МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Грознова Анастасия Юрьевна

Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств

Специальность 1.1.3 (01.01.04) — «Геометрия и топология»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Сипачева Ольга Викторовна

Москва 2023

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Сипачева Ольга Викторовна**, доктор физико-математических наук.
Официальные оппоненты:	**Геворкян Павел Самвелович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа.
	Семенов Павел Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, отдел математического образования, профессор.
	Захарян Юрий Норикович, кандидат физико-математических наук, ООО "КОУЛМЭН ТЕХ", старший инженер.

Защита диссертации состоится 14 апреля 2023 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *sbgashkov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»:

https://istina.msu.ru/dissertations/536325561/

Автореферат разослан 14 марта 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор **С. Б. Гашков**

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Диссертация посвящена свойствам, обобщающим экстремальную несвязность, и исследованию их связи с однородностью топологических пространств.

В 1956 году Уолтер Рудин[1] доказал, в предположении справедливости континуум-гипотезы (CH), неоднородность нароста $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ стоун-чеховской компактификации $\beta\omega$ дискретного счётного пространства ω. Для этой цели он показал, что из условия CH вытекает существование P-точки[2] в ω^*; отсюда немедленно получается неоднородность ω^*, поскольку в компакте все точки не могут быть P-точками.

Фролик[3] доказал то же самое иначе, заметив, что если две дискретные последовательности сходятся к одной и той же точке $x \in \omega^*$ по ультрафильтрам p и q, то p и q сравнимы в порядке Рудин–Фролика. Идея вполне естественная: если $p, q \in \omega^*$ несравнимы и $D = \{d_n : n \in \omega\}$ — счётное дискретное подмножество ω^*, то не существует гомеоморфизма $h\colon \omega^* \to \omega^*$, переводящего $q\text{-}\lim_n d_n$ в $p\text{-}\lim_n d_n$, поскольку если бы он существовал, то $(d_n)_{n\in\omega}$ и $(h(d_n))_{n\in\omega}$ были бы дискретными последовательностями, сходящимися к одной и той же точке $p\text{-}\lim_n d_n$ по ультрафильтрам p и q соответственно.

Идея Фролика применима не только к наросту ω^*, но и к произвольным F-пространствам и их важнейшему подклассу, экстремально несвязным пространствам. Экстремально несвязные пространства играют важную роль в теории категорий (они являются проективными объектами в категории компактных пространств и непрерывных отображений) и в теории двойственности между топологическими пространствами и булевыми алгебрами (это в точности пространства Стоуна полных булевых алгебр[4]).

Исследования Фролика положили начало активному изучению связи свойств топологических пространств типа однородности со свойствами типа экстремальной несвязности. В работе[5] рассматривались произведения однородных экстремально несвязных пространств. В предположении акси-

[1] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Math. J., **23**(3), 409–419 (1956).

[2] L. Gillman, M. Henriksen, *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **77**(2), 340–362 (1954).

[3] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 87–91 (1967).

[4] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1982).

[5] W. Comfort, J. van Mill, *A homogeneous extremally disconnected countably compact space*, Topol. Appl., **25**(1), 65–73 (1987).

омы Мартина были построены однородные экстремально несвязные счётно компактные пространства X и Y с несчётно компактным произведением $X \times Y$ (см. теорему 4.2[5]). В статье[6] этот пример был улучшен, а именно: произведение $X \times Y$ удалось сделать не псевдокомпактным (см. теорему 3[6]). Като[7] построил однородные экстремально несвязные счётно компактные пространства X и Y, для которых произведение $X \times Y$ не является счётно компактным, они были построены без дополнительных теоретико-множественных предположений (см. теорему 4.1[7]).

Фролик показал, что все однородные экстремально несвязные компактные пространства конечны[8], а Архангельский доказал, что и все компакты, содержащиеся в экстремально несвязных топологических группах конечны[9]. Е. К. ван Дауэн в теореме 2 (c)[10] доказал, что все компакты, содержащиеся в экстремально несвязных однородных пространств, конечны (см. также статью[11]). К числу последних достижений относятся результаты Е. А. Резниченко[11]. Он доказал, что конечны компакты, содержащиеся в однородных пространствах, которые вкладываются в куб экстремально несвязного пространства. Использование CH позволяет усилить этот результат: (i) любое компактное множество в однородном подпространстве конечного произведения $\beta\omega$-пространств (и тем более, экстремально несвязных пространств) конечно и (ii) любое компактное множество в однородном подпространстве счетного произведения $\beta\omega$-пространств метризуемо (см. теоремы 4 и 3[11]). В настоящей работе мы показываем, что предположение CH в его доказательстве, можно заменить на более слабое условие существования несчётного числа $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-несовместимых, т.е. не почти когерентных, P-точек.

