МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Харчева Ирина Сергеевна

Биллиардные книжки как способ реализации особенностей интегрируемых систем

Специальность 1.1.3 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители:

Фоменко Анатолий Тимофеевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН.

Ведюшкина Виктория Викторовна,
доктор физико-математических наук.

Официальные оппоненты:

Соколов Сергей Викторович,
доктор физико-математических наук
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национально-исследовательский университет)», заведующий кафедрой теоретической механики.

Тюрин Николай Андреевич,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН, Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория Теоретической Физики, начальник сектора.

Цветкова Анна Валерьевна,
кандидат физико-математических наук,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория механики природных катастроф, научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 26 мая 2023 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а так же со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС "ИСТИНА": https://istina.msu.ru/dissertations/548734931

Автореферат разослан 25 апреля 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.011.4 ФГБОУ МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор

С. Б. Гашков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация находится на стыке двух научных направлений: теории топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем и теории математических биллиардов. Между ними была обнаружена неожиданная связь. Было доказано, что для любой невырожденной трехмерной бифуркации алгоритмически строится интегрируемый биллиард, слоение Лиувилля которого содержит такую бифуркацию. А также, опираясь на этот результат, было показано, что биллиарды позволяют реализовывать произвольные базы слоений Лиувилля, содержащих такие особенности.

Классической теории математического биллиарда посвящено множество работ. Например, в книгах В. В. Козлова и Д. В. Трещева[1], С. Л. Табачникова[2], В. Драговича и М. Раднович[3] и статье Е. Гуткина[4] дается обзор классических и новых задач в теории биллиарда. В последние годы эта область получила ряд существенных продвижений. Российскими учеными, в том числе, совместно с зарубежными коллегами, были получены следующие прорывные результаты. С одной стороны, А. А. Глуцюком[5], А. Е. Мироновым и М. Бялым[6], В. Ю. Калошиным и А. Соррентино[7] были получены доказательства ряда аналогов и частных случаев классической гипотезы Биркгофа о неинтегрируемости биллиардов на плоских столах вне нескольких узких классов таких столов: софокусных и круговых. С другой стороны, В. В. Ведюшкина открыла конструкцию "биллиардных книжек" — нового класса интегрируемых биллиардов на кусочно-плоских клеточных комплексах специального вида. Биллиардные книжки склеены по общим дугам границы из двумерных плоских интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол либо концентрических окружностей и их радиусами. Перестановки на получившихся ребрах склейки — "корешках" книжки —

[1]В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*,М.: Изд-во МГУ, 1991 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts,* Transl. Math. Monogr., 89, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171 pp.

[2]С. Табачников, *Геометрия и биллиарды*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2011, 180 с.; пер. с англ.: S. Tabachnikov, *Geometry and billiards,* Stud. Math. Libr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005, xii+176 pp.

[3]В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", М.-Ижевск, 2010, 338 с.; пер. с англ.: V. Dragovic, M. Radnovic, *Poncelet porisms and beyond. Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics*, Front. Math., Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2011, viii+293 pp.

[4]E. Gutkin, *Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems*, Regul. Chaotic Dyn., 8:1 (2003), 1-13.

[5]A. A. Glutsyuk, *On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature*, Journal of the European Mathematical Society, 2021. 23, No 3. 995–1049.

[6]M. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*, J. Phys. A: Math. Theor. 49, No45. 455101.

[7]V. Kaloshin, A. Sorrentino, *On the local Birkhoff conjecture for convex billiards*, Ann. of Math. 2018. 188, No1. 315–380.

задают переход шара с одного листа книжки на другой после удара о границу. В третьей главе диссертации показано, что при наличии естественных условий изоэнергетическая поверхность является кусочно-гладким трехмерным многообразием. Конструкция биллиардной книжки хорошо комбинируется, в том числе с сохранением свойства интегрируемости системы, с уже известными: например, можно добавить потенциал или магнитное поле.

Как оказалось, интегрируемые биллиардные книжки обладают весьма широким классом различных слоений Лиувилля. Это было установлено с помощью методов теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, развитой А. Т. Фоменко, его соавторами и учениками[8] [9]. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение другой с сохранением ориентации некоторых критических окружностей. В большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости торы Лиувилля являются замыканиями нерезонансных траекторий на всюду плотном множестве. В таких случаях лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют "одинаковые" замыкания интегральных траекторий на трехмерных уровнях постоянной энергии. Топология слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко-Цишанга (меченой молекулой), который является некоторым графом с числовыми метками. В вершинах этого графа стоят атомы — классы невырожденных бифуркаций двумерных торов Лиувилля. При этом инвариант Фоменко-Цишанга без меток (грубая молекула) является классом гомеоморфности одномерной базы слоения Лиувилля на изоэнергетической поверхности с условием послойной гомеоморфности самих слоений в прообразе малой окрестности произвольной точки базы.

В. Драговичем и М. Раднович[10], В. В. Ведюшкиной (Фокичевой)[11], А. Т. Фоменко и В. А. Кибкало[12], С. Е. Пустовойтовым[13], Г. В. Белозеровым[14], Е. Е. Кар-

[8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация*, т. 1, 2, Издательский дом "Удмуртский университет", Ижевск, 1999, 1: 444 с.; 2: 447 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, vols. 1, 2, Publ. "Udmurt Univ.", Izhevsk 1999, 444 p., 447 pp.; English transl., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL 2004, xvi+730 pp.

[9] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности*, УМН, 45:2(272) (1990), 49–77.

[10] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn.,14:4-5 (2009), 479-494.

[11] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176; англ. пер.: V. V. Fokicheva, *A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics*, Sb. Math., 206:10 (2015), 1463-1507.

