сходится к $f$ равномерно на $\mathfrak{X}$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathfrak{X}} d(f(p_n(x)), f(x)) > \varepsilon.$$

Пусть функция $g$ зависит только от первых $k$ координат своего аргумента. Тогда найдутся $n \geqslant k$ и $x^* \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющие условию

$$d(f(p_n(x^*)), f(x^*)) > \varepsilon.$$

Поскольку $g(p_n(x^*)) = g(x^*)$, то $\sup_{x \in \mathfrak{X}} d(f(x), g(x)) > \varepsilon/2$. Следовательно, $f$ нельзя представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности конечно определяемых функций, тем более непрерывных. Обратное утверждение очевидно, т.к. $\{f \circ p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{X}, Y)$. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 7.5.** Покажем, что из а) вытекает б). Пусть задана непрерывная функция $f \colon \mathfrak{X} \to Y$. Тогда последовательность $(f \circ p_n)$

функций из $\mathfrak{C}(\mathcal{X}, Y)$ сходится к $f$ равномерно на $\mathcal{X}$ в силу лемм 7.2 и 7.1. Очевидно, из б) вытекает в).

Теперь предположим, что в) верно, а а) неверно. Тогда существует неограниченная непрерывная функция $u\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$. По предположению, существует функция $v \in \mathfrak{C}(\mathcal{X})$, зависящая только от первых $n$ координат и такая, что $\sup_{x\in\mathcal{X}} |v(x) - u(x)| < 1/2$. Следовательно, если первые $n$ координат точек $x$ и $y$ совпадают, то $|u(x) - u(y)| < 1$. Выберем $x^1 \in \mathcal{X}$ такое, что все координаты точек $x^1$ и $x^0$ различаются. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ в силу полной регулярности пространства $\mathcal{X}_j$ существует непрерывная функция $f_j\colon \mathcal{X}_j \to$ $\to [0,1]$ такая, что $f_j(x^1_j) = 1$ и $f_j(x^0_j) = 0$, где $x_j \in \mathcal{X}_j$ — $j$-я координата точки $x \in \mathcal{X}$. Положим $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x_j)\cdot 2^{-j}$ при всех $x \in \mathcal{X}$. Тогда $f$ непрерывна.

Пусть $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ зависит только от первых $k$ координат своего аргумента. Без ограничения общности можно считать, что $k > n$. Выберем $x^* \in \mathcal{X}$ такое, что $u(x^*) > 2^{k+3}$. Возьмём точки $x', x'' \in \mathcal{X}$ совпадающими с $x^*$ во всех координатах, кроме $(k+1)$-й. Положим $x'_{k+1} = x^1_{k+1}$ и $x''_{k+1} = x^0_{k+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x')f(x') - u(x'')f(x'') = (u(x') - u(x''))f(x') + u(x'')(f(x') - f(x'')) \geqslant \\ \geqslant -|u(x') - u(x'')| + (u(x^*) - |u(x^*) - u(x'')|)\cdot 2^{-(k+1)} \geqslant \\ \geqslant -1 + (2^{k+3} - 1)\cdot 2^{-(k+1)} > 2. \end{aligned}$$

Поскольку $g(x') = g(x'')$, то имеем

$$|u(x')f(x') - g(x')| > 1 \quad \text{или} \quad |u(x'')f(x'') - g(x'')| > 1.$$

Следовательно, функцию $uf$ нельзя представить как предел равномерно сходящейся последовательности функций из $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$. Пришли к противоречию. Таким образом, из в) следует а). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос поточечного приближения функции $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ конечно определёнными функциями предыдущих бэровских классов.

Заметим, что каждая непрерывная функция $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{X}$ вполне регулярно, является поточечным пределом последовательности функций из $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$. В самом деле, последовательность $(f \circ p_n)$ сходится поточечно к функции $f$. Для метризуемого пространства $\mathcal{X}$ это утверждение может быть усилено следующим образом.

**Теорема 7.6** ([256])**.** *Если $\mathcal{X}$ метризуемо и $f\colon S \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра, то существует последовательность $(f_k)$ функций из $\mathfrak{C}(S)$ такая, что выполнено соотношение*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad x \in S. \tag{7.1}$$

**Замечание 7.4.** Как показано в работе [231], заключение теоремы 7.6

для произвольного вполне регулярного пространства $\mathcal{X}$ неверно.

Доказательству теоремы 7.6 предпошлём две леммы.

Пусть $(M, \rho)$ — метрическое пространство. Для каждой пары множеств $A, B \subset M$ положим $\rho(A, B) = \inf \rho(A \times B)$. Для краткости будем ниже писать $\rho(x, A)$ вместо $\rho(\{x\}, A)$.

**Лемма 7.3.** *Пусть $(M, \rho)$ — метрическое пространство, а $A_1, \ldots, A_s$ — попарно непересекающиеся $\mathscr{F}_\sigma$-множества в $M$. Тогда существуют замкнутые множества $P_i^k \subset M$, $i \in \mathbb{N}_s$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что*

$$A_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_i^k, \quad P_i^k \subset P_i^{k+1},$$

*причём $\rho(P_{i_1}^k, P_{i_2}^k) > 0$ для всех $i_1 \neq i_2$ и $k \in \mathbb{N}$.*

**Доказательство.** По предположению, для каждого $i \in \mathbb{N}_s$ имеем

$$A_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_i^k,$$

где $F_i^k$ — замкнутые множества. Можно считать, что $F_i^k \subset F_i^{k+1}$ (в противном случае заменим множество $F_i^{k+1}$ множеством $\bigcup_{j=1}^{k+1} F_i^j$).

Для всех $i \in \mathbb{N}_s$ и $k, l \in \mathbb{N}$ определим множество

$$\widetilde{F}_i^{kl} = \{\, x : \rho(x, \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} F_j^k) \geqslant 1/l \,\} \bigcap F_i^k.$$

Отметим следующие свойства построенных множеств:

1) для всех $i \in \mathbb{N}_s$ и $k, l \in \mathbb{N}$ множество $\widetilde{F}_i^{kl}$ замкнуто;

2) для всех $i \in \mathbb{N}_s$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \widetilde{F}_i^{kl} = F_i^k;$$

3) для всех $i_1 \neq i_2$ и $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho(\widetilde{F}_{i_1}^{k_1 l_1}, \widetilde{F}_{i_2}^{k_2 l_2}) > 0.$$

Свойство 1) вытекает из непрерывности функции $x \mapsto \rho(x, A)$ для фиксированного множества $A$ [106, § 21, IV, (5)]. Свойство 2) вытекает из равенства $F_i^k \bigcap \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} F_j^k = \varnothing$, которое справедливо при всех $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}_s$, и того факта, что для любого замкнутого множества $F$ и точки $x \notin F$ выполнено неравенство $\rho(x, F) > 0$ [106, § 21, IV, (3)].

Доказем свойство 3). Можно считать, что $k_1 \leqslant k_2$. Для каждого $x \in \widetilde{F}_{i_2}^{k_2 l_2}$

справедлива цепочка неравенств

$$\frac{1}{l_2} \leqslant \rho(x, F_{i_1}^{k_2}) \leqslant \rho(x, F_{i_1}^{k_1}) \leqslant \rho(x, \widetilde{F}_{i_1}^{k_1 l_1}),$$

где первое неравенство выполнено по построению множества $\widetilde{F}_{i_2}^{k_2 l_2}$, второе — в силу включения $F_{i_1}^{k_2} \supset F_{i_1}^{k_1}$, а последнее — в силу включения $F_{i_1}^{k_1} \supset \widetilde{F}_{i_1}^{k_1 l_1}$. Из полученного неравенства следует требуемое.

Пусть $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — произвольная биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Положим для всяких $i \in \mathbb{N}_s$ и $k \in \mathbb{N}$

$$P_i^k = \bigcup_{m=1}^{k} \widetilde{F}_i^{\tau(m)}.$$

Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}_s$ будем иметь

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_i^k = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{F}_i^{\tau(m)} = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} \widetilde{F}_i^{kl} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_i^k = A_i.$$

Более того, для всех $i_1 \neq i_2$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\rho(P_{i_1}^k, P_{i_2}^k) = \min_{1\leqslant m_1, m_2 \leqslant k} \rho(\widetilde{F}_{i_1}^{\tau(m_1)}, \widetilde{F}_{i_2}^{\tau(m_2)}) > 0.$$

По построению для любых $i \in \mathbb{N}_s$ и $k \in \mathbb{N}$ множество $P_i^k$ замкнуто и выполнено включение $P_i^k \subset P_i^{k+1}$. Лемма доказана.

