

**Отзыв официального оппонента на диссертацию
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук
Емельянова Дмитрия Павловича
на тему «Построение решений краевых задач для нерегулярно
вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений с
аналитическими коэффициентами» по специальности
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.**

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа Д.П. Емельянова посвящена исследованию аналитичности решений некоторых краевых задач для эллиптического уравнения с параболическим вырождением на границе области. Актуальность выбранной темы обусловлена тем фактом, что результаты подобных исследований позволяют получать тонкие качественные свойства решений подобных задач вблизи кривой вырождения. Ранее подобные задачи были предметом исследования А.И. Янушаускаса, В.Н. Врагова, С.В. Руткаускаса, И.С. Ломова. Следует отметить, что в подавляющем большинстве научных работ предметом исследования являются функции из фундаментальных систем решений уравнений или решения задач Коши.

Научная новизна диссертационной работы. Полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Д.П. Емельяновым рассматриваются краевые задачи для уравнения вида

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f$$

в прямоугольнике $(x, y) \in (0, 1) \times (0, b)$ при регулярных вырождениях с показателем $1 \leq m \leq 2$. В зависимости от значений m и $c(0)$ автором ставится либо краевая задача Дирихле, либо модифицированная краевая задача, в которой решение освобождено от необходимости принимать конкретные значения на участке границы, включающем вырождение. Решения поставленных задач строятся в следующем общем виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, b],$$

где функции $Y_k(y)$ представлены в виде конечной или бесконечной суммы функций с алгебраическими или логарифмическими особенностями вблизи кривой $y = 0$. Характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Таким образом, работа соискателя развивает метод спектрального выделения особенностей И.С. Ломова, переносящий метод регуляризации сингулярных возмущений С.А. Ломова на случай дифференциальных уравнений с частными производными с вырождением.

В первой главе диссертационной работы рассматривается случай вырождения $m = 2$. Д.П. Емельянов обобщает результаты, полученные И.С. Ломовым на случай $c(y) \neq 0$, используя два различных способа оценки скоростей сходимости рядов. При этом применения второго способа позволяет установить сходимость в случае наличия логарифмических особенностей у решения. Функции $Y_k(y)$ в этом виде представляются в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \varphi_k(y) + \ln \frac{y}{b} \cdot \chi_k(y),$$

где функции $\eta_k(y)$, $\varphi_k(y)$ и $\chi_k(y)$ не теряют аналитичности при $y = 0$, а числа $r_k > 0$ зависят только от k , $a(0)$ и $c'(0)$. Показано, что если $r_k \notin \mathbb{N}$, то $\chi_k(y) \equiv 0$. Для обозначенных функций получены рекуррентные формулы коэффициентов их степенных рядов.

Аналогичные переносятся Д.П. Емельяновым во второй и третьей главах диссертационной работы на случаи $m = 1$ и $1 < m < 2$ соответственно. При этом им получены представления

$$Y_k(y) = \eta_k(y) + \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{q}} \varphi_{k,n}(y) + \ln \frac{y}{b} \cdot \chi_k(y),$$

если $m = p/q \in \mathbb{Q}$ и

$$Y_k(y) = \eta_k(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{b}\right)^{n(2-m)} \varphi_{k,n}(y),$$

если $m \notin \mathbb{Q}$. Последний случай исследуется впервые.

В целях доказательства сходимости построенных решений, автором косвенно были получены результаты, относящиеся к асимптотической теории дифференциальных уравнения. Исследуется фундаментальная система решений уравнения

$$y^m Y_k'' + c(y) Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) Y_k = 0$$

при $y \in (0, b)$. Данное уравнение одновременно содержит вырождение y^m и большой параметр k . Для специально выбранной фундаментальной системы решений этого уравнения автором установлены тонкие двусторонние оценки её элементов, равномерные по $k \in \mathbb{N}$ и $y \in (0, b)$, а в отдельных случаях получен главный член их асимптотики при $k \rightarrow +\infty$.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту. Все выносимые на защиты положения сформулированы в виде теорем, каждая из которых снабжена строгим и полным математическим доказательством. По теме диссертации соискателем опубликовано 10 работ. Основные результаты диссертации изложены в 4 научных работах соискателя, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI и рекомендованных для защиты диссертаций в диссертационном совете МГУ. Достоверность полученных Д.П. Емельяновым результатов также подкрепляется многочисленными выступлениями на научных конференциях и научных семинарах.

Замечания по диссертации.

1. Содержимое диссертации пересказано в автореферате чрезмерно подробно.
2. В диссертации автор опускает фрагменты выкладок, некоторые из которых, на мой взгляд, не являются очевидными. К таковым можно отнести оценки, получаемые в теоремах 2.3, 2.5, 2.7 и 3.3.
3. В третьей главе диссертации автор не приводит определение функциональной сходимости в пространстве $A(U)$, видимо, полагая его

стандартным. В то же время наличие этого определения упростило бы ознакомление с диссертацией читателям, не знакомым с ТФКП.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Общая оценка диссертационной работы. Считаю, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (по физико-математическим наукам), а именно следующим её направлениям:

— начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений,

— качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений,

— аналитическая теория дифференциальных уравнений,

— асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем,

а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Емельянов Дмитрий Павлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой высшей математики

ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»

Качалов Василий Иванович



(подпись)

(дата)

Контактные данные:

тел.: +7 (495) 362-71-31, +7 (495) 362-78-74, e-mail: KachalovVI@mpei.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление.

Адрес места работы:

111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 17,

ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», кафедра высшей математики, ауд. Б-308.

Тел.: +7 (495) 362-71-31, +7 (495) 362-78-74, e-mail: KachalovVI@mpei.ru

Подпись заведующего кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»

В.И. Качалова удостоверяю:

