О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Резниченко Евгения Александровича на тему «Группы с топологией и однородные пространства», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) – геометрия и топология.

Термин топологическая алгебра впервые был придуман ван Данцигом в 1931г. в своей докторской диссертации под названием «Исследования по топологической алгебре». В этой работе им был исследован топологические аспекты абстрактных групп, колец и полей.

Абстрактная группа является одним из самых простых и универсальных математических объектов. Наличие топологии на группе, согласованной с алгебраическими операциями, резко меняет соотношения между топологическими свойствами группы. Например, известно, что для метризуемости топологического пространства первая аксиома счетности является необходимым, но не достаточным условием. Однако, по известной теореме Биркгофа-Какутани, для метризуемости топологических групп первая аксиома счетности является также достаточным условием.

Топологические группы являются важнейшим и наиболее изученным объектом топологической алгебры. Однако очень часто в топологической алгебре изучаются алгебраические объекты с топологией, в которых не все алгебраические операции непрерывны или выполняются слабые формы непрерывности этих операций. Одним из важных вопросов топологической алгебры является нахождение условий, при которых происходит усиление непрерывности операций. Первыми результатами в этом направлении были получены Д. Монтгомери и Р. Эллис. Д. Монтгомери в 1936г. доказал, что полная метризуемая сепарабельная группа с раздельно непрерывным умножением (т. е. полутопологическая группа) является топологической группой, а Р. Эллис в 1957г. доказал, что локально компактная полутопологическая группа является топологической группой.

Представленная диссертационная работа посвящена этим и другим смежным актуальным проблемам современной топологической алгебры. Диссертация состоит из введения и пяти глав.

Во **введении** приведена история рассматриваемых в диссертации вопросов, обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, а также перечислены основные результаты и положения, выносимые на защиту.

Первая глава носит вспомогательный характер, в ней приводится список обозначений и вводятся основные понятия, используемые в диссертации.

Глава 2 посвящена задачам продолжения и факторизации раздельно непрерывных функций, заданных на произведениях топологических пространств. Задача продолжения непрерывных функций, определенных на произведениях пространств, имеет давнюю историю. В 1959г. Гликсберг получил следующий критерий непрерывного продолжения функций: непрерывная функция, заданная на конечном произведении пространств, непрерывно продолжается на произведении их стоун-чеховских расширений тогда и только тогда, когда последнее произведение псевдокомпактно.

Автором получены ряд эквивалентных условий для раздельно-непрерывного продолжения раздельно непрерывных функций произведения двух псевдокомпактных пространств на произведение их стоун-чеховских расширений (Теорема 2.7). Из этого результата, в частности, следует, что для псевдокомпактных пространств X и Y любая непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$. Аналогичные результаты получены также для функций, заданных на любом конечном произведении псевдокомпактных пространств (теоремы 2.15 и 2.17). Из полученных результатов следует также, что раздельно непрерывные функции, заданные на конечном произведении счетно компактных пространств, раздельно непрерывно продолжаются на произведение стоун-чеховских расширений данных пространств (следствие 2.13). Следует отметить, что последнее утверждение не верно в случае псевдокомпактных пространств.

Автор рассматривает также задача продолжения операций алгебр на стоун-чеховское расширение. В частности, получен ряд достаточных условий для раздельно непрерывного продолжения операций псевдокомпактной алгебры на его стоун-чеховское расширение (Следствие 2.32).

Доказаны теоремы факторизации раздельно непрерывных отображений (теоремы 2.35–2.37) и раздельно непрерывных операций данной алгебры (теорема 2.38). Эти результаты позволили автору получить теорему о вложении универсальной компактной алгебры с раздельно непрерывными операциями в произведение универсальных метризуемых алгебр с раздельно непрерывными операциями (теоремы 2.39). В качестве следствия перечислены классы псевдокомпактных универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями, которые вкладываются в произведение универсальных метризуемых алгебр с раздельно непрерывными операциями (теорема 2.40).

В **главе 3** исследуются классы бэровских пространств. Для изучения этих классов автор применяет технику топологических игр, которые являются модификациями известной топологической игры Банаха–Мазура. Получен ряд топологических свойств, которые описываются с помощью полуокрестностей диагонали в квадрате. Классы пространств и результаты этой главы применяются в последующих главах для исследования непрерывности операций в группах с топологией.

Глава 4 посвящена важной задаче топологической алгебры — если на алгебраическом объекте задана топология, которая в той или иной степени согласована с алгебраическими операциями, то при каких условиях происходит усиление непрерывности этих операций? Автор рассматривает эту задачу для алгебраических групп с топологией и пространств с операцией Мальцева.