**Лемма 7.4.** *Пусть $\mathfrak{X}$ метризуемо. Если $f\colon S \to \mathbb{R}$ — функция первого класса Бэра, принимающая только конечное число значений, то существует последовательность $(f_k)$ функций из $\mathfrak{C}(S)$ такая, что выполнено (7.1), причём для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x\in S} |f_k(x)| \leqslant \sup_{x\in S} |f(x)|. \tag{7.2}$$

**Доказательство.** Поскольку $\mathfrak{X}$ метризуемо, тем же свойством обладают и все пространства $\mathfrak{X}_j$, $j \in \mathbb{N}$. Наделим $\mathfrak{X}$ стандартной метрикой по формуле

$$\rho(x', x'') = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \min\{\rho_j(x'_j, x''_j), 1\}, \quad x', x'' \in \mathfrak{X}, \tag{7.3}$$

где $\rho_j$ — метрика на $\mathfrak{X}_j$.

Пусть $f(S) = \{y_1, \ldots, y_s\}$. Поскольку $f$ является функцией первого класса Бэра, то для каждого $i \in \mathbb{N}_s$ множество $A_i = f^{-1}(\{y_i\})$ является $\mathscr{F}_\sigma$-множеством [106, § 31, VIII, теорема 1 и II, теорема 2]. Отсюда по лемме 7.1

справедливо представление

$$A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_i^k, \quad P_i^k \subset P_i^{k+1}, \tag{7.4}$$

где $P_i^k$ — замкнутые множества такие, что $\rho(P_i^k, P_j^k) > 0$ для всех значений $i \neq j$ и $k \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Положим $d_k = \min\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant s} \rho(P_i^k, P_j^k) > 0$. Пусть $g_k$ — сужение функции $f$ на множество $\bigcup_{i=1}^{s} P_i^k$. Тогда $g_k$ равномерно непрерывна, т.к. она постоянна в $d_k$-окрестности каждой точки её области определения. Используя теорему Катетова [232, Theorem 3] продолжим $g_k$ до равномерно непрерывной функции $h_k \colon \mathfrak{X} \to [\min f(S), \max f(S)]$. Выберем $\delta_k > 0$ такое, что из условия $\rho(x', x'') < \delta_k$ вытекает неравенство $|h_k(x') - h_k(x'')| < 1/k$. Далее, выберем $n_k$ такое, что $2^{-n_k} < \delta_k$. Наконец, положим $f_k = h_k \circ p_{n_k}$. Тогда $f_k \in \mathfrak{C}(S)$.

Покажем, что выполнено (7.1). Пусть заданы $x \in S$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $S = \bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i$, то существует номер $i_0$ такой, что $x \in A_{i_0}$. Из (7.4) получаем, что найдётся $k_0 > 1/\varepsilon$ такое, что $x \in P_{i_0}^k$ для всех $k \geqslant k_0$. Тогда для всех $k \geqslant k_0$ имеем $h_k(x) = y_{i_0} = f(x)$. Более того, $\rho(p_{n_k}(x), x) \leqslant 2^{-n_k} < \delta_k$, откуда по выбору $\delta_k$ получаем, что $|f_k(x) - h_k(x)| < 1/k < \varepsilon$ для всех $k \geqslant k_0$. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 7.6.** Приводимое ниже рассуждение заимствовано из [106, § 31, VIII, теорема 6]. Без ограничения общности можно считать, что все функционалы, участвующие в формулировке теоремы, имеют своим множеством значений интервал $(0, 1)$. Общий случай сводится к этому применением ограничивающего гомеоморфизма $x \mapsto \pi^{-1} \operatorname{arcctg} x$. Согласно теореме [106, § 31, VIII, 3] найдётся последовательность $(u_m)$ функционалов первого класса Бэра, каждый из которых принимает лишь конечное число значений, равномерно сходящаяся к $f$. Заменяя в случае необходимости последовательность $(u_m)$ некоторой её подпоследовательностью, можно считать, что для всякого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in S} |u_{m+1}(x) - u_m(x)| \leqslant 2^{-m}.$$

Положим $u_0(x) \equiv 0$. Применяя лемму 7.2 к разности $u_m - u_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, получаем, что существует двойная последовательность $(g_{mk})$ функций из $\mathfrak{C}(S)$ такая, что для всех $m \in \mathbb{N}$ и $x \in S$,

$$\lim_{k \to \infty} g_{mk}(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x) \quad \text{и} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} |g_{mk}(x)| \leqslant 2^{1-m}.$$

Положим $h_{mk}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{ik}(x),\ x \in S$. Тогда $h_{mk} \in \mathfrak{C}(S)$ и для всех $m \in \mathbb{N}$ и $x \in S$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} h_{mk}(x) = u_m(x) \quad \text{и} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |h_{m+1,k}(x) - h_{mk}(x)| \leqslant 2^{-m}. \tag{7.5}$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} h_{kk}(x) = f(x) \quad \text{при всех } x \in S. \tag{7.6}$$

Действительно, пусть заданы $x \in S$ and $\varepsilon > 0$. Пусть $m$ — целое число такое, что

$$2^{1-m} < \varepsilon \quad \text{и} \quad |u_m(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{7.7}$$

Далее, пусть $k_0 > m$ — целое число такое, что для всех $k > k_0$ выполнено

$$|h_{mk}(x) - u_m(x)| < \varepsilon. \tag{7.8}$$

Тогда для всех $k > k_0$ в силу (7.5), (7.8) и (7.7) имеем

$$|h_{kk}(x) - f(x)| \leqslant \big(|h_{kk}(x) - h_{k-1,k}(x)| + \cdots$$

$$\cdots + |h_{m+1,k}(x) - h_{mk}(x)|\big) + |h_{mk}(x) - u_m(x)| +$$

$$+ |u_m(x) - f(x)| < (2^{-(k-1)} + \cdots + 2^{-m}) + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

откуда следует (7.6). Наконец, положим для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$f_k(x) = \min\left\{\max\left\{h_{kk}(x), k^{-1}\right\}, 1 - k^{-1}\right\}, \quad x \in S.$$

Тогда выполнено (7.1), и все функции $f_k$ принимают значения из интервала $(0,1)$. Теорема доказана.

**Теорема 7.7** ([256]). *Для любых пространства $\mathfrak{X}$ и счётного порядкового числа $\alpha \geqslant 2$ существуют подмножество $S \subset \mathfrak{X}$ и функция $f \in \mathfrak{F}^0_\alpha(S)$, которая не является поточечным пределом никакой последовательности конечно определённых функций. Более того, если $\mathfrak{X}$ метризуемо, то можно взять $S = \mathfrak{X}$.*

**Доказательство.** Для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем произвольно различные точки $a_j, b_j \in \mathfrak{X}_j$. Тогда произведение $S = \prod_{j\in\mathbb{N}}\{a_j, b_j\}$ гомеоморфно канторову множеству. Следовательно, существует функция $f \in \mathfrak{F}^0_\alpha(S)$ [207, § 43, V]. Заметим, что всякая конечно определённая функция на $S$ непрерывна. Следовательно, поточечный предел последовательности таких функций принадлежит первому классу Бэра, которому функция $f$ не принадлежит. Наконец, если $\mathfrak{X}$ метризуемо, то $f$ можно продолжить до функции $\tilde{f} \in \mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{X})$ [106, § 35, VI]. Теорема доказана.

## 7.2 Приложение к пространству линейных систем

В этом разделе мы, используя результаты раздела 7.1, докажем теоремы, сформулированные в начале главы.

**Доказательство теоремы 7.1.**

Включение $\mathfrak{C}_\alpha(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{M})$ вытекает прямо из определений. Остаётся установить обратное включение $\mathfrak{C}_\alpha(\mathcal{M}) \supset \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{M})$. Общий случай индукцией сводится к случаю $\alpha = 1$, который мы и рассмотрим. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{P}_k$ пространство кусочно непрерывных матричнозначных функций $[k-1, k] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ с метрикой

$$\rho_k(A, B) = \sup_{t\in[k-1,k]} |A(t) - B(t)|, \quad A, B \in \mathcal{P}_k,$$

а через $\mathcal{P}$ — тихоновское произведение $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_k$, которое мы наделим стандартной [106, § 21, V–VI] метрикой

$$\rho((A_k), (B_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \min\{\rho_k(A_k, B_k), 1\}, \quad (A_k), (B_k) \in \mathcal{P}.$$

Определим отображение $\Theta\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \mathcal{P}$ следующим образом: матричнозначной функции $A$ поставим в соответствие точку $(A|_{[k-1,k]})$, $k$-я координата которой есть сужение $A$ на отрезок $[k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$.

