

**ОТЗЫВ**  
**официального оппонента**  
**о диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Петра Васильевича Денисова**  
**на тему: «О поведении решений параболических уравнений**  
**при больших значениях времени»**  
**по специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения**  
**и математическая физика»**

**Актуальность темы.**

В диссертации Петра Васильевича Денисова объектом исследования является поведение при  $t \rightarrow +\infty$  решений (обобщенных) задач Коши для некоторых случаев систем линейных уравнений (сохранены обозначения диссертации и автореферата) вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^m \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_N \leq 2b} A_{ij}^k(t, x) \frac{(-i)^{|k|} \partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}, \quad x = (t, x_1, \dots, x_N) \in E^N, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

которые являются параболическими по И. Г. Петровскому. Рассмотрены следующие случаи:

- 1) задача Коши для системы параболических по И.Г. Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и без младших членов;
- 2) задача Коши для системы параболических по И.Г. Петровскому уравнений с коэффициентами, зависящими от времени  $t$  и содержащих младшие коэффициенты ненулевого порядка;
- 3) обобщенная задача Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Корректности постановок задач об асимптотике решений параболических уравнений посвящено очень большое количество работ. Развитие исследований асимптотики решений параболических уравнений связано с именами А. Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова Г.Г. Харди, А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.М. Ильина, А.С. Калашникова, О.А. Олейник, М. Кржижанского, В.М. Поляковой, А.К. Гущина, В.П. Михайлова, С.Д. Эйдельмана, Ф.О. Порпера, Ю.Н. Дрожжинова, В.В. Жикова, В.Н. Денисова, В.Д. Репникова, А.Б. Муравника, В.В. Городецкого, И.М. Довжицкой, Л. А. Муравья, Е. В. Шелеповой и др.

При неугасающем интересе к проблеме стабилизации решений параболических уравнений некоторые задачи остаются нерешенными. Кроме того, возникают новые задачи. Изучение проблемы стабилизации решения задачи Коши всегда остается одной из важнейших задач в теории параболических уравнений и систем. Все вышеописанное говорит об актуальности темы диссертационного исследования.

**Краткая характеристика основного содержания работы.**

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 77 наименований. Полный объем диссертации составляет 79 страниц.

**Во введении** дан очень подробный и обстоятельный обзор научной литературы, связанной с выбранной тематикой, с привлечением которого обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулирована цель исследования, аргументирована научная новизна, отмечена значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, изложено основное содержание диссертации.



**Первая глава** посвящена проблеме стабилизации решения задачи Коши для параболических по И.Г. Петровскому систем уравнений. Сначала рассматриваются системы без младших коэффициентов, а затем системы с младшими коэффициентами, непрерывно зависящими от времени  $t$ . Получены критерии стабилизации простых средних по времени и средних Чезаро

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha + 1}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) u(x, \tau) d\tau = 0$$

в терминах стабилизации решения  $u(x, t)$  задачи Коши, т.е. существования предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$$

равномерно по  $x$  в  $E^N$  (Теоремы 1, 2, 2'). Получены также критерии стабилизации в терминах средних по кубам и по шарам (Теоремы 3, 3', 4).

**Во второй главе** рассматривается проблема стабилизации для средних по времени от решения начальных задач для ультрапараболического уравнения

$$\left(\Delta - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^p = 0.$$

В параграфе 1 главы 2 рассматривается начальная задача (типа Коши) для этого уравнения с начальными условиями вида

$$\left(\Delta - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^k u(x, t) \Big|_{t=0} = f_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, p - 1, x \in E^N.$$

Сразу же приведен пример решения (при гармонических функциях  $f_k(x)$ ), для которого стабилизация не имеет места. Тем самым обоснован переход от задачи стабилизации решения к задаче равностабилизации, то есть стабилизации разности  $(u(x, t) - v(x, t))$  при некоторой специально построенной функции  $v(x, t)$ . Функция  $v(x, t)$  строится явно в терминах средних Рисса и устанавливаются достаточные условия и оценки скорости равностабилизации (Теоремы 1, 2).

В параграфе 2 главы 2 рассматривается задача Коши для того же ультрапараболического уравнения с начальными условиями вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, p - 1, x \in E^N.$$

Опять приведен пример решения (при гармонических функциях  $\varphi_k(x)$ ), для которого стабилизация не имеет места и осуществлен переход от задачи стабилизации решения к задаче равностабилизации, то есть стабилизации разности  $(u(x, t) - v(x, t))$  при некоторой специально построенной функции  $v(x, t)$ . Функция  $v(x, t)$  строится явно в терминах шаровых средних Рисса и устанавливаются достаточные условия и оценки скорости равностабилизации (Теорема 3).

**В заключении** приведены основные результаты диссертации и сделаны краткие выводы по теме исследования.

**Список литературы** достаточно полон и содержит указание на основные источники, использованные в процессе исследования.

**Научная новизна работы.** Нижеперечисленные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

- Получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений без младших коэффициентов.



- Получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних Чезаро порядка  $\alpha \geq 0$  по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с младшими коэффициентами.

- Получены критерии существования пределов средних по времени и средних Чезаро порядка  $\alpha \geq 0$  по времени в терминах существования средних по кубам, а также в терминах существования предела средних по шарам равномерно по  $x$  во всем пространстве.

- Получено утверждение о достаточном условии равностабильности предела разности решения итерированного уравнения и некоторой специально построенной функции при больших значениях времени, равномерно по  $x$  на каждом компакте и установлена степенная оценка указанной разности.

- Получено утверждение о равностабильности при больших значениях времени средних типа Рисса по времени от соответствующей функции и построенного решения.

#### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Работа имеет теоретический характер. Разработанные в работе подходы могут быть применены к дальнейшему развитию исследований параболических задач.

#### **Обоснованность и достоверность положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций.**

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов, полученных в диссертации, обусловлена применением строгих математических методов и полными доказательствами всех утверждений работы. В согласии с принятыми нормами используемые математические факты, на которые опирается исследование, снабжены точными ссылками на научную литературу. Научные результаты автора опубликованы в открытой печати, прошли апробацию на научных семинарах.

Основные результаты диссертации относятся к следующим научным направлениям.

— Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

— Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

— Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

— Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

Это подтверждает соответствие диссертационной работы специальности 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

По результатам диссертации опубликовано 3 статьи в научных изданиях, рекомендованных Ученым Советом МГУ.

Автореферат соответствует требованиям и правильно отражает содержание диссертации.

#### **Замечания.**

Имеется некоторое количество опечаток, неточностей. Ниже приводятся примеры некоторых из них.

- Стр. 12 диссертации, стр. 6 автореферата. Написано в замечании: «Условие, что предел средних (11) или (12) по времени  $t$  от  $u(x, t)$  равен нулю, не ограничивает общности». На самом деле речь идет о равенстве нулю не средних, а их предела.

- В пункте «Положения, выносимые на защиту» дважды написано «так же» (раздельно) вместо «также», что искажает смысл заявляемого.



2. Для некоторых теорем следовало бы привести более подробные доказательства, чем приведенные в тексте.

Перечисленные замечания не влияют на общую положительную оценку работы и не умаляют значимости проделанного глубокого исследования.

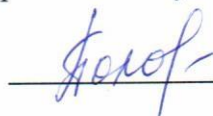
Диссертация Петра Васильевича Денисова отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Петр Васильевич Денисов безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры математического и прикладного анализа  
факультета Прикладной математики, информатики и механики  
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Воронежский государственный университет»

Половинкин Игорь Петрович



24.01.2024 г.

Контактные данные: тел.: +7 9191887233, e-mail: [polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru),  
Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация: 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения».

Адрес места работы:

394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1,

Кафедра Математического и прикладного анализа факультета Прикладной математики, информатики и механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет».

Тел.: (473)208348, e-mail: [polovinkin@amm.vsu.ru](mailto:polovinkin@amm.vsu.ru).

Подпись профессора кафедры математического и прикладного анализа факультета Прикладной математики, информатики и механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет» Половинкина Игоря Петровича удостоверяю:



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)	
подпись	<i>Половинкина И.П.</i>
заверяю	начальник отдела кадров
	Ф.И.О. Зверева
	24.01.24
	Электронная цифровая подпись