Ближайшим обобщением класса экстремально несвязных пространств является класс F-пространств. F-Пространства, как и экстремально несвязные, на первый взгляд могут показаться экзотическими, однако они играют важную роль в теории непрерывных отображений компактных пространств[12,13] и в теории двойственности между топологическими простран-

[6] W. F. Lindgren, A. A. Szymanski, *A non-pseudocompact product of countably compact spaces via seq*, Proc. Am. Math. Soc., **125**(12), 3741–3746 (1997).

[7] A. Kato, *A new construction of extremally disconnected topologies*, Topol. Appl., **58**(1), 1–16 (1994).

[8] Z. Frolík, *Homogeneity problems of extremally disconnected spaces*, Comment. Math. Univ. Carol., **8**(4), 87–91 (1967).

[9] A. Arhangelskii, *Groupes topologiques extremalement discontinus*, C. R. Acad. Sci. Paris, **265**, 822-825 (1967).

[10] E. K. van Douwen, *Homogeneity of βG if G is a topological group*, Collect. Math., **41**, 193–199 (1979).

[11] E. Reznichenko, *Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces*, Topol. Appl., **284**, 107403 (2020).

[12] A. M. Gleason, *Projective topological spaces*, Ill. J. Math., **2**(4A), 482–489 (1958).

[13] В. И. Пономарёв, *Об абсолюте топологического пространства*, Докл. АН СССР, **149**, 26–29 (1963).

ствами[14], а также в теории колец непрерывных функций[15]. Основные топологические свойства, в частности, алгебраическую характеризацию в терминах идеалов экстремально несвязных и F-пространств можно найти в основополагающей книге Гиллмана и Джерисона по теории колец непрерывных функций[15].

Идея Фролика доказательства неоднородности с помощью порядка на ультрафильтрах была развита Куненом. Используя порядок Рудин–Кейслера и понятие слабой P-точки, являющееся ослаблением понятия P-точки, он доказал лемму[16] о сравнимости двух ультрафильтров, по которым могут сходиться к одной и той же точке последовательности в F-пространстве. С помощью своей леммы Кунен доказал, что произведение компактных F-пространств никогда не бывает однородным[16].

Класс F-пространств (и, тем более, экстремально несвязных пространств) довольно узок, и важной задачей является поиск более широких классов пространств, которые обладают теми или иными полезными свойствами F-пространств. Так, ван Дауэн в своей диссертации[17] ввел понятие $\beta\omega$-пространства. Этот класс оказался весьма полезным при изучении свойств ультрафильтров[18] и непрерывных отображений на подпространства произведений[19]. Известно, что любое F-пространство является $\beta\omega$-пространством, и что некоторые полезные утверждения об F-пространствах остаются верными для $\beta\omega$-пространств. Однако многие важные результаты перенести на $\beta\omega$-пространства не удается, хотя различия между F- и $\beta\omega$-пространствами довольно тонкие.

В диссертации мы рассматриваем $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространства, являющиеся обобщениями экстремально несвязных пространств и F-пространств. Эти классы пространств находятся строго между F- и $\beta\omega$-пространствами. Свойства $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ и $\mathscr{R}_3$ удобны тем, что полностью определяются счётными подмножествами и при этом наследственны, в отличие, например, от экстремальной несвязности, которая наследуется только счётными подпространствами. Мы приводим характеризацию этих новых классов пространств в терминах продолжения непрерывных функций со счётных подпространств и идеалов полуколец и колец непрерывных функций, а так-

[14] E. K. van Douwen, *Cardinal functions on Boolean spaces*, Handbook of Boolean algebras, North-Holland, Amsterdam, **2**, 417–467 (1989).

[15] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer, New York (1960).

[16] K. Kunen, *Large homogeneous compact spaces*, in J. van Mill, G. Reed (Eds.), Open Problems in Topology, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, Amsterdam, 261–270 (1990).

[17] E. K. van Douwen, *Prime Mappings, Number of Factors and Binary Operations*, Dissertationes Mathematicae, **119**, PWN, Warsaw (1981).

[18] W. W. Comfort, *Ultrafilters: some old and some new results*, Bull. Amer. Math. Soc., **83**, 417–455 (1977).

[19] M. Husek, *Continious mappings on subspaces of products*, Symposia Math., **17**, 25–41 (1976).

же доказываем, что классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями, в отличие от классов экстремально несвязных пространств и F-пространств.