Покажем, что отображение $\Theta$ (равномерно) непрерывно. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $m \geqslant 2$, что $2^{-m+1} < \varepsilon$. Заметим, что $2^{-m} < (m+1)^{-1}$. Тогда если $\rho_C(A, B) < 2^{-m}$, то $\sup_{t\in[0,m]} |A(t) - B(t)| < 2^{-m}$, откуда получаем $\rho_k(\Theta(A)_k, \Theta(B)_k) < 2^{-m}$ для всех $k \in \mathbb{N}_m$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\rho(\Theta(A), \Theta(B)) < 2^{-m} \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} + \sum_{k>m} 2^{-k} < 2 \cdot 2^{-m} < \varepsilon.$$

Очевидно, $\Theta$ инъективно. Покажем, что отображение $\Theta^{-1}\colon \Theta(\widetilde{\mathcal{M}}^n_C) \to \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ (равномерно) непрерывно. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $m \geqslant 2$, что $(m+1)^{-1} < \varepsilon$. Если $\rho(\Theta(A), \Theta(B)) < 2^{-2m}$, то $\rho_k(\Theta(A)_k, \Theta(B)_k) < 2^{-m}$ для всякого $k \in \mathbb{N}_m$, откуда получаем, что

$$\sup_{t\in[0,m]} |A(t) - B(t)| < 2^{-m} < (m+1)^{-1}.$$

Следовательно, $\rho_C(A, B) \leqslant (m+1)^{-1} < \varepsilon$.

Пусть теперь задан функционал $\varphi \in \mathfrak{F}_1(\mathcal{M})$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi$ всюду конечен. Общий случай сводится к этому применением ограничивающего гомеоморфизма $\Phi$ (см. (1.33)). Тогда имеем $\varphi \circ \Theta^{-1} \in \mathfrak{F}_1(\Theta(\mathcal{M}))$ в силу непрерывности отображения $\Theta^{-1}$. Согласно теореме 7.6 существует такая последовательность непрерывных функционалов $\varphi_k\colon \Theta(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, каждый из которых зависит только от конечного числа координат своего аргумента, что

$$\varphi(\Theta^{-1}(p)) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(p), \quad p \in \Theta(\mathcal{M}),$$

откуда получаем

$$\varphi(A) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\Theta(A)), \quad A \in \mathcal{M}.$$

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ функционал $\varphi_k \circ \Theta|_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ непрерывен как композиция непрерывных отображений. Кроме того, он имеет компактный носитель, поскольку если функционал $\varphi_k$ зависит только от первых $m_k$ координат своего аргумента, то функционал $\varphi_k \circ \Theta|_{\mathcal{M}}$ определяется значениями коэффициентов своего аргумента на отрезке $[0, m_k]$. Следовательно, $\varphi \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{M})$. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 7.2.** Пусть существует такое $T > 0$, что никакие различные $A, B \in \mathcal{M}$ не совпадают на отрезке $[0, T]$. Тогда любой (не обязательно непрерывный) функционал на $\mathcal{M}$ имеет компактный носитель, поэтому $\mathfrak{F}_0(\mathcal{M}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{M}) \bigcap \mathfrak{C}(\mathcal{M}) = \mathfrak{C}_0(\mathcal{M})$.

Обратно, предположим, что для всякого $T > 0$ найдутся различные системы $A, B \in \mathcal{M}$, совпадающие на отрезке $[0, T]$. Построим по индукции последовательности систем $(A_k)$, $(B_k)$ и моментов времени $(t_k)$ следующим образом. Пусть $A_1, B_1 \in \mathcal{M}$ — различные системы, совпадающие на отрезке $[0, 1]$, а $t_1$ — какая-нибудь точка, для которой $A_1(t_1) \neq B_1(t_1)$. Если системы $A_k$, $B_k$ и число $t_k$ уже определены, то возьмём в качестве $A_{k+1}$ и $B_{k+1}$ различные системы из $\mathcal{M}$, совпадающие на отрезке $[0, t_k + 1]$, а в качестве $t_{k+1}$ — какую-нибудь точку, для которой $A_{k+1}(t_{k+1}) \neq B_{k+1}(t_{k+1})$. На этом индуктивный переход, а с ним и построение последовательностей $(A_k)$, $(B_k)$ и $(t_k)$ закончены. По построению последовательность $(t_k)$ строго возрастает, причем $t_k \geqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ определим функцию $f_k\colon \operatorname{End}\mathbb{R}^n \to [0, 1]$, полагая

$$f_k(Y) = \frac{|Y - B_k(t_k)|}{|A_k(t_k) - B_k(t_k)| + |Y - A_k(t_k)|}, \quad Y \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n.$$

Заметим, что $f_k$ непрерывна и удовлетворяет условиям $f_k(A_k(t_k)) = 1$ и $f_k(B_k(t_k)) = 0$. Определим теперь функционал $\varphi\colon \mathcal{M} \to [0, 1]$ равенством

$$\varphi(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 3^{-k} f_k(A(t_k)), \quad A \in \mathcal{M}. \tag{7.9}$$

Поскольку отображения $A \mapsto A(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны, а ряд (7.9) сходится равномерно, функционал $\varphi$ непрерывен. Покажем, что он не имеет компактного носителя. Пусть задано произвольное $T > 0$. Выберем целое $k > T + 1$.

По построению последовательностей $(A_k)$, $(B_k)$ и $(t_k)$ справедливо равенство

$$\varphi(A_k) - \varphi(B_k) = 3^{-k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 3^{-j}(f_j(A_k(t_j)) - f_j(B_k(t_j))),$$

откуда получаем

$$\varphi(A_k) - \varphi(B_k) \geqslant 3^{-k} - \sum_{j=k+1}^{\infty} 3^{-j}|f_j(A_k(t_j)) - f_j(B_k(t_j))| \geqslant \frac{3^{-k}}{2}.$$

В то же время системы $A_k$ и $B_k$ совпадают на отрезке $[0, t_{k-1}+1]$ (по построению), а следовательно, и на отрезке $[0, T]$ в силу цепочки $t_{k-1} + 1 \geqslant k > T$. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 7.3.** Покажем, что сужение построенного в лемме 6.7 функционала $\zeta_{\alpha+1}$ на множество $\mathcal{M}$ обладает требуемым свойством. В силу свойства 2) этого функционала $\zeta_{\alpha+1}|_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{F}_{\alpha+1}(\mathcal{M})$.

Предположим, что $\zeta_{\alpha+1}|_{\mathcal{M}} \in [\mathfrak{C}(\mathcal{M})]_\alpha$. Пусть $\mathcal{P}$ и $\Psi$ — подпространство и гомеоморфизм, построенные в лемме 6.2, а $\Upsilon\colon \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{M}}^n$ — отображение, определенное перед леммой 6.7. Тогда $\zeta_{\alpha+1} \circ \Upsilon|_{\mathcal{P}} \in [\mathfrak{C}(\mathcal{P})]_\alpha$, поскольку если $\varphi \in \mathfrak{C}(\mathcal{M})$, то $\varphi \circ \Upsilon|_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{C}(\mathcal{P})$.

Покажем, что имеет место включение $\mathfrak{C}(\mathcal{P}) \subset \mathfrak{F}_0(\mathcal{P})$. Действительно, пусть $\varphi \in \mathfrak{C}(\mathcal{P})$. Тогда в силу утверждения 2) леммы 6.2 для некоторого $k \in \mathbb{N}$ из неравенства $d(a,b) < 1/k$ следует равенство $\varphi(\Psi(a)) = \varphi(\Psi(b))$, что доказывает непрерывность функционала $\varphi \circ \Psi$. Но тогда и функционал $\varphi$ непрерывен, т.к. $\Psi$ — гомеоморфизм.

Из включения $\mathfrak{C}(\mathcal{P}) \subset \mathfrak{F}_0(\mathcal{P})$ индукцией получаем, что $[\mathfrak{C}(\mathcal{P})]_\alpha \subset \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{P})$. Следовательно, $\zeta_{\alpha+1} \circ \Upsilon|_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{P})$. С другой стороны, из свойства 5) леммы 6.7 и свойства 4) леммы 6.4 имеем $\zeta_{\alpha+1} \circ \Upsilon|_{\mathcal{P}} \notin \mathfrak{F}_\alpha(\mathcal{P})$. Получили противоречие. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 7.4.** Пусть $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ — остаточный функционал, причём $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ для некоторых $A, B \in \mathcal{M}$.