[12] A. T. Fomenko, V. A. Kibkalo, *Topology of liouville foliations of integrable billiards on table-complexes*, European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 8, no. 4. – P. 1392-1423.

[13] С. Е. Пустовойтов, *Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле*, Математический сборник. – 2021. – Т. 212, № 2. – С. 81-105; англ. пер.: S. E. Pustovoitov, *Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field*, Sb. Math., 212:2 (2021), 211-233

[14] G. V. Belozerov, *Topological classification of billiards bounded by confocal quadrics in three-dimensional Euclidean space*, Sb. Math., 211:11 (2020), 1503–1538

гиновой[15] и другими была получена серия результатов вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга для различных видов биллиардов. В том числе, оказалось, что для некоторых биллиардов вычисленные инварианты совпадают с инвариантами классических динамических систем гамильтоновой механики[16] [17], например, со случаем Горячева-Чаплыгина[18]. Описанные выше результаты показали, насколько широк класс биллиардов, и позволили поднять вопрос о реализации всех слоений Лиувилля с помощью интегрируемых биллиардов. Этот вопрос был сформулирован[19] в виде следующей гипотезы.

Гипотеза 1 (А. Т. Фоменко)**.** *Интегрируемыми биллиардными книжками можно моделировать:*

- ***(Гипотеза A)*** *любой атом или, другими словами, любую невырожденную (боттовскую) бифуркацию двумерных торов Лиувилля;*
- ***(Гипотеза B)*** *любую грубую молекулу, или, другими словами, базу любого слоения Лиувилля с невырожденными особенностями;*
- ***(Гипотеза C)*** *любую меченую молекулу, или, другими словами, любое слоение Лиувилля;*
- ***(Гипотеза D)*** *любое трехмерное замкнутое изоэнергетическое многообразие любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы. Гипотеза* **D** *является частным случаем гипотезы* **C**.

Первый пункт общей гипотезы — гипотеза **A** — доказан автором совместно с В. В. Ведюшкиной и изложен в пятой главе диссертации. Согласно этому результату, любая бифуркация торов Лиувилля реализуется в изоэнергетическом многообразии подходящей биллиардной книжки. Следующий шаг о справедливости гипотезы **B** также доказан автором совместно с В. В. Ведюшкиной и изложен в шестой главе диссертации. В этой главе алгоритмически построена биллиардная

[15] Е. Е. Каргинова, *Слоение Лиувилля топологических биллиардов на плоскости Минковского*, Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22, № 6. – С. 123-150; англ. пер.: E. E. Karginova, *Liouville foliation of topological billiards in the Minkowski plane*, Fundam. Prikl. Mat., 22:6 (2019), 123-150

[16] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы*, Изв. РАН. Сер. матем., 81:4 (2017), 20-67; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, A. T. Fomenko, *Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems*, Izv. Math., 81:4 (2017), 688-733.

[17] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 63-103.

[18] В. В. Ведюшкина *Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – № 1. – С. 64-68.; англ. пер.: V. V. Vedyushkina *The Liouville foliation of the billiard book modelling the goryachev-chaplygin case*, Moscow University Mathematics Bulletin. – 2020. – Vol. 75. – P. 42-46.

[19] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, *Topological billiards, conservation laws and classification of trajectories*, Functional Analysis and Geometry: Selim Grigorievich Krein Centennial. Edited by Peter Kuchment and Evgeny Semenov. American Mathematical Society. Series: Contemporary Mathematics. Volume 733; 2019; pp.129-148

книжка, которая содержит произвольную наперед заданную базу слоения Лиувилля. Представляется полезной следующая интерпретация результата. Гипотеза **A** вместе с доказанной недавно В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало локальной версией гипотезы А. Т. Фоменко гарантирует, что каждый элемент инварианта Фоменко-Цишанга — метка или тип атома — действительно встречается в инвариантах биллиардов. Доказательство гипотезы **B** означает, что для относительно более слабого, чем лиувиллева эквивалентность, отношения эквивалентности класс интегрируемых биллиардов будет не уже, чем класс всех невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы.

Построение биллиардной книжки по заданной бифуркации согласуется с построением f-графа по атому. Упомянутые f-графы были введены Ошемковым[20], как способ кодирования атомов с помощью графа специального вида, который в свою очередь можно закодировать с помощью трех перестановок. Эти же перестановки возникают на корешках биллиардной книжки, реализующей данный трехмерный атом. Сделанный в диссертации шаг по алгоритмической реализации баз слоений Лиувилля опирается на реализацию атомов. В результате алгоритма биллиардная книжка, реализующая базу слоения Лиувилля, является “склейкой” биллиардных книжек, реализующих каждую бифуркацию по отдельности. Алгоритм позволяет предъявить перестановки на корешках получившейся биллиардной книжки. Это означает, что любая база слоения Лиувилля кодируется набором алгоритмически вычисляемых перестановок.

Отметим недавнюю работу В.Драговича и М.Раднович [21], совместно с S .Gasiorek, написанную в близкой парадигме: с помощью алгоритмически конструируемых биллиардных книжек авторами работы промоделированы введенные ими ранее[22] упорядоченные биллиардные игры — режимы движения биллиардного шара по плоскости с отражениями от нескольких софокусных эллипсов. В указанной работе также вычисляются грубые молекулы некоторых построенных книжек.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели.

1. Доказать, что фазовое пространство динамической системы биллиардной книжки ненулевого уровня энергии является четырехмерным топологическим кусочно-гладким многообразием, а его ограничение на произвольный

[20] А. А. Ошемков, *Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей*, Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН, **205**, Наука, М., 1994, 131–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, *Morse functions on two-dimensional surfaces. Encoding of singularities.* Proc. Steklov Inst. Math. **205**, 119-127 (1995); translation from Tr. Mat. Inst. Steklova **205** (1994), 131–140.