Мы обобщаем теорему Кунена о неоднородности произведений на класс $\mathscr{R}_2$-пространств, а в предположении существования дискретного ультрафильтра и на класс $\beta\omega$-пространств. Дискретные ультрафильтры впервые появились в статье Баумгартнера[20]. В диссертации мы исследуем класс дискретных ультрафильтров. В частности, мы показываем, что всякий дискретный ультрафильтр является X-дискретным для любого тихоновского пространства X, и рассматриваем различные свойства дискретных ультрафильтров с целью изучения однородности топологических пространств. Мы также исследуем различные порядки на ультрафильтрах и связь между ними.

Цели и задачи диссертации

Ввести и исследовать с разных точек зрения классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, обобщающие классы экстремально несвязных пространств и F-пространств и имеющие ряд преимуществ перед ними. Охарактеризовать введённые классы пространств в терминах продолжений непрерывных функций со счётных подпространств, а также идеалов полуколец и колец непрерывных функций. Исследовать однородность пространств из классов $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств, их произведений и подпространств, и с этой целью изучить порядки на классе ультрафильтров, исследовать дискретные ультрафильтры на ω, их связь с другими типами ультрафильтров и алгебраические операции на множестве дискретных ультрафильтров.

Положения, выносимые на защиту

1. Свойства и взаимосвязь порядков Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на классе ультрафильтров, исследование дискретных ультрафильтров. Описание алгебры дискретных ультрафильтров.

2. Определение новых классов $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, обобщающих класс экстремально несвязных пространств. Теорема о о том, что они

[20] J. E. Baumgartner, *Ultrafilters on* ω, J. Symb. Logic, **60**, 624–639 (1995).

строго содержатся друг в друге. Их обобщение на случай несчётных кардиналов. Доказательство того, что введённые классы пространств обладают свойством наследственности, но не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.

3. Существование продолжения функций с подпространств в классах $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств. Алгебраическая характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

4. Сравнимость в смысле порядка Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в $\mathscr{R}_2$- и $\beta\omega$-пространстве сходятся разные последовательности к одной и той же точке. Неоднородность произведения бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств, а в предположении $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, произведения компактных $\beta\omega$-пространств. Доказательство в дополнительных теоретико-множественных предположениях конечности компактов в однородных подпространствах $\beta\omega$-пространств и метризуемости компактов в однородных подпространствах счётных произведений однородных $\beta\omega$-пространств.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Исследованы порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на классе ультрафильтров, свойства дискретных ультрафильтров, их связь с другими классами ультрафильтров. Рассмотрена алгебра дискретных ультрафильтров.

2. Введены классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, обобщающие класс экстремально несвязных пространств. Доказано, что имеют место строгие включения:

$$\begin{aligned}&\text{класс } F\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_1\text{-пространств} \subsetneq \\ &\qquad \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_2\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_3\text{-пространств} \subsetneq \\ &\qquad\qquad \subsetneq \text{класс } \beta\omega\text{-пространств.}\end{aligned}$$

Доказано, что введённые классы пространств обладают свойством наследственности, но не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями. Определены и рассмотрены обобщения классов $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств на несчётные кардиналы.

3. Исследовано продолжение функций со счётных подпространств в классах $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств. Дана алгебраическая характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

4. Получены результаты о сравнимости в смысле порядка Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в $\mathscr{R}_2$- и $\beta\omega$-пространстве сходятся разные последовательности к одной и той же точке. Доказано, что произведение бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств неоднородно, а в предположении $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, произведение компактных $\beta\omega$-пространств неоднородно. В дополнительных теоретико-множественных предположениях доказана конечность компактов в однородных подпространствах конечных произведений однородных $\beta\omega$-пространств и метризуемость компактов в однородных подпространствах счётных произведений однородных $\beta\omega$-пространств.

Методы исследования

В диссертации используются методы общей топологии, теории ультрафильтров, теории множеств и элементы теории колец непрерывных функций.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области общей топологии, теории ультрафильтров, теории множеств и функционального анализа.

Степень достоверности и апробация результатов

Соискатель имеет 6 опубликованных работ, все они по теме диссертации; из них 4 работы [1], [2], [3] и [4] опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, РИНЦ, RSCI. По ним были сделаны доклады на следующих международных конференциях и семинарах.

Международные конференции:

- Международная конференция по топологии и её приложениям, посвященная 100-летию со дня рождения Ю. М. Смирнова, 20–21 сентября 2021.
- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2022», имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–22 апреля 2022.

Научно-исследовательские семинары механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова:

- Научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 11 марта 2021 года.
- Научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 11 ноября 2021 года.
- Научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 10 марта 2022 года.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Объём диссертации составляет 86 страниц. Список литературы и публикаций автора включает в себя 55 наименований. Используется тройная нумерация определений, лемм, теорем, предложений, следствий и замечаний. Первое число означает номер главы, второе — номер раздела внутри главы, а третье — номер подраздела.

Содержание работы

Во **введении** приводится краткая история вопроса, определяется область исследования, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, формулируются основные результаты диссертации.

Глава 1 посвящена основным свойствам ультрафильтров, порядкам Рудин–Кейслера, Рудин-Бласса и Рудин–Фролика на ультрафильтрах, дискретным ультрафильтрам и операциям над ультрафильтрами. Перечислим основные определения и результаты этой главы.

Начнём с определения порядков на ультрафильтрах[21].

Определение 1.2.1. *Порядок Рудин–Кейслера* $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$, если существует функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$.

Определение 1.2.2. *Порядок Рудин–Бласса* $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RB}} q$, если существует конечнократная функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что $\beta f(q) = p$.

Определение 1.2.3. *Порядок Рудин–Фролика* $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ на $\beta\omega$ определяется правилом: для $p, q \in \beta\omega$ $p \leqslant_{\mathrm{RF}} q$, если существует инъективная функция $\varphi\colon \omega \to \beta\omega$ такая, что $\varphi(\omega)$ дискретно и $\beta\varphi(p) = q$.

Баумгартнер[20] ввёл определение I-ультрафильтра и связанные с ним классы ультрафильтров.

Если $X = \mathbb{R}$ и I — семейство всех дискретных (разреженных, меры ноль, нигде не плотных) подмножеств $\mathbb{R}$, I-ультрафильтр называется *дискретным* (*разреженным, меры ноль, нигде не плотным* соответственно).

Рассматривая семейство I дискретных подмножеств X и накладывая предположения на $f\colon I \to X$, получаем различные классы дискретноподобных ультрафильтров.

Определение 1.3.2. Пусть X — топологическое пространство. Скажем, что ультрафильтр p на ω является X-дискретным (конечнократно X-дискретным, инъективно X-дискретным) если для любой (для конечнократной, инъективной соответственно) функции $f\colon \omega \to X$ найдётся $A \in p$ такой, что $f(A)$ дискретно в X. Для $X = \mathbb{R}$ мы пишем «дискретный» вместо «$\mathbb{R}$-дискретный».

Предложение 1.3.1. *Любой дискретный (конечнократно дискретный, инъективно дискретный) ультрафильтр является X-дискретным (ко-*

[21] W. Comfort, S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974).

нечнократно X-дискретным, инъективно X-дискретным соответственно) для любого тихоновского пространства X.

Предложение 1.3.2. *Несуществование нигде не плотных ультрафильтров влечёт за собой несуществование инъективно дискретных ультрафильтров.*

Предложение 1.3.3. (i) *Если $p \in \beta\omega$ является X-дискретным для некоторого пространства X и $q \leqslant_{\mathrm{RK}} p$, то q является X-дискретным.*

(ii) *Если $p \in \beta\omega$ является конечнократно X-дискретным для некоторого пространства X и $q \leqslant_{\mathrm{RB}} p$, то q является конечнократно X-дискретным.*

(iii) *Если $q \in \beta\omega$ является ω^*-дискретным и p — нетривиальный q-предел некоторой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ из $\beta\omega$, то найдётся $r \in \beta\omega$ такой, что $r \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ и $r \leqslant_{\mathrm{RF}} p$. Более того, $p = r\text{-}\lim_n x_{k_n}$ для некоторой дискретной подпоследовательности $(x_{k_n})_{n\in\omega}$ последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, состоящей из попарно различных точек.*

(iv) *Если $q \in \beta\omega$ является инъективно ω^*-дискретным, то $q \leqslant_{\mathrm{RF}} p$ тогда и только тогда, когда p является q-пределом некоторой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ попарно различных точек из $\beta\omega$.*

Далее мы рассматриваем произведение ультрафильтров[22].

Определение 1.4.1. Пусть p и q — ультрафильтры на ω. Тогда *тензорным произведением*, или *произведением Фубини*, $p \otimes q$ ультрафильтров p и q называется ультрафильтр на $\omega \times \omega$, определённый следующим образом:

$$p \otimes q = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n : \{m : (n,m) \in A\} \in q\} \in p\}.$$

Обобщением тензорного произведения двух ультрафильтров является сумма Фубини последовательности $q_n \in \beta\omega$ по ультрафильтру $p \in \beta\omega$, его базу составляют множества вида $\bigcup\limits_{n\in P} \{n\} \times Q_n$, где $P \in p$ и $Q_n \in q_n$ для любого $n \in P$.

Ван Милл[23] определил различные топологические типы ультрафильтров из ω^*, одним из которых является

$$A_1 = \{x \in \omega^* : \exists \text{счётное дискретное } D \subset \omega^* \setminus \{x\},\ x \in \overline{D}\}.$$

[22]N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone–Čech Compactification*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1998).

[23]*An introduction to $\beta\omega$*, Chapter 11 in K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, Amsterdam, 503–567 (1984).

Ультрафильтры *не* типа A_1 мы называем *дискретно слабыми* P-точками.

Предложение 1.4.1. *Пусть p, q — ультрафильтры из ω^*, тогда тензорное произведение $p \otimes q$ принадлежит A_1.*

Следствие 1.4.1. *Тензорное произведение двух неглавных ультрафильтров не может быть дискретно слабой P-точкой. Таким образом, любое такое произведение не $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимально.*

Предложение 1.4.2. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных, инъективно X-дискретных) ультрафильтров $p, q_n \in \omega^*$, $n \in \omega$, сумма Фубини $\sum_p(q_n)$ — это X-дискретный (конечнократно X-дискретный, инъективно X-дискретный) ультрафильтр на $\omega \times \omega$.*

Следствие 1.4.2. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных) ультрафильтров $p, q \in \omega^*$, тензорное произведение $p \otimes q$ является X-дискретным (конечнократно X-дискретным) ультрафильтром на $\omega \times \omega$.*

Следствие 1.4.3. *Для любого компакта X и любых X-дискретных (конечнократно X-дискретных) ультрафильтров $p, q \in \mathbb{N}^*$ ультрафильтры $p \cdot q$ и $p + q$ являются X-дискретными (конечнократно X-дискретными).*

Следствие 1.4.4. *Множества дискретных, конечнократно дискретных, ω^*-дискретных и конечнократно ω^*-дискретных ультрафильтров на $\mathbb{N}$ образуют подполугруппу в полугруппах $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ и $(\beta\mathbb{N}, +)$.*

Следствие 1.4.5. *Если существуют дискретные ультрафильтры, то существуют дискретные ультрафильтры, которые не являются дискретно слабыми P-точками (и следовательно, не являются $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-минимальными).*

В **главе 2** вводятся $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространства, рассматриваются их свойства, строятся различающие примеры этих пространств, также определяются обобщения новых классов пространств на произвольные кардиналы. Перечислим основные определения и результаты этой главы.

Определение 2.1.7. Топологическое пространство X называется

- $\mathscr{R}_1$*-пространством*, если любое счётное подмножество пространства X экстремально несвязно, т.е. любые два счётных отделённых подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания;

- $\mathscr{R}_2$*-пространством*, если любые два счётных отделённых подмножества пространства X, одно из которых дискретно, имеют непересекающиеся замыкания;

- $\mathscr{R}_3$*-пространством*, если любые два счётных отделённых дискретных подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания.

Как нетрудно видеть, свойства $\mathscr{R}_i$ для $i = 1, 2, 3$ наследственны, т.е. сохраняются любыми своими подпространствами.

Теорема 2.2.4. *Имеют место строгие включения:*

$$\begin{aligned} &\text{класс } F\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_1\text{-пространств} \subsetneq \\ &\qquad \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_2\text{-пространств} \subsetneq \text{класс } \mathscr{R}_3\text{-пространств} \subsetneq \\ &\qquad\qquad \subsetneq \text{класс } \beta\omega\text{-пространств.} \end{aligned}$$

Теорема 2.3.2. *Классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.*

Рассмотрим обобщения введённых классов пространств на произвольные бесконечные кардиналы. Пусть τ — любой бесконечный кардинал.

Определение 2.4.1. Топологическое пространство X называется

- $\mathscr{R}_1(\tau)$*-пространством*, если любые два отделённых подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, имеют непересекающиеся замыкания;

- $\mathscr{R}_2(\tau)$*-пространством*, если любые два отделённых подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, одно из которых дискретно, имеют непересекающиеся замыкания;

- $\mathscr{R}_3(\tau)$*-пространством*, если любые два отделённых дискретных подмножества пространства X мощности, не превосходящей τ, имеют непересекающиеся замыкания.

Свойства $\mathscr{R}_i(\tau)$ для $i = 1, 2, 3$ также наследственны и для них выполненен аналог теоремы 2.3.2.

Теорема 2.4.1. *Классы $\mathscr{R}_1(\tau)$-, $\mathscr{R}_2(\tau)$-, $\mathscr{R}_3(\tau)$- и $\beta\tau$-пространств не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.*

Пример 2.4.2. *F-пространство произвольной несчётной мощности τ, не являющееся $\mathscr{R}_3(\aleph_1)$-пространством.*

Глава 3 посвящена продолжению функций в классах $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств и характеризации $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах продолжения непрерывных функций со счётных подпространств и идеалов полуколец и колец непрерывных функций. Основные результаты таковы:

Теорема 3.1.1. *Пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено в $\overline{Y}$.*

Следствие 3.1.1. *Компакт X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено в X.*

Следствие 3.1.3. *Пусть X — сепарабельное $\mathscr{R}_1$-пространство и $Y \subset X$ — счётное подпространство X. Тогда Y C^*-вложено в X.*

Теорема 3.1.2. (i) *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное множество $D \subset X$ C^*-вложено в $\overline{D}$.*

(ii) *Пространство X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного подпространства $Y \subset X$ каждое множество $A \subset Y$ C^*-вложено в $\overline{Y}$.*

(iii) *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда замыкание любого счётного дискретного множества $D \subset X$ является стоун-чеховской компактификацией βD множества D.*

(iv) *Пространство X является $\beta\omega$-пространством тогда и только тогда, когда любое счётное дискретное множество $D \subset X$ с компактным замыканием $\overline{D}$ C^*-вложено в X.*

Приведём несколько ключевых характеристик $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов.

Предложение 3.2.3. *Тихоновское пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества*

$A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(A)$ является главным.

Предложение 3.2.4. *Компакт X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(\overline{A})$ является главным.*

Предложение 3.2.5. *Компакт X является $\mathscr{R}_3$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного дискретного множества $A \subset X$ каждый конечно порождённый идеал в $C(\overline{A})$ является главным.*

Теорема 3.2.4. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_1$-пространство;*
2) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(Y, \mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*
3) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*
4) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(Y, \mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*
5) *для любого счётного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*
6) *для любого счётного $Y \subset X$ все простые идеалы полукольца $C(Y, \mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь (т.е. линейно упорядочены по включению);*
7) *для любого счётного $Y \subset X$ все простые идеалы полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

Теорема 3.2.5. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_3$-пространство;*
2) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*

3) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ каждый простой идеал полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*

4) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ все простые идеалы полукольца $C(\overline{Y}, \mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

Теорема 3.2.6. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_1$-пространство;*

2) *для любого счётного $Y \subset X$ решётки $\operatorname{Id} C(Y)$ и $\operatorname{Id} C^+(Y)$ изоморфны;*

3) *для любого счётного $Y \subset X$ решётки $\operatorname{Id} C(\overline{Y})$ и $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ изоморфны;*

4) *для любого счётного $Y \subset X$ решётка $\operatorname{Id} C^+(Y)$ модулярна;*

5) *для любого счётного $Y \subset X$решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ модулярна;*

6) *для любого счётного $Y \subset X$решётка $\operatorname{Id} C^+(Y)$ дистрибутивна;*

7) *для любого счётного $Y \subset X$решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ дистрибутивна;*

8) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C^+(Y)$ полустрогие;*

9) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C^+(\overline{Y})$ полустрогие;*

10) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C(Y)$ разностные;*

11) *для любого счётного $Y \subset X$ все идеалы в $C(\overline{Y})$ разностные.*

Теорема 3.2.7. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — $\mathscr{R}_3$-пространство;*

2) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ решётки $\operatorname{Id} C(\overline{Y})$ и $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ изоморфны;*

3) *для любого счётного дискретного $Y \subset X$ решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ модулярна;*

4) для любого счётного дискретного $Y \subset X$ решётка $\operatorname{Id} C^+(\overline{Y})$ дистрибутивна;

5) для любого счётного дискретного $Y \subset X$ все идеалы в $C^+(\overline{Y})$ полустрогие;

6) для любого счётного дискретного $Y \subset X$ все идеалы в $C(\overline{Y})$ разностные.

В **главе 4** получены результаты об однородности в произведениях пространств.

Одним из главных инструментов доказательства неоднородности являются следующие две теоремы о сравнимости ультрафильтров.

Теорема 4.1.1. *Пусть $q \in \omega^*$ — любой неглавный ультрафильтр на ω и $p \in \omega^*$ — неглавный ультрафильтр, являющийся слабой P-точкой. Предположим, что существуют компактное $\mathscr{R}_2$-пространство X, точка $x \in X$ и две последовательности $(d_m)_{m\in\omega}$ и $(e_n)_{n\in\omega}$ точек X такие, что $\{d_m : m \in \omega\}$ — дискретное множество попарно различных точек и $e_n \neq x$ для всех $n \in \omega$, причем $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$. Тогда $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

Теорема 4.2.1. *Пусть X — компактное $\beta\omega$-пространство. Предположим, что $x \in X$, $(d_m)_{m\in\omega}$ — дискретная последовательность различных точек X, $(e_n)_{n\in\omega}$ — произвольная последовательность точек X и $x = p\text{-}\lim_m d_m = q\text{-}\lim_n e_n$, где $p, q \in \omega^*$, p — дискретно слабая P-точка и q — дискретный ультрафильтр. Если $\{n : e_n = x\} \notin q$, то $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

В доказательстве одного из основных результатов используется понятие S-разделённости:

Определение 4.3.1. Назовём множество $D = \{d^n : n \in \omega\}$ в произвольном компакте X *S-разделённым*, если найдутся открытые окрестности $U^n \ni d^n$, $n \in \omega$, такие, что для любых $y^n \in U^n$, $n \in \omega$, и для всех $I \subseteq \omega$

$$\overline{\{y^n : n \in I\}} \cap \overline{\{y^n : n \notin I\}} = \varnothing.$$

Предложение 4.3.1. *Пусть κ — бесконечный кардинал и $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, где каждый X_α — компакт, и предположим, что $d^n \in X$ для $n \in \omega$. Тогда следующие условия связаны импликациями 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longleftrightarrow$ 3):*

1) для некоторого $\alpha \in \kappa$ множество $\{d^n_\alpha : n \in \omega\}$ является S-разделённым в X_α;

2) *для некоторого счётного множества* $B \subseteq \kappa$ *множество* $\{\pi_B(d^n) : n \in \omega\}$ *является* S*-разделённым в* $\prod\limits_{\alpha \in B} X_\alpha$*;*

3) *множество* $\{d^n : n \in \omega\}$ *является* S*-разделённым в* X*.*

Свойство, которое можно противопоставить свойству $\mathscr{R}_3$, было введено Куненом[16]:

Определение 4.3.2. Топологическое пространство X называется *секвенциально малым*, если любое бесконечное множество из X содержит бесконечное подмножество, замыкание которого не содержит копию $\beta\omega$.

Теорема 4.1.1. *Пусть* κ *— кардинал и* $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *— компакт, причём каждый* X_α *удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:* (i) *является* $\mathscr{R}_2$*-пространством;* (ii) *содержит слабую* P*-точку;* (iii) *содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество. Пусть также* X_α *— бесконечное компактное* $\mathscr{R}_2$*-пространство для хотя бы одного* $\alpha \in A$*. Тогда* X *неоднородно.*

Следствие 4.3.1. *Произведение компактных* $\mathscr{R}_2$*-пространств неоднородно.*

Теорема 4.3.3. *Предположим, что существует дискретный ультрафильтр* $q \in \omega^*$*,* κ *— кардинал и* $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *— компакт, причём каждый* X_α *удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:* (i) *является* $\beta\omega$*-пространством;* (ii) *содержит слабую* P*-точку;* (iii) *содержит непустое секвенциально малое открытое подмножество. Пусть также* X_α *— бесконечное компактное* $\beta\omega$*-пространство для хотя бы одного* $\alpha \in A$*. Тогда* X *неоднородно.*

Следствие 4.3.2. *Если существует дискретный ультрафильтр в* ω^**, то произведение компактных* $\beta\omega$*-пространств неоднодноролно.*

Следующее следствие использует предположение $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Через $\mathfrak{d}$ обозначают наименьшую мощность *доминирующего* семейства $\mathscr{D}$ функций $\omega \to \omega$, т.е. семейства с тем свойством, что для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся функция $g \in \mathscr{D}$ такая, что $g(n) \geqslant f(n)$ для всех, кроме конечного числа, $n \in \omega$, и $\mathfrak{c}$ — стандартное обозначение для 2^ω. Очевидно, что CH влечёт за собой $\omega_1 = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, однако утверждение $\omega_1 < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ также совместимо с ZFC.

Следствие 4.3.3. *В предположении $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ произведение компактных $\beta\omega$-пространств неоднородно.*

Приведём результаты о метризуемости однородных подпространств произведений.

Нам понадобится следующее теоретико-множественное предположение:

NNCPP_κ: *Существует κ попарно $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-несовместимых (т.е. не почти когерентных) P-точек.*

Теорема 4.4.1 ($\mathrm{NNCPP}_{\omega_1}$). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^\omega$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X метризуемо.*

Теорема 4.4.2 (NNCPP_{n+1}). *Пусть Y — $\beta\omega$-пространство, $X \subset Y^\omega$ — однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X конечно.*

Заключение

В диссертации получены следующие результаты.

1. В главе 1 рассмотрены основные свойства ультрафильтров, порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика и взаимосвязь между ними. Особое внимание уделено дискретным ультрафильтрам, доказано, что они образуют подполугруппу в полугруппах $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ и в $(\beta\mathbb{N}, +)$.

2. В главе 2 введены классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$-пространств, являющиеся естественными обобщениями классов экстремально несвязных пространств и F-пространств. Исследована их взаимосвязь друг с другом и с классами F- и $\beta\omega$-пространств. Доказано полезное общее утверждение о продолжении функций с подпространств на топологические произведения; с помощью него, в частности, показано, что классы $\mathscr{R}_1$-, $\mathscr{R}_2$-, $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств не сохраняются стоун-чеховской компактификацией. Определены и рассмотрены обобщения введённых классов пространств на несчётные кардиналы.

3. В главе 3 рассмотрено продолжение функций в классе $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств со счётных подпространств. Приведена алгебраическая

характеризация $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

4. В главе 4 получены результаты о сравнимости в смысле порядка Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в $\mathscr{R}_2$- и $\beta\omega$-пространстве сходятся последовательности к одной и той же точке. Доказано, что произведение бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств пространств, а при условии существования дискретного ультрафильтра $\mathscr{R}_3$- и даже $\beta\omega$-пространств, не бывает однородным. Также в дополнительных теоретико-множественных предположениях доказана конечность компактов в однородных подпространствах конечных произведений однородных $\beta\omega$-пространств и метризуемость компактов в однородных подпространствах счётных произведений однородных $\beta\omega$-пространств.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Ольге Викторовне Сипачевой за постановку задачи, многочисленные полезные обсуждения, заботу и терпение, а также Евгению Александровичу Резниченко за стимулирующие беседы.

Автор благодарит коллектив кафедры общей топологии и геометрии за доброжелательную и творческую атмосферу.

Автор также признателен Евгению Михайловичу Вечтомову за плодотворные обсуждения.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология») и входящие в базы цитирования Scopus, РИНЦ, RSCI, WoS

[1] А. Ю. Грознова, *О продолжении функций со счётных подпространств*, Функц. анализ и его прил., **56**(4), 35–42 (2022).

DOI: 10.4213/faa4038

Журнал индексируется в **Scopus**, **РИНЦ**, **RSCI**, **WoS**. IF[24]: SJR 0,354.

[2] A. Groznova, O. Sipacheva, *Discrete ultrafilters and homogeneity of product spaces*, Topol. Appl. Available online 14 December 2022, 108378 (2022).

Большинство результатов статьи получены в нераздельном соавторстве с О. В. Сипачевой, предложения 1.4.1 и 1.4.2, следствия 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 и 1.4.5 доказаны А. Ю. Грозновой.

DOI: 10.1016/j.topol.2022.108378

Журнал индексируется в **Scopus**, **WoS**. IF: 0,583.

[3] А. Ю. Грознова, О. В. Сипачёва, *Новые свойства топологических пространств, обобщающие экстремальную несвязность*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем., мех., №1, 19–25 (2023).

Большинство результатов статьи получены в нераздельном соавторстве с О. В. Сипачевой, предложения 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 и 2.2.4 доказаны А. Ю. Грозновой.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-19-25

Журнал индексируется в **Scopus**, **РИНЦ**, **RSCI**, **WoS**. IF: SJR 0,417.

[4] А. Ю. Грознова, *Об однородности произведений топологических пространств*, Матем. заметки, **113**(2), 171–181 (2023).

DOI: 10.4213/mzm13634

Журнал индексируется в **Scopus**, **РИНЦ**, **RSCI**, **WoS**. IF: SJR 0,58.

[24] Указаны импакт–факторы SJR за 2021 год.

Тезисы докладов

[5] А. Ю. Грознова, *Новые свойства топологических пространств, связанные с экстремальной несвязностью*, Международная конференция по топологии и её приложениям, посвященной 100-летию со дня рождения Ю. М. Смирнова, 20–21 сентября 2021 г. (тезисы), https://sites.google.com/view/smirnov-100/abstracts?authuser=0.

[6] А. Ю. Грознова, *Свойства типа отделимости и их поведение при основных операциях над топологическими пространствами*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ–2022» / Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, Е. И. Зимакова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2022, https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2022/data/25625/142091_uid241578_report.pdf.