Определим отображение $\Psi\colon \mathbb{B}_2 \to \mathcal{M}$ (см. определение 6.1), сопоставляя каждой точке $(a_k) \in \mathbb{B}_2$ систему с матричнозначной функцией

$$\Psi(a)(t) = (1 - a_k)A(t) + a_k B(t), \quad t \in [k-1, k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем произвольное $a \in \mathbb{B}_2$. Определим последовательности $(b^m)$ и $(c^m)$ точек $\mathbb{B}_2$, полагая

$$b_i^m = \begin{cases} a_i, & i \in \mathbb{N}_m, \\ 0, & i > m, \end{cases} \qquad c_i^m = \begin{cases} a_i, & i \in \mathbb{N}_m, \\ 1, & i > m, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда
$$\lim_{m\to\infty} b^m = \lim_{m\to\infty} c^m = a.$$
В то же время в силу остаточности функционала $\varphi$ имеем
$$\varphi(\Psi(b^m)) = \varphi(A) \neq \varphi(B) = \varphi(\Psi(c^m)), \quad m \in \mathbb{N}.$$
Следовательно, $a$ является точкой разрыва рассматриваемой функции. Таким образом, функция $\varphi \circ \Psi$ всюду разрывна. По теореме Бэра [106, § 34, VII] функция $\varphi \circ \Psi$ не принадлежит первому классу Бэра.

Предположим теперь, что для некоторой последовательности $(\varphi_k)$ функционалов с компактным носителем выполнено
$$\varphi(A) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(A), \quad A \in \mathcal{M}.$$
Тогда
$$\varphi(\Psi(a)) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\Psi(a)), \quad a \in \mathbb{B}_2.$$
Заметим, что если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ у последовательностей $a, b \in \mathbb{B}_2$ совпадают первые $m$ членов, то системы $\Psi(a)$ и $\Psi(b)$ совпадают на промежутке $[0, m)$. В силу сказанного каждая из функций $\varphi_k \circ \Psi$, $k \in \mathbb{N}$, зависит только от конечного числа членов своего аргумента и поэтому непрерывна. Следовательно, функция $\varphi \circ \Psi$ принадлежит первому классу Бэра. Получили противоречие. Теорема доказана.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Основные научные результаты диссертации**

В диссертации решён ряд важных проблем теории бэровской классификации показателей Ляпунова. К основным результатам диссертации относятся следующие:

1) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова об описании каждого из показателей Ляпунова параметрического семейства линейных дифференциальных систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от параметра равномерно на временно́й полуоси;

2) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем номере бэровского класса каждого из максимальных показателей линейной системы как функции параметра;

3) получено частичное решение задачи В. М. Миллионщикова о минимальных показателях, а именно, вычислен точный номер бэровского класса каждого из минимальных показателей линейной системы как функции параметра для семейства систем с заданной скоростью роста коэффициентов;

4) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова об одновременной достижимости максимальных показателей показателями Ляпунова для системы с неограниченными коэффициентами;

5) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем номере бэровского класса мажоранты (минимальной полунепрерывной сверху в равномерной топологии на пространстве линейных систем) каждого из условных показателей Боля как функции параметра;

6) получено полное решение задачи И. Н. Сергеева о совпадении класса Бэра и класса формул с одинаковым положительным номером.

**Выводы**

В диссертации выделен и изучен важный класс функционалов на пространстве линейных дифференциальных систем — верхнепредельные ляпуновские характеристики. Установлена одновременная достижимость их мажорант (минимальных полунепрерывных сверху в равномерной топологии), а также признаки принадлежности второму классу Бэра верхней и нижней границ их подвижности при возмущениях коэффициентов линейной системы, ограниченных заданной функцией. Для некоторых характеристик, рассматриваемых как функции параметра, полностью описаны их лебеговские множества, множества значений и точки полунепрерывности сверху и снизу. Полученные в работе результаты обобщают и усиливают предшествующие результаты ряда авторов.

**Рекомендации по практическому использованию результатов**

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях по асимптотической теории линейных дифференциальных систем, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям.

**Перспективы дальнейшей разработки темы**

Построение непрерывных параметрических семейств линейных систем, те или иные асимптотические характеристики которых совпадают с заданными функциями параметра, является актуальной задачей теории показателей Ляпунова. В полной мере эта задача решена пока только для небольшого класса характеристик (в диссертации — для показателей Ляпунова семейств, непрерывных в равномерной топологии), для остальных требуются дальнейшее изучение, поиск соответствующих классов функций (некоторые из них намечены в диссертации) и разработка методов их реализации.

Асимптотические характеристики систем с неограниченными коэффициентами до сих пор остаются очень мало изученными. Результаты диссертации отчасти заполняют этот пробел, но в этом направлении остаётся ещё много интересных неисследованных задач.

# Библиографический список


1 Агафонов В.Г. О классе Бэра показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 1092–1093.

2 Агафонов В.Г. О классе Бэра верхнего показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 1089.

3 Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 1992. – 240 с.

4 Ариньш Е.Г. Об одном обобщении теоремы Бэра // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, вып. 3(55). С. 105–108.

5 Банщикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2016. – Т. 26, № 1. С. 15–26.

6 Барабанов Е.А. Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Бел. гос. ун-т. – Мн., 1984. – 15 с.

7 Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 11. – С. 1843–1853.

8 Барабанов Е.А. Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона // Докл. АН БССР. – 1990. – Т. 34, № 3. – С. 200–203.

9 Барабанов Е.А., Конюх А.В. Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1665–1676.

10 Барабанов Е.А., Вишневская О.Г. Точные границы показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы с интегрально ограниченными на полуоси возмущениями // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 5. – С. 29–34.

11 Барабанов Е.А. Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 151–162.

12 Барабанов Е.А. Обобщение теоремы Былова о приводимости и некоторые его применения // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 12. – С. 1592–1596.

13 Барабанов Е.А., Касабуцкий А.Ф. Множества правильности и устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных си-

стем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 67–75.

14 Барабанов Е.А., Касабуцкий А.Ф. Строение множеств неасимптотической устойчивости семейств линейных дифференциальных систем с параметром-множителем // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 155–167.

15 Барабанов Е.А. О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1067–1084.

16 Барабанов Е.А. Строение множеств устойчивости и асимптотической устойчивости семейств линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной. I // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 611–625.

17 Барабанов Е.А. Строение множеств устойчивости и асимптотической устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной. II // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 791–800.

18 Барабанов Е.А. Максимальные группы линейных преобразований, сохраняющих асимптотические свойства линейных дифференциальных систем. II // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 12. – С. 1579–1596.

19 Барабанов Е.А. Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 42–63.

20 Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 10. – С. 1302–1320.

21 Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1595–1609.

22 Басов В.П. О структуре решения правильной системы // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., физ. и хим. – 1952. – № 12. – С. 3–8.

23 Богданов Ю.С. К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 104, № 6. – С. 813–814.

24 Быков В.В. Некоторые вопросы теории показателей Ляпунова: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Моск. гос. ун-т. – М., 1998.

25 Былов Б.Ф. Об устойчивости характеристичных показателей систем линейных дифференциальных уравнений: автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1954.

26 Былов Б.Ф. О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Матем. сборник. – 1965 – Т. 67, № 3. – С. 338–344.

27 Былов Б.Ф. О геометрическом расположении и оценке роста решений возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 7. – С. 882–897.

28 Былов Б.Ф. О геометрическом расположении и оценке роста решений возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 8. – С. 1003–1017.

29 Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

30 Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1785–1793.

31 Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1794–1803.

32 Бэр Р. Теория разрывных функций / Пер. с фр. и редакция А.Я. Хинчина. – М.-Л.: ГТТИ, 1932. – 134 с.

33 Ветохин А.Н. О классе Бэра верхних центральных показателей и верхних особых показателей // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 9. – С. 1600.

34 Ветохин А.Н. О дескриптивном типе множества устойчивых систем // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 853.

35 Ветохин А.Н. О дескриптивном типе множества асимптотически устойчивых систем // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 857.

36 Ветохин А.Н. Точный класс Бэра вспомогательных показателей Боля // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 850–851.

37 Ветохин А.Н. Об одном свойстве множества правильных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 855.

38 Ветохин А.Н. К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1039–1042.

39 Ветохин А.Н. Класс Бэра минимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 10. – С. 1313–1317.

40 Ветохин А.Н. Лебеговские множества показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 849.

41 Ветохин А.Н. О лебеговских множествах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 11. – С. 1567.

42 Ветохин А.Н. О свойствах показателей Ляпунова правильных линейных систем // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 4. – С. 417–423.

43 Ветохин А.Н. К задаче о минорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 7. – С. 950–952.

44 Ветохин А.Н. К бэровской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1302–1311.

45 Ветохин А.Н. О множестве точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1669–1671.

46 Ветохин А.Н. Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями // Совр. пробл. матем. и мех. Т. IX. Матем. Вып. 3. К 80-летию мех.-матем. ф-та. Дифференц. уравнения / Под ред. И.В. Асташовой и И.Н. Сергеева. – М.:, Изд-во Попеч. совета мех.-матем. ф-та МГУ, 2015. – С. 54–71.

47 Ветохин А.Н. Пустота множества точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 3. – С. 282–291.

48 Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 3. – С. 333–340.

49 Ветохин А.Н. Бэровская классификация топологической энтропии динамических систем в случае неинвариантного компакта // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 6. – С. 853–854.

50 Ветохин А.Н. О множестве непрерывности топологической энтропии семейства отображений отрезка, зависящих от параметра // Функц. анализ и его прил. – 2021. – Т. 55, № 3. – С. 42–50.

51 Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 91, № 5. – С. 999–1002.

52 Виноград Р.Э. Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. матем. и мех. – 1953. – Т. 17, вып. 6. – С. 645–650.

53 Виноград Р.Э. Неустойчивость младшего характеристического показателя правильной системы // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 103, № 4. – С. 541–544.

54 Виноград Р.Э. Общий случай устойчивости характеристических показателей и существования ведущих координат // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 119, № 4. – С. 633–635

55 Виноград Р.Э. К теории характеристических показателей Ляпунова: автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1959.

56 Виноград Р.Э. К теории характеристических показателей Ляпунова (автореферат докторской диссертации) // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, № 5. – С. 227–233.

57 Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1957. – Т. 42, № 2. – С. 207–222.

58 Виноград Р.Э. Оценка скачка характеристического показателя при малых возмущениях // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 3. – С. 459–461.

59 Виноград Р.Э. О достижимости центрального показателя // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 7. – С. 1212–1217.

60 Войделевич А.С. Точные границы подвижности вверх показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матриц коэффициентов // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1312–1324.

61 Войделевич А.С. Полное описание коэффициентов неправильности Ляпунова и Перрона линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 322–327.

62 Гаргянц А.Г. О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 8. – С. 1011–1017.

63 Гаргянц А.Г. О существовании линейной дифференциальной системы с заданными показателями Перрона // Изв. РАН. Сер. матем. – 2019. – Т. 83, № 2. – С. 21–39.

64 Гаргянц А.Г. Об отсутствии топологически существенных значений показателя Перрона на решениях линейной дифференциальной системы с

ограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 53–61.

65 Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 252 с.

66 Гонсалес Э. О типичных свойствах показателей Ляпунова уравнений произвольного порядка // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36, вып. 2. – С. 201–211.

67 Гробман Д.М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 1. – С. 121–166.

68 Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

69 Дементьев Ю.И. О классах Бэра показателей Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 11. – С. 1579.

70 Дементьев Ю.И. Пример гладкого семейства линейных систем со скачком свойства правильности и всех показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1580.

71 Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научн. вестн. МГТУ ГА. Сер. матем. – 1999. – № 16. – С. 5–10.

72 Дементьев Ю.И. О значениях младшего показателя Ляпунова вдоль кривых в окрестности данной системы // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 848.

73 Дементьев Ю.И. Пример ступенчатой зависимости от параметра показателей Ляпунова на бесконечно-дифференцируемом семействе кривых // Научн. вестн. МГТУ ГА. Сер. физ. и матем. – 2001. – № 42. – С. 25–30.

74 Дементьев Ю.И. Частичные пределы показателей Ляпунова и их достижимость на кривых в окрестности данной системы // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 11. – С. 1577.

75 Дементьев Ю.И. Поведение показателей Ляпунова линейных систем при малых возмущениях: дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; МГУ. – М., 2002. – 92 с.

76 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

77 Залыгина В.И. О ляпуновской эквивалентности линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1325–1331.

78 Зорич В.А. Математический анализ. – Часть II. – М.: МЦНМО, 2002. – 794 с.

79 Зубов В.И. Колебания и волны. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1989. – 416 с.

80 Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 7. – С. 1186–1192.

81 Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. / ВИНИТИ. – М., 1974. – Т. 12. – С. 71–146.

82 Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 1954–1966.

83 Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 848–858.

84 Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 1. – С. 5–8.

85 Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели и устойчивость по первому приближению // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1982. – № 6. – С. 9–16.

86 Изобов Н.А. Верхняя граница показателей Ляпунова дифференциальных систем с возмущениями высшего порядка // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 5. – С. 389–392.

87 Изобов Н.А., Барабанов Е.А. О виде старшего $\sigma$-показателя линейной системы // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 2. – С. 359–362.

88 Изобов Н.А. О свойствах младшего сигма-показателя линейной дифференциальной системы // Успехи мат. наук. – 1987. – Т. 42, № 4. – С. 179.

89 Изобов Н.А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2168–2170.

90 Изобов Н.А., Макаров Е.К. О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 11. – С. 1870–1880.

91 Изобов Н.А., Степанович О.П. Об инвариантности характеристических показателей при экспоненциально убывающих возмущениях // Archivum mathematicum. – 1990. – V. 26, № 2–3. – P. 107–114.

92 Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 12. – С. 2034–2055.

93 Изобов Н.А., Мазаник С.А. Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 168–173.

94 Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. – Мн.: БГУ, 2006. – 320 с.

95 Изобов Н.А, Ильин А.В. О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1435–1439.

96 Изобов Н.А, Ильин А.В. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 11. – С. 1450–1457.

97 Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1332–1338.

98 Карпук М.В. Полное описание старшего показателя Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 3. – С. 5–16.

99 Карпук М.В. Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 10. – С. 1404–1408.

100 Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщённых расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. – Т. 24, № 2. – С. 55–71.

101 Касабуцкий А.Ф. Правильные линейные дифференциальные системы, множества неправильности которых — интервалы // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 5–9.

102 Касабуцкий А.Ф. О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 58–67.

103 Кожуренко Н.В. О старшем показателе линейных систем с возмущениями, суммируемыми или малыми в среднем со степенью и монотонным весом // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 463–467.

104 Кожуренко Н.В., Макаров Е.К. О достаточных условиях применимости алгоритма вычисления сигма-показателя для интегрально ограниченных возмущений // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 203–211.

105 Коровин С.К., Изобов Н.А. Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1536–1550.

106 Куратовский К. Топология. В 2-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 596 с.

107 Куратовский К. Топология. В 2-х т. – Т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.

108 Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. – М., Ижевск: РХД, 2006. – 168 с.

109 Липницкий А.В. О мере множеств неправильности линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 211–215.

110 Липницкий А.В. Об устойчивости по почти периодическому линейному приближению дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 208–214.

111 Липницкий А.В. Об особом и старшем характеристическом показателях почти периодической линейной дифференциальной системы, аффинно зависящей от параметра // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 3. – С. 347–355.

112 Липницкий А.В. О старшем характеристическом показателе линейной дифференциальной системы, линейно зависящей от параметра // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 590–598.

113 Липницкий А.В. О множествах неправильности в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 911–912.

114 Липницкий А.В. Замкнутые множества неправильности линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 189–194.

115 Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. – М.: Гостехиздат, 1953. – 360 с.

116 Ляпунов А.М. Собр. сочинений. В 6-ти т. – Т. 2. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.

117 Мазаник С.А. Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. – Мн.: БГУ, 2008. – 176 с.

118 Макаров Е.К. О множествах неправильности линейных систем с параметром при производной // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2091–2098.

119 Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 209–212.

120 Макаров Е.К. О мере множеств неправильности линейной системы с параметром при производной // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33, № 4. – С. 302–305.

121 Макаров Е.К., Марченко И.В. Об алгоритме построения достижимых верхних границ для старшего показателя возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1621–1634.

122 Макаров Е.К., Марченко И.В., Семерикова Н.В. Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 215–224.

123 Марченко И.В. Точная граница подвижности вверх старшего показателя линейной системы при возмущениях малых в среднем с весом // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. –С. 1416–1418.

124 Миллионщиков В.М. О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2, вып. 3. – С. 315–318.

125 Миллионщиков В.М. Статистически правильные системы // Матем. сборник. – 1968. – Т. 75, № 1. – С. 140–151.

126 Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей // Сиб. мат. журнал. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99–104.

127 Миллионщиков В.М. О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 4. – С. 749–750.

128 Миллионщиков В.М. Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 7. – С. 1167–1170.

129 Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1775–1784.

130 Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 1408–1416.

131 Миллионщиков В.М. О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. I // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 8. – С. 1344–1356.

132 Миллионщиков В.М. О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. VIII // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 11. – С. 1889–1896.

133 Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38, вып. 1. – С. 92–109.

134 Миллионщиков В.М. Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38, вып. 5. – С. 691–708.

135 Миллионщиков В.М. Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. – 1986. – Т. 39, вып. 1. – С. 29–51.

136 Миллионщиков В.М. Типичное свойство показателей Ляпунова // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40, вып. 2. – С. 203–217.

137 Миллионщиков В.М. Формулы для показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа. – 1987. – Т. 22. – С. 150–179.

138 Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Матем. сборник. – 1988. – Т. 137, № 3. – С. 364–380.

139 Миллионщиков В.М. Нерешенная задача о центральных показателях // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2184–2185.

140 Миллионщиков В.М. О классах Бэра центральных показателей // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 12. – С. 2190.

141 Миллионщиков В.М. Формула для мажоранты показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 1093.

142 Миллионщиков В.М. Нерешенная задача о генеральных показателях // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 1095.

143 Миллионщиков В.М. Относительные показатели Боля и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 6. – С. 1087.

144 Миллионщиков В.М. О генеральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 1090.

145 Миллионщиков В.М. Нерешенная задача из теории условной устойчивости // Успехи матем. наук. – 1991. – Т. 46, № 6. – С. 204.

146 Миллионщиков В.М. Показатель Боля линейной системы, коэффициенты которой могут быть неограниченными // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1461–1462.

147 Миллионщиков В.М. Условные показатели Боля линейных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1464.

148 Миллионщиков В.М. Нерешенная задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1991. Т. 27, № 8. – С. 1457.

149 Миллионщиков В.М. О мажорантах показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 6. – С. 1090.

150 Миллионщиков В.М. Класс Бэра показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 11. – С. 2009.

151 Миллионщиков В.М. Задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 11. – С. 2013.

152 Миллионщиков В.М. Задачи о минорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 11. – С. 2014–2015.

153 Миллионщиков В.М. Линейные системы, обобщенно приводимые к упорядоченно-диагональному виду // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 11. – С. 2020.

154 Миллионщиков В.М. О старшем показателе Ляпунова линейной системы, аналитически зависящей от параметра // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1574.

155 Миллионщиков В.М. Старший показатель Ляпунова линейной системы как функция комплексных параметров // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 848.

156 Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.

157 Персидский К.П. Об устойчивости движения по первому приближению // Матем. сборник. – 1933. – Т. 40, № 3. – С. 284–292.

158 Персидский К.П. О характеристичных числах дифференциальных уравнений // Изв. АН Каз. ССР. Сер. матем. и мех. – 1947. – Вып. 1. – С. 5–47.

159 Персидский К.П. Избр. труды. В 2-х т. – Т. 1. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей. – Алма-Ата: «Наука» Каз. ССР, 1976. – 272 с.

160 Попова С.Н., Банщикова И.Н. Спектральное множество линейной системы с дискретным временем // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. / ВИНИТИ. – М., 2017. – Т. 132. – С. 101–104.

161 Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

162 Пуанкаре А. Избр. труды: в 3-х т. – Т. 1. – М.: Наука, 1971. – 772 с.

163 Пуанкаре А. Избр. труды: в 3-х т. – Т. 2. – М.: Наука, 1972. – 1000 с.

164 Равчеев А.В. О бэровских классах функционалов на пространстве линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 10. – С. 1328–1337.

165 Равчеев А.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 11. – С. 1464–1473.

166 Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40, вып. 2. – С. 925–931.

167 Рахимбердиев М.И., Дауылбаев А.М. О бэровском классе показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений // Матем. журнал. – 2002. – Т. 2, № 2. – С. 57–60.

168 Рахимбердиев М.И. Свойство старшего показателя Ляпунова как разрывной функции системы // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 855.

169 Рахимбердиев М.И., Султанбекова А.О. О свойствах показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений второго порядка как функций линейного параметра // Матем. журнал. – 2008. – Т. 8, № 2. – С. 97–99.

170 Рожин А.Ф. К задаче о классе Бэра в точке для показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1577.

171 Салов Е.Е. О наименьшем классе Бэра минорант промежуточных показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1571.

172 Салов Е.Е. О свойстве верхне-предельности показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 852.

173 Сергеев И.Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 438–448.

174 Сергеев И.Н. Об открытом ядре множества систем дифференциальных уравнений с одним устойчивым показателем Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 6. – С. 1135–1137.

175 Сергеев И.Н. Инвариантность центральных показателей относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 9. – С. 1719.

176 Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 111–166.

177 Сергеев И.Н. Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейных систем при малых в среднем возмущениях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 1986. – Вып. 11. – С. 32–73.

178 Сергеев И.Н., Соловьев А.В. Сглаживание возмущения линейной системы в методе поворотов // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 2008–2009.

179 Сергеев И.Н. Предельные значения показателей Ляпунова в пространствах систем различных классов гладкости // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 2011.

180 Сергеев И.Н. Бэровские классы формул для показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 12. – С. 2092–2093.

181 Сергеев И.Н. Класс Бэра минимальных показателей трехмерных линейных систем // Успехи матем. наук. – 1995. – Т. 50, вып. 4. – С. 109.

182 Сергеев И.Н. О локальных классах Бэра показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1577.

183 Сергеев И.Н. О локальных классах Бэра показателей двумерных систем // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 6. – С. 853.

184 Сергеев И.Н. О локальных классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 11. – С. 1574.

185 Сергеев И.Н. Пример ступенчатой зависимости от параметра показателей Ляпунова и свойства правильности систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 854–855.

186 Сергеев И.Н. Пример одновременной всюду разрывной зависимости от параметра показателей Ляпунова и свойства правильности системы // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 11. – С. 1573.

187 Сергеев И.Н. О различной параметрической зависимости показателей вдоль кривых с общим началом // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 854–855.

188 Сергеев И.Н. Частичные пределы показателей Ляпунова линейной системы и вопросы достижимости // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 858.

189 Сергеев И.Н. Формула для миноранты одного из показателей Ляпунова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. – 1999. – № 4. – С. 22–29.

190 Сергеев И.Н. О классе Бэра миноранты одного из промежуточных показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1572.

191 Сергеев И.Н. Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 3. – С. 388–398.

192 Сергеев И.Н. О достижимости минимальных показателей в классе бесконечно малых возмущений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. – 2000. – № 12. – С. 61–63.

193 Сергеев И.Н. Определение класса Бэра показателя в точке // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1570.

194 Сергеев И.Н. Класс Бэра максимальных показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 11. – С. 1574.

195 Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.

196 Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76, № 1. – С. 149–172.

197 Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейного уравнения произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2013. – Вып. 29. – С. 414–442.

198 Сергеев И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, вып. 5. – С. 732–751.

199 Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2016. – Вып. 31. – С. 177–219.

200 Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2019. – Вып. 32. – С. 325–348.

201 Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. – М.: Изд. центр «Академия», 2013. – 288 с.

202 Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка

// Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2016. – Т. 176, вып. 1. – С. 17–24.

203 Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2021. – Т. 31, вып. 1. – С. 59–69.

204 Султанбекова А.О. О характере зависимости показателей Ляпунова от линейного параметра линейного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. журнал. – 2006. – Т. 6, № 1. – С. 91–95.

205 Султанбекова А.О. Показатели Ляпунова линейного дифференциального уравнения второго порядка как функции линейного параметра // Матем. журнал. – 2006. – Т. 6, № 4. – С. 102–106.

206 Султанбекова А.О. Бэровский класс функций показателей Ляпунова как функций непрерывного параметра линейного дифференциального уравнения $n$-го порядка // Вестник НАН РК. – 2008. – № 5. – С. 18–21.

207 Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.

208 Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

209 Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 280 с.

210 Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. – М.: Мир, 1970. – 442 с.

211 Ширяев К.Е. О классе Бэра экстраординарных показателей Боля в компактно-открытой топологии // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 9. – С. 1598.

212 Ширяев К.Е. Класс Бэра некоторых показателей семейств автоморфизмов векторных расслоений // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 53–57.

213 Ширяев К.Е. Центральный показатель неограниченной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 351–352.

214 Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

215 Babiarz A., Czornik A., Niezabitowski M. On the assignability of regularity coefficients and central exponents of discrete linear time-varying systems // IFAC-PapersOnLine. – 2019. – V. 52, № 28. – P. 64–69.

216 Bagley R.W., Connell E.H., McKnight J.D., Jr. On properties characterizing pseudo-compact spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 9, № 3. – P. 500—506.

217 Baire R. Sur la representation des functions discontinues // Acta Math. – 1906. – V. 30. – P. 1–48.

218 Barabanov E., Czornik A., Niezabitowski M., Vaidzelevich A. Influence of parametric perturbations on Lyapunov exponents of discrete linear time-varying systems // Syst. Control. Lett. – 2018. – V. 122. – P. 54–59.

219 Barreira L., Valls C. Lyapunov regularity via singular values // Trans. Amer. Math. Soc. – 2017. – V. 369. – P. 8409–8436.

220 Battelli F., Palmer K.J. Strongly exponentially separated linear systems // J. Dyn. Differ. Equ. – 2019. – V. 31. – P. 573–600.

221 Bohl P. Über Differentialungleichungen // J. reine und angew. Math. – 1913. – Bd. 144, Hf. 4. – S. 284–318.

222 Cuong L.V. Doan T.S. Assignability of dichotomy spectra for discrete time-varying linear control systems // Discrete Contin. Dyn. Syst. - B. – 2020. – V. 25, № 9. – P. 3597–3607.

223 Czornik A., Mokry P., Nawrat A. On the sigma exponent of discrete linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2010. – V. 55, № 6. – P. 1511–1515.

224 Czornik A., Mokry P., Nawrat A. On the exponential exponents of discrete linear systems // Linear Algebra Appl. – 2010. – V. 433, № 4. – P. 867–875.

225 Czornik A., Niezabitowski M. On the spectrum of discrete time-varying linear systems // Nonlinear Anal.: Hybrid Syst. – 2013. – V. 9. – P. 27–41.

226 Dieci L., van Vleck E. Lyapunov and Sacker–Sell spectral intervals // J. Dyn. Differ. Equ. – 2007. – V. 19, № 2. – P. 265–293.

227 Doan T.S., Palmer K.J., Rasmussen M. The Bohl spectrum for linear nonautonomous differential equations // J. Dyn. Differ. Equ. – 2017. – V. 29. – P. 1459–1485.

228 Dugundji J. Topology. – Boston: Allyn and Bacon, 1966. – 447 p.

229 Engelking R. On functions defined on Cartesian products // Fund. Math. – 1966. – V. 59, № 2. – P. 221–231.

230 Kantorovitch L. Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young // Fund. Math. – 1929. – V. 13. – P. 178–185.

231 Karlova O., Mykhaylyuk V. Limits of sequences of continuous functions depending on finitely many coordinates // Topol. Appl. – 2016. – V. 216. – P. 25-37.

232 Katětov M. On real-valued functions in topological spaces // Fund. Math. – 1951. – V. 38. – P. 85–91; correction, Fund. Math. – 1953. – V. 40. – P. 203–205.

233 Kuznetsov N.V., Alexeeva T.A., Leonov G.A. Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // Nonlinear Dyn. – 2016. – V. 85. – P. 195–201.

234 Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Time-varying linearization and the Perron effects // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2007. – V. 17, № 4. – P. 1079–1107.

235 Lillo J.C. Perturbations of nonlinear systems // Acta math. – 1960. – V. 103, № 1–2. – P. 123–128.

236 Lusin N. Sur la classification de M. Baire // Comp. rend. Acad. Sci. – 1917. – V. 164. – P. 91–94.

237 Makarov E., Niezabitowski M., Popova S., Zaitsev V., Zhuravleva M. On assignment of the upper Bohl exponent for linear discrete-time systems in infinite-dimensional spaces // 25th Int. Conf. Methods Models Autom. Robot. (MMAR). – 2021. – P. 239–244.

238 Mibu Y. On Baire functions on infinite product spaces // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1944. – V. 20, № 9. – P. 661–663.

239 Nawrat A., Czornik A. On the central exponent of discrete time-varying linear systems // 21st Intl. Conf. on Systems Engineering. – 2011. – P.22–25.

240 Palmer K.J. Exponential dichotomy, integral separation and diagonalizability of linear systems of ordinary differential equations // J. Differ. Equ. – 1982. – V. 43, № 2. – P. 184–203.

241 Perron O. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist (erste Mitteilung) // J. reine und angew. Math. – 1913. – Bd. 142, Hf. 4. – S. 254–270.

242 Perron O. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist (zweite Mitteilung) // J. reine und angew. Math. – 1913. – Bd. 143, Hf. 1. – S. 25–50.

243 Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 31, Hf. 4. – S. 748–766.

244 Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 32, Hf. 1. – S. 703–728.

245 Poincare H. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies // Amer. J. Math. – 1885. – V. 7, № 3. – P. 1–56.

246 Pötzsche C., Russ E. Continuity and invariance of the Sacker–Sell spectrum // J. Dyn. Differ. Equ. – 2016. – V. 28. – P. 533–566.

247 Sacker R., Sell G. A spectral theory for linear differential systems // J. Differ. Equ. – 1978. – V. 27. – P. 320–358.

248 Siegmund S. Dichotomy spectrum for nonautonomous differential equations // J. Dyn. Differ. Equ. – 2002. – V. 14. – P. 243–258.

249 Souslin M. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis // Comp. rend. Acad. Sci. – 1917. – V. 165. – P. 88–90.

250 Srivastava S.M. A Course on Borel Sets. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 271 p.

251 Stepanoff W. Sur les suites des fonctions continues // Fund. Math. – 1928. – V. 11. – P. 264–274.

**Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus и RSCI**

252 Быков В.В., Салов Е.Е. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. (Scopus SJR: 0.123). – 2003. – № 1. – С. 33–40. – Перевод: Bykov V.V., Salov E.E. The Baire class of minorants of the Lyapunov exponents // Moscow Univ. Math. Bull. – 2003. – V. 58, № 1. – P. 36–43.

253 Bykov V.V. Local Baire classification of Lyapunov exponents // J. Math. Sci. (Scopus SJR: 0.146) – 2007. – V. 143, № 4. – P. 3217–3225.

254 Быков В.В. Некоторые свойства мажорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.833). – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1291–1301. – Перевод: Bykov V.V. Some properties of majorants of Lyapunov exponents for systems with unbounded coefficients // Differ. Equ. (IF WoS: 0.431) – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1279–1289.

255 Bykov V.V. Bohl exponents and Baire classes of functions // J. Math. Sci. (Scopus SJR: 0.268) – 2015. – V. 210, № 2. – P. 168–185.

256 Bykov V.V. On Baire class one functions on a product space // Topol. Appl. (IF WoS 0.377; Scopus SJR: 0.490). – 2016. – V. 199. – P. 55–62.

257 Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.882). – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 419–425. – Перевод: Bykov V.V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations // Differ. Equ. (IF WoS: 0.371) – 2016. – V. 52, № 4. – P. 413–420.

258 Быков В.В. Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.954). –

2017. – Т. 53, № 4. – С. 441–445. – Перевод: Bykov V.V. Structure of the sets of points of semicontinuity for the Lyapunov exponents of linear systems continuously depending on a parameter in the uniform norm on the half-line // Differ. Equ. (IF WoS: 0.674). – 2017. – V. 53, № 4. – P. 433–438.

259 Быков В.В. О классах Бэра ляпуновских инвариантов // Мат. сборник (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.407). – 2017. – Т. 208, № 5. – С. 38–62. – Перевод: Bykov V.V. On Baire classes of Lyapunov invariants // Sb. Math. (IF WoS: 0.865). – 2017. – V. 208, № 5. – P. 620–643.

260 Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.954). – 2017. – Т. 53, № 12. – С. 1579–1592. – Перевод: Bykov V.V. Functions determined by the Lyapunov exponents of families of linear differential systems continuously depending on the parameter uniformly on the half-line // Differ. Equ. (IF WoS: 0.674). – 2017. – V. 53, № 12. – P. 1529–1542.

261 Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.969). – 2018. – Т. 54, № 12. – С. 1579–1588. – Перевод: Barabanov E.A., Bykov V.V., Karpuk M.V. Complete description of the Lyapunov spectra of families of linear differential systems whose dependence on the parameter is continuous uniformly on the time semiaxis // Differ. Equ. (IF WoS: 0.659). – 2018. – V. 54, № 12. – P. 1535–1544.

262 Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.020). – 2019. – Т. 55, № 10. – С. 1307–1318. – Перевод: Barabanov E.A., Bykov V.V., Karpuk M.V. Complete description of the exponential stability index for linear parametric systems as a function of the parameter // Differ. Equ. (IF WoS: 0.677). – 2019. – V. 55, № 10. – P. 1263–1274.

263 Быков В.В. К задаче Миллионщикова о бэровском классе центральных показателей диффеоморфизмов // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.478). – 2019. – № 5. – С. 17–22. – Перевод: Bykov V.V. To Millionshchikov's Problem on the Baire Class of Central Exponents of Diffeomorphisms // Moscow Univ. Math. Bull (Scopus SJR: 0.200). – 2019. – V. 74, №. 5. – P. 189–194.

264 Барабанов Е.А., Быков В.В. Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси, как функция параметра // Дифференц. уравнения. – 2019 (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.020). – Т. 55, № 12. – С. 1587–1599. – Перевод: Barabanov E.A., Bykov V.V. Lyapunov irregularity coefficient as a function of the parameter for families of linear differential systems whose dependence on the parameter is continuous uniformly on the time half-line // Differ. Equ. (IF WoS: 0.677). – 2019. – V. 55, № 12. – P. 1531–1543.

265 Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН (RSCI; Scopus; WoS JCI: 0.19; ИФ РИНЦ: 0.366). – 2019. – Т. 25, № 4. – С. 31–43.

266 Быков В.В. О лебеговских множествах показателей Изобова линейных дифференциальных систем. I // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.067). – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 41–52. – Перевод: Bykov V.V. Lebesgue sets of Izobov exponents of linear differential systems. I // Differ. Equ. (IF WoS: 0.837). – 2020. – V. 56, № 1. – P. 39–50.

267 Быков В.В. О лебеговских множествах показателей Изобова линейных дифференциальных систем. II // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.067). – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 162–174. – Перевод: Bykov V.V. Lebesgue sets of Izobov exponents of linear differential systems. II // Differ. Equ. (IF WoS: 0.837). – 2020. – V. 56, № 2. – P. 158–170.

268 Быков В.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. (RSCI). – 2020. – Т. 84, № 6. – С. 3–22. – Перевод: Bykov V.V. Complete description of the Lyapunov spectra of continuous families of linear differential systems with unbounded coefficients // Izv. Math. (IF WoS: 1.189; Scopus SJR: 1.057). – 2020. – V. 84, № 6. – P. 1037–1055.

### Аннотации докладов на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете

269 Быков В.В. Классификация Бэра старшего нижнего $\sigma$-показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1573.

270 Быков В.В. Классификация Бэра старшего нижнего показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 854.

271 Быков В.В. Модификация определения класса Бэра показателя в точке // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1577.

272 Быков В.В. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 1664.

273 Быков В.В. К задаче о мажорантах условных показателей Боля // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 903–904.

274 Быков В.В. Генеральные показатели и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1666–1667.

275 Быков В.В. К задаче В.М. Миллионщикова о генеральных показателях диффеоморфизмов // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 901–902.

276 Быков В.В. Условные центральные показатели и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1664–1665.

277 Быков В.В. Относительные мажоранты показателей Ляпунова и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 897–898.

278 Быков В.В. Формула для миноранты старшего показателя Ляпунова линейной системы / // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 812–813.

279 Быков В.В. Об одном свойстве мажорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1507.

280 Быков В.В. К задаче Миллионщикова о центральных показателях диффеоморфизмов // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. С. 1553.

281 Быков В.В. О классе Бэра верхних сигма-показателей Изобова линейных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 818.

282 Быков В.В. Об одном свойстве старшего экспоненциального показателя Изобова линейной системы с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 11. – С. 1558–1559.

283 Быков В.В. Об одном свойстве старшего сигма-показателя Изобова линейной системы с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 852–853.

284 Быков В.В. О лебеговских множествах верхних показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 11. – С. 1590–1591.

285 Быков В.В. О функциях, определяемых показателями Ляпунова семейств систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 850–851.

286 Быков В.В. Описание лебеговских множеств и множеств значений показателей Ляпунова семейств систем, непрерывно зависящих от параметра

равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 11. – С. 1568.

287 Быков В.В. О лебеговских множествах нижних показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 6. – С. 845–846.

288 Быков В.В. О бэровских классах ляпуновских инвариантов // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1567–1569.

289 Быков В.В. О бэровских классах обобщенно ляпуновских инвариантов // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 892–893.

290 Барабанов Е.А., Быков В.В. Обобщение примеров Перрона и Винограда неустойчивости показателей Ляпунова на линейные дифференциальные системы с параметрическими возмущениями // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 11. – С. 1578–1579.

291 Барабанов Е.А., Карпук М.В., Быков В.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 11. – С. 1563–1564.

292 Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 6. – С. 851–853.

**Тезисы докладов и выступлений на конференциях и семинарах**


293 Быков В.В. О классе Бэра показателей Ляпунова в точке // Междунар. конф., посв. 103-летию со дня рожд. И.Г. Петровского (XXI совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского). Москва, 16–22 мая 2004 г. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – С. 41–42.

294 Быков В.В. О классе Бэра мажорант показателей Ляпунова линейных систем с неограниченными коэффициентами // Междунар. конф., посв. памяти И.Г. Петровского (XXII совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского). Москва, 21–26 мая 2007 г. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – С. 60–61.

295 Быков В.В. Бэровская классификация мажорант одного класса показателей линейных систем // Междунар. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посв. 70-летию ректора МГУ акад. В.А. Садовничего. Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 г. Материалы конференции. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – С. 130.

296 Быков В.В. Типичное свойство грубой устойчивости линейной системы, зависящей от параметра // Междунар. матем. конф. «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». Минск, 7–10 декабря 2010 г. Тезисы докладов. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2010. – С. 53–54.

297 Быков В.В. Показатели Боля и классы функций Бэра // Междунар. конф., посв. 110-й годовщине И.Г. Петровского (XXIII совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского). Москва, 30 мая–4 июня 2011 г. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2011. – С. 162.

298 Быков В.В. Некоторые свойства максимальных показателей Ляпунова // XVI Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2014): тез. докладов Междунар. науч. конф. Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. – Ч. 1. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. – С. 29–30.

299 Быков В.В. Об одном свойстве показателей Ляпунова // Тез. докл. Всеросс. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9 – 11 июня 2015 г. / Ижевск: Изд-во «Удмурдтский университет»; редкол.: А.С. Банников [и др.]. – Ижевск, 2015. – С. 38 – 40.

300 Быков В.В. Об одном свойстве старшего экспоненциального показателя Изобова системы с неограниченными коэффициентами // Междунар. матем. конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 7–10

декабря 2015 г. – Ч. 1. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. – С. 19–20.

301 Быков В.В. On Baire classes of Lyapunov invariants // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2016. – P. 55–58.

302 Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Еругинские чтения – 2017: тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Минск, 16 – 20 мая 2017 г.: в 2 ч. / Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2017. – Ч. 1. – С. 23 – 24.

303 Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Материалы II Междунар. науч. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. – С. 47–51.

304 Barabanov E.A., Karpuk M.V., Bykov V.V. Functions defined by n-tuples of the Lyapunov exponents of linear differential systems continuously depending on the parameter uniformly on the semiaxis // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2017. – P. 16–19.

305 Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. О равномерно ограниченных показателях Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем // XVIII Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2018): Тезисы докладов Междунар. науч. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г. – Т. 1. – Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. – С. 32–34.

306 Быков В.В. Полное описание лебеговских множеств верхних сигма-показателей Изобова // Актуальные проблемы прикладной математики: Материалы IV Междунар. научн. конф. – ИПМА КБНЦ РАН Нальчик, 2018. – С. 66.

307 Barabanov E.A., Karpuk M.V., Bykov V.V. On dimensions of subspaces defined by Lyapunov exponents of families of linear differential systems // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2018. – P. 16 – 20.

308 Барабанов Е.А., Быков В.В. Обобщение примеров Перрона и Винограда неустойчивости показателей Ляпунова на линейные дифференциальные системы с параметрическими возмущениями // Современные проблемы математики и механики. Материалы междунар. конф., посв. 80-летию

акад. РАН В.А. Садовничего. – Том I. – М: МАКС Пресс, 2019. – С. 220–223.

309 Барабанов Е.А., Быков В.В. Полное описание коэффициента неправильности Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем // XIX Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2019), материалы Междунар. науч. конф. Могилев, 14–17 мая, 2019 г. – Т. 1. – Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. – С. 28–29.

310 Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // XIX Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2019), материалы Междунар. науч. конф. Могилев, 14–17 мая, 2019 г. – Т. 1. – Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. – С. 32–36.

311 Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, убывающих к нулю на бесконечности // Материалы Междунар. конф. «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посв. 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. – Екатеринбург, 2019. – С. 48–53.

312 Быков В.В. Описание показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Е.А. (Респ. Беларусь, Гродно, 17–20 дек. 2019 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2019. – С. 72–74.

313 Barabanov E.A., Bykov V.V. Generalization of Perron's and Vinograd's examples of Lyapunov exponents instability to linear differential systems with parametric perturbations // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2019. – P. 23 – 25.

314 Барабанов Е.А., Карпук М.В., Быков В.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всеросс. конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г.). – Ижевск, Изд. центр «Удмурдтский университет», 2020. – С. 37–38.

315 Быков В.В. Спектры показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Междунар. конф. по диф. уравн. и дин. сист. [Электронный ресурс]:

тез. докл. / Суздаль, 3 – 8 июля 2020 г.; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. – С. 38–39.

316 Barabanov E.A., Bykov V.V. Description of the linear perron effect under parametric perturbations exponentially decaying at infinity // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2020. – P. 27–30.

317 Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами // Междунар. матем. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посв. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. – С. 19–21.

318 Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами // Материалы IV Междунар. науч. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г.) – Майкоп, изд-во АГУ, 2021. – С. 155–157.

319 Быков В.В. Полное описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами // XIII Белорусская матем. конф.: материалы Междунар. научн. конф., Минск, 22–25 ноября 2021 г.: в 2 ч. / сост. В. В. Лепин; НАН Беларуси, Ин-т математики, Белорусский гос. ун-т. – Мн.: Беларуская навука, 2021. – Ч. 1. – С. 36–37.

320 Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание показателя Перрона линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами // Междунар. конф., посв. выдающемуся математику И.Г. Петровскому (24-е совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского): Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2021. – С. 173–175.