Применяя технику продолжения раздельно непрерывных отображений на стоун-чеховское расширение, автор получил ряд важных эквивалентных условий, при выполнении которых псевдокомпактная полутопологическая группа становится топологической группой (теорема 4.2). Из этой теоремы, в частности, следует, что паратопологическая псевдокомпактная группа является топологической группой.

Получены также эквивалентные условия, которые гарантируют продолжение раздельно непрерывной операции Мальцева псевдокомпактного пространства X до раздельно непрерывной операции Мальцева стоун-чеховского расширения βX (теорема 4.5).

Известно, что T_1 паратопологическую группу G можно представить как гомоморфный образ некоторой топологической группы, замкнуто вложенной в квадрат группы G. Это утверждение позволило автору доказать, что если G является T_1 паратопологической группой, а G^2 счетно компактное прорстранство, то G является топологической группой (теорема 4.13).

Изучаются также классы бэровских пространств, определяемых с помощью полуокрестностей диагонали в квадрате, и устанавливаются различные условия, при выполнении которых группы с топологией становятся топологическими группами.

В **пятой** главе изучается однородность произведения пространств. Доказано, что для произвольного компактного пространства X существует такое счетно компактное пространство Y, что произведение $X \times Y$ является однородным пространством (следствие 5.9). То же самое верно, если счетную компактность Y заменить на σ-компактность. Если X сепарабельное метризуемое пространство, то произведение X с некоторым метризуемым пространством Y также является однородным пространством (следствие 5.10).

Получен ряд результатов о конечности компактных подпространств однородного пространства, который вложен в степень пространства из определенного класса (теоремы 5.14, 5.18, 5.20, 5.22). Доказан аналогичный результат о метризуемости компактных подпространств однородного пространства (теорема 5.16).

Далее, изучаются компактные и псевдокомпактные пространства с операцией Мальцева и компакты Дугунджи. Автор доказал, что любое компактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева является компактом Дугунджи (Теорема 5.41). Это утверждение в случае непрерывной операции Мальцева было доказано В.В. Успенским и, независимо, М.М. Чобаном. А если X псевдокомпактное пространство с непрерывной операцией Мальцева, то стоун-чеховское расширение βX является компактом Дугунджи (теорема 5.43). Утверждение последней теоремы остается верным, если условие непрерывности операции Мальцева заменить на условие раздельной непрерывности, а на пространство X наложить некоторое дополнительное условие (теорема 5.44).

Известно, что ретракты топологических групп обладают важными свойствами. Например, любой компакт, являющийся ретрактом некоторой топологической группы, является компактом Дугунджи (В.В. Успенский). Автором доказано, что любое псевдокомпактное мальцевское пространство является ретрактом топологической группы (теорема 5.50). Этот результат в случае компактного мальцевского пространства был ранее доказан О.В. Сипачевой. Условие псевдокомпактности в теореме 5.50 является существенным. Приводится пример не псевдокомпактного мальцевского пространства, не являющегося ретрактом топологических групп (пример 5.51).

Резюмируя впечатления от диссертации, отметим, что автор проделал большую работу и подготовил законченное научное исследование на высоком математическом уровне. Получены глубокие и сложные результаты, имеющие важное значение для ряда направлений топологической алгебры. Исследования в диссертации проведены как традиционными методами общей топологии и топологической алгебры, так и разработанными диссертантом новыми методами продолжения и факторизации раздельно непрерывных отображений. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут найти применения в общей топологии, топологической алгебре, топологической динамике. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертации.

В качестве замечаний можно отметить следующее:

1. Для одного и того же понятия применяются разные обозначения и названия. Например, O_r, $O(r)$-топологическая группа, R-полутопологическая группа, право полутопологическая группа представляют собой различные названия одного и того же объекта.

2. Имеются повторы формулировок некоторых определений и понятий. Например, понятие операции Мальцева вновь определяется в конце диссертации на стр. 207.

3. Нумерация результатов, определений и т.д. в диссертации и автореферате организована не совсем логично. Часть результатов (предложения, утверждения, леммы) имеют тройную сквозную нумерацию в рамках параграфа, а для части результатов (теоремы, определения и т.д.) применяется двойная сквозная нумерация в рамках главы. Причем, некоторые леммы и вовсе не имеют нумерацию (леммы на стр. 57, 75, 130, 144 и т.д.).

Отмеченные замечания, конечно, затрудняют чтение диссертации. Однако они носят редакционный характер, не снижают научную ценность и не оказывают влияние на высокую оценку диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа Е. А. Резниченко «Группы с топологией и однородные пространства» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова» и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». Считаю, что автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) — «Геометрия и топология».

Доктор физико-математических наук, профессор,
Заведующий кафедрой математического анализа,
ФГБОУ ВО "Московский педагогический
государственный университет"

29.12.2023

П.С. Геворкян