ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Емцова Елена Дмитриевна

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Специальности: 1.3.1. Физика космоса, астрономия; 1.3.3. Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2022

Научный руководитель — *Петров Александр Николаевич,*
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты — *Арбузов Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, научный отдел теории фундаментальных взаимодействий, начальник сектора №5*

Пширков Максим Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, ГАИШ МГУ, отдел радиоастрономии, заведующий

Червон Сергей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, Факультет физико-математического и технологического образования, кафедра физики и технических дисциплин, профессор

Защита диссертации состоится 09 февраля 2023 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета МГУ.013.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Университетский проспект, дом 13, конференц-зал.

E-mail: ed.emcova@physics.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

https://istina.msu.ru/dissertations/512495243/ .

Автореферат разослан декабря 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук О.М. Белова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Один из самых сложных вопросов в современной гравитации состоит в том, что общая теория относительности (ОТО) вместе с представлениями о материи в рамках Стандартной модели несовместна с современными космологическими наблюдениями. Это ускоренное расширение Вселенной как в настоящее время, так и в ее ранние периоды, объясняющиеся темной энергией и инфляцией соответственно. Это также наблюдения галактик и крупномасштабной структуры, которые указывают на присутствие неизвестного компонента - темной материи, которая проявляется в гравитационных эффектах. Помимо различных экзотических моделей элементарных частиц, потенциальное объяснение этих наблюдений дают модифицированные теории гравитации.

Большинство модификаций ОТО производится в ее стандартной формулировке – в терминах римановой кривизны, но можно также модифицировать ОТО на основе ее эквивалентных формулировок, таких как телепараллельный эквивалент ОТО (TEGR - Teleparallel Equivalent of General Relativity), симметричный телепараллельный эквивалент ОТО (STEGR - Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity) и др. [1]. Такие модификации вызывают чрезвычайно высокий интерес в последние годы. С теоретической точки зрения, модификации TEGR и STEGR интересны тем, что уравнения поля остаются уравнениями второго порядка. Они также проявляют сходства с теориями калибровочных полей, что потенциально обеспечивает связь с теориями, описывающими другие фундаментальные взаимодействия в природе.

По этим причинам телепараллельные теории гравитации становятся все более популярными в последние годы и являются **предметом** данного диссертационного исследования. Они включают и сам TEGR [2], и различные его модификации, такие как гравитация $f(T)$ [3] и другие модели [4, 5]. Среди всех телепараллельных теорий наиболее развитой и изученной является именно TEGR, см. [2]. Но даже в нем существуют проблемы, которые до сих пор не решены, а их решение является очень важным как для самого TEGR, так, естественно, и для его модификаций.

В обычной (метрической) ОТО без введения дополнительных структур есть проблемы с построением координатно ковариантных сохраняющихся величин. В тетрадной ОТО построены координатно ковариантные сохраняющиеся величины, но отсутствует их инвариантность относительно локальных лоренцевых вращений [6]. Актуальность решения этой проблемы несомненна. В рамках TEGR эта проблема может быть решена. Например, в работах [7, 8] построены дважды ковариантные сохраняющиеся величины, но в формализме дифференциальных форм. Этот формализм не очень удобен в приложениях и, к сожалению, не получил развития. Проблема построения в TEGR сохраняющихся величин, ковариантных как относительно координатных преобразований, так и относительно локальных лоренцевых вращений одновременно является одной из главных задач, которой мы будем уделять внимание в диссертации.

Как упоминалось, некоторые явления могут быть лучше описаны с помощью расширенных теорий. Инструментами проверки этих теорий являются: построение динамики расширения вселенной, моделирование слияния черных дыр, исследование гравитационных волн, построение изображений теней черных дыр и т.д. Хорошо зарекомендовавшим себя способом проверки жизнеспособности метрических теорий гравитации на масштабах порядка Солнечной системы является параметризованный постньютоновский формализм (ППН) [9], который характеризует теории гравитации набором десяти (обычно постоянных) параметров. Сравнение ППН-параметров, полученных из теории, с их значениями, полученными в высокоточных измерениях на масштабах Солнечной системы, накладывает ограничения на параметры разрешенных теорий. Актуальность таких исследований в рамках телепараллельных теорий гравитации очевидна.

Степень разработанности темы исследования

Несмотря на значительное развитие телепараллельных теорий гравитации, эти исследования имеют важные нерешенные (или недостаточно изученные) проблемы. Как упоминалось, одной из них является построение сохраняющихся величин. Лишь в рамках формализма дифференциальных форм были построены сохраняющиеся величины в TEGR [7, 8], которые позволили построить непротиворечивым образом заряды, которые одновременно оказались бы координатно ковариантными и инвариантными относительно локальных лоренцевых вращений тетрад. Однако эти результаты не получили дальнейшего развития и были проверены на ограниченном числе моделей. А насколько известно, определение сохраняющихся величин является одной из самых важных задач для разработки основ той или иной теории.

Как правило, формулы для сохраняющихся величин в TEGR, полученные при разработке того или иного подхода, проходят тестирование в приложениях к различным известным объектам, таким как черные дыры, космологические модели и т.д. [7, 8]. Однако нет одновременного исследования того или иного объекта, представленного в различных координатах, например, шварцшильдова черная дыра, представленная в обычных статических координатах, леметровых координатах, изотропных координатах и т.д. В реальности, эти возможности оказываются очень важными и должны быть рассмотрены.

Среди модифицированных теорий гравитации есть очень важный класс модифицированных телепараллельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем. Эти теории недостаточно проверены на предмет соответствия данным современных наблюдений. В том числе они не были проверены в рамках ППН формализма, что является, с одной стороны, важным, с другой стороны, доступным.

Так как именно соответствие наблюдениям позволяет принять или исключить ту или иную теорию или предположение, то **объектом** данного диссертационного исследования являются астрофизические и космологические решения. Для проверки сохраняющихся величин в TEGR используются решения ОТО для вселенных Фридмана и (анти-)де Ситтера и черной дыры Шварцшильда. А при применении ППН-формализма, используемого для проверки телепараллельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем, предполагается идеальная жидкость, движущаяся с малой скоростью по сравнению со скоростью света.

Цели и задачи

В целом, диссертация посвящена изучению свойств телепараллельной гравитации. В частности, были поставлены следующие задачи:

1) Построить для TEGR выражения для сохраняющихся величин (токов, суперпотенциалов и зарядов) в самом общем виде в тензорной форме, таких, что они будут одновременно координатно ковариантны и инвариантны относительно локальных лоренцевых вращений тетрад.

2) Исследовать

а) полученные сохраняющиеся величины теоретически;

б) возможности их использования в рамках конкретных космологических и астрофизических моделей, таких как вселенные Фридмана и (анти-)де Ситтера, а также черная дыра Шварцшильда;

в) ограничения для их приложений;

г) сравнить новые выражения с предшествующими, как теоретически, так и в приложениях.

3) Изучить результаты применения новых методов построения сохраняющихся величин в TEGR для обобщений TEGR, типа f(T)-теорий.

4) Оценить жизнеспособность класса модифицированных телералельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем методом ППН-формализма на масштабах Солнечной системы.

Научная новизна работы

Результаты работы являются полностью оригинальными. Это новые ковариантные по отношению к координатным преобразованиям и инвариантные по отношению к локальным лоренцевым вращениям тетрад сохраняющиеся токи, суперпотенциалы и заряды в TEGR, а также законы сохранения для них. Обобщена процедура «выключения» гравитации, которая дает возможность определить необходимую нединамическую величину – инерциальную спиновую связность. Обобщено понятие «калибровок» в TEGR. Выяснена неоднозначность применения метода «выключения» гравитации и разработаны способы ее исследования на примере решения для черной дыры Шварцшильда. Впервые построена обобщенная метрика Леметра для решения Шварцшильда. Проведено подробное сравнение оригинальных результатов с предшествующими результатами других авторов.

Новый универсальный метод «выключения» гравитации проверен на предмет подходящих калибровок для обобщенных f(T)-теорий, где также стоит проблема определения «хороших» тетрад.

Впервые проверены на жизнеспособность модифицированные телералельные теории с неминимальной связью кручения со скалярным полем методом ППН-формализма в Солнечной системе.

Теоретическая и практическая значимость

Законы сохранения и сохраняющиеся величины являются одними из самых главных характеристик любой физической теории. Поэтому их разработка в рамках TEGR и соответствующий результат, конечно, имеют высокую научную значимость. Об этом свидетельствует рейтинг рецензируемых журналов, где они опубликованы. И, конечно, это существенный вклад в теоретическое развитие телепараллельных теорий.

В последнее время выходит все больше работ, где в рамках телепараллельных теорий рассматриваются как космологические модели, так и модели астрофизических объектов. Например, для описания недавних наблюдений теней черных дыр в центре галактики M87 и Стрелец A* активно используются (наряду с другими обобщениями ОТО) варианты телепараллельных теорий. В свете этой активности, как с теоретической точки зрения, так и относительно прикладных перспектив, полученные результаты имеют очень высокий потенциал для дальнейшего развития.

В качестве практической значимости результатов проверка на жизнеспособность расширенных телераллельных теорий, включая теории с неминимальной связью кручения со скалярным полем, без сомнения важна. При этом теоретические знания были протестированы с помощью конкретных наблюдений в рамках Солнечной системы с использованием метода ППН-формализма.

Методология и методы исследования

Инструментом для построения сохраняющихся величин и законов сохранения для них является классическая теорема Нётер. Используется инвариантность действия TEGR относительно диффеоморфизмов. При этом вектора смещений остаются в выражениях для сохраняющихся токов, суперпотенциалов и зарядов. Соответствующий выбор векторов смещений определяет интерпретацию сохраняющихся величин. Все теоретические расчеты основаны на применении стандартных и проверенных формализмов в физике и математике. Для оценки жизнеспособности телепараллельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем на масштабах Солнечной системы использовался ППН-формализм.

Проверка правильности теоретических расчетов, полученных вручную, и проведение наиболее громоздких вычислений производились программированием в среде Wolfram Mathematica.

Положения, выносимые на защиту:

1) Теорема Нётер в телепараллельном эквиваленте общей теории относительности приводит к сохраняющимся токам, суперпотенциалам и зарядам, одновременно координатно кова-

риантным и инвариантным относительно лоренцевых вращений тетрад, построенным впервые в тензорной форме. Решающим является наличие в новых выражениях инерциальной спиновой связности и вектора смещений.

2) Новый универсальный (обобщенный) метод «выключения» гравитации определяет инерциальную спиновую связность. Вектора смещений выбираются в соответствии с приложениями (в виде векторов Киллинга, собственных векторов наблюдателей, и т.д.). Как результат, свободно падающие наблюдатели во вселенных Фридмана и (анти-)де Ситтера, измеряют нулевые плотности энергии и импульса в соответствии со слабым принципом эквивалентности. Масса и импульс как покоящейся, так и движущейся черной дыры Шварцшильда, измеренные бесконечно удаленными наблюдателями являются физически ожидаемыми.

3) Универсальный метод «выключения» гравитации приводит к неоднозначностям, для исследования которых используется новое обобщенное понятие «калибровки». Для черной дыры Шварцшильда одна из калибровок приводит к ожидаемой массе, но не дает соответствия принципу эквивалентности. Другая калибровка, наоборот, удовлетворяет второму требованию, но не первому. Оригинальная новая калибровка одновременно удовлетворяет обоим требованиям.

4) Для модифицированных телепараллельных теорий (i) универсальный метод «выключения» гравитации в общем случае не дает калибровок, удовлетворяющих полевым уравнениям $f(T)$-гравитации, где также стоит проблема определения «хороших» тетрад; (ii) определяется пост-ньютоновский предел для теорий кручения, неминимально связанного со скалярным полем, а современные данные о пост-ньютоновских параметрах накладывают ограничения на параметры этих теорий, но оставляют их жизнеспособными.

Степень достоверности результатов

Расчеты проводились как вручную, так и с использованием программы Wolfram Mathematica, а затем проверялось их совпадение. Проверялось совпадение результатов, получнных с помошью эквивалентных формул.

Проверялось соответствие полученных результатов результатам работ предыдущих авторов. Для интерпретации полученных результатов использовались выводы из общей теории относительности.

Достоверность результатов исследования подтверждают публикации в рецензируемых журналах и их апробация на международных конференциях.

Апробация результатов

Достоверность этих результатов и их высокая значимость подтверждается тем, что они опубликованы в журналах высокого рейтинга, а также были доложены на международных конференциях:

1) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity (Устный) », XXI International Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory» (PIRT-2019), Москва, МВТУ им. Н.Э.Баумана, Россия, 1-5 июля 2019.

2) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity (Устный)», 10th Alexander Friedmann International Seminar on gravitation and cosmology, Санкт-Петербург, Россия, 23-29 июня 2019.

3) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity (Устный)», Geometric Foundations of Gravity 2019, Тарту, Эстония, 17-21 июня 2019.

4) Emtsova E.D., Hohmann M. «Post-Newtonian limit of scalar-torsion theories of gravity as analogue to scalar-curvature theories (Устный)», Geometric Foundations of Gravity 2019, Тарту, Эстония, 17-21 июня 2019.

5) Emtsova E.D., Krssak M., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On the Schwarzschild solution in TEGR (Устный)», XXII International Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory» (PIRT-21), Москва, МВТУ им. Н.Э.Баумана, Россия, 5-9 июля 2021.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных рецензируемых изданиях, 4 из которых опубликованы в высоко рейтинговых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science/Scopus/RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальностям:

1) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «Conserved currents and superpotentials in teleparallel equivalent of GR», Classical and Quantum Gravity, 37, 095006 (2020). DOI: 10.1088/1361-6382/ab7715 (IF WoS: 3.528)

2) Emtsova Elena D., Manuel Hohmann, «Post-Newtonian limit of scalar-torsion theories of gravity as analogue to scalar-curvature theories», Physical Review D, 101, 024017 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.101.024017 (IF WoS: 5.296)

3) Emtsova E.D., Kršśák M., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conserved quantities for the Schwarzschild black hole in teleparallel gravity», European Physical Journal C, 81, 743 (2021). DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09505-x (IF WoS: 4.59)

4) Emtsova E.D., Petrov A.N. «On gauges for a moving black hole in TEGR», General Relativity and Gravitation, 54, 114, (2022). DOI: 10.1007/s10714-022-02996-3 (IF WoS: 2.513)

Опубликована одна статья в рецензируемом журнале списка ВАК:

Emtsova E.D., Petrov A.N. «A moving black hole in TEGR as a moving matter ball», Space, Time and Fundamental Interactions, №2(39), 18-25 (2022). (Емцова Е.Д., Петров А.Н. «Движущаяся черная дыра в TEGR как движущийся материальный шар», Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, №2(39), 18-25 (2022).) DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.2.18-25

Опубликованы 2 статьи в рецензируемом журнале конференций, который в базе данных Scopus:

1) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity», Journal of Physics: Conference Series, 1557, 012017 (10pp) (2020). DOI: 10.1088/1742–6596/1557/1/012017 (IF WoS: 0.547)

2) Emtsova E.D., Krššák M., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On the Schwarzschild solution in TEGR», Journal of Physics: Conference Series, 2081, 012017 (9pp) (2021). DOI: 10.1088/1742 – 6596/2081/1/012017 (IF WoS: 0.48)

Все вышеперечисленные работы соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. Сама работа соответствует, с одной стороны, специальности 1.3.1. «Физика космоса, астрономия». Действительно, все многочисленные приложения осуществляются в рамках моделей черных дыр, которые в настоящее время наблюдаются непосредственно, и чрезвычайно интенсивно изучаются в связи с новыми данными; в рамках космологических моделей, интерес к которым очень сильно возрос после открытия инфляционного расширения, а затем и современного расширения. Исследования в Солнечной системе методом ППН-формализма, конечно, также соответствуют этой специальности. С другой стороны, работа соответствует специальности 1.3.3. «Теоретическая физика». Действительно, теоретическая часть исследования проводится методами гравитационной физики, в том числе, методами телепараллельной гравитации, которая интенсивно развивается.

Личный вклад автора

Автором была выполнена проверка выражений построенных в TEGR сохраняющихся величин (Глава 2) и их представление через величины, используемые в компьютерных расчетах. Выполнен совместно с соавторами как вручную, так и с использованием программы Wolfram Mathematica: (i) расчет сохраняющихся величин для различных решений в TEGR (Главы 3-5), (ii) расчет компонент полевых уравнений в $f(T)$-гравитации (Глава 6), (iii) расчет ППН-параметров в теориях кручения, неминимально связанного со скалярным полем (Глава 7). Автором был предложен ряд новых теоретических идей, наиболее важными из которых являются: обобщение понятия калибровок в TEGR, построение новой обобщенной метрики Леметра и соответствующей калибровки Леметра, схематическое представление калибровок, обоснование неоднозначности «выключения» гравитации. Написание текстов научных статей проводились совместно с соавторами. Личный вклад автора в полученные результаты численно можно оценить как 60-70%.

Структура и содержание диссертации

Диссертация состоит из Введения, семи Глав, Заключения, списка сокращений, двух дополнений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 111 страниц, включая 3 рисунка и 2 таблицы. Список литературы включает 133 наименования на 9 страницах.

Во **Ведении** подробно описываются актуальность темы исследования, степень разработанности темы исследования, цели и задачи работы, научная новизна работы, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, формулируются положения, выносимые на защиту, обосновывается степень достоверность и апробация результатов, перечисляется список опубликованных статей и выступлений на конференциях, описывается личный вклад автора.

В **Главе 1** изложены основы телепараллельной гравитации и отмечены имеющиеся проблемы при построении сохраняющихся величин. В первом параграфе даны основные геометрические определения, затем представлено сравнение лагранжианов в тетрадных представлениях ОТО (лагранжины Гильберта и Мёллера) и телепараллельного лагранжиана. Динамическими полями являются компоненты тетрады $h^a{}_\mu$ ($a = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ - нумерует тетрадные вектора, как и другие латинские индексы; $\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ - нумерует координаты, как и другие греческие индексы). Связь метрики с тетрадой выражается формулой $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu$. Символ $\circ$ означает, что соответствующая величина построена с использованием связности Леви-Чивиты $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda}$. Вводится соответствующая спиновая связность Леви-Чивиты (Л-ЧСС): $\overset{\circ}{A}{}^{i}{}_{j\mu}$. Символ $\bullet$ обозначает величины, построенные с использованием телепараллельной связности $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda}$. Эта связность плоская и согласована с физической метрикой. Ковариантность телепараллельных величин относительно локально-лоренцевых врещений тетрад $h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) h^b{}_\mu$ достигается благодаря введению нединамического поля - инерциальной спиновой связности (ИСС) $\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}$, которая описывает только инерционные эффекты и представима в виде:

$$\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{c\mu} = \Lambda^b{}_d(x)\partial_\mu \Lambda_c{}^d(x)$$

с соответствующей матрицей локального вращения Лоренца $\Lambda^b{}_d(x)$. Тетрада, соответствующая нулевой ИСС называется собственной. Важной величиной является тензор кручения:

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}{}_{\lambda\kappa} \equiv \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda\kappa} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda}\ ,$$

который является как координатно ковариантным, так и Лоренц-инвариантным.

Лагранжиан TEGR имеет вид:

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\rho} - \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}\right) \equiv \frac{h}{2\kappa}\overset{\bullet}{T}\,,$$

где $\overset{\bullet}{T}$ - скаляр кручения, $h = \det(h^a{}_\mu)$, κ — постоянная Эйнштейна. Лагранжиан $\overset{\bullet}{\mathcal{L}}$, имеет производные только первого порядка, в отличие от лагранжиана Гильберта и является одновременно и координатно-ковариантным, и Лоренц-инвариантным, в отличие от лагранжиана Мёллера.

Во втором параграфе приводятся уравнения поля в TEGR, на основе которых, как принято, выписываются дифференциальные законы сохранения.

В третьем параграфе описывются проблемы в построении законов сохранения в TEGR. Интегрирование дифференциальных законов сохранения дает интегральные сохраняющиеся величины на гиперповерхностях постоянного времени $x^0 = \mathrm{const} := \Sigma$ в виде поверхностных интегралов по границе $\partial\Sigma$:

$$P_a = -\frac{1}{\kappa}\oint_{\partial\Sigma} ds_i \left(h\ \overset{\bullet}{S}{}_a{}^{0i}\right)\ ,$$

где $\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_a + \overset{\bullet}{T}{}_a{}^{\mu\nu} - \overset{\bullet}{T}{}^{\mu\nu}{}_a\right) - h_a{}^\mu\, \overset{\bullet}{T}{}^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\nu} + h_a{}^\nu\, \overset{\bullet}{T}{}^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\mu}$. Величина P_a, будучи координатно инвариантной, не является Лоренц-ковариантной.

Интегрируя уравнения поля в полностью пространственно-временной форме можно определить сохраняющуюся величину, но в индексах пространства-времени:

$$P_\mu = -\frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\Sigma} d^2x \, h \, \overset{\bullet}{S}_\mu{}^{01}.$$

где $\overset{\bullet}{S}_\mu{}^{01} = h^a{}_\mu \overset{\bullet}{S}_a{}^{01}$. Величина P_μ инвариантна относительно всех локальных преобразований Лоренца, но не ковариантна относительно диффеоморфизмов.

Перечисленные проблемы являются частью теоретических проблем, которые решены в диссертации.

Глава 2 посвящена построению сохраняющихся величин в TEGR. В первом параграфе в соответствии с [6] построены нётеровские сохраняющиеся величины в произвольной полевой теории с действием, зависящим от полей и их первых и вторых производных. Из инвариантности действия относительно диффеоморфизмов, индуцированных произвольным вектором смещения ξ, путем тождественных преобразований выводятся выражения для нётеровских тока $\mathcal{I}^\alpha(\xi)$ и суперпотенциала $\mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi)$. Ток, представляющий векторную плотность сохраняется: $\partial_\alpha \mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv 0$, а суперпотенциал, представляющий антисимметричную тензорную плотность, связан с током выражением: $\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi)$. На основании этого определен сохраняющийся нётеровский заряд:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma d^3x \mathcal{I}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \mathcal{I}^{0i}(\xi)\,.$$

Во втором параграфе с использованием общих формул и в явной форме выведены сохраняющиеся величины для Лагранжиана Мёллера [10]. Поученные величины ковариантны относительно координатных преобразований, но нековариантны относительно локальных лоренцевых вращений. Эти результаты важны для сравнения с построенными ниже полностью ковариантными сохраняющимися величинами.

В третьем параграфе с использованием общих формул и в явной форме выведены сохраняющиеся величины в ковариантном TEGR с лагранжианом $\overset{\bullet}{\mathcal{L}}$. Это полностью ковариантные нётеровский ток $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^\alpha(\xi)$ и нетеровский суперпотенциал

$$\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{\alpha\beta}(\xi) = \frac{h}{\kappa} \overset{\bullet}{S}_a{}^{\alpha\beta} h^a{}_\sigma \xi^\sigma\,.$$

Ковариантные законы сохранения позволяют построить сохраняющиеся заряды, одновременно инвариантные относительно лоренцевых вращений и координатных преобразований:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma dx^3 \, \overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \, \overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{0i}(\xi)\,.$$

То есть, решается проблема, обозначенная выше. Обсуждаются возможности выбора векторного поля ξ, как векторов Киллинга и как собственных векторов наблюдателей.

В четвертом параграфе вводится принцип определения ИСС — универсальный (обобщенный) метод «выключения» гравитации. На основании приведенных рассуждений, он состоит из следующих шагов: (i) для известного решения ОТО выбрать удобную тетраду и определить Л-ЧСС $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{c\mu}$; (ii) по определенной таким образом Л-ЧСС $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{c\mu}$ построить тензор Римана

$\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\gamma\delta}$; (iii) «выключить» гравитацию, решив уравнение $\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\gamma\delta} = 0$ относительно параметров выбранного решения ОТО; (iv) когда параметры, удовлетворяющие $\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\gamma\delta} = 0$, найдены, их значения обратят Л-ЧСС в ИСС: $\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{c\mu} = \overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{c\mu}$.

В пятом параграфе сравнивается введение ИСС как внешней структуры в TEGR и введение в метрической ОТО фонового пространства-времени, снабженного вспомогательной фоновой метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}$ и связанными с ней фоновыми символами Кристоффеля $\bar{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ методом Каца-Бичака-Линден-Белла [11]. Выявлены ряд аналогий и ряд различий.

В шестом параграфе приводятся обсуждение и итоги Главы.

Глава 3 посвящена вычислению энергии и импульса, измеряемых свободно падающим наблюдателем во вселенной Фридмана и пространстве (анти-)де Ситтера, через компоненты нетеровского тока в TEGR. В первом параграфе сделаны предварительные замечания об интерпретации компонент нётеровского тока $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{\alpha}(\xi)$ с собственным вектором свободно падающего наблюдателя ξ по аналогии со специальной теорией относительности: $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{0}$ — плотность энергии, а $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{i}$ $(i = 1, 2, 3)$ — компоненты плотности импульса, измеряемые наблюдателем.

Во втором параграфе с помощью компонент $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{\alpha}(\xi)$ рассчитаны плотности энергии и импульса, измеряемые свободно падающим наблюдателем во вселенная Фридмана. Метрика Фридмана взята в виде:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{1}{1 - kr^2}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right)$$

где k — три знака пространственной кривизны. Для вычислений удобно взять диагональную тетраду $h^{a}{}_{\mu} = \operatorname{diag}(1, a/\chi, ar, ar\sin\theta)$. Мы обозначили $\chi = \sqrt{1 - kr^2}$. Далее мы выбрали $\chi > 0$ и вычислили Л-ЧСС, «выключили» гравитацию согласно нашему методу, поучили ИСС и вычислили тензоры кручения и суперпотенциала. Для определения вектора ξ мы взяли покоящегося относительно координат (t, r, θ, ϕ) наблюдателя, компоненты собственного вектора которого равны $\xi^{\sigma} = (-1, 0, 0, 0)$. В результате мы получили, что все компоненты нетеровского тока $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{\alpha}(\xi)$ равны нулю, что соответствует принципу эквивалентности. Также мы перешли к калибровке Вайценбока, то есть обратили ИСС в нуль, после чего диагональная тетрада преобразовалась в собственную. Снова, естественно, получили нулевой нетеровский ток.

В третьем параграфе с помощью компонент $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^{\alpha}(\xi)$ рассчитаны плотности энергии и импульса, измеряемые свободно падающим наблюдателем в пространстве (анти-)де Ситтера в общем виде. Снова мы взяли диагональную тетраду, вычислили Л-ЧСС, затем «выключили» гравитацию и поучили ИСС. Потом нашли тензоры кручения и суперпотенциала. Взяв свободно падающего наблюдателя, «вмороженного» в хаббловский поток, собственный вектор которого $\xi^{\alpha} = (-1, 0, 0, 0)$, мы получили что все компоненты нетеровского тока равны нулю, что соответствует принципу эквивалентности. В калибровке Вайценбока был получен тот же результат.

В четвертом параграфе обсуждаются результаты и подводятся итоги Главы. Наши результаты в решениях Фридмана и в A(dS) сравниваются с результатами по определению хороших тетрад и ИСС для диагональных тетрад для этих же решений в модифицированных телепараллельных теориях [12]. В случае вселенных Фридмана результаты поиска ИСС для диагональных тетрад, собственных и хороших тетрад дополняют друг друга. А в случае пространства (A)dS в нашем подходе имеется возможность определить собственную тетраду в TEGR, тогда как авторы [12] показывают невозможность определения хорошей тетрады в модифицированной телепараллельной теории в A(dS) пространстве. Также обсуждается различие отождествления наблюдателя с вектором ξ как с внешней структурой от отождествления его с динамическим времениподобным тетрадным вектором[13, 14].

Глава 4 посвящена определению и исследованию калибровок в решении Шварцшильда в TEGR. В первом параграфе вычисляется масса черной дыры и вводится статическая калибровка Шварцшильда. Первоначально выбираем статическую метрику:

$$ds^2 = -fdt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $f = f(r) = 1 - 2M/r$. Для нее берется диагональная тетрада и обозначается как $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$. Далее для $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$ вычисляется Л-ЧСС, «выключается» гравитация согласно нашему методу, и вычисляется ИСС. Затем вычисляются компоненты $\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\mu\nu}$. Масса черной дыры вычисляется по формуле для заряда $\mathcal{P}(\xi)$, где вектор ξ взят равным времениподобному вектору Киллинга $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$. Результат для массы оказывается физически ожидаемым и равным M. Применяя соответствующее лоренцево вращение к $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$, находится собственная тетрада и обозначается как $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$. Пара из тетрады $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$ и соответствующей ей ИСС или пара из тетрады $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$ и нулевой ИСС, а также любая другая пара, полученная из имеющихся пар путем одновременного ковариантного преобразования тетрады и ИСС определяют статическую калибровку Шварцшильда.

Во втором параграфе производится вычисление энергии и импульса, измеряемые свободно падающим наблюдателем и вводится калибровка Леметра. После преобразований от статических координат Шварцшильда (t, r, θ, ϕ) к свободно падающим координатам Леметра $(\tau, \rho, \theta, \phi)$, метрика Шварцшильда приобретает вид:

$$ds^2 = -d\tau^2 + (1 - f)d\rho^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

где $r = r(\tau, \rho) = [\frac{3}{2}(\rho - \tau)]^{2/3}(2M)^{1/3}$, а соответствующая диагональная тетрада обозначена как $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$. Для $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$ вычисляется Л-ЧСС, «выключается» гравитация, и вычисляется соответствующая ИСС. Затем вычисляются компоненты тензора $\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\mu\nu}$. Для свободно падающего наблюдателя, который имеет собственный вектор $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ в координатах Леметра, получено, что все компоненты $\overset{\bullet}{\mathcal{J}}{}^\alpha(\xi)$ равны нулю, что соответствует принципу эквивалентности. Далее, применяя соответствующее лоренцево вращение к $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$, находится собственная тетрада, обозначенная как $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$. Определяется калибровка Леметра, которую представляют как пара из тетрады $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$ и соответствующей ИСС, так и пара из тетрады $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$ и нулевой ИСС, а также любой другой пары из тетрады и ИСС, если эта пара получена из перечисленных пар путем одновременного ковариантного преобразования тетрады и ИСС.

В третьем параграфе сравниваются статическая калибровка Шварцшильда и калибровка Леметра. Вначале определяются преобразования, которыми связаны тетрады $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$. Далее представлены различные формы статической калибровки Шварцшильда: тетрадам $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$ сопоставляются соответствующие ИСС. Показано, что для всех приведенных пар получается ожидаемая масса черной дыры M, но нет соответствия принципу эквивалентности. Затем выписываются различные формы калибровки Леметра: тетрадам $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$ сопоставляются соответствующие ИСС. Показано, что для всех пар есть соответствие принципу эквивалентности, но для массы черной дыры результат оказывается в 2 раза больше ожидаемого — $2M$. После этого проводится подробное обсуждение полученных результатов и отмечается необходимость их развития.

В четвертом параграфе определяется свободно падающий наблюдатель с произвольной энергией, производится вычисление соответствующих сохраняющихся величин и вводится e-калибровка. На основе уравнения геодезических обобщается преобразование координат, после которого метрика Шварцшильда приобретает вид обобщенной метрики Леметра:

$$ds^2 = -d\tau_e^2 + \left(e^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right) d\rho_e^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) ,$$

где $r = r(\tau_e, \rho_e)$, и рассматривается физически осмысленный случай $e > 1$. Снова выбрана диагональная тетрада, обозначенная как $\overset{E}{h}{}^a{}_\mu$. Для $\overset{E}{h}{}^a{}_\mu$ вычисляется Л-ЧСС, «выключается» гравитация, и вычисляется ИСС. Применяя соответствующее лоренцево вращение к $\overset{E}{h}{}^a{}_\mu$, находится собственная тетрада, обозначенная как $\overset{F}{h}{}^a{}_\mu$. Определяется e-калибровка, в которую включены пара из тетрады $\overset{E}{h}{}^a{}_\mu$ и соответствующей ИСС, пара из тетрады $\overset{F}{h}{}^a{}_\mu$ и нулевой ИСС, а также любая другая пара из тетрады и ИСС, если эта пара получена из перечисленных пар путем одновременного ковариантного преобразования тетрады и ИСС. Устанавливается связь между тетрадами $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$ и $\overset{E}{h}{}^a{}_\mu$, $\overset{F}{h}{}^a{}_\mu$. Затем для всей e-калибровки вычисляются компоненты $\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\mu\nu}$. Потом вычисляются масса черной дыры, где вектор ξ взят равным времениподобному вектору Киллинга, и нетеровский ток с вектором свободно падающего наблюдателя $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ в обобщенных координатах Леметра. Оба результата оказываются физически ожидаемыми: масса черной дыры равна M, а нетеровский ток для свободно падающего наблюдателя равен нулю, что соответствует принципу эквивалентности. Тем самым решены проблемы, возникшие в предыдущих параграфах. Новый результат обсуждается, а также кратко описывается случай $e < 1$.

В пятом параграфе подводятся итоги Главы.

Глава 5 посвящена построению сохраняющихся величин для движущейся черной дыры Шварцшильда. В первом параграфе строятся сохраняющиеся величины для движущегося с постоянной скоростью сферически симметричного материального шара в пространстве Минковского. На основе тензора энергии импульса строится сохраняющийся ток, который затем интегрируется. В качестве векторов смещения ξ берутся собственные вектора наблюдателей, одновременно являющиеся векторами Киллинга. Ожидаемо, что результат соответствует выводам специальной теории относительности.

Во втором параграфе в TEGR по аналогии с материальным шаром рассматривается движущаяся с постоянной скоростью v для удаленных наблюдателей черная дыра. Такое рассмотрение возможно благодаря полной ковариантности нашего формализма в TEGR. Метрика Шварцшильда рассматривается как в сферических изотропных, так и в декартовых изотропных координатах. Для каждой метрики строится своя диагональная тетрада, вычисляется Л-ЧСС, «выключается» гравитация, и определяется ИСС. Такое «выключение» гравитации привело к единой изотропной калибровке Шварцшильда, совпадающей со статической калибровкой Шварцшильда, для которой уже был посчитан суперпотенциал. Для расчета полной массы статической черной дыры были определены наблюдатели так же, как это было сделано в пространстве Минковского, но с учетом кривизны черной дыры. Вычисленная масса имеет ожидаемое значение M. Для вычисления энергии и импульса движушейся черной дыры применяется глобальное преобразование к току статической черной дыры. Интегрирование компонентов тока движущейся черной дыры аналогично интегрированию компонентов тока движущегося шара. Это приводит к ожидаемым значениям для полной массы и импульса движущейся черной дыры: $E_m = \gamma M; \qquad P_m = \gamma v M$, где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.

В третьем параграфе энергия и импульс движущейся черной дыры вычислены напрямую в неподвижной системе отсчета с вектором ξ статических наблюдателей и с использованием «движущейся калибровки». Это принципиально отличается от аналогии с движущимся шаром. В силу полной ковариантности нашего формализма это приводит к тем же результатам для полной массы и импульса движущейся черной дыры: $E_m = \gamma M; \qquad P_m = \gamma v M$. Показано, что новая «движущаяся калибровка» совпадает с изотропной калибровкой Шварцшильда. В четвертом параграфе подведены итоги Главы.

Глава 6 посвящена исследованию тетрад свободно падающих наблюдателей в $f(T)$-гравитации. В первом параграфе приведены полевые уравнения в $f(T)$-гравитации, где лагранжиан имеет вид $\overset{\bullet}{\mathcal{L}}_f = \frac{h}{2\kappa} f(\overset{\bullet}{T})$. Показано, что для определения либо хороших тетрад, либо ИСС в паре с произвольными по отношению к лоренцевым вращениям тетрадами следует рассматривать антисимметричные уравнения поля в виде:

$$E_{[ab]} = f_{TT}\, \overset{\bullet}{S}_{[ab]}{}^{\nu} \partial_\nu \overset{\bullet}{T} = 0.$$

Во втором параграфе проверяется возможность построения ИСС и хороших тетрад по аналогии с построением ИСС и собственных тетрад в TEGR в статических сферически симметричных решениях в $f(T)$-гравитации. Они рассматриваются общем случае в виде:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-A^2, B^2, r^2, r^2 \sin^2\theta),$$

где A, B — некоторые функции от r, которые в случае TEGR сводятся к компонентам обычной метрики Шварцшильда. Далее строятся две статические тетрады по аналогии с двумя статическими тетрадами $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$ и $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$ в TEGR: $\overset{\bar{B}}{h}{}^a{}_\mu$ — диагональная тетрада для выписанной выше метрики; $\overset{\bar{A}}{h}{}^a{}_\mu$ — тетрада, полученная из $\overset{\bar{B}}{h}{}^a{}_\mu$ путем локального лоренцева преобразования, такого же как в TEGR от $\overset{B}{h}{}^a{}_\mu$ к $\overset{A}{h}{}^a{}_\mu$. $\overset{\bar{A}}{h}{}^a{}_\mu$ является хорошей тетрадой, то есть удовлетворяет полевым уравнениям с нулевой ИСС, что многократно упоминается в различных статьях, а также может быть получена из $\overset{\bar{B}}{h}{}^a{}_\mu$ «выключением» гравитации. Затем строятся две свободно падающие тетрады по аналогии с двумя своофдно падающими тетрадами $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$ и $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$ в TEGR: $\overset{\bar{C}}{h}{}^a{}_\mu$ — связана с $\overset{\bar{B}}{h}{}^a{}_\mu$ лоренцевым бустом, имеющим смысл свободного падения, (это построение аналогично построению диагональной тетрады $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$ в метрике Леметра в TEGR, отличие лишь в том, что свободное падение тела удовлетворяет модифицированным уравнениям движения в $f(T)$-гравитации); $\overset{\bar{D}}{h}{}^a{}_\mu$ — тетрада, полученная из $\overset{\bar{C}}{h}{}^a{}_\mu$ путем локального лоренцева преобразования, такого же как в TEGR от $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$ к $\overset{D}{h}{}^a{}_\mu$. $\overset{\bar{D}}{h}{}^a{}_\mu$ может быть получена из $\overset{C}{h}{}^a{}_\mu$ путём «выключения» гравитации. Далее идет проверка, является ли $\overset{\bar{D}}{h}{}^a{}_\mu$ хорошей тетрадой и работает ли метод «выключения» гравитации для свободно падающих тетрад. Было установлено, что $\overset{\bar{D}}{h}{}^a{}_\mu$ с нулевой ИСС, а также $\overset{\bar{C}}{h}{}^a{}_\mu$ с ИСС, полученной путём «выключения» гравитации, не удовлетворяют антисимметричным уравнениям поля. Это означает, что собственные тетрады в TEGR не являются хорошими в $f(T)$-гравитации, а метод «выключения» гравитации в модифицированных телепараллельных теориях с целью определения ИСС или хороших тетрад в общем случае не применим.

В третьем параграфе обсуждается сходство в неоднозначности определения собственной тетрады в TEGR путем «выключения» гравитации с проявлением так называемых *остаточных симметрий* в $f(T)$-гравитации, а также подводятся итоги Главы.

Глава 7 посвящена определению ППН параметров в теории кручения, неминимально связанного со скалярным полем. В первом параграфе представлен лагранжиан теории, описаны полевые переменные и их динамика. Рассматриваемое действие имееет вид $S = S_g + S_m$, и, таким образом, распадается на гравитационную часть S_g и часть с материей S_m. S_m зависит, как от динамического скалярного поля ϕ, так и от произвольного множества χ^I полей материи. Предполагается, что материя представлена идеальной жидкостью. Также предполагается, что нет прямой связи между полями материи χ^I и ИСС, и что их связь с тетрадой и скалярным полем осуществляется только через конформно преобразованную метрику $e^{2\alpha(\phi)}g_{\mu\nu}$ со свободной функцией α скалярного поля. Гравитационная часть действия представлена в виде

$$S_g = \frac{1}{2\kappa^2}\int_M \left[-\mathcal{A}(\phi)T + 2\mathcal{B}(\phi)X + 2\mathcal{C}(\phi)Y - 2\kappa^2\mathcal{V}(\phi)\right]\theta\,\mathrm{d}^4x\,,$$

где скаляр кручения T определен выше (в этой Главе мы уже не пишем значок $\bullet$ над величинами) и используется кинетический член скалярного поля $X = -\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$, а также член с неминимальной кинетической связью между скалярным полем и векторной частью кручения (вектором кручения) $Y = g^{\mu\nu}T^\rho{}_{\rho\mu}\phi_{,\nu}$. Любое конкретное действие этого класса определяется заданием произвольных функций $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{V}$ скалярного поля, в дополнение к произвольной функции α в действии материи. Вычисления проводятся в жордановой системе, в которой $\alpha(\phi) \equiv 0$, и переход к ней осуществляется применением соответствующего конформного преобразования. На основе всех вышеприведенных предположений выписываются решаемые полевые уравнения вида

$$E_{(\mu\nu)} = \kappa^2 \Theta_{\mu\nu}\,, \quad E_{[\mu\nu]} = 0\,, \quad E = 0\,.$$

Первые два уравнения получаются вариацией действия по тетраде и разделением на симметричную и антисимметричную части. Их левая часть получена из вариации гравитационной части действия. Антисимметричное уравнение поля также можно получить, варьируя действие по ИСС, допуская только такие вариации, которые сохраняют ее нулевую кривизну. Третье уравнение поля получается вариацией по скалярному полю ϕ. Для удобства решения берутся преобразованные полевые уравнения. Симметричная часть уравнений поля и соответствующая замена имеют вид

$$\bar{E}_{(\mu\nu)} = \kappa^2 \bar{\Theta}_{\mu\nu}\,, \quad \bar{E}_{(\mu\nu)} = E_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma}\,, \quad \bar{\Theta}_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Theta_{\rho\sigma}\,,$$

а преобразованное скалярное уравнение поля имеет вид

$$\bar{E} = 2\mathcal{A}E + \mathcal{C} g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = \kappa^2 \mathcal{C}\Theta\,.$$

Эти уравнения решаются в разложении до 4-го порядка малости.

Во втором параграфе описано пост-ньютоновское разложение всех величин. Тензор энергии-импульса материи соответствует идеальной жидкости с плотностью энергии покоя ρ, удельной внутренней энергией Π, давлением p и 4-скоростью u^μ, который определяется выражением

$$\Theta^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}\,.$$

4-скорость u^μ нормируется метрикой $g_{\mu\nu}$, так что $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1$. Предполагается, что скорость $v^i = u^i/u^0$ источника материи мала по сравнению со скоростью света $c \equiv 1$, поэтому $|\vec{v}|$ принимается как параметр возмущения. Затем вводятся порядки по скорости $\mathcal{O}(n) \propto |\vec{v}|^n$, по которым разлагаются все динамические величины, а затем все величины, от них зависящие. Вычисления проводятся в калибровке Вайценбека с нулевой ИСС, а из динамических переменных раскладываются только тетрада и скалярное поле до четвертого порядка по скорости. Уравнения поля решаются последовательно в каждом порядке, начиная с нулевого и заканчивая четвертым. Решения из предыдущих порядков подставляются в уравнения для следующих порядков. Для изучаемой модели оказывается, что отличные от нуля компоненты разложения полей, которые нам нужно определить, это

$$\overset{2}{\tau}_{00}\,, \quad \overset{2}{\tau}_{ij}\,, \quad \overset{3}{\tau}_{0i}\,, \quad \overset{3}{\tau}_{i0}\,, \quad \overset{4}{\tau}_{00}\,, \quad \overset{2}{\psi}\,, \quad \overset{4}{\psi}\,,$$

где число над символом обозначает порядок разложения величины, ψ — соответствует возмущению скалярного поля ϕ над фоном Φ, а разложение по порядкам скорости $|\vec{v}|$ записывается в виде $\phi = \Phi + \psi = \Phi + \overset{1}{\psi} + \overset{2}{\psi} + \overset{3}{\psi} + \overset{4}{\psi} + \mathcal{O}(5)$, $\tau_{\alpha\beta}$ — аналогичное возмущение, соответствующее разложению компонент тетрады с опущенными координатными индексами, $i, j = 1, 2, 3$.

Далее решаются полевые уравнения в нулевом порядке по скорости, из которых следует ограничение на $V = \mathcal{V}(\Phi)$ и ее производную: $V = V' = 0$, где $V = \mathcal{V}(\Phi)$ взято при фоновом значении скалярного поля Φ.

В третьем параграфе рассматривается случай массивного скалярного поля, для которого определяется только ППН параметр γ. Предполагается, что источником материи является статическая точечная масса. Сначала определяется скалярное поле во втором порядке. Его значение подставляется в уравнение для временной компоненты тетрады второго порядка. Затем решения двух последних уравнений подставляются в уравнение для пространственных компонент тетрады второго порядка. По найденной тетраде с компонентами до второго порядка находится метрика с компонентами до второго порядка. Эта метрика сравнивается с общим видом ППН метрики в предположении точечного источника массы, содержащей ППН-параметр γ, откуда находится для $\gamma(r)$ выражение:

$$\gamma(r) = \frac{2\omega + 3 - e^{-m_\phi r}}{2\omega + 3 + e^{-m_\phi r}},$$

где $\omega = AB/C^2$, а масса скалярного поля m_ϕ определяется из соотношения $m_\phi^2 = \frac{2\kappa^2 AV''}{2AB+3C^2}$.

В четвертом параграфе рассматривается случай безмассового скалярного поля и находятся все ППН параметры. Потенциал безмассового скалярного поля удовлетворяет дополнительным условиям $V'' = V''' = 0$. Оказалось, что в этом случае можно выразить все возмущения всех динамических величин через стандартные ППН-потенциалы. Уравнения поля решаются в следующем порядке: скалярное поле во втором порядке, временная компонента тетрады во втором порядке, пространственные компоненты тетрады во втором порядке, затем компоненты тетрады в третьем порядке по скорости и, наконец, решается уравенение для временной компоненты тетрады четвертого порядка, в котором используется уравнение для скалярного поля четвертого порядка, чтобы исключить скалярное поле четвертого порядка из уравнения. Каждое следующее уравнение рашается после подставления решений предыдущих уравнений. Решение каждого уравнения выражается через стандартные ППН-потенциалы. По найденному разложению компонент тетрады строится разложение компонент метрики, выраженное через стандартные ППН-потенциалы. Коэффициенты при ППН-потенциалах в найденном разложении состоят из коэффициентов A, B, C, A', B', C' (функции $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и их производные, взятые при фоновом значении Φ скалярного поля). Найденное разложение метрики сравнивается со стандартной ППН метрикой, выраженной также через через стандартные ППН-потенциалы с коэффициентами состоящими из ППН-параметров. После приравнивания коэффициентов при ППН-потенциалах, получаются выражения ППН-параметров через A, B, C, A', B', C'. Таким образом, было получено, что только ППН параметры β и γ потенциально отклоняются от их значений в общей теории относительности, а все остальные параметры равны их значениям в ОТО, что подразумевает отсутствие предпочтительной системы отсчета или эффектов предпочтительного местоположения, а также сохранение энергии и импульса. Также было обнаружено, что отклоняющиеся значения для β и γ получаются только при неминимальной кинетической связи с вектором кручения. Далее ППН параметры были выражены через величины, инвариантные относительно конформных преобразований.

В пятом параграфе на основе результатов, представленных выше, рассмотрены в рамках ППН-формализма следующие теории: (i) телепараллельный эквивалент скалярно-тензорной гравитации, где $\mathcal{C} = -\mathcal{A}'$; (ii) телепараллельная темная энергия и ее обобщения с $\alpha \equiv 0$ и $\mathcal{C} \equiv 0$ [(а) классическая телепараллельная модель темной энергии с $\mathcal{A} = 1 + 2\kappa^2\xi\phi^2$ и $\mathcal{B} = -\kappa^2$, (б) взаимодействующая темная энергия с $\mathcal{A} = 1 + 2\kappa^2\xi F(\phi)$ и $\mathcal{B} = -\kappa^2$, (в) действие типа Бранса-Дикке со связью с кручением общего вида с $\mathcal{A} = F(\phi)$ и $\mathcal{B} = 2\kappa^2\omega$, (г) действие типа Бранса-Дикке с динамическим кинетическим членом с $\mathcal{A} = \phi$ и $\mathcal{B} = 2\kappa^2\omega(\phi)/\phi$]; (iii) неминимальная связь скалярного поля с телепараллельным поверхностным членом, где после интегрирования по частям получены функции $\mathcal{A} = 1 + 2\kappa^2\xi\phi^2\,,\ \mathcal{B} = -\kappa^2\,,\ \mathcal{C} = 4\kappa^2\chi\phi\,,$ где $\xi,\ \chi$ — константы. Все модели телепараллельной темной энергии имеют нулевую кинетическую связь, $\mathcal{C} = 0$, поэтому рассчитанные нами ППН параметры в массивном случае γ и в безмассовом случае γ и β принимают значения $\gamma = \beta = 1$. Отсюда сделано заключение, что постньютоновский предел этих теорий согласуется с общей теорией относительности, так что эти теории нельзя отличить от ОТО по измерениям ППН параметров. Для модели с неминимальная связью скалярного поля с телепараллельным поверхностным членом в предположении безмассового скалярного поля были найдены ППН-параметры, выраженние через константы теории и фоновое скалярное поле.

В шестом параграфе обсуждаются итоги Главы.

В **Заключении** делаются основные выводы по результатам исследований кандидатской диссертации и приводятся перспективы для дальнейших исследований.

В **Приложении А** в **Дополнениях** выписаны компоненты наиболее громоздких ИСС в калибровках Шварцшильда, Леметра и e-калибровке (из Главы 4) и показана тривиальность одного из возможных сферически симметричных решений в $f(T)$-гравитации (из Главы 6).

Заключение

В телепараллельном эквиваленте общей теории относительности с применением теоремы Нётер были построены сохраняющиеся величины: токи, суперпотенциалы и заряды. Они являются одновременно координатно ковариантными и инвариантными относительно лоренцевых вращений тетрад. Эти величины впервые построены в тензорной форме, что является приемуществом, поскольку именно такая форма обычно используется вычислениях в релятивистской астрофизике и космологии. Результат достигнут благодаря использованию ИСС и произвольного вектора смещений, относительно которого подразумевается диффеоморфная инвариантносить. Исходя из анализа структуры сохраняющихся величин, для определения ИСС, введен обобщенный принцип «выключения» гравитации. Для определения вектора смещений рассмотрено две возможности: векторы Киллинга пространства-времени при определении глобальных зарядов и собственные векторы различного типа наблюдателей при определении локальных характеристик гравитационного поля.

Для тестирования новых выражений для сохраняющихся величин проведены их расчеты в известных решениях в ОТО. Рассчитаны нулевые плотности энергии и импульса, измеряемые свободно падающими наблюдателями, «вмороженными» в хаббловский поток, во вселенной

Фридмана и пространстве (A)dS, что соответствует принципу эквивалентности. При исследовании решения Шварцшильда оказалось, что универсальный метод «выключения» гравитации приводит к неоднозначностям: «выключение» гравитации в различных тетрадах привело к образованию разных пар тетрад и ИСС, дающих различные значения для сохраняющихся величин. Для их конструктивного исследования было обобщено понятие «калибровки». В ходе вычислений мы получили три различные калибровки: статическая калибровка, дающая правильную массу для черной дыры, но не соответствующая принципу эквивалентности; калибровка Леметра, дающая массу в 2 раза больше ожидаемой, но соответствующая принципу эквивалентности; обобщенная e-калибровка, дающая и ожидаемую массу черной дыры, и соответствующая принципу эквивалентности. Неоднозначность метода «выключения» гравитации, используемого для определения спиновой связности, была объяснена нечувствительностью «выключения» гравитации к любому локальному преобразованию Лоренца, пропорциональному параметру, контролирующему силу гравитации, поскольку этот параметр тоже «выключается» вместе с гравитацией.

Для определения массы и момента движущейся черной дыры были использованы: инвариантность зарядов Нётер относительно лоренцевых вращений и координатных преобразований, а также аналогия с движущейся материей. Первое позволило значительно упростить рассчеты, а второе - решить проблему недостающего вектора Киллинга. В результате, заряды Нётер дали физически ожидаемые значения массы и момента движущейся черной дыры. Также было показано, что «выключение гравитации» в двух разных тетрадах, построенных как диагональные тетрады в сферических и декартовых изотропных координатах, приводило к одной и той же шварцшильдовой статической калибровке, а новая «движущаяся» калибровка, построенная аналогичным образом для бесконечно далекого наблюдателя, движущегося относительно черной дыры, совпадает с ней же.

В $f(T)$-гравитации локальные лоренцевы степени свободы играют более важную роль, поскольку они включены в уравнения поля. В исходной нековариантной формулировке $f(T)$-гравитации уравнения поля непротиворечивы только для особого класса тетрад, который обычно называют *хорошими* тетрадами [15]. Для геометрий Шварцшильда и Фридмана мы получили, что хорошие тетрады совпадают с собственнымии тетрадами из TEGR. В ковариантной формулировке $f(T)$-гравитации мы рассматриваем ненулевую ИСС, которая позволяет нам использовать произвольную относительно лоренцевых вращений тетраду в уравнениях поля и, следовательно, мы можем «восстановить» локальную лоренцеву симметрию. Однако она восстанавливается только после того, как мы определяем правильную спиновую связность, соответствующую тетраде. Поэтому, как и в случае с TEGR, необходимо определить лоренцевы степени свободы в обеих постановках.

Отмечена аналогия неоднозначности определения собственной тетрады в TEGR путем «выключения» гравитации с проявлением *остаточных симметрий* в $f(T)$-гравитации. Но несмотря на это и тот факт, что в некоторых выделенных случаях хорошие тетрады в $f(T)$-гравитации и собственные тетрады в TEGR совпадали, было показано, что в общем случае хорошие и собственные тетрады отличаются. Также показано, что «выключение» гравитации для определения ИСС в расширенных телепараллельных теориях не применимо.

Получен постньютоновский предел и ППН параметры для общего класса теорий гравитации кручения со скалярным полем с неминимальной кинетической связью между скалярным полем и векторной частью кручения. Для массивного скалярного поля мы рассчитали ППН параметр γ в предположении статического точечного источника. Для безмассового скалярного поля и для произвольного ограниченного распределения массы рассчитан полный набор ППН параметров. Показано, что только ППН параметры β и γ потенциально отклоняются от их значений в общей теории относительности, а остальные параметры полностью соответствуют ОТО, из чего следует, что класс теорий гравитации кручения со скалярным полем является полностью консервативным (отсутствие предпочтительной системы отсчета или эффектов предпочтительного местоположения, а также сохранение энергии и импульса). Параметры β и γ отклоняются от ОТО только при неминимальной кинетической связи с вектором кручением. Для конкретных моделей в рамках рассмотренного класса теорий кручения со скалярным полем, которые ранее рассматривались в литературе в основном как космологические модели, была показана согласованность с предыдущими результатами.

В настоящее время исследования телепараллельных теорий методами ППН-формализма активно ведутся. Так недавно был получен постньютоновский предел для более общего класса теорий кручения, неминимально связанного со скалярным полем [16, 17], а затем аналогичное исследование было проведено для теорий неметричности, неминимально связанной со скалярным полем [18, 19, 20].

Безусловно, телепараллельные теории перспективны. Они уже стали хорошим инструментом для анализа явлений в астрофизике, описания сверхточных наблюдений в рамках солнечной системы, а также описания эффектов на космологических масштабах. Изучение свойств TEGR не менее важно с точки зрения теоретической физики. Как пример, на масштабах солнечной системы было показано наличие постньютоновского предела [21] *и др.* Также активно изучаются космологические решения [22, 23, 3] *и др.* Рассматриваются и решения гравитационных волн в модифицированных телепараллельных теориях, например, [24, 25] и др. Очевидно, что будет получено больше изображений теней черных дыр, что станет очень хорошим тестом для модифицированных телепараллельных теорий. С другой стороны, сами объекты получают большее число инструментов для исследования их свойств, что чрезвычайно важно.

Развитые в диссертации методы универсальны. В связи с этим, методы, примененные к TEGR и $f(T)$-теориям планируется использовать в дальнейших исследованиях свойств STEGR-а и модифицированных телепараллельных теорий с неметричностью, таких как $f(Q)$-гравитация и др.

Цитированная литература

1. J. B. Jiménez, L. Heisenberg, T. S. Koivisto, *The Geometrical Trinity of Gravity* //Universe , Vol. 5, no. 7 p. 173, (2019).

2. R. Aldrovandi, J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*, vol. 173. Springer, Dordrecht, (2013).

3. Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, E. N. Saridakis, *f(T) teleparallel gravity and cosmology* //Rept. Prog. Phys. , Vol. 79, no. 10 p. 106901, (2016).

4. S. Bahamonde, C. G. Böhmer, M. Krššák, *New classes of modified teleparallel gravity models* //Phys. Lett. B , Vol. 775, pp. 37–43, (2017).

5. M. Hohmann, L. Järv, M. Krššák, C. Pfeifer, *Teleparallel theories of gravity as analogue of nonlinear electrodynamics* //Phys. Rev. D , Vol. 97, no. 10 p. 104042, (2018).

6. A. N. Petrov, S. M. Kopeikin, R. R. Lompay, B. Tekin, *Metric Theories of Gravity: Perturbations and Conservation Laws*, vol. 38 of *De Gruyter Studies in Mathematical Physics*. De Gruyter, (4, 2017).

7. Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar, *Invariant conserved currents in gravity theories with local Lorentz and diffeomorphism symmetry* //Phys. Rev. D , Vol. 74, p. 064002, (2006).

8. Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar, J. G. Pereira, *Conserved currents in gravitational models with quasi-invariant Lagrangians: Application to teleparallel gravity* //Phys. Rev. D , Vol. 74, p. 104007, (2006).

9. C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, (2018).

10. M. C, *Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity* //Ann. Phys. , Vol. 12, p. 118, (1961).

11. J. Katz, J. Bicak, D. Lynden-Bell, *Relativistic conservation laws and integral constraints for large cosmological perturbations* //Phys. Rev. D , Vol. 55, pp. 5957–5969, (1997).

12. M. Hohmann, L. Järv, M. Krššák, C. Pfeifer, *Modified teleparallel theories of gravity in symmetric spacetimes* //Phys. Rev. D , Vol. 100, no. 8 p. 084002, (2019).

13. T. G. Lucas, Y. N. Obukhov, J. G. Pereira, *Regularizing role of teleparallelism* //Phys. Rev. , Vol. D80, p. 064043, (2009).

14. J. W. Maluf, M. V. O. Veiga, J. F. da Rocha-Neto, *Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence* //Gen. Rel. Grav. , Vol. 39, pp. 227–240, (2007).

15. N. Tamanini, C. G. Boehmer, *Good and bad tetrads in f(T) gravity* //Phys. Rev. , Vol. D86, p. 044009, (2012).

16. K. Flathmann, M. Hohmann, *Post-Newtonian Limit of Generalized Scalar-Torsion Theories of Gravity* //Phys. Rev. , Vol. D101, p. 024005, (2020).

17. S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, M. Hohmann, J. Levi Said, *Post-Newtonian limit of Teleparallel Horndeski gravity* //Class. Quant. Grav. , Vol. 38, no. 2 p. 025006, (2020).

18. K. Flathmann, M. Hohmann, *Post-Newtonian limit of generalized symmetric teleparallel gravity* //Phys. Rev. D , Vol. 103, no. 4 p. 044030, (2021).

19. M. Hohmann, *Gauge-Invariant Post-Newtonian Perturbations in Symmetric Teleparallel Gravity* //Astron. Rep. , Vol. 65, no. 10 pp. 952–956, (2021).

20. K. Flathmann, M. Hohmann, *Parametrized post-Newtonian limit of generalized scalar-nonmetricity theories of gravity* //Phys. Rev. D , Vol. 105, no. 4 p. 044002, (2022).

21. U. Ualikhanova, M. Hohmann, *Parameterized post-Newtonian limit of general teleparallel gravity theories* //Phys. Rev. , Vol. D100, p. 104011, (2019).

22. L. Jarv, A. Toporensky, *General relativity as an attractor for scalar-torsion cosmology* //Phys. Rev. , Vol. D93, no. 2 p. 024051, (2016).

23. S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. L. Said, J. Mifsud, E. Di Valentino, *Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology* //arXiv:2106.13793 , (6, 2021).

24. M. Hohmann, M. Krššák, C. Pfeifer, U. Ualikhanova, *Propagation of gravitational waves in teleparallel gravity theories* //Phys. Rev. , Vol. D98, no. 12 p. 124004, (2018).

25. G. Farrugia, J. L. Said, V. