

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Хачатрян Нерсес Карленович

**Моделирование процесса организации железнодорожных
грузоперевозок**

Специальность 5.2.2. Математические, статистические и инструментальные
методы в экономике

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора экономических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Бекларян Лева Андреевич

Москва – 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ	21
1.1. Железнодорожный транспорт в России	21
1.2. Железнодорожное планирование	40
1.3. Управление железнодорожным движением в реальном времени	41
1.4. Выводы по главе 1	45
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК НА КРУПНЕЙШИХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЛИНИЯХ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ	49
2.1. Модель транснациональных грузоперевозок: технологии организации грузопотока, правило контроля. Основные результаты.	50
2.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций. Случай неограниченной емкости зон временного хранения грузов.	55
2.3. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций в случае ограниченной емкости зон временного хранения грузов	64
2.4. Выводы по главе 2	74
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК МЕЖДУ УЗЛОВЫМИ СТАНЦИЯМИ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ	76
3.1. Два способа корректировки системы организаций грузоперевозок.....	76
3.2. Корректировка технологий грузоперевозок	78
3.3. Корректировка системы контроля	92
3.4. Корректировка технологий грузоперевозок и системы контроля	118
3.5. Выводы по главе 3	132

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПРИ ОТСУТСТВИИ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ	134
4.1. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций....	135
4.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций с учетом случайных воздействий.....	150
4.3. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (случай идентичных станций).....	157
4.4. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (общий случай)	168
4.5. Выводы по главе 4.....	181
ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНОВ ГРУЗОВЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПЕРЕВОЗОК, ВЫПОЛНЯЕМЫХ ТРАНСПОРТНЫМ ОПЕРАТОРОМ	183
5.1. Постановка задачи.....	184
5.2. Сведение исходной задачи к задаче линейного программирования	188
5.3. Снижение размерности в задаче оптимального управления парком грузовых вагонов.....	195
5.4. Оценка влияния интеллектуальных беспилотных транспортных средств на состояние транспортной сети (результаты эконометрического анализа) .	203
5.5. Выводы по главе 5.....	218
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	220
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	224
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Формулировка некоторых определений и теорем.....	243
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Доказательства основных теорем и лемм	248
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Пример решения задачи управления парком грузовых вагонов транспортным оператором.....	263

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Одной из крупнейших базовых отраслей экономики любого государства является транспорт. Он обеспечивает географическую связанность территорий страны и координацию работы всех отраслей экономики. Транспорт создает условие для эффективного функционирования экономики государства, а его развитие является важнейшим условием модернизации экономики. Кроме того, транспорт помогает развитию международных экономических отношений, освоению новых экономических районов, обеспечению обороноспособности страны.

Приведем оценку текущей ситуации транспортного комплекса РФ, представленную в Транспортной стратегии Российской Федерации до 2030 года с прогнозом на период до 2035 года, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 27 ноября 2021 г. № 3363-р (Транспортная стратегия Российской Федерации... , 2021). Согласно данному документу: «В среднем в 2014 - 2019 годах доля транспорта в валовом внутреннем продукте Российской Федерации составляла 6.2 %, что соответствует высокому уровню вклада в валовый внутренний продукт в общемировой практике. Прямой экономический эффект транспортной отрасли в 2019 году оценивается следующим образом (по видам экономической деятельности, относящимся к ведению федерального органа исполнительной власти, осуществляющего функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в сфере транспорта): экспорт услуг транспортным комплексом – 1.2 трлн. рублей; вклад в валовый внутренний продукт – 6.7 трлн. рублей; обеспечение занятости в транспортном секторе – 4.5 млн. рабочих мест. Косвенный и индуцированный экономический эффект для российской экономики оценивается более чем в 18 трлн. рублей в виде увеличения объема валового внутреннего продукта и более 14 млн. рабочих мест.

Размер основных фондов транспортного комплекса в 2019 году составлял 22118 млрд. рублей, или 16.8 % совокупных основных фондов Российской Федерации».

Согласно прогнозу, приведенному в указанной Транспортной стратегии: «Предполагается рост объемов перевозок грузов в 2035 году всеми видами транспорта на 17 процентов к уровню 2019 года. Одновременно с ростом объемов перевозок грузов прогнозируется и изменение структуры перевозок по видам транспорта: объемы перевозок грузов железнодорожным транспортом увеличатся более чем на 39 процентов, при этом доля в объемах грузовых перевозок увеличится с 19 процентов в 2019 году до 21 процента в 2035 году».

Как показывает мировая практика, дальнейшее развитие транспортных систем в области грузовых перевозок во многом будет зависеть от результатов проведения следующих мероприятий: повышение эффективности грузовых перевозок за счет внедрения новых технологических решений, развитие международных транспортных коридоров, а также совершенствование мультимодальных перевозок.

Для такой географически протяженной страны как Россия особую роль играет железнодорожный транспорт. Он обеспечивает надежную и экономичную доставку грузов особенно в тех случаях, когда требуется быстрая доставка больших объемов грузов. Развитие железнодорожной сети и создание новых маршрутов способствует развитию экономики регионов и повышению уровня жизни населения. Кроме того, железнодорожный транспорт является одним из наиболее экологически чистых видов транспорта, а развитие железнодорожной сети может способствовать сокращению использования автотранспорта и, как следствие, снижению выбросов вредных веществ в атмосферу. В связи с этим железнодорожное планирование является актуальным и необходимым процессом для обеспечения устойчивого развития экономики, социальной инфраструктуры и экологии страны.

Важную роль в железнодорожном планировании играют математические методы и модели. Объясняется это следующими причинами:

1. *Сложность и масштабность железнодорожных систем.* Железнодорожные системы являются сложными и масштабными, что затрудняет процессы управления и планирования. В железнодорожном планировании необходимо учитывать множество факторов, таких как грузовые потоки, транспортные средства, маршруты, расписание, стоимость перевозок и другие. Математические методы и модели позволяют учитывать все эти факторы и их взаимодействие для нахождения наиболее оптимальных решений.
2. *Повышение конкурентоспособности.* В условиях жесткой конкуренции на рынке грузоперевозок железнодорожные компании вынуждены улучшать свои процессы и повышать эффективность перевозок. Математические методы и модели помогают сократить издержки и повысить качество услуг, что способствует повышению конкурентоспособности компаний.
3. *Развитие технологий и новых подходов.* Развитие информационных технологий и новых подходов к управлению железнодорожной логистикой требует применения современных математических методов и моделей. Например, использование методов машинного обучения и искусственного интеллекта позволяет автоматизировать процессы планирования и управления железнодорожной инфраструктурой, а также сократить вероятность ошибок в принятии решений.
4. *Мониторинг и анализ данных.* Важной задачей в железнодорожном планировании является мониторинг и анализ данных о грузоперевозках и работе железнодорожной инфраструктуры. Математические методы и модели позволяют проводить анализ данных и прогнозировать различные сценарии развития ситуации для принятия наиболее эффективных решений.

Таким образом, математические методы и модели позволяют повысить эффективность перевозок, снизить издержки и улучшить качество услуг, что способствует развитию железнодорожной логистики в целом.

Математические методы и модели широко применяются при решении следующих задач на железнодорожном транспорте: а) определение оптимальной структуры железнодорожной сети, включая маршруты, станции и узлы; б) определение оптимальных маршрутов и расписаний железнодорожных перевозок; в) определение оптимального использования ресурсов железнодорожной компании и транспортных операторов, таких как вагоны, локомотивы и персонал.

Однако малоизученной остается такая важная проблема как исследование режимов железнодорожных грузоперевозок и соответствующих им грузопотоков в рамках динамической системы, описывающей процесс грузоперевозок в виде взаимодействия основных элементов железнодорожной инфраструктуры, в первую очередь станций. Разработка такой динамической системы позволит исследовать возникающие в железнодорожной сети грузопотоки, учитывая такие факторы, как технические возможности станций, характер спроса на грузоперевозки и конфигурацию железнодорожной сети.

Степень разработанности проблемы

Можно выделить две большие группы математических моделей транспортных систем:

- модели транспортных сетей и их загрузки;
- модели динамики транспортных потоков.

Первая группа представлена моделями расчета корреспонденций, такими как гравитационная модель (Gerald, 1956; Wilson, 1971), энтропийная модель (Wilson, 1970; Harris, Wilson, 1978; Popkov, 1995), модели семейства конкурирующих центров (Fotheringham, 1983, 1986), а также моделями распределения потоков по сети (Shvetsov, 2009; Leventhal, Nemhauser, Trotter, 1973; Lo, Chen, 2000; Bar-Gera, 2002; Spiess, Florian, 1989).

Вторая группа представлена основными классами динамических моделей: макроскопическими (гидродинамическими), кинетическими (газодинамическими) и микроскопическими. Макроскопические модели (Gazis,

1974; Daganzo, 1994, 1995; Kerner, 2009; Гасников и др., 2013; Сухинова и др., 2009; Иносэ, Хамада, 1983), описывающие усредненные характеристики транспортного потока, также называют гидродинамическими, потому что в них сам поток уподобляется движению сжимаемой жидкости. Макроскопические диаграммы, отображающие взаимосвязь между параметрами производительности, такими как плотность движения, поток транспорта и скорость движения транспортных средств, используются для представления режимов движения и настроек системы (Daganzo, 2008; Geroliminis, Sun, 2011; Cassidy, Jang, Daganzo, 2011). Микроскопические модели явно описывают движение каждого транспортного средства. Они точнее макроскопических моделей описывают движение на отдельных участках транспортной сети, однако требуют гораздо больших вычислительных мощностей при практической реализации. Первые микроскопические модели были предложены в 50-х годах прошлого столетия (Pipes, 1953; Швецов, 2003). Примерами таких моделей являются модели следования за лидером (Gazis et al., 1961; Brackstone, McDonald, 1999), модели оптимальной скорости (Bando et al., 1994, 1995, 1998; Newell, 1961; Tomer et al., 2000), модель Трайбера (Treiber, Hennecke, Helbing, 2000), а также модели клеточных автоматов (Cremer, Ludwig, 1986; Chowdhury, Santen, Schadschneider, 2000). Кинетические модели занимают промежуточное место между макроскопическими и микроскопическими моделями. В них поток задается плотностью распределения транспортных средств в фазовом пространстве, при этом динамика фазовой плотности описывается кинетическим уравнением. Оно получается в результате усреднения эффектов взаимодействия индивидуальных транспортных средств (Prigogine, Herman, 1971; Lampis, 1978; Helbing, 1996; Helbing, Treiber, 1998; Nelson, 1995).

Перейдем к классификации математических моделей, применяемых для анализа транспортных сетей, основываясь на их функциональной роли, т.е. к группировке в зависимости от задач, для решения которых они предназначены.

Такая группировка приводит к трем основным классам моделей: прогнозным, имитационным и оптимизационным (Швецов, 2003).

Прогнозные модели предназначены для оценки транспортных потоков в сети в предположении, что известны как конфигурация транспортной сети, так и ее характеристики. Такие модели позволяют прогнозировать ряд усредненных характеристик движения: объемы межрайонных корреспонденций, распределение транспортных средств по тем или иным участкам транспортной сети, интенсивность потоков и т.д. Одна из основных целей построения прогнозных моделей – оценить последствия от изменений в транспортной сети и размещения в ней новых объектов.

Имитационные модели предназначены для подробного описания процесса дорожного движения вплоть до воспроизведения всех его деталей. Исходными данными для таких моделей являются усредненные значения потоков и их распределение по отдельным участкам транспортной сети. Эти модели позволяют оценить такие важные характеристики процесса дорожного движения как задержки на перекрестках, неравномерность транспортных потоков во времени, протяженности дорожных заторов и динамики их образования и т.п. Применение имитационных моделей целесообразно при разработке проектов организации дорожного движения, оптимизации светофорных циклов регулирования и т.п. (Якимов, 2013). Примером такой модели является разработанная в ЦЭМИ РАН в 2009 году агент-ориентированная модель автомобильных пробок Москвы (Макаров, Житков, Бахтизин, 2009), позволяющая решать задачи масштаба городской агломерации, связанные с оценкой работы всей транспортной системы в результате изменения следующих ее элементов: введение новых радиальных или кольцевых автомагистралей; временное закрытие или ликвидация какого-либо элемента транспортной системы; введение экономических санкций (плата за проезд по магистрали, за въезд в зону центра и т. п.).

Еще один большой класс моделей предназначен для оптимизации деятельности транспортных сетей. Такие модели позволяют определять оптимальные маршруты перевозок, формировать оптимальные конфигурации сети и т.д. (Lu, Wang, 2022; Veluscek et al., 2015; Стенбринк, 1981; Галабурда, 1985; Авен, Ловецкий, Моисеенко, 1985; Васильева, Игудин, Лившиц, 1987; Leventhal, Nemhauser, Trotter, 1973).

Как было отмечено выше, одним из наиболее востребованных для грузоперевозок видов транспорта в России является железнодорожный. Публикации, посвященные железнодорожной логистике, по типу исследуемых задач можно разбить на три основные группы. Первая группа представлена задачами проектирования инфраструктуры железнодорожной сети (Pyrgidis, 2016; Higgins, Ferreira, Kozan, 1995; Kraay, Barker, Chen, 1991; Ferreira, Murray, 1997; LeBlanc, 1976). Во вторую группу вошли задачи управления парком локомотивов и вагонов (Fügenschuh et al., 2008; Ahuja et al., 2005; Forbes, Holt, Watts, 1991; Beaujon, Turnquist, 1991; Sherali, Suharko, 1998; Sherali, Tuncbilek, 1997; Ziarati et al., 1997). В зависимости от особенностей регулирования и рынка, для каждого конкретного региона могут быть построены свои модели, учитывающие ту или иную специфику. В качестве примера можно рассмотреть работу Р. Фукасава и др. (Fukasawa et al., 2002), в которой представлена модель, применяемая одним из крупнейших железнодорожных транспортных операторов на территории Латинской Америки. Другим примером является работа А. Чезелли и др. (Ceselli et al., 2008), в которой рассматривается сразу несколько моделей оптимизации доставки грузов швейцарской железнодорожной грузовой компанией Cargo Express Service of Swiss Federal Railways. Ряд публикаций посвящен моделям, спроектированным с учетом особенностей рынка грузовых перевозок в Италии (Lulli, Pietropaoli, Ricciardi, 2011; Campetella et al., 2006). В некоторых работах представлены модели минимизации издержек транспортировки грузов по железнодорожной сети, покрывающей несколько европейских стран (Andersen, 2009; Jeong, Lee,

Bookbinder, 2007). Также существуют модели, созданные для российского рынка железнодорожных перевозок (Sadykov et al., 2013; Лазарев, Садыков, 2014). Третья группа моделей посвящена задачам железнодорожного планирования. До недавнего времени она в основном состояла из задач формирования расписания движения грузовых поездов и организации грузовых потоков (Лазарев и др., 2012; Brannlund et al., 1998; Cai, Goh, 1994; Cai, Goh, Mees, 1998; Carey, Lockwood, 1995; Higgins, Kozan, Ferreira, 1996; Jovanovic, Barker, 1991; Краау, Barker, Chen, 1991; Sahin, 1999; Sauder, Westerman, 1983; Szpigel, 1973).

В последние годы третью группу стали дополнять исследования, посвященные применению макроскопической теории трафика для описания процессов, происходящих на железнодорожном транспорте. В работе Н. Вейка (Weik, 2022) приведено теоретическое исследование свойств потока трафика на однонаправленных железнодорожных линиях. Построены макроскопические фундаментальные диаграммы и показано, как они позволяют определить режимы потока и различные фазы движения поездов, что может быть полезно для проектирования системы и планирования эксплуатации.

Еще одно направление исследований, активно развивающихся в последние годы связано с прогнозированием возникающих в железнодорожной системе задержек. Поезда в этой системе следуют по заранее определенным расписаниям, которые позволяют эффективно использовать маршруты и пути. Временные отклонения от такой запланированной работы являются обычным явлением. Они принимают форму задержек и снижают эффективность системы. Малые задержки часто поглощаются встроенными буферами и поэтому не влияют на процесс перевозок (Zieger, Weik, Niesen, 2018; Dekker, Panja, 2021). Однако время от времени нарушения в логистике, часто вызванные внешними факторами, такими как погода, приводят к перегрузкам или даже масштабной остановке перевозок с негативными последствиями для общества и экономики (Ludvigsen, Klaboe, 2014; Buchel, Spanninger, Corman, 2020). Большинство моделей, в которых изучаются задержки основаны на расписаниях

железнодорожной системы, где поезда являются агентами, которые могут нести задержки (Goverde, 2010; Gambardella, Rizzoli, Funk, 2002; Harrod, Cerreto, Nielsen, 2019). В противоположность этому, в работе Деккера и др. (Dekker et al., 2022) задержки фигурируют как переменные, связанные не с поездами, а с узлами (станциями) и ребрами железнодорожной сети, которые остаются на своих местах. Распространение задержек между этими узлами не обязательно должно описываться в терминах дискретных поездов и событий, а может основываться исключительно на общих (или даже системных) величинах, таких как топология сети и расписание. Авторы исследования проводят аналогию с гидродинамикой: тогда как традиционно задержки рассматриваются как лагранжевы частицы (то есть следуют за поездами, как жидкость, переносящая частицы), авторы предлагают рассматривать их с эйлеровой точки зрения (то есть как входящие и исходящие задержки в фиксированной пространственной системе). Такое представление задержек названо распространением типа диффузии. На уровне микромасштаба следует ожидать, что такой нетрадиционный подход к обработке задержек будет менее точным, чем более подробные модели, но на большом масштабе производительность такой модели повысится. Модель содержит только простую информацию о расписании (например, частоты поездов и времена поездок), а вся информация модели встроена в одну матрицу, что облегчает анализ свойств системы.

Одним из основных показателей эффективности работы железнодорожного транспорта являются скорости движения грузовых поездов, которые весьма чувствительны к уровню загрузки железнодорожной инфраструктуры и обратно пропорциональны себестоимости железнодорожных перевозок. Основными причинами чрезмерной загрузки железнодорожной инфраструктуры являются сезонные колебания в отправке грузов и неравномерность накопления грузовых составов на технических и грузовых станциях. В последнее время к указанным выше причинам можно также добавить геополитические изменения, влияющие

на мировую логистику (переориентация грузопотоков) и приводящие к чрезмерной загрузке одних направлений и недогрузке других.

Оценка влияния неравномерности загрузки железнодорожной инфраструктуры на уровень скоростей в грузовом движении нашла отражение в трудах ряда исследователей (Мачарет, Разуваев, Ледней, 2022; Мачарет, Разуваев, Ледней, 2020).

Однако, малоизученным остается такое направление в железнодорожном планировании, как разработка подходов и методов организации грузоперевозок, которые позволят снизить неравномерность железнодорожного грузопотока и тем самым увеличить скорости движения поездов. Это важно не только для железнодорожной отрасли, но также для экономики предприятий и отраслей, которые обслуживаются железными дорогами.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационного исследования является разработка принципов, методов и моделей управления железнодорожными грузоперевозками для эффективного и устойчивого функционирования как железнодорожной отрасли, так и связанных с ней отраслей экономики в условиях роста неопределенности в мировой логистике.

Задачи исследования. Для достижения цели в диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

1. Разработать основополагающие принципы управления железнодорожными грузоперевозками в режиме реального времени, направленные на снижение риска чрезмерной загрузки железнодорожной инфраструктуры, в условиях гибкости логистических цепочек поставок и переориентации грузопотоков.

2. Разработать методологию построения динамических моделей, описывающих процесс организации грузоперевозок в режиме реального времени для основных конфигураций железнодорожной сети, в условиях спроса разной интенсивности.

3. Построить динамические модели, описывающие процесс организации грузоперевозок в режиме реального времени, направленные на оптимальное функционирование железнодорожной инфраструктуры в условиях спроса разной интенсивности.

4. Выработать рекомендации, основанные на результатах апробации моделей, которые позволят: а) существенно уменьшить риск чрезмерной загрузки железнодорожной инфраструктуры в условиях повышенного спроса на грузоперевозки на отдельных направлениях железных дорог; б) установить грузопоток близкий к равномерному на незагруженных участках железнодорожной сети.

5. Разработать подход к решению задачи управления парком грузовых железнодорожных вагонов, основанный на использовании сети всевозможных маршрутов отправки грузов от станций отправления к станциям назначения. Построить алгоритм, формализующий данный подход в виде классической оптимизационной задачи.

Объект исследования. Процессы взаимодействия элементов экономической инфраструктуры.

Предмет исследования. Обеспечение эффективного и устойчивого функционирования экономической инфраструктуры в условиях неопределенности внешней среды.

Научная новизна. Основные положения научной новизны состоят в следующем:

1. Разработаны принципы управления железнодорожными грузоперевозками в режиме реального времени направленные на снижение риска чрезмерной загрузки станций в условиях гибких логистических цепочек поставок и переориентации грузопотоков. Они основаны на взаимодействии соседних станций с учетом их актуальной загрузки и характера спроса на грузоперевозки.

2. Разработана методология построения моделей, описывающих железнодорожные грузоперевозки в режиме реального времени, основанная на взаимодействии соседних станций. Она предполагает два разных подхода к организации взаимодействия станций. Первый подход определяет такие правила взаимодействия соседних станций, которые позволяют использовать технические возможности станций в полном объеме. Второй подход определяет правила синхронизации входных и выходных потоков на станциях. В отличие от известных моделей, которые применяют принцип моделирования в реальном времени как правило в рамках перепланирования расписания в ответ на технические сбои, аварии, изменения в спросе или другие непредвиденные обстоятельства, предлагаемая методология представляет собой комплексное многоаспектное решение проблемы устойчивого функционирования железнодорожной отрасли и связанных с ней отраслей экономики и является основой для полной автоматизации процесса грузоперевозок.

3. Построены динамические модели организации грузоперевозок на железнодорожном транспорте в случае стабильно высокого спроса на них. Они основаны на конечно-разностном аналоге нелинейного параболического уравнения. В этих моделях грузопоток разделен на две составляющие: конвективную и диффузионную. Конвективная составляющая описывает движение грузов с учетом загруженности станций. Диффузионная составляющая определяет распределение грузов между соседними станциями, что позволяет сглаживать грузопоток.

4. Построены динамические модели организации грузоперевозок на железнодорожном транспорте в случае отсутствия стабильно высокого спроса на них. Они основаны на синхронизации входных и выходных потоков на станциях, которая осуществляется посредством управления параметрами моделей, характеризующими степень использования технического потенциала станций.

5. Предложен новый подход к решению задачи управления парком грузовых железнодорожных вагонов. Преимуществом этого подхода,

закрывающегося в решении задачи линейного программирования большой размерности, является поиск оптимального плана перевозок на множестве всевозможных маршрутов, тогда как в известных методах, связанных с генерацией колонок, решается серия задач линейного программирования на подмножествах множества всех маршрутов, что может привести к решению отличному от оптимального.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы обусловлена разработкой нового подхода в описании процесса грузовых железнодорожных перевозок, основанного на его представлении в виде динамических моделей, описывающих процесс взаимодействия произвольной станции с соседними станциями. Результатом этого взаимодействия является формирование грузопотока в рамках спроса на грузоперевозки и технического потенциала станций. Разработанный подход и представленные в диссертации модели являются достаточно универсальными и могут быть использованы при описании широкого круга задач как в экономике, так и в других областях. Например, они могут быть применены для анализа поведения потребителей, управления запасами, планирования маркетинговых кампаний. В сфере экологии они могут использоваться для анализа воздействия различных процессов на окружающую среду и разработки экологически устойчивых стратегий. В информационных технологиях методология может быть применена для управления информационными потоками и повышения эффективности информационных систем. В области здравоохранения модели могут использоваться для планирования и управления медицинскими ресурсами, а также работой медицинских учреждений.

Практическая значимость работы обусловлена большой потребностью в построении моделей, позволяющих совершенствовать процесс организации грузоперевозок. Построенную модель, в частности, можно использовать для оценки эффекта в виде увеличения величины грузопотока, проходящего через

исследуемый участок железнодорожной сети, в зависимости от мероприятий, направленных на развитие его инфраструктуры.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, системной динамики, алгебры матриц, методы численного решения систем дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработанная методология построения моделей железнодорожных грузоперевозок определяет правила взаимодействия соседних станций, которые обеспечивают оптимальное распределение грузов между станциями, позволяют достичь более равномерного использования ресурсов и предотвратить перегрузки на станциях. Эти правила дают возможность управлять грузопотоками, улучшая использование доступных ресурсов и повышая общую пропускную способность системы грузоперевозок.

2. Построенные модели, предполагающие выделение конвективной и диффузионной составляющих грузопотока, делают возможным осуществлять бесперебойный грузопоток высокой интенсивности. Это достигается за счет максимального использования инфраструктуры всех станций. Такие модели могут служить инструментом для прогнозирования динамики грузопотока в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки.

3. Сформированные модели, синхронизирующие входные и выходные потоки на станциях, обеспечивают более эффективную организацию грузоперевозок, минимизируют задержки и осуществляют плавный грузопоток. Они могут служить инструментом для прогнозирования динамики грузопотока в случае переменного спроса на грузоперевозки.

4. Предложенный подход к решению задачи управления парком грузовых железнодорожных вагонов позволяет осуществлять поиск оптимального плана перевозок на множестве всевозможных маршрутов, что увеличивает точность полученного решения.

Соответствие содержания диссертации паспорту научной специальности, по которой защищается диссертация

Диссертационное исследование соответствует следующим направлениям исследований паспорта научной специальности 5.2.2. «Математические, статистические и инструментальные методы в экономике»:

2. Типы и виды экономико-математических и эконометрических моделей, методология их использования для анализа экономических процессов, объектов и систем.

3. Разработка и развитие математических и эконометрических моделей анализа экономических процессов (в т.ч. в исторической перспективе) и их прогнозирования.

Апробация результатов

Основные положения диссертационного исследования были представлены на международных и всероссийских научных конференциях, наиболее значимые из которых следующие:

1. Ломоносовские чтения. Секция экономических наук на тему «Человеческий и социальный капитал России: новые вызовы и возможности» (Москва, 2024).
2. XXV Всероссийский симпозиум «Стратегическое планирование и развитие предприятий» (Москва, 2024).
3. Научная конференция «Академическая экономическая наука о проблемах социально-экономического развития России: история и современность» к 300-летию Российской академии наук (Москва, 2024).
4. Международная научно-практическая конференция «Развитие производительных сил Кузбасса: история, современный опыт, стратегия будущего» (Кемерово, 2023).
5. IV Международная конференция «Искусственные общества и информационные технологии» и круглый стол «Суперкомпьютерные технологии и искусственные общества» (Москва, 2022).

6. Международная научная конференция по моделированию и анализу комплексных систем и процессов (MACSPRO'2021).
7. Международная научная школа-семинар имени академика С.С. Шаталина «Системное моделирование социально-экономических процессов» (Москва, 2021).
8. III Международная конференция «Искусственные общества и информационные технологии» и круглый стол «Суперкомпьютерные технологии и искусственные общества» (Москва, 2021).
9. XXII Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества (Москва, 2021).
10. Международная научная школа-семинар имени академика С.С. Шаталина «Системное моделирование социально-экономических процессов» (Москва, 2020).
11. XIII Всероссийская с международным участием школа-симпозиум «Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем» (АМУР-2019).
12. IX Московская Международная конференция по исследованию операций (ORM2018-Germeyer100).
13. Научная конференция, посвященная 55-летию ЦЭМИ РАН (Москва, 2018).
14. XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017).
15. 17-я Всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов» (Светлогорск, 2015).
16. X Международная научная конференция «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества» (Москва, 2014).
17. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXIII» (Воронеж, 2012).
18. XXIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2012).

19. 53-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 2010).

20. Международная научная школа-семинар имени академика С.С. Шаталина «Системное моделирование социально-экономических процессов» (Воронеж, 2009).

Основное содержание работы отражено в 26 научных трудах, из них: одна монография (объем – 10.5 п.л.); 18 публикаций в изданиях, соответствующих п.2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова (объем – 12.95 п.л., личный вклад автора – 9.35 п.л.) и 7 публикаций в других изданиях (объем – 6.32 п.л., личный вклад автора – 4.97 п.л.).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 163 наименования и трех приложений. Диссертация изложена на 272 страницах, содержит 112 рисунков и 11 таблиц.

ГЛАВА 1. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ¹

1.1. Железнодорожный транспорт в России

Основу грузовых перевозок в России составляют три ключевых вида транспорта – железнодорожный, автомобильный и трубопроводный. Железные дороги в России исторически несли основную транспортную нагрузку, особенно в сфере грузоперевозок. Железнодорожный транспорт экономически более выгоден, чем автомобильный при перевозках больших объемов грузов на дальние расстояния. Железные дороги выполняют более 45 % всего грузооборота с учетом трубопроводного транспорта (без учета трубопроводного транспорта эта доля больше 84 %) и более 24 % всего пассажирооборота. Деятельность железнодорожного транспорта обеспечивает сохранение социально-экономической стабильности и стимулирует экономический рост в стране.

Сеть железных дорог России входит в число ведущих железнодорожных систем мира, занимая, третье место в мире (после США и Китая) как по эксплуатационной длине, так и по грузообороту. Однако, по сравнению с США и особенно с Китаем доля железнодорожного транспорта в общем объеме грузооборота существенно выше (рис. 1).

¹ Данная глава написана на основании работ автора: Об одном классе динамических моделей грузоперевозок / Л.А. Бекларян, Н.К. Хачатрян // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 10. – С. 1649-1667 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution // Business Informatics. – 2017. – №1. – P. 25-35 (Web of Science, Scopus, RSCI).
About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation // Business Informatics. – 2018. – № 1. – P. 61-70 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Динамические модели организации грузопотока на железнодорожном транспорте // Экономика и математические методы. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 62-73 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Study of flow dynamics in the model of cargo transportation organization between node stations // International Journal of Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 33, № 5. – P. 937-949 (Web of Science, Scopus, RSCI).

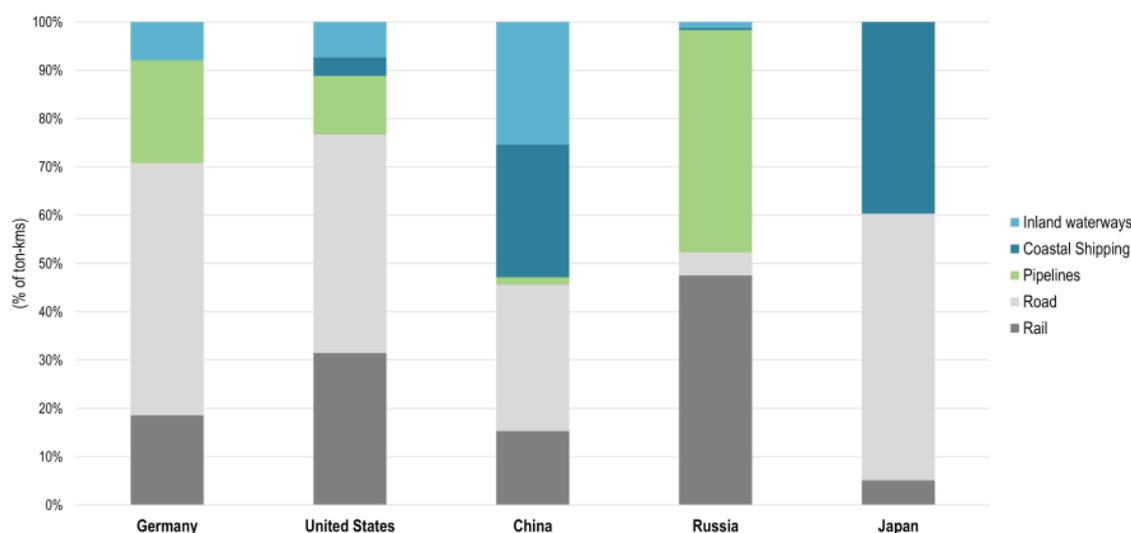


Рис. 1. Структура грузооборота в ряде стран, 2020 г.

Источник: Rodrigue J.-P., 2020

В структуре грузооборота России преобладают железнодорожный и трубопроводный виды транспорта. В 1990 году доля этих видов транспорта в общем объеме грузооборота была приблизительно одинаковой (рис. 2). В период с 1990 по 1998 годы железнодорожная отрасль России испытывала общий спад и недостаток финансирования, что привело к резкому снижению ее доли в структуре грузооборота и доминированию трубопроводного транспорта. В последующие годы грузооборот железных дорог стал увеличиваться и в 2018 году почти достиг показателей трубопроводного транспорта (Грузовые перевозки в России..., 2019). В последние годы грузооборот железнодорожного транспорта незначительно превысил грузооборот трубопроводного транспорта.

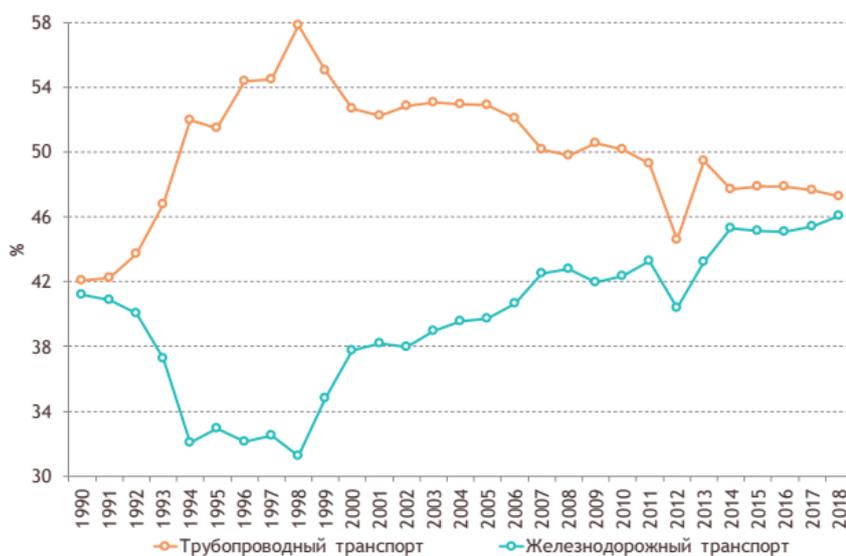


Рис. 2. Динамика долей железнодорожного и трубопроводного транспорта в структуре грузооборота, %, 1990–2018 годы.

Источник: Грузовые перевозки в России..., 2019

На рис. 3 приведена динамика грузооборота и погрузки железнодорожного транспорта России в 1988–2018 гг.

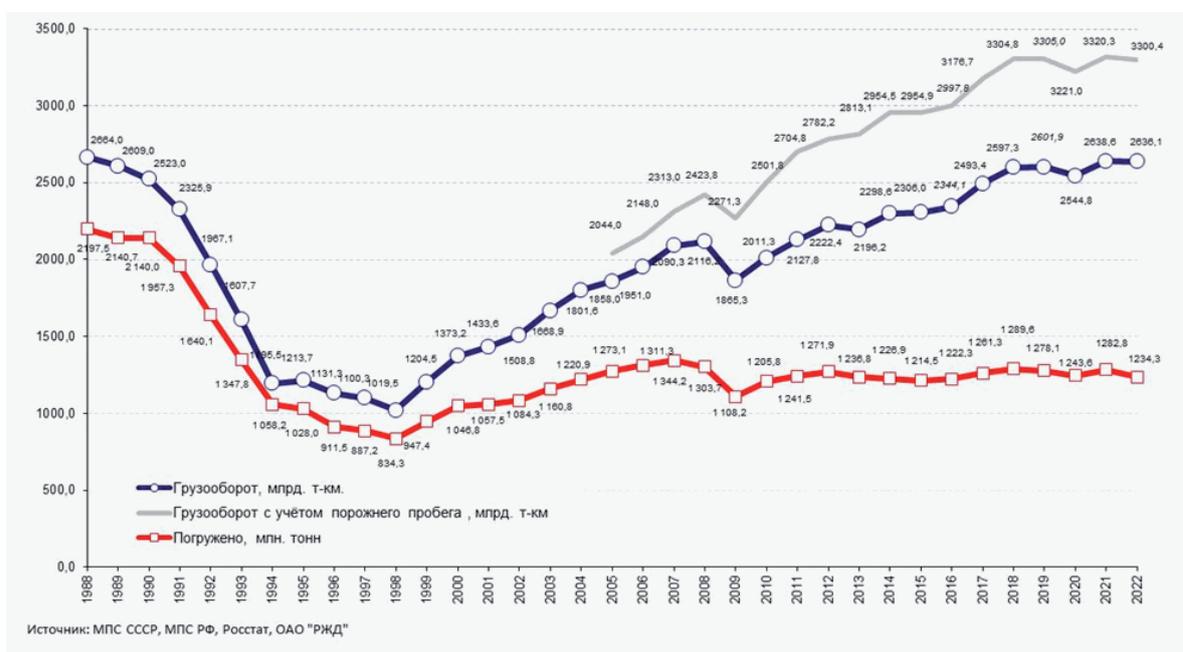


Рис. 3. Динамика грузооборота и погрузки железнодорожного транспорта России в 1988–2022 гг.

Источник: Хусаинов, 2023

С 1999 года до начала финансово-экономического кризиса в 2008 году наблюдалось постепенное улучшение производственных показателей железнодорожного транспорта. Этот процесс был обусловлен оживлением экономики и начавшимся процессом импортозамещения, который способствовал росту объемов производства в стране. В последующие годы, с ростом объемов внешней торговли, сокращением экспортных пошлин и увеличением мировых цен на российские товары, объемы экспортных грузопотоков значительно возросли (Терёшина, 2009). Следует отметить, что, начиная с 1999 г., темпы роста грузооборота стали существенно опережать темпы роста погрузки, и разрыв между ними постепенно увеличивался, что связано с увеличением средней дальности перевозок (рис. 4).

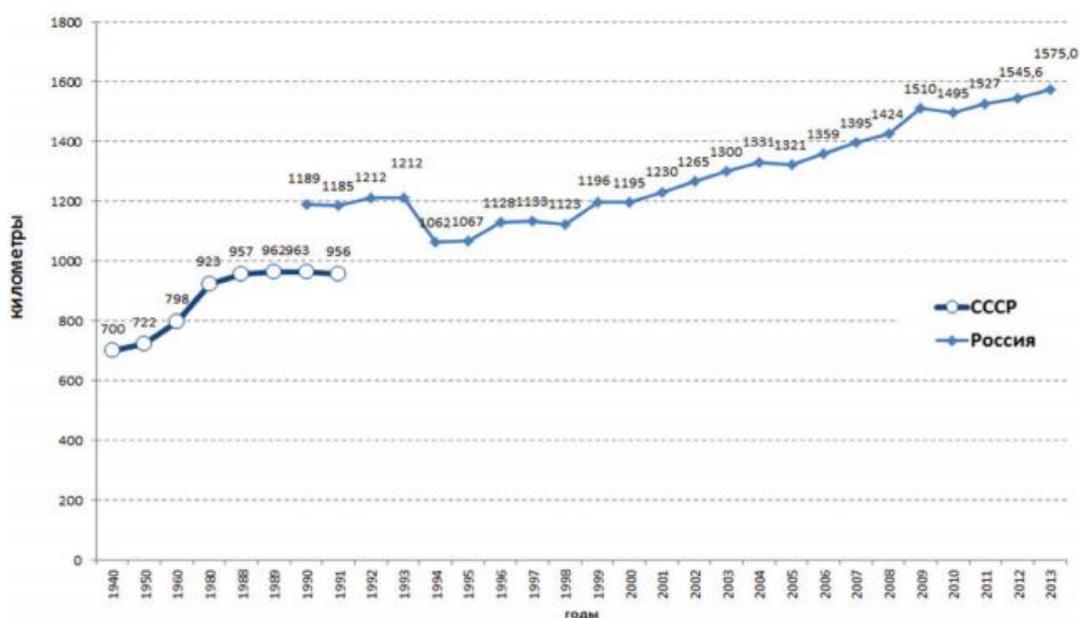


Рис. 4. Средняя дальность перевозки груза железнодорожным транспортом по железным дорогам СССР (1940–1991) и России (1990–2013), км

Источник: Хусаинов, 2015

Этот тренд объясняется увеличением доли сырья в экспортных перевозках, которые характеризуются более дальними расстояниями, а также переориентацией грузоотправителей на автомобильный транспорт при отправлении грузов на малые расстояния. Увеличение средней дальности

перевозок по всем ключевым грузам свидетельствует о растущей значимости железнодорожного транспорта в обеспечении удаленных регионов страны, где формируются экспортные грузовые потоки. Одновременно это указывает на недостаточное развитие внутреннего рынка – мало внимания уделяется созданию перерабатывающих предприятий. В результате спрос на сырье внутри страны не растет, а за ее пределы экспортируется в основном продукция с низкой добавленной стоимостью (Терёшина, 2009).

В начале XXI века реформа железнодорожного транспорта внесла неопределённость в применение исходной технологии управления перевозками. Она базировалась на балансовом методе контроля за порожними вагонами, который предполагал сетевую регулировку и использование парка универсальных вагонов без учёта их принадлежности. При возникновении избытка вагонов на каком-либо участке или нехватке вагонов для погрузки диспетчеры перераспределяли парк по сети, проводя регулировочные мероприятия. Календарное планирование помогало стабилизировать процесс погрузки и сделать его частью ритмичной работы железнодорожного конвейера (Долгий А.И, 2021).

Одной из основных целей реформирования железнодорожного транспорта было привлечение инвестиций для обновления вагонного парка. Для этого были созданы благоприятные условия для массовой закупки вагонов компаниями-операторами. В 2007–2012 гг. парк российских вагонов, используемых для перевозок грузов на инфраструктуре ОАО «РЖД», увеличился примерно на 200 тыс. вагонов, а совокупные инвестиции на их приобретение составили около 400 млрд. руб. (Шенфелд, Сотников, 2015). В настоящее время основная часть вагонного парка принадлежит частным компаниям.

Одновременно с увеличением числа и доли частных вагонов, особенно в 2011–2012 гг., возникли сложности в организации перевозочного процесса. Это можно заметить если обратить внимание на изменение основных показателей эксплуатационной работы железнодорожного транспорта, таких как

оборот вагона, участковая и технические скорости. Оборот вагона представляет собой время, затрачиваемое вагоном на выполнение одного цикла работы, включающего все операции, связанные с перевозочным процессом (например, от начала одной погрузки до начала следующей погрузки). Участковая скорость – это скорость движения поезда по участку с учетом времени хода, разгона и замедления, и времени стоянок на промежуточных станциях (раздельных пунктах) участка. Техническая скорость движения поездов – это средняя скорость движения поезда по перегону с учетом разгона и замедления, но без учета остановок (времени стоянок).

В 2011 г. по сравнению с 2010 г. произошло резкое снижение как участковой, так и технической скоростей движения поездов (рис. 5). С 2012 г. по 2018 г. в целом наблюдался положительный тренд в отношении этих показателей: участковая скорость увеличилась на 13,6 % до 40,9 км/ч, а техническая скорость – на 3,3 % до 46,7 км/ч. С 2020 г. наблюдается тренд на снижение этих показателей.

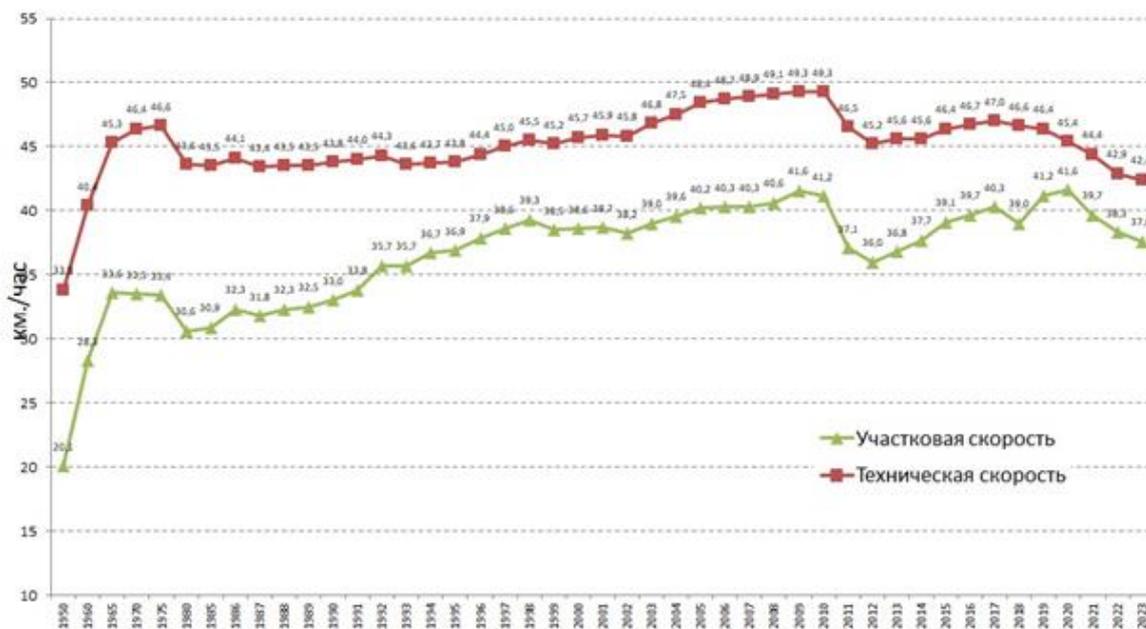


Рис. 5. Динамика участковой и технической скоростей на железнодорожном транспорте СССР и России в 1950–2023 гг., км/час

Источник: *Обзор работы грузового железнодорожного транспорта...*, 2024

Изменение структуры собственности на подвижной состав потребовало пересмотра существующих методик расчета ключевых показателей эффективности железнодорожного транспорта и приведения их в соответствие изменившейся структуре рынка. В 2010 году внесли коррективы в систему учета вагонов, находящихся в рабочем парке. Предыдущая система учета не включала в рабочий парк вагоны частных собственников, находившиеся на путях необщего пользования, хотя они были исправны и готовы к погрузке. Учитывая, что в 2010 году парк вагонов, принадлежащих частным собственникам составлял около 79 % от общего парка грузовых вагонов, применение описанной системы учета приводило к существенному занижению рабочего парка вагонов в отрасли (Грузовой железнодорожный транспорт России..., 2016). Изменение системы учета и включение таких вагонов в рабочий парк оказали влияние на другие показатели работы и использования грузовых вагонов, такие как оборот грузового вагона, среднесуточная производительность вагона и т.д. Например, в результате принятия новой системы учета рабочего парка, оборот вагона вырос с 7.5 сут. в 2009 году до 13.4 сут. в 2010 году (рис. 6).

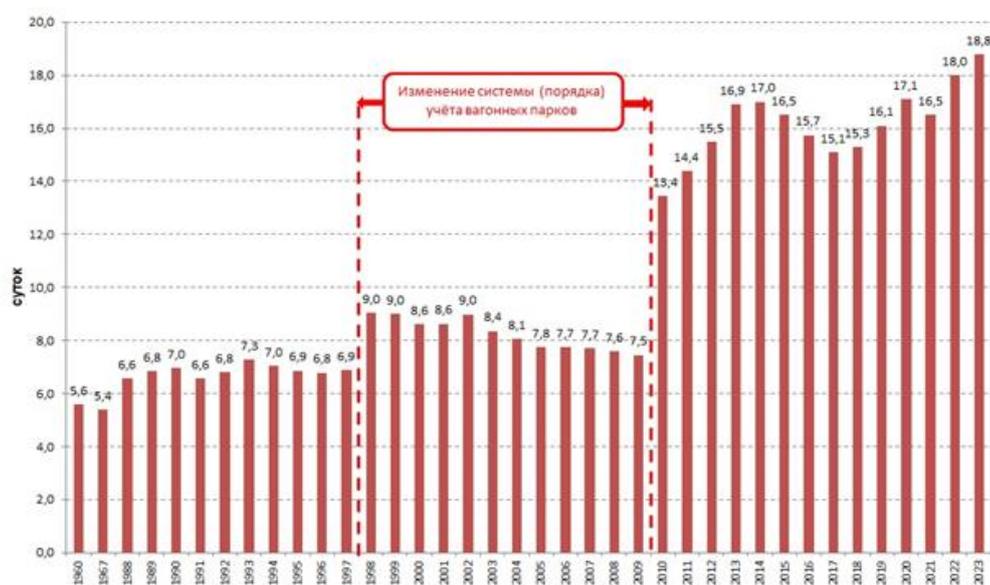


Рис. 6. Оборот грузового вагона рабочего парка в 1960-2023 гг., суток

Источник: Обзор работы грузового железнодорожного транспорта... , 2024

С 2010 по 2014 г. оборот вагона также увеличивался и на конец данного периода прирост составил 26 % к уровню 2010 года. Это обусловлено рядом факторов: увеличением средней дальности перевозки грузов, ростом простоя вагона под грузовыми операциями (рис. 7), окончательным изменением структуры собственников грузовых вагонов, значительным увеличением парка вагонов на сети (возникновение профицита), что привело к переагруженности путей и, как следствие, к росту времени простоя на станциях (Железнодорожный транспорт России..., 2019).

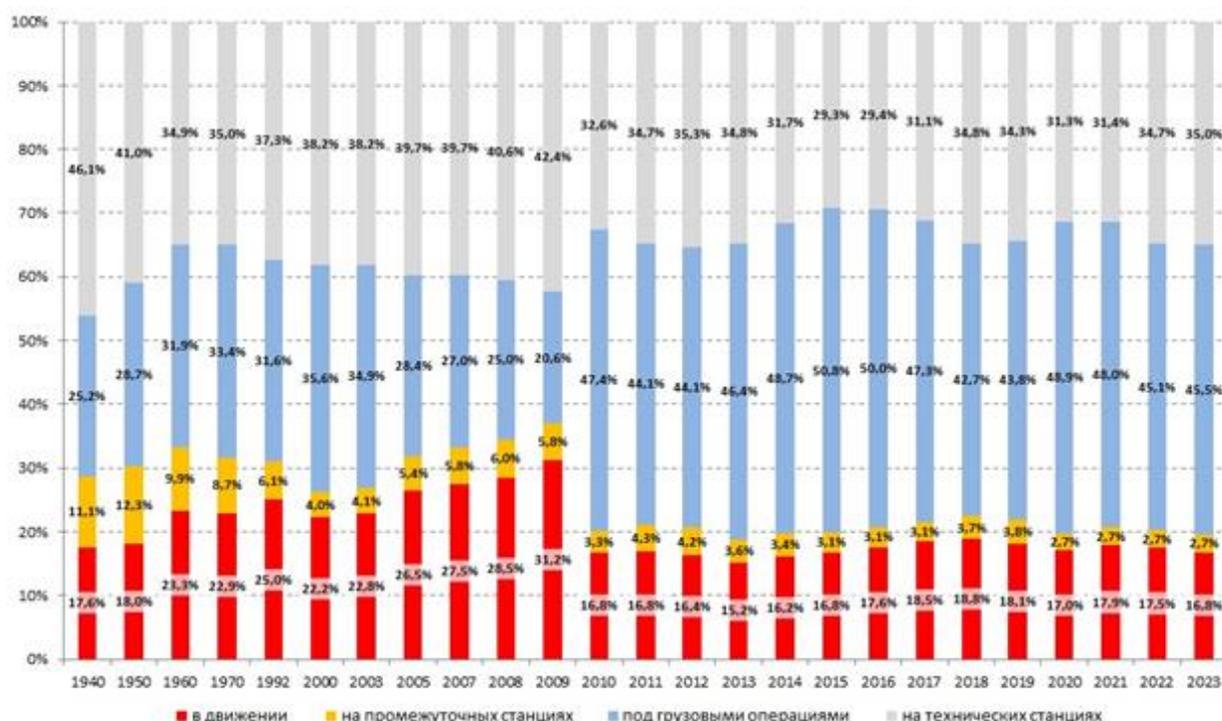


Рис. 7. Структура оборота грузового вагона по элементам в 1940-2023 гг. %
 Источник: *Обзор работы грузового железнодорожного транспорта...*, 2024

В дальнейшем были оптимизированы технологии перевозочного процесса со стороны ОАО «РЖД» и погрузочно/разгрузочные работы со стороны грузоотправителей/грузополучателей, снизился общий парк грузовых вагонов. В результате к 2017 году оборот вагона по сравнению с 2014 годом сократился на 11 %. В 2018 году оборот вагона относительно 2017 года незначительно увеличился, что было связано с масштабными ремонтными работами

железнодорожной инфраструктуры (Железнодорожный транспорт России..., 2019).

Постепенное развитие автомобильного грузового транспорта создало значительную конкуренцию в условиях, когда стоимость поддержания железнодорожной инфраструктуры остается высокой. Структурные сдвиги и межвидовая конкуренция ведут к росту зависимости ОАО «РЖД» от нескольких основных видов грузов, в частности имеющих экспортную ориентацию (рис. 8, рис. 9).

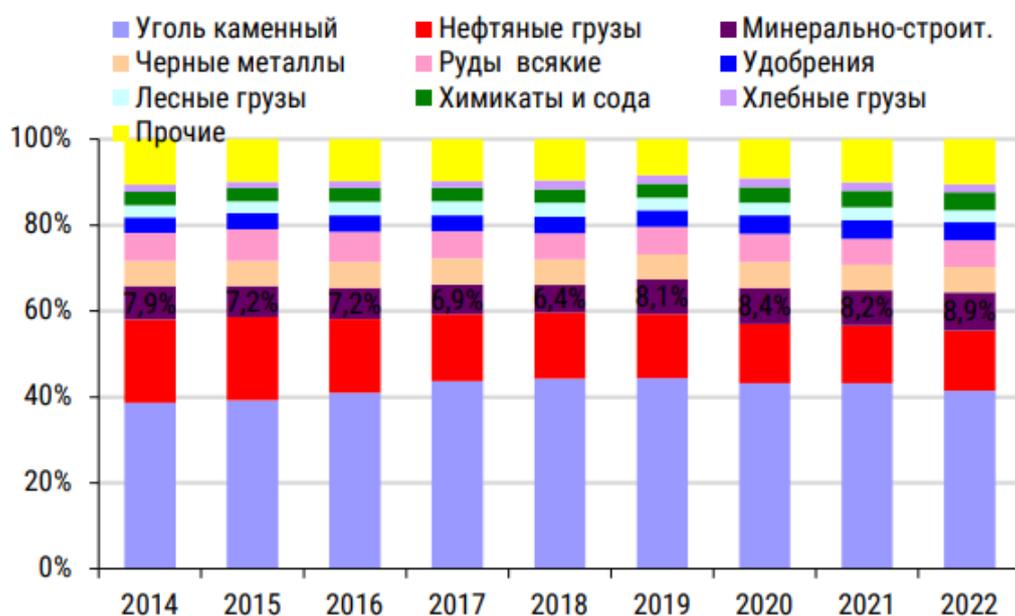


Рис. 8. Структура грузооборота ж/д транспорта в России в 2014–2022 гг., %

Источник: Рынок грузового железнодорожного транспорта России..., 2022

Наименование груза	Структура погрузки грузов железнодорожным транспортом в 2012-2022 гг., млн тонн	Отношение 2022 г. / 2012 г.
Каменный уголь	354,4 (2022), 307,6 (2012)	+15,2% +46,8 млн тонн
Строительные грузы ¹	158,8 (2022), 215,4 (2012)	-26,3% -56,6 млн тонн
Нефть и нефтепродукты	216,0 (2022), 258,2 (2012)	-16,3% -42,2 млн тонн
Руды ²	133,2 (2022), 132,2 (2012)	+0,8% +1,0 млн тонн
Черные металлы	66,3 (2022), 73,4 (2012)	-9,7% -7,1 млн тонн
Химические и минеральные удобрения	60,5 (2022), 45,1 (2012)	+34,1% +15,4 млн тонн
Лесные грузы	31,4 (2022), 36,2 (2012)	-13,3% -4,8 млн тонн
Зерно	23,9 (2022), 20,4 (2012)	+17,2% +3,5 млн тонн
Прочие грузы	189,8 (2022), 183,4 (2012)	+3,5% +6,4 млн тонн

Рис. 9. Структура погрузки железнодорожным транспортом в 2012–2022 гг.

Источник: опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры... , 2023

Как следует из этих рисунков основным драйвером роста грузовой базы железнодорожного транспорта является каменный уголь. Россия занимает существенную долю в глобальной структуре торговли углём. Страна входит в тройку мировых лидеров по экспорту угля, уступая только Индонезии и Австралии (Институт проблем естественных монополий, 16 ноября 2023). На рис. 10 приведена динамика доли России в мировом экспорте угля в 1992–2022 гг.

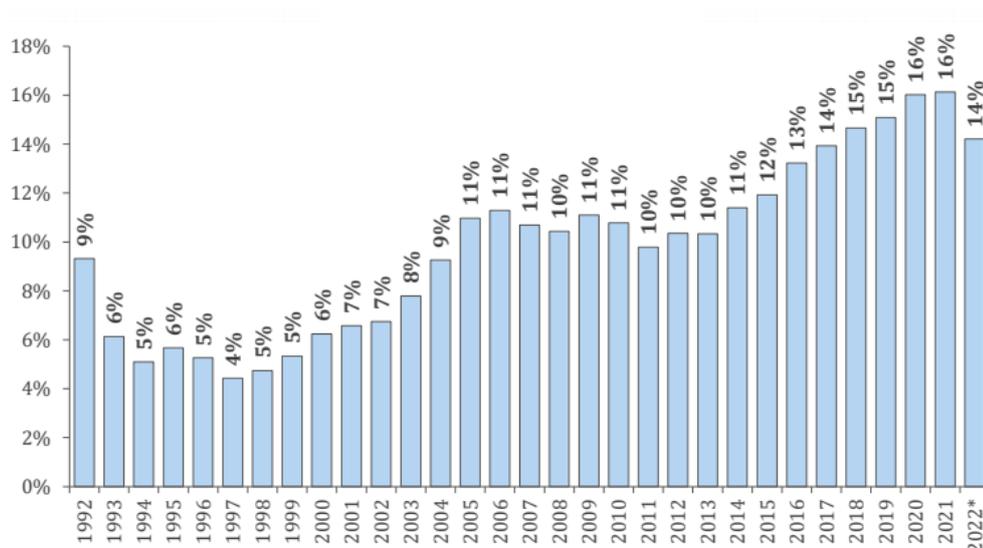


Рис. 10. Динамика доли России в мировом экспорте угля в 1992–2022 гг.

Источник: Опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры... , 2023

Вопреки мировым прогнозам по снижению спроса на уголь выработка в странах Азии растет (рис. 11, рис. 12)

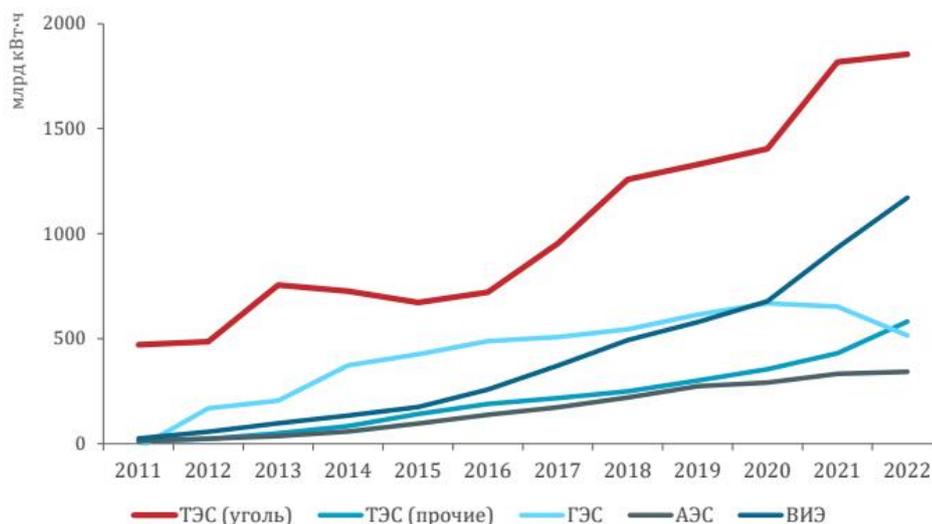


Рис. 11. Накопленный прирост выработки к уровню 2011 г. в Китае

Источник: Опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры... , 2023

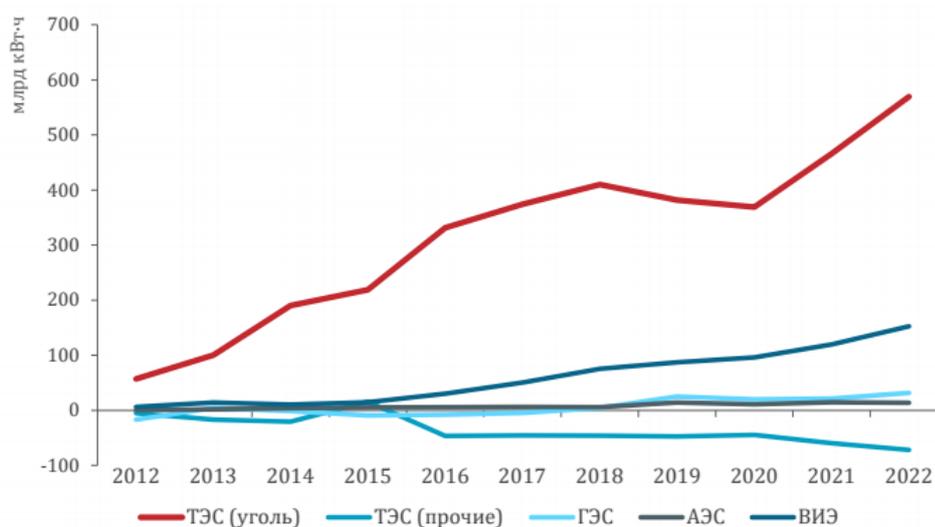


Рис. 12. Накопленный прирост выработки к уровню 2011 г. в Индии

Источник: Опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры... , 2023

В России доля железнодорожного транспорта в экспорте угля в среднем находится на высоком уровне – 97 % (рис. 13).



Рис. 13. Динамика экспорта угля из России, в том числе железнодорожным транспортом в 2012–2022 гг.

Источник: Опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры... , 2023

В настоящее время транспортная отрасль испытывает огромные потрясения в связи с геополитическими изменениями, повлиявшими на мировую логистику. Санкционное давление в 2022–2023 годах привело к изменению структуры и направлений грузоперевозок в России: ускоренными темпами происходит переориентация перевозок основных видов экспортных грузов на восточное и южное направления. Особое внимание направлено на Международный транспортный коридор «Север–Юг» и Северный морской транзитный коридор, так как логистические цепочки смещены в сторону стран Азиатско-Тихоокеанского региона и Ближнего Востока (Путь на восток... , 2023).

Несмотря на то, что грузооборот железнодорожного транспорта в 2022 году практически не изменился по отношению к 2021 году, погрузка снизилась на 3.8 %. При этом погрузка на экспорт снизилась на 12.4 %, а погрузка по России

увеличилась на 1.4 %. В (Хусаинов, 2023) показано, что «экспорт по направлениям изменился по-разному. Изменение общей погрузки по основным экспортным направлениям в 2021–2022 гг. было следующим:

- Северо-Запад с 198.2 млн тонн в 2021 г. до 162.1 млн тонн в 2022 г. (-18 %);
- Восток с 145.5 млн тонн до 147 млн тонн (+1 %);
- Юг с 92.6 млн тонн до 93.4 млн тонн (+0,9 %);
- Украина с 26.4 млн тонн до 3.2 млн тонн (-88 %)».

Переориентация грузопотоков оказала влияние и на основные эксплуатационные характеристики работы железнодорожного транспорта. Оборот грузового вагона рабочего парка по итогам 2022 г. увеличился на 9.7 % (рис.14).

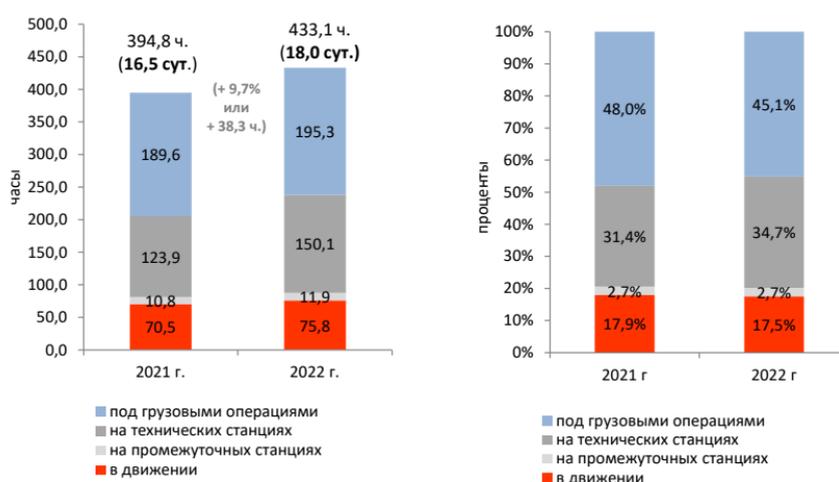


Рис. 14. Оборот грузового вагона и ее структура в 2021 и 2022 гг.

Источник: Хусаинов, 2023

В (Хусаинов, 2023) также приводится комментарий к рисунку 14: «Разложение оборота вагона по элементам позволяет заметить, что из общего ухудшения величины оборота вагона, наибольшее приходится на показатель нахождения на технических станциях ... (68 % всей величины ухудшения). ...Доля этого элемента в структуре оборота вагона выросла с 31.4 % до 34.7 %».

Участковая и техническая скорости грузового поезда уменьшились на 3.5 % и 3.4 % соответственно (рис. 15).

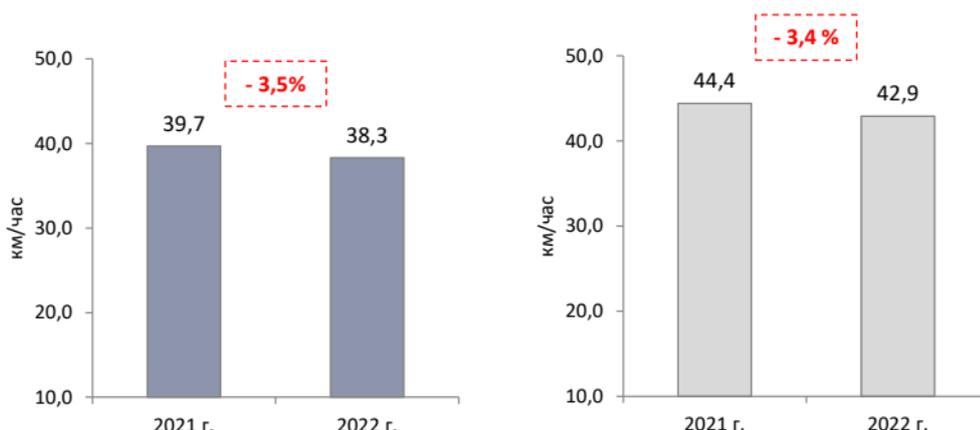


Рис.15. Участковая (слева) и техническая скорость (справа) в 2021 и 2022 гг.

Источник: Хусаинов, 2023

В 2023 г. грузооборот железнодорожного транспорта не изменился по отношению к предыдущему году, а погрузка незначительно уменьшилась (на 0.2 %). На рис. 16 приведена структура погрузки грузов на сети РЖД в 2023 году.



Рис. 16. Структура погрузки грузов на сети РЖД в 2023 году

Источник: Обзор работы грузового железнодорожного транспорта... , 2024

Как видно из рисунка, в общей погрузке грузов железными дорогами важнейшими номенклатурами по-прежнему являются каменный уголь и нефть с нефтепродуктами. Доля каменного угля снизилась с 28.7 % в 2022 г. до 28.4 % в 2023 г. (в абсолютном выражении снижение составило 1.2 %). Доля нефти и нефтепродуктов снизилась с 17.5 % до 17.0 % (в абсолютном выражении снижение составило 2.7 %). Существенно увеличилась погрузка зерна: с 2.5 % до 2.7 % в структуре погрузки и на 37.1 % в абсолютном выражении. Продолжается также тенденция роста перевозок грузов в контейнерах – если в 2022 г. их доля в общей погрузке составляла 3.6 %, то по итогам 2023 г. она составила 4.1 %.

В 2023 г. продолжилось ухудшение эксплуатационных характеристик работы железнодорожного транспорта. Оборот вагона увеличился на 3.9 % (рис. 17)

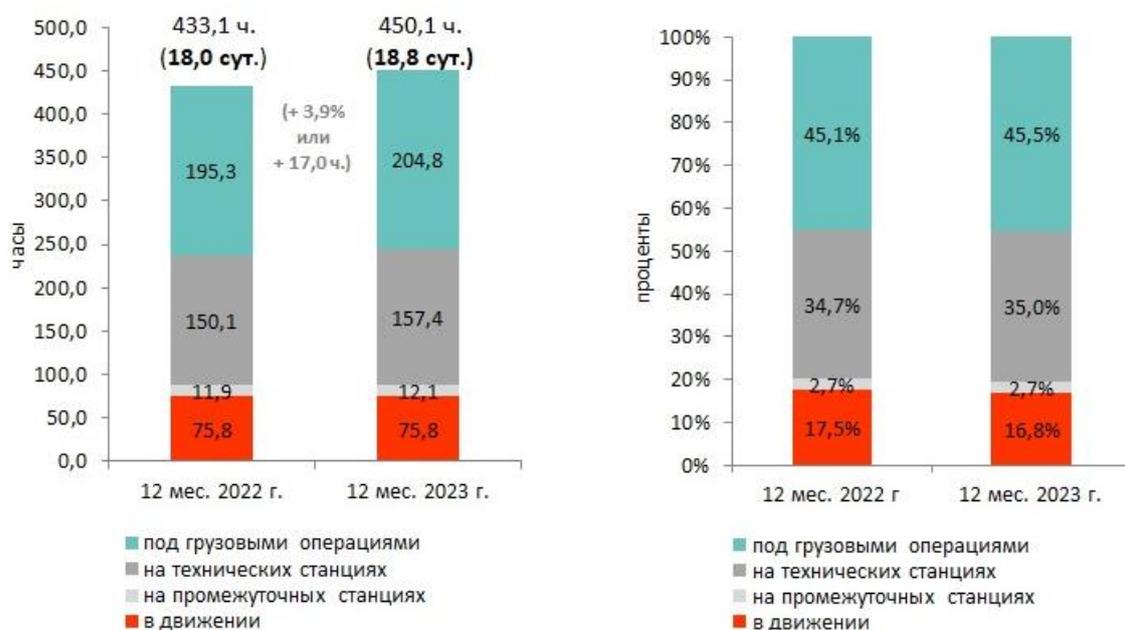


Рис. 17. Оборот грузового вагона и ее структура в 2022 и 2023 гг.

Источник: Обзор работы грузового железнодорожного транспорта... , 2024

Разложение оборота вагона по элементам (рис. 17) позволяет заметить, что из общего ухудшения величины оборота вагона, наибольшее приходится на показатель нахождения под грузовыми операциями. Также увеличился и показатель нахождения на технических станциях.

Участковая и техническая скорости грузового поезда уменьшились на 1.8 % и 1.2 % соответственно (рис. 18).

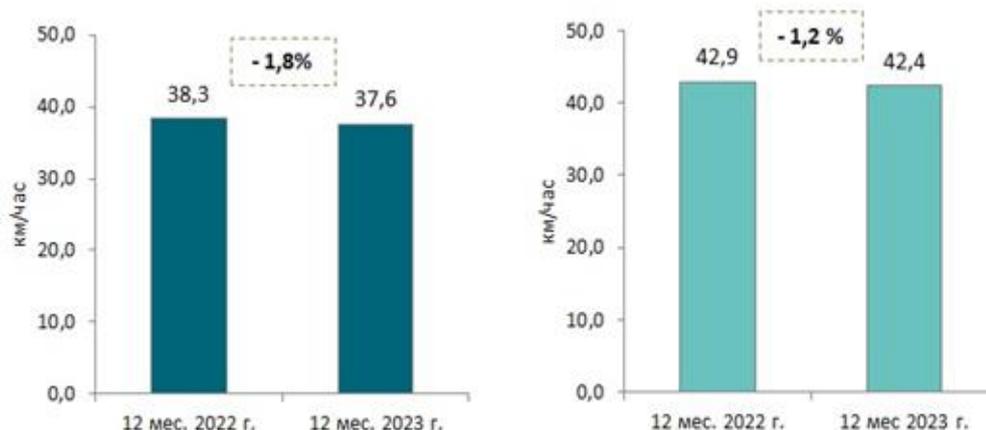


Рис. 18. Участковая (слева) и техническая скорость (справа) в 2022 и 2023 гг.

Источник: Обзор работы грузового железнодорожного транспорта... , 2024

Скорости, достигаемые в грузовом движении, играют значительную роль не только в экономике железнодорожной отрасли, но также в экономике предприятий и отраслей, которые обслуживаются железными дорогами. Себестоимость железнодорожных перевозок обратно пропорциональна участковой скорости. Для повышения эффективности железнодорожных перевозок важно увеличивать участковую скорость не за счёт роста технической скорости, а за счёт сокращения простоев на промежуточных станциях. Это связано с тем, что увеличение технической скорости сопровождается ростом топливно-энергетических затрат и износом подвижного состава. В результате общий эффект от повышения технической скорости может быть снижен. В то же время сокращение простоев на промежуточных станциях позволяет достичь чистого эффекта за счёт экономии вагоно-часов, локомотиво-часов и бригадо-часов локомотивных бригад. Это делает сокращение простоев предпочтительным способом повышения участковой скорости и снижения себестоимости перевозок (Мачерет и др., 2022).

Интенсивность грузопотока на железнодорожном транспорте сильно зависит от загруженности инфраструктуры. Когда она заполняется более чем на

70–80 %, участковая скорость начинает падать, причём при дальнейшем росте загрузки инфраструктуры скорость падения увеличивается. Одним из основных факторов чрезмерной загрузки железнодорожной инфраструктуры являются сезонные колебания объёма грузов. Они характерны не только для железной дороги, но и для других видов транспорта (Мачерет и др., 2022; Мачерет и др., 2020). На рис. 19 приведен график месячной погрузки на сети РЖД.

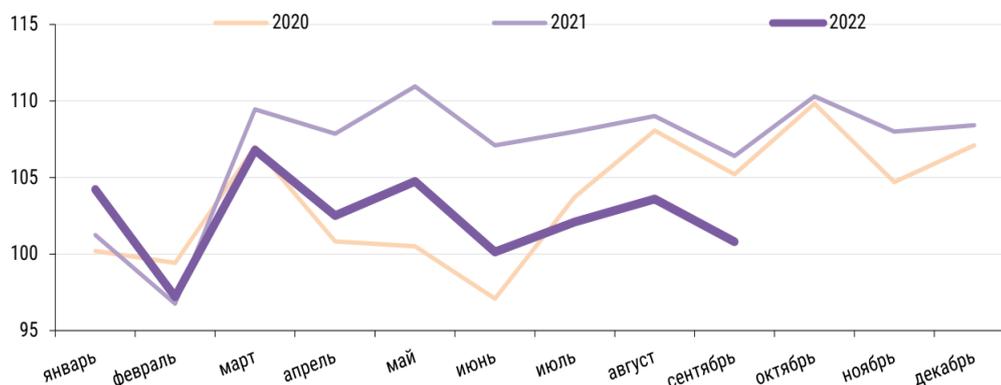


Рис. 19. Динамика месячной погрузки на сети РЖД, млн тонн

Источник: Рынок грузового железнодорожного транспорта России..., 2022

В статьях Д.А. Мачерета и др. (Мачерет и др., 2022) исследовано влияние сезонных колебаний на скорости грузовых поездов. Анализ результатов расчетов, выполненных за период 2016–2021 гг., свидетельствует о том, что неравномерность загрузки железнодорожной инфраструктуры заметно снижает скорости в грузовом движении. Авторы статьи отмечают, что «повышение равномерности загрузки инфраструктуры можно рассматривать как один из инструментов ускорения движения грузовых поездов и перевозки товаров, а также повышения скоростной эффективности железнодорожного транспорта».

Еще одной причиной чрезмерной загрузки инфраструктуры на железнодорожном транспорте помимо сезонного колебания объёма погрузки является неравномерность накопления грузовых составов на технических и грузовых станциях. В (Долгий, 2021) отмечается, что «...Право определения маршрута вагона перешло к операторам, которые, находясь в условиях

конкуренции, меняют направления следования вагонов с учетом своих интересов. Главным критерием использования грузового вагона для них стала доходность вагона в единицу времени. Поэтому, например, они могут направить в грузовой узел избыточное количество вагонов для обеспечения погрузки, создав тем самым непредсказуемые «пробки». В результате диспетчерам постоянно приходится принимать оперативные решения о пропуске грузовых поездов на основе большого объема ручных расчётов. Это приводит к принятию неоптимальных, а иногда и ошибочных решений, нарушающих ритмичность движения поездов, что влечет за собой значительные экономические издержки (Девятков и др., 2019).

Для смягчения данной проблемы с 1 марта 2023 года ОАО «РЖД» начало вводить контроль по ограничению приема заявок на перевозку грузов и запросов-уведомлений на порожние вагоны (заявок) с использованием динамической модели загрузки инфраструктуры (ДМЗИ) (Пленкин, Новичихин, 2023). Согласно п. 1.5 распоряжения ОАО РЖД № 3090/р от 25 ноября 2022 года «Об утверждении технологии работы динамической модели загрузки инфраструктуры ОАО "РЖД" при реализации процесса согласования заявок на перевозку грузов и запросов-уведомлений на перевозку порожних грузовых вагонов»: «технология предназначена для обеспечения стабильности перевозочного процесса, повышения качества эксплуатационной деятельности и планирования грузовых перевозок за счет сбалансированных возможностей инфраструктуры грузополучателей и ОАО «РЖД» с объемами согласования заявок. В этих целях в ДМЗИ реализованы следующие функциональные возможности:

- построение в соответствии с планом формирования маршрутов следования грузовых отправок с моделированием времени доставки;
- автоматическая оценка возможностей элементов инфраструктуры для пропуска заявляемых грузоотправителями объемов грузов и порожних вагонов;

- при отсутствии возможности приема к перевозке в соответствии с заявляемым Клиентом графиком подач расчет альтернативных графиков подач» (Об утверждении Технологии работы динамической модели... , 2022).

Отметим еще одну причину повышения уровня неравномерности актуальную в последнее время – геополитические изменения, влияющие на мировую логистику (переориентация грузопотоков) и приводящие к чрезмерной загрузке определенных направлений.

Таким образом, в последние годы рынок транспортно-логистических услуг в России и мире претерпевает значительные изменения, что создаёт серьёзные проблемы для Российских железных дорог. Чтобы обеспечить стабильную работу компании, необходимо увеличить провозные и пропускные способности железных дорог. На рис. 20 приведены пути решения данной проблемы.

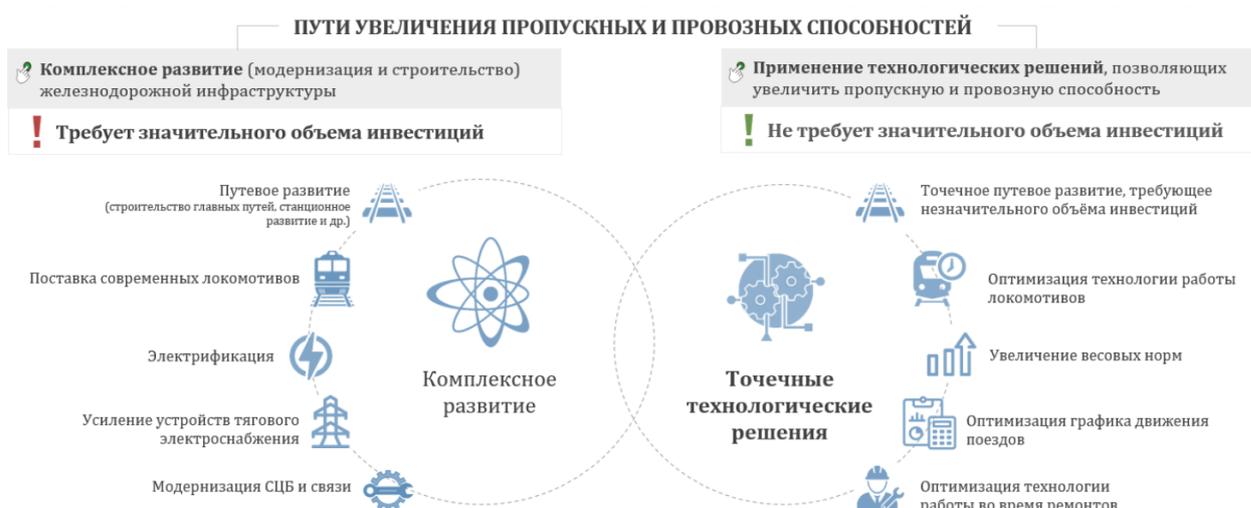


Рис. 20. Пути увеличения пропускных и провозных способностей.

Источник: Опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры... , 2023

Одним из таких решений, не требующих значительного объема инвестиций, является оптимизация железнодорожного планирования и, в частности, графика движения поездов.

1.2. Железнодорожное планирование

Железнодорожное движение включает в себя три важных аспекта планирования: тактическое планирование, оперативное планирование и перепланирование. Каждый из этих этапов имеет свои специфические задачи и цели, которые способствуют эффективному и безопасному движению поездов в железнодорожной сети. Тактическое планирование в железнодорожной отрасли охватывает долгосрочную перспективу. Это включает создание расписания и маршрутов поездов на длительный период, часто на несколько месяцев или даже год вперед. В фокусе тактического планирования – оптимизация использования инфраструктуры, определение временных окон для поездов и выделение ресурсов, таких как платформы и пути. Оперативное планирование, напротив, связано с планированием на краткосрочной перспективе, ближе к моменту отправления поездов. На этом уровне формируются окончательные детали маршрутов, включая точные времена отправления и прибытия, управление платформами и другими ресурсами. Оперативное планирование может включать в себя такие элементы, как учет текущего состояния сети, возможные задержки и дополнительные требования к ресурсам. Перепланирование нацелено на реакцию на изменения и отклонения от первоначального расписания. Это процесс в реальном времени, который включает в себя перераспределение ресурсов, учет возможных задержек, а также решение конфликтов между поездами. Перепланирование может быть вызвано различными факторами, такими как технические сбои, аварии, изменения в спросе или другие непредвиденные обстоятельства. Вместе эти три уровня обеспечивают эффективное и гибкое управление железнодорожным движением, позволяя адаптироваться к различным сценариям и обеспечивать безопасность и эффективность перевозок (Törnquist, 2005; Keita, Pellegrini, Rodriguez, 2017).

Существуют два различных подхода к железнодорожному планированию: микроскопический и макроскопический.

Микроскопический подход формирует последовательность поездов на сегментах железнодорожной сети. При этом сами поезда описываются бинарными переменными, а время входа и выхода каждого поезда на каждом сегменте – непрерывными. Железнодорожная сеть в этом случае явно состоит из сегментов, а узлы между сегментами (перекрестки, станции и т. д.) моделируются неявно. Макроскопический подход моделирует станции в явном виде, а сегменты между ними неявно. Бинарные переменные определяют в каком порядке поезда входят и выходят со станций, и в соответствии с этим непрерывные переменные указывают, когда поезд прибывает на соответствующие станции и пути и покидает их.

Микроскопический подход применяется для анализа конкретных сценариев, где важны детали движения поездов и характеристики каждого сегмента. Он эффективен при моделировании ситуаций с высокой степенью разветвленности и сложности, хорошо подходит для железнодорожных сетей с множеством перекрестков, разветвлений и сложных структур. Этот подход как правило применяется при тактическом планировании.

Макроскопический подход эффективен для оптимизации общего потока поездов на уровне станций, особенно при наличии множества станций в сети. Он применяется для анализа и управления перегонами и станциями с упором на общие требования и критерии. Он особенно полезен для планирования и координации на уровне сети.

1.3. Управление железнодорожным движением в реальном времени

Выделим следующие этапы управления железнодорожным движением в реальном времени (real-time Railway Traffic Management Problem, rtRTMP):

Мониторинг текущей ситуации: постоянное отслеживание текущей ситуации на железнодорожной сети, включая положение поездов, состояние инфраструктуры, технические сбои и другие факторы.

Обнаружение задержек и конфликтов: использование систем обнаружения и мониторинга для выявления задержек, конфликтов и других проблем, которые могут повлиять на движение поездов.

Динамическое адаптивное управление: принятие оперативных решений в реальном времени для адаптации к текущим условиям, включая изменение приоритетов, перераспределение ресурсов и динамическое корректирование расписания.

Принятие решений по безопасности: реагирование на опасные ситуации, такие как обнаружение потенциальных столкновений, аварий или других чрезвычайных обстоятельств.

Коррекция расписания и маршрутов: внесение изменений в расписание движения поездов и маршруты в ответ на задержки, изменения в графике, аварии или другие факторы.

Системы связи и информирования: обеспечение связи между диспетчерами, поездами и другими участниками для оперативного обмена информацией и координации действий.

Прогнозирование и адаптация: использование алгоритмов прогнозирования для предсказания будущих событий и принятие мер по их предотвращению или адаптации.

Предложено много алгоритмов для решения проблемы управления железнодорожным движением в реальном времени. Их можно разделить на две категории: те, которые предлагают алгоритмы, не фокусируясь на размере задач, и те, которые явно решают задачи большой размерности используя декомпозицию.

В первом случае довольно часто применяются эвристические методы решения. В ряде работ авторы предлагают эти методы, в которых маршруты поездов фиксированы, а оптимизация касается лишь решений по организации движения поездов. Алгоритм, определяющий оптимальную организацию движения поездов на однопутной дороге, предложен в (Higgins et al., 1996).

Этот алгоритм может как поддерживать диспетчеров поездов в решении проблемы rtRTMP, так и оценивать влияние изменений в графике движения поездов. В работе (Sahin, 1999) представлен эвристический алгоритм для решения проблемы перепланирования маршрутов движения поездов в нарушенных ситуациях. В (Dessouky et al., 2006) авторы предлагают алгоритм ветвей и границ для перепланирования маршрутов движения поездов с использованием заранее определенных маршрутов. Некоторые авторы предлагают эвристические методы решения, которые учитывают ограниченное количество альтернативных маршрутов, выбираемых в процессе решения (D’Ariano et al., 2008; Corman et al., 2010; Acuna-Agost et al., 2011); другие начинают с небольшого числа альтернативных маршрутов и увеличивают их в процессе решения (Caimi et al., 2011, 2012).

В исследованиях (D’Ariano, Pranzo 2009; Corman et al., 2012, 2014) предлагают эвристические методы декомпозиции задач для решения проблемы управления железнодорожным движением в реальном времени (rtRTMP). Авторы разбивают сложные задачи rtRTMP на диспетчерские области и применяют двухуровневый метод оптимизации для их эффективного решения. На нижнем уровне система управляет движением внутри своей зоны контроля, не обладая информацией о движении в других областях. На более высоком уровне координатор ответственен за управление движением по всей железнодорожной сети, учитывая общую картину потоков движения в нескольких зонах.

В работе (Lusby et al., 2012) предлагают классические математические методы декомпозиции, такие как генерация столбцов.

Проблема rtRTMP может быть решена с использованием алгоритма RECIFE-MILP. Основная идея этого алгоритма заключается в том, что он использует эвристический алгоритм RECIFE (Real-Coded Evolutionary algorithm with Infeasible First Enhancement) для быстрого нахождения начального приближенного решения задачи. Затем этот результат уточняется с помощью

методов смешанного целочисленного линейного программирования (Mixed Integer Linear Programming, MILP) для получения оптимального решения. Формулировка задачи в виде MILP позволяет учитывать различные ограничения и характеристики инфраструктуры в подробных деталях. Таким образом, RECIFE-MILP способен решать задачи с учетом всех особенностей инфраструктуры и требований к системе за разумное время. Однако, было показано (Pellegrini et al., 2015), что его производительность может значительно ухудшаться при моделировании очень крупных задач в короткие сроки. Данная проблема решается с использованием декомпозиции Бендерса (Benders, 1962), с помощью которой исходная задача разбивается на мастер-задачу и несколько подзадач (Keita, Pellegrini, Rodriguez, 2017). Достоинством данного метода является то, что подзадачи можно решать независимо и параллельно.

Традиционная парадигма централизованного управления железнодорожным участком основана на идее обеспечения движения всех типов поездов согласно строгому графику, в котором определены нормативы времен выполнения операций как при движении, так и при остановках на станциях. Основным приоритетом является увеличение "твердого" ядра графика для грузовых поездов и повышение их скорости. Этот подход не учитывает возможности изменения стратегии управления в условиях изменения интенсивности движения поездов или состояния инфраструктуры. В случае отклонений от графика строгое следование нормативам, в конечном итоге, приводит к увеличению общего уровня задержек и избыточному расходу ресурсов (Давыдов, 2022).

Прогрессивный подход к решению проблемы предполагает, что временные характеристики технических процессов в грузовом сегменте железнодорожного движения должны быть гибкими и зависеть от текущей ситуации. Операционные нормы на перегонах и станциях должны строго соблюдаться только в случае нормальных условий работы участка дороги. При нарушении графика движения требования к соблюдению норм должны быть

смягчены. Продолжительность операций на станциях и расписание движения для конкретных поездов в таких случаях определяются индивидуально с учетом наиболее экономичного преодоления конфликтных ситуаций. Единственным неизменным требованием для управления движением остается доставка грузов в установленные сроки, не влекущие за собой штрафные санкции (Давыдов, 2022; Юсипов, 2001; Тулупов, Юйлиан, 1997).

Примером внедрения такого прогрессивного подхода является European Train Control System (ETCS). ETCS является системой управления поездами, разработанной для эффективного и безопасного контроля движения на железнодорожных магистралях в Европе. Одним из ключевых аспектов этой системы является управление интенсивностью грузопотока в зависимости от загруженности станций. ETCS предоставляет средства для автоматического регулирования потока поездов, учитывая текущие условия и загрузку станций в реальном времени. Эта функциональность позволяет системе адаптироваться к изменениям в интенсивности грузопотока на различных участках железнодорожной инфраструктуры. Путем использования данных о загруженности станций ETCS может автоматически регулировать скорость движения поездов, оптимизируя интенсивность грузоперевозок в соответствии с актуальной ситуацией. Такой подход способствует более эффективному использованию железнодорожной инфраструктуры и обеспечивает более плавное движение поездов, особенно на участках с высокой загруженностью. Посредством динамического управления грузопотоком ETCS способствует снижению заторов, оптимизирует процессы движения поездов и повышает общую эффективность железнодорожных перевозок в условиях переменной загрузки станций.

1.4. Выводы по главе 1

В данной диссертационной работе представлены макроскопические динамические модели, в которых процесс организации железнодорожных грузоперевозок представляет собой формирование грузопотока на основе

взаимодействия произвольной станции с соседними станциями (предыдущей и следующей). Такое взаимодействие нацелено на снижение неравномерности загрузки инфраструктуры. Рассматривается несколько конфигураций участка железнодорожной сети. Первая конфигурация представляет собой протяженную линию, состоящую из большого количества станций и подходит для описания транснациональных перевозок (например, перевозки по транссибирской железнодорожной магистрали протяженностью более 9000 км). Вторая конфигурация – замкнутая цепочка станций, третья – железнодорожная линия между двумя узловыми станциями.

В зависимости от характера спроса используется два подхода к организации грузоперевозок. Первый подход целесообразно применять при наличии стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В этом случае важно максимально задействовать потенциал всех станций. Для этого необходимо обеспечить загрузку определенного количества путей на станциях, которое представляет собой максимально возможное число задействованных путей на станциях, при котором гарантированно можно организовать бесперебойный грузопоток (загрузка 70–80 % пропускной способности станции). Для исключения ситуаций, приводящих к сбою в системе грузоперевозок, при загрузке станций сверх указанного уровня необходимо часть грузов отправить на временное хранение. Для этого предполагается наличие специальных зон хранения между станциями. Для данного подхода одной из важных задач является организация системы контроля, обеспечивающей вывод грузов из зон временного хранения. Процедура организации грузопотока использует две технологии, единые для всех станций, а сам грузопоток состоит из двух составляющих: диффузионной и конвективной.

Диффузионная составляющая является результатом взаимодействия соседних станций, которое формируется по определенному правилу. Согласно этому правилу каждая станция должна принимать груз с предыдущей станции, если число задействованных путей на ней меньше, чем на предыдущей станции,

и отправлять на следующую станцию, если число задействованных путей на ней больше, чем на следующей станции. При этом интенсивность приема и интенсивность отправки грузов пропорциональны разности чисел задействованных путей на соседних станциях. Основной задачей такого взаимодействия станций является уменьшение неравномерности грузопотока на рассматриваемом участке железнодорожной сети. Конвективная составляющая грузопотока является результатом взаимодействия станции с соседними зонами временного хранения грузов. Такое взаимодействие нацелено на использование технических возможностей станции в полном объеме.

Второй подход целесообразно применять в случае, когда нет стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В этом случае нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере и, соответственно, в использовании специальных зон между станциями для временного хранения части грузов. В такой ситуации добиться уменьшения неравномерности грузопотока можно с помощью правильного управления пропускными способностями станций в зависимости от спроса на грузоперевозки. Основной характеристикой станций является степень несогласованности между приемом и отправкой грузов, которая определяет дисбаланс между объемом входных и выходных грузов за единицу времени. Для обеспечения равномерного грузопотока важно в таком объеме задействовать потенциалы станций, чтобы степень несогласованности между приемом и отправкой грузов со временем имела небольшие значения на всех станциях.

Кроме того, в диссертационной работе предложен один из подходов к решению задачи управления парком грузовых железнодорожных вагонов. Эта задача возникает перед операторами железнодорожного транспорта. Исходными данными для него являются: список заявок, поступающих от заказчиков, и местоположение вагонов к началу планового периода. Заявка, сформированная заказчиком, содержит: станцию отправления; станцию назначения; наименование и объем груза, который заказчик хотел бы перевезти; а также

ставку, которую заказчик платит транспортному оператору за каждый перевезенный вагон груза. Планирование осуществляется на месяц вперед и заключается, с одной стороны, в выборе наиболее выгодных к исполнению заявок, с другой стороны – в построении такой последовательности грузовых и порожних перегонов, которые исполнят выбранные заявки с наибольшей эффективностью. Для решения указанной задачи, как правило, применяют метод генерации колонок. Преимуществом предложенного подхода, заключающегося в решении задачи линейного программирования большой размерности, является поиск оптимального плана перевозок на множестве всевозможных маршрутов, тогда как в методах, связанных с генерацией колонок, решается серия задач линейного программирования на подмножествах множества всех маршрутов. Как следствие, решение, полученное с помощью метода генерации колонок, может отличаться от оптимального. На практике в этом случае упущенная выгода транспортного оператора может измеряться десятками миллионов рублей в месяц.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК НА КРУПНЕЙШИХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЛИНИЯХ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ²

Данная глава посвящена построению динамических моделей организации железнодорожных грузоперевозок в условиях стабильно высокого спроса на них, что предполагает скоординированную работу станций с целью использования их потенциала в полной мере. Такой режим работы станций чреват перебоями в системе грузоперевозок, связанными с чрезмерной загрузкой станций. Для предотвращения таких ситуаций необходимо установить предельно допустимую загруженность станций, позволяющую организовать бесперебойный грузопоток и, при необходимости, освобождать чрезмерно загруженные станции путем отправки части грузов в зону временного хранения. Предполагается, что такие зоны существуют между произвольными двумя соседними станциями. Рассматриваются две конфигурации железнодорожной сети: первая – протяженная линия, состоящая из большого количества станций (например, Транссибирская магистраль), вторая – замкнутая цепочка станций. Организация эффективного грузопотока в рамках таких конфигураций железнодорожной сети в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки во многом зависит от правильной организации процесса взаимодействия промежуточных станций. Для детального описания и анализа указанного процесса в моделях,

² Данная глава написана на основании работ автора: Об одном классе динамических моделей грузоперевозок / Л.А. Бекларян, Н.К. Хачатрян // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 10. – С. 1649-1667 (Web of Science, Scopus, RSCI).

Динамическая модель организации грузоперевозок при ограниченности емкостей перегонных путей // Бизнес-Информатика. – 2013. – № 4. – С. 62-68 (Web of Science, Scopus, RSCI).

О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. – 2003 – № 3. – С. 137-149 (Web of Science, Scopus, RSCI).

Динамическая модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – № 5. – С. 80-83 (список диссовета).

О некоторых динамических моделях транспортных перевозок // Аудит и финансовый анализ. – 2003. – № 3. – С. 191-194 (список диссовета).

описываемых в данной главе, узловые станции не присутствуют и их влияние на систему грузоперевозок не учитывается.

2.1. Модель транснациональных грузоперевозок: технологии организации грузопотока, правило контроля. Основные результаты.

Данная модель описывает движение грузопотока в рамках первой конфигурации железнодорожной сети. Для того чтобы описать процедуру грузоперевозок без учета влияния на нее узловых станций будем считать линию железнодорожной сети неограниченной. Движение грузопотока осуществляется в одном направлении. Схема движения грузопотока представлена на рис. 21. Кружками на ней обозначены станции, а квадратами – зоны временного хранения грузов.

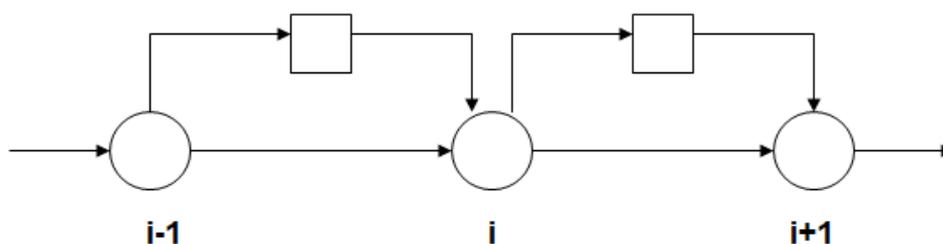


Рис. 21. Схема движения грузопотока

Источник: составлено автором

Данная модель была подробно исследована в работах (Хачатрян, 2003; Beklaryan, Khachatryan, 2006). Приведем ее описание и основные содержательные результаты. Точные формулировки основных теорем приведены в приложении 1.

На каждой станции существует определенное число путей (так называемые станционные пути). Каждая станция с номером i в произвольный момент времени t характеризуется числом задействованных путей $z_i(t)$. Это число отождествляется с объемом грузов на станции. Опишем процесс организации грузоперевозок, определяющий формирование грузопотока, содержащего две составляющие: постоянный и переменный. Постоянный поток формируется

автоматически, однако, его уровень может быть достаточно низким и как следствие не полностью удовлетворить высокий спрос на грузоперевозки. Простое увеличение постоянного потока до оптимальных значений невозможно в силу неравномерной загруженности станций. В связи с этим параллельно с постоянным потоком запускается переменный поток, с помощью которого можно увеличить грузопоток за счет выравнивания загруженности станций. Организация переменного потока осуществляется посредством двух технологий. Первая технология осуществляет взаимодействие соседних станций, а вторая – взаимодействие станции с соседними зонами временного хранения грузов. Опишем эти технологии.

Согласно первой технологии, каждая станция i должна:

- 1) принять груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha(z_{i-1} - z_i)$,
если $z_{i-1} > z_i$,
- 2) и отправить его на следующую станцию с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i+1})$,
если $z_i > z_{i+1}$.

При нарушении первого условия станция с номером i отправляет груз в зону временного хранения с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, а при нарушении второго – принимает груз с зоны временного хранения с интенсивностью $\alpha(z_{i+1} - z_i)$. Параметр $\alpha > 0$ является нормативом правила взаимодействия соседних станций. Таким образом, произвольная станция принимает груз с предыдущей станции, если число задействованных путей на ней меньше, чем на предыдущей станции, и отправляет на следующую станцию, если число задействованных путей на ней больше, чем на следующей станции. Интенсивность как приема, так и отправки грузов с произвольной станции пропорциональна разности чисел задействованных путей на данной станции и соседних станциях. Коэффициент пропорциональности является единым для всех станций и характеризует возможность перегонных путей в целом по всей железнодорожной сети.

Для всех станций существует единый критический уровень числа задействованных станционных путей, при превышении которого необходимо

экстренное освобождение путей (отправка части грузов в зоны временного хранения). Экстренное освобождение путей проводится с помощью второй технологии. Ее используют также и для приема грузов с зоны временного хранения, расположенного до станции (если число задействованных путей на станции меньше критического уровня числа задействованных путей). График функции, задающей скорость изменения числа задействованных путей в рамках данной технологии, представлен на рис. 22.

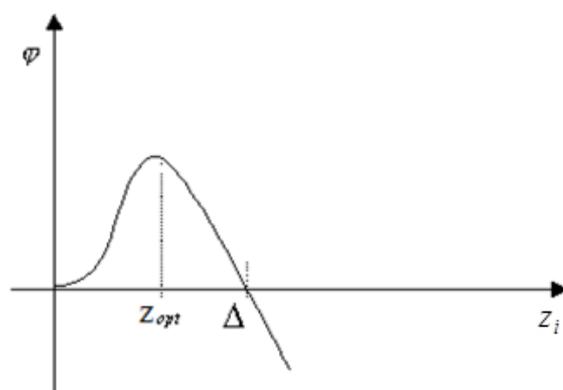


Рис. 22. Скорость изменения числа задействованных станционных путей в рамках второй технологии

Источник: составлено автором

Как видно из рис. 22, до тех пор пока число задействованных путей на станции не больше критического значения Δ , вторая технология применяется для приема грузов с зоны временного хранения, расположенного до станции. Так как данная технология является дорогостоящей, то применяется она активно лишь при определенной загрузке станций (близкой к z_{opt}), при которой уменьшается грузопоток в рамках первой технологии, а загруженность станций не близка к критической. Как только число задействованных путей на станции превышает значение Δ , то вторая технология применяется для экстренного вывоза части грузов в зону временного хранения, расположенную после станции. Отметим, что функция $\varphi(\cdot)$ на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей и следовательно вывоз грузов в зону временного хранения

осуществляется с интенсивностью прямо пропорциональной превышению числа задействованных путей критического значения.

Организация подобных грузоперевозок с использованием зон временного хранения грузов должна включать в себя систему контроля. Используется простая система контроля. Она заключается в том, что объемы грузов на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени $\tau > 0$, называемым характеристикой системы контроля. В нашей интерпретации она формулируется следующим образом: число задействованных путей на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени $\tau > 0$.

Таким образом, динамика числа задействованных путей, определяемая описанными выше двумя технологиями, задается бесконечномерной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i(t) = \alpha(z_{i-1} - z_i) - \alpha(z_i - z_{i+1}) + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty).$$

После простейшего преобразования данная система приобретает следующий вид

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (1)$$

Система контроля задается следующими нелокальными линейными ограничениями

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (2)$$

Возникает вопрос, существуют ли режимы грузоперевозок, осуществляемые с помощью указанных выше технологий и удовлетворяющие заданной системе контроля. Если такие режимы существуют, то для какого диапазона изменения характеристики системы контроля. Дело в том, что диапазон изменения характеристики системы контроля τ должен быть актуальным. Слишком малые значения τ неактуальны, так как они значительно меньше времени перегона грузов со станции i на станцию $i + 1$. Слишком большие значения τ также неактуальны, так как они не соизмеримы с временными лагами реальных процессов.

Итак, нам надо получить ответы на следующие вопросы. Имеет ли система дифференциальных уравнений (1) решения, удовлетворяющие нелокальным

линейным ограничениям (2)? Для какого диапазона изменения характеристики τ системы контроля такие решения существуют?

Прежде чем ответить на них дадим точное определение решения системы дифференциальных уравнений (1).

Определение 1. Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i \in Z}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется решением системы дифференциальных уравнений (1), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют этой системе. ■

Решение системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие условию (2) (решения системы (1) – (2)) называются *решениями типа бегущей волны*, или солитонными решениями.

Доказано существование $\bar{\tau} > 0$ такого, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$, $\bar{i} \in Z$, $\bar{z} \in R$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$ система (1) – (2) с фиксированным начальным значением $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = \bar{z}$ имеет решение. Такое решение является единственным (точная формулировка данного результата (теорема 8) приведена в приложении 1).

Таким образом, существует такой диапазон изменения характеристик системы контроля, что для каждого значения характеристики системы контроля из этого диапазона имеется единственный режим грузоперевозок, осуществляемый с помощью указанных выше технологий и удовлетворяющий заданной системе контроля. Значение $\bar{\tau} > 0$ зависит от параметра α и константы Липшица $\varphi(\cdot)$, т.е. функции, отражающей возможности второй технологии по приему грузов с зон временного хранения. С увеличением как параметра α , так и константы Липшица значение $\bar{\tau}$ уменьшается.

Напомним, что задача указанных выше технологий – обеспечить дополнительную загрузку станций и по возможности увеличить интенсивность постоянного потока.

Возникает вопрос: можно ли настолько увеличить интенсивность постоянного потока, чтобы только за счет него обеспечить оптимальную загрузку станций? Отметим, что в нашей интерпретации интенсивность потока

прямо пропорциональна загруженности станций обеспечивающих такой поток (числу задействованных станционных путей). Для ответа на данный вопрос нужно исследовать стационарные решения системы (1)–(2) (в случае их наличия) на устойчивость.

Система (1)–(2) имеет два стационарных решения: $\bar{z}_1 \equiv \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$. Доказано, что стационарное решение $\bar{z}_2 \equiv \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$ является устойчивым, а стационарное решение $\bar{z}_1 \equiv \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$ – неустойчивым (точная формулировка данного результата (теорема 9, теорема 10) приведена в приложении 1). Таким образом, в рамках описанной модели можно организовать стационарный поток, в котором потенциал всех станций будет максимально использован.

2.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций. Случай неограниченной емкости зон временного хранения грузов.

Рассмотрим модель транспортных грузоперевозок по замкнутой цепочке станций, изображенной на следующем рисунке (Бекларян, Хачатрян, 2013)

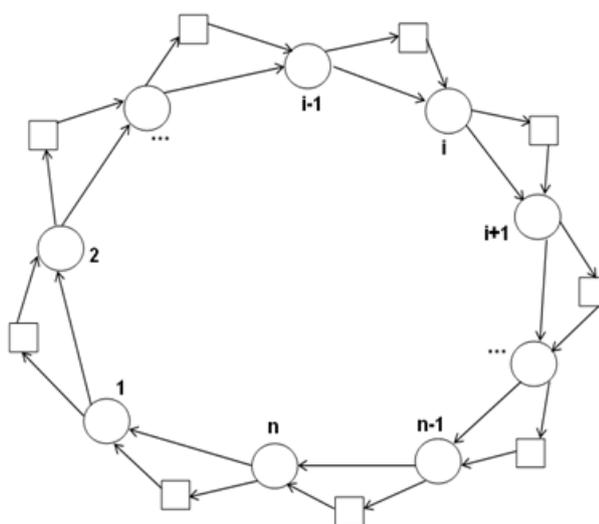


Рис. 23. Схема замкнутой цепочки станций

Источник: составлено автором

На рис. 23 представлена замкнутая цепочка, состоящая из n станций (нумерованные кружки). Как и в случае транснациональных грузоперевозок между произвольными двумя соседними станциями расположена зона временного хранения грузов (квадраты), так что на произвольную станцию груз может поступать с предыдущей станции или из зоны временного хранения, расположенной до станции и отправляться на следующую станцию или в зону временного хранения грузов, расположенную после станции. Организация грузопотока осуществляется точно так же, как и в предыдущей модели. Формально такую модель можно рассматривать как частный случай модели транснациональных грузоперевозок, и для ее исследования нам необходимо изучить решения системы (1)–(2), удовлетворяющие следующему дополнительному условию

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty).$$

Таким образом, данная модель описывается следующей системой

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \quad (3)$$

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \quad (4)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (5)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Если $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ является решением системы (3)–(5), то для произвольного $i \in Z$ функция $\bar{z}_i(\cdot)$ периодическая с периодом τn .

Доказательство. Пусть $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ является решением системы (3)–(5). Тогда из условия бегущей волны (соотношение (5)) следует, что для произвольных $i \in Z, t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство $\bar{z}_i(t) = \bar{z}_{i+n}(t + \tau n)$. Из условия (4) следует, что $\bar{z}_{i+n}(t + \tau n) = \bar{z}_i(t + \tau n)$, следовательно, $\bar{z}_i(t) = \bar{z}_i(t + \tau n)$, т.е. $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ является периодическим с периодом τn . ■

Несложно заметить, что систему (3)–(5) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \quad (6)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (7)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \quad t \in [0, +\infty), \quad (8)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (9)$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \quad (10)$$

$$z_{i+kn}(t) = z_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (11)$$

Наряду с системой (6)–(11) рассмотрим конечномерную систему

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \quad (12)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (13)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \quad t \in [0, +\infty), \quad (14)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (15)$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty). \quad (16)$$

Лемма 2. Если $\{z_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ является решением системы (6)–(11), то $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением системы (12)–(16). Если $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ – решение системы (12)–(16), то $\{z_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $z_{i+kn}(t) = z_i(t)$ $i = 1, \dots, n, k \in \mathbb{Z}$ является решением системы (6)–(11).

Доказательство очевидно. ■

Таким образом, разрешимость исходной системы (3)–(5) зависит от разрешимости конечномерной системы (12)–(16).

Итак, согласно леммам 1 и 2, если система (12)–(16) имеет решение, то оно будет периодическим с периодом τn . Одним из таких решений является стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$. Для выявления других решений (если они существуют) изучим все решения системы дифференциальных уравнений (12)–(14) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (15)–(16)).

Напомним, что функция $\varphi(\cdot)$ на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей и имеет вид

$$\varphi(z_i) = -\delta(z_i - \Delta), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{где } \delta > 0.$$

На полупрямой $(-\infty, \Delta]$ имеет место неравенство

$$\varphi(z_i) \leq -\delta(z_i - \Delta), \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, всюду на прямой $(-\infty, \infty)$ имеет место следующая оценка

$$\varphi(z_i) \leq -\delta z_i + \Delta\delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Рассмотрим систему (18)–(20), полученную из (12)–(14) в результате подстановки вместо функции $\varphi(\cdot)$ значений $-\delta z_i + \Delta\delta$.

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - (2\alpha + \delta)z_1 + \alpha z_2 + \Delta\delta, \quad t \in [0, +\infty), \quad (18)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - (2\alpha + \delta)z_i + \alpha z_{i+1} + \Delta\delta, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (19)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (2\alpha + \delta)z_n + \alpha z_1 + \Delta\delta, \quad t \in [0, +\infty). \quad (20)$$

Замечание 1. Несложно заметить, что правая часть неравенства (17) является линеаризацией функции $\varphi(\cdot)$ в окрестности точки Δ . Следовательно, после линеаризации функции $\varphi(\cdot)$ в окрестности точки Δ система дифференциальных уравнений (12)–(14) преобразуется в систему дифференциальных уравнений (18)–(20). ■

С помощью замены $\bar{z}_i \rightarrow z_i - \Delta$ система дифференциальных уравнений (18)–(20) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - (2\alpha + \delta)z_1 + \alpha z_2, \quad t \in [0, +\infty), \quad (21)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - (2\alpha + \delta)z_i + \alpha z_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (22)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (2\alpha + \delta)z_n + \alpha z_1, \quad t \in [0, +\infty). \quad (23)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (21)–(23) имеет единственное стационарное решение $(0, 0, \dots, 0)$. Запишем систему (21)–(23) в матричной форме

$$\dot{z}(t) = Az, \quad (24)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) \end{pmatrix},$$

a $z(\cdot) = (z_1(\cdot), z_2(\cdot), \dots, z_n(\cdot))^T$.

Лемма 3. Для произвольных $\alpha > 0, \delta > 0$ собственные числа матрицы A являются отрицательными.

Доказательство приведено в приложении 2. ■

Лемма 4. Для произвольных $\alpha > 0, \delta > 0$ стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ линейной системы (18)–(20) является глобально устойчивым.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что для произвольных $\alpha > 0, \delta > 0$ стационарное решение $(0, 0, \dots, 0)$ линейной системы (24) является глобально устойчивым. Напомним, что линейная система (24) была получена из линейной системы (18)–(20) с помощью замены $\bar{z}_i \rightarrow z_i - \Delta$. Сделав обратную замену, мы получим, что для произвольных $\alpha > 0, \delta > 0$ стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ линейной системы (18)–(20) глобально устойчиво. ■

Теорема 1. Стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (12)–(14) локально устойчиво по Ляпунову по первому приближению.

Доказательство следует из замечания 1 и глобальной устойчивости стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ линейной системы дифференциальных уравнений (18)–(20). ■

Установим связь между свойствами решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) и линейной системы дифференциальных уравнений (18)–(20).

Лемма 5. Если $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением нелинейной системы (12)–(14), а $\{\bar{\bar{z}}_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением линейной системы (18)–(20) и для каждого $i = 1, \dots, n$ выполняется условие $\bar{z}_i(t_0) = \bar{\bar{z}}_i(t_0)$ то для каждого $i = 1, \dots, n, t > t_0$ имеет место неравенство $\bar{z}_i(t) \leq \bar{\bar{z}}_i(t)$.

Доказательство следует из структуры правых частей систем дифференциальных уравнений (12)–(14), (18)–(20) и неравенства (17). ■

Покажем, что решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) является ограниченным сверху.

Лемма 6. *Всякое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) ограничено сверху. Более того, асимптотически оно ограничено значением Δ .*

Доказательство следует из леммы 4 и леммы 5. ■

Покажем, что решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) является также ограниченным снизу.

Лемма 7. *Пусть $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14), причем, $\bar{z}_i(\bar{t}) \geq 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Тогда для произвольного $t > \bar{t}$ имеют место неравенства $\bar{z}_i(t) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство следует из структуры правых частей системы дифференциальных уравнений (12)–(14). Действительно, пусть в некоторый момент времени одна из компонент решения системы дифференциальных уравнений (12)–(14) первой оказалась равной нулю, т.е. для некоторого $\tilde{t} > \bar{t}$ выполняются условия: существует $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $\bar{z}_m(\tilde{t}) = 0$ и при этом $\bar{z}_i(\tilde{t}) \geq 0$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда из (12)–(14) следует, что $\dot{\bar{z}}_m(\tilde{t}) \geq 0$ и, следовательно, $\bar{z}_m(t) \geq 0$ при $t > \tilde{t}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для случаев, когда равными нулю становятся одновременно несколько компонент решения системы дифференциальных уравнений (12)–(14) (в том числе когда равными нулю становятся одновременно все компоненты решения). ■

Итак, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2. Для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ всякое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения ограничено. Более того, каждая координата решения снизу ограничена нулем, а сверху асимптотически значением Δ .

Доказательство следует из леммы 6 и леммы 7. ■

Перейдем к исследованию области притяжения стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (12)–(14). Для решения данной задачи система дифференциальных уравнений (12)–(14) была решена численно с помощью метода Рунге-Кутты 4-ого порядка. Результаты численных экспериментов сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Для любых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ всякое решение системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$. ■

Таким образом, если координаты начального значения не меньше нуля, то график решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) имеет вид

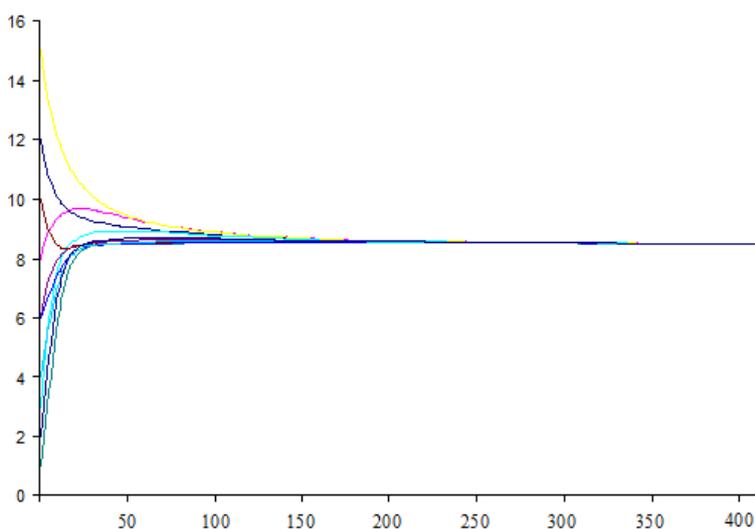


Рис. 24. График решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) (базовый случай)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На данном рисунке представлен график решений нелинейной системы (12)–(14) при $n = 10$, $\alpha = 1$, $\delta = 0.5$, $\Delta = 8.5$.

Численные эксперименты также показали, что как с увеличением значения δ , так и с увеличением значения α решения нелинейной системы (12)–(14) раньше выходят на стационарный режим. Например, ниже на рисунках 25 и 26 представлены графики решений системы (12)–(14) при $\alpha = 1$, $\delta = 1$ и $\alpha = 5$, $\delta = 0.5$ соответственно.

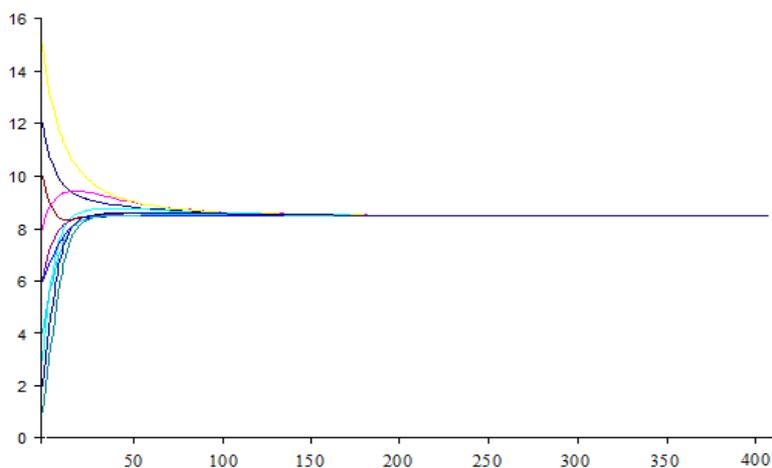


Рис. 25. График решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с увеличенным значением параметра δ

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

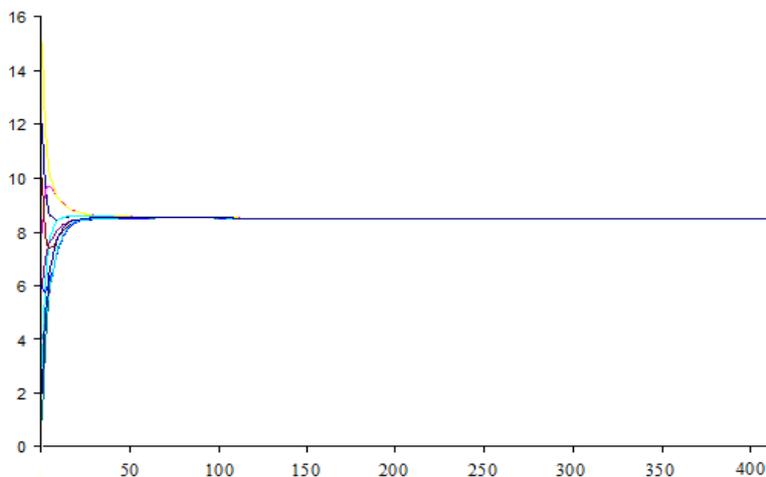


Рис. 26. График решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с увеличенным значением параметра α

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Напомним, что мы занимаемся поиском решений типа бегущей волны системы (3)–(5). Показано, что всякое решение типа бегущей волны системы (3)–(5) является периодическим (лемма 1), а компоненты такого решения с номерами $1, 2, \dots, n$ являются решениями типа бегущей волны конечномерной нелинейной системы (12)–(14) (т.е. удовлетворяют системе (12)–(16)). Было исследовано множество всех решений нелинейной системы (12)–(14) (т.е. не только решений типа бегущей волны, удовлетворяющих условиям (15)–(16) и являющихся периодическими). Доказано, что решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (12)–(14) являются ограниченными (теорема 2). С помощью численных экспериментов была определена область притяжения стационарного решения (утверждение 1). Из теоремы 2 и утверждения 1 следует, что всякое решение системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$. Следовательно, других периодических решений, кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ система дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения не имеет. Это в свою очередь означает, что система (12)–(16) с неотрицательными координатами начального значения кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ не имеет других решений. Таким образом, исходная система (3)–(5) с неотрицательными координатами начального значения имеет единственное решение типа бегущей волны, а именно, стационарное решение $(\dots, \Delta, \Delta, \dots, \Delta, \dots)$. Однако любое решение системы (3)–(4) со временем становится сколь угодно близким к стационарному решению.

Резюмируя выводы, полученные в данном параграфе, отметим, что организация грузоперевозок по замкнутой цепочке станций в соответствии с описанными ранее технологиями всегда приводит к установлению максимально возможного стационарного грузопотока. Время установления такого режима зависит как от технических возможностей перегонных путей, так и от

интенсивности привлечения второй технологии для экстренного освобождения станций.

В заключение отметим, что модели, представленные в параграфах 2.1. и 2.2. строились в предположении, что емкости зон временного хранения грузов не ограничены. В следующем параграфе представлена модификация модели организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций, учитывающая ограниченность указанных емкостей.

2.3. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций в случае ограниченной емкости зон временного хранения грузов

Перейдем к модификации модели, представленной в предыдущем параграфе и описываемой системой (12)–(16) (Хачатрян, 2013). Напомним, что между произвольными промежуточными станциями предполагается наличие зон для временного хранения грузов. Проведем их нумерацию. Зону хранения, расположенную между станциями с номерами i и $i + 1$ обозначим номером i . Количество задействованных путей в i -ой зоне хранения в момент времени t обозначим через $y_i(t)$. Предположим, что количество путей во всех зонах хранения одинаково и равно V .

При такой модификации модели изменятся уравнения (12)–(14), описывающие динамику числа задействованных путей на станциях. Кроме того, появятся дополнительные уравнения, описывающие динамику числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов, решения которых должны удовлетворять условию ограниченности емкостей этих зон.

Начнем с пересмотра уравнения (13), записанного в виде разности входного и выходного потоков (стр. 53, аналог исходного варианта уравнения (1)). Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает взаимодействие i -ой станции с $(i - 1)$ -ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, если $z_{i-1} > z_i$, то грузопоток поступает

с предыдущей станции, если же $z_{i-1} < z_i$ то грузопоток отправляется в зону временного хранения грузов, расположенную между i -ой и $(i + 1)$ -ой станциями (данную зону хранения мы обозначили номером i). С учетом ограниченности емкостей зон временного хранения, первое слагаемое в правой части уравнения (13) примет вид:

$$\alpha(z_{i-1} - z_i)sign(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i)sign(z_i - z_{i-1})sign(V - y_i). \quad (25)$$

Функция $sign$, участвующая в выражении (25) определяется следующим образом:

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (13) описывает взаимодействие i -ой станции с $(i + 1)$ -ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, если $z_i > z_{i+1}$, то грузопоток отправляется на следующую станцию, если же $z_i < z_{i+1}$, то грузопоток поступает с зоны временного хранения грузов, расположенной между $(i - 1)$ -ой и i -ой станциями (данную зону временного хранения грузов мы обозначили номером $(i - 1)$). С учетом ограниченности емкостей зон временного хранения грузов, второе слагаемое в правой части уравнения (13) примет вид:

$$\alpha(z_i - z_{i+1})sign(z_i - z_{i+1}) + \alpha(z_i - z_{i+1})sign(z_{i+1} - z_i)sign(y_{i-1}). \quad (26)$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (13) представляет собой интенсивность изменения числа задействованных путей на станциях в рамках второй технологии и описывает взаимодействие i -ой станции с соседними зонами временного хранения грузов (с номерами $(i - 1)$ и i). Напомним, что в рамках второй технологии, станция с номером i принимает грузопоток с $(i - 1)$ -ой зоны временного хранения грузов с интенсивностью $\varphi(z_i)$ если $z_i < \Delta$ и отправляет в i -ую зону временного хранения грузов с интенсивностью $\varphi(z_i)$ если $z_i > \Delta$. С учетом ограниченности емкостей зон временного хранения грузов, третье слагаемое в правой части уравнения (13) примет вид

$$\varphi(z_i)\text{sign}(\Delta - z_i)\text{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i)\text{sign}(z_i - \Delta)\text{sign}(V - y_i). \quad (27)$$

Таким образом, уравнение (13) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & \alpha(z_{i-1} - z_i)\text{sign}(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i)\text{sign}(z_i - z_{i-1})\text{sign}(V - y_i) - \\ & - [\alpha(z_i - z_{i+1})\text{sign}(z_i - z_{i+1}) + \alpha(z_i - z_{i+1})\text{sign}(z_{i+1} - z_i)\text{sign}(y_{i-1})] + \\ & + \varphi(z_i)\text{sign}(\Delta - z_i)\text{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i)\text{sign}(z_i - \Delta)\text{sign}(V - y_i), \\ & i = 2, \dots, n - 1, \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуются и уравнения, описывающие динамику числа задействованных путей на станциях с номерами 1 и n . Необходимо лишь учесть, что для станции с номером 1 предыдущей будет станция с номером n и, соответственно, для станции с номером n последующей будет станция с номером 1. Итак, дифференциальные уравнения (12) и (14) преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \alpha(z_n - z_1)\text{sign}(z_n - z_1) + \alpha(z_n - z_1)\text{sign}(z_1 - z_n)\text{sign}(V - y_1) - \\ & - [\alpha(z_1 - z_2)\text{sign}(z_1 - z_2) + \alpha(z_1 - z_2)\text{sign}(z_2 - z_1)\text{sign}(y_n)] + \\ & + \varphi(z_1)\text{sign}(\Delta - z_1)\text{sign}(y_n) + \varphi(z_1)\text{sign}(z_1 - \Delta)\text{sign}(V - y_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & \alpha(z_{n-1} - z_n)\text{sign}(z_{n-1} - z_n) + \alpha(z_{n-1} - z_n)\text{sign}(z_n - z_{n-1})\text{sign}(V - y_n) - \\ & - [\alpha(z_n - z_1)\text{sign}(z_n - z_1) + \alpha(z_n - z_1)\text{sign}(z_1 - z_n)\text{sign}(y_{n-1})] + \\ & + \varphi(z_n)\text{sign}(\Delta - z_n)\text{sign}(y_{n-1}) + \varphi(z_n)\text{sign}(z_n - \Delta)\text{sign}(V - y_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Теперь необходимо описать закон, по которому меняется число задействованных путей в зонах временного хранения грузов. В произвольную зону временного хранения грузопоток поступает и с нее отправляется как в рамках первой, так и второй технологий. Вспоминая описанные выше обе технологии, несложно убедиться, что динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов будет описываться следующими дифференциальными уравнениями

$$\dot{y}_1 = \alpha(z_1 - z_n) \text{sign}(z_1 - z_n) \text{sign}(V - y_1) - \alpha(z_3 - z_2) \text{sign}(z_3 - z_2) \text{sign}(y_1) - \\ - \varphi(z_1) \text{sign}(z_1 - \Delta) \text{sign}(V - y_1) - \varphi(z_2) \text{sign}(\Delta - z_2) \text{sign}(y_1), \quad t \in [0, +\infty);$$

$$\dot{y}_i = \alpha(z_i - z_{i-1}) \text{sign}(z_i - z_{i-1}) \text{sign}(V - y_i) - \alpha(z_{i+2} - z_{i+1}) \text{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) \text{sign}(y_i) - \\ - \varphi(z_i) \text{sign}(z_i - \Delta) \text{sign}(V - y_i) - \varphi(z_{i+1}) \text{sign}(\Delta - z_{i+1}) \text{sign}(y_i), \\ i = 2, \dots, n - 1, \quad t \in [0, +\infty);$$

$$\dot{y}_n = \alpha(z_n - z_{n-1}) \text{sign}(z_n - z_{n-1}) \text{sign}(V - y_n) - \alpha(z_2 - z_1) \text{sign}(z_2 - z_1) \text{sign}(y_n) - \\ - \varphi(z_n) \text{sign}(z_n - \Delta) \text{sign}(V - y_n) - \varphi(z_1) \text{sign}(\Delta - z_1) \text{sign}(y_n), \quad t \in [0, +\infty).$$

Линейные слагаемые правых частей этих уравнений описывает динамику числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов в рамках первой технологии, а нелинейные – в рамках второй технологии.

Кроме этого, должны выполняться следующие неравенства

$$0 \leq y_i(t) \leq V, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, +\infty).$$

Эти неравенства накладывает ограничение на число задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Окончательно, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается следующим образом:

$$\dot{z}_1 = \alpha(z_n - z_1) \text{sign}(z_n - z_1) + \alpha(z_n - z_1) \text{sign}(z_1 - z_n) \text{sign}(V - y_1) - \\ - [\alpha(z_1 - z_2) \text{sign}(z_1 - z_2) + \alpha(z_1 - z_2) \text{sign}(z_2 - z_1) \text{sign}(y_n)] + \\ + \varphi(z_1) \text{sign}(\Delta - z_1) \text{sign}(y_n) + \varphi(z_1) \text{sign}(z_1 - \Delta) \text{sign}(V - y_1), \quad t \in [0, +\infty); \quad (28)$$

$$\dot{z}_i = \alpha(z_{i-1} - z_i) \text{sign}(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i) \text{sign}(z_i - z_{i-1}) \text{sign}(V - y_i) - \\ - [\alpha(z_i - z_{i+1}) \text{sign}(z_i - z_{i+1}) + \alpha(z_i - z_{i+1}) \text{sign}(z_{i+1} - z_i) \text{sign}(y_{i-1})] + \\ + \varphi(z_i) \text{sign}(\Delta - z_i) \text{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i) \text{sign}(z_i - \Delta) \text{sign}(V - y_i), \\ i = 2, \dots, n - 1, \quad t \in [0, +\infty); \quad (29)$$

$$\dot{z}_n = \alpha(z_{n-1} - z_n) \text{sign}(z_{n-1} - z_n) + \alpha(z_{n-1} - z_n) \text{sign}(z_n - z_{n-1}) \text{sign}(V - y_n) - \\ - [\alpha(z_n - z_1) \text{sign}(z_n - z_1) + \alpha(z_n - z_1) \text{sign}(z_1 - z_n) \text{sign}(y_{n-1})] + \\ + \varphi(z_n) \text{sign}(\Delta - z_n) \text{sign}(y_{n-1}) + \varphi(z_n) \text{sign}(z_n - \Delta) \text{sign}(V - y_n), \quad t \in [0, +\infty); \quad (30)$$

$$\dot{y}_1 = \alpha(z_1 - z_n)\text{sign}(z_1 - z_n)\text{sign}(V - y_1) - \alpha(z_3 - z_2)\text{sign}(z_3 - z_2)\text{sign}(y_1) - \\ - \varphi(z_1)\text{sign}(z_1 - \Delta)\text{sign}(V - y_1) - \varphi(z_2)\text{sign}(\Delta - z_2)\text{sign}(y_1), \quad t \in [0, +\infty); \quad (31)$$

$$\dot{y}_i = \alpha(z_i - z_{i-1})\text{sign}(z_i - z_{i-1})\text{sign}(V - y_i) - \alpha(z_{i+2} - z_{i+1})\text{sign}(z_{i+2} - z_{i+1})\text{sign}(y_i) - \\ - \varphi(z_i)\text{sign}(z_i - \Delta)\text{sign}(V - y_i) - \varphi(z_{i+1})\text{sign}(\Delta - z_{i+1})\text{sign}(y_i), \\ i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \quad (32)$$

$$\dot{y}_n = \alpha(z_n - z_{n-1})\text{sign}(z_n - z_{n-1})\text{sign}(V - y_n) - \alpha(z_2 - z_1)\text{sign}(z_2 - z_1)\text{sign}(y_n) - \\ - \varphi(z_n)\text{sign}(z_n - \Delta)\text{sign}(V - y_n) - \varphi(z_1)\text{sign}(\Delta - z_1)\text{sign}(y_n), \quad t \in [0, +\infty); \quad (33)$$

$$0 \leq y_i(t) \leq V, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, +\infty); \quad (34)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \quad (35)$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty). \quad (36)$$

Система дифференциальных уравнений (28)–(33) имеет три типа стационарных решений. Опишем их.

1. $z_i = \Delta, \quad y_i = c_i, \quad 0 \leq c_i \leq V, \quad i = 1, \dots, n;$
2. $z_i = b, \quad b < \Delta, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n;$
3. $z_i = b, \quad b > \Delta, \quad y_i = V, \quad i = 1, \dots, n.$

Очевидно, что эти решения удовлетворяют также и условиям (34)–(36). Аналитическое исследование других решений системы (28)–(36) (если они существуют) крайне затруднительно, т.к. правые части дифференциальных уравнений (28)–(33) являются разрывными функциями. В связи с этим система (28)–(36) была исследована численно. Приведем результаты численного исследования.

2.3.1. Результаты численной реализации системы (28)–(36)

Вначале были исследованы все решения системы (28)–(34) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (35)–(36)). В численных экспериментах значение n было равным 5, $\Delta = 10$, $V = 20$. Как показывают численные эксперименты при любых неотрицательных координатах начального значения решения системы (28)–(34) сходятся к одному из трех

указанных типов стационарных решений. Например, на рис. 27 и рис. 28 решения системы (28)–(34) сходятся к стационарному решению первого типа.

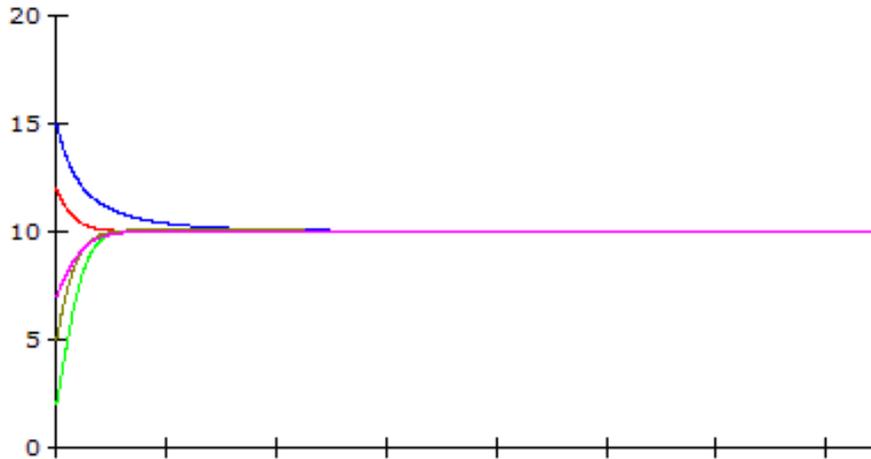


Рис. 27. Динамика чисел задействованных путей на станциях. Сходимость к стационарному решению первого типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

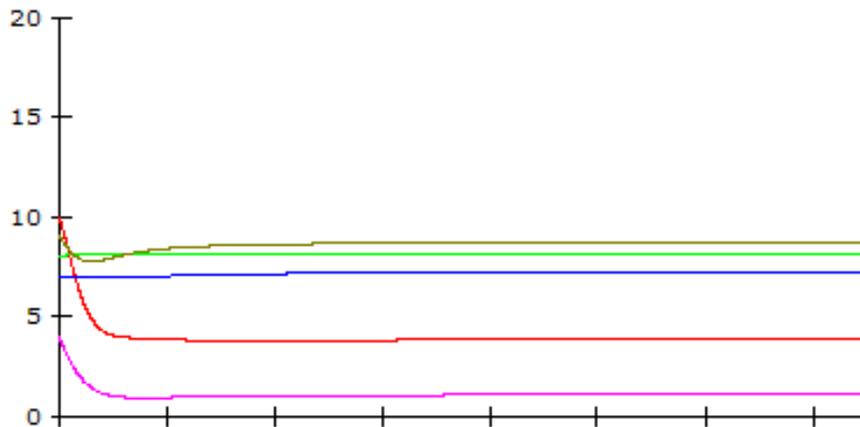


Рис. 28. Динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Сходимость к стационарному решению первого типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На рис. 29 и рис. 30 решения системы (28)–(34) сходятся к стационарному решению второго типа.

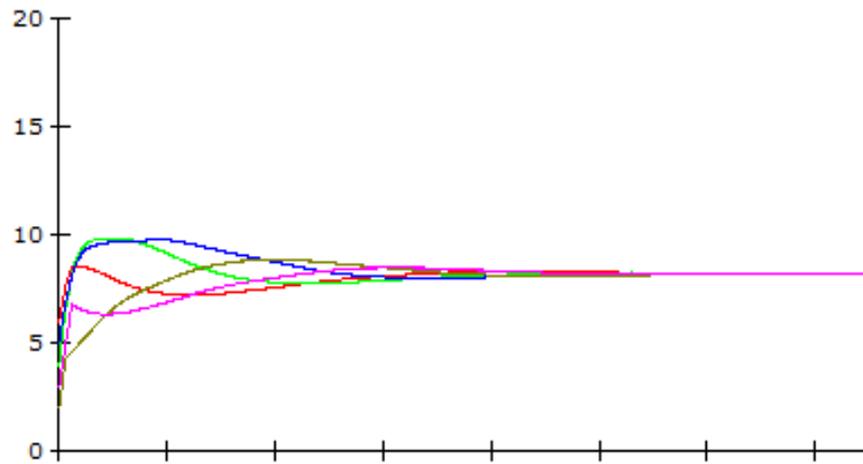


Рис. 29. Динамика чисел задействованных путей на станциях. Сходимость к стационарному решению второго типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

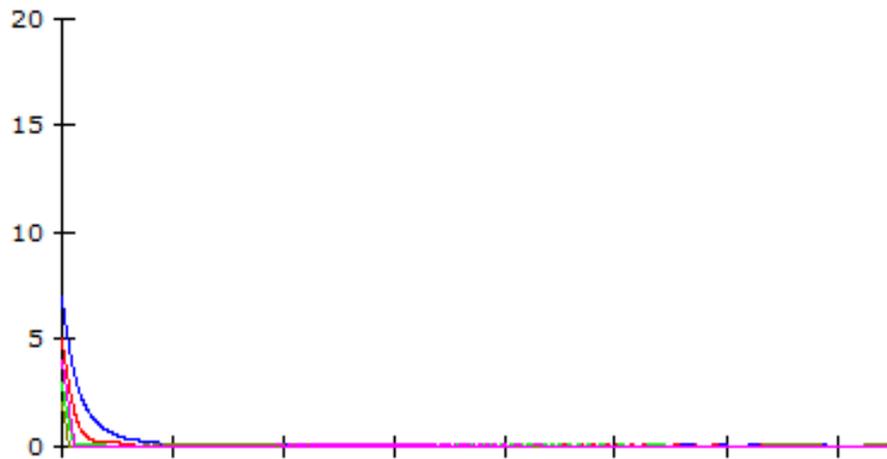


Рис. 30. Динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Сходимость к стационарному решению второго типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На рис. 31 и рис. 32 решения системы (28)–(34) сходятся к стационарному решению третьего типа.

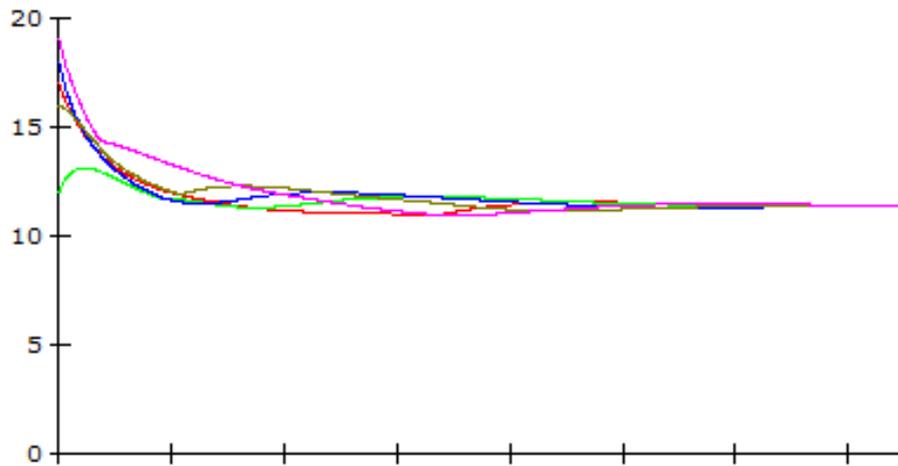


Рис. 31. Динамика чисел задействованных путей на станциях. Сходимость к стационарному решению третьего типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

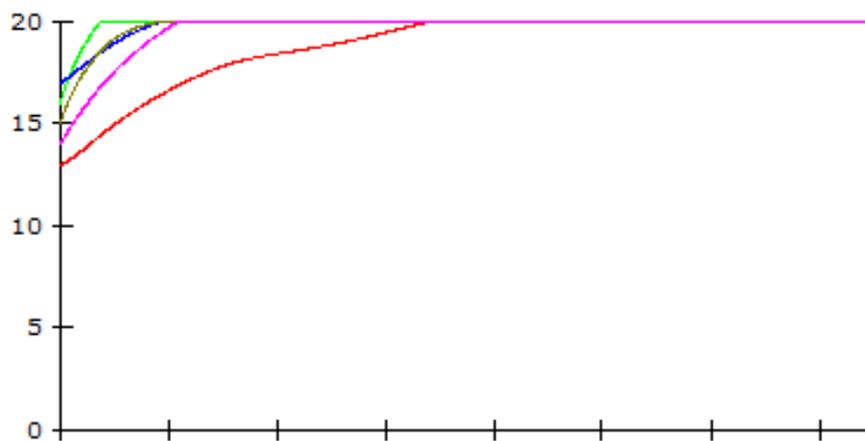


Рис. 32. Динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Сходимость к стационарному решению третьего типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Т.к. произвольное решение системы (28)–(34) с неотрицательными координатами начального значения сходится к стационарному решению одного из трех типов, то указанная система не имеет других решений, которые удовлетворяют условиям (35)–(36) бегущей волны, кроме стационарных. Таким образом, система (28)–(36) с неотрицательными координатами начального значения имеет только стационарные решения.

2.3.2. Исследование области устойчивости стационарных решений

Стационарные решения системы (28)–(36) исследованы на устойчивость в классе всех решений системы (28)–(34). Здесь следует отметить, что понятие устойчивости применяется только к компонентам стационарного решения, описывающим числа задействованных путей на станциях. Таким образом, стационарное решение системы (28)–(36) называется устойчивым, если компоненты произвольного решения системы (28)–(34), описывающие числа задействованных путей на станциях, т.е. $z_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, близкие к соответствующим компонентам стационарного решения в начальный момент времени, сколь угодно близко к ним приближаются, начиная с некоторого момента времени. Как показали численные эксперименты, стационарные решения системы (28)–(36) второго и третьего типов являются локально устойчивыми, а первого – глобально устойчивыми. С помощью численных экспериментов определена область притяжения стационарных решений первого типа. В зависимости от взаимного расположения на числовой прямой точек Δ и V получаются три вида областей устойчивости (рис. 33, рис. 34, рис. 35). По оси z откладывается среднее значение числа задействованных путей на станциях, а по оси y – среднее значение числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени.

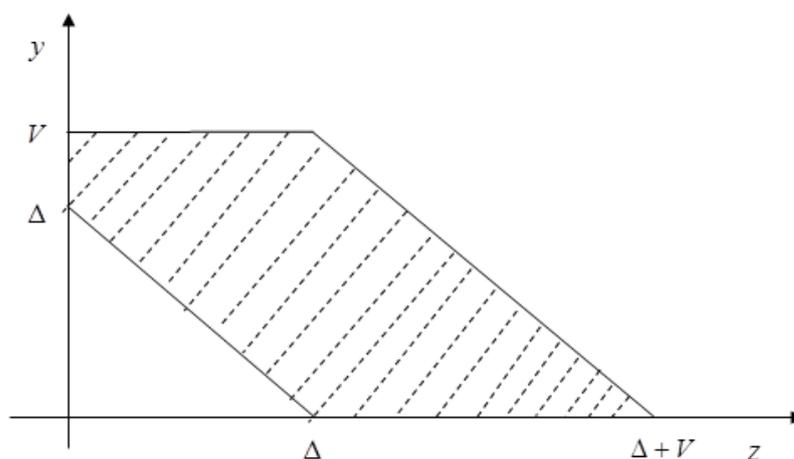


Рис. 33. Первый вид области притяжения ($\Delta < V$)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

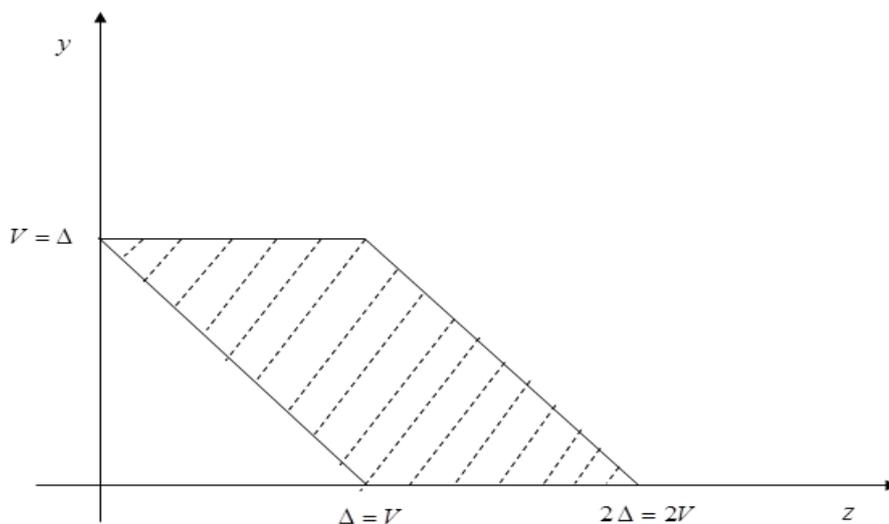


Рис. 34. Второй вид области притяжения ($\Delta = V$)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

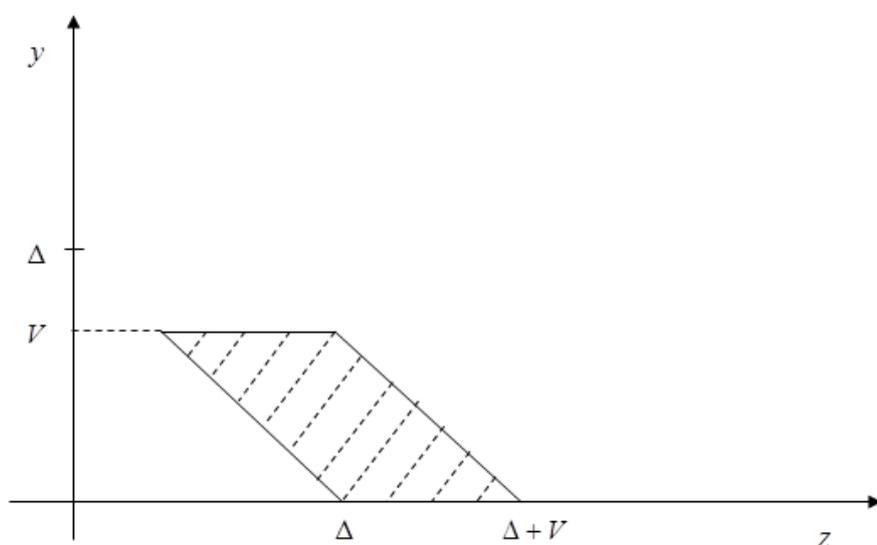


Рис. 35. Третий вид области притяжения ($\Delta > V$)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Вернемся к стационарным режимам. С экономической точки зрения наиболее оптимальным является первый режим. Во-первых, только он является глобально устойчивым. Во-вторых, в этом режиме наиболее эффективно используются возможности станций и при этом можно организовать бесперебойную работу системы грузоперевозок. Из рисунков 33, 34 и 35 следует, что система переходит

в стационарный режим первого типа, если сумма средних значений чисел задействованных путей на станциях и чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени не меньше Δ и при этом не превышает значения $\Delta + V$. Если сумма средних значений чисел задействованных путей на станциях и чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени меньше Δ , то система переходит в стационарный режим второго типа. Наконец, если сумма средних значений чисел задействованных путей на станциях и чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени больше $\Delta + V$, то система переходит в стационарный режим третьего типа.

2.4. Выводы по главе 2

В данной главе представлен один из подходов к организации железнодорожных грузоперевозок в режиме реального времени, который применяется в случае стабильно высокого спроса на них. Этот подход направлен на оптимальное использование инфраструктуры железнодорожных станций. В основе данного подхода лежит идея о разделении грузопотока на две составляющие: диффузионную и конвективную. Диффузионная составляющая формируется в результате взаимодействия произвольной станции с соседними станциями (предыдущей и последующей) и призвана выравнивать степень загрузки станций. Конвективная составляющая формируется на основе текущей загрузки станций и призвана корректировать ее таким образом, чтобы с одной стороны максимально задействовать потенциал станций, а с другой – минимизировать возможность перебоев в системе грузоперевозок. Такая загрузка станций имеет место если задействовать определенное количество путей (оптимальное значение числа задействованных путей). Итак, применение данного подхода нацелено на то, чтобы приблизить количество задействованных путей к оптимальному значению. Для реализации данного подхода необходимо иметь возможность быстрой разгрузки станций в случае их чрезмерной загруженности. Для этого предполагается, что между станциями существуют

зоны временного хранения, в которые отправляется часть грузов в случае чрезмерной загруженности станций. Прием грузов с зон временного хранения осуществляется в случае недозагрузки станций.

Применение данного подхода к участку железнодорожной сети, представляющей замкнутую цепочку станций дало следующий результат: число задействованных путей на всех станциях со временем сходится к оптимальному значению если в начальный момент времени как число задействованных путей на станциях, так и в зонах временного хранения грузов находятся в некотором диапазоне, границы которого зависят от оптимального значения числа задействованных путей на станциях и числа путей в зонах временного хранения грузов. Если же в начальный момент времени число задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов находится вне указанного выше диапазона, то со временем наблюдается сходимостъ числа задействованных путей к значениям, которые характеризуют либо недозагрузку станций либо их перегрузку. Таким образом, если обеспечить соответствующую загрузку станций и зон временного хранения грузов в начальный момент времени, то в дальнейшем можно обеспечить оптимальную загрузку всех станций, позволяющую организовать интенсивный грузопоток.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК МЕЖДУ УЗЛОВЫМИ СТАНЦИЯМИ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ³

В данной главе продолжается построение моделей организации железнодорожных грузоперевозок в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки. Рассматривается еще одна конфигурация железнодорожной сети, а именно, железнодорожная линия между крупными узловыми станциями. При организации грузоперевозок в рамках данной конфигурации железнодорожной сети одинаково важны как процедура взаимодействия промежуточных станций, так и процедуры, связанные с приемом грузов на начальной узловой станции и отправкой грузов с конечной узловой станции. Поэтому, построение моделей в данной главе проводится с учетом узловых станций и их влияния на систему грузоперевозок.

3.1. Два способа корректировки системы организаций грузоперевозок

Приступим к построению моделей, описывающих движение грузопотока между двумя узловыми станциями. Железнодорожная линия, соединяющая узловые станции, содержит ряд промежуточных станций. Пусть их число равно m . Обозначив через 0 и $m + 1$ номера начальной и конечной узловых станций, получим следующее множество номеров станций $\{0, 1, \dots, m, m + 1\}$.

³ Данная глава написана на основании работ автора:

Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution // Business Informatics. – 2017. – №1. – P. 25-35 (Web of Science, Scopus, RSCI).
About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation // Business Informatics. – 2018. – № 1. – P. 61-70 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Исследование динамики емкостей перегонов в модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями // Бизнес-информатика. – 2019. – Т. 13, № 1. – С. 59-70 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Динамические модели организации грузопотока на железнодорожном транспорте // Экономика и математические методы. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 62-73 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Model for organization cargo transportation at resource restrictions // International Journal of Applied Mathematics – 2019. – Vol. 32, № 4. – P. 627-640 (Web of Science, Scopus, RSCI).

Интенсивность потока грузов, поступающих на начальную узловую станцию с железнодорожных направлений, будем описывать с помощью функции $\psi_1(\cdot)$, интенсивность потока грузов распределяющихся с конечной узловой станции – с помощью функции $\psi_2(\cdot)$. Модель задается системой:

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \quad (37)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (38)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \quad (39)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty). \quad (40)$$

Функция $\varphi_0(\cdot)$ описывает вторую технологию на начальной узловой станции. На начальной узловой станции вторая технология используется только для разгрузки и, поэтому, она обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, \Delta]$ тождественно равна 0, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей. Вспомним, что в моделях, описанных в главе 2 правило приема и правило отправки грузов на произвольной станции зависели от числа задействованных путей на соседних станциях. В данной модели для начальной и конечной узловых станций данное свойство потока не выполняется. Это приводит к тому, что за исключением случая, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ тождественно равны нулю (не имеющего экономического смысла) система (37)–(40) не имеет решения, т.е. невозможна организация грузопотока в рамках указанных технологий с описанной системой контроля. Это приводит к необходимости корректировки либо технологий грузоперевозок, либо системы контроля.

В первом случае такая корректировка достаточна только на узловых станциях. Она заключается в том, чтобы, управляя интенсивностью приема грузов на начальной узловой станции и интенсивностью отправки грузов с конечной узловой станции, добиться организации грузопотока с указанной системой контроля. Такая организация грузопотока связана с импульсными изменениями числа задействованных путей на станциях. Корректировка системы контроля заключается в ее ослаблении. Как в первом, так и во втором случае

формально речь идет о правильном расширении класса решений системы (37)–(40), которые назовем *квазирешениями*.

Рассматриваются два типа квазирешений. Первый тип предполагает эндогенные задания функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, начиная с момента времени, равного характеристике системы контроля, и допускает разрывные решения, второй тип – допускает малые нарушения в системе контроля (условие (40)).

Далее приводится подробное описание указанных корректировок системы организации грузоперевозок.

3.2. Корректировка технологий грузоперевозок

Данный параграф посвящен одному из способов правильного расширения класса решений системы (37)–(40).

Определение 2. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется *квазирешением системы (37)–(40)* первого типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (37)–(40) с возможными разрывами в точках $k\tau, k = 1, 2, \dots$. ■

В работе (Beklaryan, Khachatryan, 2006) подробно описан способ получения таких квазирешений. Приведем содержательные аспекты данного способа, после чего перейдем к ее практической реализации.

С помощью замены времени $t \rightarrow \tau t$ систему (37)–(40) перепишем в виде:

$$\dot{x}_0(t) = \tau [\bar{\psi}_1(t) - \alpha x_0 + \alpha x_1 + \varphi_0(x_0)], \quad t \in [0, +\infty), \quad (41)$$

$$\dot{x}_i(t) = \tau [\alpha x_{i-1} - 2\alpha x_i + \alpha x_{i+1} + \varphi(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (42)$$

$$\dot{x}_{m+1}(t) = \tau [\alpha x_m - \alpha x_{m+1} - \bar{\psi}_2(t) + \varphi(x_{m+1})], \quad t \in [0, +\infty), \quad (43)$$

$$x_i(t) = x_{i+1}(t + 1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (44)$$

где

$$x_i(t) = z_i\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \bar{\psi}_1(t) = \psi_1\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \bar{\psi}_2(t) = \psi_2\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m, m + 1, \quad t \in [0, +\infty).$$

Переформулируем определение 2 для системы (41)–(44).

Определение 3. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется квазирешением системы (41)–(44) первого типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (41)–(44) с возможными разрывами в точках $k = 1, 2, \dots$. ■

На начальном этапе рассматривалось сужение системы (41)–(44) на отрезок $[0, 1]$, т.е. система:

$$\dot{x}_0(t) = \tau[\bar{\psi}_1(t) - \alpha x_0 + \alpha x_1 + \varphi_0(x_0)], \quad t \in [0, 1] \quad (45)$$

$$\dot{x}_i(t) = \tau[\alpha x_{i-1} - 2\alpha x_i + \alpha x_{i+1} + \varphi(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, 1] \quad (46)$$

$$\dot{x}_{m+1}(t) = \tau[\alpha x_m - \alpha x_{m+1} - \bar{\psi}_2(t) + \varphi(x_{m+1})], \quad t \in [0, 1] \quad (47)$$

$$x_i(0) = x_{i+1}(1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (48)$$

Была доказана теорема существования и единственности решения системы (45)–(48). В соответствии с решением $\{\tilde{x}_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$ системы (45)–(48) были построены функции $\bar{\psi}_1(\cdot)$, $\bar{\psi}_2(\cdot)$ и $\{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$ на полупрямой $[0, +\infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_i(t) = \tilde{x}_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m+1, \quad t \in [0, 1]; \\
x_i(t) = x_{i-1}(t-1), \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \\
x_0(t) = x_0(t-1) + \frac{\bar{\psi}_1(t-1)}{\alpha} + \frac{\varphi_0(x_0(t-1)) - \varphi(x_0(t-1))}{\alpha}, \\
t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \\
\bar{\psi}_1(t) = \frac{1}{\alpha\tau} \dot{\bar{\psi}}_1(t-1) + \frac{1}{\alpha\tau} [\dot{\varphi}_0(x_0(t-1)) - \dot{\varphi}(x_0(t-1))] \dot{x}_0(t-1) + \\
+ \frac{\dot{x}_0(t-1)}{\tau} + \bar{\psi}_1(t-1) + \varphi_0(x_0(t-1)) - \varphi(x_0(t-1)) - \\
- \varphi_0 \left(x_0(t-1) + \frac{\bar{\psi}_1(t-1)}{\alpha} + \frac{\varphi_0(x_0(t-1)) - \varphi(x_0(t-1))}{\alpha} \right), \\
t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \\
\bar{\psi}_2(t) = \alpha x_m(t-1) - \alpha x_{m+1}(t-1), \quad t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots
\end{array} \right. \quad (49)$$

Доказана лемма, согласно которой решение краевой задачи (45)–(48), продолженное на полупрямую $[0, +\infty)$, в силу соотношений (49) является квазирешением системы (37)–(40) первого типа с характеристикой τ .

Режим грузоперевозок, описываемый квазирешениями первого типа, предполагает импульсное изменение числа задействованных путей на станциях в моменты времени, кратные характеристике системы контроля. В связи с этим возникает вопрос: можно ли уменьшать разрывы в квазирешениях первого типа, – и как это сделать.

Для этого нам потребуется следующее определение.

Определение 4. Квазирешение первого типа с характеристикой τ называется ε -квазирешением первого типа с характеристикой τ если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \quad \forall k = 1, 2, \dots \blacksquare$$

Доказано (Khachatryan, 2006), что существует такое $\bar{\tau} > 0$, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$ существует ε -квазирешение первого типа с характеристикой τ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$, т.е. разрывы в квазирешениях первого типа можно сделать сколь угодно малыми. Для этого необходимо импульсно изменить функцию $\psi_1(\cdot)$ в начальный период времени (рис. 36).

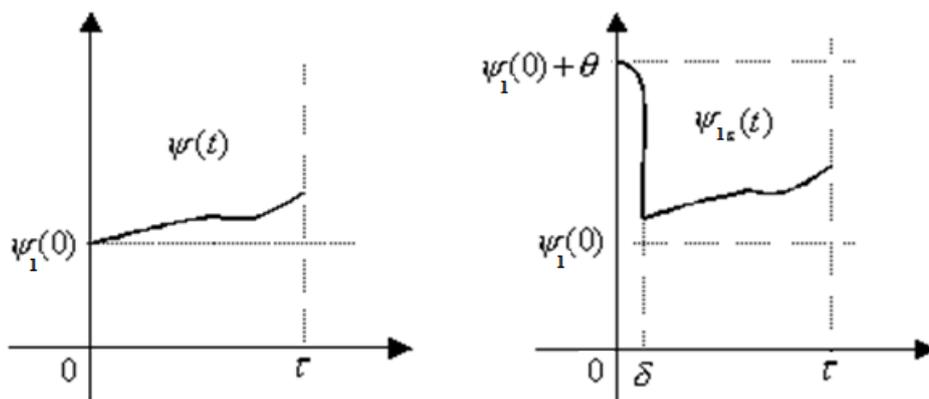


Рис. 36. Импульсное изменение функции $\psi_1(\cdot)$ в начальный период времени

Источник: составлено автором

3.2.1. Численная реализация квазирешений первого типа

Перейдем к численной реализации квазирешений системы (41)–(44) первого типа (Khachatryan, Akorov, 2017). Как было отмечено выше, она состоит из двух этапов. На первом этапе находится решение системы, являющейся ограничением этой системы на отрезок $[0,1]$, т.е. решение системы (45)–(48). В численных экспериментах количество станций было равным 10: начальная станция отравления грузов ($i = 0$), промежуточные станции ($i = 1, 2, \dots, 8$) и конечная станция распределения грузов ($i = 9$).

Прежде чем перейти к численному решению данной системы, необходимо определить функции $\varphi(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$, $\bar{\psi}_1(t)$, $\bar{\psi}_2(t)$.

Функция $\varphi(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ задается с помощью параболы $y_1 = -ax^2 + bx$, где $a > 0$, $y_1(\Delta) = 0$, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ - с помощью прямой $y_2 = -c(x - \Delta)$, $c > 0$. Очевидно, что коэффициенты параболы связаны соотношением $b = a\Delta$, т.е. чем больше a , тем больше интенсивность приема грузов по второй технологии.

Функция $\varphi_0(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ тождественно равна 0, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ задается с помощью прямой $y_3 = -c_0(x - \Delta)$, $c_0 > 0$.

Перейдем к выбору функций $\bar{\psi}_1(\cdot)$ и $\bar{\psi}_2(\cdot)$. Напомним, что эти функции определяют соответственно интенсивность подачи грузов на начальную станцию

и интенсивность распределения грузов с конечной станции. Очевидно, что интенсивность подачи грузов на начальную станцию должна обладать свойством сезонности. Кроме того, во избежание заторов на станциях период приема грузов на начальную станцию должен сменяться периодом более интенсивной отправки грузов на следующую станцию. Аналогичные рассуждения справедливы и для конечной станции (период распределения грузов с конечной станции должен сменяться периодом более интенсивного приема грузов с предыдущей станции). В силу вышесказанного, в качестве $\bar{\psi}_1(\cdot)$ и $\bar{\psi}_2(\cdot)$ используются периодические функции $\bar{\psi}_1(t) = \bar{\psi}_2(t) = \gamma \cos(\omega t)$, причем, амплитуда и период функций являются параметрами модели.

После определения функций $\varphi(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$, $\bar{\psi}_1(t)$, $\bar{\psi}_2(t)$ приступим к решению краевой задачи (45)–(48). Алгоритм решения следующий.

1. Находим решение системы уравнений (45)–(48) с начальными условиями

$$x_0(0) = \Delta, x_1(0) = \Delta, \dots, x_{m+1}(0) = \Delta.$$

Для найденного решения $\{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$ вычисляем следующее выражение:

$$Q = (x_0(0) - x_1(1))^2 + (x_1(0) - x_2(1))^2 + \dots + (x_m(0) - x_{m+1}(1))^2.$$

2. Для заранее заданного малого значения $\varepsilon > 0$ с помощью градиентного метода находим решение системы дифференциальных уравнений (45)–(47) с такими начальными условиями, для которых выполняется условие $Q < \varepsilon$. На каждой итерации градиентного метода решение системы уравнений (45)–(47) находится с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Таким образом, мы получаем решение системы (45)–(48).

На втором этапе решение краевой задачи (45)–(48) продолжается на $(1, +\infty)$ согласно соотношениям (49). В результате мы получаем квазирешения системы (41)–(44), т.е. функции $x_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m + 1$, удовлетворяющие этой системе и имеющие разрывы в точках $k = 1, 2, \dots$.

Основная цель численной реализации – определить вид и динамику квазирешений системы (41)–(44), а также изучить их зависимость от параметров модели α , a , γ , ω , c_0 , c и τ . Заметим, что все указанные параметры положительны. Результаты численных экспериментов представлены в следующих двух утверждениях.

Утверждение 2. *Квазирешения системы (41)–(44) удовлетворяют следующим ограничениям:*

$$\Delta_1 - e^{\beta_1 t} \leq x_i(t) \leq \Delta_2 + e^{\beta_2 t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9, \quad (50)$$

где

$$\Delta_1 < \Delta + 1, \quad \Delta_2 > \Delta - 1, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0. \quad \blacksquare$$

Таким образом, согласно утверждению 2, квазирешения системы (41)–(44) как сверху, так и снизу мажорируются экспоненциальными функциями. Например, на рис. 37 приведен график одного из квазирешений системы (41)–(44).

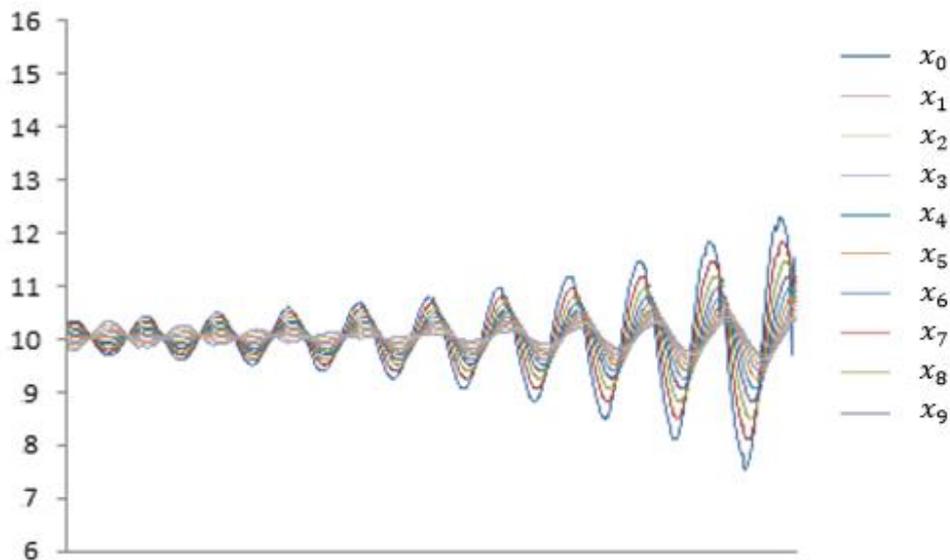


Рис. 37. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа (базовый случай)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Данное квазирешение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров:

$$\alpha = 60, a = 0.1, \gamma = 5, \omega = 2\pi, c_0 = 0.1, c = 0.1, \tau = 1. \quad (51)$$

Для того чтобы увидеть на графиках разрывы функций приведем небольшой фрагмент рис. 37 (отрезок $[3.5; 5.5]$, разрывы в точках 4 и 5).

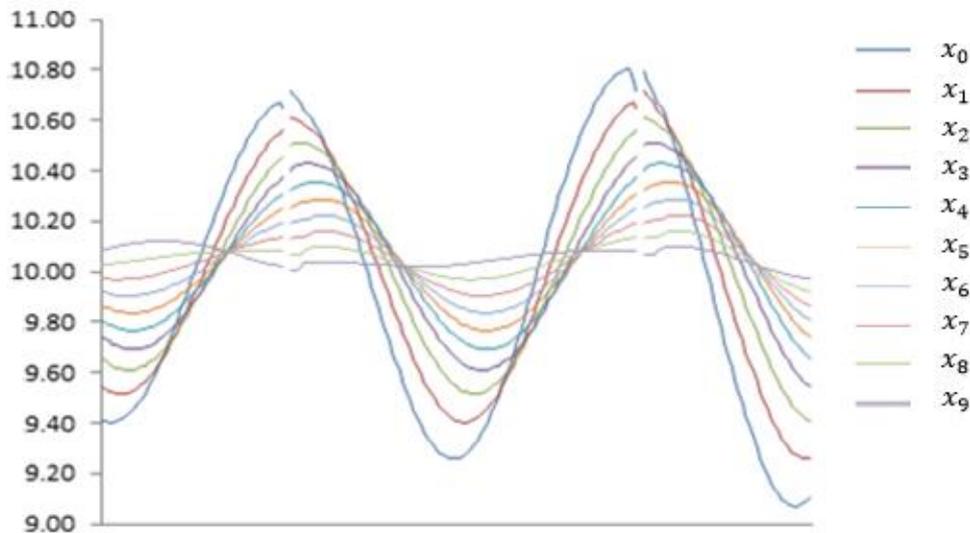


Рис. 38. Фрагмент графика квазирешения системы (41)–(44) первого типа (базовый случай)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как видно из рис. 38, наибольший разрыв в указанных точках имеет функция $x_0(\cdot)$. Далее, с увеличением номера координаты квазирешения разрывы уменьшаются. Данная тенденция преимущественно сохраняется и в последующих целочисленных точках. Для сравнения на рис. 39 приведены гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ (гистограммы остальных функций не приведены, чтобы не загромождать рисунок).

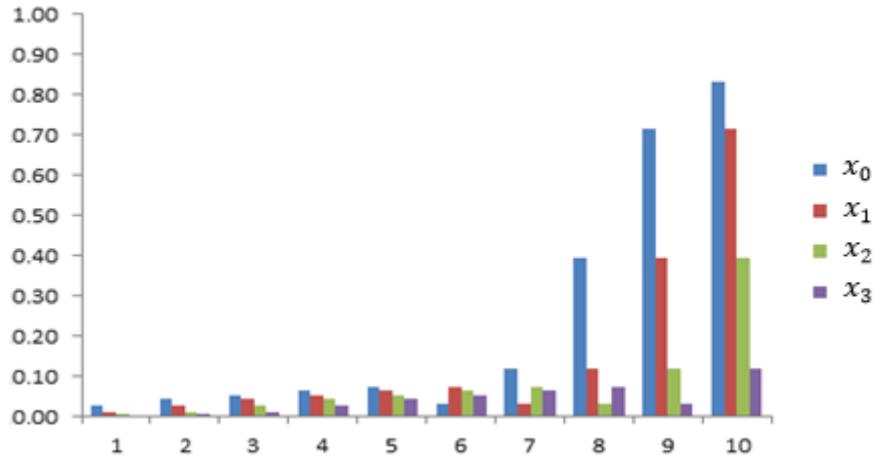


Рис. 39. Гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$
(базовый случай)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.75 - e^{0.09t} \leq x_i(t) \leq 9.25 + e^{0.08t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

Параметры β_1, β_2 функций, мажорирующих квазирешения системы (41)–(44), зависят от параметров указанной системы, поэтому, обозначим их

$$\beta_1 = \beta_1(\alpha, a, \gamma, \omega, c_0, c, \tau), \quad \beta_2 = \beta_2(\alpha, a, \gamma, \omega, c_0, c, \tau).$$

В результате многочисленных экспериментов было выявлено, что функция $\beta_1(\cdot)$ монотонна по всем параметрам, за исключением параметра c , относительно которого она неизменна. Функция $\beta_2(\cdot)$ также монотонна по всем параметрам за исключением параметра a , относительно которого она неизменна. В следующем утверждении приведем более детальную формулировку этого результата.

Утверждение 3. *Функции $\beta_1(\cdot)$ и $\beta_2(\cdot)$ обладают следующими свойствами:*

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \alpha} < 0 ;$ | 2) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial a} > 0, \quad \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial a} = 0 ;$ |
| 3) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \gamma} > 0 ;$ | 4) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \omega} > 0, \quad \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \omega} > 0 ;$ |

$$5) \frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial c_0} > 0, \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial c_0} < 0; \quad 6) \frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial c} = 0, \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial c} > 0,$$

$$7) \frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \tau} < 0, \frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \tau} < 0. \quad \blacksquare$$

Ниже приведем графики квазирешений системы (41)–(44), в которых поочередно значение одного из параметров отличается от значения, приведенного в (51) при неизменных значениях других параметров. При этом значение Δ также неизменно и равно 10. Кроме того, для указанных квазирешений получим оценку (50).

На рис. 40 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 85, a = 0.1, \gamma = 5, \omega = 2\pi, c_0 = 0.1, c = 0.1, \tau = 1.$$

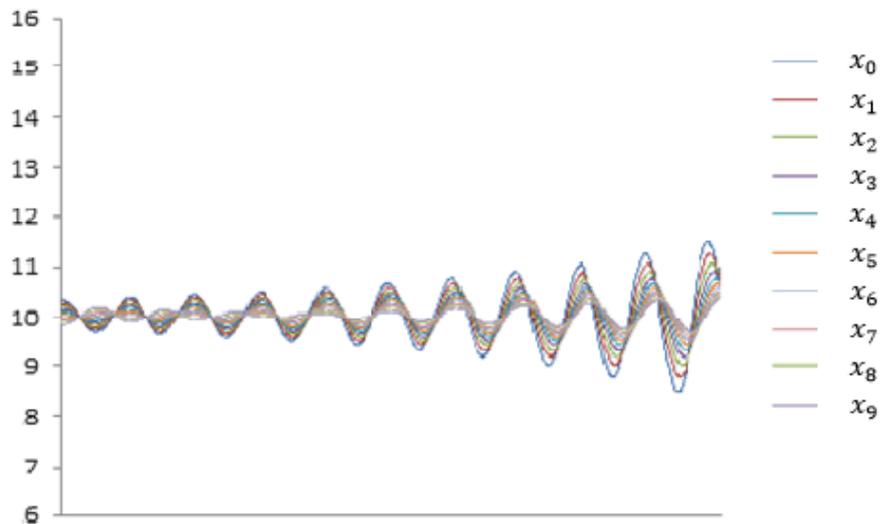


Рис. 40. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра α

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Заметим, что по сравнению с (51), увеличено значение α . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.86 - e^{0.07t} \leq x_i(t) \leq 9.29 + e^{0.06t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рис. 41 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.4, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

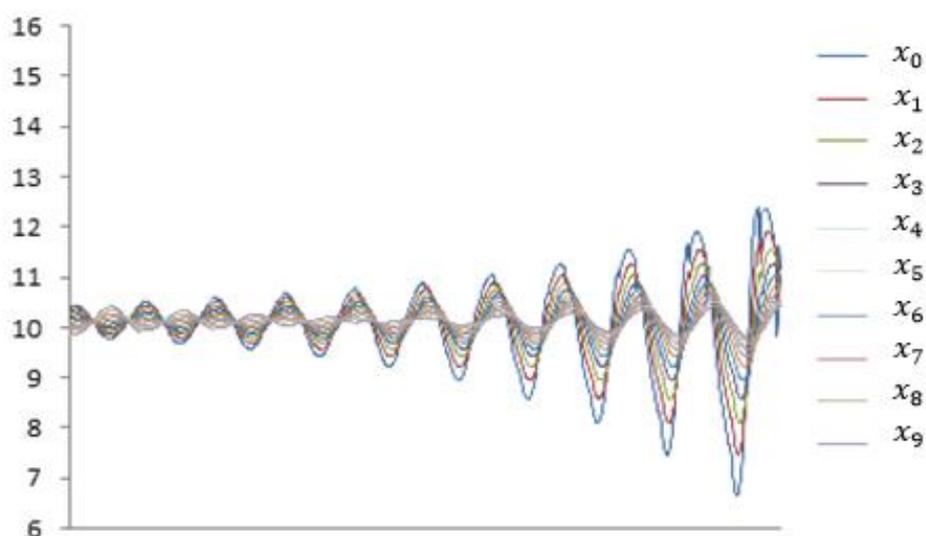


Рис. 41. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра a

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

По сравнению с (51) увеличено значение a . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.88 - e^{0.12t} \leq x_i(t) \leq 9.39 + e^{0.08t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рис. 42 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 10, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

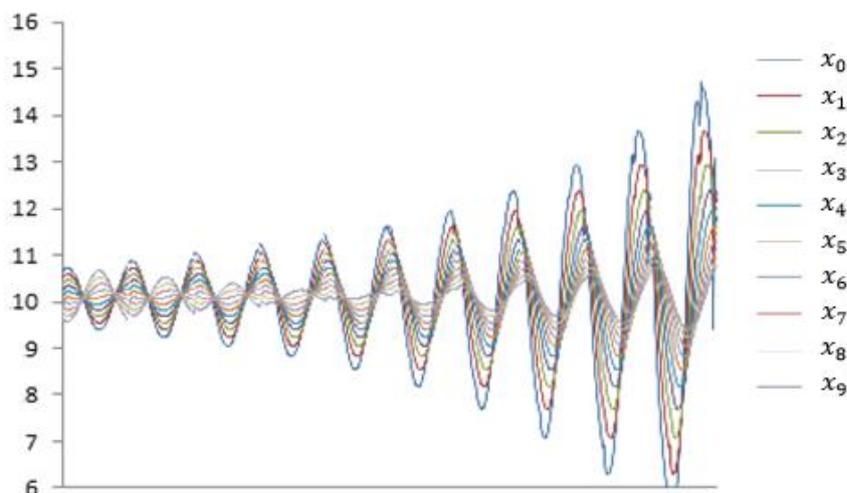


Рис. 42. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра γ

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

По сравнению с (51), увеличено значение γ . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.61 - e^{0.15t} \leq x_i(t) \leq 9.63 + e^{0.13t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рис. 43 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 4\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

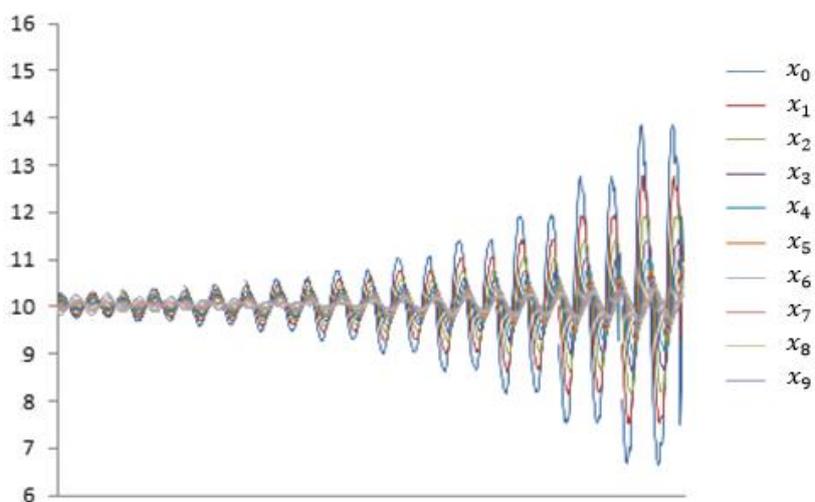


Рис. 43. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра ω

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

По сравнению с (51) увеличено значение ω . Для указанных значений параметров неравенство (50) имеет следующий вид:

$$10.86 - e^{0.12t} \leq x_i(t) \leq 9.2 + e^{0.1t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рис. 44 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 2, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

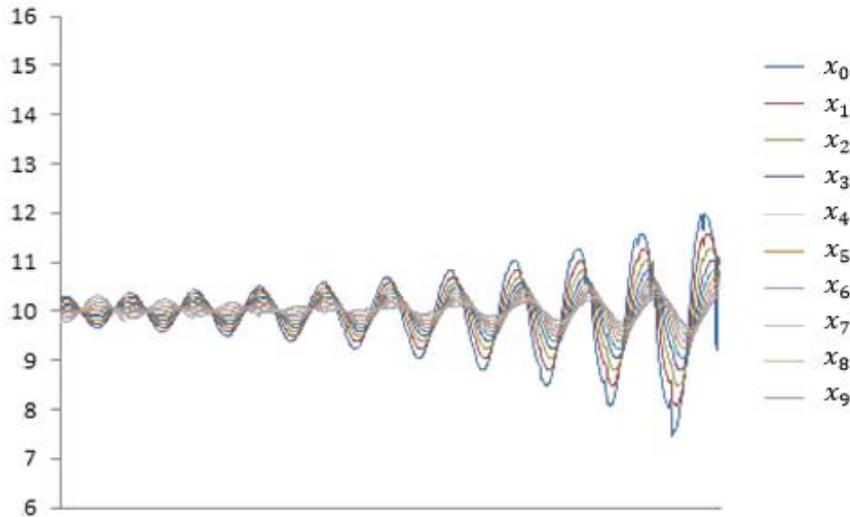


Рис. 44. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра c_0

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

По сравнению с (51) увеличено значение c_0 . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.92 - e^{0.11t} \leq x_i(t) \leq 9.26 + e^{0.07t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рис. 45 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 2, \quad \tau = 1.$$

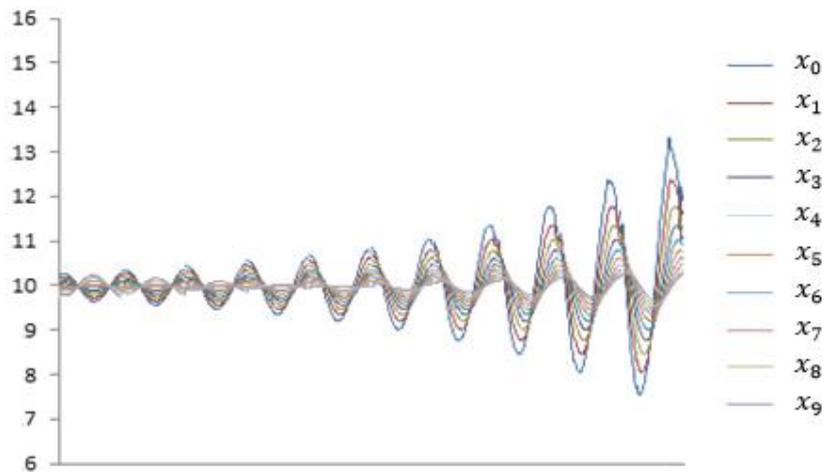


Рис. 45. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра c

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

По сравнению с (51) увеличено значение c . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.72 - e^{0.09t} \leq x_i(t) \leq 9.2 + e^{0.1t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

Наконец, на рис. 46 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad a = 0.1, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 4$$

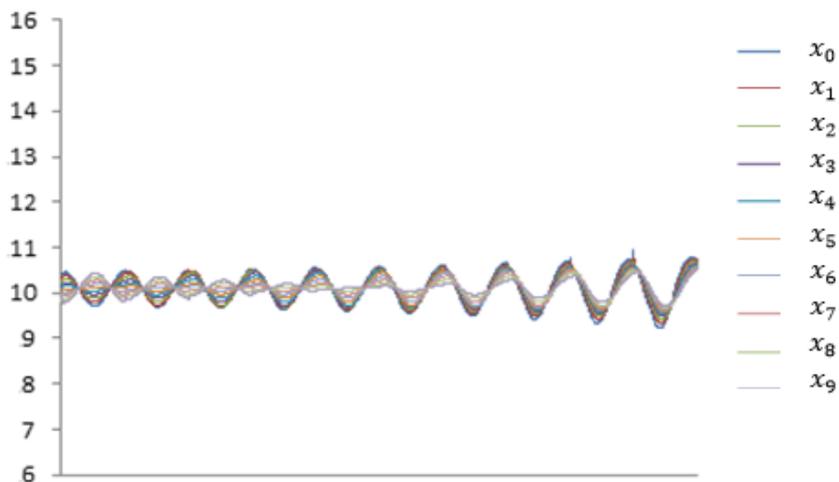


Рис. 46. График квазирешения системы дифференциальных уравнений с увеличенным значением параметра τ

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

По сравнению с (51) увеличено значение τ . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.79 - e^{0.04t} \leq x_i(t) \leq 9.42 + e^{0.03t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

В заключение перейдем к анализу результатов, следующих из приведенных утверждений и имеющих практическое значение. Из утверждения 3 следует, что рост квазирешений системы (41)–(44) уменьшается с увеличением параметров α и τ , а также с уменьшением параметров γ и ω . Численные эксперименты показали, что аналогичным образом ведут себе и разрывы квазирешений системы (41)–(44), т.е. они уменьшаются с увеличением параметров α и τ и уменьшением параметров γ и ω . Например, для сравнения с рис. 39 приведем гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$, являющихся компонентами квазирешений системы (41)–(44) с увеличенным значением параметра α (с 60 до 85) и при неизменных значениях других параметров.

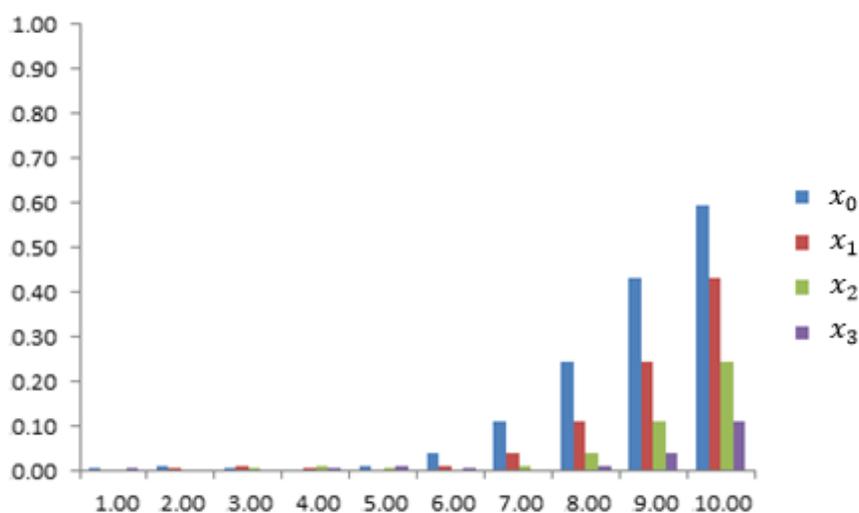


Рис. 47. Гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ с увеличенным значением параметра α

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Напомним, что параметры γ и ω являются характеристиками интенсивности подачи грузов на начальную станцию и не могут управляться организатором грузоперевозок, в отличие от параметров α и τ . Таким образом, организатор грузоперевозок может добиться уменьшения загруженности станций,

увеличивая интенсивность движения грузопотока (параметр α) и характеристику системы контроля (параметр τ). Однако здесь следует иметь в виду, что для больших значений τ система контроля теряет свою актуальность. Итак, выбор параметра α зависит исключительно от технических возможностей инфраструктуры грузоперевозок, а выбор параметра τ должен достигаться за счет компромисса между техническими возможностями инфраструктуры грузоперевозок и актуальностью системы контроля.

3.3. Корректировка системы контроля

Далее рассмотрим другой возможный способ расширения класса решений типа бегущих волн (решений системы (37)–(40)) до класса решений типа «квазибегущих» волн, а именно – ослабление нелокальных ограничений (40) (допущение выполнения этих ограничений с некоторой погрешностью). Отметим, что выполнение нелокальных ограничений (40) обеспечивает вывод грузов из зон временного хранения. Следовательно, их ослабление может привести к накоплению грузов в зонах временного хранения. Поэтому, в данном случае помимо исследования динамики числа задействованных путей на станциях, необходимо также исследовать динамику числа задействованных путей и в зонах временного хранения грузов. Начнем с исследования динамики числа задействованных путей на станциях.

3.3.1. Исследование динамики числа задействованных путей на станциях

Приведем точное определение квазирешений второго типа.

Определение 5. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется ε -квазирешением системы (37)–(40) второго типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (37)–(39) и выполняется условие

$$|z_i(t) - z_{i+1}(t + \tau)| < \varepsilon, \quad i = 0, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty). \quad \blacksquare \quad (52)$$

Прежде чем перейти к исследованию квазирешений системы (37)–(40) второго типа, изучим множество всех решений системы уравнений (37)–(39). Очевидно, что при любых начальных условиях данная система имеет единственное решение. При определенном выборе функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ решения системы уравнений (37)–(39) являются ограниченными.

Теорема 3. Пусть функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ ограничены на полупрямой $[0, +\infty)$. Тогда решения системы дифференциальных уравнений (37)–(39) являются ограниченными.

Доказательство в приложении 2. ■

Для более детального исследования решений система (37)–(39) была реализована численно с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка (Khachatryan, Akorov, Belousov, 2018). Перед тем как перейти к описанию численного решения данной системы, необходимо определить функции $\varphi(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$.

Функция $\varphi(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ задается с помощью параболы $y_1 = -ax^2 + bx$, где $a > 0$, $y_1(\Delta) = 0$, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ - с помощью прямой $y_2 = -c(x - \Delta)$, $c > 0$. Функция $\varphi_0(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ тождественна равна 0, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ задается с помощью прямой $y_3 = -c_0(x - \Delta)$, $c_0 > 0$.

В качестве $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ будем использовать два класса функций:

а) постоянная функция $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$;

б) периодическая функция $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma$.

3.3.2. Квазирешения системы (37)–(40) второго типа с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (37)–(39), в которой $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$, $d > 0$. Это означает, что на начальную узловую станцию грузопоток осуществляется с постоянной интенсивностью d и с такой же интенсивностью распределяется с конечной узловой станции. Будем исследовать зависимость решений системы (37)–(39) от параметров модели α , a , c_0 , c , d .

Отметим, что все указанные параметры являются положительными. Согласно результатам численных экспериментов, начиная с некоторого момента времени, решения системы (37)–(39) выходят на постоянные значения для всех значений параметров α, a, c_0, c, d этой системы, т.е. существует $\bar{t} > 0$, такое, что выполняются условия:

$$z_0(t) = d_0, z_1(t) = d_1, \dots, z_m(t) = d_m, z_{m+1}(t) = d_{m+1}, t \in [\bar{t}, +\infty),$$

причем числа $d_i, i = 0, 1, \dots, m, m + 1$ удовлетворяют условию:

$$d_0 > d_1 > \dots > d_m > d_{m+1}.$$

Например, на рис. 48 приведено одно из решений системы (37)–(39).

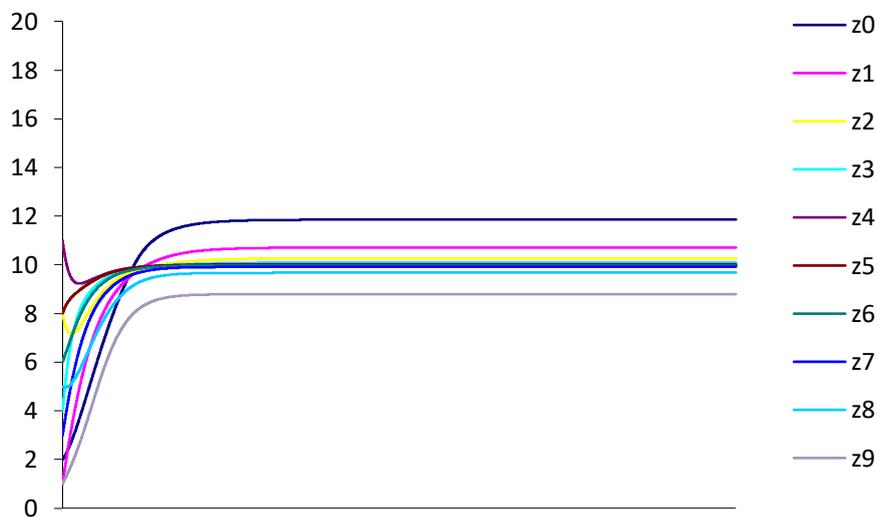


Рис. 48. График решения системы (37)–(39) с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Данное решение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров: $\alpha = 1, a = 0.2, c_0 = c = 1, d = 3$.

Обозначим $\bar{d}_i = d_i - \Delta, i = 0, 1, \dots, m, m + 1$. Таким образом, числа \bar{d}_i определяют отклонение решений от значения Δ , определяющего оптимальную загруженность станций. На рис. 49 приведем гистограмму чисел \bar{d}_i , полученных по решениям системы (37)–(39), график которых изображен на рис. 48.

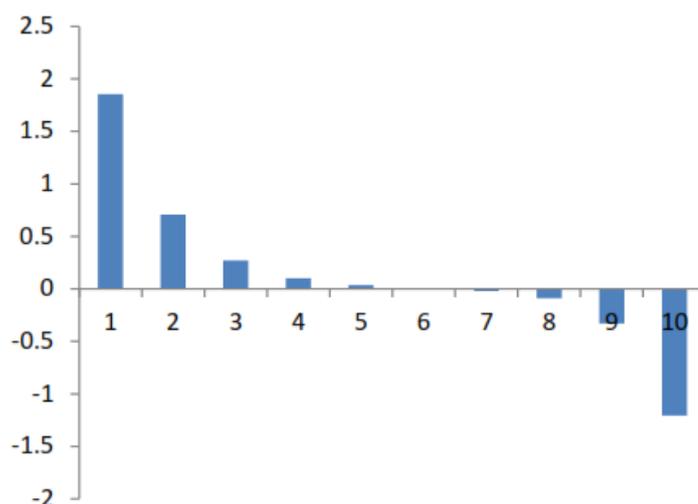


Рис. 49. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ (базовый случай)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как видно из рис. 49, наибольшие отклонения от значения Δ имеют первая и последняя компоненты решения системы (37)–(39). По мере приближения к центральным компонентам решения, указанные отклонения уменьшаются, причем присутствуют как положительные, так и отрицательные отклонения. Приведем содержательную интерпретацию данной гистограммы. Для этого отметим, что если число задействованных узлов на станции равно Δ , то это означает, что на данной станции полностью используется тот объем инфраструктурных возможностей, который позволяет организовать бесперебойный грузопоток. Положительное отклонение от значения Δ указывает на то, что станция подключает дополнительные мощности и при этом возможны перебои в организации грузоперевозок, а отрицательное – о возможности дополнительной загрузки. Таким образом, центральные станции оптимально используют инфраструктурные возможности. Начальная узловая станция и станции, расположенные рядом с ней, наиболее загружены, а конечная узловая станция и станции, расположенные рядом с ней, не в полном объеме используют инфраструктурные возможности.

Исследуем зависимость \bar{d}_i от параметров модели. Начнем с параметра α . Напомним, что он определяет нормативные правила взаимодействия соседних станций. Будем увеличивать значение параметра α при неизменных значениях других параметров. Согласно результатам экспериментов, имеет место следующая закономерность: абсолютная величина максимального отклонения решения системы (37)–(39) от значения Δ , т.е. $\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i|$ уменьшается с увеличением параметра α . Данную тенденцию можно увидеть на рис. 50. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра α , равных 2, 5, 10 и 100 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Следовательно, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется значения параметра $\bar{\alpha}$ такое, что при всех $\alpha \geq \bar{\alpha}$ (и при неизменных значениях других параметров) будет выполняться неравенство

$$\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i| \leq \varepsilon. \quad (53)$$

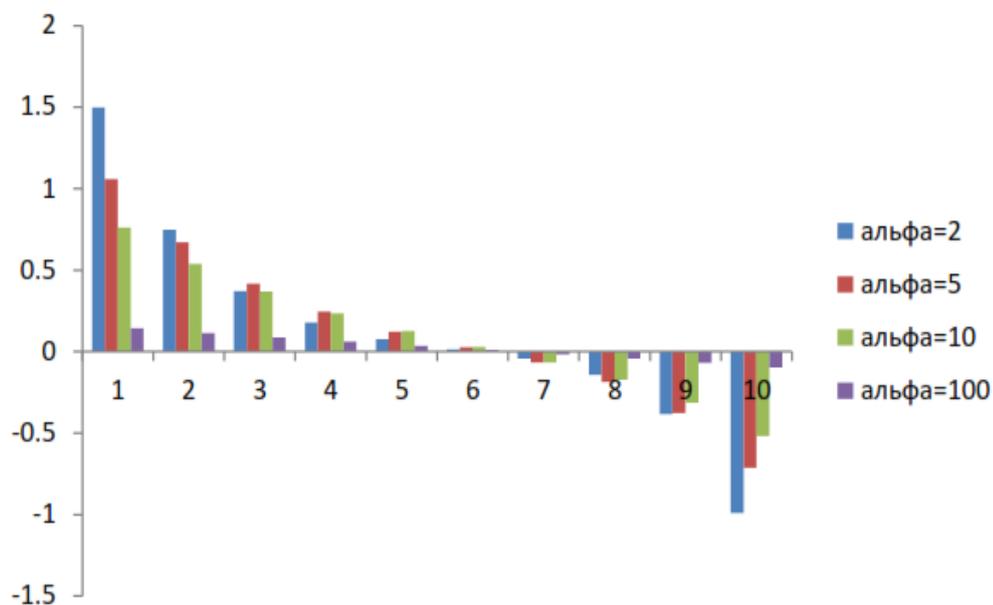


Рис. 50. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра α

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Перейдем к исследованию отклонений \bar{d}_i от параметра a , который определяет интенсивность приема грузов с помощью второй технологии, задающей правило взаимодействия станции с соседними зонами временного хранения грузов. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Напомним, что это означает увеличение интенсивности приема грузов по второй технологии. Как показывают эксперименты, это приводит к уменьшению абсолютных величин отрицательных отклонений \bar{d}_i . При этом положительные отклонения \bar{d}_i не меняются. Данную тенденцию можно увидеть на рис. 51. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра a , равных 0.4, 0.7, 2 и 4 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Отметим, что, при таких значениях параметра a и $\Delta = 10$ ордината вершины параболы принимает, соответственно, значения: 10, 17.5, 50 и 100.

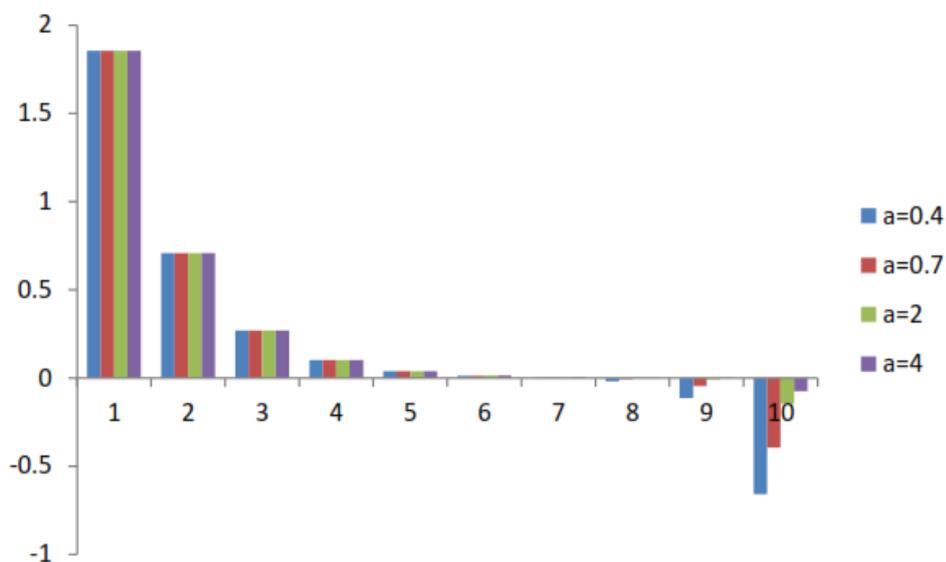


Рис. 51. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра a

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Заметим, что параметр a присутствует во всех уравнения системы (37)–(39), кроме первого. Следовательно, увеличивая параметр a , мы увеличиваем интенсивность приема грузов по второй технологии на всех станциях, за исключением начальной. Оказывается, что такого же эффекта, а именно уменьшения абсолютных величин отрицательных отклонений \bar{d}_i , можно достичь, меняя параметр a только в последнем уравнении системы (37)–(39), т.е. увеличивая интенсивность приема грузов по второй технологии только на конечной узловой станции.

Перейдем к исследованию отклонений \bar{d}_i от параметра c_0 , определяющего интенсивность отправки грузов с начальной узловой станции в зону временного хранения грузов. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Напомним, что это приводит к увеличению интенсивности отправки грузов с начальной узловой станции в зону временного хранения грузов. Как показывают эксперименты, это приводит к уменьшению положительных отклонений \bar{d}_i . При этом отрицательные отклонения \bar{d}_i не меняются. Данную тенденцию можно увидеть на рис. 52. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра c_0 , равных 2, 5, 10 и 50 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c = 1$, $d = 3$.

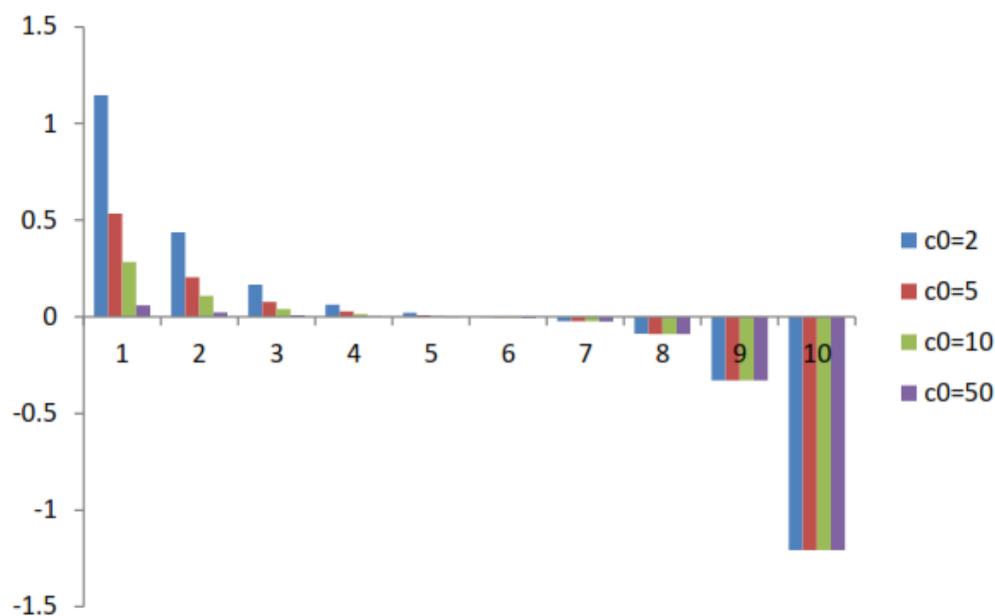


Рис. 52. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра c_0

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Таким образом, увеличение параметра a в последнем уравнении системы (37)–(39) и параметра c_0 приводит к уменьшению абсолютной величины максимального отклонения решения системы (37)–(39) $\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i|$ от значения Δ . Это в свою очередь означает, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдутся значения параметров \bar{a} и \bar{c}_0 , такие, что при всех $a > \bar{a}$, $c_0 > \bar{c}_0$ (и при неизменных значениях других параметров) будет выполняться неравенство (53).

Наконец, перейдем к исследованию отклонений d_i от параметра d , представляющего собой интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Как показывают эксперименты, это приводит к увеличению абсолютных значений отклонений d_i . Данную тенденцию можно увидеть на рис. 53. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра d , равных 1, 2, 4 и 6 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$.

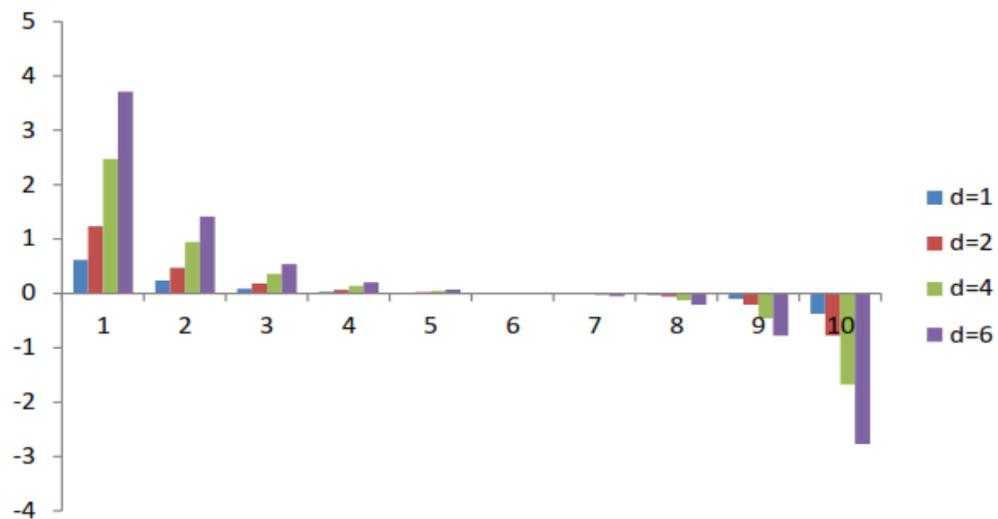


Рис. 53. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра d

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Следует отметить, что при уменьшении параметра d абсолютные значения отклонений d_i уменьшаются вплоть до нуля для $d = 0$. В этом случае решение системы (37)–(39) сходится к стационарному решению

$$z_0(t) = z_1(t) = \dots = z_m(t) = z_{m+1}(t) \equiv \Delta.$$

Эта ситуация показана на рис. 54

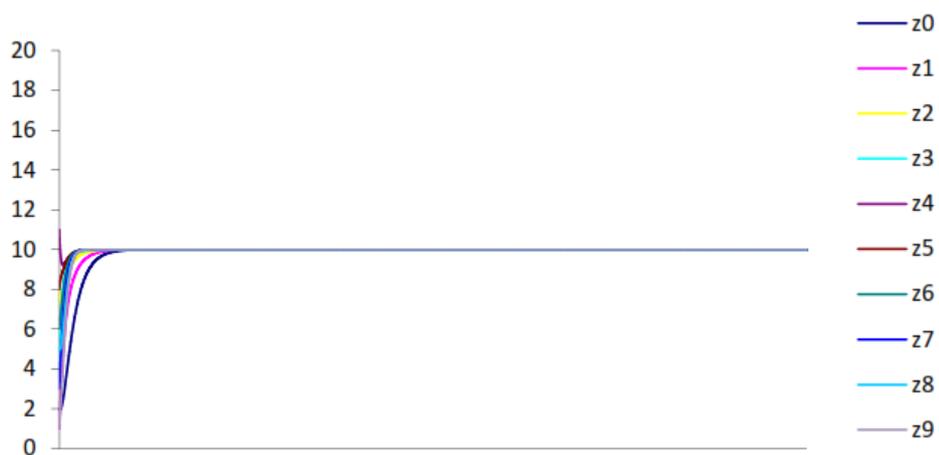


Рис. 54. График решения системы (37)–(39) при $d = 0$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Приступим к анализу результатов, полученных выше с помощью численных экспериментов. Согласно их результатам для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, управляя параметрами α, a, c_0 , можно достичь выполнимости неравенства (53). Основной целью проведенного в данном параграфе исследования является получение ε -квазирешений второго типа с характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40), т.е. организация контролируемого грузопотока с помощью определенных выше технологий. Несложно заметить, что решения системы (37)–(39), удовлетворяющие условию (53) являются ε -квазирешениями второго типа с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40).

Итак, мы выявили два способа получения ε -квазирешений с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40). Первый способ связан с увеличением параметра α , а второй – с увеличением параметров a и c_0 , причем параметр a достаточно увеличить только в последнем уравнении системы (37)–(39). Очевидно, что эти два способа можно также комбинировать между собой. С практической точки зрения первый способ связан с улучшением инфраструктуры на всех станциях, а второй – с улучшением инфраструктуры только на узловых станциях, вследствие чего последний является более простым в применении.

3.3.3. Квазирешения системы (37)–(40) второго типа с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (37)–(39), в которой функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, описывающие, соответственно, интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции, являются периодическими, т.е.

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t), \quad d \geq \gamma.$$

Согласно результатам численных экспериментов, начиная с некоторого момента времени $\bar{t} > 0$, решения системы (37)–(39) начинают колебаться в

некоторой окрестности значения Δ , причем компоненты решения удовлетворяют условию

$$z_0(t) > z_1(t) > \dots > z_m(t) > z_{m+1}(t)$$

для любого $t \in [\bar{t}, +\infty)$.

Более того, существует натуральное число $0 < \bar{m} < m + 1$ такое, что

$$z_i(t) > \Delta, \text{ для } 0 \leq i \leq \bar{m}, \text{ } t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (54)$$

$$z_i(t) < \Delta, \text{ для } \bar{m} < i \leq m + 1, \text{ } t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (55)$$

Например, на рис. 55 приведено одно из решений системы (37)–(39).

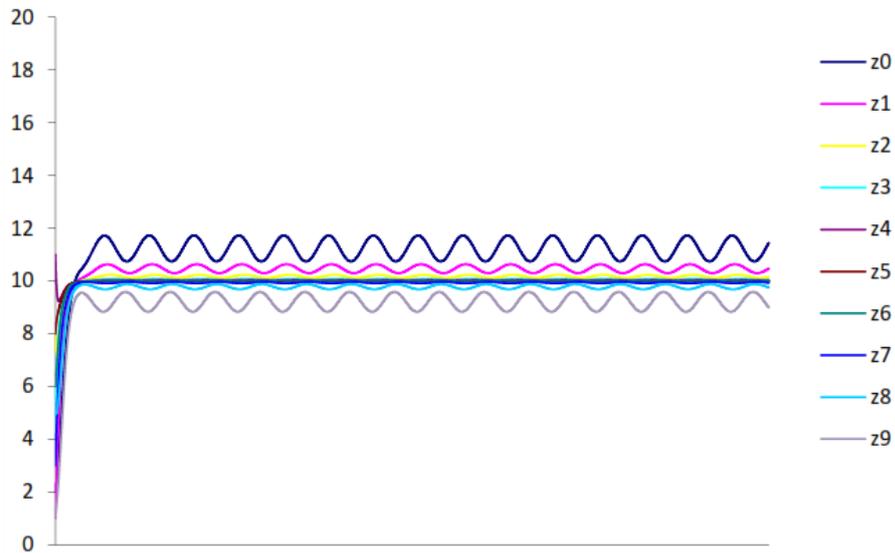


Рис. 55. График решения системы (37)–(39) с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Данное решение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров: $\alpha = 1, a = 0.2, c_0 = c = 1, d = 2, \gamma = 1, \omega = 1$.

Обозначим

$$\bar{d}_i = \begin{cases} \max_{t \in [\bar{t}, +\infty)} (z_i(t) - \Delta), & \text{если } 0 \leq i \leq \bar{m} \\ \min_{t \in [\bar{t}, +\infty)} (z_i(t) - \Delta), & \text{если } \bar{m} < i \leq m + 1. \end{cases}$$

Таким образом, число \bar{d}_i определяет максимальное отклонение i -ой компоненты решения системы (37)–(39) от значения Δ , задающего оптимальную загрузку станций. Очевидно, что числа \bar{d}_i удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} \bar{d}_0 &> \bar{d}_1 > \dots > \bar{d}_m > \bar{d}_{m+1}; \\ \bar{d}_i &> 0, \quad 0 \leq i \leq \bar{m}; \quad \bar{d}_i < 0, \quad \bar{m} < i \leq m + 1. \end{aligned}$$

Исследуем зависимость \bar{d}_i от параметров модели. Численные эксперименты показали, что зависимость \bar{d}_i от параметров α , a , c_0 , d такая же, как и в случае постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. В частности, с помощью соответствующего выбора параметров α , a , c_0 можно абсолютные значения отклонений d_i сделать сколь угодно малыми. Таким образом, как и в случае постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, управляя этими параметрами, определяющими инфраструктурные возможности станций, можно организовать контролируемый грузопоток.

Остается исследовать зависимость \bar{d}_i от параметров γ и ω . В отличие от параметров α , a , c_0 управление только этими параметрами не позволяет сделать сколь угодно малыми абсолютные значения отклонений \bar{d}_i и, соответственно, организовать контролируемый грузопоток. Тем не менее, исследуем зависимость \bar{d}_i от γ и ω .

Начнем с параметра γ . Заметим, что данный параметр определяет амплитуду колебаний. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Как показывают эксперименты, это приводит к увеличению абсолютных значений отклонений \bar{d}_i , т.е. зависимость \bar{d}_i от γ такая же, как и от d . Данную тенденцию можно увидеть на рис. 5б.

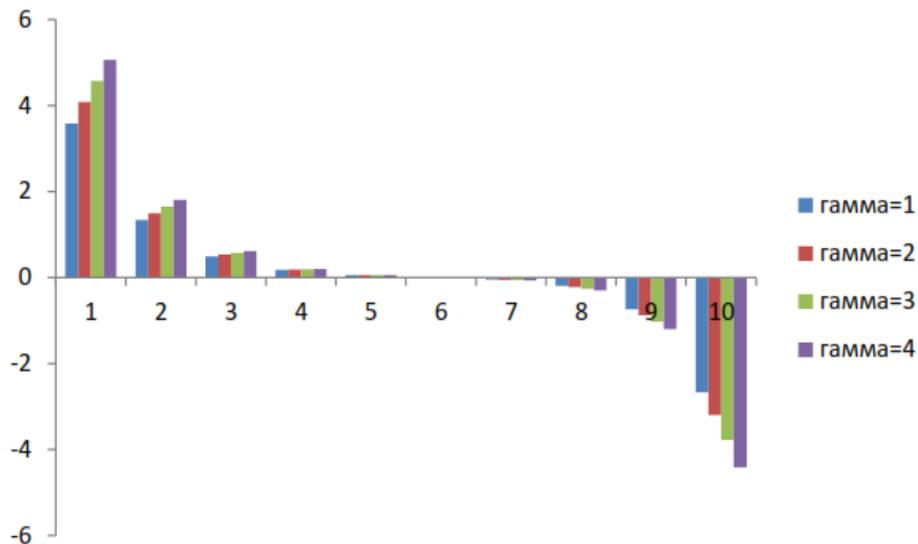


Рис. 56. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра γ

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра γ , равных 1, 2, 3 и 4 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $d = 5$, $\omega = 1$.

Перейдем к исследованию зависимости \bar{d}_i от параметра ω . Так как период функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ равен $2\pi/\omega$, то увеличение параметра ω приводит к уменьшению периода функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. Как показывают эксперименты, зависимость $|\bar{d}_i|$ от ω представляет собой невозрастающую функцию, принимающую значения в некотором интервале, границы которого зависят, как от индекса i , так и от остальных параметров модели. На рис. 57 представлен широкий диапазон изменения параметра ω – от 0,001 до 400. При этом остальные параметры фиксированы и принимают следующие значения: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $\gamma = 1$, $d = 2$. Как видно из данного рисунка, например, значения \bar{d}_0 меняются в интервале, лежащем в отрезке $[1, 2]$. Следует отметить, что при значениях ω близких к нулю функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ близки к константам, поэтому левую границу указанных интервалов можно определить с помощью постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$.

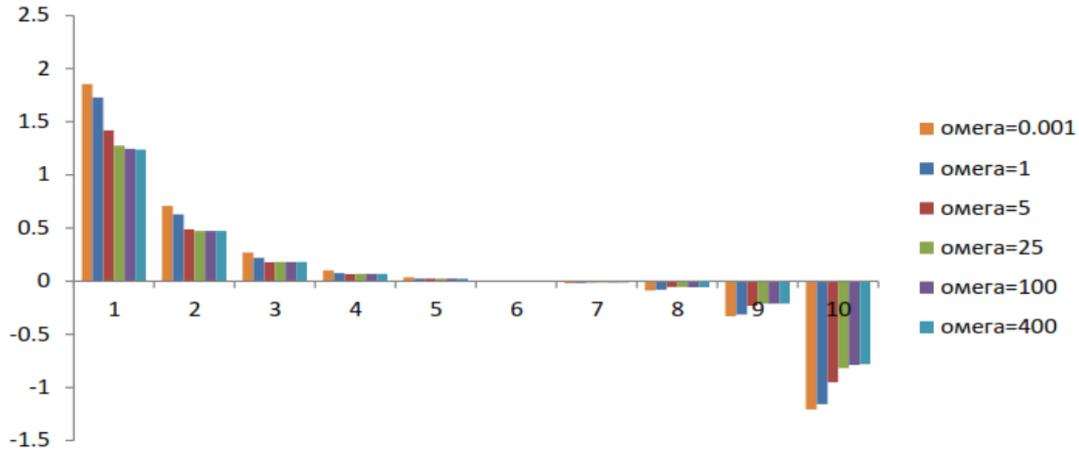


Рис. 57. Гистограмма отклонений решений системы (37) – (39) от значения Δ при изменении параметра ω

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Проанализируем результаты, полученные в случае, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, описывающие, соответственно, интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции, являются периодическими. Как оказалось, эти результаты качественно не отличаются от результатов, полученных для случая, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ являются константами. Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно получить ε -квазирешения второго типа с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40), т.е. организовать контролируемый грузопоток с помощью описанных технологий. Для этого необходимо управлять параметрами α , a , c_0 , которые являются характеристиками используемых технологий. Суть этого управления сводится к улучшению инфраструктуры станций.

3.3.4. Исследование динамики числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов

Перейдем к исследованию динамики числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов (Хачатрян, Бекларян, Борисова, Белоусов, 2019). Начнем с их нумерации. Зону временного хранения грузов, расположенную между станциями с номерами i и $i + 1$ обозначим номером i . Таким образом, мы

получим следующее множество номеров зон временного хранения грузов: $\{0, 1, \dots, m\}$. Количество задействованных путей в i -ой зоне временного хранения грузов в момент времени t обозначим через $y_i(t)$. Определим с какой интенсивностью грузы поступают в зоны временного хранения и с какой интенсивностью отправляются из них. Вспомним, что в зоны временного хранения грузы могут поступать и отправляться из них как в рамках первой технологии, так и рамках второй технологии.

В рамках первой технологии в зону временного хранения с номером $1 \leq i \leq m - 1$ грузы поступают со станции с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$ если $z_i > z_{i-1}$ и отправляется на станцию с номером $i + 1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+2} - z_{i+1})$ если $z_{i+2} > z_{i+1}$. В начальную зону временного хранения ($i = 0$) в рамках первой технологии грузы не поступают. Наконец, в конечную зону временного хранения ($i = m$) в рамках этой же технологии грузы поступают со станции с номером $i = m$ с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m-1})$ если $z_m > z_{m-1}$. С конечной зоны временного хранения в рамках данной технологии грузы не отправляются.

В рамках второй технологии в зону временного хранения с номером $1 \leq i \leq m - 1$ грузы поступают со станции с номером i с интенсивностью $-\varphi(z_i)$ если число задействованных путей на станции с номером i превышает значение Δ и отправляется на станцию с номером $i + 1$ с интенсивностью $\varphi(z_{i+1})$ если число задействованных путей на станции с номером $i + 1$ меньше значения Δ (станция с номером $i + 1$ принимает грузы с зоны временного хранения). В начальную зону временного хранения ($i = 0$) в рамках второй технологии грузы поступают с начальной узловой станции с интенсивностью $-\varphi_0(z_0)$, если число задействованных путей на указанной станции превышает Δ и отправляются на станцию с номером $i = 1$ с интенсивностью $\varphi(z_1)$, если число задействованных путей на станции с номером $i = 1$ меньше Δ . Наконец, в конечную зону временного хранения $i = m$ в рамках второй технологии грузы поступают с интенсивностью $-\varphi(z_m)$ со станции с номером $i = m$ и отправляются на

конечную узловую станцию ($i = m + 1$) с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если число задействованных путей на конечной узловой станции меньше Δ .

Таким образом, динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) = & -\alpha(z_2 - z_1)\text{sign}(z_2 - z_1) - \varphi(z_0)\text{sign}(z_0 - \Delta) - \\ & -\varphi(z_1)\text{sign}(\Delta - z_1), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & \alpha(z_i - z_{i-1})\text{sign}(z_i - z_{i-1}) - \alpha(z_{i+2} - z_{i+1})\text{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) - \\ & -\varphi(z_i)\text{sign}(z_i - \Delta) - \varphi(z_{i+1})\text{sign}(\Delta - z_{i+1}), \\ & i = 1, 2, \dots, m - 1, \quad t \in [0, +\infty) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) = & \alpha(z_m - z_{m-1})\text{sign}(z_m - z_{m-1}) - \varphi(z_m)\text{sign}(z_m - \Delta) - \\ & -\varphi(z_{m+1})\text{sign}(\Delta - z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\text{где } \text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Исследуем систему (56)–(58) в предположении, что в правых частях уравнений участвуют компоненты квазирешений второго типа.

Используя неравенства (54)–(55) и определения функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$, преобразуем уравнения (56)–(58). В частности, из неравенств (54)–(55) следует, что, начиная с момента времени \bar{t} , в правой части уравнений (56)–(58) все слагаемые вида $\alpha(z_{k+1} - z_k)\text{sign}(z_{k+1} - z_k)$ будут равны 0. В зависимости от значения \bar{m} рассмотрим несколько случаев.

1-ый случай: $\bar{m} = 0$

Это означает, что

$$z_0(t) > \Delta, \quad z_i(t) < \Delta, \quad i = 1, \dots, m + 1$$

для всех $t \geq \bar{t}$, а уравнения (56)–(58) принимают вид

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta) - \alpha z_1(\Delta - z_1), \quad z_0 > \Delta, \quad z_1 < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty) \quad (59)$$

$$\dot{y}_i(t) = -\alpha z_{i+1}(\Delta - z_{i+1}), \quad z_{i+1} < \Delta, \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (60)$$

2-ой случай: $1 \leq \bar{m} < m$

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta), \quad z_0 > \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (61)$$

$$\dot{y}_i(t) = c(z_i - \Delta), \quad z_i > \Delta, \quad i = 1, \dots, \bar{m} - 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (62)$$

$$\dot{y}_{\bar{m}}(t) = c(z_{\bar{m}} - \Delta) - az_{\bar{m}+1}(\Delta - z_{\bar{m}+1}), \quad z_{\bar{m}} > \Delta, \quad z_{\bar{m}+1} < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (63)$$

$$\dot{y}_i(t) = -az_{i+1}(\Delta - z_{i+1}), \quad z_{i+1} < \Delta, \quad i = \bar{m} + 1, \dots, m, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (64)$$

3-ий случай: $\bar{m} = m$

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta), \quad z_0 > \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (65)$$

$$\dot{y}_i(t) = c(z_i - \Delta), \quad z_i > \Delta, \quad i = 1, \dots, m - 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (66)$$

$$\dot{y}_m(t) = c(z_m - \Delta) - az_{m+1}(\Delta - z_{m+1}), \quad z_m > \Delta, \quad z_{m+1} < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (67)$$

Непосредственно из (59)–(67) следует, что во всех трех случаях правые части всех уравнений за исключением, быть может, уравнения с номером \bar{m} либо положительны, либо отрицательны. Численные эксперименты показали, что в первом случае ($\bar{m} = 0$) правая часть уравнения с номером $\bar{m} = 0$ положительна. Это связано с тем, что данный случай имеет место, если значение параметра c_0 существенно больше значения параметра a . В третьем случае ($\bar{m} = m$) правая часть уравнения с номером \bar{m} отрицательна. Это связано с тем, что этот случай имеет место, если значение параметра c существенно меньше значения параметра a . Таким образом, в первом случае правая часть уравнения с номером $\bar{m} = 0$ положительна, а правые части остальных уравнений – отрицательны. Следовательно, в данном случае число задействованных путей в зоне временного хранения грузов с номером $\bar{m} = 0$ будет неограниченно возрастать, а число задействованных путей в остальных зонах временного хранения грузов – неограниченно убывать. В третьем случае правая часть уравнения с номером $\bar{m} = m$ отрицательна, а правые части остальных уравнений положительны. Соответственно, в данном случае число задействованных путей в зоне временного хранения с номером $\bar{m} = m$ будет неограниченно убывать, а число задействованных путей в остальных зонах временного хранения – неограниченно возрастать. Во втором случае правые части уравнений с

номера меньше \bar{m} положительны, правые части уравнений с номерами больше \bar{m} отрицательны. Правая часть уравнения с номером \bar{m} может быть как положительной, так и отрицательной, а при определенных комбинациях параметров может оказаться равной нулю. Следовательно, в этом случае только в одной зоне временного хранения грузов число задействованных путей может не изменяться со временем. Число задействованных путей в остальных зонах временного хранения грузов либо будет неограниченно возрастать, либо неограниченно убывать. Например, на рис. 58 приведена динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в случае постоянных функций, описывающих интенсивность подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции, т.е. $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d, d > 0$ (случай 2, уравнения (61)–(64)). Количество станций равно 10, соответственно, количество зон временного хранения грузов равно 9; y_0, y_1, \dots, y_8 – числа задействованных путей в этих зонах. Значение Δ равно 10, а параметры имеет следующие значения: $\alpha = 10, a = 0.1, c_0 = c = 1, d = 3$. Многочисленные эксперименты показали, что все выводы относительно динамики числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов, которые далее будут приведены, справедливы и для любого другого количества станций, зон временного хранения грузов и значения Δ .

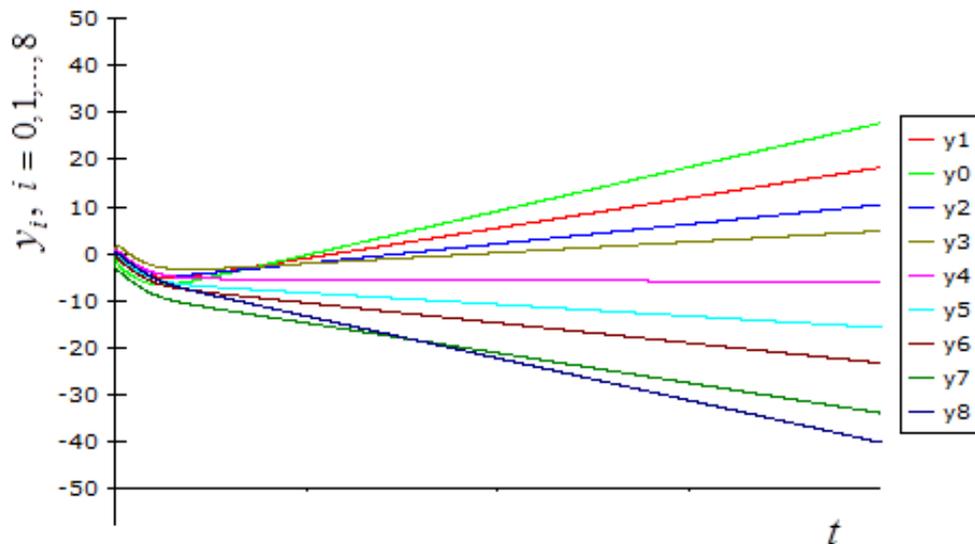


Рис. 58. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Для периодических функций $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma > 0$ динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов принципиально не меняется. Например, на рис. 59 приведена указанная динамика при следующих значениях параметров: $\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$, $\gamma = 3$.

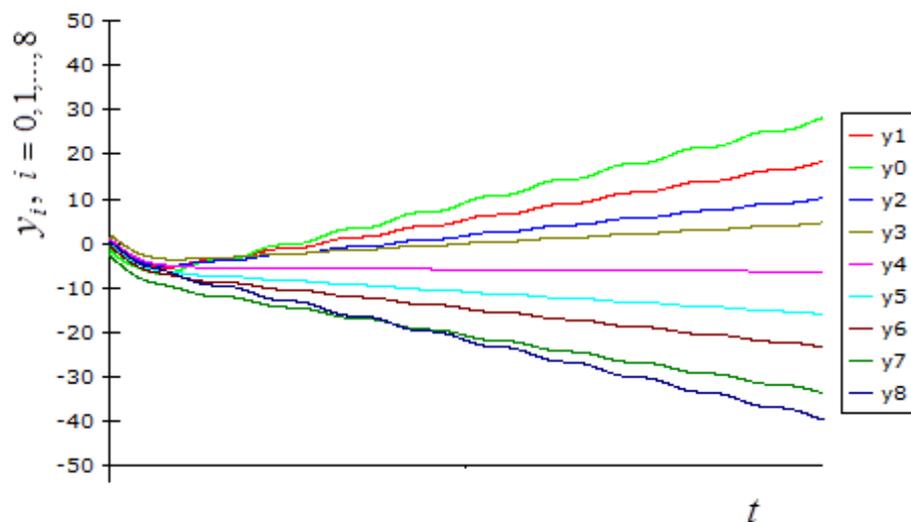


Рис. 59. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

В связи с этим дальнейшее исследование будем проводить для случая с постоянными и равными функциями $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$.

Исследуем, зависимость скорости роста и снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от параметров модели. Начнем с параметра c_0 . Напомним, что данный параметр определяет интенсивность отправки грузов с начальной узловой станции в 0-ую зону временного хранения. Пусть $\bar{m} \geq 1$ (уравнения (61)–(67)). Как показывают численные эксперименты, увеличение данного параметра приводит к увеличению скорости роста числа задействованных путей в 0-ой зоне временного хранения грузов, уменьшению скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $1, \dots, \bar{m}$ и увеличению скорости снижения в следующих зонах временного хранения грузов. При этом как уменьшение скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $1, \dots, \bar{m}$, так и увеличение скорости снижения в следующих зонах временного хранения грузов ослабевает при увеличении номера зоны временного хранения грузов. Данную тенденцию можно увидеть на рис. 60. На нем приведена динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным до 2 значением параметра c_0 и неизменными значениями других параметров ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 2$, $c = 1$, $d = 3$).

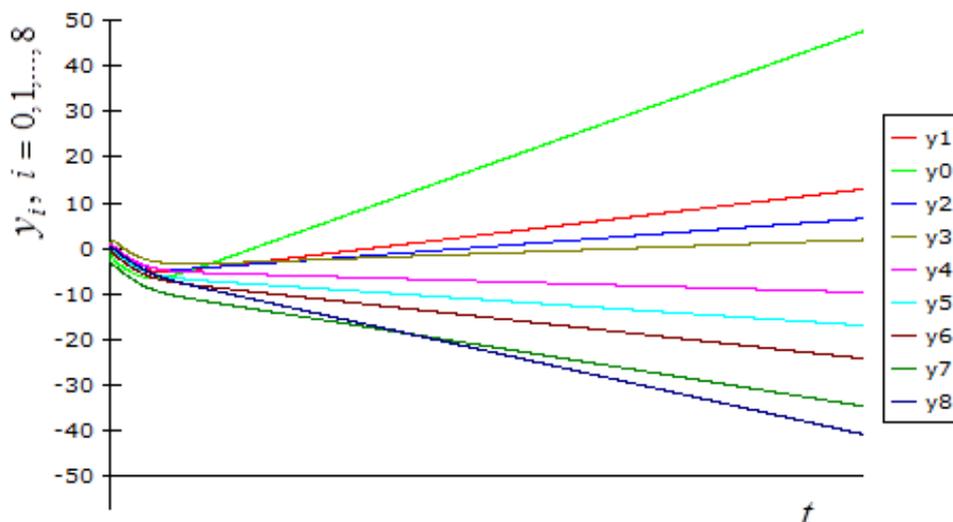


Рис. 60. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра c_0 (двукратное увеличение)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Напомним, что само значение \bar{m} , в частности, зависит от параметра c_0 , а именно, с его увеличением значение \bar{m} уменьшается до $\bar{m} = 0$. Поэтому, по мере увеличения данного параметра, рост числа задействованных путей во всех зонах временного хранения грузов, за исключением начального, сменяется на падение. Данную тенденцию можно увидеть на рис. 61 (уравнения (59)–(60)). На нем приведена динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным до 60 значением параметра c_0 и неизменными значениями других параметров ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 60$, $c = 1$, $d = 3$).

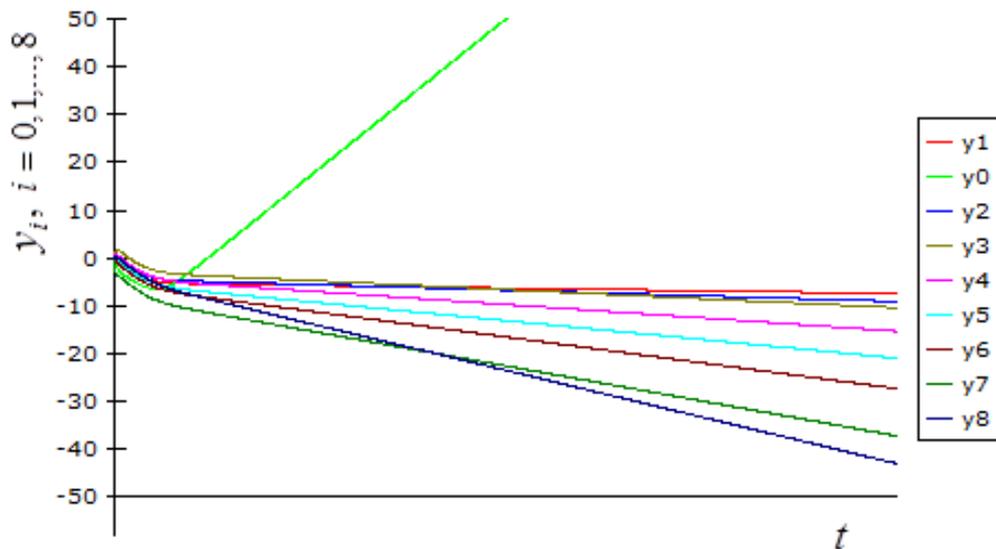


Рис. 61. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра c_0 (многократное увеличение)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Перейдем к исследованию зависимости роста (падения) числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от параметра c . Данный параметр определяет интенсивность отправки грузов с произвольной промежуточной станции с номером $i = 1, \dots, t$ в зону временного хранения грузов. Отправка грузов в зону временного хранения осуществляется, если число задействованных путей на станции больше значения Δ . Согласно (54), это условие выполняется на станциях с номерами $i = 0, \dots, \bar{m}$. Таким образом, станция с номером $i = 0, \dots, \bar{m}$ отправляет грузы в зону временного хранения с номером $i = 0, \dots, \bar{m}$. Напомним, что само значение \bar{m} , в частности, зависит от параметра c , а именно, с его увеличением значение \bar{m} уменьшается до $\bar{m} = 1$. Поэтому, небольшое увеличение параметра c , не приводящее к уменьшению значения \bar{m} , приводит к увеличению скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения с номерами $i = 1, \dots, \bar{m}$ и уменьшению роста числа задействованных путей в зоне временного хранения с номером $i = 0$. В зонах временного хранения грузов с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, t$ наблюдается увеличение скорости снижения числа задействованных путей. При этом как

увеличение скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $i = 1, \dots, \bar{m}$, так и увеличение скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, t$ ослабевает при увеличении номера зоны временного хранения грузов. Если увеличение параметра c приводит к уменьшению значения \bar{m} , то наблюдается следующая тенденция: по мере увеличения параметра c постепенно в зонах временного хранения, на которых происходило увеличение скорости роста числа задействованных путей, происходит уменьшение скорости роста числа задействованных путей вплоть до дальнейшего падения за исключением зон временного хранения с номерами $i = 0, 1$ (рис. 62). Таким образом, начиная с некоторого значения параметра c , во всех зонах временного хранения кроме 0-го и 1-го происходит снижение числа задействованных путей. В 0-ом и 1-ом зонах временного хранения происходит рост числа задействованных путей, причем скорость роста в 1-ом увеличивается (рис. 63).

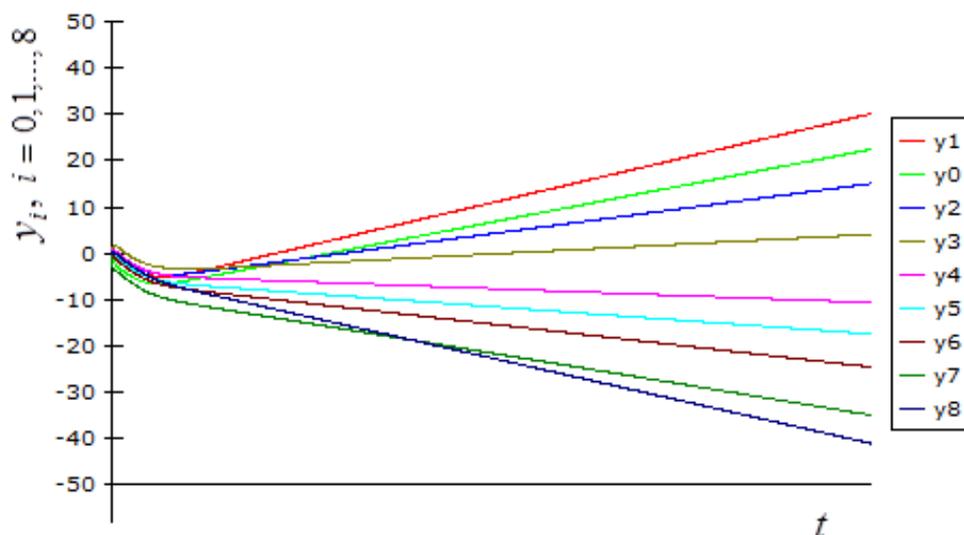


Рис. 62. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра c (двукратное увеличение)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

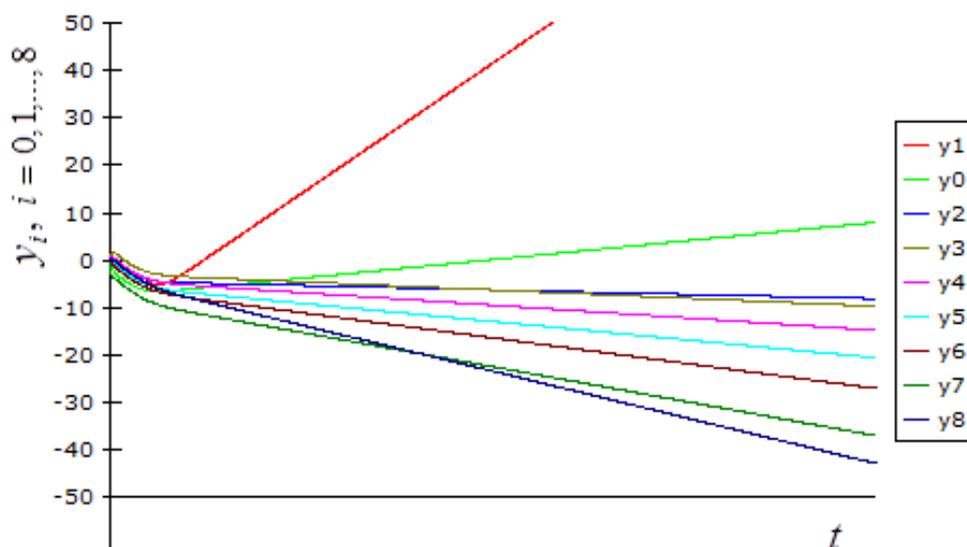


Рис. 63. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра c (многократное увеличение)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На рис. 62 значение параметра c увеличено до 2 ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 1$, $c = 2$, $d = 3$), а на рис. 63 – до 60, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 1$, $c = 60$, $d = 3$).

Перейдем к исследованию зависимости роста (падения) числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от параметра a . Напомним, что данный параметр определяет интенсивность приема грузов по второй технологии (с зоны временного хранения грузов), причем данная технология применяется, если число задействованных путей на станции меньше значения Δ . Согласно (55), это условие выполняется на станциях с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m + 1$. Как было указано выше, в рамках второй технологии станция с номером $i + 1$ принимает грузы с зоны временного хранения с номером i . Напомним, что само значение \bar{m} , в частности, зависит от параметра a , а именно, с его увеличением значение \bar{m} увеличивается до $\bar{m} = m$. Поэтому, небольшое увеличение параметра a , не приводящее к увеличению значения \bar{m} , приводит к увеличению скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения с номерами $i = \bar{m}, \dots, m$. В зонах временного

хранения грузов с номерами $i = 0, \dots, \bar{m} - 1$ наблюдается увеличение скорости роста числа задействованных путей. При этом как увеличение скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $i = \bar{m}, \dots, t$, так и увеличение скорости роста числа задействованных путей в предыдущих зонах временного хранения замедляется при уменьшении номера зоны временного хранения. Если же увеличение параметра a приводит к увеличению значения \bar{m} , то наблюдается следующая тенденция: по мере увеличения параметра a постепенно в зонах временного хранения грузов, на которых происходило увеличение скорости снижения числа задействованных путей, происходит уменьшение скорости снижения числа задействованных путей вплоть до дальнейшего роста за исключением последней зоны временного хранения грузов с номером $i = t$ (рис. 64). Таким образом, начиная с некоторого значения параметра a , во всех зонах временного хранения грузов кроме последней происходит рост числа задействованных путей. В последней зоне временного хранения грузов происходит уменьшение числа задействованных путей, причем его скорость увеличивается (рис. 65).

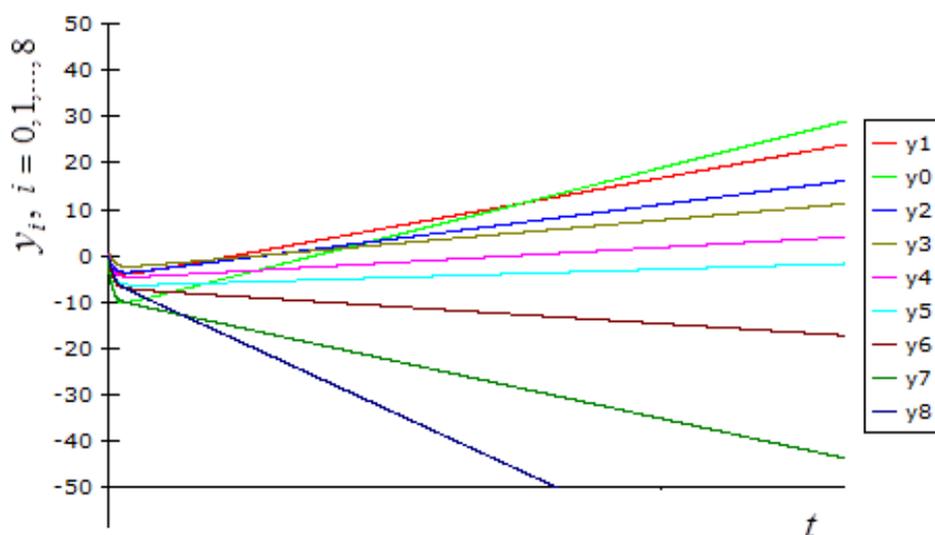


Рис. 64. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра a (пятикратное увеличение)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

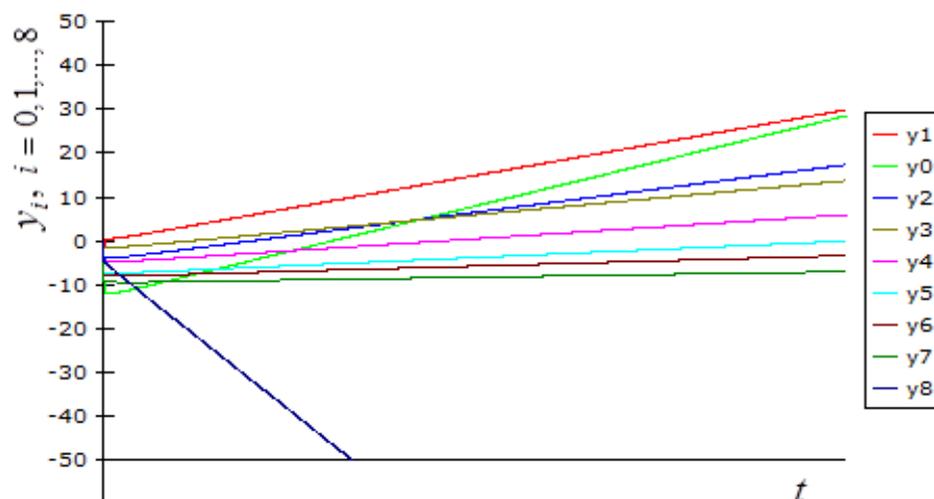


Рис. 65. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра a (многократное увеличение)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На рис. 64 значение параметра a увеличено до 0.5 ($\alpha = 10$, $a = 0.5$, $c_0 = 1 = 1$, $d = 3$), а на рис. 65 – до 10, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10$, $a = 10$, $c_0 = 1$, $c = 1$, $d = 3$).

Наконец, исследуем зависимость роста (падения) числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от параметра α . Напомним, что изменение данного параметра не меняет значение \bar{m} . Как ранее было отмечено, начиная с момента времени \bar{t} , увеличение параметра α приводит к уменьшению как разностей $(z_i - \Delta)$, $i = 0, \dots, \bar{m}$ так и $(\Delta - z_i)$, $i = \bar{m} + 1, \dots, m$. Таким образом, увеличение параметра α приводит как к уменьшению скорости роста в зонах временного хранения с номерами $i = 0, \dots, \bar{m} - 1$, так и уменьшению скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$. Такое же воздействие оказывает увеличение данного параметра и на число задействованных путей в зоне временного хранения с номером $i = \bar{m}$ с той лишь разницей, что число задействованных путей в этой зоне хранения может, как расти, так и падать или не меняться. Например, на рис. 66 приведена указанная динамика при следующих значениях параметров: $\alpha = 30$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$.

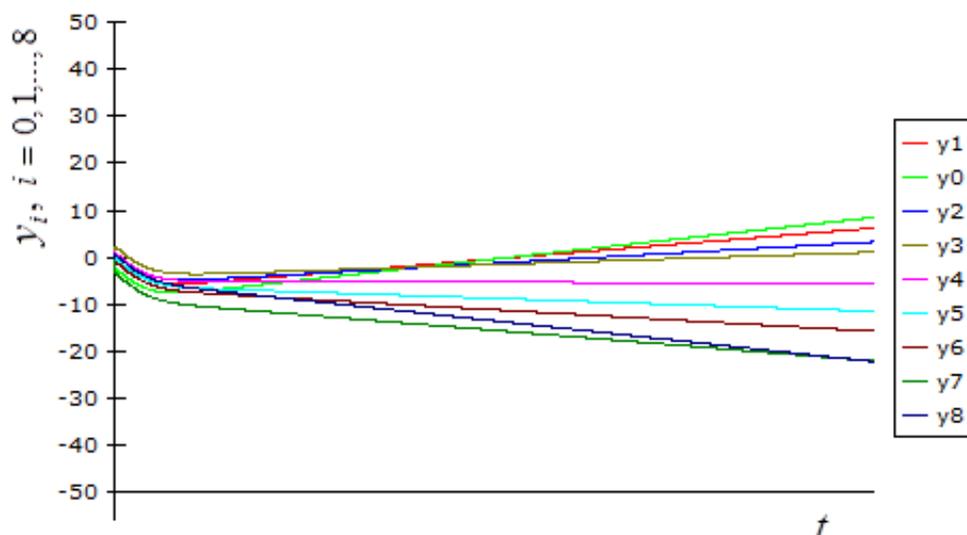


Рис. 66. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения с увеличенным значением параметра α

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Таким образом, только увеличение параметра α может уменьшить скорость роста (падения) числа задействованных путей во всех зонах временного хранения грузов.

В начале данного параграфа было отмечено, что ослабление системы контроля может привести к накоплению грузов в зонах временного хранения. Проведенное исследование подтвердило данное опасение. Это означает, что необходимо вводить корректировку в процесс организации грузоперевозок. В следующем параграфе опишем модель, которая ограничивает объем грузов, одновременно находящихся в зонах временного хранения (Beklaryan, Khachatryan, Akorov, 2019). Этот объем определяется числом путей в зонах временного хранения грузов.

3.4. Корректировка технологий грузоперевозок и системы контроля

Пусть число путей во всех зонах временного хранения грузов одинаково и равно V . Опишем технологии организации грузоперевозок с учетом этого

ограничения. Как известно, первая технология основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Каждая станция с номером $1 \leq i \leq m$ может принять грузы с предыдущей станции с интенсивностью равной $\alpha(z_{i-1} - z_i)$, если $z_{i-1} > z_i$, и отправлять на следующую станцию с интенсивностью равной $\alpha(z_i - z_{i+1})$, если $z_i > z_{i+1}$. При нарушении первого из условий станция с номером i отправляет грузы в зону временного хранения с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, если $y_i < V$, а при нарушении второго – принимает груз из зоны временного хранения с номером $i - 1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+1} - z_i)$, если $y_{i-1} > 0$. Начальная узловая станция ($i = 0$) принимает грузы с интенсивностью $\psi_1(t) \geq 0$ и отправляет на следующую станцию с интенсивностью $\alpha(z_0 - z_1)$, если $z_0 > z_1$. В противном случае начальная узловая станция дополнительно принимает груз с интенсивностью $\alpha(z_1 - z_0)$. Конечная узловая станция ($i = m + 1$) принимает грузы с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m+1})$, если $z_m > z_{m+1}$, и распределяет с интенсивностью $\psi_2(t) \geq 0$. Если $z_m < z_{m+1}$, то конечная станция дополнительно распределяет грузы с интенсивностью $\alpha(z_{m+1} - z_m)$.

В рамках второй технологии, станция с номером $i = 1, 2, \dots, m$ принимает грузы с $(i - 1)$ -ой зоны временного хранения с интенсивностью $\varphi(z_i)$, если $z_i < \Delta$ и $y_{i-1} > 0$, и отправляет в i -ую зону временного хранения с интенсивностью $\varphi(z_i)$, если $z_i > \Delta$ и $y_i < V$. Конечная узловая станция ($i = m + 1$) в рамках второй технологии принимает грузы из m -ой зоны временного хранения с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если $z_{m+1} < \Delta$ и $y_m > 0$, и дополнительно распределяет грузы с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если $z_{m+1} > \Delta$. Начальная узловая станция ($i = 0$) отправляет грузы в 0-ую зону временно хранения с интенсивностью $\varphi(z_0)$, если $z_0 > \Delta$ и $y_0 < V$.

Таким образом, динамика числа задействованных путей на станциях задается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha(z_0 - z_1) + \varphi_0(z_0) \text{sign}(z_0 - \Delta) \text{sign}(V - y_0), \quad t \in [0, +\infty), \quad (68)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i(t) = & \alpha(z_{i-1} - z_i)\text{sign}(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i)\text{sign}(z_i - z_{i-1})\text{sign}(V - y_i) - \\
& -\alpha(z_i - z_{i+1})\text{sign}(z_i - z_{i+1}) - \alpha(z_i - z_{i+1})\text{sign}(z_{i+1} - z_i)\text{sign}(y_{i-1}) + \\
& +\varphi(z_i)\text{sign}(\Delta - z_i)\text{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i)\text{sign}(z_i - \Delta)\text{sign}(V - y_i), \\
& i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty),
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{m+1}(t) = & \alpha(z_m - z_{m+1}) - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1})\text{sign}(\Delta - z_{m+1})\text{sign}(y_m) + \\
& +\varphi(z_{m+1})\text{sign}(z_{m+1} - \Delta), \quad t \in [0, +\infty).
\end{aligned} \tag{70}$$

Исследуем динамику числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Определим, с какой интенсивностью грузы поступают в зоны временного хранения и с какой интенсивностью отправляются из них. В рамках первой технологии в зону временного хранения с номером $1 \leq i \leq m - 1$ грузы поступают со станции с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, если $z_i > z_{i-1}$ и $y_i < V$, и отправляется на станцию с номером $i + 1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+2} - z_{i+1})$, если $z_{i+2} > z_{i+1}$ и $y_i > 0$. В начальную зону временного хранения ($i = 0$) в рамках первой технологии грузы не поступают, отправляется с нее на станцию с номером 1 с интенсивностью $\alpha(z_2 - z_1)$, если $z_2 > z_1$ и $y_0 > 0$. Наконец, в конечную зону временного хранения ($i = m$) в рамках этой же технологии грузы поступают со станции с номером $i = m$ с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m-1})$, если $z_m > z_{m-1}$ и $y_m < V$. С конечной зоны временного хранения в рамках данной технологии грузы не отправляются.

В рамках второй технологии в зону временного хранения с номером $0 \leq i \leq m$ грузы поступает со станции с номером i с интенсивностью $-\varphi(z_i)$, если число задействованных путей на станции с номером i превышает значение Δ и $y_i < V$, и отправляется на станцию с номером $i + 1$ с интенсивностью $\varphi(z_{i+1})$, если число задействованных путей на станции с номером $i + 1$ меньше значения Δ и $y_i > 0$ (станция с номером $i + 1$ принимает груз с зоны временного хранения).

Таким образом, динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) = & -\alpha(z_2 - z_1)\text{sign}(z_2 - z_1)\text{sign}(y_0) - \varphi(z_0)\text{sign}(z_0 - \Delta)\text{sign}(V - y_0) - \\ & -\varphi(z_1)\text{sign}(\Delta - z_1)\text{sign}(y_0), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & \alpha(z_i - z_{i-1})\text{sign}(z_i - z_{i-1})\text{sign}(V - y_i) - \\ & -\alpha(z_{i+2} - z_{i+1})\text{sign}(z_{i+2} - z_{i+1})\text{sign}(y_i) - \\ & -\varphi(z_i)\text{sign}(z_i - \Delta)\text{sign}(V - y_i) - \varphi(z_{i+1})\text{sign}(\Delta - z_{i+1})\text{sign}(y_i), \\ & i = 1, 2, \dots, m - 1, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) = & \alpha(z_m - z_{m-1})\text{sign}(z_m - z_{m-1})\text{sign}(V - y_m) - \\ & -\varphi(z_m)\text{sign}(z_m - \Delta)\text{sign}(V - y_m) - \\ & -\varphi(z_{m+1})\text{sign}(\Delta - z_{m+1})\text{sign}(y_m), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (73)$$

Кроме того, должны выполняться неравенства:

$$0 \leq y_i(t) \leq V, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty). \quad (74)$$

Эти неравенства накладывают ограничение на число задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Таким образом, исследуемая нами модель организации грузоперевозок описывается системой (68)-(74). Аналитическое исследование ее решений крайне затруднительно, т.к. правые части дифференциальных уравнений (68)-(70) и (71)-(73) являются разрывными функциями. В связи с этим система (68)-(74) была исследована численно. Приведем результаты численного исследования.

3.4.1. Результаты численных экспериментов

Для периодических функций

$$\psi_1(t) = d + \gamma \cos(\omega t), \quad d \geq \gamma > 0, \quad \psi_2(t) = \lambda \psi_1(t), \quad \lambda > 0$$

и функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$, определенных следующим образом

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ ax(\Delta - x), & a > 0 \text{ если } x \in [0, \Delta] \\ -c(x - \Delta), & c > 0 \text{ если } x \in (\Delta, +\infty) \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \Delta \\ -c_0(x - \Delta), & c_0 > 0 \text{ если } x \in (\Delta, +\infty) \end{cases}$$

были получены численные решения системы (68)-(74). В зависимости от параметра λ , участвующего в определении функции $\psi_2(\cdot)$, получаем три типа решений системы (68)-(74). Они определяют характер динамики задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов. Прежде чем перейдем к детальному изучению решений системы (68)-(74), отметим свойство решений данной системы, характерное для всех трех типов. Многочисленные эксперименты показали, что существует момент времени t_0 такой, что выполняется условие

$$z_0(t) > z_1(t) > \dots > z_m(t) > z_{m+1}(t), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

1-ый тип решения системы (68)-(74) ($0 < \lambda < 1$)

Данный тип решения характеризуется наличием момента времени $t_1 > t_0$, такого, что для всех $t \geq t_1$ и любых начальных значениях компоненты решения системы (68)-(74) удовлетворяют следующим условиям:

$$z_i(t) > \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1, \quad y_i(t) = V, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Отметим, что значение t_1 увеличивается как при увеличении значения V , так и при увеличении значения λ . Данный тип решений можно увидеть на рис. 67. Сверху приведена динамика числа задействованных путей на станциях (число станций равно 10), а снизу – динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов (число зон временного хранения грузов, соответственно, равно 9). Значение Δ равно 10, а значение V – 15.

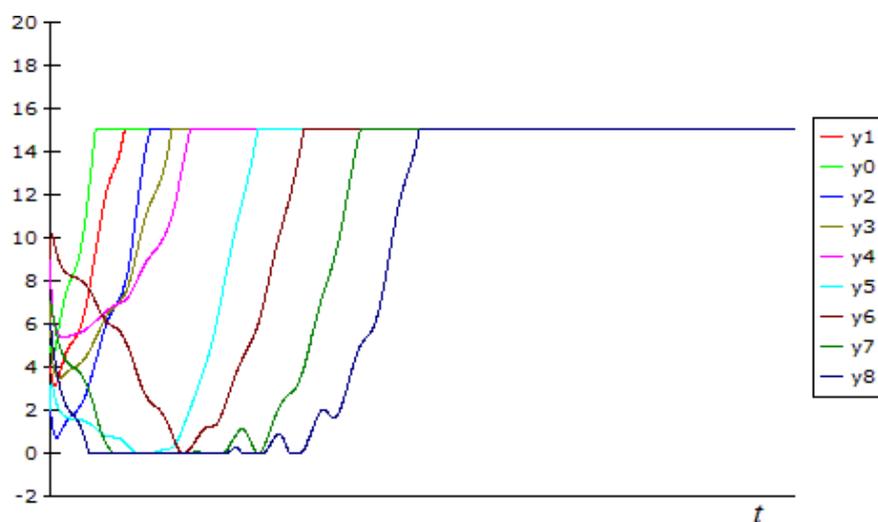
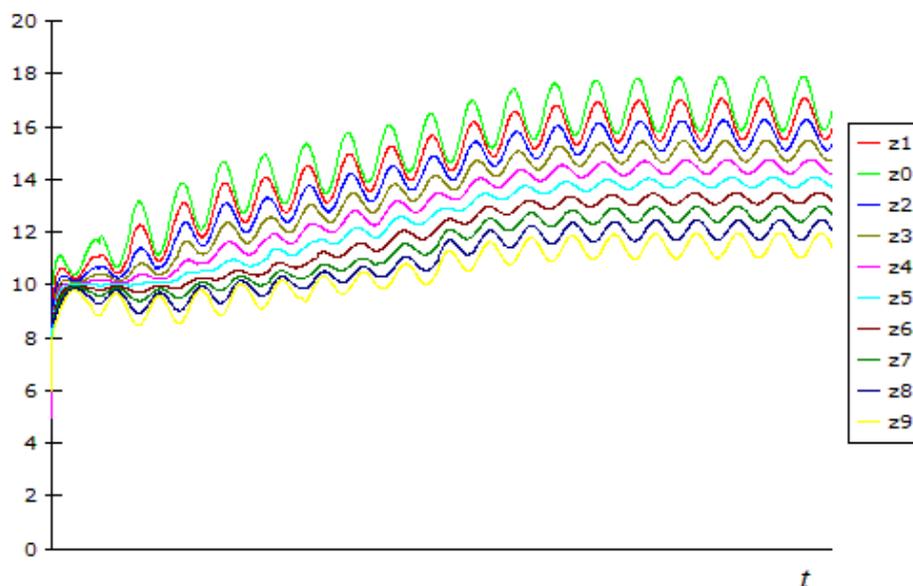


Рис. 67. Первый тип решения системы (68)-(74)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как видно из рис. 67, начиная с некоторого момента времени, число задействованных путей на всех станциях поочередно, начиная с начальной, превышает значение Δ и параллельно с этим, также поочередно, число задействованных путей во всех зонах временного хранения достигает максимального значения V . После этого, согласно правилам, приведенным выше, процесс организации грузоперевозок осуществляется только в рамках первой технологии без привлечения зон временного хранения грузов (так как

число задействованных путей на каждой следующей станции меньше чем на предыдущей).

2-ой тип решения системы (68)-(74) ($\lambda = 1$)

Данный тип решения характеризуется наличием момента времени t_2 , такого, что для всех $t \geq t_2$ компоненты решения системы (68)-(74) удовлетворяют одному из следующих условий:

$$z_i(t) > \Delta, \quad i = 0, \dots, \bar{m}, \quad z_i(t) < \Delta, \quad i = \bar{\bar{m}}, \dots, m + 1, \quad (75)$$

$$y_i(t) = V, \quad i = 0, \dots, \bar{m}, \quad y_i(t) = 0, \quad i = \bar{\bar{m}}, \dots, m, \quad (76)$$

где

$$0 \leq \bar{m} < \bar{\bar{m}} \leq m + 1$$

или

$$z_i(t) < \Delta, \quad i = 0, \dots, m + 1, \quad y_i(t) = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad (77)$$

или

$$z_i(t) > \Delta, \quad i = 0, \dots, m + 1, \quad y_i(t) = V, \quad i = 0, \dots, m. \quad (78)$$

Выполнимость того или иного условия ((75)-(76), (77) или (78)), а также значения чисел \bar{m} и $\bar{\bar{m}}$ зависят от начальных условий системы (68)-(74) и от величины V . Независимо от величины V , условие (77) выполняется при маленьких значениях компонент решения системы (68)-(74) в начальный момент времени (рис. 69), условие (78) – при больших (рис. 70), а условие (75)-(76) – при промежуточных (рис. 68).

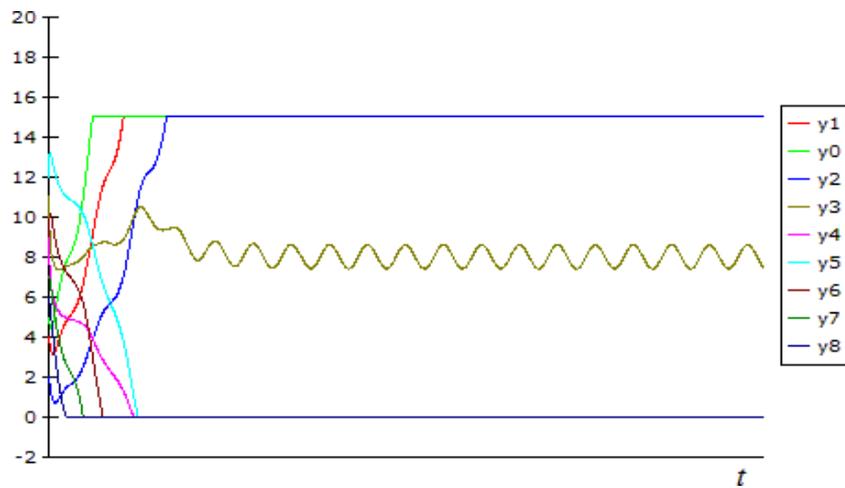
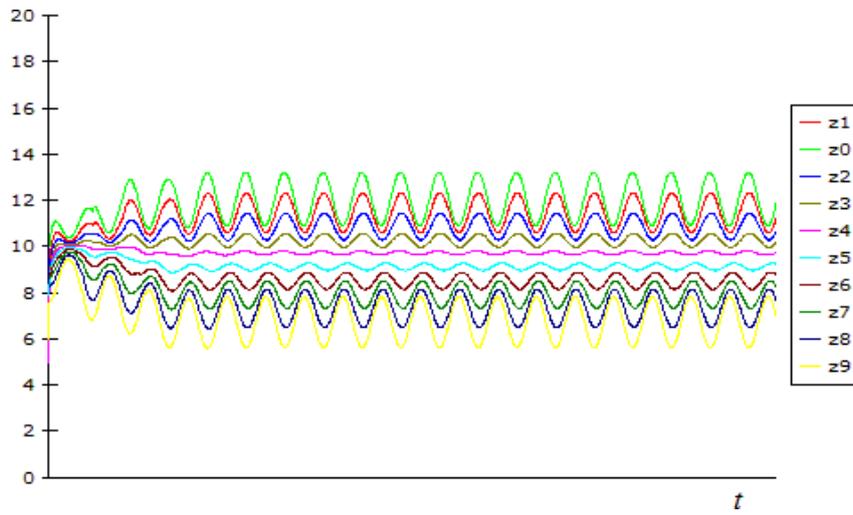


Рис. 68. Второй тип решения системы (68)-(74) (случай 1)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

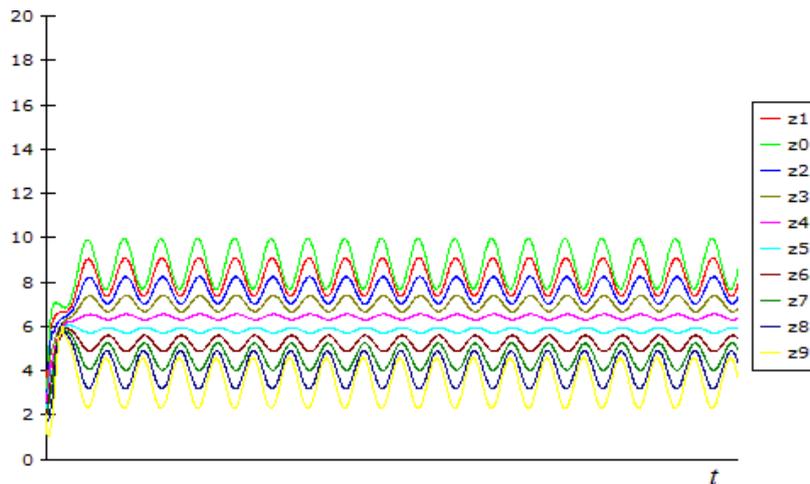




Рис. 69. Второй тип решения системы (68)-(74) (случай 2)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

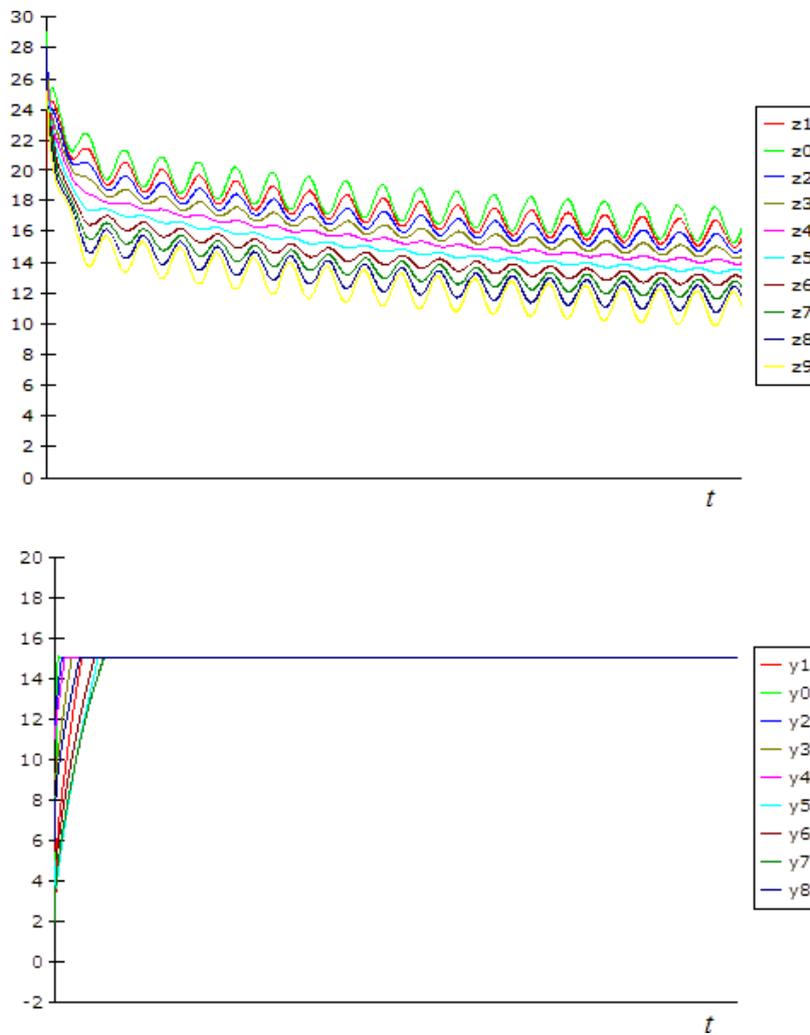


Рис 70. Второй тип решения системы (68)-(74) (случай 3)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

3-ий тип решения системы (68)-(74) ($\lambda > 1$)

Данный тип решения характеризуется наличием момента времени t_3 , такого, что для всех $t \geq t_3$ и любых начальных значениях компоненты $y_i(\cdot)$ решения системы (68)-(74) удовлетворяют условию

$$y_i(t) = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad (79)$$

а компоненты $z_i(\cdot)$ неограниченно убывают (рис. 71). Отметим, что значение t_3 увеличивается как при увеличении значения V , так и при уменьшении значения λ .

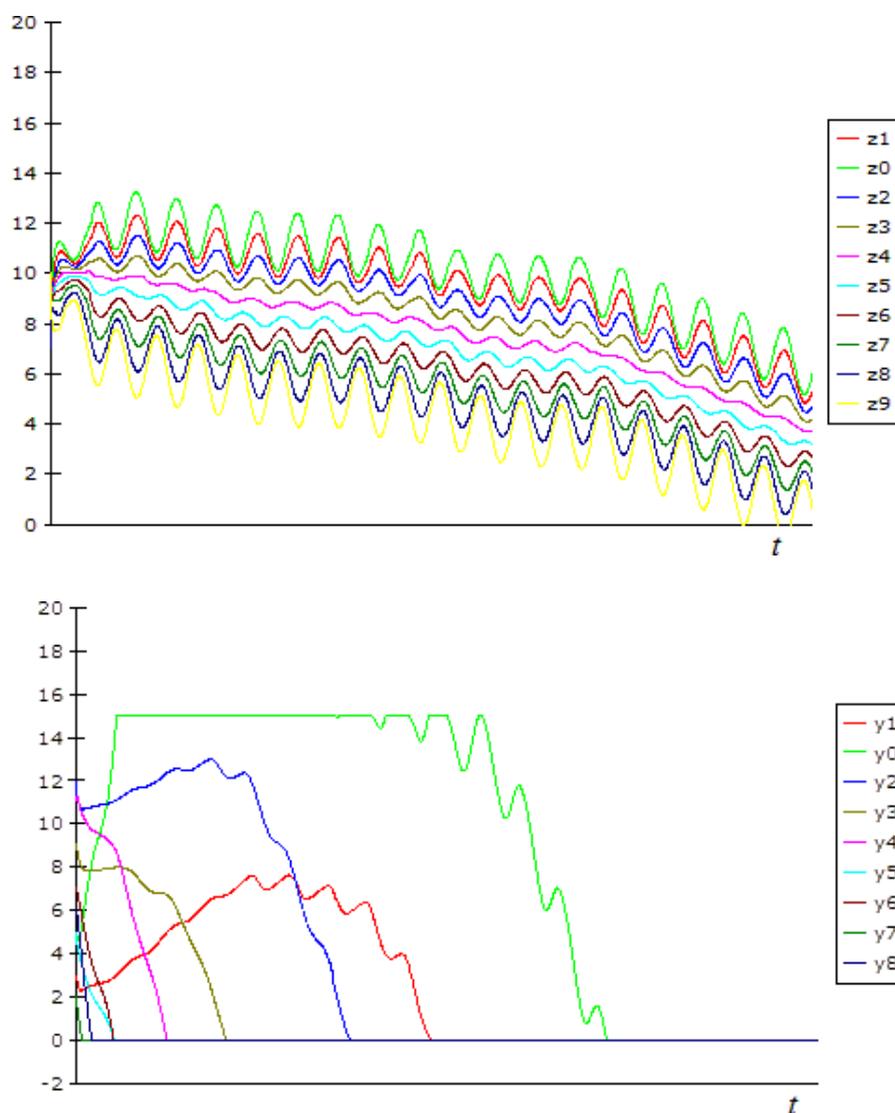


Рис. 71. Третий тип решения системы (68)-(74)

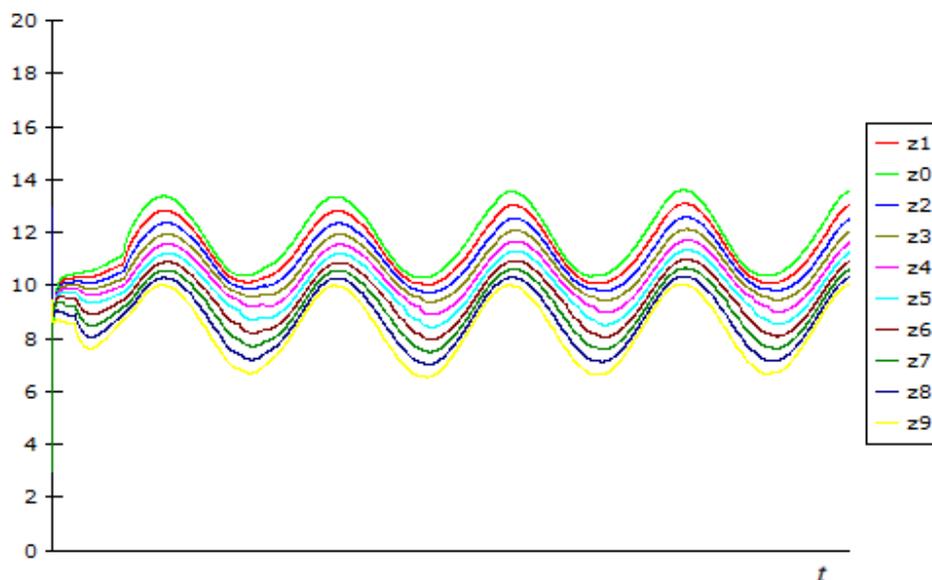
Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Проанализируем полученные результаты для каждого из трех типов решений системы (68)-(74). Первый тип решений определяет динамику числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов в случае, когда интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции меньше интенсивности отправки грузов на начальную узловую станцию. В этом случае с течением времени происходит полное заполнение зон временного хранения грузов, и при этом станции не могут принять грузы с них вследствие сильной загруженности. Второй тип решений определяет динамику числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов в случае, когда интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции равна интенсивности отправки грузов на начальную узловую станцию. Напомним, что в этом случае, в зависимости от загруженности станций в начальный момент времени, возможны три типа указанной динамики. Если в начальный момент времени станции задействованы незначительно, то с течением времени запасы грузов во всех зонах временного хранения заканчиваются, станции загружаются до уровня ниже оптимального и впоследствии движение грузов происходит от одной станции к другой (без привлечения зон временного хранения грузов). Противоположная степень заполненности станций в начальный момент времени (критическое переполнение) на практике крайне маловероятна. Наконец, при наиболее вероятной средней степени заполненности станций в начальный момент времени происходит наиболее оптимальная их загрузка, соответствующая наиболее эффективному использованию инфраструктурных возможностей станций. При этом происходит переполнение зон временного хранения грузов, близких к начальной узловой станции, без возможности дальнейшего их вывоза и освобождение зон временного хранения грузов, близких к конечной узловой станции. Следует отметить, что в этом случае необходимо подключить дополнительные мощности для вывоза грузов из зон временного хранения грузов, близких к начальной узловой станции. Третий тип решений определяет

динамику числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов в случае, когда интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции превышает интенсивность отправки грузов на начальную узловую станцию. В этом случае с течением времени происходит освобождение зон временного хранения грузов, а загруженность станций уменьшается вплоть до их полного бездействия.

Однако, если разность в интенсивностях распределения грузов с конечной узловой станции и подачи грузов на начальную узловую станцию невелика, то можно утверждать, что на протяжении всего горизонта планирования можно осуществлять грузоперевозки с помощью указанных технологий.

В заключение данного параграфа рассмотрим случай, когда параметр $\lambda = 1$, $\psi_1(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma > 0$, при этом функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ связаны следующим образом: $\psi_2(t) = \psi_1(t + \vartheta)$. Параметр ϑ определяет сдвиг одной функции относительно другой по оси абсцисс и позволяет выравнять амплитуду колебаний числа задействованных путей на станциях. Кроме того, этот параметр позволяет не допускать полного заполнения зон временного хранения грузов. На рис. 72 приведена динамика числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов при некотором фиксированном значении параметра ϑ .



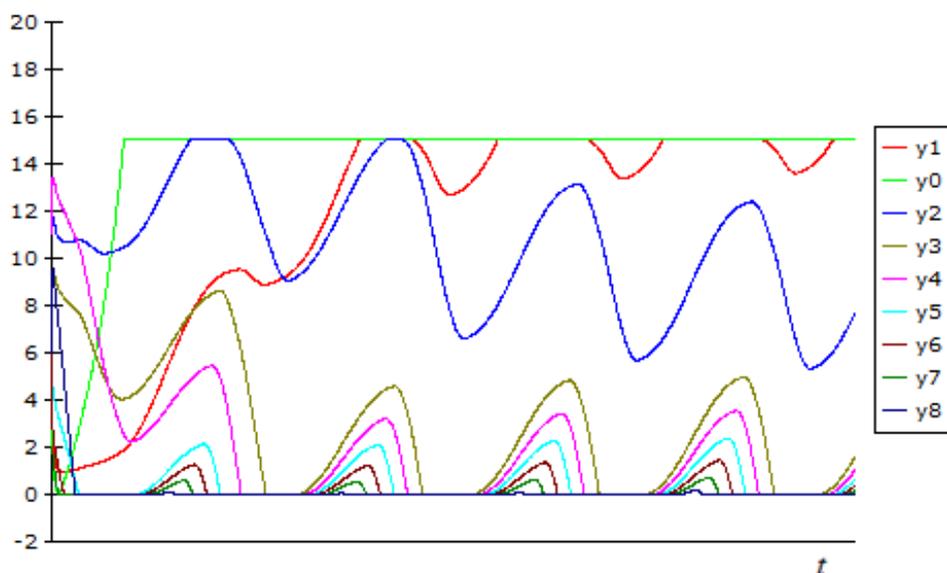


Рис. 72. Второй тип решения системы (68)-(74)
(случай $\psi_2(t) = \psi_1(t + \vartheta)$)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Отметим, что приведенная динамика числа задействованных путей на станциях, т.е. колебания в окрестности оптимального значения, имеет место в случае если значения компонент решения системы (68)-(74) в начальный момент времени находятся в определенном диапазоне (аналог динамики числа задействованных путей на станциях, представленной на рис. 68). Важно также подчеркнуть, что увеличение параметра α приводит к уменьшению амплитуды указанных колебаний (рис. 73).

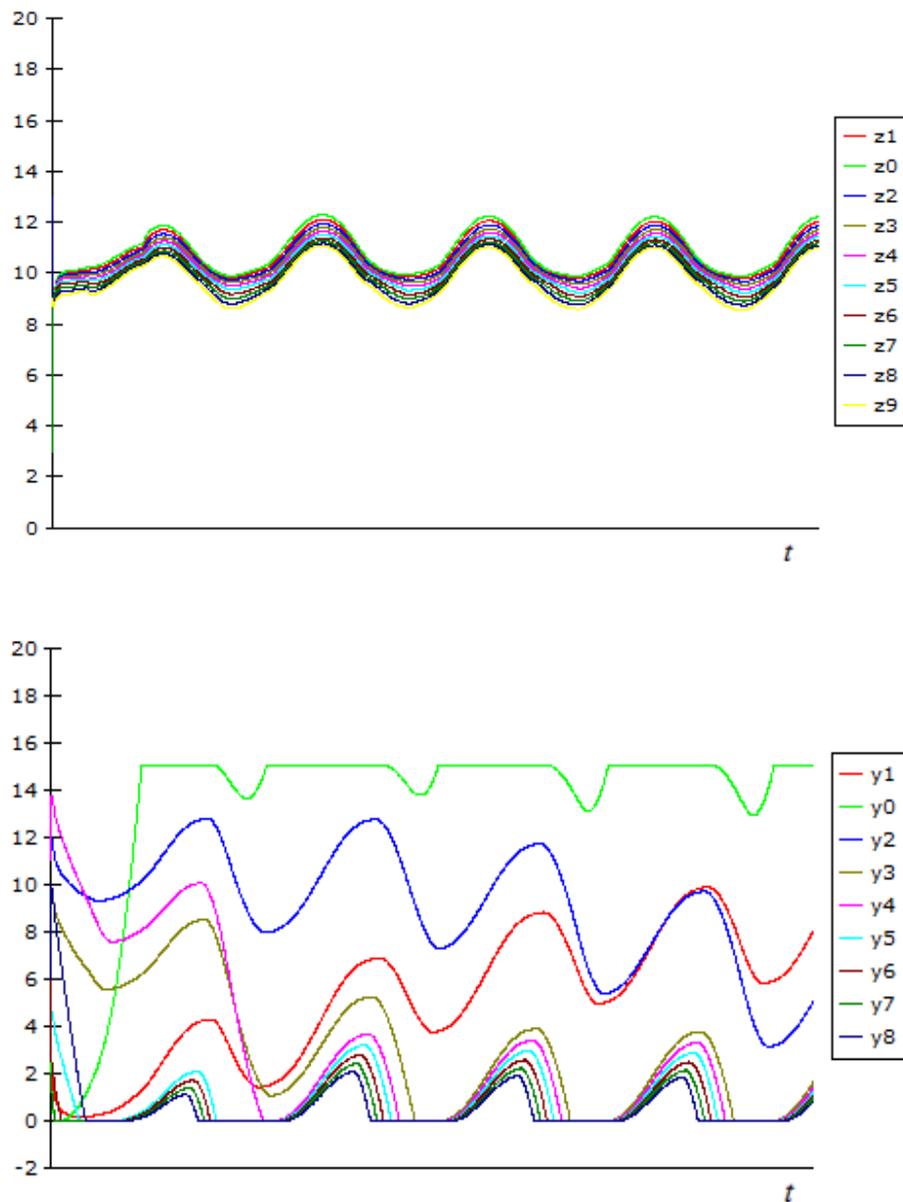


Рис. 73. Второй тип решения системы (68)-(74)

(случай $\psi_2(t) = \psi_1(t + \vartheta)$ с увеличенным значением параметра α)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

На рис. 73 приведена динамика числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра α и при неизменных значениях других параметров и начальных условий.

3.5. Выводы по главе 3

В данной главе подход, направленный на оптимальное использование инфраструктуры железнодорожных станций, применен к участку железнодорожной линии между двумя узловыми станциями. Основная проблема, с которой приходится сталкиваться при моделировании процесса организации грузоперевозок в рамках данной конфигурации железнодорожной сети следующая – невозможность строгого соблюдения системы контроля в рамках экзогенного взаимодействия начальной узловой станции с поставщиками грузов и конечной узловой станции с получателями грузов. Предложено два пути решения данной проблемы. Первый путь – эндогенное взаимодействие начальной и конечной узловых станций с поставщиками и получателями грузов с момента времени, равного характеристике системы контроля. Такое решение проблемы позволяет строго соблюдать систему контроля, однако, оно требует скачкообразного изменения числа задействованных путей на станциях в моменты времени кратные характеристике системы контроля. На практике это осуществимо только при наличии развитой инфраструктуры на всех станциях. В связи с этим возникает вполне естественный вопрос: каким образом можно уменьшить величину указанных скачков и насколько малым ее удастся сделать? Было выявлено два способа уменьшения этих скачков. Первый способ связан с импульсным изменением числа задействованных путей на начальной узловой станции в начальный период времени, т.е. предполагает наличие развитой инфраструктуры только на ней. Второй способ связан с управлением параметрами модели, характеризующими интенсивность взаимодействия станции с соседними станциями и систему контроля. Показано, что оба способа позволяют снизить величину скачков и сделать их сколь угодно малыми. Второй путь решения указанной проблемы – отказ от строгого соблюдения системы контроля, т.е. допущение некоторой погрешности в ее выполнении. В этом случае взаимодействие начальной узловой станции с поставщиками грузов и

конечной узловой станции с получателями грузов является экзогенным. Показано, что управление параметрами моделей, характеризующими взаимодействие станции с соседними станциями и зонами временного хранения грузов, позволяет снизить величину погрешности и сделать ее сколь угодно малой. Основным результатом проведенных исследований следующий: если синхронизировать работу начальной узловой станции с работой конечной узловой станции и обеспечить соответствующую загрузку станций и зон временного хранения грузов в начальный момент времени то в дальнейшем число задействованных путей на всех станциях будет колебаться в некоторой окрестности оптимального значения, причем число задействованных путей на станциях близких к начальной узловой будет колебаться в правой части этой окрестности, а число задействованных путей на станциях близких к конечной узловой – в левой части указанной окрестности. Увеличение нормативного коэффициента, характеризующего интенсивность взаимодействия соседних станций, позволяет уменьшать радиус этой окрестности, т.е. делать использование инфраструктуры станций близким к оптимальному. В условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки это позволяет снижать неравномерность загрузки железнодорожной инфраструктуры и повышать интенсивность грузопотока.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПРИ ОТСУТСТВИИ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ⁴

Перейдем к построению моделей организации грузоперевозок в случае отсутствия стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В этих условиях, как было отмечено во введении, нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере и, соответственно, в использовании специальных зон между станциями для временного хранения части грузов в случае чрезмерной загрузки станций. Для таких моделей важно описать динамику грузопотока в зависимости от потенциала станций. Напомним, что использование специальных зон хранения грузов между станциями потребовало введения системы контроля. Таким образом, движение грузов происходит только от одной станции к другой и, как следствие, без системы контроля. Как и в предыдущей главе будем рассматривать две конфигурации участков железнодорожной сети: замкнутая цепочка станций, и участок железной дороги между двумя узловыми станциями. В первом случае важно определить установившийся уровень грузопотока при заданных правилах взаимодействия станций, а также выявить его зависимость от потенциала станций (Хачатрян, Бекларян, 2021). Во втором случае грузопоток формируется поступившими на начальную узловую станцию грузами с учетом технического потенциала станций. Поэтому, главной задачей является организация бесперебойного функционирования системы грузоперевозок с

⁴ Данная глава написана на основании работ автора:

Исследование динамики потока в модели организации грузоперевозок по круговой цепочке станций // Экономика и математические методы. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 83-91 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Study of flow dynamics in the model of cargo transportation organization between node stations // International Journal of Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 33, № 5. – P. 937-949 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Modeling the process of cargo transportation between node stations // International Journal of Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 34, № 6. – P. 1223-1235 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Bifurcation in the model of cargo transportation organization // Advances in Systems Science and Applications. – 2022. – № 4. – P. 79-91 (Web of Science, Scopus, RSCI).
Synchronization of Inbound and Outbound Flows at Stations in the Model of Freight Transportation Organization // Advances in Systems Science and Applications. – 2024. – Vol. 24, №1. P. 82-94 (Web of Science, Scopus, RSCI).

учетом интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и технического потенциала станций (Khachatryan, 2020; Khachatryan, 2021; Khachatryan, 2022; Khachatryan, 2024).

4.1. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций

Рассмотрим движение грузопотока по замкнутой цепочке, состоящей из n станций. Обозначим через Δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ число путей на станции i . Пусть $z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ как и ранее – число путей, задействованных на станции i в момент времени t . Тогда $\Delta_i - z_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ – число свободных путей на станции i в момент времени t . Очевидно, что функции $z_i(t)$ должны удовлетворять ограничениям:

$$0 \leq z_i(t) \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (80)$$

Движение грузопотока также осуществляется с помощью двух технологий. Первая технология, как и в моделях, представленных в предыдущих главах, основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Согласно ей, произвольная станция:

1) принимает груз с предыдущей станции, если число свободных путей на ней больше, чем на предыдущей станции, и предыдущая станция не пуста. При этом интенсивность приема пропорциональна как разности чисел свободных путей на этих станциях, так и числу свободных путей на данной станции;

2) отправляет груз на следующую станцию, если число свободных путей на ней меньше, чем на следующей станции, и она не пуста. При этом интенсивность отправки пропорциональна как разности чисел свободных путей на этих станциях, так и числу свободных путей на следующей станции.

Таким образом, каждая станция с номером i ($2 \leq i \leq n - 1$) в рамках первой технологии должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_i - z_i) - (\Delta_{i-1} - z_{i-1})] (\Delta_i - z_i) \text{sign}(\Delta_i - z_i) \text{sign}(z_{i-1}),$$

если

$$\Delta_i - z_i > \Delta_{i-1} - z_{i-1}$$

и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) - (\Delta_i - z_i)] (\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(z_i),$$

если

$$\Delta_{i+1} - z_{i+1} > \Delta_i - z_i.$$

Для станции 1 предыдущей является станция n , соответственно, для станции n последующей является станция 1. Поэтому станция 1 в рамках первой технологии должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_1 - z_1) - (\Delta_n - z_n)] (\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n),$$

если

$$\Delta_1 - z_1 > \Delta_n - z_n$$

и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_2 - z_2) - (\Delta_1 - z_1)] (\Delta_2 - z_2) \text{sign}(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(z_1),$$

если

$$\Delta_2 - z_2 > \Delta_1 - z_1.$$

Аналогично, станция n должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_n - z_n) - (\Delta_{n-1} - z_{n-1})] (\Delta_n - z_n) \text{sign}(\Delta_n - z_n) \text{sign}(z_{n-1}),$$

если

$$\Delta_n - z_n > \Delta_{n-1} - z_{n-1}$$

и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_1 - z_1) - (\Delta_n - z_n)] (\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n),$$

если

$$\Delta_1 - z_1 > \Delta_n - z_n.$$

Параметр α характеризует потенциал первой технологии и ограничивается пропускной способностью перегонов (участков железнодорожной линии между станциями) и техническими характеристиками железнодорожного подвижного состава, осуществляющего перевозки.

Вторая технология позволяет увеличить грузопоток в зависимости от загруженности станций: станции принимают и отправляют грузы с интенсивностью, определяемой числом свободных путей на ней и на следующей станции соответственно. Она описывается с помощью непрерывных убывающих функций $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, определенных на отрезке $[0, \Delta_i]$, причем $\varphi_i(\Delta_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, интенсивность движения грузопотока на станциях задается с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha (\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n) \text{sign}(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n) (\Delta_1 - z_1) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) - \alpha (\Delta_2 - z_2 - \Delta_1 + z_1) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_2 - z_2 - \Delta_1 + z_1) (\Delta_2 - z_2) \text{sign}(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n) - \varphi_2(z_2) \text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha (\Delta_i - z_i - \Delta_{i-1} + z_{i-1}) \text{sign}(\Delta_i - z_i - \Delta_{i-1} + z_{i-1}) (\Delta_i - z_i) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_i - z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \alpha (\Delta_{i+1} - z_{i+1} - \Delta_i + z_i) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1} - \Delta_i + z_i) (\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(z_i) + \\ & + \varphi_i(z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \varphi_{i+1}(z_{i+1}) \text{sign}(z_i), \\ & i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & \alpha (\Delta_n - z_n - \Delta_{n-1} + z_{n-1}) \text{sign}(\Delta_n - z_n - \Delta_{n-1} + z_{n-1}) (\Delta_n - z_n) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_n - z_n) \text{sign}(z_{n-1}) - \alpha (\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n) (\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) + \\ & + \varphi_n(z_n) \text{sign}(z_{n-1}) - \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (83)$$

Отметим, что конструкция правых частей системы (81)-(83) гарантирует, что всякое ее решение, удовлетворяющее условию (80) в начальный момент

времени, будет удовлетворять ему и в последующие моменты времени.

Перепишем систему (81)-(83) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha (z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n) \text{sign}(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n) (\Delta_1 - z_1) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) - \alpha (z_1 - z_2 + \Delta_2 - \Delta_1) \times \\ & \times \text{sign}(z_1 - z_2 + \Delta_2 - \Delta_1) (\Delta_2 - z_2) \text{sign}(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n) - \varphi_2(z_2) \text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha (z_{i-1} - z_i + \Delta_i - \Delta_{i-1}) \text{sign}(z_{i-1} - z_i + \Delta_i - \Delta_{i-1}) (\Delta_i - z_i) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_i - z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \alpha (z_i - z_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i) \times \\ & \times \text{sign}(z_i - z_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i) (\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(z_i) + \\ & + \varphi_i(z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \varphi_{i+1}(z_{i+1}) \text{sign}(z_i), \\ & i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & \alpha (z_{n-1} - z_n + \Delta_n - \Delta_{n-1}) \text{sign}(z_{n-1} - z_n + \Delta_n - \Delta_{n-1}) (\Delta_n - z_n) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_n - z_n) \text{sign}(z_{n-1}) - \alpha (z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n) \times \\ & \times \text{sign}(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n) (\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) + \\ & + \varphi_n(z_n) \text{sign}(z_{n-1}) - \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (86)$$

Помимо системы (84)-(86) рассмотрим ее частный случай, соответствующий идентичности всех станций, т.е. в предположении, что все станции содержат одинаковое число путей и с одинаковой эффективностью их могут использовать. В этом случае

$$\Delta_i = \Delta_j = \Delta, \quad \varphi_i(\cdot) = \varphi_j(\cdot) = \varphi(\cdot)$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$ и система уравнений (84)-(86) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha (z_n - z_1) \text{sign}(z_n - z_1) (\Delta - z_1) \text{sign}(\Delta - z_1) \text{sign}(z_n) - \\ & - \alpha (z_1 - z_2) \text{sign}(z_1 - z_2) (\Delta - z_2) \text{sign}(\Delta - z_2) \text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi(z_1) \text{sign}(z_n) - \varphi(z_2) \text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha (z_{i-1} - z_i) \text{sign}(z_{i-1} - z_i) (\Delta - z_i) \text{sign}(\Delta - z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \\ & - \alpha (z_i - z_{i+1}) \text{sign}(z_i - z_{i+1}) (\Delta - z_{i+1}) \text{sign}(\Delta - z_{i+1}) \text{sign}(z_i) + \end{aligned} \quad (88)$$

$$+\varphi(z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \varphi(z_{i+1})\text{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty);$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & \alpha (z_{n-1} - z_n)\text{sign}(z_{n-1} - z_n)(\Delta - z_n)\text{sign}(\Delta - z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \\ & -\alpha (z_n - z_1)\text{sign}(z_n - z_1)(\Delta - z_1)\text{sign}(\Delta - z_1)\text{sign}(z_n) + \\ & +\varphi(z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \varphi(z_1)\text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (89)$$

Система уравнений (87)-(89) имеет бесконечное множество стационарных решений вида

$$z_i = c, \quad 0 \leq c \leq \Delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (90)$$

Аналитическое исследование других решений системы (87)-(89), а также решений системы (84)-(86), крайне затруднительно, так как правые части дифференциальных уравнений в общем случае являются разрывными функциями. В связи с этим системы (87)-(89) и (84)-(86) были исследованы численно.

4.1.1. Результаты численных экспериментов

Перейдем к изложению результатов численных экспериментов, в которых функции $\varphi_i(\cdot)$ были определены следующим образом:

$$\varphi_i(z_i) = a_i(\Delta_i^2 - z_i^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (91)$$

Напомним, что функции $\varphi_i(\cdot)$ должны быть убывающими и удовлетворять условию $\varphi_i(\Delta_i) = 0$. Параметр a_i , участвующий в определении этих функций, описывает эффективность использования путей на станции i . Определяя такой класс функций $\varphi_i(\cdot)$, мы предполагаем, что пропускная способность станций зависит как от числа путей, так и от эффективности их использования. Причем с ростом эффективности использования путей пропускная способность растет линейно, а с увеличением числа путей – больше чем линейно. Основная задача численных экспериментов заключалась в исследовании решений системы (84)-(86) (в частности (87)-(89)), определяющей динамику интенсивности грузопотока, а также ее зависимость от начальных значений и параметров модели $\alpha, a_i, \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n$.

4.1.2. Численное решение системы (87)-(89)

Для системы (87)-(89) имеем

$$\varphi_i(z_i) = \varphi(z_i) = a(\Delta^2 - z_i^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. параметрами являются α , a , Δ . Система (87)-(89) имеет стационарные решения вида (90). Как показывают численные эксперименты при любых значениях параметров α , a , Δ система (87)-(89) имеет непрерывное решение, причем любое ее решение со временем выходит на некоторый стационарный режим, т.е. существует $\bar{t} > 0$, такое, что всякое решение $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ системы (87)-(89) удовлетворяет условию $z_i = \bar{c}$, $t \in [\bar{t}, +\infty)$. Более того, значение \bar{c} зависит только от начальных условий и определяется формулой $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i(0)$. Момент времени \bar{t} характеризуется как начальными условиями, так и параметрами модели. На рис. 74 приведен график решений системы (87)-(89) при $\alpha = 2$, $a = 0.1$, $\Delta = 10$ и начальных условиях:

$$\begin{aligned} z_1(0) = 3, \quad z_2(0) = 2, \quad z_3(0) = 5, \quad z_4(0) = 3, \quad z_5(0) = 4, \quad z_6(0) = 4, \\ z_7(0) = 3, \quad z_8(0) = 2, \quad z_9(0) = 1, \quad z_{10}(0) = 4. \end{aligned}$$

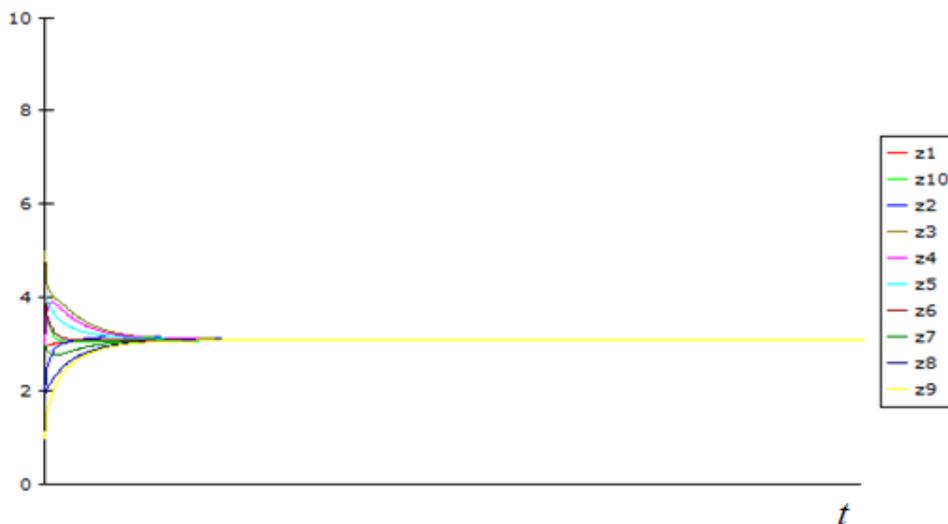


Рис. 74. График решения системы (87)-(89)

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Из правых частей уравнений (87)-(89) следует, что, начиная с момента времени \bar{t} , первые два слагаемых в них равны нулю, ненулевыми являются только слагаемые определяемые функцией $\varphi_i(\cdot)$. Это означает, что со временем движение грузопотока осуществляется только в рамках второй технологии, каждая станция принимает груз с предыдущей станции и отправляет на следующую станцию с постоянной интенсивностью $\varphi(\bar{c})$, т.е. в системе грузоперевозок устанавливается стационарный поток. На рис. 75 приведены графики интенсивностей потоков, возникающих между станциями.

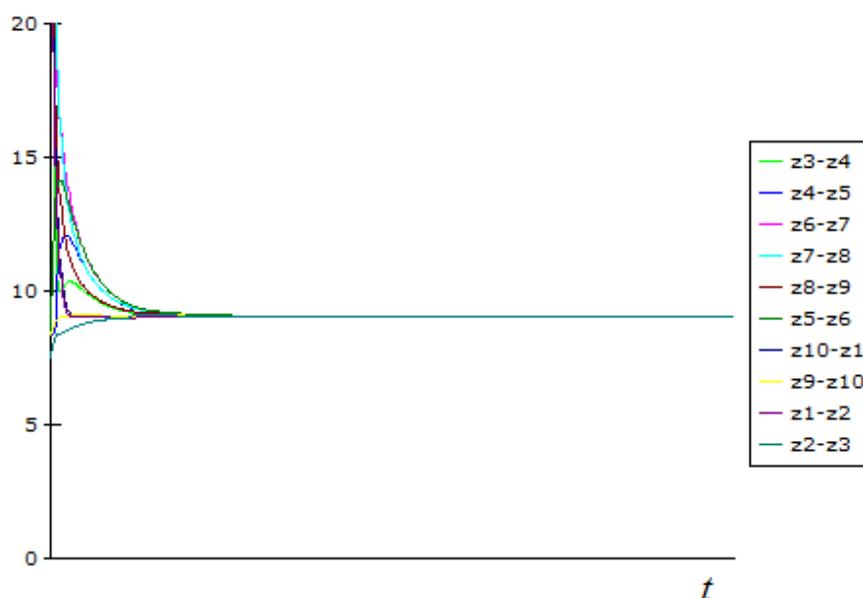


Рис. 75. Интенсивность потока в случае идентичных станций

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как следует из определения функции $\varphi(\cdot)$, величина этого потока прямо пропорциональна параметрам a , Δ и обратно пропорциональна значению \bar{c} . Таким образом, в случае идентичности станций в системе грузоперевозок, начиная с некоторого момента времени, устанавливается стационарный поток, величина которого увеличивается по мере роста пропускной способности станций и уменьшается с увеличением загрузки станций в начальный момент времени (\bar{c}). Величина этого потока не зависит от характеристики первой технологии, т.е. параметра α . От него зависит время выхода на стационарный

поток (\bar{t}). Чем меньше значение параметра α , тем позже наступит это время. Наконец отметим, что все выводы, полученные в этом параграфе относительно динамики решений системы (87)-(89) и интенсивности потока, остаются справедливыми и при $\alpha = 0$, т.е. в системе грузоперевозок устанавливается такой же стационарный поток, как и при $\alpha > 0$, но в более отдаленном будущем.

4.1.3. Численное решение системы (84)-(86)

Перейдем к исследованию общей системы (84)-(86). В результате численных экспериментов было установлено, что система (84)-(86) имеет два типа решений. Первый тип характеризуется непрерывными правыми частями и обладает следующим свойством:

$$\exists \tilde{t} > 0: \quad z_i = \bar{c}_i, \quad 0 < \bar{c}_i < \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [\tilde{t}, +\infty). \quad (92)$$

Кроме того, выполняются условие

$$(\sum_{i=1}^n \bar{c}_i)/n = \bar{c}, \quad \text{где } \bar{c} = (\sum_{i=1}^n z_i(0))/n.$$

Второй тип решения системы (84)-(86) характеризуется разрывными правыми частями. Как показывают численные эксперименты, такие решения являются следствием того, что одна или несколько компонент решения начинают колебаться в правой окрестности нуля, принимая периодически нулевые значения (терпят разрывы). Это приводит к разрывам остальных компонент решения. Вследствие такого поведения решений интенсивность грузопотока меняется скачкообразно. Данное поведение характерно для решений с малыми начальными значениями и решениями, полученными при значениях параметра α , близких к нулю. На практике данный режим грузоперевозок сложно реализуем, поэтому такой тип решений мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Итак, будем исследовать первый тип решений. На рис. 76 приведен пример решения для $\alpha = 2$,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 10, \Delta_2 = 11, \Delta_3 = 12, \Delta_4 = 8, \Delta_5 = 10, \\
\Delta_6 &= 11, \Delta_7 = 9, \Delta_8 = 10, \Delta_9 = 12, \Delta_{10} = 10, \\
a_1 &= 0,1, a_2 = 0,2, a_3 = 0,3, a_4 = 0,05, a_5 = 0,4, \\
a_6 &= 0,1, a_7 = 0,1, a_8 = 0,2, a_9 = 0,2, a_{10} = 0,02
\end{aligned}
\tag{93}$$

и начальных значений

$$\begin{aligned}
z_1(0) &= 4, z_2(0) = 2, z_3(0) = 5, z_4(0) = 7, z_5(0) = 6, \\
z_6(0) &= 8, z_7(0) = 5, z_8(0) = 6, z_9(0) = 8, z_{10}(0) = 3.
\end{aligned}$$

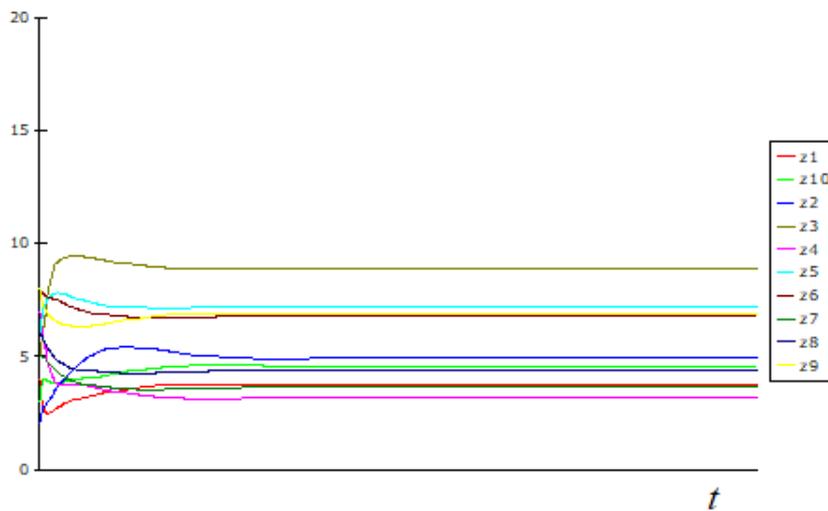


Рис. 76. Графики решений системы (84)-(86) первого типа

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Из-за симметричности правил приема и отправки грузов (отправка грузов со станции i на станцию $i + 1$ с определенной интенсивностью равносильна приему грузов на станции $i + 1$ с той же интенсивностью) и условия (92) следует, что каждая станция принимает груз с предыдущей станции и отправляет на следующую станцию с постоянной и одинаковой интенсивностью, т.е. в системе грузоперевозок, как и в случае идентичных станций, устанавливается стационарный поток (рис. 77). Величина этого потока зависит как от параметров модели, так и от начальных значений, а точнее от их среднего арифметического \bar{c} . С помощью численных экспериментов исследуем эти зависимости.

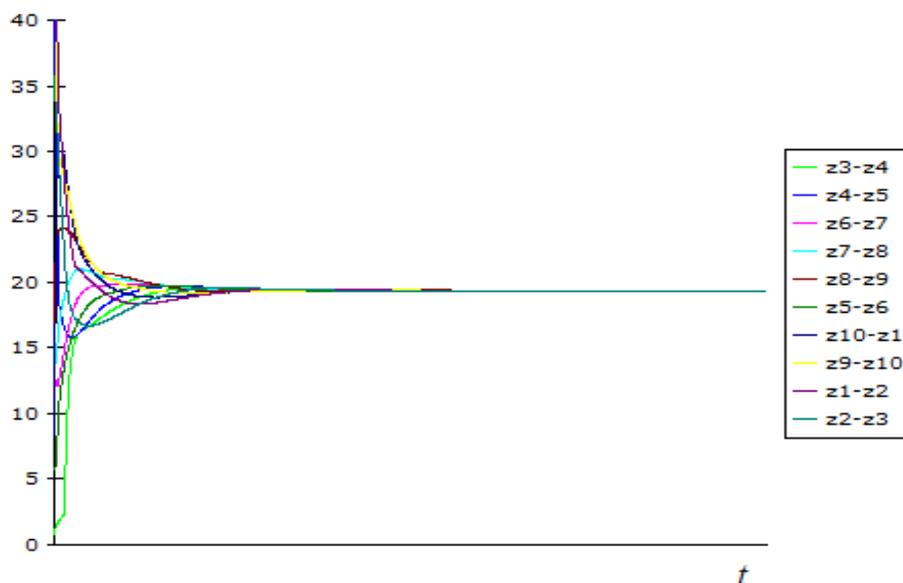


Рис. 77. Интенсивность потока в общем случае

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Начнем с параметра α , который характеризует потенциал первой технологии. На рис. 78 приведен график зависимости интенсивности стационарного потока от α при фиксированных значениях остальных параметров и начальных значений (см. (93)).

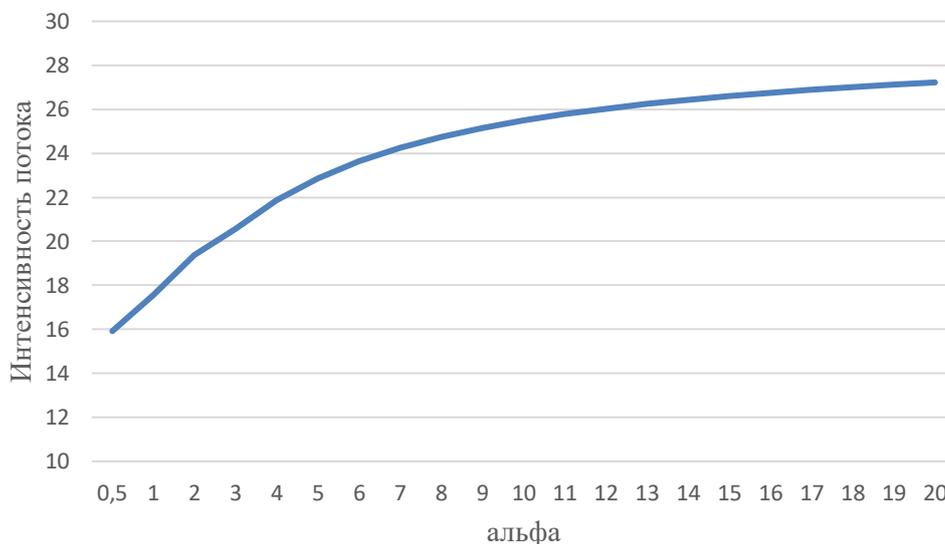


Рис. 78. График зависимости интенсивности стационарного потока от параметра α

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как мы видим, с увеличением параметра α растет интенсивность стационарного потока, а скорость ее роста уменьшается.

Перейдем к исследованию зависимости интенсивности стационарного потока от характеристик пропускной способности станций, т.е. от a_i и Δ_i .

Начнем с параметра a_i . На рис. 79, 80, 81 и 82 приведены графики зависимости интенсивности стационарного потока от a_2 , a_3 , a_4 и a_5 при фиксированных значениях остальных параметров и начальных условий.

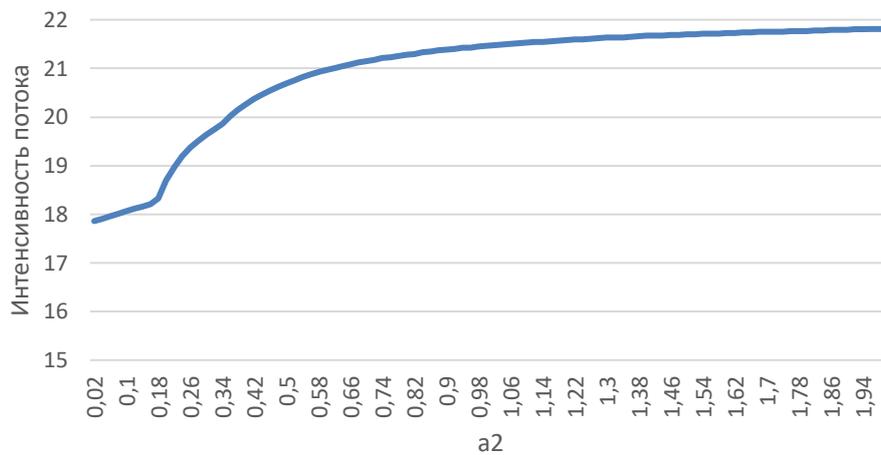


Рис. 79. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_2

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

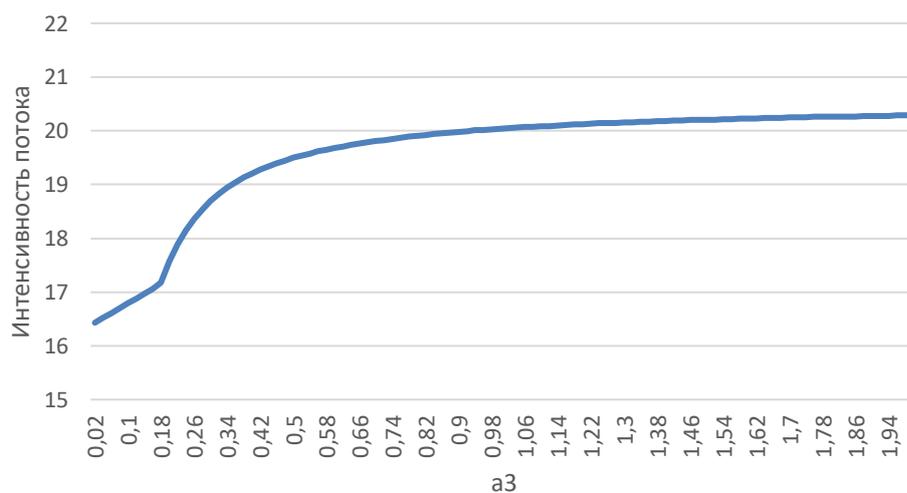


Рис. 80. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_3

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

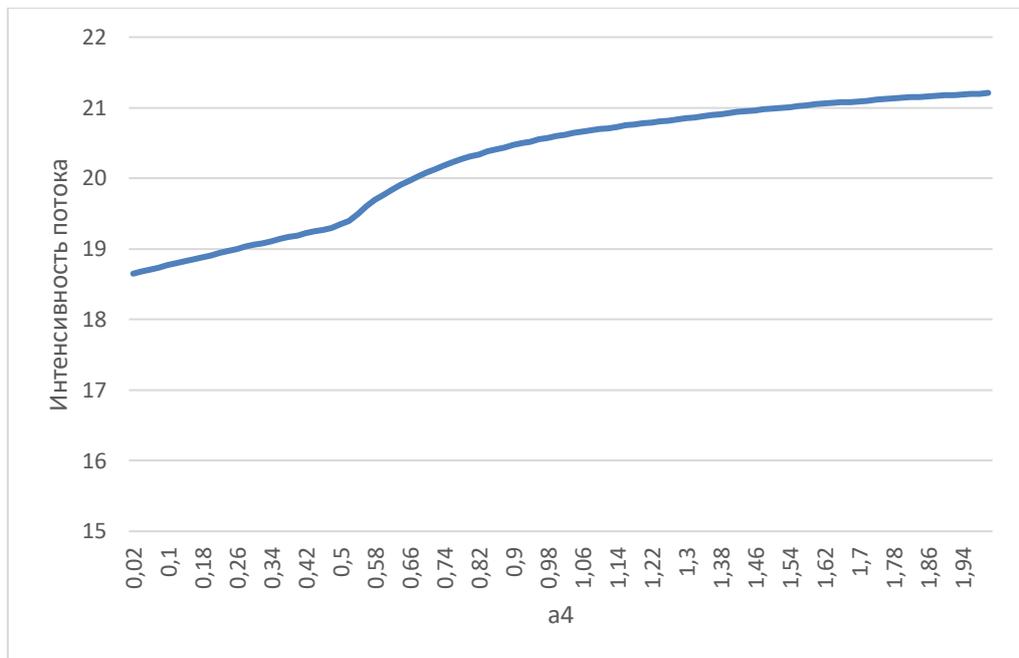


Рис. 81. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_4

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

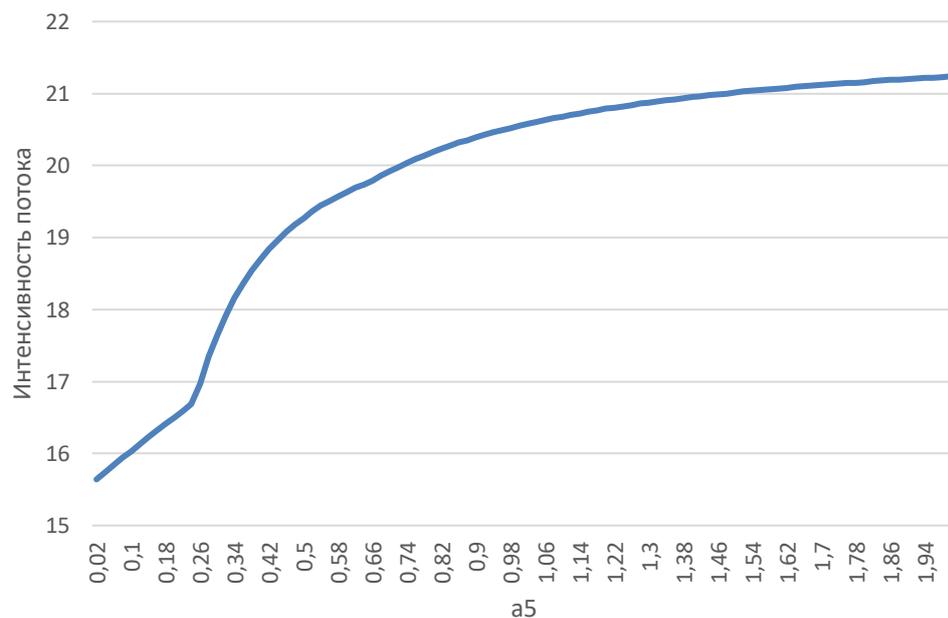


Рис. 82. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_5

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Анализ рис. 79-82 позволяет сделать следующий вывод: с увеличением параметра a_i растет поток, причем вначале скорость является постоянной, но,

начиная с некоторого значения, резко увеличивается и становится убывающей. Таким образом, увеличение эффективности использования путей на некоторой выбранной станции до определенного уровня дает неплохой вклад в увеличение интенсивности потока во всей системе грузоперевозок. Однако в силу ограниченности пропускной способности на остальных станциях, дальнейшее увеличение эффективности путей на одной станции уже не может привести к ощутимому вкладу в увеличение интенсивности грузопотока.

Исследуем зависимость стационарного потока от числа путей Δ_i . На рис. 83, 84, 85 и 86 приведены графики указанной зависимости от числа путей на второй, третьей, четвертой и пятой станциях при фиксированных значениях остальных параметров и начальных условий. Анализ рис. 83–86 позволяет заключить, что данная зависимость является близкой к линейной.

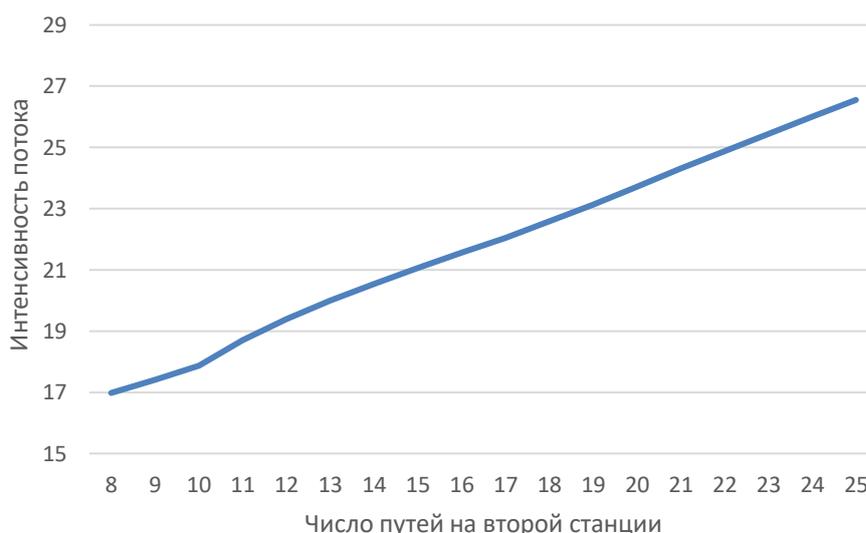


Рис. 83. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 2

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

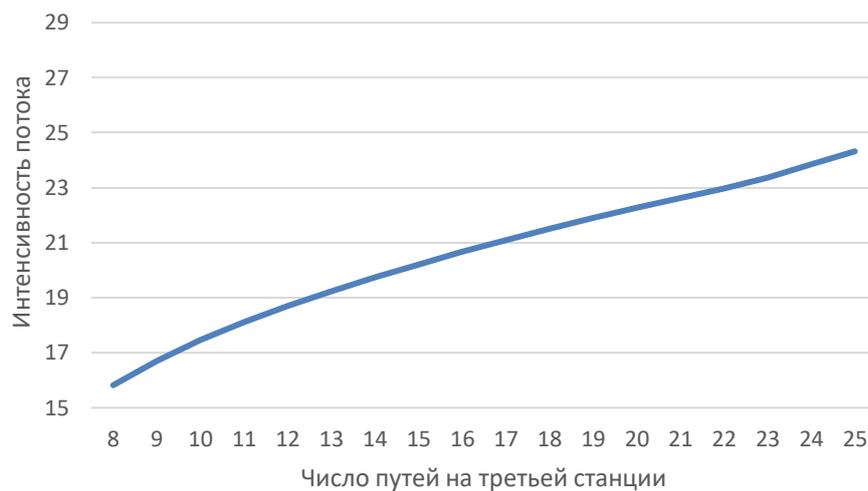


Рис. 84. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 3

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

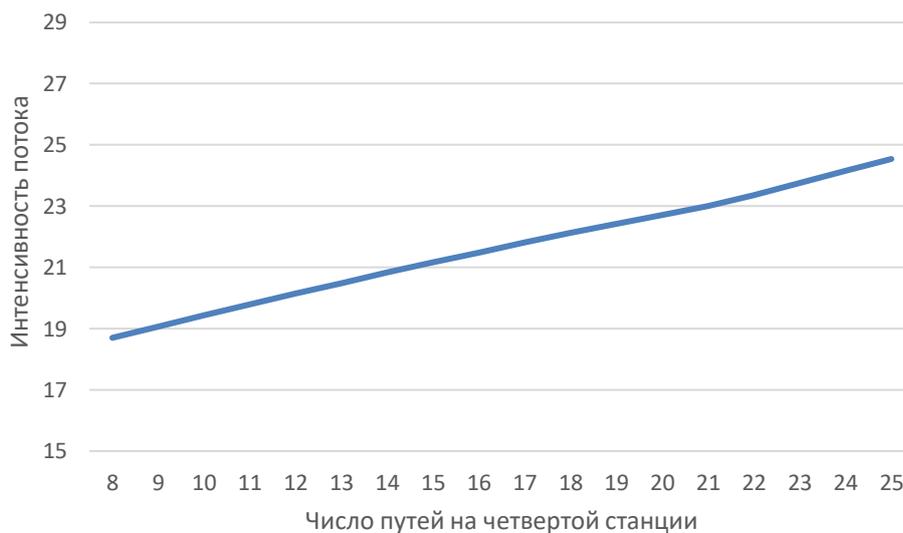


Рис. 85. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 4

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

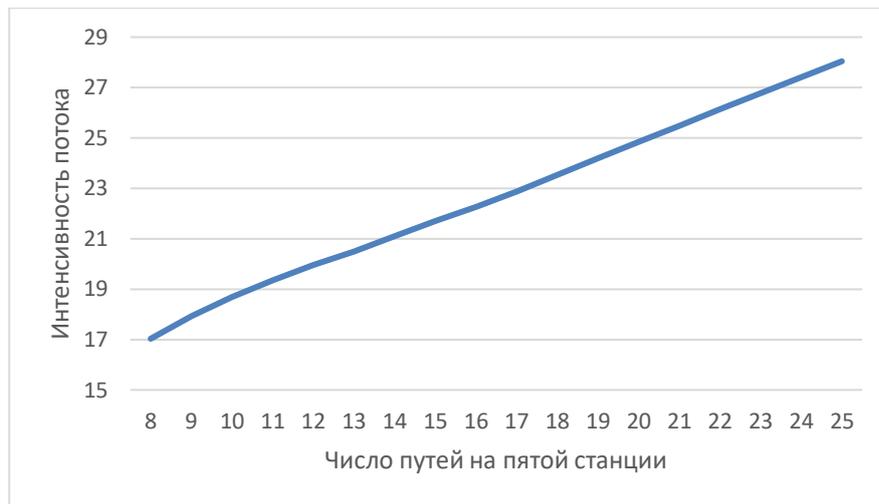


Рис. 86. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 5

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

При исследовании зависимости интенсивности стационарного потока от начальной загруженности станций \bar{c} эксперименты показали, что она является убывающей (рис. 87).



Рис. 87. График зависимости интенсивности стационарного потока от начальной загруженности станций

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Максимальная начальная загруженность станций, равная 10.3, соответствует ситуации, когда в начальный момент времени на всех станциях задействованы все пути, т.е. $z_i(0) = \Delta_i$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае организация грузопотока в рамках данной модели невозможна. Она также невозможна в случае, когда в начальный момент времени на всех станциях все пути свободны, т.е. $z_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

4.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций с учетом случайных воздействий

Вернемся к модели (87)-(89), описывающей движение грузопотока по замкнутой цепочке станций с одинаковыми характеристиками. Напомним, что установившееся значение числа задействованных путей на станциях и интенсивности потока, проходящего через них не зависит от параметра $\alpha \geq 0$. Рассмотрим модификацию модели (87)-(89) при $\alpha = 0$, в которой интенсивность грузопотока содержит в себе как детерминированную, так и случайную составляющую (Хачатрян, 2020). Введем в рассмотрение параметр λ ($0 \leq \lambda \leq 1$), с помощью которого будем разделять влияние указанных составляющих в величине потока.

В первую очередь приведем правила, согласно которым происходит движение грузов. Произвольная станция с номером $i = 2, \dots, n - 1$ принимает груз с $(i - 1)$ -ой станции с интенсивностью $\lambda\varphi(z_i) + (1 - \lambda)\varepsilon_i\varphi(z_i)$ если $(i - 1)$ -ая станция не пуста, и отправляет на $(i + 1)$ -ую станцию с интенсивностью $\lambda\varphi(z_{i+1}) + (1 - \lambda)\varepsilon_{i+1}\varphi(z_{i+1})$ если станция с номером i не пуста. Отметим, что ε_i – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Для станции с номером 1 предыдущей является станция с номером n , а для станции с номером n следующей является станция с номером 1. Следовательно, станция с номером 1 принимает груз с n -ой станции с интенсивностью $\lambda\varphi(z_1) + (1 - \lambda)\varepsilon_1\varphi(z_1)$ если n -ая станция не пуста, и отправляет на 2-ую станцию с интенсивностью $\lambda\varphi(z_2) + (1 - \lambda)\varepsilon_2\varphi(z_2)$, если

станция с номером 1 не пуста. Аналогично, станция с номером n принимает груз с $(n - 1)$ -ой станции с интенсивностью $\lambda\varphi(z_n) + (1 - \lambda)\varepsilon_n\varphi(z_n)$, если $(n - 1)$ -ая станция не пуста, и отправляет на 1-ую станцию с интенсивностью $\varphi(z_1)$, если станция с номером n не пуста.

Таким образом, интенсивность движения грузов на станциях задается с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & (\lambda + (1 - \lambda)\varepsilon_1)\varphi(z_1)\text{sign}(z_n) - \\ & -(\lambda + (1 - \lambda)\varepsilon_2)\varphi(z_2)\text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & (\lambda + (1 - \lambda)\varepsilon_i)\varphi(z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \\ & -(\lambda + (1 - \lambda)\varepsilon_{i+1})\varphi(z_{i+1})\text{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n - 1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & (\lambda + (1 - \lambda)\varepsilon_n)\varphi(z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \\ & -(\lambda + (1 - \lambda)\varepsilon_1)\varphi(z_1)\text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (96)$$

Функция $\text{sign}(\cdot)$ определяется следующим образом:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Несложно заметить, что при $\lambda = 1$, т.е. в случае отсутствия случайной компоненты в формировании интенсивности потока, система уравнений (94)-(96) повторяет систему (87)-(89) при $\alpha = 0$. Напомним, что в этом случае число задействованных путей на всех станциях сходится к значению \bar{c} , представляющему собой усреднение начальных значений компонент решений системы (94)-(96), а интенсивность потока стремится к значению $\varphi(\bar{c})$.

Поэтому в дальнейшем рассмотрим систему (94)-(96) для $\lambda < 1$. Исследование ее решений проведено с помощью численной реализации, позволившей выявить динамику потока в зависимости от параметра λ и начальной загруженности станций.

Перейдем к изложению результатов численных экспериментов, в которых функция $\varphi(\cdot)$ была определена следующим образом

$$\varphi(z_i) = a(\Delta - z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним, что функция $\varphi(\cdot)$ должна быть убывающей и удовлетворять условию $\varphi(\Delta) = 0$. Параметр a , участвующий в определении этой функции, описывает эффективность использования путей на станциях.

Заметим, что компоненты произвольного решения системы (94)-(96) с фиксированными начальными условиями, т.е. функции $z_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ можно рассматривать как реализации однопараметрических случайных величин (параметр t), а в произвольной фиксированной точке t – как реализацию некоторой случайной величины. Для оценивания ее математического ожидания и стандартного отклонения, а также ее зависимости от параметра λ проведена серия из 10 экспериментов для каждого из следующих значений параметра λ : 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, т.е. для каждого из указанных значений λ получено 10 решений системы (94)-(96) с одинаковыми начальными условиями. На основе этих экспериментов рассчитано выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение компонент решений (функций $z_i(\cdot)$) для каждого момента времени на заданном отрезке $[0, \tilde{t}]$ с определенным шагом (количество точек более 1000). Множество таких выборочных средних и выборочных стандартных отклонений представляют собой временные ряды. На рис. 88, 89 и 90 приведены графики указанных временных рядов, полученных на основе первой компоненты решения (функции $z_1(\cdot)$) при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$

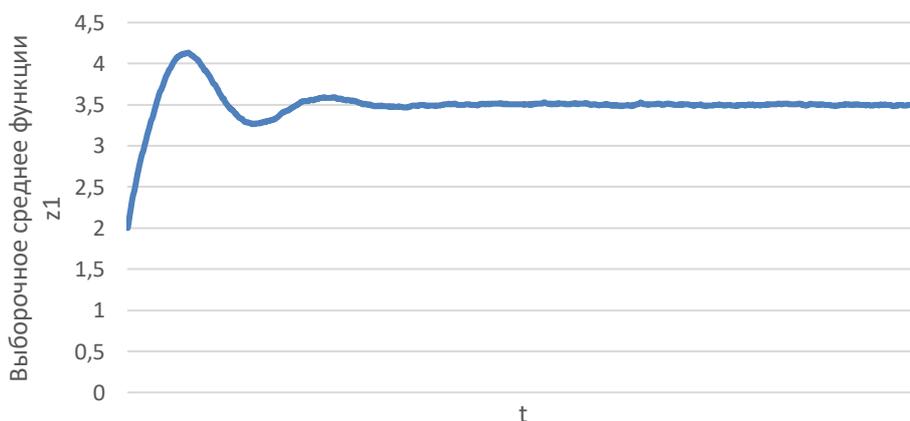


Рис. 88. Динамика выборочного среднего первой компоненты решения системы (94)-(96) при $\lambda = 0.8$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

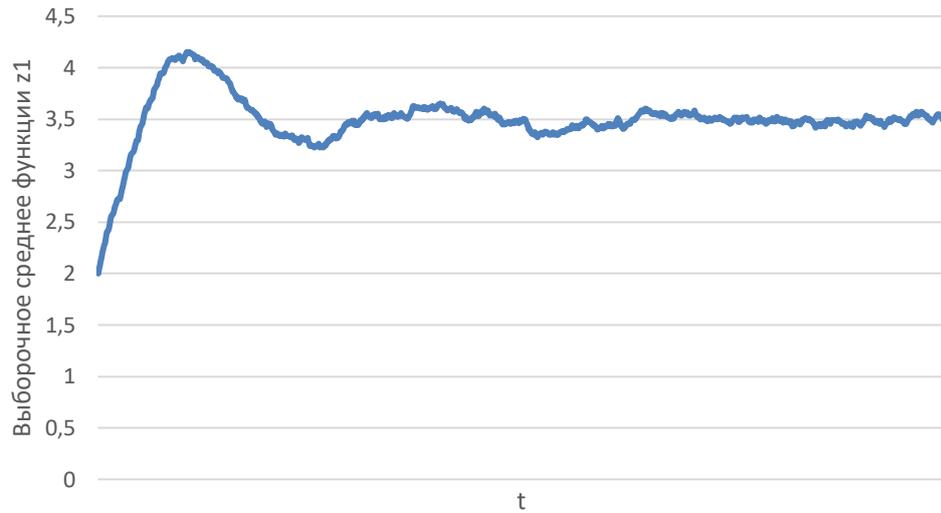


Рис. 89. Динамика выборочного среднего первой компоненты решения системы (94)-(96) при $\lambda = 0.2$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

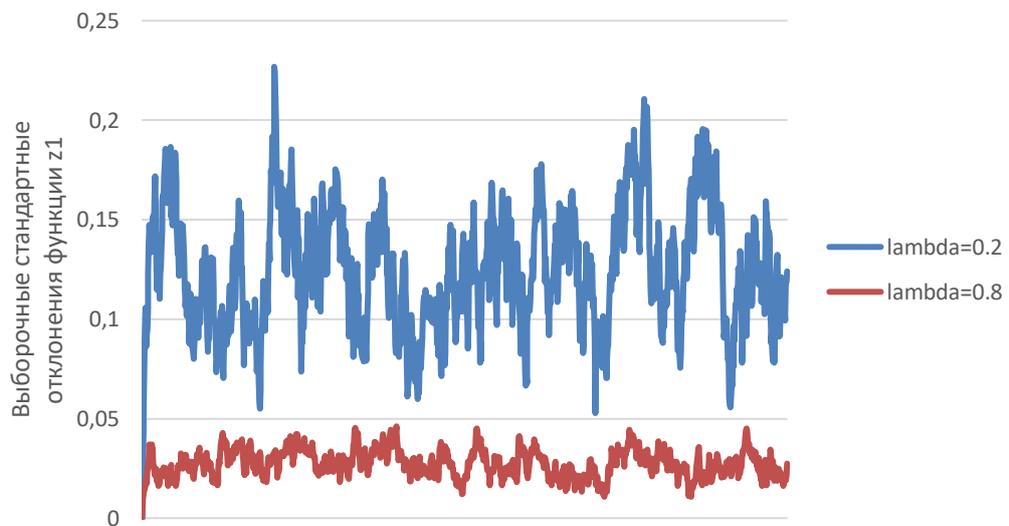


Рис. 90. Динамика выборочных стандартных отклонений первой компоненты решения системы (94)-(96) при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$.

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Несложно заметить, что временные ряды представленные на рис. 88 и рис. 89 колеблются в окрестности \bar{c} ($\bar{c} = 3.5$). Данные ряды, а также ряды, представленные на рис. 90, с помощью критерия Дики-Фуллера были проверены

на стационарность. Во всех случаях гипотезы о нестационарности ряда отвергаются на 1%-ом уровне значимости. Отметим, что аналогичные результаты получаются и для других компонент решений.

Перейдем к описанию потока, возникающего в железнодорожной сети. На рис. 91 и 92 приведены временные ряды, отражающие динамику выборочных средних интенсивности потока между станциями с номерами 1 и 2, а также динамику соответствующих выборочных стандартных отклонений при значениях параметра λ равных 0.8 и 0.2, соответственно. Отметим, что данные временные ряды также являются стационарными.

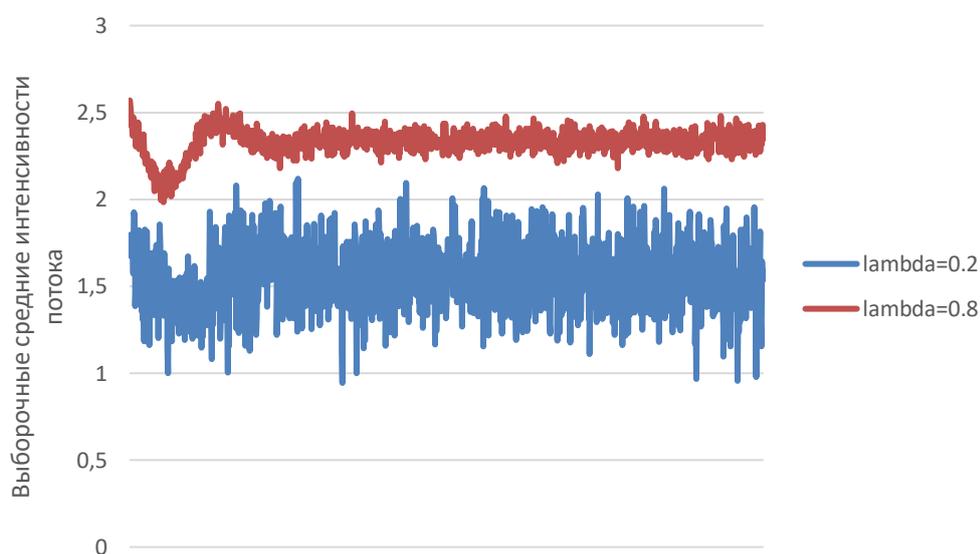


Рис. 91. Динамика выборочных средних интенсивности потока между станциями с номерами 1 и 2 при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$.

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

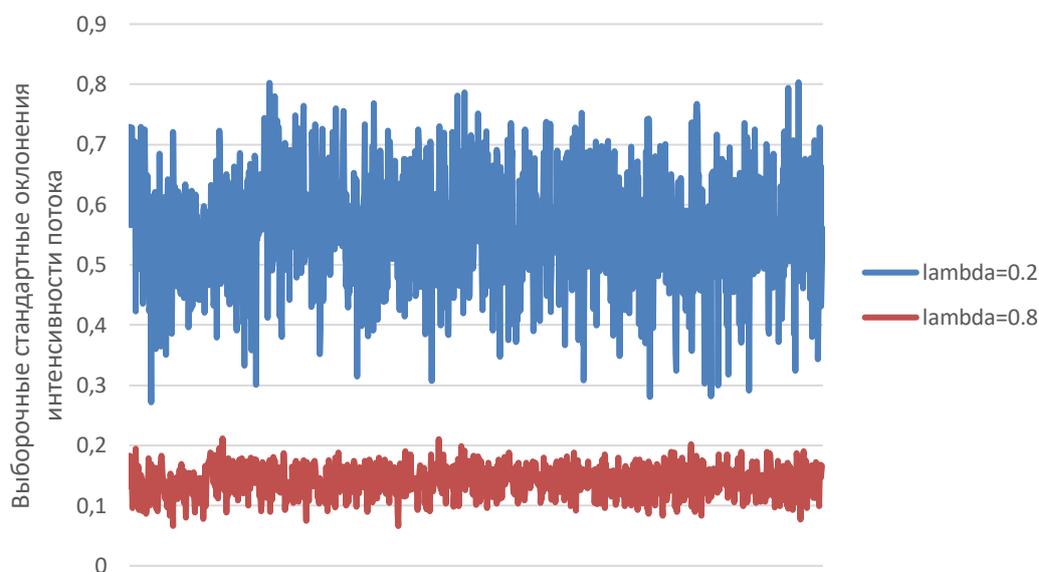


Рис. 92. Динамика выборочных стандартных отклонений интенсивности потока между станциями с номерами 1 и 2 при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$.

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как и следовало ожидать с уменьшением λ (увеличение доли случайной компоненты в потоке) интенсивность потока уменьшается при одновременном увеличении ее стандартного отклонения. Многочисленные эксперименты показывают, что аналогичная динамика наблюдается и на других участках железнодорожной сети (между другими соседними станциями).

В завершение приведем зависимость выборочного среднего и выборочного стандартного отклонения временных рядов, описывающих усреднение по результатам 10 экспериментов решений системы (94)-(96) и интенсивности потоков, возникающих в железнодорожной сети, а также их стандартных отклонений от параметра λ (рис. 93, рис. 94). Отметим, что данные характеристики рассчитываются с учетом того, что указанные временные ряды являются стационарными.

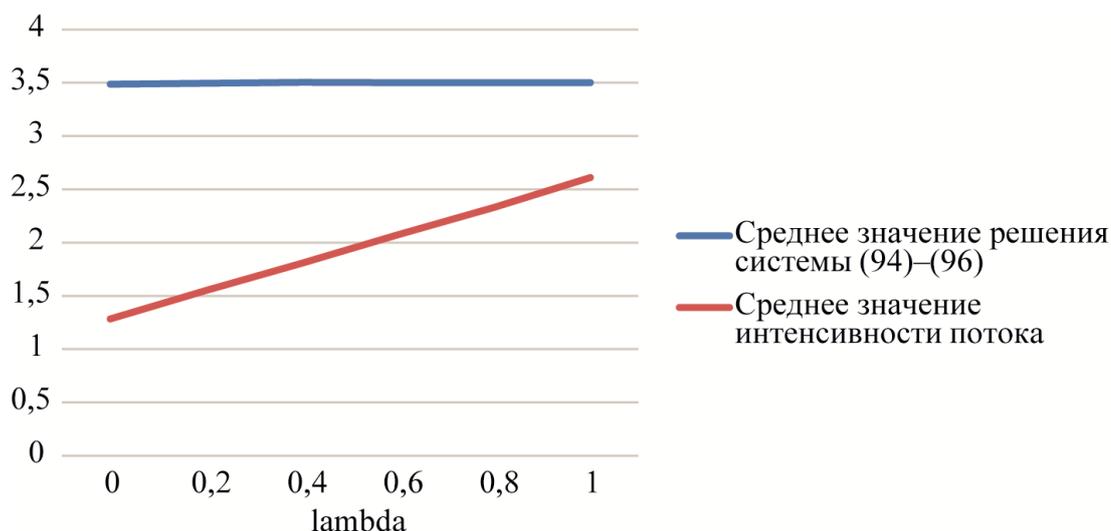


Рис. 93. Зависимость решения системы (94)–(96) и интенсивности потока от λ

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

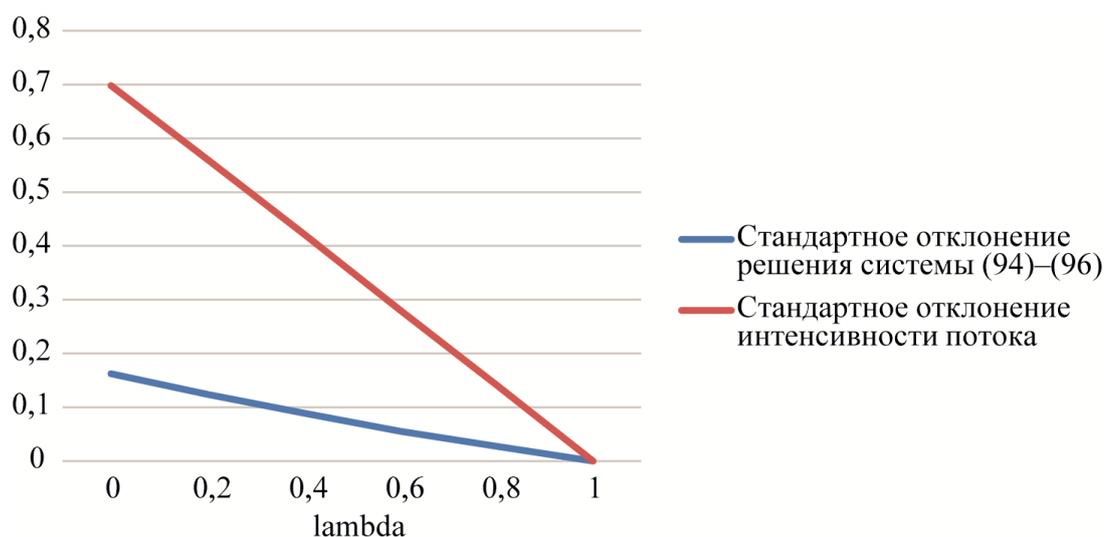


Рис. 94. Зависимость стандартного отклонения решения системы (94)–(96) и интенсивности потока от λ

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Как следует из рис. 93 выборочное среднее ряда, являющегося усреднением решения системы (94)–(96), не зависит от λ и равно среднему арифметическому начальных условий. Величина потока линейно увеличивается по мере увеличения параметра λ . Из рис. 94 следует, что как выборочное стандартное отклонение усредненного решения, так и выборочное стандартное отклонение

усредненного потока линейно убывают по параметру λ , причем скорость убывания последнего существенно выше.

4.3. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (случай идентичных станций)

Рассмотрим движение грузов на участке железнодорожной сети между двумя узловыми станциями, соединенными между собой множеством промежуточных станций. Обозначив через m число промежуточных станций, мы получаем следующее множество номеров станций $\{0, 1, \dots, m, m + 1\}$, где 0 – номер начальной узловой станции, а $m + 1$ – номер конечной узловой станции. Обозначим через n_i число путей на станции с номером i . Предполагаем, что все пути используются с одинаковой степенью эффективности.

Рассмотрим дискретные моменты времени

$$t_0, t_1, t_2, \dots; t_k = t_{k-1} + \Delta t, k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\bar{V}_{ij}(t_k)$ – объем грузов, принятых на j -ом пути i -ой станции за отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$, а $\bar{\bar{V}}_{ij}(t_k)$ – объем грузов, отправленных с j -ого пути i -ой станции за отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$. Обозначим

$$x_{ij}(t_k) = \begin{cases} \frac{\bar{V}_{ij}(t_k) - \bar{\bar{V}}_{ij}(t_k)}{\bar{V}_{ij}(t_k)}, & \text{если } \bar{V}_{ij}(t_k) > \bar{\bar{V}}_{ij}(t_k) \\ 0, & \text{если } \bar{V}_{ij}(t_k) \leq \bar{\bar{V}}_{ij}(t_k). \end{cases}$$

Очевидно, что

$$0 \leq x_{ij}(t_k) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1; \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

и характеризуют степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на j -ом пути i -ой станции в момент времени t_k . Обозначим

$$z_i(t_k) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}(t_k).$$

Также очевидно, что $0 \leq z_i(t_k) \leq 1$ и характеризует степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на i -ой станции в момент времени t_k .

Технический потенциал станции определяется максимально допустимым приростом степени несогласованности между приемом и отправкой грузов за единицу времени и задается неотрицательной убывающей функцией $\varphi(z)$ определенной на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющей условию $\varphi(1) = 0$.

Начальная узловая станция принимает грузы в зависимости от спроса на перевозки в рамках своего технического потенциала и отправляет на следующую станцию в рамках ее технического потенциала. Каждая из промежуточных станций принимает грузы в рамках своего технического потенциала и отправляет в рамках технического потенциала следующей станции. Конечная узловая станция принимает грузы в рамках своего технического потенциала и распределяет в определенном режиме. С учетом сказанного, запишем систему конечно-разностных уравнений, описывающую изменение степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях.

$$z_0(t_k) = z_0(t_{k-1}) + \left[\min(d_0, \varphi(z_0(t_{k-1}))) - \lambda\varphi(z_1(t_{k-1})) \right] \Delta t, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (97)$$

$$z_i(t_k) = z_i(t_{k-1}) + [\lambda\varphi(z_i(t_{k-1})) - \lambda\varphi(z_{i+1}(t_{k-1}))]\Delta t, \\ i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (98)$$

$$z_{m+1}(t_k) = z_{m+1}(t_{k-1}) + [\lambda\varphi(z_{m+1}(t_{k-1})) - d_{m+1}]\Delta t, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (99)$$

$$0 \leq z_i(t_k) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (100)$$

Здесь $d_0 > 0$, $0 < \lambda \leq 1$, $d_{m+1} > 0$ – параметры модели:

d_0 – характеристика спроса на перевозки;

λ – характеристика степени использования технического потенциала станций;

d_{m+1} – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Перейдем к непрерывному аналогу системы дискретно-разностных уравнений (97)-(100), представленному ниже

$$\dot{z}_0(t) = \min(d_0, \varphi(z_0(t))) - \lambda\varphi(z_1(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (101)$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda[\varphi(z_i(t)) - \varphi(z_{i+1}(t))], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (102)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \lambda\varphi(z_{m+1}(t)) - d_{m+1}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (103)$$

$$0 \leq z_i(t) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (104)$$

Далее рассмотрим функцию $\varphi(z)$, задающую технический потенциал станций, следующего вида

$$\varphi(z) = a(1 - z), \quad a > 0. \quad (105)$$

Параметр $a > 0$, участвующий в определении функции $\varphi(z)$, является характеристикой возможности станций по наращиванию грузопотока. Так как $\varphi(z) \leq a$ для всех $0 \leq z \leq 1$, то параметр d_0 , являющийся характеристикой спроса на перевозки и участвующий в уравнении (101), можно представить следующим образом:

$$d_0 = \mu a, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (106)$$

Параметр d_{m+1} , являющийся характеристикой режима распределения грузов с конечной узловой станции, представим следующим образом:

$$d_{m+1} = \gamma a, \quad \gamma > 0. \quad (107)$$

Перепишем систему (101)–(104), в которой функция $\varphi(z)$ определена согласно (105), а параметры d_0 и d_{m+1} – согласно (106) и (107) соответственно.

$$\dot{z}_0(t) = \min(\mu a, a(1 - z_0(t))) - \lambda a(1 - z_1(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (108)$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda a (z_{i+1}(t) - z_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (109)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \lambda a(1 - z_{m+1}(t)) - \gamma a, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (110)$$

$$0 \leq z_i(t) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (111)$$

Здесь μ , a , λ , γ – параметры модели:

μ ($0 < \mu \leq 1$) – характеристика диапазона спроса на перевозки, который может быть удовлетворен при имеющемся техническом потенциале станций;
 a ($a > 0$) – характеристика возможности станции по наращиванию грузопотока;

λ ($0 < \lambda \leq 1$) – характеристика степени использования технического потенциала станций;

γ ($\gamma > 0$) – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Приведем основные задачи исследования:

- определить диапазоны изменения параметров μ , a , λ , γ , при которых система грузоперевозок может бесперебойно функционировать, т.е. система (108)-(111) имеет решение, описать качественное поведение решений в зависимости от параметров;

- для заданного значения характеристики спроса на грузоперевозки (параметр μ) установить наиболее приемлемые достижимые уровни степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях, за счет управления значениями следующих характеристик: возможность станций по наращиванию грузопотока (параметр a), степень использования технического потенциала станций (параметр λ) и режим распределения грузов с конечной узловой станции (параметр γ).

4.3.1. Исследование решений системы (108)-(111)

Изучение множества решений системы (108)-(111) начнем с исследования всех решений системы дифференциальных уравнений (108)-(110).

В первую очередь выделим стационарные решения системы (108)-(110). С помощью непосредственной проверки можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 3. Система (108)-(110) при любых значениях параметров

$$0 < \mu \leq 1, \quad a > 0, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad \gamma > 0$$

таких, что $\gamma \leq \mu$ имеет стационарные решения:

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \gamma, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\gamma}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad \text{при } \gamma < \mu; \quad (112)$$

$$z_0(\cdot) \leq 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad \text{при } \gamma = \mu. \quad (113)$$

При $\gamma > \mu$ система (108)-(110) не имеет стационарных решений. ■

Перейдем к исследованию остальных решений системы (108)-(110).

Теорема 4. Произвольное решение системы (108)-(110) при $\gamma < \mu$ со временем выходит на стационарную траекторию (112), а при $\gamma = \mu$ на одну из стационарных траекторий (113).

При $\gamma > \mu$ координаты $z_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m + 1$ решения системы (108)-(110) со временем выходят на стационарный режим, указанный в (112), а функция $z_0(\cdot)$ становится линейно убывающей.

Доказательство в приложении 2. ■

Перейдем к изучению решений системы (108)-(110), удовлетворяющих ограничениям (111).

Лемма 8. Для всех значений параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и λ , $\gamma \leq \lambda \leq 1$ компоненты $z_1(\cdot)$, $z_2(\cdot)$, ... $z_{m+1}(\cdot)$ произвольного решения системы (108)-(110), удовлетворяющие ограничениям (111) в начальный момент времени, будут удовлетворять им и в последующие моменты времени.

Доказательство в приложении 2. ■

Сформулируем аналогичную лемму и для нулевой компоненты решения системы (108)-(110).

Лемма 9. Для всех значений параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и μ , $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}(\mu, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$, $\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$ такое, что при любом значении параметра λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ нулевая компонента $z_0(\cdot)$ произвольного решения системы (108)-(110) удовлетворяющая

ограничению (111) в начальный момент времени, удовлетворяет ему и в последующие моменты времени.

Доказательство в приложении 2. ■

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 5. Для любых начальных значений $0 \leq z_i(t_0) \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, m + 1$, параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и μ , $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}(\mu, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$, $\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$, такое, что при любом значении параметра λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ решение системы (108)-(111) существует и сходится к стационарному решению (112) (при $\gamma < \mu$) или к одному из стационарных решений (113), одинаковому для всех γ и a (при $\gamma = \mu$).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 4, леммы 8 и леммы 9. ■

Следствие 1. Система дифференциальных уравнений (108)-(111) имеет глобально устойчивое стационарное решение (112) и семейство устойчивых решений вида (113).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 5. ■

4.3.2. Примеры решений системы (108)-(111)

Рассмотрим несколько примеров решений системы (108)-(111). Во всех приведенных ниже примерах число станций равно 10 (начальная узловая станция, восемь промежуточных станций, конечная узловая станция), значения параметров μ , a и начальные условия зафиксированы и принимают следующие значения:

$$\mu = 0.6, \quad a = 1.5 \quad (114)$$

$$\begin{aligned} z_0(t_0) = 0.4, \quad z_1(t_0) = 0.2, \quad z_2(t_0) = 0.1, \quad z_3(t_0) = 0.4, \quad z_4(t_0) = 0.7, \\ z_5(t_0) = 0.1, \quad z_6(t_0) = 0.2, \quad z_7(t_0) = 0.3, \quad z_8(t_0) = 0.5, \quad z_9(t_0) = 0.3. \end{aligned} \quad (115)$$

Согласно теореме 5 для любых начальных значений, удовлетворяющих условию (111), параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и μ , $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}$ ($\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$), зависящее от начальных условий и параметра μ , такое, что для всех λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ решение системы (108)-(111) существует. Расчеты показали, что для указанных выше начальных условий (115) и параметра μ (114) $\tilde{\lambda}$ принимает значение равное 0.898 ($\tilde{\lambda} = 0.898$). Характер решения системы (108)-(111) зависит от значения параметра γ . В зависимости от того, меньше ли оно значения параметра μ или равно ему, различают два типа решений системы (108)-(111).

Начнем с первого случая ($\gamma < \mu$). На рис. 95, 96 и 97 приведены графики решений системы (108)-(111) при фиксированном значении параметра γ ($\gamma = 0.5$) и трех разных значений параметра λ : два на концах отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ и одно во внутренней точке.

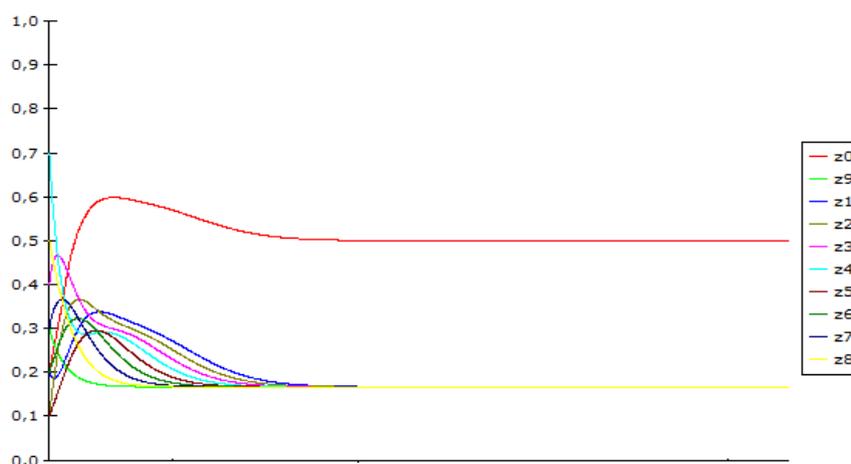


Рис. 95. График решения системы (108)-(111)

$$(\gamma = 0.5, \mu = \lambda = 0.6)$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

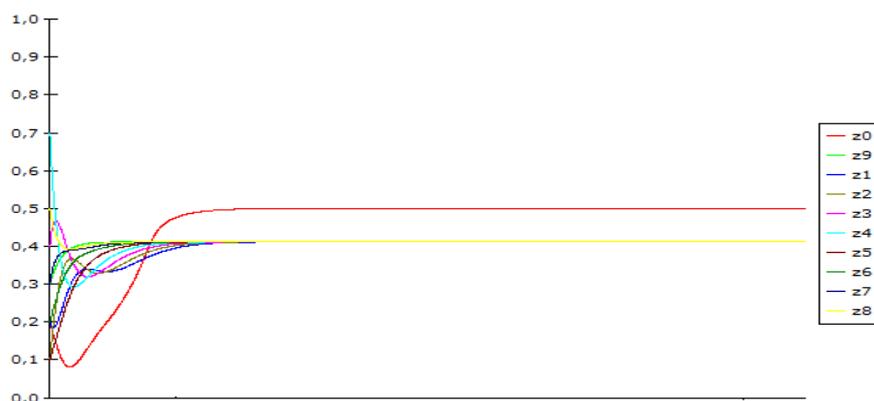


Рис. 96. График решения системы (108)-(111).

$$(\gamma = 0.5, \mu = 0.6, \lambda = 0.85)$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

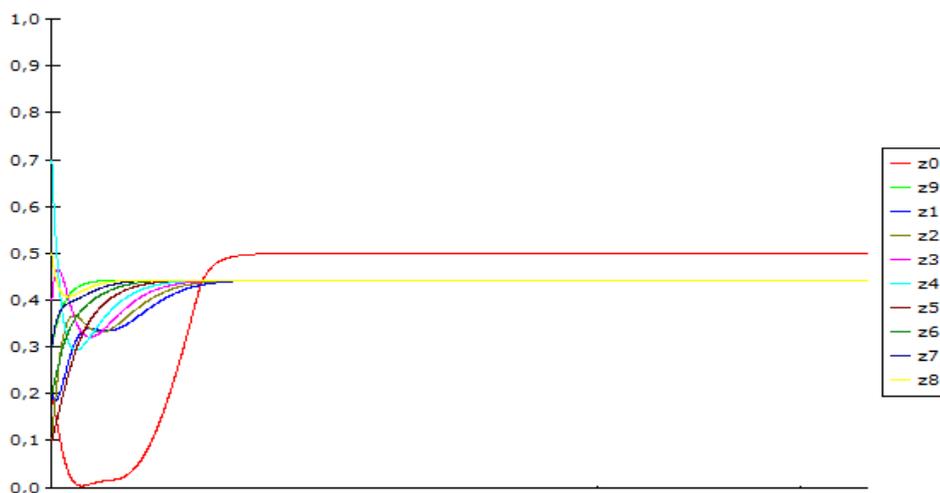


Рис. 97. График решения системы (108)-(111)

$$(\gamma = 0.5, \mu = 0.6, \lambda = \tilde{\lambda} = 0.898)$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Отметим, что в силу глобальной устойчивости стационарного решения (112) асимптотическое поведение решений, показанных на рисунках 95-97 не меняется при изменении начальных значений. Эти рисунки наглядно показывают, что установившийся режим для нулевой компоненты решения системы (108)-(111) не зависит от параметра λ , а для остальных компонент увеличение параметра λ приводит к их асимптотическому увеличению.

Напомним, что компоненты решения системы (108)-(111) определяют динамику степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях. Следовательно, в данном случае вопрос выбора параметра λ определяется однозначно, его значение следует взять равным значению параметра μ .

Перейдем ко второму случаю ($\gamma = \mu$). На рис. 98, 99 и 100 приведены графики решений системы (108)-(111) при $\gamma = 0.6$ и тех же самых значениях параметра λ , что и для предыдущего случая.

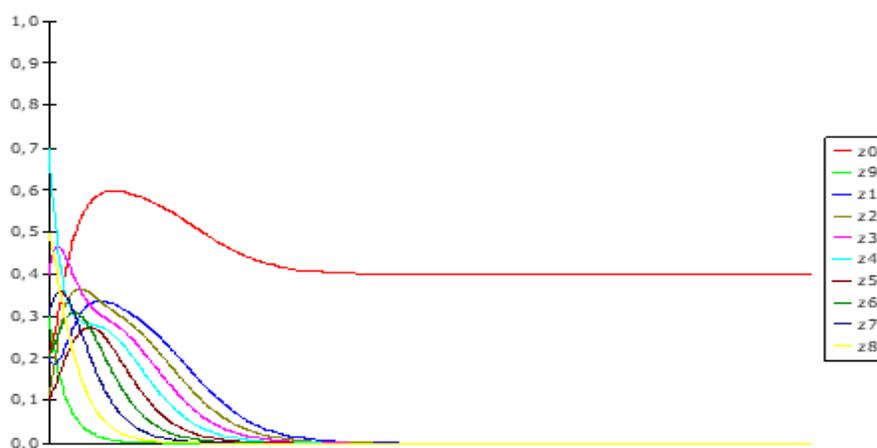


Рис. 98. График решения системы (108)-(111)

$$\gamma = \lambda = \mu = 0.6$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

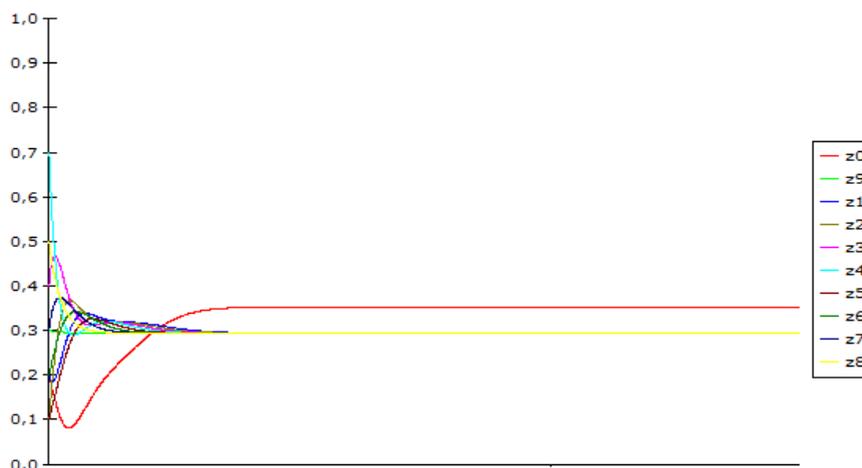


Рис. 99. График решения системы (108)-(111)

$$\gamma = \mu = 0.6, \quad \lambda = 0.85$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов



Рис. 100. График решения системы (108)-(111)

$$\gamma = \mu = 0.6, \quad \lambda = \tilde{\lambda} = 0.898$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Сравнивая рисунки 98, 99 и 100, можно заметить, что увеличение значения параметра λ приводит к асимптотическому уменьшению нулевой компоненты решения системы (108)-(111) в отличие от первого случая. Остальные компоненты решения, как и в первом случае, с увеличением значения параметра λ асимптотически увеличиваются. Это означает, что в данном случае, управляя параметром λ , можно установить нужную степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях (в том числе и на нулевой станции). Если взять λ равным μ , то со временем степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях кроме нулевой станет равной нулю, а на нулевой станции – $1 - \mu$. Если значение μ близко к единице, то такой выбор параметра λ будет оптимальным. В противном случае, все будет зависеть от конкретного значения параметра μ , а также от того, насколько важно в той или иной ситуации уменьшение степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на начальной узловой станции за счет увеличения данной характеристики на остальных станциях.

Сравнивая между собой рисунки 95 и 98, рисунки 96 и 99, а также рисунки 97 и 100, можно заключить, что с точки зрения минимизации степени

несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях целесообразно параметр γ взять равным параметру μ . Это означает, что режим распределения грузов с конечной узловой станции необходимо согласовать с характеристикой спроса на перевозки.

4.3.3. Исследование области притяжения стационарных решений системы (108)-(111) вида (113)

Согласно следствию 1, система дифференциальных уравнений (108)-(111) имеет глобально устойчивое стационарное решение (112) и семейство устойчивых решений вида (113). Выделим из этого семейства следующее стационарное решение

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1. \quad (116)$$

Как показали численные эксперименты данное стационарное решение в отличие от других стационарных решений вида (113), представленных ниже

$$z_0(\cdot) < 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1 \quad (117)$$

и являющихся локально устойчивыми, имеет определенную область притяжения.

Обозначим

$$\tilde{c}(\mu, \lambda) = \frac{(m+1)(1-\mu/\lambda)+1-\mu}{m+2}.$$

Анализ большого количества численных экспериментов позволил описать область притяжения стационарного решения (116). Результаты данного анализа приведем в следующем утверждении.

Утверждение 4. *Для любых значений параметров $0 < \mu \leq 1$, $a > 0$, $\mu \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$, $\gamma = \mu$ решение системы (108)-(111) сходится к стационарному решению (116), если начальные значения удовлетворяют условию*

$$z_i(t_0) \geq \tilde{c}(\mu, \lambda), \quad i = 0, 1, \dots, m + 1.$$

В противном случае, т.е. если выполняется условие

$$z_i(t_0) \leq \tilde{c}(\mu, \lambda), \quad i = 0, 1, \dots, m + 1 \text{ и } \exists \bar{i} \in \{0, 1, \dots, m + 1\}, \text{ такой, что}$$

$$z_{\bar{i}}(t_0) < \tilde{c}(\mu, \lambda),$$

то решение системы (108)-(111) сходится к одному из стационарных решений (117). ■

4.4. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (общий случай)

Перейдем к модификации модели, представленной в параграфе 4.3. В отличие от исходной модели она описывает общий случай, т.е. предполагается, что станции имеют разные технические потенциалы. Технический потенциал произвольной станции с номером i , $i = 0, 1, \dots, m + 1$ определяется максимально допустимым приростом степени несогласованности между приемом и отправкой на данной станции за единицу времени и задается непрерывной убывающей функцией $\varphi_i(z)$, определенной на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющей условию $\varphi_i(1) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, m + 1$. Кроме того, каждая станция определяет степень использования своего технического потенциала. Очевидно, при таких предположениях мы получаем следующую модификацию системы (101)-(104), которая описывает динамику степеней несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях:

$$\dot{z}_0(t) = \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))) - \lambda_1 \varphi_1(z_1(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (118)$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i \varphi_i(z_i(t)) - \lambda_{i+1} \varphi_{i+1}(z_{i+1}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (119)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \lambda_{m+1} \varphi_{m+1}(z_{m+1}(t)) - d_{m+1}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (120)$$

$$0 \leq z_i(t) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (121)$$

Здесь $d_0 > 0$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $d_{m+1} > 0$ – параметры модели:

d_0 – характеристика спроса на перевозки;

λ_i – характеристика степени использования технического потенциала станции с номером i ;

d_{m+1} – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Далее рассмотрим функцию $\varphi_i(z)$, задающую технический потенциал станции с номером i , следующего вида

$$\varphi_i(z) = a_i(1 - z), \quad a_i > 0. \quad (122)$$

Параметр $a_i > 0$, участвующий в определении функции $\varphi_i(z)$, является характеристикой возможности станции с номером i по наращиванию грузопотока. Параметр d_0 , являющийся характеристикой спроса на перевозки и участвующий в уравнении (118), представим следующим образом:

$$d_0 = \mu a_0, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (123)$$

Перепишем систему (118)-(121), в которой функция $\varphi_i(z)$ определена согласно (122), а параметр d_0 согласно (123).

$$\dot{z}_0(t) = \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))) - \lambda_1 a_1(1 - z_1(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (124)$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i a_i (1 - z_i(t)) - \lambda_{i+1} a_{i+1} (1 - z_{i+1}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (125)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \lambda_{m+1} a_{m+1} (1 - z_{m+1}(t)) - d_{m+1}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (126)$$

$$0 \leq z_i(t) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (127)$$

Здесь μ , a_i , λ_i , d_{m+1} – параметры модели:

μ ($0 < \mu \leq 1$) – характеристика диапазона спроса на перевозки, который может быть удовлетворен при имеющемся техническом потенциале станций;

a_i ($a_i > 0$) – характеристика возможности станции с номером i по наращиванию грузопотока;

λ_i ($0 < \lambda_i \leq 1$) – характеристика степени использования технического потенциала станции с номером i ;

d_{m+1} ($d_{m+1} > 0$) – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Приведем основные задачи исследования:

- определить диапазоны изменения параметров μ , a_i , λ_i , d_{m+1} , при которых система грузоперевозок может бесперебойно функционировать, т.е. система (124)-(127) имеет решение.

- для заданного значения характеристики спроса на грузоперевозки (параметр μ) установить наиболее приемлемые достижимые уровни степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях, за счет управления значениями следующих характеристик: возможности станций по наращиванию грузопотока (параметр a_i), степени использования технического потенциала станций (параметр λ_i) и режима распределения грузов с конечной узловой станции (параметр d_{m+1}).

4.4.1. Исследование решений системы (124)-(126)

Изучение множества решений системы (124)-(127) начнем с исследования всех решений системы дифференциальных уравнений (124)-(126).

В первую очередь выделим стационарные решения системы (124)-(126). С помощью непосредственной проверки можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 5. Система (124)-(126) при любых значениях параметров

$$0 < \mu \leq 1, \quad a_i > 0, \quad 0 < \lambda_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1, \quad d_{m+1} > 0$$

таких, что $d_{m+1} \leq \mu a_0$ имеет стационарные решения:

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad \text{при } d_{m+1} < \mu a_0; \quad (128)$$

$$z_0(\cdot) \leq 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad \text{при } d_{m+1} = \mu a_0. \quad (129)$$

При $d_{m+1} > \mu a_0$ система (124)-(126) не имеет стационарных решений. ■

Перейдем к исследованию остальных решений системы (124)-(126).

Теорема 6. Произвольное решение системы (124)-(126) при $d_{m+1} < \mu a_0$ со временем выходит на стационарную траекторию (128), а при $d_{m+1} = \mu a_0$ на одну из стационарных траекторий (129). При $d_{m+1} > \mu a_0$ координаты $z_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m + 1$ решения системы (124)-(126) со временем выходят на стационарный режим, указанный в (128), а функция $z_0(\cdot)$ становится линейно убывающей.

Доказательство в приложении 2. ■

4.4.2. Исследование решений системы (124)-(127)

Перейдем к изучению решений системы (124)-(126), удовлетворяющих ограничениям (127).

Лемма 10. Для всех значений параметров $a_i > 0$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m + 1$, $d_{m+1} > 0$, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 a_1 \geq \lambda_2 a_2 \geq \dots \lambda_m a_m \geq \lambda_{m+1} a_{m+1} \geq d_{m+1}$$

компоненты $z_1(\cdot)$, $z_2(\cdot)$, ... $z_{m+1}(\cdot)$ произвольного решения системы (124)-(126) удовлетворяющие ограничениям (127) в начальный момент времени, будут удовлетворять им и в последующие моменты времени.

Доказательство в приложении 2. ■

Сформулируем аналогичную лемму и для нулевой компоненты решения системы (124)-(126).

Лемма 11. Для всех значений параметров $0 < \mu \leq 1$, $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, m + 1$, удовлетворяющих условию $a_0 \leq a_1$, существует $\tilde{\lambda}_1(\mu, a_0, a_1, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$, $\frac{a_0}{a_1} \mu \leq \tilde{\lambda}_1 \leq 1$ такое, что для всех λ_1 из отрезка $[\frac{a_0}{a_1} \mu, \tilde{\lambda}_1]$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 2, 3, \dots, m + 1$, $d_{m+1} > 0$, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 a_1 \geq \lambda_2 a_2 \geq \dots \lambda_m a_m \geq \lambda_{m+1} a_{m+1} \geq d_{m+1}$$

нулевая компонента $z_0(\cdot)$ произвольного решения системы (124)-(126) удовлетворяющая ограничению (127) в начальный момент времени, удовлетворяет ему и в последующие моменты времени.

Доказательство в приложении 2. ■

Сформулируем основной результат данного исследования.

Теорема 7. Для любых начальных значений $0 \leq z_i(t_0) \leq 1$, параметров $0 < \mu \leq 1$, $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, m + 1$, удовлетворяющих условию $a_0 \leq a_1$, существует $\tilde{\lambda}_1(\mu, a_0, a_1, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$, $\frac{a_0}{a_1}\mu \leq \tilde{\lambda}_1 \leq 1$ такое, что для всех λ_1 из отрезка $[\frac{a_0}{a_1}\mu, \tilde{\lambda}_1]$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 2, 3, \dots, m + 1$, $d_{m+1} > 0$, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 a_1 \geq \lambda_2 a_2 \geq \dots \lambda_m a_m \geq \lambda_{m+1} a_{m+1} \geq d_{m+1}$$

решение системы (124)-(127) существует и сходится к стационарному решению (128) (при $d_{m+1} < \mu a_0$) или к одному из стационарных решений (129), одинаковому для всех d_{m+1} и a_i (при $d_{m+1} = \mu a_0$).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 6, леммы 10 и леммы 11. ■

Следствие 2. Система дифференциальных уравнений (124)-(127) имеет глобально устойчивое стационарное решение (128) и семейство устойчивых решений вида (129).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 7. ■

Следствие 3. Для любых начальных значений $0 \leq z_i(t_0) \leq 1$, параметров $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, m + 1$, удовлетворяющих условию $a_i \geq a_0$, $0 < \mu \leq 1$, $\bar{\lambda}_i = \frac{a_0}{a_i}\mu$, $i = 1, \dots, m + 1$ и $d_{m+1} = \mu a_0$ решение системы (124)-(127) существует и сходится к одному из стационарных решений вида

$$z_0(\cdot) \leq 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m + 1.$$

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теорем 6 и 7. ■

Перейдем к интерпретации основных результатов. Перед этим напомним, что исследование данной модели, описываемой системой (124)-(127) сводится к решению двух основных задач.

Первая – определение диапазонов изменения параметров модели, при которых указанная система имеет решение (обеспечение бесперебойного грузопотока). Теорема 6 определяет указанные диапазоны.

Вторая задача – для заданного значения характеристики спроса на грузоперевозки установить наиболее приемлемые достижимые уровни степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях с помощью управляющих параметров. Решение данной задачи представлено в следствии 3. Согласно ему, для любых значений степеней несогласованности между приемом и отправкой грузов в начальный момент времени, в случае если возможности всех станций по наращиванию грузопотока начиная с первой не меньше чем возможности нулевой станции (начальной узловой) всегда можно таким образом задействовать потенциалы станций (подобрать значения параметра λ_i) и согласовать режим распределения грузов с конечной узловой станции со спросом на грузоперевозки (подобрать значение параметра d_{m+1}), что степень несогласованности на всех станциях кроме начальной узловой со временем станет равна нулю. Соответствующая характеристика на начальной узловой станции будет зависеть как от характеристики спроса на грузоперевозки, так и от начальных условий.

4.4.3. Модификация модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями

Основной результат исследования системы (124)-(127), описывающий динамику степени несогласованности между приемом и отправкой на станциях приведен в теореме 7, которая дает достаточные условия существования решений системы (124)-(127). Это может привести к потере целых семейств решений, описывающих важные установившиеся режимы исследуемой характеристики. В связи с этим модифицируем представленную выше модель.

Она будет заключаться в корректировке правил взаимодействия станций, а именно: отправка груза с произвольной станции с номером i , $i = 0, 1, \dots, m$ на следующую станцию (с номером $i + 1$) производится как с учетом технического потенциала следующей станции, так и объема грузов на данной станции. Аналогично, конечная узловая станция распределяет грузы с определенной интенсивностью, учитывающей объем грузов на ней.

С учетом сказанного, запишем систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях

$$\dot{z}_0(t) = \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))) - \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \\ & \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))) - \min(z_1(t) + \min(z_0(t) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \\ & \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \quad (131)$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \min(z_{i-1}(t) + \min(z_{i-2}(t) + \\ & + \dots + \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \\ & \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \dots, \lambda_i \varphi_i(z_i(t))) - \\ & - \min(z_i(t) + \min(z_{i-1}(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \\ & \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \dots, \lambda_{i+1} \varphi_{i+1}(z_{i+1}(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \quad (132)$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m+1}(t) = & \min(z_m(t) + \min(z_{m-1}(t) + \\ & + \dots + \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \\ & \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \dots, \\ & \lambda_{m+1} \varphi_{m+1}(z_{m+1}(t))) - \min(z_{m+1}(t) + \\ & + \min(z_m(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \end{aligned}$$

$$\lambda_2 \varphi_2(z_2(t)), \dots, \lambda_{m+1} \varphi_{m+1}(z_{m+1}(t)),$$

$$d_{m+1}), t \in [t_0, +\infty). \quad (133)$$

Отметим, что конструкция правых частей системы (130)-(133) гарантирует автоматическое выполнение условия (127).

Аналитическое исследование системы (130)-(133) крайне затруднительно. В связи с этим она была исследована численно. Приведем результаты ее численного исследования для определенного класса функций $\varphi_i(z)$.

4.4.4. Результаты численных экспериментов

Перейдем к изложению результатов численной реализации системы (130)-(133), в которой функции $\varphi_i(z)$ линейны, т.е. перепишем систему дифференциальных уравнений (130)-(133), в которой функции $\varphi_i(z)$ определены согласно (122), а параметр d_0 – согласно (123).

$$\dot{z}_0(t) = \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))) -$$

$$-\min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))),$$

$$\lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), t \in [t_0, +\infty), \quad (134)$$

$$\dot{z}_1(t) = \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))),$$

$$\lambda_1 a_1(1 - z_1(t))) - \min(z_1(t) + \min(z_0(t) +$$

$$+\min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))),$$

$$\lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), t \in [t_0, +\infty), \quad (135)$$

.....

$$\dot{z}_i(t) = \min(z_{i-1}(t) + \min(z_{i-2}(t) +$$

$$+\dots + \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))),$$

$$\lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, \lambda_i a_i(1 - z_i(t))) -$$

$$-\min(z_i(t) + \min(z_{i-1}(t) + \dots + \min(z_0(t) +$$

$$+\min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))),$$

$$\lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, \lambda_{i+1} a_{i+1}(1 - z_{i+1}(t))),$$

$$t \in [t_0, +\infty), \quad (136)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{m+1}(t) = & \min(z_m(t) + \min(z_{m-1}(t) + \\
& + \dots + \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \\
& \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, \\
& \lambda_{m+1} a_{m+1}(1 - z_{m+1}(t))) - \min(z_{m+1}(t) + \\
& + \min(z_m(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\
& + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \\
& \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, a_{m+1}(1 - z_{m+1}(t))), \\
& d_{m+1}), \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{137}
\end{aligned}$$

Численная реализация системы дифференциальных уравнений (134)-(137) позволила исследовать свойства ее решений. Основным результатом данного исследования представим в виде следующих двух утверждений.

Утверждение 6. Система дифференциальных уравнений (134)-(137) имеет бесконечное множество стационарных решений вида

$$z_i(\cdot) \equiv c_i, \quad 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1,$$

и произвольное ее решение сходится к одному из них в зависимости от параметров $\mu, a_i, \lambda_i, i = 0, 1, \dots, m + 1, d_{m+1}$ и начальных значений. ■

Введем обозначение

$$d = \lambda_k a_k = \min(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_{m+1} a_{m+1})$$

и выделим следующие стационарные решения системы (134)-(137):

$$z_i(\cdot) \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, m + 1; \tag{138}$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, \dots, m + 1; \tag{139}$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_i a_i}, & i = 1, \dots, k - 1 \\ 0, & i = k, \dots, m + 1; \end{cases} \tag{140}$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_i a_i}, & i = 1, \dots, k-1, \\ 0, & i = k, \dots, m \end{cases},$$

$$0 \leq z_{m+1}(\cdot) \leq 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1} a_{m+1}}; \quad (141)$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1. \quad (142)$$

Каждое из указанных стационарных решений существует при определенных условиях, которым должны удовлетворять параметры системы уравнений (134)-(137). Приведем эти условия:

$$d_0 < d \quad \text{и} \quad d_0 < d_{m+1} \quad (\text{решение (138)}), \quad (143)$$

$$d < d_0 \quad \text{и} \quad d < d_{m+1} \quad (\text{решение (139) и (140)}), \quad (144)$$

$$d_{m+1} < d_0 \quad \text{и} \quad d_{m+1} < d \quad (\text{решение (140)}), \quad (145)$$

$$d_0 = d = d_{m+1} \quad (\text{решения (138), (139), (140), (141), (142)}). \quad (146)$$

Следующее утверждение уточняет характер решений системы уравнений (134)-(137).

Утверждение 7. *Для любых начальных значений*

$$0 \leq z_i(0) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1,$$

параметров

$$0 < \mu \leq 1, \quad a_i > 0, \quad 0 < \lambda_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad d_{m+1} > 0$$

решение системы (134)-(137) сходится к:

- *стационарному решению (138) при выполнении условия (143);*

- *стационарному решению (140) при выполнении условия (144);*

- *стационарному решению (142) при выполнении условия (145). ■*

На рис. 101, 102 и 103 показана сходимость к указанным стационарным решениям.

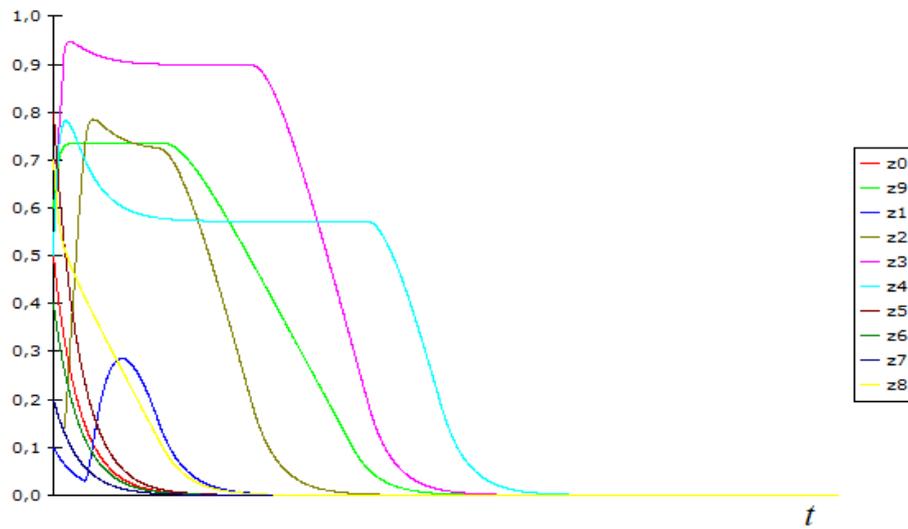


Рис 101. Сходимость к стационарному решению (138)

$$(d_0 = 1.6, d = 1.8, d_{m+1} = 1.9)$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

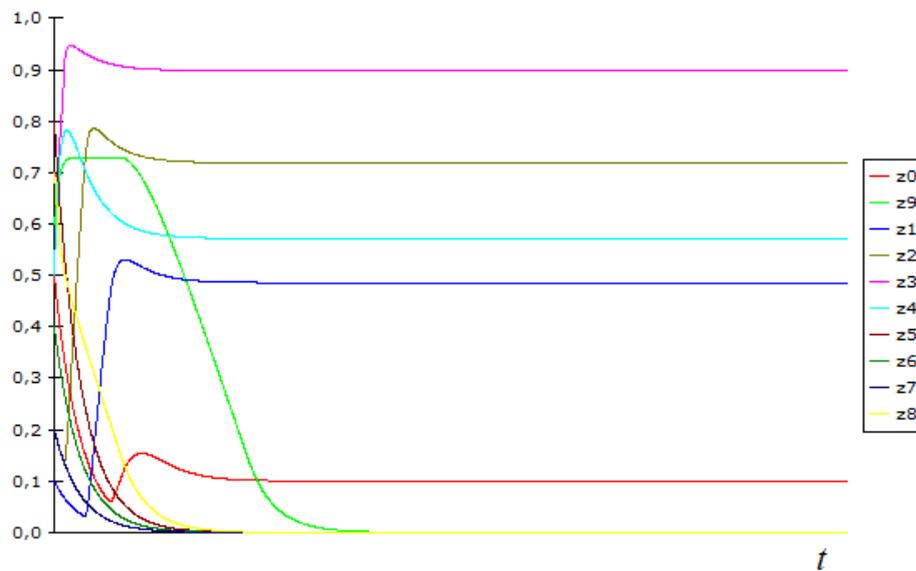


Рис 102. Сходимость к стационарному решению (140)

$$(d_0 = 1.9, d = 1.8, d_{m+1} = 1.95)$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

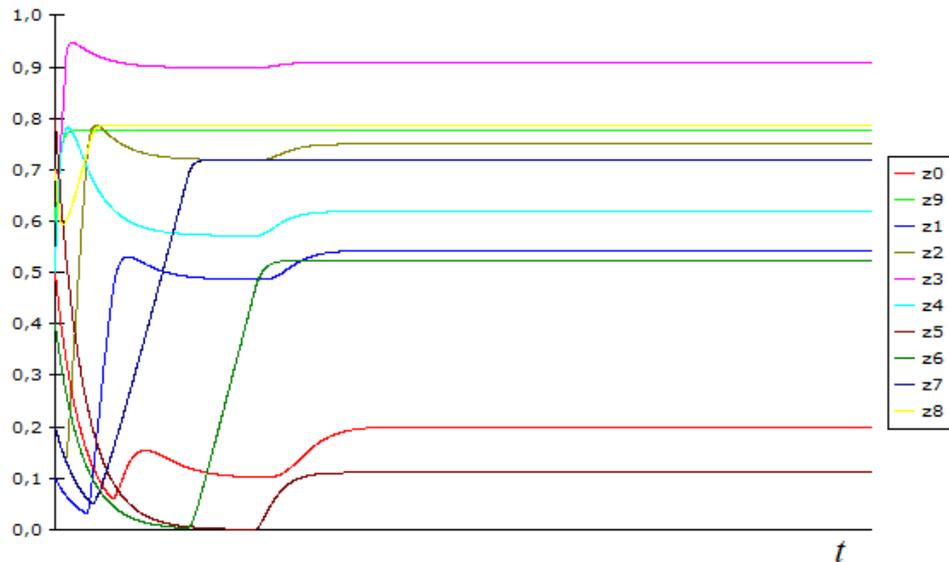


Рис 103. Сходимость к стационарному решению (142)

$$(d_0 = 1.9, d = 1.8, d_{m+1} = 1.6)$$

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Таким образом, стационарные решения (138), (140) и (142) при выполнении соответствующих ограничений на параметры системы уравнений (134)-(137) (условия (143), (144) и (145)) являются глобально устойчивыми. Других глобально устойчивых стационарных решений система уравнений (134)-(137) не имеет.

Используя результат утверждения 7, определим такие значения параметров $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m + 1$ и d_{m+1} , при которых степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях со временем будет минимальной.

Опишем данную процедуру:

а) определить $a_j = \min(a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$;

б) параметру λ_j присвоить максимальное значение из заданного диапазона, т.е.

$$\lambda_j = 1;$$

с) остальные параметры λ_i определить следующим образом:

$$\lambda_i = \frac{a_j}{a_i}, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad i \neq j;$$

д) подобрать d_{m+1} таким образом, чтобы

$$d_{m+1} \geq \max(d_0, d), \quad \text{где } d_0 = \mu a_0, \quad d = a_j.$$

После выполнения данной процедуры параметры модели $\lambda_i, a_i, i = 1, 2, \dots, m+1$ и d_{m+1} будут удовлетворять следующим условиям:

$$\lambda_1 a_1 = \lambda_2 a_2 = \dots = \lambda_{m+1} a_{m+1} = d. \quad (147)$$

$$d_{m+1} \geq \max(d_0, d). \quad (148)$$

Из утверждения 7 следует, что при выполнении условий (147)-(148) произвольное решение системы (134)-(137) стремится к:

- стационарному решению (138), если $d_0 < d$;
- стационарному решению

$$z_0(.) \equiv 1 - \frac{d}{a_0}, \quad z_i(.) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad \text{если } d_0 > d \quad (149)$$

Дальнейшее численное исследование системы (134)-(137) позволило получить более общий результат. Приведем его в следующем утверждении.

Утверждение 8. *Для любых начальных значений*

$$0 \leq z_i(0) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1,$$

параметров

$$0 < \mu \leq 1, \quad a_i > 0, \quad 0 < \lambda_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad d_{m+1} > 0,$$

удовлетворяющих условию (147)-(148) решение системы (134)-(137) сходится к:

- стационарному решению (138), если $d_0 < d$;

- стационарному решению (149) в противном случае. ■

Таким образом, управляя параметрами λ_i , $i = 1, 2, \dots, m + 1$ и d_{m+1} (т.е. задав правильным образом степень использования технического потенциала станций и режим распределения грузов с конечной узловой станцией), можно добиться того, что со временем степень несогласованности между приемом и отправкой грузов по крайней мере на всех станциях кроме начальной узловой станет равна нулю.

4.5. Выводы по главе 4

В данной главе представлен еще один подход к организации железнодорожных грузоперевозок в режиме реального времени, который применяется при отсутствии стабильно высокого спроса на них. В этом случае нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере, и как следствие использовать зоны временного хранения, в которые направляется часть грузов в случае чрезмерной загрузки станций. Главной задачей является синхронизация входных и выходных потоков на станциях. Основой для синхронизации является характеристика станции, называемая степенью несогласованности между приемом и отправкой грузов, которая определяет дисбаланс между объемом входных и выходных грузов за единицу времени. Данная характеристика меняется в диапазоне от нуля до единицы. Абсолютная синхронизация входных и выходных потоков достигается в случае, когда степень несогласованности между приемом и отправкой грузов равна нулю. Применение данного подхода к железнодорожной линии, расположенной между двумя узловыми станциями, дало следующий результат: степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях со временем сходится к некоторым фиксированным значениям (сходимость к стационарным режимам). Сходимость к тому или иному стационарному режиму зависит как от начальных значений степеней несогласованности станций, так и от параметров модели, характеризующих спрос на грузоперевозки, степень использования

технического потенциала станций и режим распределения грузов с конечной узловой станции. Исследование позволило выявить три конфигурации параметров модели при которых сходимость к стационарному режиму является глобально устойчивой, т.е. не зависящей от начальных условий. Первая конфигурация параметров модели соответствует низкому спросу на грузоперевозки. В этом случае степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях со временем становится равной нулю. Вторая конфигурация параметров модели соответствует уровню спроса, превышающего техническую возможность хотя бы одной станции, при этом распределение грузов с конечной узловой станции является интенсивным. В таком случае степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на некоторых станциях со временем становится равной нулю, тогда как на других устанавливается на разных ненулевых значениях. Если же в отличие от второй конфигурации параметров интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции низкая (третья конфигурация параметров), то со временем на всех станциях степень несогласованности между приемом и отправкой грузов устанавливается исключительно на ненулевых значениях. Основным результатом исследования заключается в следующем: для заданного спроса на грузоперевозки можно таким образом задействовать потенциал станций и распределять грузы с конечной узловой станции, чтобы со временем степень несогласованности между приемом и отправкой грузов по крайней мере на всех станциях кроме начальной узловой станет равна нулю, независимо от их значений в начальный момент времени.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНОВ ГРУЗОВЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПЕРЕВОЗОК, ВЫПОЛНЯЕМЫХ ТРАНСПОРТНЫМ ОПЕРАТОРОМ⁵

Рассматривается задача управления парком грузовых вагонов транспортным оператором, целью которого является максимизация прибыли (Белоусов, Неволин, Хачатрян; 2020). Составление плана осуществляется на месяц вперед в момент, когда известна вся необходимая для этого информация. Для осуществления планирования необходима информация о начальном расположении вагонов в следующем месяце, а также готовый список заявок на транспортировку грузов. Под начальным расположением вагонов в плановом месяце подразумевается то, на какой станции и в какой день планового месяца окажется каждый из вагонов, отправленный в предыдущем месяце. Список заявок состоит из запросов со стороны клиентов, в каждом из которых указывается груз, его объем (в вагонах), пункт отправления и пункт назначения. Также в заявке указывается ставка, которую заказчик заплатит за каждый вагон перевезенного груза. Допускается ситуация, при которой начало исполнения заявки будет иметь место в плановом месяце, но ее завершение окажется в месяце, следующим за плановым. В этом случае вся прибыль, связанная с исполнением такой заявки, будет учтена в плановом месяце. Предполагается, что заказчику неважно, в какой именно день планового месяца будет исполнен его заказ: если оператор берется за выполнение данного заказа, то он будет исполнен в наиболее удобный для транспортного оператора день (или несколько дней, если заявка будет исполняться несколькими рейсами). Транспортный оператор не обязан выполнять все поступающие заявки: как правило, он физически не

⁵ Данная глава написана на основании работ автора:

Моделирование и оптимизация планов грузовых железнодорожных перевозок, выполняемых транспортным оператором // Бизнес-информатика. – 2020. – Т. 14, № 2. – С. 21-35 (Web of Science, Scopus, RSCI).

Снижение размерности в задаче оптимального управления парком грузовых вагонов с использованием беспилотных локомотивов // Бизнес-информатика. – 2022. – Т. 16, № 2. – С. 7-20 (Web of Science, Scopus, RSCI).

Influence Assessment of Intelligent Unmanned Ground Vehicles on the Transport Network State // Advances in Systems Science and Applications. – 2020. – № 2. – P. 44-55 (Web of Science, Scopus, RSCI).

может этого сделать за отведенный месяц. Поэтому оператор может либо выполнить заявку полностью, либо исполнить ее частично, либо отклонить ее. Таким образом, при создании плана на предстоящий месяц задача транспортного оператора заключается, во-первых, в выборе тех заявок, которые наиболее выгодны к исполнению, во-вторых, в выборе таких цепочек грузовых и порожних маршрутов, которые с наибольшей эффективностью обеспечат выполнение выбранных заявок.

Непосредственная транспортировка вагонов осуществляется силами Российских железных дорог (ОАО «РЖД»), которые устанавливают свои тарифы на перегоны как порожних, так и груженых рейсов. Также заранее известны нормативы по времени таких перегонов по каждому из возможных маршрутов. В рамках модели будем считать, что тарифы не зависят от количества вагонов, перевозимых одним рейсом. Если заявка заказчика исполнена, то он, помимо платежа оператору в соответствии с указанной ставкой за использование его вагонов, отдельно платит РЖД за транспортировку этих вагонов. Перемещение порожних вагонов силами РЖД является статьей расходов транспортного оператора. Поскольку тарифы РЖД на транспортировку грузовых вагонов являются издержками заказчиков (транспортные операторы к ним никакого отношения не имеют), в модели эти тарифы отсутствуют. В диссертационной работе рассматривается упрощенная постановка, в рамках которой транспортный оператор управляет одним типом грузовых вагонов, а горизонт планирования составляет один месяц.

5.1. Постановка задачи

Введем ряд обозначений:

N – количество станций, участвующих в планировании;

T – горизонт планирования, который измеряется в днях. Для упрощения за горизонт планирования принят один месяц. Однако на практике правильнее рассматривать более длительный горизонт планирования, например, два или

более месяцев, но для простоты изложения принимается одновременно короткий и правдоподобный промежуток;

t – дискретный параметр, характеризующий время. Он измеряется в днях и принимает значения $t = 1, 2, \dots, T$;

$C = \{C_{ij}\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют тарифы, установленные РЖД за порожний перегон одного вагона от станции i до станции j ;

$\theta 1 = \{\theta 1_{ij}\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют время (в днях) движения груженого вагона от станции i до станции j в соответствии с нормативами РЖД (время округляется до большего целого числа);

$\theta 2 = \{\theta 2_{ij}\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют время (в днях) движения порожнего вагона от станции i до станции j в соответствии с нормативами РЖД (время округляется до большего целого числа). Отметим, что диагональные элементы данной матрицы принимаются равными единице. Это означает, что если вагон остается на станции до следующего дня, то это эквивалентно тому, что он отправляется в рейс-петлю длительностью в один день, где станции отправления и назначения совпадают;

$P = \{P_{ij}\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют ставку, указанную заказчиком в заявке на транспортировку одного вагона груза от станции i до станции j ;

$\bar{Q} = \{\bar{Q}_{ij}\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют количество грузовых вагонов, указанное в соответствующей заявке на транспортировку груза от станции i до станции j . Все элементы матрицы принимают неотрицательные целочисленные значения;

$\bar{S}^0(t) = \{\bar{S}_i^0(t)\}_{i=1}^N$ – вектор размерности N , характеризующий начальное расположение вагонов в день t ; i -ый элемент данного вектора равен количеству вагонов, отправка которых была осуществлена в предыдущем месяце, прибывших на станцию i в момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$. Все элементы данного вектора принимают неотрицательные целочисленные значения.

План перевозок характеризуется следующими матрицами:

$K1(t) = \{K1_{ij}(t)\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют количество отправляемых груженых вагонов от станции i до станции j на момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$. Все элементы матрицы принимают неотрицательные целочисленные значения;

$K2(t) = \{K2_{ij}(t)\}_{i,j=1}^N$ – $(N \times N)$ -матрица, элементы которой характеризуют количество порожних вагонов, отправляемых от станции i до станции j на момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$. Все элементы матрицы принимают неотрицательные целочисленные значения.

Обозначим через $K1$ и $K2$ набор соответствующих матриц для всех моментов времени $t \in \{1, \dots, T\}$, иначе говоря, $K1 = \{K1(t)\}_{t=1}^T$, $K2 = \{K2(t)\}_{t=1}^T$.

Также интерес представляет итоговое распределение вагонов по станциям и по времени в плановый месяц в соответствии с предложенным планом $K1, K2$. Для этого в рассмотрение вводится вектор $\bar{S}(t, K1, K2)$.

$\bar{S}(t, K1, K2) = \{\bar{S}_i(t, K1, K2)\}_{i=1}^N$ – вектор длины N , каждый элемент которого характеризует количество вагонов на станции i в момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$, которое реализуется в соответствии с предложенным планом $K1$ и $K2$ и начальным распределением вагонов $\bar{S}^0(t)$. Нетрудно заметить, что для всех $t \in \{1, \dots, T\}$ и любой станции $i \in \{1, \dots, N\}$ значение элемента $\bar{S}_i(t, K1, K2)$ определяется формулой:

$$\bar{S}_i(t, K1, K2) = \bar{S}_i^0(t) + \sum_{\tau=1}^t (\sum_{j=1}^N K1_{ji}(\tau) I(t - \tau - \theta1_{ji}) + \sum_{j=1}^N K2_{ji}(\tau) I(t - \tau - \theta2_{ji})), \quad (150)$$

где функция $I(\cdot)$ определяется по правилу

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Иначе говоря, количество вагонов, которое наблюдается на станции i в момент времени t , равно количеству отправленных в предыдущем месяце вагонов в соответствии со значением $\bar{S}_i^0(t)$, а также тому количеству вагонов, которое было направлено на станцию i порожними либо груженными рейсами в дни τ , предшествующие текущему дню t ($\tau \in \{1, \dots, t - 1\}$), и которые прибывают на станцию i именно в этот день t .

Теперь можно сформулировать математическую постановку данной задачи. Критерием максимизации является прибыль

$$\sum_{t=1}^T (\sum_{i,j=1}^N P_{ij} K1_{ij}(t) - \sum_{i,j=1}^N C_{ij} K2_{ij}(t)) \rightarrow \max_{\{K1_{ij}(t), K2_{ij}(t)\}} \quad (151)$$

При этом должны выполняться следующие ограничения:

$$\bar{S}_i(t, K1, K2) = \sum_{j=1}^N (K1_{ij}(t) + K2_{ij}(t)), \quad i = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}; \quad (152)$$

$$\sum_{t=1}^T K1_{ij}(t) \leq \bar{Q}_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}; \quad (153)$$

$$K1_{ij}(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad K2_{ij}(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (154)$$

Целевая функция (151) представляет собой прибыль от всех грузовых перегонов за вычетом издержек, связанных с перегоном порожних вагонов. Оптимизация осуществляется за счет управления груженными рейсами $K1_{ij}(t)$ и порожними рейсами $K2_{ij}(t)$. Ограничение (152) является балансовым и означает, что количество вагонов, отправляемых со станции i в момент времени t , в точности равно количеству вагонов, которые в этот день туда прибыли. При этом количество прибывающих вагонов $\bar{S}_i(t, K1, K2)$ определяется в

соответствии с формулой (150). Ограничение (153) говорит о том, что количество грузовых вагонов, отправленных со станции i на станцию j во все дни расчетного периода, не должно превышать того количества, которое указано в соответствующей заявке.

Задача (151)-(154) может быть решена напрямую методами целочисленного программирования (Mixed-Integer Programming). Однако в силу большой размерности задача поиска целочисленного решения может оказаться невыполнимой в пределах разумного времени. Поэтому в таких случаях вместо исходной задачи рассматривают ее линейную релаксацию. Это означает, что вместо условия (154) рассматривается следующее, более слабое условие:

$$K1_{ij}(t) \geq 0, K2_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (155)$$

Таким образом, вместо задачи (151)-(154) далее рассматривается задача (151), (152), (153), (155). Результатом решения такой задачи может оказаться дробное решение, которое, очевидно, не может быть применено на практике. В этом случае, для получения целочисленного решения к полученному дробному решению необходимо применить методы округления.

На следующем этапе переформулируем эту задачу в виде задачи линейного программирования.

5.2. Сведение исходной задачи к задаче линейного программирования

Для того чтобы решить сформулированную задачу с помощью программных средств, приведенные выше обозначения необходимо представить в ином формате. Для этого матрицы P , C , \bar{Q} , а также систему матриц $K1(t)$ и $K2(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ необходимо преобразовать в длинные вектора. Системы векторов \bar{S}^0 и $\bar{S}(t, K1, K2)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ также преобразуются в два единых вектора. С одной стороны, матрицы P и C по специальному правилу трансформируются в один вектор PC , с другой стороны, по похожему правилу матрицы $K1(t)$ и $K2(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ также объединяются в согласованный с

вектором PC вектор K такой же размерности. Сделано это так, чтобы прибыль транспортного оператора, формула расчета которой используется в (151), полностью совпадала со скалярным произведением двух новых векторов PC и K .

Вектор K

Поскольку количество элементов во всех матрицах $K1(t)$ и $K2(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ составляет $2TN^2$, то и размерности векторов PC и K также совпадают с этим значением. При формировании вектора K вопрос стоит в том, в каком именно порядке расположить все элементы матриц $K1(t)$ и $K2(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$. После того как этот порядок определен, соответствующим образом и в соответствующем порядке составляется вектор PC .

Пусть первые TN^2 элементов вектора K соответствуют всем элементам матриц $K1(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$. При этом первые N^2 элементов взяты из матрицы $K1(1)$: первые N элементов совпадают с первой строкой этой матрицы (первый элемент строки ставится на первую позицию вектора, второй элемент строки – на вторую позицию и т.д.), следующие N элементов соответствуют второй строке и так далее. Следующие N^2 элементов вектора K записываются с помощью аналогичного упорядочивания элементов матрицы $K1(2)$. По такому же принципу вектор K заполняется элементами остальных матриц $K1(t)$, $t = 3, \dots, T$. Вторая половина вектора K , также состоящая из TN^2 элементов, заполняется аналогичным путем только элементами матриц $K2(t)$, $t = 1, \dots, T$.

Вектор PC

Для того, чтобы вектор PC был согласован с вектором K , первые TN^2 его элементов берутся из матрицы P , а остальные TN^2 заполняются на основе матрицы C . Первые N элементов вектора PC соответствуют первой строке матрицы P (первый элемент строки ставится на первую позицию вектора, второй элемент строки – на вторую позицию и т.д.), следующие N элементов соответствуют второй строке матрицы P и так далее. После того, как первые N^2

элементов вектора PC определены по указанной процедуре, эта часть вектора копируется и ставится на место следующих N^2 элементов. Повторение этой операции $T - 1$ раз завершает формирование первой половины вектора PC , состоящей из TN^2 элементов. Вторая половина данного вектора заполняется аналогично элементами матрицы C . Единственное отличие в правиле заполнения состоит в том, что перед всеми элементами второй половины вектора PC дополнительно ставится знак минус. Таким образом, первые TN^2 элементов вектора PC неотрицательные, следующие TN^2 элементов данного вектора неположительные.

Векторы Q , S^0 и S

Из матрицы \bar{Q} по аналогичному правилу составляется вектор Q (первые N элементов вектора соответствуют первой строке матрицы, следующие N элементов соответствуют второй строке и т.д.). Размерность нового вектора составляет N^2 .

Системы векторов $\bar{S}^0(t)$ и $\bar{S}(t, K1, K2)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ преобразуются в два вектора путем последовательной конкатенации векторов, соответствующих каждому моменту времени (первые N элементов каждого из новых векторов соответствуют вектору $\bar{S}^0(1)$ и $\bar{S}(1, K1, K2)$, соответственно, следующие N элементов соответствуют вектору $\bar{S}^0(2)$ и $\bar{S}(2, K1, K2)$, соответственно, и т.д.). В итоге получится два новых вектора размера TN , первый обозначим через S^0 , второй – через S .

Имея векторы PC и K , в новом формате могут быть представлены критерий оптимизации (151) и условие (155). Однако для формулирования условий (152) и (153) необходимо ввести специальные матрицы, при умножении которых на вектор K можно было бы получить нужные ограничения.

Матрица A_Q

Построим матрицу A_Q , которая позволит переписать условие (153). Нетрудно заметить, что размерность этой матрицы равна $(N^2 \times 2TN^2)$. Это связано с тем, что данная матрица справа умножается на вектор K , и результат такого умножения сравнивается с вектором Q размерности N^2 . Исходя из того, что элементы матрицы K_2 (которые соответствуют последним TN^2 элементам вектора K) в данном ограничении не участвуют, все элементы матрицы A_Q , расположенные в последних TN^2 колонках, равны нулю.

Теперь необходимо определить первые TN^2 столбцов данной матрицы. Условие (153) означает, что для каждого маршрута со станции i на станцию j суммарное количество отправляемых груженых вагонов во все дни планового периода не может превышать того объема, который указан в заявке – \bar{Q}_{ij} . Исходя из этого, легко заметить, что в первом столбце первой строки стоит единица (она соответствует элементу $K_{111}(1)$). Следующая единица встретится в первой строке на позиции $N^2 + 1$ (она соответствует элементу $K_{111}(2)$) и так далее: единицы будут встречаться в первой строке матрицы A_Q T раз с периодом N^2 элементов. Далее, во второй строке матрицы A_Q единица стоит на второй позиции (она соответствует элементу $K_{112}(1)$), следующая единица во второй строке – на позиции $N^2 + 2$ (она соответствует элементу $K_{112}(2)$) и так далее: также с периодичностью N^2 элементов будут стоять единицы в количестве T штук. Для остальных строк матрицы A_Q алгоритм заполнения аналогичен.

Таким образом, если матрицу A_Q разбить на T блоков, каждый размером N^2 на N^2 элементов, отбросив нулевую часть (последние TN^2 колонок), то каждый из этих блоков будет представлять собой единичную матрицу. После определения матрицы A_Q в новом формате условие (153) принимает вид неравенства $A_Q \cdot K \leq Q$, где под знаком “ \leq ” подразумевается поэлементное сравнение компонент обоих векторов.

Матрицы A_{in} и A_{out}

Осталось переписать условие (152). Для его записи в матричной форме необходимо определить две матрицы, обозначенные через A_{in} и A_{out} . С помощью матрицы A_{in} рассчитывается количество вагонов, въезжающих на каждую из станций в каждый момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$. С помощью матрицы A_{out} рассчитывается количество вагонов, отбывающих с каждой станций в каждый момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$. Размерность каждой из матриц составляет $(TN \times 2TN^2)$. Обусловлено это с тем, что данные матрицы умножаются справа на вектор K . Результат произведения вектора K на любую из этих матриц связан с распределением вагонов по станциям и времени, поэтому количество строк в матрицах и размерность получаемого в результате произведения вектора равна TN . При этом первые N элементов полученного вектора соответствуют распределению вагонов по всем станциям в первый период, следующие N элементов соответствуют распределению вагонов по всем станциям во второй период и так далее до периода T . Матрица A_{in} позволяет представить формулу (152) в виде $S = A_{in} \cdot K$.

Сформируем матрицу A_{out} . Как уже было сказано, эта матрица предназначена для подсчета количества вагонов, отправленных с произвольной станции i в произвольный момент времени t . Куда именно отправлены эти вагоны, в данном случае интереса не представляет. Учитывая упорядоченность элементов вектора K , можно утверждать, что первые N элементов первой строки матрицы A_{out} отвечают за груженные вагоны, исходящие в первый период времени с первой станции. Соответственно эти элементы равны единице. Далее, начиная с элемента $N + 1$, до элемента TN^2 включительно расположены нулевые элементы. Начиная с $TN^2 + 1$, до элемента $TN^2 + N$ снова расположены единичные элементы, отвечающие за исходящие порожние вагоны. Оставшиеся элементы первой строки матрицы A_{out} равны нулю. Вторая строка матрицы A_{out} имеет похожую структуру с тем отличием, что все сдвинуто на N элементов вправо. Иначе говоря, первые N элементов второй строки равны нулю,

следующие N элементов равны единице, затем, начиная с $TN^2 + N + 1$, до $TN^2 + 2N$ расположены единичные элементы, а остальные элементы второй строки равны 0. Аналогично в каждой следующей строке координаты единичных элементов сдвигаются на N элементов. Повторение этой операции для всех строк матрицы A_{out} завершает ее формирование.

Осталось определить матрицу A_{in} . Для каждого из грузеных и порожних маршрутов со станции i на станцию j известна длительность выполнения такого перегона: она равна $\theta 1_{ij}$ для грузовых и $\theta 2_{ij}$ для порожних перегонов. Посмотрим, как эта информация отражается в матрице A_{in} . Для этого рассмотрим произвольный перегон грузеных вагонов в количестве $K1_{ij}(t)$ со станции i на станцию j в день t планового периода. В векторе K ему соответствует элемент, расположенный на позиции $tN^2 + (i - 1)N + j$. Время движения по данному маршруту составляет $\theta 1_{ij}$. Это означает, что выехав в день t , отправленные вагоны окажутся на станции j в день $t + \theta 1_{ij}$. В терминах уравнения (152) можно утверждать, что в результате данного грузеного рейса произойдет увеличение значения элемента $\bar{S}_j(t + \theta 1_{ij}, K1, K2)$ на $K1_{ij}(t)$ единиц. Следовательно, если $t + \theta 1_{ij}$ не превышает T , то результатом умножения A_{in} на K является увеличение координаты $(t + \theta 1_{ij} - 1)N + j$ вектора S на $K1_{ij}(t)$ единиц. Для того чтобы указанное перемножение дало такой результат, необходимо, чтобы элемент матрицы A_{in} с координатами $((t + \theta 1_{ij} - 1)N + j, tN^2 + (i - 1)N + j)$ равнялся единице. Произвольному порожнему перегону в количестве $K2_{ij}(t)$ вагонов со станции i на станцию j в день t планового периода, при условии, что $t + \theta 2_{ij}$ не превышает T , соответствует единичный элемент матрицы A_{in} с координатами $((t + \theta 2_{ij} - 1)N + j, TN^2 + tN^2 + (i - 1)N + j)$. Видно, что в случае порожних перегонов ко второй компоненте координаты единичного элемента матрицы A_{in} дополнительно прибавляется величина TN^2 . Связанно это с тем, что порожним

перегонам в векторе K соответствует вторая половина этого вектора, которая начинается с координаты $TN^2 + 1$ и заканчивается последним элементом с координатой $2TN^2$. Таким образом, алгоритм конструирования матрицы A_{in} состоит в том, чтобы взять нулевую матрицу размером TN на $2TN^2$ элементов и расставить в ней единичные элементы, перебрав все элементы вектора K (или, что тоже самое, перебрав все элементы матриц $K1(t)$ и $K2(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$).

После того как матрицы A_{in} и A_{out} определены, ограничение (152) может быть переписано в виде $A_{in} \cdot K + S_0 = A_{out} \cdot K$ или, что тоже самое, в виде $(A_{out} - A_{in}) \cdot K = S_0$.

После того, как все вектора и матрицы в новом формате определены, можно переписать задачу (151), (152), (153), (155) в новом формате:

$$PC^T \cdot K \rightarrow \max_K, \quad (156)$$

при ограничениях

$$(A_{out} - A_{in}) \cdot K = S_0; \quad (157)$$

$$A_Q \cdot K \leq Q; \quad (158)$$

$$K \geq 0. \quad (159)$$

Задача (156)-(159) абсолютно идентична задаче (151), (152), (153), (155), но ее преимущество заключается в том, что она записана в формате классической задачи линейного программирования, что позволяет решать ее, применяя соответствующие методы и программные инструменты.

В заключение отметим, что в приложении 3 приведен гипотетический пример решения задачи управления парком вагонов транспортным оператором.

5.3. Снижение размерности в задаче оптимального управления парком грузовых вагонов

В данном параграфе предложена модификация алгоритма, описанного в предыдущем параграфе, позволяющая значительно снизить размерность модели (156)-(159) (Белоусов, Хачатрян, Неволин, 2022). Наиболее заметного снижения размерности задачи (156)-(159) можно добиться путем учета только тех грузеных маршрутов в векторе K , использование которых приведет к частичному или полному исполнению заявок. Другими словами, снижение размерности задачи можно организовать за счёт удаления из вектора K тех грузовых маршрутов, которые в любом случае задействованы не будут. Кроме вектора K соответствующие преобразования должны быть произведены над всеми остальными векторами и матрицами задачи (156)-(159) так, чтобы все они были согласованы.

5.3.1. Алгоритмы формирования матриц и векторов для задачи (156)-(159)

Опишем алгоритм формирования всех матриц и векторов сокращенной размерности для задачи (156)-(159). Кроме удаления из рассмотрения ненужных грузовых маршрутов в алгоритме также заложена возможность исключения из расчета порожних маршрутов, отобранных по какому-либо признаку.

Векторы PC , Q , S_0 и динамические списки

Введем новые переменные $routes_from_station_cargo$, $routes_to_station_cargo$ и $routes_from_station_empty$, $routes_to_station_empty$, которые представляют собой динамические списки с элементами, принимающими целочисленные значения. Элементы этих переменных отвечают за номера тех маршрутов, которые будут учтены в расчете. Список $routes_from_station_cargo$ содержит номера исходящих станций для каждого из учитываемых грузовых маршрутов, $routes_to_station_cargo$ содержит соответствующие номера входящих станций для этих же грузовых маршрутов. Аналогично, $routes_from_station_empty$ содержит номера

исходящих станций для порожних маршрутов, *routes_to_station_empty* содержит номера входящих станций для соответствующих порожних маршрутов. Если учитывать всевозможные маршруты, как это сделано в предыдущем параграфе, то количество элементов, содержащееся в новых переменных, будет равно N^2 . Однако введены эти переменные для того, чтобы можно было учитывать меньшее число маршрутов, снижая тем самым размерность задачи.

Заполним переменные *routes_from_station_cargo* и *routes_to_station_cargo*. Будем учитывать только те маршруты, которые есть в заявках, поэтому, если существует заявка от станции i к станции j , то есть $P_{ij} > 0$, то к переменной *routes_from_station_cargo* справа добавляем элемент i , к переменной *routes_to_station_cargo* также справа добавляем элемент j . Одновременно с каждым добавлением элементов в переменные *routes_from_station_cargo* и *routes_to_station_cargo* будем составлять вектор p последовательным добавлением снизу элементов P_{ij} , а также будем составлять вектор Q , последовательным добавлением снизу элементов \bar{Q}_{ij} , характеризующих объемы соответствующих заявок. Таким образом, на каждой итерации размерность векторов p и Q , а также переменных *routes_from_station_cargo* и *routes_to_station_cargo* увеличивается на единицу.

Таким образом, полученный вектор Q учитывает только грузовые маршруты, а не всевозможные маршруты, как это было в предыдущем параграфе. За счет этого размерность вектора Q снижается с N^2 до N_{cargo} .

Будем считать, что для каждой пары станций i и j от станции i к станции j может быть не более одной заявки. Если для какой-то пары станций i и j из i в j существует две заявки, то в этом случае создается дубль станции i , назовем его \hat{i} , и в переменные *routes_from_station_cargo* и *routes_to_station_cargo* добавим не только i и j , но и \hat{i} и j , соответственно. В случае двух заявок вектор p заполняется соответствующими ставками в той же последовательности, что и

переменные $routes_from_station_cargo$ и $routes_to_station_cargo$. Сообщение между станцией i и её дублем \hat{i} осуществляется мгновенно и бесплатно. При этом обратного сообщения со станции \hat{i} на станцию i нет. Все входящие маршруты направлены на станцию i , на станцию \hat{i} можно попасть только через станцию i . Сделано это для того, чтобы в решениях не появлялись циклические потоки со станции i в \hat{i} и обратно. Случай, когда со станции i на станцию j может быть больше двух заявок в рамках данной диссертационной работы не рассматривается.

Аналогичным путем переменные $routes_from_station_empty$ и $routes_to_station_empty$ заполняются номерами станций только тех маршрутов, которые были выбраны по каким-либо критериям. Одновременно с заполнением переменных $routes_from_station_empty$ и $routes_to_station_empty$, по аналогии с вектором p , заполняется новый вектор \tilde{C} путем добавления снизу элементов C_{ij} (стоимость порожнего перегона со станции i на станцию j). Порядок добавления элементов в вектор \tilde{C} соответствует порядку добавления элементов в переменные $routes_from_station_empty$ и $routes_to_station_empty$. Таким образом, на каждой итерации размерность вектора \tilde{C} , а также переменных $routes_from_station_empty$ и $routes_to_station_empty$ увеличивается на единицу.

Один из способов снизить размерность за счет порожних маршрутов состоит в удалении из рассмотрения тех порожних маршрутов, станции прибытия в которых не являются станциями отправления ни для одной из заявок на груженные рейсы. Идея в том, что нет надобности приезжать на такие станции порожними рейсами, поскольку уехать оттуда вагоны могут только другими порожними рейсами, что вряд ли окажется оптимальным. Исключением являются маршруты с этих станций в себя, такие маршруты в численном расчете лучше оставить, поскольку в эти станции либо приезжают вагоны из предыдущего периода, либо они являются конечным пунктом для некоторых груженных маршрутов. Тут необходимо сделать оговорку о том, что этот способ

удаления порожних маршрутов из рассмотрения оправдан при условии, что временные и финансовые затраты порожних перегонов с произвольной станции A на произвольную станцию B всегда не больше, чем при осуществлении двух последовательных порожних перегонов с A на некоторую станцию C и из C в B . На практике это условие выполняется, поэтому исключение из рассмотрения подобных двойных порожних маршрутов не приводит к ухудшению целевых показателей полученных решений.

Через N_{cargo} обозначим размерность вектора p , которая совпадает с количеством элементов в переменных $routes_from_station_cargo$ и $routes_to_station_cargo$, через N_{empty} обозначим размерность вектора \tilde{C} , которая также совпадает с количеством элементов в переменных $routes_from_station_empty$ и $routes_to_station_empty$. Другими словами, N_{cargo} характеризует количество всех грузовых маршрутов, соответствующих списку заявок, N_{empty} характеризует количество всевозможных порожних маршрутов, которые берутся в расчет при поиске оптимального плана.

Построим вектор PC меньшей размерности по сравнению с аналогичным вектором в предыдущем параграфе. Для этого осуществим $T - 1$ раз последовательную конкатенацию вектора p так, чтобы получился вектор размерности $T \cdot N_{cargo}$. Далее к полученному вектору также последовательной конкатенацией $T - 1$ раз присоединим вектор \tilde{C} . Вектору PC присвоим значение полученного вектора, его размерность составит $T \cdot (N_{cargo} + N_{empty})$. Новая размерность задачи (156)-(159) будет также равна $T \cdot (N_{cargo} + N_{empty})$. Очевидно, элементы вектора K соответствуют тем же маршрутам, которые соответствуют и ставкам, и тарифам вектора PC .

Алгоритм создания вектора S_0 , описанный ранее, останется неизменным. А именно, система векторов $\bar{S}^0(t)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ преобразуется в вектор S_0 путем последовательной конкатенации векторов, соответствующих каждому моменту времени. При такой конкатенации первые N элементов нового вектора

соответствуют вектору $\bar{S}^0(1)$, следующие N элементов соответствуют вектору $\bar{S}^0(2)$, и т.д. Таким образом, размерность вектора S_0 составит TN .

Матрицы A_{in} и A_{out}

Каждая из матриц A_{in} и A_{out} состоит из двух частей: первая часть отвечает за грузовые маршруты, вторая – за порожние. Данные матрицы являются разреженными матрицами, любой ненулевой элемент в них принимает единичное значение. Сконструируем матрицу A_{out} , которая отвечает за учет исходящих с каждой станции маршрутов. На нулевой итерации матрица A_{out} представляет собой нулевую матрицу размером $T \cdot N \times T \cdot (N_{cargo} + N_{empty})$.

Обозначим через $Index_cargo_out[1]$ динамический список, в который записываются такие индексы $k \in \{1, \dots, N_{cargo}\}$ переменной $routes_from_station_cargo[k]$, для которых $routes_from_station_cargo[k] = 1$. Другими словами, переменная $Index_cargo_out[1]$ содержит номера тех грузовых маршрутов среди первых N_{cargo} элементов вектора K , точкой отправления для которых является станция 1. Для произвольной станции $i \in \{1, \dots, N\}$ интерпретация переменной $Index_cargo_out[i]$ аналогична.

Для учета исходящих маршрутов со станции 1 в первый период времени необходимо для всех таких $k \in Index_cargo_out[1]$ элементам $A_{out}[1, k]$ присваивать значение 1. Для учета исходящих маршрутов со станции 1 во второй период времени необходимо уже элементам $A_{out}[1 + N, k + N_{cargo}]$, $k \in Index_cargo_out[1]$ присваивать единичные значения. Первой компоненте координат матрицы A_{out} прибавляется N , поскольку в векторе S_0 период равен N , другими словами первые N элементов в этом векторе отвечают за N станций в первый период времени, следующие N элементов отвечают за эти же N станций во второй период времени и т.д. Второй компоненте матрицы A_{out} прибавляется N_{cargo} элементов, поскольку период в первой части вектора PC , отвечающей за ставки груженных рейсов, равен N_{cargo} . Иначе говоря, первые N_{cargo} элементов в

первой части вектора PC отвечают за маршруты, стартующие в первый период времени, следующие N_{cargo} элементов отвечают за эти же маршруты, но стартующие уже во второй период времени, и так далее. Продолжая эту логику далее получаем, что для учета исходящих маршрутов со станции 1 в произвольный период времени $t \in \{1, \dots, T\}$ присвоить единице необходимо все элементы матрицы A_{out} с координатами $[1 + (t - 1) \cdot N, k + (t - 1) \cdot N_{cargo}]$, $k \in Index_cargo_out[1]$. Таким образом, для получения матрицы A_{out} необходимо для каждой станции $i \in \{1, \dots, N\}$ создать динамический список $Index_cargo_out[i]$ с такими номерами $k \in \{1, \dots, N_{cargo}\}$, для которых $routes_from_station_cargo[k] = i$. Далее, для всех $i \in \{1, \dots, N\}$ для которых $Index_cargo_out[i] \neq 0$, единице присваиваются элементы матрицы A_{out} с координатами $[i + (t - 1)N, k + (t - 1) \cdot N_{cargo}]$, $k \in Index_cargo_out[i]$, $t \in \{1, \dots, T\}$. Сформирована первая часть матрицы A_{out} , отвечающая за грузовые маршруты. Аналогично формируется вторая часть этой матрицы, отвечающая за порожние маршруты. Для этого для каждой станции $i \in \{1, \dots, N\}$ формируются другие списки $Index_empty_out[i]$ с такими номерами $k \in \{1, \dots, N_{empty}\}$, для которых $routes_from_station_empty[k] = i$. Другими словами, переменная $Index_cargo_out[i]$ содержит номера тех порожних маршрутов среди N_{empty} элементов вектора K , идущих после $T \cdot N_{cargo}$ элементов, точкой отправления для которых является станция i .

Далее, для всех $i \in \{1, \dots, N\}$, для которых $Index_empty_out[i] \neq 0$, единице присваиваются элементы матрицы A_{out} с координатами $[i + (t - 1) \cdot N, k + (t - 1)N_{empty} + T \cdot N_{cargo}]$, $k \in Index_empty_out[i]$, $t \in \{1, \dots, T\}$. Так как первые $T \cdot N_{cargo}$ элементов вектора K отвечают за грузовые маршруты, а остальные ответственны за порожние, то в случае рассмотрения порожних маршрутов во второй компоненте координат матрицы A_{out} присутствует дополнительно слагаемое $T \cdot N_{cargo}$. После осуществления

всех описанных операций формирование матрицы A_{out} оказывается завершенным.

На следующем этапе формируется матрица A_{in} . Эта матрица отвечает за учет входящих в каждую станцию маршрутов. На нулевой итерации матрица A_{in} представляет собой нулевую матрицу размером $T \cdot N \times T \cdot (N_{cargo} + N_{empty})$. Для формирования этой матрицы нам дополнительно понадобится информация о времени движения по каждому из маршрутов, то есть значения матриц θ_1 и θ_2 . Обозначим через $Index_cargo_in[1]$ динамический список тех индексов $k \in \{1, \dots, N_{cargo}\}$ переменной $routes_to_station_cargo[k]$, для которых $routes_to_station_cargo[k] = 1$. Другими словами, переменная $Index_cargo_in[1]$ содержит номера тех грузовых маршрутов среди первых N_{cargo} элементов вектора K , пунктом назначения для которых является станция 1. Для произвольной станции $i \in \{1, \dots, N\}$ интерпретация переменной $Index_cargo_in[i]$ аналогична. Тогда для учета входящих маршрутов на станцию 1, отправления по которым осуществляется в первый период времени, необходимо для всех $k \in Index_cargo_in[1]$ элементам матрицы A_{in} с координатами $[1 + \theta_1[routes_from_station_cargo[k], 1] \cdot N, k]$ присвоить значение 1. Аналогично для учета входящих маршрутов на станцию 1, отправления по которым осуществляется в период времени $t \in \{1, \dots, T\}$, для всех $k \in Index_cargo_in[1]$ единице присваиваются элементы матрицы A_{in} с координатами $[1 + (\theta_1[routes_from_station_cargo[k], 1] + t - 1) \cdot N, k + (t - 1) \cdot N_{cargo}]$.

Для произвольной станции $i \in \{1, \dots, N\}$ составляются динамические переменные $Index_cargo_in[i]$ из тех индексов $k \in \{1, \dots, N_{cargo}\}$ переменной $routes_to_station_cargo[k]$, для которых $routes_to_station_cargo[k] = i$. Для всех $i \in \{1, \dots, N\}$, для которых $Index_cargo_in[i] \neq 0$, единице присваиваются элементы матрицы A_{in} с координатами

$[i + (\Theta 2[\text{routes_from_station_cargo}[k], i] + t - 1) \cdot N, k + (t - 1) \cdot N_{\text{cargo}}]$,
 $k \in \text{Index_cargo_in}[i], t \in \{1, \dots, T\}$.

Первая часть матрицы A_{in} , относящаяся к грузеным маршрутам, построена. Осталось построить вторую часть этой матрицы, относящуюся к порожним маршрутам. Обозначим через $\text{Index_empty_in}[i]$ динамический список тех индексов $k \in \{1, \dots, N_{\text{cargo}}\}$ переменной $\text{routes_to_station_empty}[k]$, для которых $\text{routes_to_station_empty}[k] = i$. Для всех станций $i \in \{1, \dots, N\}$, для которых $\text{Index_empty_in}[i] \neq 0$, единице присваиваются элементы матрицы A_{in} с координатами $[i + (\Theta 2[\text{routes_from_station_cargo}[k], i] + t - 1) \cdot N, k + (t - 1) \cdot N_{\text{empty}} + T \cdot N_{\text{cargo}}]$, $k \in \text{Index_empty_out}[i], t \in \{1, \dots, T\}$. Формирование матрицы A_{in} завершено.

Матрица A_Q

Матрица A_Q нужна для расчета объема исполненных заявок, поэтому при вычислении этого показателя учитываются только грузеные маршруты. Это означает, что в матрице A_Q , имеющей размерность $N_{\text{cargo}} \times T \cdot (N_{\text{cargo}} + N_{\text{empty}})$, последние $T \cdot N_{\text{empty}}$ столбцов состоят исключительно из нулевых элементов, ненулевые элементы находятся только в первых $T \cdot N_{\text{cargo}}$ столбцах. На нулевой итерации в качестве матрицы A_Q возьмем нулевую матрицу. Поскольку первые $T \cdot N_{\text{cargo}}$ элементов вектора K упорядочены с периодом N_{cargo} , т.е. первые N_{cargo} элементов отвечают за грузеные маршруты, исходящие в первый период времени, следующие N_{cargo} элементов отвечают за эти же маршруты, исходящие во второй период времени и т.д., то в первой строке матрицы A_Q записывается T единиц, первая из которых ставится на первую позицию, следующая на позицию $N_{\text{cargo}} + 1$, следующая на позицию $2N_{\text{cargo}} + 1$ и т.д. Другими словами, в первой строке матрицы A_Q единице присваиваются T элементов начиная с первого элемента и далее с периодом N_{cargo} элементов. В

следующей строке матрицы A_Q единице также присваивается T элементов с периодом N_{cargo} , но начиная уже со второго элемента второй строки. В третьей строке матрицы A_Q алгоритм повторяется, но единице присваиваются элементы, начиная с третьего элемента третьей строки. Так продолжается до последней строки N_{cargo} . В результате, если рассмотреть первые N_{cargo} строк и первые N_{cargo} столбцов, получится единичная матрица, если рассмотреть следующие N_{cargo} столбцов, то также получится единичная матрица, и т.д. Если рассмотреть первые $T \cdot N_{cargo}$ столбцов матрицы A_Q , то увидим T последовательно составленных единичных матриц размерности $N_{cargo} \times N_{cargo}$, остальные столбцы матрицы являются нулевыми.

Таким образом, приведены алгоритмы формирования всех составляющих задачи (156)-(159) – целевой функции и ограничений. Показано, что размерность и вектора переменных целевой функции, и матриц ограничений заметно снижается. В приложении 3 это продемонстрировано как на модельном примере (несколько станций, короткий горизонт планирования), так и на реальном примере (более 1000 станций, длинный горизонт планирования).

5.4. Оценка влияния интеллектуальных беспилотных транспортных средств на состояние транспортной сети (результаты эконометрического анализа)

В настоящее время актуализируется задача разработки интеллектуальных систем управления как на железнодорожном так и на наземном транспорте с целью обеспечения скоростного и безопасного трафика, максимизации пропускной способности транспортной системы и минимизации числа факторов (например, возникающих дорожно-транспортных происшествий) несущих угрозы другим участникам дорожного движения (Ziye, Haiou, Huiyan, Shaohang, Wenli, 2019; Menda, Chen, Grana, Bono, Tracey, Kochenderfer, Wolpert, 2019; Chen, Liu, Chen, Li, Zhao, 2019; Xiong, Kang, Li, Song, Jin, Gong, 2018; Cao, Shen, Zhang, Yu, Wang, 2019). Приведем эконометрический анализ результатов

экспериментов, проведенных с двумя агент-ориентированными моделями, описывающими движение наземных транспортных средств (Акопов, Khachatryan, Belousov, 2020). В этих моделях присутствуют два вида участников дорожного движения: обычные транспортные средства (ОТС) и беспилотные транспортные средства (БТС). В первой модели принципиальным отличием БТС от ОТС является поддержка информационного обмена между БТС для передачи сведений о наличии экстремальных ситуаций, что позволяет им корректировать скорость и направление движения (Акопов, Бекларян, Хачатрян, Бекларян, Кузнецова, 2020). Во второй модели, помимо указанного выше отличия, БТС обладают дополнительным преимуществом, а именно, возможностью интеллектуальной оценки плотности дорожного потока для эффективного маневрирования (Акопов, Хачатрян, Бекларян, Бекларян, 2020). В этих моделях на заданном участке кругового движения анализируются такие характеристики дорожного движения, как трафик выходного потока и количество дорожно-транспортных происшествий.

Основной задачей эконометрического анализа является исследование зависимости трафика выходного потока и количества дорожно-транспортных происшествий на заданном участке кругового движения от таких параметров модели, как средняя скорость транспортных средств, интенсивность входных потоков, частота обмена сообщениями между БТС, а также оценка эффекта, полученного от внедрения БТС с возможностью интеллектуальной оценки плотности дорожного потока. Для этого в рамках каждой модели проведен пул идентичных экспериментов. Множество экспериментов формируется в результате многократного прогона модели, в каждом из которых указанные параметры модели принимают значения в заданном диапазоне с заданным шагом. В результате для каждой модели сформирована база, состоящая из результатов более чем ста тысяч экспериментов.

На основе полученных результатов проведен эконометрический анализ: исследованы зависимости трафика выходного потока и количества дорожно-

транспортных происшествий от параметров как в первой, так и во второй модели, а также оценен эффект, полученный в результате внедрения в БТС возможности интеллектуальной оценки плотности дорожного потока, заключающийся в увеличении трафика выходного потока и уменьшении количества дорожно-транспортных происшествий. Параметрами указанных моделей являются:

- интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения (в ед. модельного времени);
- интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения (в ед. модельного времени);
- средняя скорость движения БТС (км/ч);
- средняя скорость движения ОТС (км/ч);
- интенсивность обмена сообщениями между БТС (в ед. модельного времени).

Как было отмечено выше, множество экспериментов формируется в результате многократного прогона модели. При этом указанные параметры модели принимают значения в заданном диапазоне с заданным шагом (Таблица 1).

Таблица 1. Варьирование параметров модели

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

<i>№</i>	<i>Наименование Параметра</i>	<i>Диапазон варьирования</i>	<i>Шаг варьирования</i>	<i>Количество вариаций</i>
1	Интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения	0.005 – 0.05	0.005	10
2	Интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения	0.005 – 0.05	0.005	10
3	Средняя скорость движения БТС	40 – 140	10	11
4	Средняя скорость движения ОТС	40 – 140	10	11
5	Интенсивность обмена сообщениями между БТС	0 – 1	0.1	11

Несложно заметить, что общее количество экспериментов в каждом пуле равно 133100. В таблице 2 приведены основные описательные статистики зависимых переменных.

Таблица 2. Описательные статистики

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

	<i>Среднее</i>	<i>Медиана</i>	<i>Стандартное отклонение</i>	<i>Минимум</i>	<i>Максимум</i>
Трафик выходного потока (модель 1)	56.5	56	25.4	3	149
Трафик выходного потока (модель 2)	67.8	65	35.3	3	207
Количество ДТП (модель 1)	16	10	18.6	0	148
Количество ДТП (модель 2)	5.7	1	12.7	0	145

Согласно таблице 2, внедрение интеллектуальных БТС приводит к увеличению трафика выходного потока на 20% и уменьшению среднего количества ДТП в 2.8 раза. Также стоит отметить, что медиана количества ДТП уменьшается с 10 до 1, т.е. в модели с возможностью интеллектуальной оценки плотности дорожного потока БТС, примерно в половине экспериментов не происходит ДТП. На рис. 104 и рис. 105 представлены гистограммы распределения трафика выходного потока, а на рис. 106 и рис. 107 – гистограммы распределения количества ДТП в модели 1 и модели 2, соответственно.

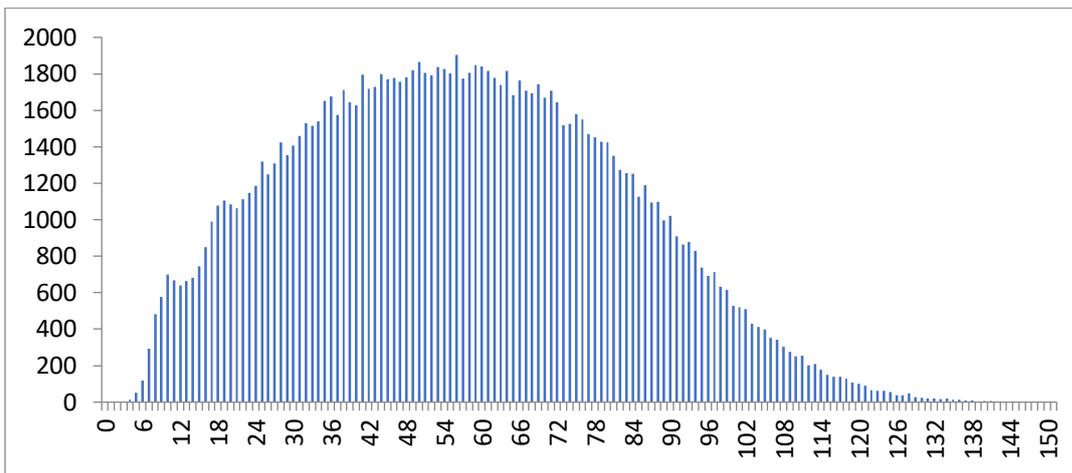


Рис. 104. Гистограмма распределения трафика выходного потока в модели 1
Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

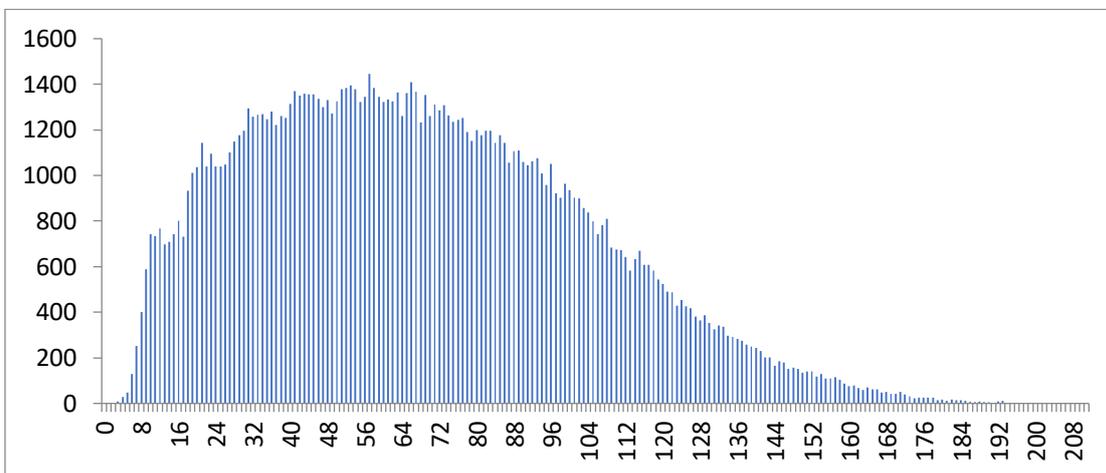


Рис. 105. Гистограмма распределения трафика выходного потока в модели 2
Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

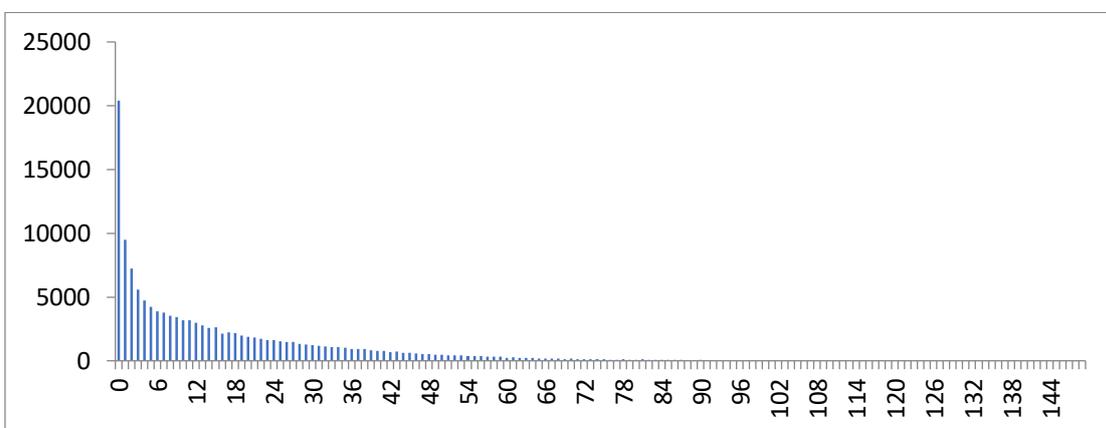


Рис 106. Гистограмма распределения количества ДТП в модели 1
Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

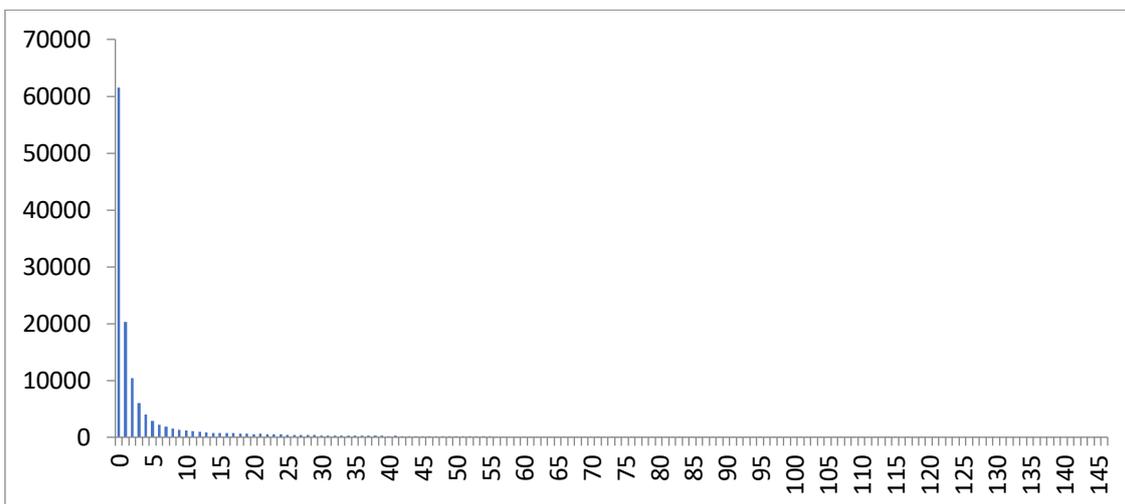


Рис. 107. Гистограмма распределения количества ДТП в модели 2

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Из рис. 106 и рис. 107 следует, что количество экспериментов без ДТП в модели 2 в три раза меньше, чем во модели 1. Закончим первичный анализ данных графиком, приведенным ниже (рис. 108). На нем представлено как убывает количество экспериментов, в которых число ДТП не меньше заданного числа (между минимальным и максимальным количеством) как в первой, так и во второй модели.

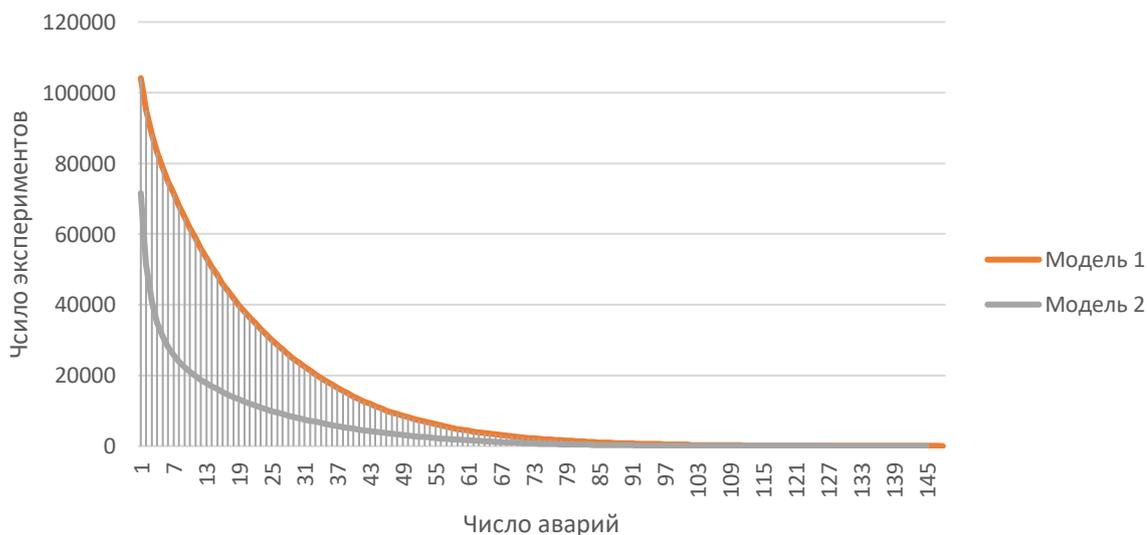


Рис. 108. Число экспериментов с количеством ДТП не меньше заданного

Источник: составлено автором на основе модельных экспериментов

Перейдем к исследованию влияния указанных в таблице 1 параметров моделей на трафик выходного потока и количество ДТП, т.е. к построению и оцениванию соответствующих регрессионных уравнений. На начальном этапе данного исследования попробуем определиться со спецификацией модели. Поскольку набор объясняющих переменных определен заранее в рамках построения указанных выше агент-ориентированных моделей, речь идет о попытке определения вида предполагаемой зависимости. Ограничимся двумя наиболее часто встречающимися в эконометрических исследованиях видах функций: линейной и степенной. В связи с этим приведем матрицы попарных корреляций всех переменных (как объясняющих, так и зависимых), а также их логарифмов для обеих моделей (таблицы 3-6).

В этих таблицах используются следующие обозначения:

- X1 – интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения;
- X2 – интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения;
- X3 – средняя скорость движения БТС;
- X4 – средняя скорость движения ОТС;
- X5 – интенсивность обмена сообщениями между БТС;
- Y1 – трафик выходного потока;
- Y2 – количество ДТП.

Таким образом – X1, X2, X3, X4, X5 – объясняющие переменные, а Y1, Y2 – зависимые.

Таблица 3. Матрица корреляций переменных в модели 1

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

	X1	X2	X3	X4	X5	Y1	Y2
X1	1.00	-0.20	-0.008	0.03	-0.0002	0.07	0.47
X2	-0.20	1.00	0.002	0.03	0.0005	0.15	0.46

X3	-0.008	0.002	1.00	-0.02	-0.0006	0.40	0.11
X4	0.03	0.03	-0.02	1.00	0.002	0.74	-0.21
X5	-0.0002	0.0005	-0.0006	0.002	1.00	0.0003	-0.002
Y1	0.07	0.15	0.40	0.74	0.0003	1.00	-0.16
Y2	0.47	0.46	0.11	-0.21	-0.003	-0.16	1.00

Таблица 4. Матрица корреляций логарифмов переменных в модели 1

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

	$LOG(X1)$	$LOG(X2)$	$LOG(X3)$	$LOG(X4)$	$LOG(X5)$	$LOG(Y1)$	$LOG(Y2)$
$LOG(X1)$	1.00	-0.22	-0.008	0.02	-0.0007	0.09	0.47
$LOG(X2)$	-0.22	1.00	0.001	0.03	0.0005	0.08	0.44
$LOG(X3)$	-0.008	0.001	1.00	-0.02	-0.0003	0.37	0.10
$LOG(X4)$	0.02	0.03	-0.015	1.00	0.002	0.75	-0.17
$LOG(X5)$	-0.0007	0.0005	-0.0003	0.002	1.00	-0.0003	-0.001
$LOG(Y1)$	0.09	0.08	0.37	0.75	-0.0003	1.00	-0.10
$LOG(Y2)$	0.47	0.44	0.10	-0.17	-0.001	-0.10	1.00

Таблица 5. Матрица корреляций переменных в модели 2

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

	X1	X2	X3	X4	X5	Y1	Y2
X1	1.00	-0.26	-0.02	0.12	-0.001	0.23	0.19
X2	-0.26	1.00	0.04	-0.008	-0.002	0.13	0.39
X3	-0.02	0.04	1.00	-0.05	-0.001	0.37	0.12
X4	0.12	-0.008	-0.05	1.00	-0.0009	0.74	-0.41
X5	-0.001	-0.002	-0.001	-0.0009	1.00	-0.003	0.001
Y1	0.23	0.13	0.37	0.74	-0.003	1.00	-0.37

Y2	0.19	0.39	0.12	-0.41	0.001	-0.37	1.00
----	------	------	------	-------	-------	-------	------

Таблица 6. Матрица корреляций логарифмов переменных в модели 2

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

	$LOG(X1)$	$LOG(X2)$	$LOG(X3)$	$LOG(X4)$	$LOG(X5)$	$LOG(Y1)$	$LOG(Y2)$
$LOG(X1)$	1.00	-0.23	-0.02	0.10	-0.002	0.20	0.14
$LOG(X2)$	-0.23	1.00	0.04	-0.03	-0.0006	0.07	0.45
$LOG(X3)$	-0.02	0.04	1.00	-0.05	-0.001	0.35	0.10
$LOG(X4)$	0.10	-0.03	-0.05	1.00	-0.0006	0.77	-0.47
$LOG(X5)$	-0.002	-0.0006	-0.001	-0.0006	1.00	-0.001	0.001
$LOG(Y1)$	0.20	0.07	0.35	0.77	-0.001	1.00	-0.40
$LOG(Y2)$	0.14	0.45	0.10	-0.47	0.001	-0.40	1.00

Исходя из данных этих таблиц можно сделать следующие выводы:

1. Попарная корреляция как между объясняющими переменными, так и между их логарифмами низка в обеих моделях, что при оценивании соответствующих регрессионных уравнений не может стать источником мультиколлинеарности. Это важно с учетом того, что нас интересует вклад каждой объясняющей переменной в изменения зависимых переменных.
2. Сравнение попарных корреляций между зависимыми и объясняющими переменными не позволяет однозначно определить какая из функций (линейная или степенная) наиболее адекватно описывает зависимость трафика дорожного потока и количества ДТП от параметров модели. Поэтому, в дальнейшем будем проводить эконометрический анализ с использованием обоих видов функций.

В связи с использованием степенных функций, которые перед оцениванием будут прологарифмированы, отбросим результаты экспериментов, в которых какая-либо переменная принимает нулевое значение. Таким образом, для

построения регрессионных уравнений для трафика выходного потока использованы данные 102448 наблюдений, а для количества ДТП – данные 65134 наблюдений.

Приступим к оцениванию зависимостей трафика выходного потока и количества ДТП в обеих моделях от указанных параметров модели в рамках линейных регрессионных уравнений. Итак, построим и исследуем линейные регрессионные уравнения со следующими зависимыми переменными:

- трафик выходного потока в модели 1;
- трафик выходного потока в модели 2;
- количество ДТП в модели 1;
- количество ДТП модели 2.

Оценивание коэффициентов проводилось в рамках классической модели множественной регрессии с использованием метода наименьших квадратов. Поскольку тест Уайта уверенно отвергает нулевую гипотезу о гомоскедастичности регрессионных остатков то стандартные ошибки оценены с помощью процедуры Уайта. Приведем результаты оценивания зависимости трафика выходного потока (Таблица 7) от указанного выше набора объясняющих переменных.

Таблица 7. Зависимая переменная – трафик выходного потока, линейная регрессия

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

<i>Объясняющие переменные</i>	<i>Модель1</i>	<i>Модель2</i>
Константа	-37.76*** (0.27)	-79.16*** (0.40)
Интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения	147.22*** (3.72)	499.05*** (5.29)

Интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения	284.38*** (4.56)	446.01*** (6.70)
Средняя скорость движения БТС	0.34*** (0.002)	0.48*** (0.002)
Средняя скорость движения ОТС	0.60*** (0.002)	0.88*** (0.003)
Интенсивность обмена сообщениями между БТС	0.40 (0.28)	-0.12 (0.25)
R ²	0.73	0.76

Примечание. В скобках указаны значения стандартных ошибок. ***, **, * – значимость на 1, 5 и 10%-ном уровне соответственно.

Как следует из таблицы 7, все объясняющие переменные в обеих моделях кроме переменной «Интенсивность обмена сообщениями между БТС», описывающие трафик выходного потока, значимы на 1%-ном уровне. Также отметим, что в обеих моделях значения коэффициентов детерминации достаточно высокие. Сравнивая коэффициенты при значимых переменных в обеих моделях, можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение интенсивности входного потока БТС на 0.005 единиц модельного времени (шаг варьирования, таблица 2) приводит к увеличению трафика выходного потока модели 2 по сравнению с трафиком выходного потока модели 1 примерно на 1.76 единицы. Для ОТС указанная разница составляет 0.81 единиц.
2. Увеличение средней скорости БТС на 10 км/ч (шаг варьирования, таблица 2) приводит к увеличению трафика выходного потока модели 2 по сравнению с трафиком выходного потока модели 1 на 1.4 единиц. Для ОТС указанная разница составляет 2.8 единиц.

Приведем результаты оценивания зависимости количества ДТП от указанного выше набора объясняющих переменных (Таблица 8).

Таблица 8. Зависимая переменная – количество ДТП, линейная регрессия

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

<i>Объясняющие переменные</i>	<i>Модель 1</i>	<i>Модель 2</i>
Константа	-22.46*** (0.20)	-6.34** (0.24)
Интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения	797.77*** (2.98)	414.23*** (3.96)
Интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения	810.13*** (3.14)	546.11*** (4.00)
Средняя скорость движения БТС	0.07*** (0.001)	0.04*** (0.001)
Средняя скорость движения ОТС	-0.15*** (0.001)	-0.22*** (0.002)
Интенсивность обмена сообщениями между БТС	-0.16 (0.13)	0.12 (0.16)
R ²	0.62	0.45

Примечание. В скобках указаны значения стандартных ошибок. ***, **, * – значимость на 1, 5 и 10%-ном уровне соответственно.

Из таблицы 8 следует, что, так же как в предыдущем случае, переменная «Интенсивность обмена сообщениями между БТС» не является значимой. Все остальные объясняющие переменные, описывающие количество ДТП, в обеих моделях значимы на 1%-ном уровне. Положительные значения коэффициентов при переменных «Интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения» и «Интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения» вполне естественны. Средняя скорость движения БТС оказывает

положительное воздействие на количество ДТП, а средняя скорость движения ОТС – отрицательное. Объясняется это следующим образом: увеличение скорости ОТС, в отличие от увеличения скорости БТС, является следствием достаточно разряженного дорожного движения и приводит к уменьшению дорожных заторов, а увеличение скорости БТС может приводить к непредсказуемым действиям со стороны ОТС.

Сравнивая коэффициенты при объясняющих переменных в обеих моделях, можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение интенсивности входного потока БТС на 0.005 единиц модельного времени (шаг варьирования, таблица 2) приводит к уменьшению количества ДТП модели 2 по сравнению с количеством ДТП модели 1 примерно на 1.92 единицы. Для ОТС указанная разница составляет около 1.6 единиц.
2. Увеличение средней скорости БТС на 10 км/ч (шаг варьирования, таблица 2) приводит к уменьшению количества ДТП модели 2 по сравнению с количеством ДТП модели 1 на 0.3 единицы. Для ОТС указанная разница составляет 0.7 единиц.

Отметим, что оценивание зависимости трафика выходного потока и числа ДТП от указанных параметров модели с помощью линейной функции дает в целом хорошие результаты. Лишь оценивание зависимости количества ДТП от исследуемых параметров в модели 2 можно назвать не очень удачным в силу достаточно низкого значения коэффициента детерминации, равного 0.45.

Перейдем к оцениванию зависимостей трафика выходного потока и количества ДТП в обеих моделях от указанных параметров модели в рамках нелинейных регрессионных уравнений. Итак, построим и исследуем степенные регрессионные уравнения со следующими зависимыми переменными:

- трафик выходного потока в модели 1;
- трафик выходного потока в модели 2;
- количество ДТП в модели 1;

- количество ДТП в модели 2.

После логарифмирования уравнений оценивание коэффициентов проводилось в рамках классической модели множественной регрессии с использованием метода наименьших квадратов, а стандартные ошибки оценены с помощью процедуры Уайта. Приведем результаты оценивания зависимости трафика выходного потока (таблица 9) и количества ДТП (таблица 10) от указанного набора объясняющих переменных.

Таблица 9. Зависимая переменная – трафик выходного потока, нелинейная регрессия

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

<i>Объясняющие переменные</i>	<i>Модель 1</i>	<i>Модель 2</i>
Константа	-2.65*** (0.03)	-3.79*** (0.02)
Интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения	0.08*** (0.002)	0.17*** (0.002)
Интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения	0.08*** (0.002)	0.13*** (0.002)
Средняя скорость движения БТС	0.55*** (0.003)	0.68*** (0.003)
Средняя скорость движения ОТС	1.07*** (0.004)	1.35*** (0.003)
Интенсивность обмена сообщениями между БТС	0.002 (0.002)	-0.0000013 (0.002)
R ²	0.72	0.77

Таблица 10. Зависимая переменная – количество ДТП, нелинейная регрессия

Источник: расчеты автора на основе модельных экспериментов

<i>Объясняющие переменные</i>	<i>Модель 1</i>	<i>Модель 2</i>
Константа	11.77*** (0.06)	13.86*** (0.07)
Интенсивность въезда БТС на указанный участок кругового движения	1.11*** 0.005	0.66*** (0.006)
Интенсивность въезда ОТС на указанный участок кругового движения	1.10*** (0.004)	1.12*** (0.006)
Средняя скорость движения БТС	0.30*** (0.008)	0.20*** (0.009)
Средняя скорость движения ОТС	-0.61*** (0.008)	-1.61*** (0.009)
Интенсивность обмена сообщениями между БТС	-0.07*** (0.005)	0.004 (0.005)
R ²	0.58	0.52

Примечание. В скобках указаны значения стандартных ошибок. ***, **, * – значимость на 1, 5 и 10%-ном уровне соответственно.

Сравнивая таблицы 9 и 10 с таблицами 7 и 8, соответственно, можно заключить, что степенные регрессии дают качественно те же выводы, что и линейные. Особенно это относится к описанию этих зависимостей для трафика выходного потока. Что касается описания зависимости для количества ДТП, то здесь можно выявить некоторое преимущество степенной регрессии. Во-первых, значение коэффициента детерминации для модели 2 увеличивается с 0.45 до 0.52, а во-вторых, в отличие от линейной зависимости, переменная «Интенсивность обмена сообщениями между БТС» является статистически значимой в первой модели на 1%-ном уровне. Соответствующее значение коэффициента в таблице

10 (-0.07) позволяет утверждать, что увеличение интенсивности сообщений между БТС на 14% позволяет снизить на 1% количество ДТП. При этом во второй модели данная переменная является незначимой. Объясняется это тем, что во второй модели БТС обладают способностью оценивать плотность дорожного потока, что позволяет им эффективно маневрировать. В такой ситуации обмен сообщениями о наличии ДТП становится для БТС неактуальным.

5.5. Выводы по главе 5

В данной главе предложен один из подходов к решению задачи, которая стоит перед операторами железнодорожного транспорта – оптимальное управление парком грузовых вагонов с целью максимизации прибыли. Транспортный оператор получает от заказчиков заявки, содержащие станцию отправления, станцию назначения, наименование и объем груза, который предполагается перевезти, а также ставку за перевозку одного вагона. Кроме того, транспортному оператору известно местоположение вагонов к началу планового периода. Планирование включает в себя выбор наиболее выгодных заявок и разработку последовательности грузовых и порожних перегонов для их выполнения с максимальной эффективностью. Предложенный подход основан на использовании сети всевозможных маршрутов отправки грузов от станций отправления к станциям назначения с последующим исключением из расчетов тех груженых или порожних маршрутов, которые, как предполагается, не будут задействованы в итоговом решении, либо вероятность их использования крайне мала. Отметим, что в задачах, которые встречаются на практике, как правило наблюдается многократное снижение размерности благодаря исключению из расчета большего числа порожних маршрутов за счет дополнительных признаков (например, исключать слишком дорогие, слишком дальние порожние перегоны). Построен алгоритм, формализующий данный подход в виде классической задачи линейного программирования. Преимущество предложенного подхода заключается в том, что он позволяет найти оптимальный

план перевозок на всём множестве возможных маршрутов. В то же время методы, связанные с генерацией колонок, решают серию задач линейного программирования на подмножествах множества всех маршрутов. Это может привести к тому, что полученное решение будет отличаться от оптимального. На практике это может означать упущенную выгоду для транспортного оператора в размере десятков миллионов рублей в месяц.

Также приведен эконометрический анализ результатов экспериментов, проведенных с двумя агент-ориентированными моделями, описывающими движение наземных транспортных средств, причем участниками дорожного движения являются как ОТС так и БТС. Принципиальным отличием второй модели от первой является наделение БТС дополнительной способностью – возможностью интеллектуальной оценки плотности дорожного потока. Как для первой, так и для второй модели исследована зависимость трафика выходного потока и числа ДТП на заданном участке дорожного движения в заданный период времени от ряда параметров модели таких как, средняя скорость транспортных средств, интенсивность входных потоков, частота обмена сообщениями между БТС. Исследование указанных зависимостей проводилось как в рамках линейной, так и степенной регрессий. Оценивание этих зависимостей позволило определить увеличение трафика выходного потока и уменьшение количества ДТП во второй модели относительно указанных характеристик в первой модели в зависимости от параметров модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны принципы управления железнодорожными грузоперевозками в режиме реального времени направленные на снижение риска чрезмерной загрузки станций в условиях роста неопределенности в мировой логистике. Они предполагают динамическое управление интенсивностью грузового потока на основе актуальной информации о степени загрузки станций и характера спроса на грузоперевозки. Разработана методология построения макроскопических моделей, с помощью которой строятся динамические модели, описывающие процесс организации железнодорожных грузовых перевозок в режиме реального времени. Основные результаты исследования:

1. Предложен новый способ построения динамических моделей организации железнодорожных грузоперевозок, основанный на взаимодействии соседних станций, в результате которого формируется грузопоток. Интенсивность такого потока зависит как от характеристик станций, так и от спроса на грузоперевозки. В зависимости от характера спроса используется тот или иной подход к организации грузоперевозок. В случае стабильно высокого спроса на грузоперевозки основной задачей является использование технических возможностей станций в полном объеме. Это сопряжено с их высокой загрузкой и как следствие вероятностью возникновения перебоев в системе грузоперевозок. Таким образом первый подход реализует принцип максимальной загрузки станций с возможностью реагирования на предельно допустимый ее уровень. Такой подход предполагает наличие специальных зон, куда временно отправляется часть грузов со станций, на которых загрузка превышает предельно допустимую, и системы контроля, обеспечивающей вывод грузов с указанных зон. При отсутствии стабильно высокого спроса на грузоперевозки нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере. В этом случае важно описать динамику грузопотока в зависимости от потенциала станций и спроса на перевозки. Разработаны два класса моделей,

описывающих процесс организации грузоперевозок в зависимости от характера спроса на них.

2. Построены и исследованы модели, описывающие процесс грузоперевозок в случае стабильно высокого спроса на них (первый класс моделей). Они представлены системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями. Дифференциальные уравнения описывают процесс загрузки станций, сопровождающийся увеличением грузопотока, а нелокальные линейные ограничения – систему контроля. Структура дифференциальных уравнений определяется конфигурацией железнодорожной сети.

Организация эффективного грузопотока в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки в рамках первой конфигурации железнодорожной сети (транснациональные перевозки) во многом зависит от правильной организации процесса взаимодействия промежуточных станций. Поэтому, в модели описывающей процесс организации грузоперевозок в рамках указанной конфигурации сети, узловые станции не присутствуют, и их влияние на систему грузоперевозок не учитывается, а сама модель описывается бесконечномерной системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями. В рамках такой модели однозначно определяется режим грузоперевозок, удовлетворяющий заданной системе контроля и обеспечивающий бесперебойный грузопоток.

Организации грузоперевозок в рамках второй конфигурации железнодорожной сети (замкнутая цепочка станций) характерна наличием глобально устойчивого режима грузоперевозок, позволяющего использовать потенциал всех станций в полном объеме.

При организации грузоперевозок в рамках третьей конфигурации железнодорожной сети (участок железнодорожной линии между узловыми станциями) одинаково важны как процедура взаимодействия промежуточных станций, так и процедуры, связанные с приемом грузов на начальной узловой станции и отправкой грузов с конечной узловой станции. Поэтому, модели,

описывающие процесс организации грузоперевозок в рамках данной конфигурации сети, строятся с учетом влияния узловых станций на систему грузоперевозок и описываются конечномерной системой дифференциальных уравнений, удовлетворяющей нелокальным линейным ограничениям, задающим систему контроля.

Класс решений такой системы крайне узок, что приводит к необходимости корректировки либо технологий грузоперевозок, либо системы контроля. В первом случае такая корректировка достаточна только на узловых станциях. Она заключается в том, чтобы, управляя интенсивностью приема грузов на начальной узловой станции и интенсивностью отправки грузов с конечной узловой станции, добиться организации грузопотока с указанной системой контроля. Такая организация грузопотока связана со скачкообразными изменениями числа задействованных путей на станциях. Описана зависимость указанных скачков от характеристик станций, интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивности распределения грузов с конечной узловой станции. Корректировка системы контроля заключается в ее ослаблении, т.е. в допущении малых отклонений. Исследована зависимость указанных отклонений от характеристик станций, интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивности распределения грузов с конечной узловой станции.

Показано, что синхронизация работы начальной узловой станции с работой конечной узловой станции и обеспечение соответствующей загрузки станций и зон временного хранения грузов в начальный момент времени, позволяет использовать инфраструктуру станций в полном объеме. В условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки это позволяет снижать неравномерность загрузки железнодорожной инфраструктуры и повышать интенсивность грузопотока.

3. Построены и исследованы модели, описывающие процесс грузоперевозок в случае отсутствия стабильно высокого спроса на грузоперевозки (второй класс моделей). Они представлены системой дифференциальных уравнений с рядом

параметров, характеризующих спрос на перевозки и технические потенциалы станций. Эти уравнения определяют динамику грузопотока, зависящую от указанных параметров. Отличительной особенностью указанной системы дифференциальных уравнений является множественность стационарных решений. Данный класс моделей описывает грузопоток для двух конфигураций участков железнодорожной сети: замкнутая цепочка станций и участок железной дороги между двумя узловыми станциями.

В первом случае определен установившийся уровень грузопотока при заданных правилах взаимодействия станций, а также выявлена его зависимость от потенциала станций. Во втором случае грузопоток формируется поступившими на начальную узловую станцию грузами с учетом технического потенциала станций. Основной характеристикой произвольной станции является степень несогласованности между приемом и отправкой грузов, которая определяет дисбаланс между объемом входных и выходных за единицу времени. Для заданного значения характеристики спроса на грузоперевозки с помощью управления степенью использования технического потенциала станций и режима распределения грузов с конечной узловой станции установлены наиболее приемлемые достижимые уровни степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях.

4. Предложен новый подход к решению задачи управления парком грузовых железнодорожных вагонов. Он позволяет найти оптимальный план на всем множестве возможных маршрутов, тогда как способы, связанные с методом генерации колонок, осуществляют поиск оптимальных планов на подмножествах всех возможных маршрутов. Представлены способы модификации данного подхода, которые приводят к ускорению вычислительных процессов. Суть их состоит в исключении из расчета тех груженых или порожних маршрутов, про которые заранее известно, что они либо не будут задействованы в итоговом решении, либо вероятность появления этих маршрутов в решении оценивается как очень низкая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Нормативно-правовые акты, статистические обзоры, сборники

1. Грузовой железнодорожный транспорт России в 2010-2015 гг. (аналитический доклад) / Институт проблем естественных монополий. – Май 2016. – URL.: <https://ipem.ru/content/gruzovoy-zheleznodorozhnyy-transport-rossii-v-2010-2015-gg/>. (дата обращения: 14.01.2024).
2. Грузовые перевозки в России: обзор текущей статистики / Аналитический центр при Правительстве РФ // Бюллетень о текущих тенденциях российской экономики. – 2019. – № 53, сентябрь. – URL: <https://ac.gov.ru/archive/files/publication/a/24196.pdf/> (дата обращения: 14.01.2024).
3. Железнодорожный транспорт России: вызовы до 2025 года / Институт проблем естественных монополий. – Апрель 2019. – URL.: <https://ipem.ru/content/ipem-opublikoval-doklad-zheleznodorozhnyy-transport-rossii-vyzovy-do-2025-goda/> (дата обращения: 14.01.2024).
4. Обзор работы грузового железнодорожного транспорта за 12 месяцев 2023 года – 2024 / Союз операторов железнодорожного транспорта. URL:<https://www.railsovet.ru/upload/iblock/d0c/9b2tx6i2zwc4u7x8lsvwuojqsbqh1rd.pdf> (дата обращения: 14.01.2024).
5. Об утверждении Технологии работы динамической модели загрузки инфраструктуры ОАО «РЖД» при реализации процесса согласования заявок на перевозку грузов и запросов-уведомлений на перевозку порожних грузовых вагонов. Распоряжение от 25 ноября 2022 года № 3090/р [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/1300534546> (дата обращения: 20.11.2023).
6. Опережающее развитие железнодорожной инфраструктуры – необходимое условие раскрытия экономического потенциала России / Институт проблем естественных монополий. – 16 ноября 2023. – URL.:

<https://ipem.ru/content/operezhayushchee-razvitie-zheleznodorozhnoy-infrastruktury-neobkhodimoe-uslovie-raskrytiya-ekonomicheskogo-potentsiala-rossii/> (дата обращения: 14.01.2024).

7. Путь на восток: развитие евразийских транспортных коридоров : аналитический доклад / Институт проблем естественных монополий. – 14 ноября 2023. – URL.: <https://ipem.ru/content/put-na-vostok-razvitie-evraziiskikh-transportnykh-koridorov/> (дата обращения: 14.01.2024).
8. Рынок грузового железнодорожного транспорта России: итоги 2022 года; прогноз до 2023 года / Агентство «INFOLine». – 2022. – URL: <https://infoline.spb.ru/upload/iblock/d87/d87543b232ee03d52088045b2b6026fb.pdf> (дата обращения: 14.01.2024).
9. Транспортная стратегия Российской Федерации до 2030 года с прогнозом на период до 2035 // Правительство Российской Федерации: официальный сайт. – 2021. – URL: <http://government.ru/docs/43948/> (дата обращения: 10.02.2022).

II. Монографии, диссертационные исследования, сборники научных трудов, статьи

10. **Авен, О. И.** Оптимизация транспортных потоков / О. И. Авен, С. Е. Ловецкий, Г. Е. Моисеенко. – М.: Наука, 1985.
11. **Акопов, А. С.** Многоагентная система управления наземными беспилотными транспортными средствами / А. С. Акопов, Л. А. Бекларян, Н. К. Хачатрян, А. Л. Бекларян, Е. В. Кузнецова // Информационные технологии. – 2020. – Т. 26, № 6. – С. 342–353.
12. **Акопов, А. С.** Система управления беспилотными транспортными средствами на основе нечеткой кластеризации. Часть 1. Модель движения транспортных средств / А. С. Акопов, Н. К. Хачатрян, Л. А. Бекларян, А. Л. Бекларян // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2020. – Т. 17, № 9. – С. 3–12.

13. **Акопов, А. С.** Система управления беспилотными транспортными средствами на основе нечеткой кластеризации. Часть 2. Нечеткая кластеризация и программная реализация / А. С. Акопов, Н. К. Хачатрян, Л. А. Бекларян, А. Л. Бекларян // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2020. – Т. 17, № 10. – С. 21–29.
14. **Васильева, Е. М.** Оптимизация планирования и управления транспортными системами / Е. М. Васильева, Р. В. Игудин, В. Н. Лившиц. – М.: Транспорт, 1987. – 208 с.
15. **Галабурда, В. Г.** Оптимальное планирование грузопотоков / В. Г. Галабурда. – М.: Транспорт, 1985. – 256 с.
16. **Гасников, А. В.** Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский, Я. А. Холодов, Н. Б. Шамрай – М.: МЦНМО, 2013. – 426 с.
17. **Давыдов, Б. И.** Методы, модели и алгоритмы снижения технических и экономических рисков в процессе текущего управления движением поездов : дис. ... доктора технических наук : 2.9.4. / Давыдов Борис Израильевич; ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта. – Хабаровск, 2022. – 258 с.
18. **Девятков, В. В.** Оперативное управление поездопотоками на сети железных дорог России с использованием имитационной модели «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте / В. В. Девятков, Т. В. Девятков, М. М. Назмеев [и др.] // Компьютерное и математическое моделирование» (ИСУЖТ-2019): Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование (ИСУЖТ-2019) : труды Восьмой научно-технической конференции (Москва, 21 ноября 2019 г.). – 2019. – С. 79–83.
19. **Долгий, А. И.** Концептуальный подход к построению современной платформы управления перевозочным процессом в ОАО «РЖД» / А. И.

- Долгий // Труды АО "НИИАС" : Сборник статей. Том 1. Выпуск 11. – Москва : Типография АО "Т 8 Издательские Технологии", 2021. – С. 9–31.
20. **Иносэ, Х.** Управление дорожным движением / Х. Иносэ, Т. Хамада. – М.: Транспорт, 1983. – 248 с.
21. **Лазарев, А. А.** Задачи железнодорожного планирования / А. А. Лазарев, Е. Г. Мусатова, Е. Р. Гафаров, А. Г. Кварацхелия. – М.: ИПУ РАН, 2012. – 92 с.
22. **Лазарев, А. А.** Задача управления парком грузовых железнодорожных вагонов / А. А. Лазарев, Р. Р. Садыков // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ 2014). – Москва: ИПУ РАН, 2014. – С. 5083–5093.
23. **Макаров, В. Л.** Регулирование транспортных потоков в городе – проблемы и решения / В. Л. Макаров, В. А. Житков, А. Р. Бахтизин А.Р. // Экономика мегаполисов и регионов. – 2009. – Т. 27, № 3 – С. 2–7.
24. **Мачарет, Д. А.** Влияние неравномерности загрузки железнодорожной инфраструктуры на скорости в грузовом движении / Д. А. Мачарет, А. Д. Разуваев, А. Ю. Ледней // Экономика железных дорог. – 2022. – № 6. – С. 14–28.
25. **Мачарет, Д. А.** Экономическая оценка сезонной неравномерности загрузки железнодорожной инфраструктуры / Д. А. Мачарет, А. Д. Разуваев, А. Ю. Ледней // Мир транспорта. – 2020. – № 1. – С. 94–115.
26. **Пленкин, С. А.** Разработка методики перераспределения вагонопотоков (на примере Северо-Западного полигона) / С. А. Пленкин, А. В. Новичихин // Бюллетень результатов научных исследований. – 2023. – Вып. 3. – С. 73–84.
27. **Стенбринк, П. А.** Оптимизация транспортных сетей / П. А. Стенбринк. – М.: Транспорт, 1981. – 320 с.
28. **Сухинова, А. Б.** Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков / А. Б. Сухинова, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин, Н. Г.

- Чубарова // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 118–126.
29. **Терёшина, Н. П.** Демонполизация, дерегулирование и конкурентоспособность железнодорожного транспорта России / Н. П. Терешина. – Москва : МИИТ, 2009. – 240 с.
30. **Тулупов, Л. П.** Многофакторное оперативное нормирование времени выполнения технологических процессов / Л. П. Тулупов, Ян Юйлиан // Вестник Всероссийского научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 1997. – № 5. – С. 20–24.
31. **Уизем, Дж.** Линейные и нелинейные волны / Дж Уизем. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
32. **Хачатрян, Н. К.** Основные проблемы железнодорожного транспорта России и пути их решения. / Н. К. Хачатрян // Вестник ЦЭМИ – 2024. – № 1.
33. **Хачатрян, Н. К.** Моделирование процесса организации железнодорожных грузоперевозок: монография/ Н. К. Хачатрян – Москва: МАКС Пресс, 2023. – 168 с.
34. **Хачатрян, Н. К.** Снижение размерности в задаче оптимального управления парком грузовых вагонов с использованием беспилотных локомотивов / Ф. А. Белоусов, Н. К. Хачатрян, И. В. Неволин // Бизнес-информатика. – 2022. – Т. 16, № 2. – С. 7–20.
35. **Хачатрян, Н. К.** Обзор динамических моделей организации грузоперевозок, основанных на взаимодействии соседних станций /Н. К. Хачатрян // Вестник ЦЭМИ. – 2021. – № 3–4.
36. **Хачатрян, Н. К.** Исследование динамики потока в модели организации грузоперевозок по круговой цепочке станций / Н. К. Хачатрян // Экономика и математические методы. – 2021. – Т. 57, №1. – С. 83–91.
37. **Хачатрян, Н. К.** Моделирование и оптимизация планов грузовых железнодорожных перевозок, выполняемых транспортным оператором /

- Ф. А. Белоусов, И. В. Неволин, Н. К. Хачатрян // Бизнес-информатика. – 2020. – Т. 14, № 2. – С. 21–35.
38. **Хачатрян, Н. К.** Модель организации грузоперевозок с учетом случайных воздействий / Н.К. Хачатрян // Вестник ЦЭМИ. – 2020. – №3.
39. **Хачатрян, Н. К.** Динамические модели организации грузопотока на железнодорожном транспорте / Л. А. Бекларян, Н.К. Хачатрян // Экономика и математические методы. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 62–73.
40. **Хачатрян, Н. К.** Исследование динамики емкостей перегонов в модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями / Н. К. Хачатрян, Г. Л. Бекларян, С. В. Борисова, Ф. А. Белоусов // Бизнес-информатика. – 2019. – Т. 13, № 1. – С. 59–70.
41. **Хачатрян, Н. К.** Динамические модели грузоперевозок / Н. К. Хачатрян // Вестник ЦЭМИ. – 2018. – № 2.
42. **Хачатрян, Н. К.** Динамическая модель организации грузоперевозок с возрастающей нагрузкой на узловые станции / Н. К. Хачатрян // Вестник ЦЭМИ. – 2018. – № 4.
43. **Хачатрян, Н. К.** Динамическая модель организации грузоперевозок / Л. А. Бекларян, Н. К. Хачатрян // Машинное обучение и анализ данных. – 2015. – Т. 1, № 13. – С. 1815–1826.
44. **Хачатрян, Н. К.** Динамическая модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций / Л. А. Бекларян, Н. К. Хачатрян // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – № 5. – С. 80– 83.
45. **Хачатрян, Н. К.** Об одном классе динамических моделей грузоперевозок / Л. А. Бекларян, Н. К. Хачатрян // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, №10. – С. 1649–1667.
46. **Хачатрян, Н. К.** Динамическая модель организации грузоперевозок при ограниченности емкостей перегонных путей / Н. К. Хачатрян // Бизнес-Информатика. – 2013. – №4. – С. 62–68.

47. **Хачатрян, Н. К.** О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели / Н. К. Хачатрян // Автоматика и телемеханика. – 2003 – №3. – С. 137–149.
48. **Хачатрян, Н. К.** О некоторых динамических моделях транспортных перевозок / Н. К. Хачатрян // Аудит и финансовый анализ. – 2003. – № 3. – С. 191–194.
49. **Хейт, Ф.** Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейт. – М.: Мир, 1966. – 286 с.
50. **Хусаинов, Ф. И.** Реформа железнодорожной отрасли в России: проблемы незавершённой либерализации / Ф. И. Хусаинов – М. : Издательский Дом «Наука», 2015. – 272 с.
51. **Хусаинов, Ф. И.** Перевозки грузов железнодорожным транспортом в 2022 году: экономико-статистический обзор / Ф. И. Хусаинов // Вестник транспорта. – 2023. – № 4. – С. 2–13.
52. **Швецов, В. И.** Математическое моделирование транспортных потоков / В. И. Швецов // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.
53. **Шенфельд, К. П.** Развитие методов управления перевозочным процессом в условиях рыночной экономики и реформирования железнодорожного транспорта / К. П. Шенфельд, Е. А. Сотников. – М.: Научный мир, 2015. – 202 с.
54. **Юсипов, Р. А.** Оперативное нормирование технологических операций / Р. А. Юсипов // Железнодорожный транспорт. – 2001. – № 8. – С. 61– 63.
55. **Якимов, М. Р.** Транспортное планирование: Создание транспортных моделей городов / М. Р. Якимов. – М.: Логос. – 2013. – 188 с.
56. **Ahuja, R.** Solving real-life locomotive scheduling problems / R. Ahuja, J. Liu, J. Orlin, D. Sharma, L. Shughart // Transportation Science. – 2005. – Vol. 39. – P. 503 – 517.

57. **Acuna-Agost, R.** A MIP-based local search method for the railway rescheduling problem / R. Acuna-Agost, P. Michelon, D. Feillet, S. Gueye // *Networks*. – 2011. – Vol. 57, № 1. – P. 69–86.
58. **Andersen, J.** Designing new European rail freight services / J. Andersen, M. Christiansen // *Journal of the Operational Research Society*. – 2009. – Vol. 60, № 3. – P. 348–360.
59. **Bando, M.** Structure Stability of Congestion in Traffic Dynamics / M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. – 1994. – Vol. 11. – P. 203–223.
60. **Bando, M.** Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation / M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama // *Physical Review. E*. – 1995. – Vol. 51, № 2. – P. 1035–1042.
61. **Bando, M.** Analysis of optimal velocity model with explicit delay / M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama // *Physical Review. E*. – 1998. – Vol. 58, № 5. – P. 5429–5435.
62. **Bar-Gera, H.** Origin-based algorithm for the traffic assignment problem / H. Bar-Gera // *Transportation Science*. – 2002. – Vol. 36, № 4. – P. 398–417.
63. **Beaujon, G. J.** A Model for Fleet Sizing and Vehicle Allocation / G. J. Beaujon, M. A. Turnquist // *Transportation Science*. – 1991. – Vol. 25, № 1. – P. 19–45.
64. **Benders, J.** Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems / J. Benders // *Numerische Mathematik*. – 1962. – Vol. 4. – P. 238–252.
65. **Brackstone, M.** Car following: A historical review / M. Brackstone, M. McDonald // *Transportation Research. F: Traffic Psychology and Behaviour*. – 1999. – Vol. 2, № 4 – P. 181–196.
66. **Brannlund, U.** Railway Timetabling using Lagrangian Relaxation / U. Brannlund, P. O. Lindberg, A. Nou, J. E. Nilsson // *Transportation Science*. – 1998. – Vol 32. – № 4. – P. 358–369.

67. **Buchel, B.** Empirical dynamics of railway delay propagation identified during the large-scale Rastatt disruption / B. Buchel, T. Spanniger, F. Corman // *Scientific Reports*. – 2020. – Vol. 10.
68. **Cai, X.** A fast heuristic for the train scheduling problem / X. Cai, C. J. Goh // *Computers and Operations Research*. – 1994. – Vol. 21, № 5. – P. 499–510.
69. **Cai, X.** Greedy heuristics for rapid scheduling of trains on a single track / X. Cai, C. J. Goh, A. I. Mees // *IIE Transactions*. – 1998. – Vol. 30. – P. 481–493.
70. **Caimi, G.** A new resource-constrained multicommodity flow model for conflict-free train routing and scheduling / G. Caimi, F. Chudak, M. Fuchsberger, M. Laumanns, R. Zenklusen // *Transportation Science*. – 2011. – Vol. 45, № 2. – P. 212–227.
71. **Caimi, G.** A model predictive control approach for discrete-time rescheduling in complex central railway station approach / G. Caimi, M. Fuchsberger, M. Laumanns, M. L'uthi // *Computers & Operations Research*. – 2012. – Vol. 39, № 11. – P. 2578–2593.
72. **Campetella, M.** Freight service design for the Italian railways company / M. Campetella, G. Lulli, U. Pietropaoli, N. Ricciardi // In 6th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways (ATMOS 2006). Open Access Series in Informatics (OASICs). – Volume 5. – P. 1–13.
73. **Cao, S.** Adaptive incremental nonlinear dynamic inversion control based on neural network for UAV maneuver / S. Cao, L. Shen, R. Zhang, H. Yu, X. Wang // *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. – Hong Kong. – 2019. – P. 642–647.
74. **Carey, M.** A model, algorithms and strategy for train pathing / M. Carey, D. Lockwood // *The Journal of Operational Research Society*. – 1995. – Vol. 46, № 8. – P. 988–1005.
75. **Cassidy, M. J.** Macroscopic fundamental diagrams for freeway networks: theory and observation / M. J. Cassidy, K. Jang, C. F. Daganzo // *Transportation*

- Research Record: Journal of the Transportation Research Board. – 2011. – Vol. 2260. – P. 8–15.
76. **Ceselli, A.** Optimizing the cargo express service of Swiss Federal Railways / A. Ceselli, M. Gatto, M. E. Lübbecke, M. Nunkesser, H. Schilling // *Transportation Science*. – 2008. – Vol. 42, № 4. – P. 450–465.
77. **Chen, C.** A Rear-End Collision Risk Evaluation and Control Scheme Using a Bayesian Network Model / C. Chen, X. Liu, H.-H. Chen, M. Li, L. A. Zhao // *IEEE Transactions of Intelligent Transportation Systems* – 2019. – Vol. 20, № 1. – P. 264–284.
78. **Chowdhury, D.** Statistical physics of vehicular traffic and some related systems / D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider // *Physics Reports*. – 2000. – Vol. 329, № 4–6. – P. 199–329.
79. **Corman, F.** A tabu search algorithm for rerouting trains during rail operations / F. Corman, A. D’Ariano, D. Pacciarelli, M. Pranzo // *Transportation Research. Part B*. – 2010 – Vol. 44, № 1. – P. 175–192.
80. **Corman, F.** Optimal inter-area coordination of train rescheduling decisions / F. Corman, A. D’Ariano, D. Pacciarelli, M. Pranzo // *Transportation Research. Part E: Logistics and Transportation Review* – 2012. – Vol. 48, № 1. – P. 71–88.
81. **Corman, F.** Dispatching and coordination in multi-area railway traffic management / F. Corman, A. D’Ariano, D. Pacciarelli, M. Pranzo // *Computers & Operations Research*. – 2014. – Vol. 44. – P. 146–160.
82. **Cremer, M.** A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations / M. Cremer, J. Ludwig // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1986. – Vol. 28, № 4. – P. 297–303.
83. **Daganzo, C. F.** The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory / C. F. Daganzo // *Transportation Research. Part B: Methodological* – 1994. – Vol. 28, № 4. – P. 269–287.

84. **Daganzo, C. F.** The cell transmission model. Part II: Network traffic / C. F. Daganzo // *Transportation Research. Part B: Methodological* – 1995. – Vol. 29, № 2. – P. 79–93.
85. **Daganzo, C. F.** An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic / C. F. Daganzo // *Transportation Research. Part B: Methodological* – 2008. – Vol. 42, № 9. – P. 771–781.
86. **D’Ariano, A.** Reordering and local rerouting strategies to manage train traffic in real-time / A. D’Ariano, F. Corman, D. Pacciarelli, M. Pranzo // *Transportation Science*. – 2008. – Vol. 42, № 4. – P. 405–419.
87. **D’Ariano, A.** An advanced real-time train dispatching system for minimizing the propagation of delays in a dispatching area under severe disturbances / A. D’Ariano, M. Pranzo // *Networks and Spatial Economics*. – 2009. – Vol. 9. – P. 63–84.
88. **Dekker, M.** Modelling railway delay propagation as diffusion-like spreading / Dekker, A. Medvedev, J. Rombouts, G. Siudem // *EPJ Data Science*. – 2022. – Vol. 11.
89. **Dekker, M.** Cascading dominates large-scale disruptions in transport over complex networks / M. M. Dekker, D. Panja // *PLoS ONE*. – 2021. – Vol. 16, № 1. – P. 1–17.
90. **Desaulniers, J.** Column generation / J. Desaulniers, J. Desrosiers, M. Solomon. – New York: Springer, 2005. – 358 p.
91. **Dessouky, M.** An exact solution procedure to determine the optimal dispatching times for complex rail networks / M. Dessouky, Q. Lu, J. Zhao, R. Leachman // *IIE Transactions*. – 2006. – Vol. 38, № 2. – P. 141–152.
92. **Ferreira, L.** Modelling rail track deterioration and maintenance: current practices and future needs / L. Ferreira, M. Murray // *Transport Reviews*. – 1997. – Vol. 17, № 3. – P. 207– 221.

93. **Forbes, M.** Exact solution of locomotive scheduling problems / M. Forbes, J. Holt, A. Watts // *Journal of the Operational Research Society*. – 1991. – Vol. 42. – P. 825– 831.
94. **Fotheringham, A. S.** A new set of special-interaction models: The theory of competing destinations / A. S. Fotheringham // *Environment and Planning. A*. – 1983. – Vol. 15. – P. 15–36.
95. **Fotheringham, A. S.** Modelling hierarchical destination choice / A.S. Fotheringham // *Environment and Planning. A*. – 1986. – Vol. 18, № 3 – P. 401–418.
96. **Fügenschuh, A.** Scheduling Locomotives and Car Transfers in Freight Transport / A. Fugenschuh, H. Homfeld, A. Huck, A. Martin, Z. Yuan // *Transportation Science*. – 2008. – Vol. 42, № 4. – P. 405–549.
97. **Fukasawa, R.** Solving the freight car flow problem to optimality / R. Fukasawa, M. P. Aragao, O. Porto, E. Uchoa // *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. – 2002. – Vol. 66, № 6. – P. 42–52.
98. **Gambardella, L. M.** Agent-based planning and simulation of combined rail/road transport / L. M. Gambardella, A. E. Rizzoli, P. Funk // *Simulation*. – 2002. – Vol. 78, № 5. – P. 293–303.
99. **Gazis, D. C.** *Traffic Science* / D. C. Gazis. – N.Y.: Wiley, 1974. – 293 p.
100. **Gazis, D. C.** Nonlinear follow the leader models of traffic flow / D. C. Gazis, R. Herman, R. W. Rothery // *Operations Research*. – 1961. – Vol. 9, № 4 – P. 545–567.
101. **Gerald, A. P.** An historical review of the gravity and potential concepts of human interaction / A. P. Gerald, Carrothers // *Journal of the American Institute of Planners*. – 1956. – Vol. 22. – P. 94–102.
102. **Geroliminis, N.** Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic / N. Geroliminis, J. Sun // *Transportation Research. Part B: Methodological*. – 2011. – Vol. 45, № 3. – P. 605 – 617.

103. **Goverde, R.** A delay propagation algorithm for large-scale railway traffic networks / R. Goverde // *Transportation Research. Part C: Emerging Technologies*. – 2010. – Vol. 18, № 3. – P. 269–287.
104. **Harris, B.** Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models / B. Harris, A.G. Wilson // *Environment and Planning. A*. – 1978. – Vol. 10, № 4 – P. 371–388.
105. **Harrod, S.** A closed form railway line delay propagation model / S. Harrod, F. Cerreto, O.A. Nielsen // *Transportation Research. Part C: Emerging Technologies*. – 2019. – Vol. 102. – P. 189–209.
106. **Helbing, D.** Derivation and empirical validation of a refined traffic flow model / D. Helbing // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* – 1996. – Vol. 233, № 1–2. – P. 253–282.
107. **Helbing, D.** Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition / D. Helbing, M. Treiber // *Physical Review Letters*. – 1998. – Vol. 81. – P. 3042–3045.
108. **Higgins, A.** Modeling single-line train operations / A. Higgins, L. Ferreira, E. Kozan // *Transportation Research Record*. – 1995. – Vol. 1489. – P. 9–16.
109. **Higgins, A.** Optimal scheduling of trains on a single line track / A. Higgins, E. Kozan, L. Ferreira // *Transportation Research. Part B: Methodological*. – 1996. – Vol. 30, № 2. – P. 147–161.
110. **Jeong, S. J.** The European freight railway system as a hub-and-spoke network / S. J. Jeong, C. G. Lee, J. Bookbinder // *Transportation Research. Part A: Policy and Practice*. – 2007. – Vol. 41, № 6. – P. 523–536.
111. **Jovanovic, D.** Tactical Scheduling of Rail Operations: The SCAN-I System / D. Jovanovic, P.T. Barker // *Transportation Science*. –1991. – Vol. 25, № 1. – P. 46–64.
112. **Keita, Kaba.** A Benders' decomposition for the real-time Railway Traffic Management Problem / K. Keita, P. Pellegrini, J. Rodriguez // *7th International*

- Conference on Railway Operations Modelling and Analysis (RailLille 2017). – Lille, 2017. – 19 p.
113. **Kerner, B. S.** Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control. The Long Road to Three-Phase Traffic Theory / B. S. Kerner. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 265 p.
114. **Khachatryan, N. K.** Synchronization of Inbound and Outbound Flows at Stations in the Model of Freight Transportation Organization / N. K. Khachatryan // Advances in Systems Science and Applications. – 2024. – Vol. 24. – № 1. – P. 82–94.
115. **Khachatryan, N. K.** Bifurcation in the model of cargo transportation organization / N. K. Khachatryan // Advances in Systems Science and Applications. – 2022. – Vol. 22, № 4. – P. 79–91.
116. **Khachatryan, N. K.** Modeling the process of cargo transportation between node stations / N. K. Khachatryan // International Journal of Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 34, № 6. – P. 1223–1235.
117. **Khachatryan, N. K.** Study of flow dynamics in the model of cargo transportation organization between node stations / N. K. Khachatryan // International Journal of Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 33, № 5. – P. 937–949.
118. **Khachatryan, N. K.** Model for organization cargo transportation at resource restrictions / L. A. Beklaryan, N. K. Khachatryan., A. S. Akopov // International Journal of Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 32, № 4. – 627–640.
119. **Khachatryan, N. K.** About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation / N. K. Khachatryan, A. S. Akopov, F. A. Belousov // Business Informatics. – 2018. – №1 (43) – P. 61–70.
120. **Khachatryan, N. K.** Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution / N. K. Khachatryan, A. S. Akopov // Business Informatics. – 2017. – №1. – P. 25–35.
121. **Khachatryan, N. K.** Traveling wave type solutions in dynamic transport

- models / L. A. Beklaryan, N. K. Khachatryan // *Functional Differential Equations*. – 2006. – Vol. 13, № 2. – P. 125–155.
122. **Kraay, D.** Optimal pacing of trains in freight railroads: model formulation and solution / D. Kraay, P. Barker, B. Chen // *Operations Research*. – 1991. – Vol. 39, № 1. – P. 82–99.
123. **Lampis, M.** On the kinetic theory of traffic flow in the case of a nonnegligible number of queueing vehicles / M. Lampis // *Transportation Science* – 1978. – Vol. 12, № 1 – P. 16–28.
124. **LeBlanc, L.** Global solutions for a nonconvex nonconcave rail network model / L. LeBlanc // *Management Science*. – 1976. – Vol. 23, № 2. – P. 131–139.
125. **Leventhal, T.** column generation algorithm for optimal traffic assignment / T. Leventhal, G. L. Nemhauser, L. Trotter // *Transportation Science*. – 1973. – Vol. 7, № 2. – P. 168–176.
126. **Lo, H. K.** Traffic equilibrium problem with route-specific costs: Formulation and algorithms / H.K. Lo, A. Chen // *Transportation Research. Part B: Methodological*. – 2000. – Vol. 34, № 6. – P. 493–513.
127. **Lu, Y.** Optimization of Joint Decision of Transport Mode and Path in Multi-Mode Freight Transportation Network / Y. Lu, S. Wang // *Sensors*. – 2022. – Vol. 22, № 13.
128. **Ludvigsen, J.** Extreme weather impacts on freight railways in Europe / J. Ludvigsen, R. Klaboe // *Natural Hazards*. – 2014. – Vol. 70. – P. 767–787.
129. **Lulli, G.** Service network design for freight railway transportation: the Italian case / G. Lulli, U. Pietropaoli, N. Ricciardi // *Journal of the Operational Research Society*. – 2011. – Vol. 62, № 12. – P. 2107–2119.
130. **Lusby, R.** A set packing inspired method for real-time junction train routing / R. Lusby, J. Larsen, M. Ehrgott, D. Ryan // *Computers & Operations Research*. – 2012. – Vol. 40, № 3. – P. 713–724.
131. **Menda, K.** Deep Reinforcement Learning for Event-Driven Multi-Agent Decision Processes / K. Menda, Y.-C. Chen, J. Grana, J. W. Bono, B. D. Tracey,

- M. J. Kochenderfer, D. Wolpert // IEEE Transactions of Intelligent Transportation Systems. – 2019. – Vol. 20, № 4. – P. 1259–1268.
132. **Nelson, P.** A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions / P. Nelson // Transport Theory and Statistical Physics. – 1995. – Vol. № 24, № 1–3. – P. 383–409.
133. **Newell, G. F.** Nonlinear effects in the dynamics of car following / G. F. Newell // Operations Research. – 1961. – Vol. 9, № 2 – P. 209–229.
134. **Pellegrini, P.** Recife-milp: An effectivemilp-based heuristic for the real-time railway traffic management problem / P. Pellegrini, G. Marli`ere, R. Pesenti, J. Rodriguez // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2015. – Vol. 16, № 5. – P. 2609–2619.
135. **Pipes, L.A.** An Operational Analysis of Traffic Dynamics / L. A. Pipes // Journal of Applied Physics. – 1953. – Vol. 24, № 3. – P. 274–281.
136. **Pyrgidis, C. N.** Railway Transportation Systems: Design, Construction and Operation / C. N. Pyrgidis. – Boca Raton: CRC Press, 2016. – 511 p.
137. **Popkov, Yu. S.** Macrosystems theory and its applications / Yu. S. Popkov. – Berlin: Springer Verlag, 1995. – 323 p.
138. **Prigogine, I.** Kinetic Theory of Vehicular Traffic / I. Prigogine, R. Herman. – N.Y.: Elsevier, 1971.
139. **Renyi, A.** On Two Mathematical Models of the Traffic on a Divided Highway / A. Renyi // Journal of Applied Probability. – 1964. – Vol. 1, № 2. – P. 311–320.
140. **Richards, P. I.** Shock Waves on the Highway / P. I. Richards // Operations Research. – 1956. – Vol. 4, № 1. – P. 42–51.
141. **Rodrigue, J.-P.** The Geography of Transport Systems / J.-P. Rodrigue. – New York: Routledge, 2020. – 456 p.
142. **Shvetsov, V. I.** Algorithms for distributing traffic flows/ V. I. Shvetsov // Automation and Remote Control. – 2009. – Vol. 70, № 10. – P. 1728–1736.

143. **Sadykov, R.** Solving a freight railcar flow problem arising in Russia / R. Sadykov, A. Lazarev, V. Shiryaev, A. Stratonnikov // In 13th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems. Open Access Series in Informatics (OASICs). – Sophia Antipolis, 2013. – Vol. 33 – P. 55–67.
144. **Sadykov, R.** Column generation for extended formulations / R. Sadykov, F. Vanderbeck // EURO Journal on Computational Optimization. – 2013. – Vol. 1, № 1–2. – P. 81–115.
145. **Sahin, I.** Railway traffic control and train scheduling based on intertrain conflict management / I. Sahin // Transportation Research. Part B: Methodological. – 1999. – Vol. 33, № 7. – P. 511-534.
146. **Sauder, R. L.** Computer Aided Train Dispatching: Decision Support Through Optimization / R.L. Sauder, W.M. Westerman // Interfaces. – 1983. – Vol. 13, № 6. – P. 24–37.
147. **Solomon, H.** Nonhomogeneous Poisson fields of Random Lines with Applications to Traffic Flow / H. Solomon, P. Wang // Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. – 1972. – Vol. 3: Probability. – P. 383–400.
148. **Sherali, H. D.** A Tactical Decision Support System for Empty Railcar Management / H.D. Sherali, A.B. Suharko // Transportation Science. – 1998. – Vol. 32, № 2. – P. 306–329.
149. **Sherali, H.D.** Static and Dynamic Time-Space Strategic Models and Algorithms for Multilevel Rail-Car Fleet Management / H.D. Sherali, C.H. Tuncbilek // Management Science. – 1997. – Vol. 43, № 2. – P. 235–250.
150. **Spiess, H.** Optimal strategies: A new assignment model for transit networks / H. Spiess, M. Florian // Transportation Research. Part B: Methodological. – 1989. – Vol. 23, № 2. – P. 83–102.
151. **Szpigiel, B.** Optimal train scheduling on a single line railway / B. Szpigiel // Operations Research. –1973. – Vol. 72. – P. 344–351.

152. **Tomer, E.** Presence of many stable nonhomogeneous states in an inertial car-following model / E. Tomer, L. Safonov, S. Havlin // *Physical review letters* – 2000. – Vol. 84, № 2. – P. 382–385.
153. **Törnquist, J.** Computer based decision support for railway traffic scheduling and dispatching: A review of models and algorithms / J. Törnquist // In *5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways (ATMOS 2005)*. Open Access Series in Informatics (OASICs). – 2005. – Vol. 2. – P. 1–23.
154. **Treiber, M.** Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations / M. Treiber, A. Hennecke, D. Helbing // *Physical Review. E*. – 2000. – Vol. 62, № 2. – P. 1805–1824.
155. **Veluscek, M.** Composite goal methods for transportation network optimization / M. Veluscek, T. Kalganova, P. Broomhead, A. Grichnik // *Expert Systems with Applications*. – 2015. – Vol. 42, № 8 – P. 3852–3867.
156. **Weik, N.** Macroscopic traffic flow in railway systems - A discussion of the applicability of fundamental diagrams / N. Weik // *Journal of Rail Transport Planning & Management*. – 2022. – Vol. 23.
157. **Wilson, A. G.** A family of spatial interaction models and associated developments / A. G. Wilson // *Environment and Planning. A: Economy and Space*. – 1971. – Vol. 3, № 1. – P. 255–282.
158. **Wilson A. G.** *Entropy in urban and regional modelling* / A. G. Wilson. – London: Pion, 1970. – 166 p.
159. **Xiong, G.** Decision - making of Lane Change Behavior Based on RCS for Automated Vehicles in the Real Environment / G. Xiong, Z. Kang, H. Li, W. Song, Y. Jin, J. Gong // *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*. – Changshu, 2018. – P. 1400–1405.
160. **Ziarati, K.** Locomotive Assignment with Heterogeneous Consists at CN North America/ K. Ziarati, F. Soumis, J. Desrosiers, S. Gelnis, A. Saintonge //

- European Journal of Operations Research. – 1997. – Vol. 97, № 2. – P. 281–292.
161. **Ziarati, K.** Locomotive Optimization Using Artificial Intelligence Approach / K. Ziarati, H. Chizari, A. Nezhad // Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering. – 2005. – Vol. 29. – P. 93–105.
162. **Zieger, S.** The influence of buffer time distributions in delay propagation modelling of railway networks / S. Zieger, N. Weik, N. Niesen // Journal of Rail Transport Planning & Management. – 2018. – Vol. 8, № 3–4. – P. 220–232.
163. **Ziye, Z.** Tracking Control of Unmanned Tracked Vehicle in Off-road Conditions with Large Curvature / Z. Ziye, L. Haiou, C. Huiyan, X. Shaohang, L. Wenli // IEEE Intelligent Transportation Systems Conference. – Auckland, 2019. – P. 3867–3873.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Формулировка некоторых определений и теорем

Для формулировки теорем, отражающих основные результаты, приведенные в параграфе 2.1. определим семейство банаховых пространств функций

$$L_{\mu}^1 C^{(k)}(R) = \left\{ x(\cdot): x(\cdot) \in C^{(k)}(R, R), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in R} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_R < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

с нормой

$$\|x\|_{\mu}^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in R} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_R.$$

Если прямую R заменить полупрямой $[0, +\infty)$, то получим определение пространства $L_{\mu}^1 C^k([0, +\infty))$.

Определим пространство $K^1 = \prod_{-\infty}^{+\infty} R_i$, $R_i = R$, $i \in Z$ с элементами $\kappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_i \in R$, $i \in Z$ и со стандартной топологией полного прямого произведения. В пространстве K^1 определим семейство гильбертовых подпространств

$$K_{2\mu}^1 = \{\kappa: \kappa \in K^1; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|_R^2 \mu^{2|i|} < +\infty\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

с нормой

$$\|\kappa\|_{2\mu} = [\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|_R^2 \mu^{2|i|}]^{1/2}.$$

Обозначим

$$M(\tau) = \tau \max[2\alpha, L_0],$$

где L – константа Липшица функции $\varphi(\cdot)$, участвующей в уравнении (1), α – параметр участвующий в уравнении (1), а τ – характеристика системы контроля (нелокальные ограничения (2)).

Рассмотрим неравенство относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

$$M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}] < \ln\mu^{-1}, \quad \mu \in (0, 1). \quad (160)$$

Множество решений неравенства (160) описывается функциями $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$, заданными на следующем рисунке

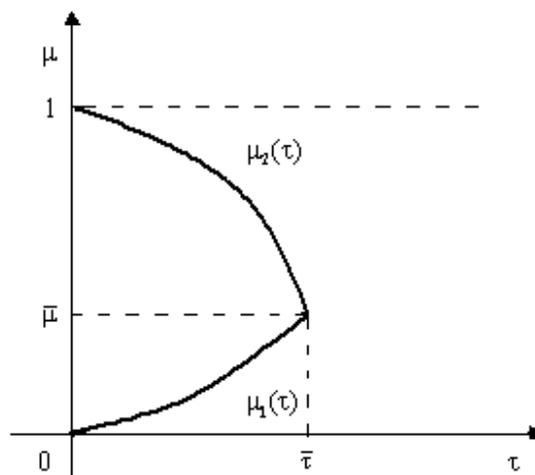


Рис. 109. Графики функций $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$

Источник: составлено автором

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in Z$, начального момента времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$ и характеристик τ , удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ (см. рис.109), существует решение $\{z_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ уравнения (1) типа бегущей волны (условие (2)) с характеристикой τ , удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. Более того, для всякого $i \in Z$ функция $z_i(\cdot)$ принадлежит пространству $L^1_{\tau\sqrt{\mu}}C^{(0)}([0, +\infty))$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a в том смысле, что каждая координата $z_i(\cdot)$, $i \in Z$ непрерывно зависит от начального условия a как элемент пространства $L^1_{\tau\sqrt{\mu}}C^{(0)}([0, +\infty))$. ■

Система (1)–(2) имеет два стационарных решения типа бегущей волны: $\bar{z}_1 \equiv \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$. Очевидно, что такие решения принадлежат пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (0, 1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\mu^2 - (2\alpha + \delta)\mu + \alpha = 0, \quad (161)$$

где $\delta = -\varphi'(\Delta)$. Из определения функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\delta > 0$. Решениями уравнения (161) являются вещественные числа $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}$, причем $0 < \tilde{\lambda} < 1, \tilde{\lambda} > 1$.

Определение 6. Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$ системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ называется устойчивым по Ляпунову, если существуют $\gamma > 0$, $\bar{t} \geq 0$ такие, что для произвольного $d \in K_{2\mu}^1$, удовлетворяющего условию $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \gamma$, решение $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_1 < \gamma$, что при $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \sigma_1$ решение $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$.

Устойчивое по Ляпунову стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$ системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} = 0$. ■

Теорема 9. Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, +\infty)$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$ типа бегущей волны уравнения (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$ $\mu \in (\tilde{\lambda}, 1)$ является асимптотически устойчивым, а стационарное решение $\bar{z}_1 = \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$ типа бегущей волны в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$ $\mu \in (0, 1)$ является неустойчивым. ■

Обозначим

$$\tau_{\max} = \sup\{\tau: \tau \leq \bar{t}, \mu_2(\tau) \geq \tilde{\lambda}\}.$$

На интервале $(0, \tau_{\max}]$ определяется функция $\lambda(\tau) = \max(\tilde{\lambda}, \mu_1(\tau))$, графически изображенная на рис. 110 (при $\tilde{\lambda} < \bar{\mu}$ – слева и при $\tilde{\lambda} > \bar{\mu}$ – справа).

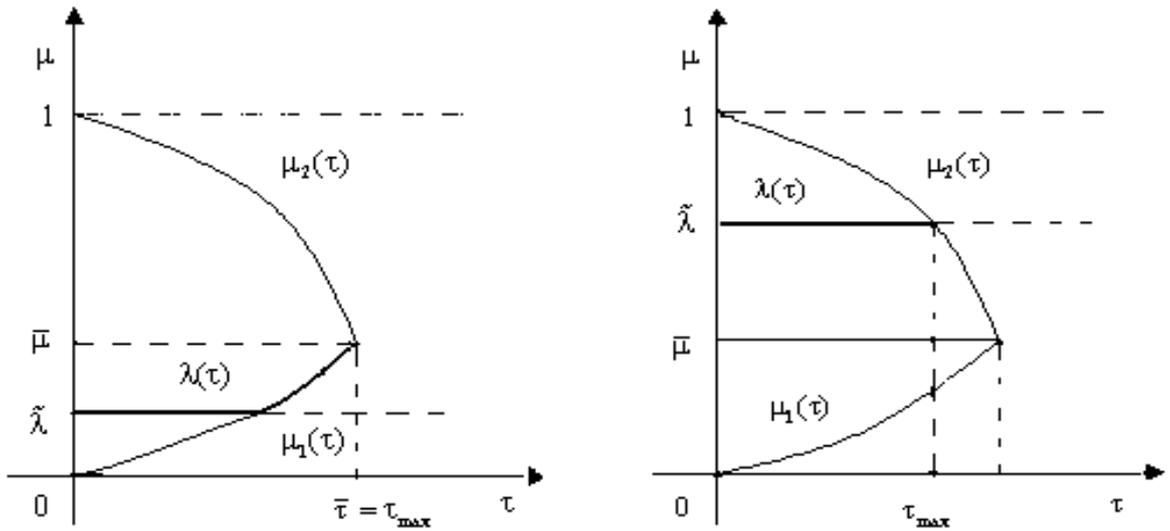


Рис. 110. График функции $\lambda(\tau)$

Источник: составлено автором

Определение 7. Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$, $\bar{z}_i = \bar{z}_{i+1}$, $i \in Z$ типа бегущей волны системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ называется устойчивым по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ , если: оно устойчиво по Ляпунову; существуют $\gamma > 0$, $\bar{t} \geq 0$ такие, что для произвольного числа d_0 , удовлетворяющего условию $|d_0 - \bar{z}_0| < \gamma$, решение $z(t) = \{z_n(t)\}_{n \in Z}$ системы (1)–(2) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_2 < \gamma$ такое, что из условия $|d_0 - \bar{z}_0| < \sigma_2$ следует, что решение $z(t)$ системы (1)–(2) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$.

Устойчивое по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$, $\bar{z}_i = \bar{z}_{i+1}$, $i \in Z$ системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} = 0$. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 10. Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, \tau_{\max})$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$ типа бегущей волны системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\gamma \in (\lambda(\tau), \mu_2(\tau))$ является асимптотически устойчивым среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ . ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Доказательства основных теорем и лемм

В данном приложении приводятся доказательства основных теорем и лемм, приведенных в главах 2, 3 и 4.

Доказательство леммы 3 (параграф 2.2). Изучим собственные числа матрицы A , введенной в параграфе 2.2. Матрица A , является симметрической и, следовательно, с ней связана некоторая квадратичная форма. Покажем, что квадратичная форма, определяемая матрицей A , будет отрицательно определенной. Для этого воспользуемся критерием Сильвестра, согласно которому квадратичная форма будет отрицательно определенной, если угловые миноры матрицы A чередуют знаки начиная с отрицательного. Вычеркнув последнюю строку и последний столбец матрицы A , получим угловой минор $(n - 1)$ -ого порядка. Обозначим его через $|B_{n-1}|$. Итак

$$|B_{n-1}| = \begin{vmatrix} -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что и другие угловые миноры, порядок m которых удовлетворяет условию $3 \leq m < n - 1$, имеют аналогичный вид. Если разложить минор порядка m , обозначаемый через $|B_m|$ по первому столбцу, и положить $|B_0| = 1$, $|B_{-1}| = 0$, то получим следующее соотношение:

$$|B_m| = -(2\alpha + \delta)|B_{m-1}| - \alpha^2|B_{m-2}|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (162)$$

Решим разностное уравнение (162) с использованием корней характеристического уравнения

$$x^2 + (2\alpha + \delta)x + \alpha^2 = 0. \quad (163)$$

Уравнение (163) имеет два действительных корня

$$x_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta), \quad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)).$$

Следовательно, разностное уравнение (162) имеет следующее решение

$$|B_m| = \frac{(-1)^m}{2^m} C_1 (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta)^m + \frac{1}{2^m} C_2 (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta))^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (164)$$

Для определения неизвестных констант C_1 и C_2 непосредственно вычислим определители первого и второго порядков, которые будут равны

$$|B_1| = -(2\alpha + \delta), \quad |B_2| = 3\alpha^2 + 4\alpha\delta + \delta^2.$$

Подставив их в формулу (164), получим следующую систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{cases} -(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta) C_1 + (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)) C_2 = -2(2\alpha + \delta) \\ (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta)^2 C_1 + (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta))^2 C_2 = 4(3\alpha^2 + 4\alpha\delta + \delta^2). \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет следующее решение

$$C_1 = \frac{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta}{2\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)}{2\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}}.$$

Подставив выражения для C_1 и C_2 в (164), получим

$$|B_m| = \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} ((-1)^m (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta)^{m+1} + (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta))^{m+1}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (165)$$

Так как по условию задачи $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, то несложно заметить, что $|B_m| < 0$ при нечетных значениях m и $|B_m| > 0$ при четных. Следовательно, все угловые миноры матрицы A кроме последнего (определителя матрицы A) удовлетворяют критерию Сильвестра.

Перейдем к изучению определителя матрицы A . Как следует из постановки задачи, естественно предположить, что размерность матрицы A не меньше 4. Разложив определитель A по первому столбцу, получим

$$|A_n| = -(2\alpha + \delta)|B_{n-1}| - \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -(2\alpha + \delta)|B_{n-1}| - \alpha^2|B_{n-2}| + (-1)^{n+1}\alpha^n + (-1)^{n+1}\alpha^n + (-1)^{2n+1}\alpha^2|B_{n-2}| = \\ = -(2\alpha + \delta)|B_{n-1}| - 2\alpha^2|B_{n-2}| - 2(-1)^n\alpha^n.$$

Итак, мы получили следующее соотношение

$$|A_n| = -(2\alpha + \delta)|B_{n-1}| - 2\alpha^2|B_{n-2}| - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots \quad (166)$$

Учитывая (162), соотношение (166) можно переписать следующим образом

$$|A_n| = |B_n| - \alpha^2|B_{n-2}| - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots \quad (167)$$

Подставив в правую часть (167) вместо $|B_n|$ и $|B_{n-2}|$ соответствующие выражения из (165) и сгруппировав слагаемые, получим

$$|A_n| = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} \left[\left(\frac{1}{4} (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta)^2 - \alpha^2 \right) (-1)^{n-2} (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta)^{n-1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{4} (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta))^2 - \alpha^2 \right) (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta))^{n-1} \right] - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots$$

После несложных преобразований данное выражение можно привести к следующему виду

$$|A_n| = \frac{1}{2^n} \left[(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + \delta + 2\alpha)^n (-1)^{n-2} + (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - \delta - 2\alpha)^n \right] - \\ - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots \quad (168)$$

Для всех $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ правая часть соотношения (168) является непрерывной функцией от переменных α и δ . Обозначим данную функцию через $g(\alpha, \delta)$. Вычислим производную функции $g(\alpha, \delta)$ по переменной δ

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\alpha, \delta)}{\partial \delta} = \frac{1}{2^n} & \left[n (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + \delta + 2\alpha)^{n-1} \left(\frac{2\alpha + \delta}{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} + 1 \right) (-1)^{n-2} + \right. \\ & \left. + n (\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - \delta - 2\alpha)^{n-1} \left(\frac{2\alpha + \delta}{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} - 1 \right) \right], \quad n = 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Несложно заметить, что

$$\frac{\partial g(\alpha, \delta)}{\partial \delta} > 0 \quad \text{при четных } n$$

и

$$\frac{\partial g(\alpha, \delta)}{\partial \delta} < 0 \quad \text{при нечетных.}$$

Кроме того

$$g(\alpha, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0 +.$$

Таким образом, для произвольных $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ функция $g(\alpha, \delta)$ принимает положительные значения при четных n и отрицательные значения при нечетных. Это означает, что определитель матрицы A (угловой минор наиболее высокого порядка) принимает отрицательные значения, если размерность матрицы A нечетная и положительные значения в случае четной размерности. Ранее было показано, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ все угловые миноры матрицы A меньшего порядка удовлетворяют критерию Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы, заданной матрицей A . ■

Доказательство теоремы 3 (параграф 3.3). Рассмотрим первую компоненту решения системы дифференциальных уравнений (37)-(39), т.е. функцию $z_0(\cdot)$. Данная функция является либо ограниченной, либо неограниченной. Предположим, что она является неограниченной сверху. Тогда существует последовательность $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_0(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_0(t_n) > 0.$$

Тогда из уравнения (37) и, в частности, из определения функции $\varphi_0(\cdot)$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_1(t_n) > 0,$$

а также выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_1(t_n) - z_0(t_n)] > 0. \quad (169)$$

Из неравенства (169) и первого уравнения системы дифференциальных уравнений (38) также следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_2(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_2(t_n) > 0,$$

и выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_2(t_n) - z_1(t_n)] > 0.$$

Действуя по индукции, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{m+1}(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_{m+1}(t_n) > 0, \quad (170)$$

и выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_{m+1}(t_n) - z_m(t_n)] > 0. \quad (171)$$

Из соотношений (170)–(171) следует, что левая часть уравнения (39) положительна, а правая – отрицательна. Данное противоречие связано с предположением о неограниченности функции $z_0(\cdot)$ сверху. Таким образом, функция $z_0(\cdot)$ не может быть неограниченной сверху. Точно так же можно показать, что она не может быть неограниченной снизу. Итак, функция $z_0(\cdot)$ является ограниченной.

Докажем, что остальные компоненты решения системы дифференциальных уравнений (37)–(39) также будут ограниченными. Начнем с функции $z_1(\cdot)$.

Предположим, что данная функция является неограниченной сверху. Тогда существует последовательность $\{t'_n\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1(t'_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_1(t'_n) > 0.$$

Далее, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве ограниченности функции $z_0(\cdot)$, можно показать, что имеют место соотношения (170) и (171), где последовательность $\{t_n\}$ будет заменена последовательностью $\{t'_n\}$. Следовательно, для выбранной последовательности $\{t'_n\}$ левая часть дифференциального уравнения (39) будет положительной, а правая – отрицательной. Данное противоречие связано с предположением о неограниченности функции $z_1(\cdot)$ сверху. Таким образом, функция $z_1(\cdot)$ также не может быть неограниченной сверху. Точно так же можно показать, что она не может быть неограниченной снизу. Методом индукции, используя систему дифференциальных уравнений (38)-(39), можно показать ограниченность функций $z_i(\cdot)$, $i = 2, 3, \dots, m + 1$. ■

Доказательство теоремы 4 (параграф 4.3). Найдем общее решение системы (108)-(110). Начнем с последнего уравнения, которое содержит одну переменную (z_{m+1}). Перепишем его в следующем виде

$$\dot{z}_{m+1}(t) + \lambda z_{m+1}(t) = (\lambda - \gamma)a. \quad (172)$$

Несложно проверить, что линейное уравнение (172) имеет следующее общее решение

$$z_{m+1}(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + c_{m+1}e^{-\lambda t}. \quad (173)$$

Подставляя выражение для z_{m+1} из (173) в предпоследнее уравнение системы (108)-(110), найдем его общее решение. Оно имеет следующий вид

$$z_m(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + e^{-\lambda t}(\lambda a c_{m+1} t + c_m). \quad (174)$$

Аналогичным образом найдем общие решения всех остальных уравнений системы (108)-(110) кроме начального:

уравнения (176) в зависимости от начальных условий может определяться как уравнением (179) так и уравнением (180), т.е. либо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = c_0$, где $c_0 < 1 - \mu$ либо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = 1 - \mu$. ■

Доказательство леммы 8 (параграф 4.3). Начнем с рассмотрения последней компоненты решения системы (108)-(110), т.е. $z_{m+1}(\cdot)$. Она имеет вид (173), где c_{m+1} определяется из условия

$$1 - \frac{\gamma}{\lambda} + c_{m+1}e^{-\lambda at_0} = \bar{z}_{m+1}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{z}_{m+1} \leq 1,$$

т.е.

$$c_{m+1} = \left(\frac{\gamma}{\lambda} - 1 + \bar{z}_{m+1}\right)e^{\lambda at_0}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{z}_{m+1} \leq 1. \quad (181)$$

Из (181) следует

$$\left(\frac{\gamma}{\lambda} - 1\right)e^{\lambda at_0} \leq c_{m+1} \leq \frac{\gamma}{\lambda}e^{\lambda at_0}.$$

Используя оценку для c_{m+1} и выражение (173), получим оценку для $z_{m+1}(\cdot)$.

Она примет следующий вид

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda}\right)(1 - e^{\lambda at_0}e^{-\lambda at}) \leq z_{m+1}(t) \leq 1 - \frac{\gamma}{\lambda}(1 - e^{\lambda at_0}e^{-\lambda at}). \quad (182)$$

Из (182) следует, что для всех $\gamma \leq \lambda$ имеет место неравенство

$$0 \leq z_{m+1}(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (183)$$

Покажем, что и для остальных компонент решения системы (108)-(110) выполняется неравенства, аналогичные неравенству (183). Начнем с компоненты $z_m(\cdot)$. Для этого рассмотрим уравнение (109) для $i = m$:

$$\dot{z}_m(t) = \lambda a (z_{m+1}(t) - z_m(t)), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Покажем, что функция $z_m(\cdot)$ не может принять значение большее 1. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_m(\cdot)$ должна быть точка $t^* > t_0$, такая что $z_m(t^*) = 1$. Тогда из (183) следует, что $\dot{z}_m(t^*) \leq 0$. Точно также функция $z_m(\cdot)$ не может принять значение меньше 0.

Таким образом, доказано, что для всех $\gamma \leq \lambda$ функция $z_m(\cdot)$ также удовлетворяет неравенству, аналогичному неравенству (183). Точно также доказывается выполнимость всех остальных неравенств. ■

Доказательство леммы 9 (параграф 4.3). Как и для остальных компонент покажем, что функция $z_0(\cdot)$ не может принять значение большее 1. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_0(\cdot)$ должна быть точка $t^{**} > t_0$, такая что $z_0(t^{**}) = 1$. Тогда из (108) следует, что

$$\dot{z}_0(t^{**}) = \lambda a(z_1(t^{**}) - 1),$$

т.е. согласно лемме 8, $\dot{z}_0(t^{**}) \leq 0$.

Перейдем к оценке функции $z_0(\cdot)$ снизу. Для этого исследуем поведение ее производной при $z_0(\cdot) \rightarrow 0 +$. Согласно (108), оно описывается уравнением

$$\dot{z}_0(t) = a(\mu - \lambda(1 - z_1(t))).$$

Исследуем неравенство

$$\mu - \lambda(1 - z_1(t)) \geq 0.$$

Перепишем его в виде

$$z_1(t) \geq 1 - \frac{\mu}{\lambda}. \quad (184)$$

Согласно лемме 8, для произвольных $\gamma > 0$, λ удовлетворяющих условию $\gamma \leq \lambda \leq 1$ выполняются неравенство

$$0 \leq z_1(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (185)$$

Из (185) следует, что для произвольного μ , удовлетворяющего условию $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}$, $\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$ такое, что при любом значении параметра λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ неравенство (184) будет выполняться для всех $t \in [t_0, +\infty)$, т.е. $\dot{z}_0(t) \geq 0$ при $z_0(t) \rightarrow 0 +$, что показывает ограниченность функции $z_0(\cdot)$

$$+ \dots \frac{\lambda_{m-k+1} a_{m-k+1} c_{m-k+1}}{(\lambda_{m-k} a_{m-k} - \lambda_{m-k+1} a_{m-k+1})} e^{-\lambda_{m-k+1} a_{m-k+1} t} + c_{m-k} e^{-\lambda_{m-k} a_{m-k} t} \quad (190)$$

.....

$$z_1(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_1 a_1} + \frac{\lambda_2 a_2 \lambda_3 a_3 \dots \lambda_{m+1} a_{m+1} c_{m+1}}{(\lambda_m a_m - \lambda_{m+1} a_{m+1})(\lambda_{m-1} a_{m-1} - \lambda_{m+1} a_{m+1}) \dots (\lambda_1 a_1 - \lambda_{m+1} a_{m+1})} e^{-\lambda_{m+1} a_{m+1} t} +$$

$$+ \frac{\lambda_2 a_2 \lambda_3 a_3 \dots \lambda_m a_m c_m}{(\lambda_{m-1} a_{m-1} - \lambda_m a_m)(\lambda_{m-2} a_{m-2} - \lambda_m a_m) \dots (\lambda_1 a_1 - \lambda_m a_m)} e^{-\lambda_m a_m t} +$$

$$+ \frac{\lambda_2 a_2 \lambda_3 a_3 \dots \lambda_{m-1} a_{m-1} c_{m-1}}{(\lambda_{m-2} a_{m-2} - \lambda_{m-1} a_{m-1})(\lambda_{m-3} a_{m-3} - \lambda_{m-1} a_{m-1}) \dots (\lambda_1 a_1 - \lambda_{m-1} a_{m-1})} e^{-\lambda_{m-1} a_{m-1} t} +$$

$$+ \dots \frac{\lambda_2 a_2 c_2}{(\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2)} e^{-\lambda_2 a_2 t} + c_1 e^{-\lambda_1 a_1 t}$$

Если $\lambda_1 a_1 = \lambda_2 a_2 = \dots = \lambda_{m+1} a_{m+1}$, то решения принимают следующий вид:

$$z_{m-1}(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m-1} a_{m-1}} + e^{-\lambda_{m-1} a_{m-1} t} \left(\frac{\lambda_{m+1} a_{m+1} c_{m+1}}{2} t^2 + c_m t + c_{m-1} \right);$$

.....

$$z_{m-k}(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m-k} a_{m-k}} + e^{-\lambda_{m-k} a_{m-k} t} \left(\frac{\lambda_{m+1} a_{m+1} c_{m+1}}{(k+1)!} t^{k+1} + c_m t^k + \dots + c_2 t + c_1 \right); \quad (191)$$

.....

$$z_1(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_1 a_1} + e^{-\lambda_1 a_1 t} \left(\frac{\lambda_{m+1} a_{m+1} c_{m+1}}{m!} t^m + c_m t^{m-1} + \dots + c_2 t + c_1 \right).$$

Во всех остальных случаях решения имеют следующий вид:

$$z_i(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_i a_i} + G_i(t), \quad (192)$$

где $G_i(t)$ сумма функций вида

$$b_p e^{-\lambda_p a_p t} \text{ и } c_l e^{-\lambda_j a_j t} t^k, \quad p = i, \dots, m+1, \quad j = i, \dots, m, \quad k = 1, \dots, m-i+1 \quad (193)$$

Из (187)-(193) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Остается решить первое уравнение системы (124)-(126). Для этого перепишем его в следующем виде

$$\dot{z}_0(t) = \begin{cases} \mu a_0 - \lambda_1 a_1 (1 - z_1(t)), & \text{если } z_0(t) < 1 - \mu, \quad t \in [t_0, +\infty), \\ a_0(1 - z_0(t)) - \lambda_1 a_1 (1 - z_1(t)), & \text{если } z_0(t) \geq 1 - \mu, \quad t \in [t_0, +\infty). \end{cases} \quad (194)$$

Рассмотрим следующие два уравнения

$$\dot{z}_0(t) = \mu a_0 - \lambda_1 a_1 (1 - z_1(t)), \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (195)$$

$$\dot{z}_0(t) = a_0(1 - z_0(t)) - \lambda_1 a_1 (1 - z_1(t)), \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (196)$$

где $\bar{t} \geq t_0$.

Используя выражения для $z_1(t)$, получим решение уравнений (195) и (196). Их можно представить следующим образом

$$z_0(t) = (\mu a_0 - d_{m+1})t + F_1(t) + c_0, \quad \text{где } F_1(t) \in C^\infty[\bar{t}, +\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t) = 0, \quad (197)$$

$$z_0(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{a_0} + F_2(t), \quad \text{где } F_2(t) \in C^\infty[\bar{t}, +\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t) = 0 \quad (198)$$

С помощью этих решений исследуем асимптотическое поведение решения уравнения (194). При $d_{m+1} < \mu a_0$ асимптотика решения уравнения (194) определяется соотношением (198), т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{a_0}$. При $d_{m+1} > \mu a_0$ асимптотика решения уравнения (194) определяется соотношением (197), т.е. $z_0(\cdot)$ линейно убывает и $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = -\infty$. Если же $d_{m+1} = \mu a_0$ то асимптотика решения уравнения (194) в зависимости от начальных условий может определяться как соотношением (197) так и соотношением (198), т.е. либо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = c_0$, где $c_0 < 1 - \mu$ либо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = 1 - \frac{d_{m+1}}{a_0}$. ■

Доказательство леммы 10 (параграф 4.4).

Начнем с рассмотрения последней компоненты решения системы (124)-(126), т.е. $z_{m+1}(\cdot)$. Она имеет вид (187), где c_{m+1} определяется из условия

$$1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1} a_{m+1}} + c_{m+1} e^{-\lambda_{m+1} a_{m+1} t_0} = \bar{z}_{m+1}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{z}_{m+1} \leq 1,$$

т.е.

$$c_{m+1} = \left(\frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1} a_{m+1}} - 1 + \bar{z}_{m+1} \right) e^{\lambda_{m+1} a_{m+1} t_0}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{z}_{m+1} \leq 1. \quad (199)$$

Из (199) следует

$$\left(\frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1}a_{m+1}} - 1\right) e^{\lambda_{m+1}a_{m+1}t_0} \leq c_{m+1} \leq \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1}a_{m+1}} e^{\lambda_{m+1}a_{m+1}t_0}.$$

Используя данную оценку для c_{m+1} и выражение (187), получим оценку для $z_{m+1}(\cdot)$. Она примет следующий вид

$$\begin{aligned} 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1}a_{m+1}} - \left(1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1}a_{m+1}}\right) e^{\lambda_{m+1}a_{m+1}(t_0-t)} &\leq z_{m+1}(t) \leq \\ &\leq 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1}a_{m+1}} \left(1 - e^{\lambda_{m+1}a_{m+1}(t_0-t)}\right) \end{aligned} \quad (200)$$

Из (200) следует, что при выполнении условия $d_{m+1} \leq \lambda_{m+1}a_{m+1}$ имеет место неравенство

$$0 \leq z_{m+1}(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (201)$$

Покажем, что и для остальных компонент решения системы (124)-(126) выполняется неравенства, аналогичные неравенству (201). Начнем с компоненты $z_m(\cdot)$. Для этого рассмотрим уравнение (125) для $i = m$:

$$\dot{z}_m(t) = \lambda_m a_m (1 - z_m(t)) - \lambda_{m+1} a_{m+1} (1 - z_{m+1}(t)), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Покажем, что функция $z_m(\cdot)$ не может принять значение больше 1. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_m(\cdot)$ должна быть точка $t^* > t_0$, такая что $z_m(t^*) = 1$. В таком случае

$$\dot{z}_m(t^*) = -\lambda_{m+1} a_{m+1} (1 - z_{m+1}(t^*))$$

и в силу неравенства (201) будет следовать, что $\dot{z}_m(t^*) \leq 0$, т.е. $z_m(\cdot)$ сверху ограничена единицей. Покажем, что функция $z_m(\cdot)$ также не может принять значение меньше 0. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_m(\cdot)$ должна быть точка $t^{**} > t_0$, такая что $z_m(t^{**}) = 0$. Тогда

$$\dot{z}_m(t^{**}) = \lambda_m a_m - \lambda_{m+1} a_{m+1} (1 - z_{m+1}(t^{**}))$$

и при выполнении условия $d_{m+1} \leq \lambda_{m+1} a_{m+1} \leq \lambda_m a_m$ будет выполняться неравенство $\dot{z}_m(t^{**}) \geq 0$, т.е. $z_m(\cdot)$ снизу ограничена нулем.

Точно также доказывается выполнимость всех остальных неравенств (127) за исключением первого (относительно функции $z_0(\cdot)$). ■

Доказательство леммы 11 (параграф 4.4).

Как и для остальных компонент покажем, что функция $z_0(\cdot)$ не может принять значение большее 1. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_0(\cdot)$ должна быть точка $\tilde{t} > t_0$, такая что $z_0(\tilde{t}) = 1$. Тогда из (124) следует, что

$$\dot{z}_0(\tilde{t}) = \lambda_1 a_1 (z_1(\tilde{t}) - 1),$$

т.е. согласно лемме 10, $\dot{z}_0(\tilde{t}) \leq 0$. Это означает, что функция $z_0(\cdot)$ сверху ограничена единицей.

Оценим функцию $z_0(\cdot)$ снизу. Для этого исследуем поведение ее производной при $z_0(\cdot) \rightarrow 0+$. Согласно (124), оно описывается уравнением

$$\dot{z}_0(t) = \mu a_0 - \lambda_1 a_1 (1 - z_1(t)).$$

Исследуем неравенство

$$\mu a_0 - \lambda_1 a_1 (1 - z_1(t)) \geq 0.$$

Покажем, что для произвольного $0 < \mu \leq 1$, $t \in [t_0, +\infty)$ существует диапазон изменения параметра λ_1 на полуинтервале $(0, 1]$, для которого данное неравенство справедливо. Для этого перепишем его в виде

$$z_1(t) \geq 1 - \frac{\mu a_0}{\lambda_1 a_1}. \quad (202)$$

Согласно лемме 10

$$0 \leq z_1(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (203)$$

Из (203) следует, что произвольного μ , удовлетворяющего условию $0 < \mu \leq 1$, a_0, a_1 , удовлетворяющих условию $a_0 \leq a_1$ существует $\tilde{\lambda}_1$, $\frac{a_0}{a_1}\mu \leq \tilde{\lambda}_1 \leq 1$ такое, что при любом значении параметра λ_1 из отрезка $\left[\frac{a_0}{a_1}\mu, \tilde{\lambda}_1\right]$ неравенство (202) будет выполняться для всех $t \in [t_0, +\infty)$, т.е. $\dot{z}_0(t) \geq 0$ при $z_0(t) \rightarrow 0+$, что показывает ограниченность функции $z_0(\cdot)$ снизу значением 0. Очевидно, что $\tilde{\lambda}_1$ зависит как от параметров μ, a_0, a_1 , так и от начальных условий, поэтому обозначим его $\tilde{\lambda}_1(\mu, a_0, a_1, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Пример решения задачи управления парком грузовых вагонов транспортным оператором

В данном приложении приведен простой модельный пример решения задачи оптимального управления парком грузовых вагонов с небольшим числом станций и коротким горизонтом планирования. Для данного примера используется как исходный алгоритм сведения указанной задачи к задаче линейного программирования большой размерности, так и модифицированный.

Пусть число станций равно 4 ($N = 4$), горизонт планирования составляет три дня ($T = 3$). Список поступивших заявок состоит из пяти позиций. Приведем эти заявки в виде таблицы 11.

Таблица 11. Список заявок на перевозку груза в модельном примере

Источник: составлено автором

№	Пункт отправления	Пункт назначения	Объем заявки (в вагонах)	Ставка (в условных единицах)
1	1	3	3	2.9
2	2	1	5	1.1
3	2	3	4	2.3
4	3	2	7	1.9
5	3	4	6	2.1

На основе списка заявок необходимо составить две матрицы – матрицу тарифов P , элементы которой записаны в условных единицах, и матрицу объемов заявок \bar{Q} :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.9 & 0 \\ 1.1 & 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 1.9 & 0 & 2.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее приведем время движения как груженых, так и порожних маршрутов в виде значений матриц $\theta 1$ и $\theta 2$:

$$\theta 1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \theta 2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что диагональные элементы матрицы $\theta 2$ берутся равными единице. Связано это с тем, что если вагоны необходимо оставить на станции до следующего дня, то это равносильно тому, что они как бы отправляются из данной станции на саму себя в рейс длительностью один день.

Значения тарифов РЖД на порожние перегоны, так же как и ставки, выраженные в условных единицах, характеризуются значениями элементов матрицы C :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1.9 & 1.3 & 1.9 \\ 1.2 & 0 & 1.8 & 0.9 \\ 1.1 & 1.2 & 0 & 1.6 \\ 1.3 & 1.5 & 1.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В рамках данной задачи предполагается, что вагоны могут оставаться на станциях до следующего дня бесплатно, поэтому диагональные элементы матрицы C нулевые.

Начальное распределение вагонов характеризуется следующими векторами:

$$\bar{s}^0(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{s}^0(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В период $t = 3$ вагоны не прибывают, что эквивалентно нулевому вектору $\bar{s}^0(3)$.

Перепишем эту задачу в новых обозначениях. Вектор PC имеет размерность $2TN^2 = 2 \cdot 3 \cdot 16 = 96$. Представление такого вектора в явном виде

нецелесообразно, поэтому рассмотрим промежуточные векторы p и c длиной $N^2 = 16$, составленные на основе матриц P и C :

$$p = (0 \ 0 \ 2,9 \ 0 \ 1,1 \ 0 \ 2,3 \ 0 \ 0 \ 1,9 \ 0 \ 2,1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$c = (0 \ 1,9 \ 1,3 \ 1,9 \ 1,2 \ 0 \ 1,8 \ 0,9 \ 1,1 \ 1,2 \ 0 \ 1,4 \ 1,3 \ 1,5 \ 1,2 \ 0)^T$$

Вектор PC получается последовательной конкатенацией этих векторов, а именно:

$$PC = (p^T, \ p^T, \ p^T, \ c^T, \ c^T, \ c^T)^T.$$

Вектор Q , получаемый из матрицы \bar{Q} и имеющий размерность $N^2 = 16$, принимает следующий вид:

$$Q = (0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 5 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 7 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Вектор S^0 , размерность которого составляет $TN = 3 \cdot 4 = 12$, сконструирован на основе векторов $\bar{S}^0(1)$ и $\bar{S}^0(2)$ и имеет следующий вид:

$$S^0 = (0 \ 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Осталось получить матрицы A_{in} , A_{out} и A_Q . Начнем с матрицы A_Q , ее размерность составляет $(N^2 \times 2TN^2) = (16 \times 96)$. Представим ее в формате разреженной матрицы, т.е. укажем координаты ненулевых элементов, равные единице. Список координат единичных элементов матрицы A_Q следующий (здесь и далее нумерация строк и столбцов начинается с единицы):

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10), (11, 11), (12, 12), (13, 13), (14, 14), (15, 15), (16, 16), (1, 17), (2, 18), (3, 19), (4, 20), (5, 21), (6, 22), (7, 23), (8, 24), (9, 25), (10, 26), (11, 27), (12, 28), (13, 29), (14, 30), (15, 31), (16, 32), (1, 33), (2, 34), (3, 35), (4, 36), (5, 37), (6, 38), (7, 39), (8, 40), (9, 41), (10, 42), (11, 43), (12, 44), (13, 45), (14, 46), (15, 47), (16, 48).

В таком же формате приводятся матрицы A_{in} и A_{out} , размерность которых составляет $(TN \times 2TN^2) = (12 \times 96)$. Список координат единичных элементов матрицы A_{in} :

(5, 1), (7, 3), (12,4), (5, 5), (6, 6), (8, 8), (5, 9), (10, 10), (7, 11), (5, 13), (10, 14), (7, 15), (8, 16), (9, 17), (11, 19), (9, 21), (10, 22), (12, 24), (9, 25), (11, 27), (9, 25), (11, 27), (9, 29), (11, 31), (12, 32), (5, 49), (7, 51), (5, 53), (6, 54), (8, 56), (5, 57), (10, 58), (7, 59), (5, 61), (10, 62), (7, 63), (8, 64), (9, 65), (10, 70), (12, 72), (9, 73), (11, 75), (9, 77), (11, 79), (12, 80).

Список координат единичных элементов матрицы A_{out} :

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11), (3, 12), (4, 13), (4, 14), (4, 15), (4, 16), (5, 17), (5, 18), (5, 19), (5, 20), (6, 21), (6, 22), (6, 23), (6, 24), (7, 25), (7, 26), (7, 27), (7, 28), (8, 29), (8, 30), (8, 31), (8, 32), (9, 33), (9, 34), (9, 35), (9, 36), (10, 37), (10, 38), (10, 39), (10, 40), (11, 41), (11, 42), (11, 43), (11, 44), (12, 45), (12, 46), (12, 47), (12, 48), (1, 49), (1, 50), (1, 51), (1, 52), (2, 53), (2, 54), (2, 55), (2, 56), (3, 57), (3, 58), (3, 59), (3, 60), (4, 61), (4, 62), (4, 63), (4, 64), (5, 65), (5, 66), (5, 67), (5, 68), (6, 69), (6, 70), (6, 71), (6, 72), (7, 73), (7, 74), (7, 75), (7, 76), (8, 77), (8, 78), (8, 79), (8, 80), (9, 81), (9, 82), (9, 83), (9, 84), (10, 85), (10, 86), (10, 87), (10, 88), (11, 89), (11, 90), (11, 91), (11, 92), (12, 93), (12, 94), (12, 95), (12, 96).

После того как все векторы и матрицы определены, задача (156)–(159) может быть решена. Результатом решения данной задачи является вектор K , размерность которого составляет $2TN^2 = 96$. Приведем одно из найденных решений K , выписав значения только ненулевых элементов:

$$K_7 = 2; K_{10} = 1; K_{19} = 3; K_{26} = 2; K_{39} = 2; K_{42} = 2; K_{44} = 6;$$

$$K_{62} = 1; K_{63} = 2; K_{67} = 2; K_{79} = 1.$$

Переведем данное решение в формат матриц $K1(t)$ и $K2(t)$:

$$K1(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; K1(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; K1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (204)$$

$$K2(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; K2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; K2(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (205)$$

Полученное решение (204)-(205), в силу малого масштаба задачи, также может быть представлено в виде схемы, изображенной на рисунке 111.

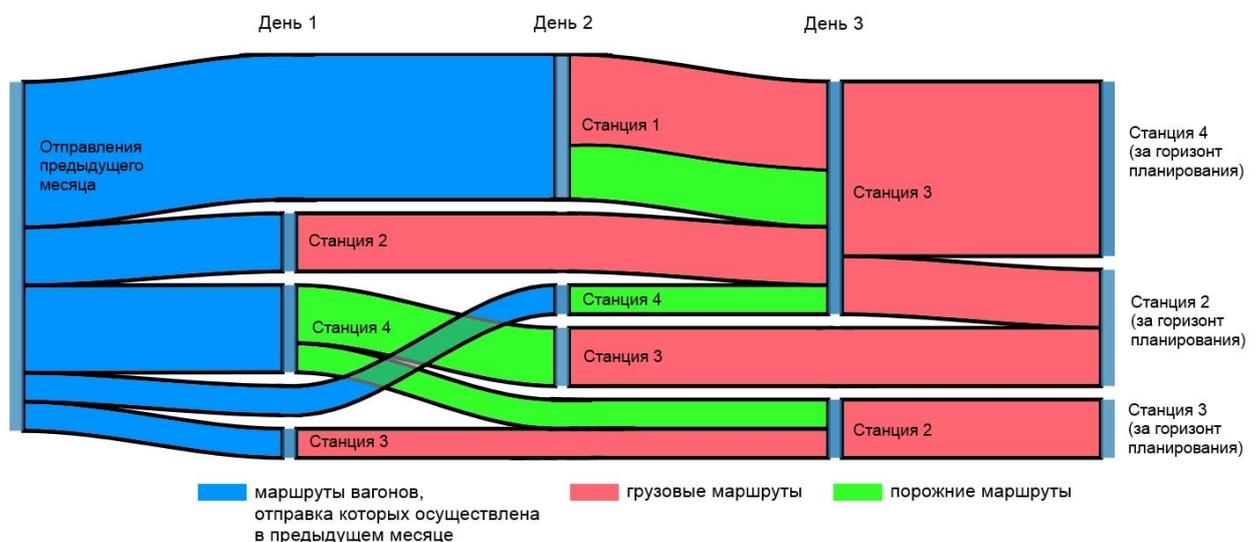


Рис. 111. Схематичное представление решения (204)-(205)

Источник: составлено авторами, см: Белоусов Ф. А., Неволин И. В., Хачатрян Н. К. // Моделирование и оптимизация планов грузовых железнодорожных перевозок, выполняемых транспортным оператором // Бизнес-информатика. – 2020. – Т. 14, № 2. – С. 21-35

Прибыль от полученного решения можно рассчитать двумя эквивалентными способами: либо на основе формулы, используемой в (151), либо как произведение векторов $PC^T \cdot K$. Для данной задачи ее значение, выраженное в условных единицах, получается равным 32.3.

Проанализируем полученное решение. Видно, что одна из заявок на транспортировку пяти вагонов со станции 2 на станцию 1 осталась

неисполненной. Заявка на транспортировку семи вагонов со станции 3 на станцию 2 должна выполняться частично в объеме пяти вагонов. Остальные заявки в соответствии с планом выполняются полностью. Заявки со станции 1 на станцию 3, а также со станции 3 на станцию 4 должны быть выполнены в соответствии с найденным планом полностью единичными рейсами. Заявки со станции 2 на станцию 3 и со станции 3 на станцию 2 в соответствии с планом выполняются поэтапно – в два рейса для первой заявки и в три рейса для второй. Также найденный план предусматривает несколько порожних рейсов. Так, в первый день со станции 4 на станцию 2 направляется один порожний вагон, и со станции 4 на станцию 3 – два порожних вагона. Длительность первого порожнего перегона составляет двое суток (вагон приедет на станцию 2 к третьему периоду), длительность второго порожнего рейса – одни сутки. Аналогично, во второй день осуществляется два порожних перегона: одного вагона со станции 4 на станцию 3 и двух вагонов со станции 1 на станцию 3, длительность обоих перегонов составляет одни сутки. В заключительном третьем периоде отправлений порожних рейсов не запланировано.

Снижение размерности задачи

Напомним, что размерность представленной выше задачи равна $2TN^2 = 96$. Рассчитаем размерность при решении этой же задачи с помощью модифицированного алгоритма. Он даёт размерность $T \cdot (N_{cargo} + N_{empty})$, поэтому для того, чтобы ее рассчитать необходимо знать значения параметров N_{cargo} и N_{empty} . Для определения N_{empty} необходимо понимать, какие порожние маршруты планируется включить в расчет, а какие – нет. Исключим из рассмотрения те порожние маршруты, станции прибытия в которых не являются станциями отправления ни для одной из заявок на груженные рейсы. Такая станция одна, а именно – четвертая. Уберем из рассмотрения все порожние маршруты, в которых пунктом назначения является станция 4, оставим только маршрут из 4 в 4 (вагон остается на станции до следующего периода). Получается, из рассмотрения убираются порожние маршруты из 1 в 4, из 2 в 4 и

из 3 в 4. Получаем, что $N_{empty} = N^2 - 3 = 13$. Что касается N_{cargo} , то его значение равно числу заявок, т.е. в нашем случае $N_{cargo} = 5$. Таким образом, размерность при использовании нового алгоритма получается равной $T \cdot (N_{cargo} + N_{empty}) = 54$. Получается, что конкретно для этого примера размерность сократилась примерно на 44 %. Отдельно отметим, что на практике из расчета можно исключать порожние маршруты и по другим признакам, например, можно не учитывать порожние маршруты, тариф по которым выше некоторого порогового значения. Поэтому в реальных задачах можно добиться еще большего сокращения размерности по сравнению с $2TN^2$.

В качестве примера можно привести задачу поиска оптимального плана, которая решалась на практике для $N = 1126$ станций, со сроком планирования $T = 30$ дней и количеством заявок на транспортировку грузов равным 1616. Размерность задачи при решении её первоначальным алгоритмом составляет $2TN^2 = 76\,072\,560$. Для определения размерности задачи, которая получится с помощью модифицированного алгоритма рассчитаем N_{cargo} и N_{empty} . Очевидно, $N_{cargo} = 1616$, что соответствует количеству заявок. Для расчета N_{empty} из рассмотрения необходимо убирать все порожние маршруты в направлении станций, которые не фигурируют в заявках в качестве станций отправления. Кроме этого, из рассмотрения убираются порожние маршруты, тарифы по которым превышают 50 000 руб. В результате этого количество порожних маршрутов, которые будут учитываться при расчете, получается равным $N_{empty} = 82\,058$, т.е. в расчет попадает примерно 6,5 % от всех возможных порожних маршрутов, количество которых равно $N^2 = 1\,267\,877$. В итоге размерность задачи получается равной $T \cdot (N_{cargo} + N_{empty}) = 2\,510\,220$, т.е. уменьшается примерно в 30 раз.

Выпишем задачу линейного программирования (156)-(159) для модельного примера. Для этого определим значения матриц A_{in} , A_{out} и A_Q , а

также векторов PC , S_0 , Q . После этого решим данную задачу и сравним полученное решение с первоначальным.

Составим динамические списки $routes_from_station_cargo$, $routes_to_station_cargo$ и $routes_from_station_empty$, $routes_to_station_empty$:

$$routes_from_station_cargo = \{1, 2, 2, 3, 3\},$$

$$routes_to_station_cargo = \{3, 1, 3, 2, 4\},$$

$$routes_from_station_empty = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\},$$

$$routes_to_station_empty = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4\}.$$

Составим векторы p и c :

$$p = (2,9 \quad 1,1 \quad 2,3 \quad 1,9 \quad 2,1)^T,$$

$$c = (0 \quad 1,9 \quad 1,3 \quad 1,2 \quad 0 \quad 1,8 \quad 1,1 \quad 1,2 \quad 0 \quad 1,3 \quad 1,5 \quad 1,2 \quad 0)^T.$$

Вектор PC получается последовательной конкатенацией полученных векторов:

$$PC = (p^T, p^T, p^T, c^T, c^T, c^T)^T.$$

Вектор Q , отвечающий за объем заявок, принимает следующий вид:

$$Q = (3 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 6)^T.$$

Вектор S_0 , характеризующий начальное распределение вагонов по времени и по станциям, примет вид:

$$S_0 = (0 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.$$

Получим матрицы A_{in} , A_{out} и A_Q . Поскольку эти матрицы являются разреженными матрицами, и ненулевые элементы могут принимать только единичные значения, поэтому, как и ранее, запишем эти матрицы в разреженном формате, указывая координаты элементов, принимающих единичные значения. Выпишем единичные координаты матрицы A_Q , размерность которой равна $N_{cargo} \times T \cdot (N_{cargo} + N_{empty}) = 5 \times 54$ (здесь и далее нумерация строк и столбцов начинается с единицы):

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10), (1, 11), (2, 12), (3, 13), (4, 14), (5, 15).

Размерность матриц A_{in} и A_{out} равна $T \cdot N \times T \cdot (N_{cargo} + N_{empty}) = 12 \times 54$.

Координаты единичных элементов матрицы A_{in} примут следующий вид:

(7, 1), (5, 2), (11, 3), (10, 4), (12, 5), (11, 6), (9, 7), (5, 16), (6, 17), (7, 18), (5, 19),
 (6, 20), (7, 21), (5, 22), (6, 23), (7, 24), (5, 25), (10, 26), (7, 27), (8, 28), (9, 29),
 (10, 30), (11, 31), (9, 32), (10, 33), (11, 34), (9, 35), (10, 36), (11, 37), (9, 38), (11, 40),
 (12, 41).

Список координат единичных элементов матрицы A_{out} :

(11, 15), (1, 16), (1,17), (1, 18), (2, 19), (2, 20), (2, 21), (3, 22), (3, 23), (3, 24), (4, 25),
 (4, 26), (4, 27), (4, 28), (5, 29), (5, 30), (5, 31), (6, 32), (6, 33), (6, 34), (7, 35), (7, 36),
 (7, 37), (8, 38), (8, 39), (8, 40), (8, 41), (9, 42), (9, 43), (9, 44), (10, 45), (10, 46),
 (10, 47), (11, 48), (11, 49), (11, 50), (12, 51), (12, 52), (12, 53), (12, 54).

Выпишем решение, которое было получено с помощью программного продукта MatLab. Поскольку вектор K , состоящий из $T \cdot (N_{cargo} + N_{empty}) = 54$ элементов, также в основном состоит из нулевых элементов, выпишем значения только ненулевых элементов: $K_3 = 2$; $K_4 = 1$; $K_6 = 3$; $K_{13} = 2$; $K_{14} = 4$; $K_{15} = 6$; $K_{26} = 1$; $K_{28} = 2$; $K_{31} = 2$; $K_{40} = 3$.

Выпишем это же решение в более понятном формате матриц $K1(t)$ и $K2(t)$, представляющие из себя $(N \times N)$ -матрицы, элементы которой характеризуют количество отправляемых груженых ($K1(t)$) и порожних ($K2(t)$) вагонов от станции i до станции j на момент времени $t \in \{1, \dots, T\}$.

$$K1(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K1(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$K2(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad K2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad K2(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Графически данное решение представлено на рис. 112, ширина каждой полосы в котором характеризует количество вагонов, отправленное в заданном направлении.

Целевое значение итоговой прибыли, вычисляемое по правилу $PC^T \cdot K$, получается равным 32.3.

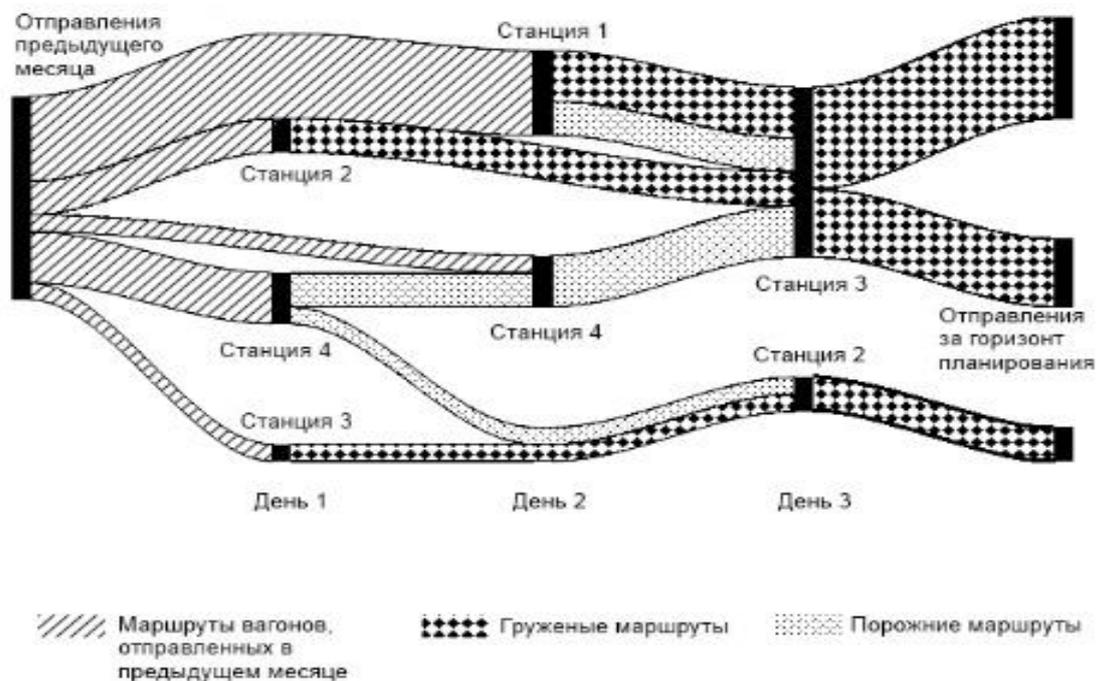


Рис. 112. Схематичное представление решения, полученного с помощью модифицированного алгоритма

Источник: составлено авторами, см: Белоусов Ф. А., Хачатрян Н. К., Неволин И. В. // Снижение размерности в задаче оптимального управления парком грузовых вагонов с использованием беспилотных локомотивов // Бизнес-информатика. – 2022. – Т. 16, № 2. – С. 7–20

Если сравнивать полученное решение с первоначальным, то видно, что они отличаются, но значения целевого функционала, выражающего итоговую прибыль, при этом совпадают.