[21] V. Dragović, S. Gasiorek, M. Radnović, *M. Billiard Ordered Games and Books*, Regul. Chaot. Dyn., 27, 132-150 (2022).

[22] V. Dragović, M. Radnović, *Cayley-Type Conditions for Billiards within k Quadrics in Rd*, J. Phys. A, 2004, vol. 37, no. 4, pp. 1269-1276.

уровень энергии является топологическим изоэнергетическим трехмерным многообразием.

2. Показать возможность реализации любой невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля с помощью биллиардных книжек. Предъявить алгоритм в явном виде, по которому для любой наперед заданной бифуркации из указанного класса конструируется биллиардная книжка, реализующая ее.

3. Также, как и с реализацией бифуркаций, предъявив явный алгоритм, продемонстрировать реализацию любой базы слоения Лиувилля с помощью биллиардных книжек.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

1. Изоэнергетическая поверхность произвольного ненулевого уровня энергии и их объединение в фазовом пространстве для произвольной биллиардной книжки являются соответственно трехмерным и четырехмерным кусочно-гладкими топологическими многообразиями.

2. Справедлива гипотеза А. Т. Фоменко о реализации произвольной невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля при помощи биллиардных книжек.

3. Справедлива гипотеза А. Т. Фоменко о реализации при помощи биллиардных книжек произвольной базы слоения Лиувилля, ограниченной на трехмерное изоэнергетическое многообразие.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является биллиардная книжка — обобщение интегрируемых биллиардов в областях плоскости, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Биллиардная книжка получается склейкой нескольких таких биллиардов по их общим гладким дугам границы. Движение шара на них задается одним и тем же гамильтонианом, имеет один и тот же дополнительный интеграл, являющийся почти всюду независимым и находящимся в инволюции с гамильтонианом системы. Для таких систем, как и для гладких интегрируемых гамильтоновых систем, оказывается применима теория инвариантов Фоменко-Цишанга. Последние в рамках диссертации являются предметом исследования.

Научная новизна

Все положения диссертации, выносимые на защиту, являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами. Кроме того, диссертация содержит следующие вспомогательные результаты, которые также являются новыми:

1. лемма о коммутирующих перестановках — необходимое и достаточное условие задания корректной динамики на биллиардной книжке;

2. конструирование биллиардной книжки по конечному набору перестановок;

3. кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для определенного класса биллиардных книжек;

4. явный алгоритм реализации произвольной невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля при помощи биллиардных книжек;

5. явный алгоритм реализации произвольной невырожденной (боттовской) бифуркации двумерных торов Лиувилля при помощи биллиардных книжек в терминологии f-графов;

6. явный алгоритм реализации произвольной базы слоения Лиувилля на трехмерном изоэнергетическом многообразии при помощи биллиардных книжек.

Методы исследования

В исследовании применяются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с одной и двумя степенями свободы, построенной А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым и многими другими, а также методы вычисления таких инвариантов для математических биллиардов, разработанные В. В. Ведюшкиной.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер и находится на стыке теории топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем и теории математических биллиардов. Результаты, полученные в диссертации, позволяют реализовывать с помощью биллиардных книжек элементы других гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, большинство из которых не решаются в численном виде. Преимущество биллиардных книжек по сравнению с другими интегрируемыми системами заключается в том, что динамика на них устроена просто, а сложность динамических систем реализуется наглядной сложностью двумерного клеточного комплекса — области, по которой движется материальная точка (биллиардный шар). Клеточный комплекс и движение материальной точки на нем, в свою очередь, задается конечным набором перестановок. Таким образом, ценность данного исследования заключается в том, что разной степени сложности интегрируемые гамильтоновы системы с некоторой точностью возможно описать наглядными биллиардными книжками, задающимися перестановками и обладающими каноническим квадратичным интегралом. Кроме того, результаты диссертации являются важными для дальнейшего развития вопроса доказательства или опровержения гипотезы А. Т. Фоменко, работа над которой сейчас активно продолжается А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкиной, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтовым и другими.

Апробация диссертации

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств, опубликованы в пяти статьях [1-5] (см. стр. 18) в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ, а также прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Молодежная Международная научная конференция “Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения”, Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет, Россия, 23-25 декабря 2016;

2. XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов — 2017”, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 20 апреля 2017;

3. Международная молодежная научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, Воронеж, Россия, 13-16 ноября 2017;

4. “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2018”, Воронеж, Россия, 25-31 января 2018;

5. XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов 2018”, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 9-13 апреля 2018;

6. “Geometry, Dynamics, Integrable Systems — GDIS 2018”, Долгопрудный, МФТИ, Россия, 5-9 июня 2018;

7. “International Conference on Topology and its Applications — 2018”, Нафпактос, Греция, 7-11 июля 2018;

8. “Integrable Systems and Nonlinear Dynamics”, Ярославль, Россия, 1-5 октября 2018;
9. Вторая Международная Молодежная Научная Школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, Воронеж, Россия, 13 ноября - 16 декабря 2018;
10. “Workshop on Applied Topology 2019”, Kyoto University, Киото, Япония, 7-11 января 2019;
11. XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2019”, Москва, Россия, 11 апреля 2019;
12. “Workshop on Mathematical Billiards: 2019”, Сидней, Австралия, 24-27 июня 2019;
13. “New Methods in Differential Geometry”, Йена, Friedrich-Schiller University, Германия, 18-20 декабря 2019;
14. “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2020”, Воронеж, Россия, 27-30 января 2020;
15. “Ломоносовские чтения 2020”, Москва, Россия, 19-28 октября 2020;
16. IV-ая международная молодежная научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, посвященная 90-летию со дня рождения профессора Ю.Г. Борисовича, Воронеж, Россия, 9-11 ноября 2020;
17. XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2020”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 10-27 ноября 2020;
18. School for young mechanicians and mathematicians “Mathematical Methods of Mechanics”, Москва, Россия, 10-12 ноября 2020;
19. “Dynamics in Siberia-2021”, Новосибирск, НГУ, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, 1-6 марта 2021;
20. Student Educational School-Conference “Mathematical Spring 2021: Invitation to Dynamical Systems”, ВШЭ, Россия, 30 марта - 2 апреля 2021;
21. XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2021”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 12-23 апреля 2021;

22. “Конференция международных математических центров мирового уровня 2021”, Сочи, Сириус, Россия, 9-13 августа 2021;
23. Международная конференция “Лобачевские чтения”, Казань, Россия, 30 июня - 4 июля 2022;
24. Семинар “Современные геометрические методы” под руководством академика А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, проф. В. В. Ведюшкиной, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. А. Кибкало на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, неоднократно: 6 апреля 2017, 4 октября 2017, 20 февраля 2019, 12 февраля 2020, 19 февраля 2020, 28 октября 2020;
25. Семинар “Kyoto Saturday Topology Seminar”, University of Education, Киото, Япония, 12 января 2019;
26. Семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 31 октября 2022.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Текст работы изложен на 123 страницах. Список литературы содержит 53 наименования.

Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание. В **первой главе** приведены основные понятия теории математического биллиарда, а также вводится понятие биллиардной книжки и описываются естественные ограничения на перестановки биллиардных книжек. Сформулируем в этом разделе некоторые определения из этой главы для более детального изложения.

Определение. Рассмотрим некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается от гладкой части границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется по непрерывности (детали см. в первой главе). Тогда *биллиардом* в области Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

Классическим случаем биллиарда является биллиард в области плоскости, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Такой биллиард в работах В. В. Ведюшкиной называется элементарным. Этот класс широко известен благодаря интегрируемости рассматриваемой динамической системы. Ее интегрируемость вытекает из теоремы Якоби-Шаля. Она имеет следующую наглядную интерпретацию. В таком биллиарде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории направлен по касательной к фиксированному эллипсу или гиперболе из того же софокусного семейства, что и дуги границы.

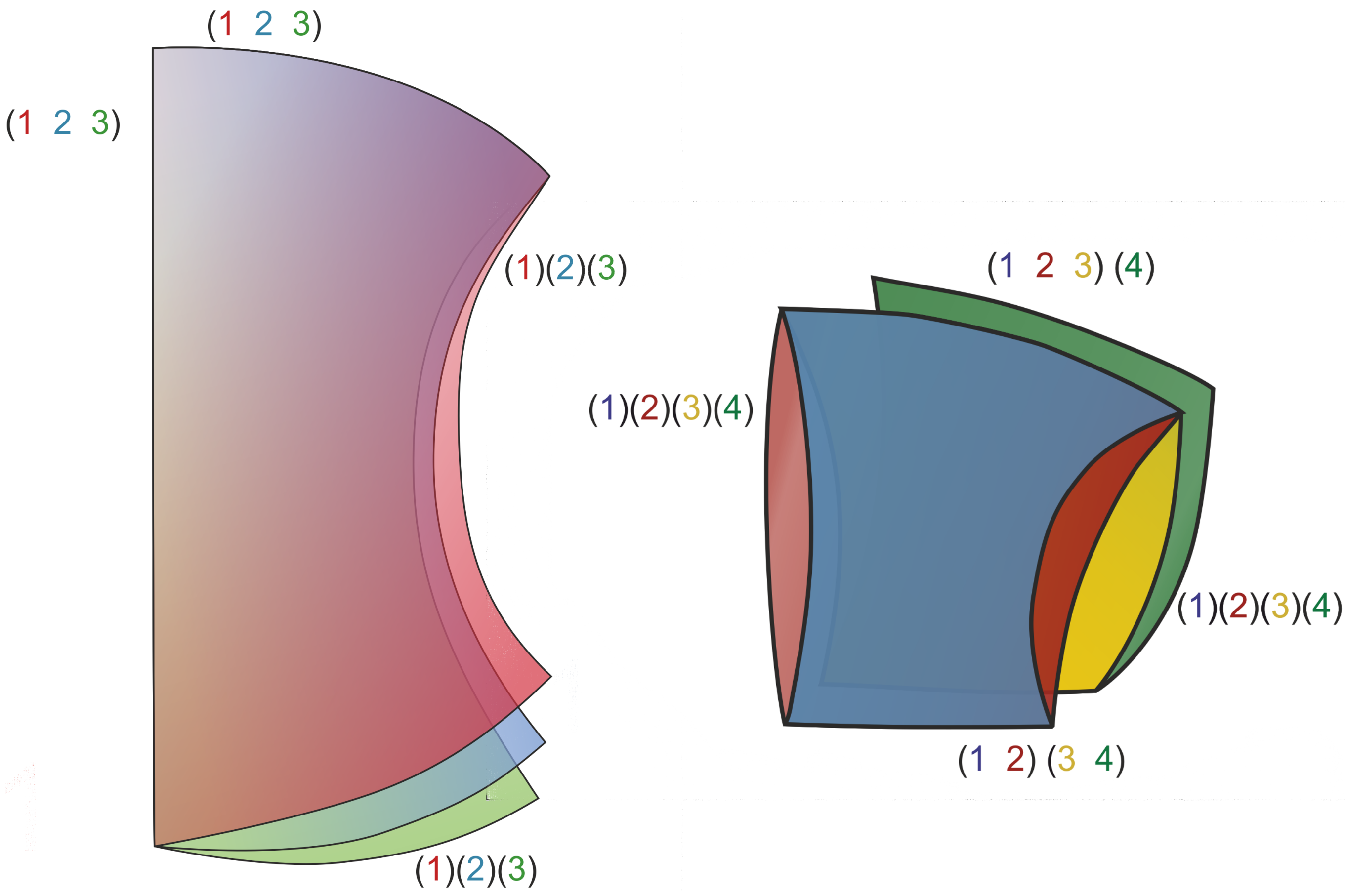

Рис. 1: Примеры биллиардных книжек.

Биллиардная книжка — это обобщение элементарного биллиарда, полученное склейкой нескольких областей, ограниченных дугами софокусных квадрик, в клеточный комплекс (см. рис. 1). Более детально, рассмотрим двумерный клеточный комплекс, двумерными клетками которого являются элементарные биллиарды. Одномерными клетками комплекса являются сегменты границ элементарных биллиардов — участки между изломами граничных кривых. Описанный выше клеточный комплекс назовем *биллиардным комплексом.* Рассмотрим движение на этом комплексе. Материальная точка движется внутри областей (двумерных клеток комплекса или листов книжки) по прямой, абсолютно упруго отражается и переходит с одной области на другую. Переход между областями (листами) задается с помощью перестановок на ребрах склейки (одномерных клетках комплекса или корешках книжки). Такие перестановки являются циклическими перестановками из номеров листов, примыкающих к рассматриваемому ребру. Динамическая система, заданная описанным выше движением материальной точки по биллиардному комплексу называется *биллиардной книжкой*.

Также заметим, что на перестановки есть естественное ограничение. Изометрично спроектируем все листы биллиардного комплекса на плоскость. Если образ нескольких ребер клеточного комплекса при этой проекции является одной и той же дугой плоскости, то объединим соответствующие им циклы в одну перестановку (эти циклы, очевидно, независимы). Для непрерывности движения частицы по книжке потребуем коммутирование перестановок в нульмерных клетках. В терминах проекции это означает, что перестановки, соответствующие дугам двух квадрик в окрестности точки пересечения последних, коммутируют. Условие коммутирования перестановок в углах книжки является необходимым и достаточным условием для того чтобы продолжение траектории, попавшей в вершину угла, было корректно определено. Обозначим через l_1 и l_2 дуги квадрик, которые имеют общую точку O и обозначим через σ_1 и σ_2 соответствующие им коммутирующие перестановки. Траектория, попавшая в вершину O, с одной стороны является пределом близких траекторий, которые сначала ударяются о корешок l_1, а потом о корешок l_2. Такие траектории меняют лист согласно перестановке $\sigma_2 \circ \sigma_1$. С другой стороны, она же является пределом траекторий, которые ударяются о корешки в другом порядке и меняют лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Получается, что материальная точка при попадании в вершину угла поменяет лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ вследствие коммутирования σ_1 и σ_2. Такое ограничение подробно описано в первой главе в лемме о коммутирующих перестановках.

Биллиардная книжка, также как и элементарный биллиард, является кусочно-гладкой интегрируемой системой, поскольку дополнительный интеграл элементарных биллиардов порождает дополнительный интеграл биллиардных книжек. Но преимуществом биллиардных книжек является тот факт, что динамическая система получается более богатой и сложной по сравнению с элементарными биллиардами.

Во **второй главе** описаны элементы теории инвариантов Фоменко-Цишанга, основанной на изучении лиувиллевой эквивалентности замыканий траекторий интегрируемых гамильтоновых систем. Эта эквивалентность слабее траекторной, поскольку описывает не сами решения, а их замыкания. В случае невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем почти все решения имеют вид иррациональной обмотки тора Лиувилля. Поэтому лиувиллева эквивалентность, хоть и не дает решения в явном виде, позволяет достаточно подробно описывать решения системы. А именно, она показывает, как фазовые пространства расслоены на торы Лиувилля.

В этой главе приводятся основные определения, конструкции и теоремы теории инвариантов Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе дано описание атомов — бифуркаций торов Лиувилля — и их представление в виде f-графа. Напомним ключевые понятия, активно используемые в диссертации — атом, грубая молекула (инвариант Фоменко), грубая лиувиллева эквивалентность.

Пусть задана интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система (M^4, ω, H, f) на симплектическом многообразии M^4 с формой ω и функционально независимым гамильтонианом H и дополнительным первым интегралом f, находящимися в инволюции. Для этой системы рассмотрим неособые *изоэнергетические многообразия* $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$, являющиеся поверхностями уровня гамильтониана H при некоторой константе h. На изоэнергетическом многообразии Q^3 задано слоение дополнительным первым интегралом f. Это слоение является *слоением Лиувилля*, все регулярные слои которого — двумерные гладкие торы. Базой слоения Лиувилля является *граф Риба*. Каждой точке на ребре графа Риба соответствует связная компонента слоя, являющаяся двумерным тором. Вершинам графа соответствует критическая связная компонента слоя, инвариантная окрестность которого называется *атомом*, являющимся бифуркацией одного набора двумерных торов в другой. В теории инвариантов Фоменко-Цишанга все атомы полностью описаны и закодированы буквами. Граф Риба, вершины которого оснащены соответствующими им атомами, называется *грубой молекулой* или *инвариантом Фоменко*.

Определение. Две интегрируемые по Лиувиллю динамические системы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм баз слоений Лиувилля, который может быть локально (в окрестности каждой точки базы) поднят до послойного гомеоморфизма.

Теорема (А.Т. Фоменко)**.** *Две интегрируемые по Лиувиллю динамические системы грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их грубые молекулы совпадают.*

Атомы и грубые молекулы используются при построении более тонкого инварианта интегрируемых гамильтоновых систем — *меченой молекулы*. Она получается из грубой молекулы путем оснащения ее ребер и некоторых связных подграфов числовыми метками. Диссертация посвящена реализации грубых молекул, поэтому детально останавливаться на полном инварианте не будем.

Из результатов А.Т.Фоменко об особенностях функций Морса-Ботта следует, что все невырожденные (боттовские) трехмерные атомы являются расслоением Зейферта с особыми слоями типа $(2, 1)$ над двумерными атомами, то есть бифуркациями гамильтоновой системы с одной степенью свободы. А они, в свою очередь, склеены из крестов (подробнее см. вторую главу). Благодаря такому виду стала возможна реализация всех атомов при помощи биллиардных книжек.

Кроме того, существует представление атомов в виде f-графов, введенное А. А. Ошемковым. Такие графы кодируются тремя перестановками, а ориентируемые ребра графа соответствуют движению материальной точки в окрестности бифуркаций. Представление атомов в виде f-графов, как оказывается, также удобно для иллюстрации алгоритма реализации атомов с помощью биллиардных книжек.

Третья глава посвящена формальному представлению биллиардной книжки в виде интегрируемой по Лиувиллю системы. В нем есть несколько неочевидных элементов, которые подробно разобраны в этой главе.

Во-первых, определено фазовое пространство M^4 биллиардной книжки и заданы на нем явные формулы гамильтониана H и дополнительного первого интеграла Λ, отвечающего параметру каустики. Чтобы для биллиардной книжки на биллиардном комплексе $X = X^0 \cup X^1 \cup X^2$ описать фазовое пространство M^4, нужно рассмотреть несвязное объединение всех листов, считая границу для каждого листа отдельно:

$$[X]^2 := \bigsqcup_{e^2 \in X^2} \overline{e}^2,$$

и каждой точке из этого объединения сопоставить ненулевой вектор скорости $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Затем, у полученного декартового произведения необходимо отождествить точки, которые соответствуют отражению материальной точки от границы листов биллиардной книжки и переходу с листа на лист. Это отношение эквивалентности в зависимости от положения точки на биллиардном комплексе и направления вектора скорости подробно описано в третьей главе.

Во-вторых, доказано, что фазовое пространство биллиардной книжки, а также ее изоэнергетические многообразия положительного уровня энергии являются кусочно-гладкими топологическими многообразиями. Потенциально они могли оказаться более сложным объектом, например, клеточными комплексами, поскольку движение определено на биллиардном комплексе, который в общем случае не является кусочно-гладким многообразием. Для этого результата важно, что биллиардная книжка удовлетворяет критерию из леммы о коммутирующих перестановках. Этот результат выносится на защиту.

Теорема (Харчева)**.** *(см. теорему в [3] и следствие из нее) Для любой биллиардной книжки фазовое пространство и изоэнергетическое многообразие положительного уровня энергии являются топологическими кусочно-гладкими четырехмерными и трехмерными многообразиями соответственно.*

В-третьих, рассматриваемая динамическая система биллиардной книжки является не гладкой, а кусочно-гладкой, как и большинство других биллиардов. Это означает, что к системе не применима теорема Лиувилля. Значит, к такой системе также не применима теория инвариантов Фоменко-Цишанга в классическом виде. В этой главе было сформулировано обобщение инвариантов Фоменко-Цишанга для кусочно-гладких биллиардных книжек. Но заметим, что в отличие от гладких систем, для кусочно-гладких биллиардных книжек необходимо отдельно рассматривать регулярные слои и доказывать, что они состоят из двумерных торов.

В **четвертой главе** в классе биллиардных книжек выделяется два подкласса **a** и **b**, которые необходимы для реализации атомов и грубых молекул.

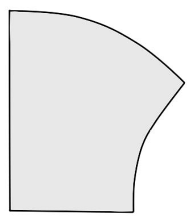

Рис. 2: Область A'_0.

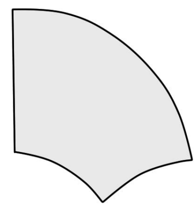

Рис. 3: Область B_0.

Определение. Биллиардная книжка принадлежит *классу* $\mathbf{a}$ (*классу* $\mathbf{b}$), если все ее листы имеют тип A'_0 (A'_0 или B_0), изображенный на рис. 2 (рис. 2 и 3), и правым границам всех листов соответствуют тождественные перестановки, а нижним границам всех листов — нетождественные.

Начиная с этой главы, будем рассматривать биллиардные книжки только из этих классов. Для них упрощается описание слоения Лиувилля и движения материальной точки, а также верно несколько вспомогательных лемм.

Глава содержит переформулировку леммы о коммутирующих перестановках для классов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ биллиардных книжек. Далее в диссертации мы будем неоднократно пользоваться описанным в этой лемме ограничением на перестановки и проверять с помощью него корректность задания движения на биллиардном комплексе. Например, лемма о коммутирующих перестановках используется при конструировании биллиардных книжек класса $\mathbf{a}$ по трем перестановкам и биллиардных книжек класса $\mathbf{b}$ по семейству перестановок, описанных в этой главе. Биллиардные книжки, построенные этими способами, корректны согласно лемме о коммутирующих перестановок.

Также в этой главе доказывается кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для биллиардных книжек классов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. А именно, явно указываются критические слои и доказывается, что остальные слои гомеоморфны несвязному объединению двумерных кусочно-гладких торов. Более того, каждый из торов соответствует некоторому движению на комплексе, которое можно явно задать с помощью перестановки, построенной по перестановкам биллиардных книжек.

Пятая глава содержит один из основных результатов — теорему о реализации атомов при помощи биллиардных книжек, подтверждающую справедливость гипотезы Фоменко $\mathbf{A}$.

Теорема (Ведюшкина-Харчева)**.** *(см. теорему 2 в [2]) Гипотеза Фоменко* $\mathbf{A}$ *верна, а именно, для любого невырожденного (боттовского) атома алгоритмически строится биллиардная книжка класса* $\mathbf{a}$*, такая что в ее изоэнергетическом многообразии* Q^3 *слоение Лиувилля в прообразе окрестности особого значения интеграла* Λ*, отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

В этой главе приводится явный алгоритм построения биллиардной книжки,

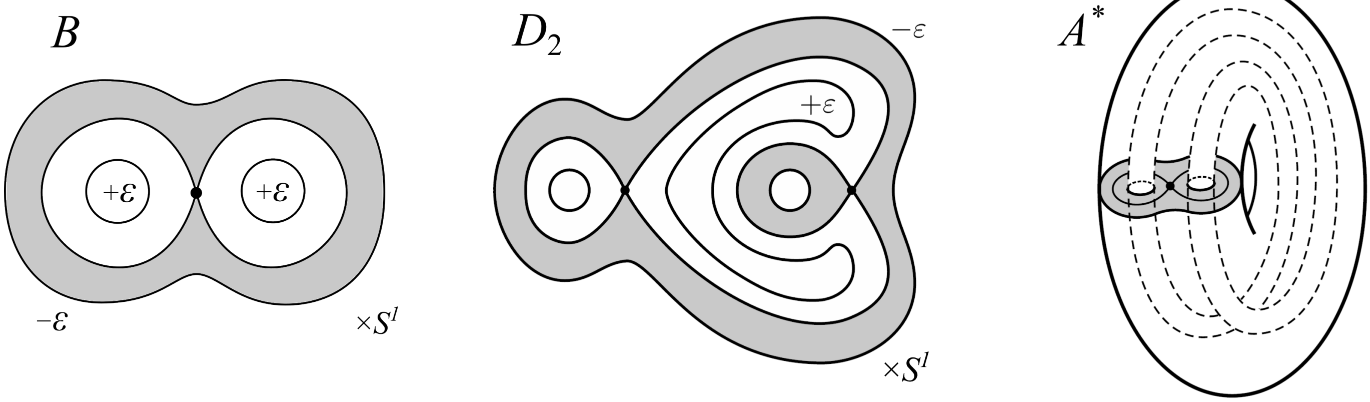

Рис. 4: Атомы B, D_2 и A^*.

реализующей произвольный боттовский атом, вычисляется грубая молекула для такой биллиардной книжки, демонстрируется алгоритм на примерах атомов B, D_2 и A^* (см. рис. 4), а затем, предъявляется доказательство теоремы о реализации атомов, подтверждающее корректность сформулированного алгоритма. В конце главы дается более простая переформулировка алгоритма на язык f-графов.

Шестая глава посвящена заключительному основному результату, опирающемуся на предыдущие. В ней содержится теорема о реализации произвольной грубой молекулы при помощи биллиардных книжек, подтверждающая справедливость гипотезы Фоменко **B**.

Теорема (Ведюшкина-Харчева)**.** *(см. теорему 6 в [5]) Гипотеза Фоменко* **B** *верна, то есть любая грубая молекула интегрируемой гамильтоновой системы с невырожденными (боттовскими) бифуркациями торов Лиувилля реализуется биллиардными книжками. Более точно: по любой такой грубой молекуле алгоритмически строится биллиардная книжка класса* **b** *с каноническим квадратичным интегралом* Λ*, отвечающим параметру каустики, такая что грубая молекула, соответствующая этой системе, изоморфна заданной изначально грубой молекуле.*

Изложение в шестой главе структурировано так же, как и в предыдущей. Сначала приводится явный алгоритм построения биллиардной книжки, реализующей произвольную грубую молекулу. Согласно этому алгоритму, для реализации произвольной грубой молекулы сначала необходимо реализовать каждый из атомов, содержащийся в ней, затем расположить их на разных уровнях интеграла и последовательно склеивать ребра в произвольном порядке. Все эти действия соответствуют некоторому последовательному изменению биллиардной книжки. Доказано, что склейка ребра по алгоритму действует локально и не затрагивает оставшуюся часть молекулы. После склейки всех ребер получается необходимая меченая молекула.

Далее, алгоритм проиллюстрирован на примере реализации грубой молекулы, содержащей в себе атомы B, D_2 и A^*. Эти атомы были реализованы в виде примера в пятой главе. В шестой главе они последовательно склеиваются по ребрам. При этом для наглядности на каждом этапе преобразования биллиардной книжки производится вычисление перестановок, соответствующих торам на регулярных уровнях и движению на биллиардном комплексе. Напомним, что в четвертой главе было сформулировано это соответствие.

В конце приводится доказательство теоремы о реализации грубых молекул, разбитое на несколько лемм и показывающее корректность алгоритма.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН проф. А. Т. Фоменко и проф. В. В. Ведюшкиной за интересные непростые задачи. Ваше вдохновляющее руководство, профессионализм, а также теплая поддержка и внимание на протяжении длительного этапа совместной работы позволили преодолеть множество трудностей, дали уверенность и силы продолжать исследование.

Также, автор искренне благодарит весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за предоставленные большие возможности в реализации своего научного потенциала, за открытость к обсуждению любых задач, за творческую и доброжелательную атмосферу.

Заключение

Диссертация посвящена реализации атомов и грубых молекул с помощью биллиардных книжек и подтверждает справедливость первых двух пунктов гипотезы Фоменко о биллиардах, а также содержит следующие вспомогательные результаты.

Сформулировано ограничение на перестановки в биллиардном комплексе, являющееся критерием для корректного задания биллиардной книжки, то есть движения на биллиардном комплексе.

Доказано, что фазовое пространство и изоэнергетическое многообразие (на положительном уровне энергии) биллиардных книжек являются кусочно-гладкими топологическими четырехмерными и трехмерными многообразиями соответственно.

Сформулировано обобщение инвариантов Фоменко-Цишанга на случай кусочно-гладких динамичексих систем, которыми являются биллиардные книжки.

Выделены классы **a** и **b** биллиардных книжек. Для этих классов доказана серия лемм: лемма о конструировании биллиардной книжки класса **a** по трем перестановкам, лемма о конструировании биллиардной книжки класса **b** по набору перестановок, кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для биллиардных книжек классов **a** и **b**.

Сформулированы алгоритмы реализации произвольного атома без звездочек и реализации произвольного атома со звездочками. Алгоритмы дополнены примерами и доказана их корректность. Также вычислена грубая молекула для биллиардных книжек, построенных по этим алгоритмам и дана их упрощенная переформулировка в терминах f-графов.

В рамках реализации грубых молекул биллиардными книжками сформулированы следующие алгоритмы.

- Алгоритм склейки двух произвольных атомов без звездочек по ребру.
- Общий алгоритм моделирования 3-атомов, который обобщает алгоритмы реализации атомов со звездочками и без и приводит книжки, моделирующие 3-атомы, к единому виду.
- Алгоритм склейки по ребру двух произвольных атомов, со звездочками или без.
- Алгоритм реализации любой грубой молекулы.

Перечисленные алгоритмы снабжены примерами и доказана их корректность.

Полученные в диссертации результаты можно развивать в следующих направлениях.

Было замечено, что в биллиардных книжках класса **a** встречаются неботтовские бифуркации, в которых при одной вершине склеены не по два полукреста, а три и более. Такие бифуркации получаются склейкой по нижней границе соответствующего количества листов. Принципы конструирования неботтовских бифуркаций остаются теми же, что и в случае боттовских атомов, но здесь появляется более сложное слоение Зейферта, которое влечет трудности в нахождении требуемых перестановок. Кроме того, получившиеся перестановки должны удовлетворять критерию, описанному в лемме о коммутирующих перестановках. Таким образом, остается отрытым вопрос о реализации неботтовских бифуркаций, который сейчас исследуется А. А. Кузнецовой.

Интересным является вопрос о топологических свойствах биллиардных книжек, реализующих те или иные упорядоченные биллиардные игры В.Драговича и М.Раднович. Эти вопросы в настоящее время изучаются К.Е. Тюриной и Д.А. Туниянц.

Кроме того, остаются открытыми два пункта гипотезы Фоменко о реализации меченых молекул и — их частном случае — изоэнергетических многообразий. В рамках продвижения по этой гипотезе В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало было показано, что произвольные значения числовых меток реализуются в некоторых слоениях Лиувилля. Иными словами, произвольные “элементы” меченой молекулы — 3-атомы и числовые метки — реализуются некоторыми подходящими биллиардами, но пока что лишь “по отдельности” или в некоторых комбинациях друг с другом[23] [24]. Интересно, какими в итоге окажутся “препятствия”, отделяющие реализуемые биллиардами слоения Лиувилля от не реализуемых.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. Vedyushkina V. V., Fomenko A. T., Kharcheva I. S., *Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards*, Doklady Mathematics. — 2018. — Vol. 97, no. 2. — P. 174–176. / Фоменко А.Т. принадлежит часть статьи, посвященная изложению методов лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы; равноценный вклад с Ведюшкиной В.В. – теорема 2.
   Индексируется в Scopus, Web of Science, IF 0,625.

2. Vedyushkina V. V., Kharcheva I. S., *Billiard's books can model all three-dimensional bifurcations of integrable hamiltonian systems*, Sbornik Mathematics. — 2018. — Vol. 209, no. 12. / Равноценный вклад автора с Ведюшкиной В.В. – теорема 2.
   Индексируется в Scopus, Web of Science, IF 1,133.

3. Kharcheva I. S., *Isoenergetic manifolds of integrable billiard books*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2020. — Vol. 75, no. 4. — P. 149–160.
   Индексируется в Scopus, Web of Science, IF 0,160.

4. Kibkalo V. A., Fomenko A. T., Kharcheva I. S., *Realizing integrable hamiltonian systems by means of billiard books*, Transactions of the Moscow Mathematical Society. — 2021. — Vol. 82. — P. 37–64. / Лично Харчевой И.С. принадлежат теоремы 2.6-2.7; равноценный вклад автора с Ведюшкиной В.В. – теорема 2.4.
   Индексируется в Scopus, Web of Science, IF 0,739.

[23]В. В. Ведюшкина, *Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2021, Т. 2021, № 2., С. 28-32; англ. пер.: V. V. Vedyushkina, *Local modeling of liouville foliations by billiards: Implementation of edge invariants*, Moscow University Mathematics Bulletin, 2021., Vol. 76, no. 2., P. 60-64.

[24]В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, *Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем*, Чебышевский сборник., 2022., Т. 23, № 1., С. 53-82.

5. Vedyushkina V. V., Kharcheva I. S., *Billiard books realize all bases of liouville foliations of integrable hamiltonian systems*, Sbornik Mathematics. — 2021. — Vol. 212, no. 8. — P. 1122–1179. / Равноценный вклад автора с Ведюшкиной В.В. – теорема 6.
   Индексируется в Scopus, Web of Science, IF 1,096.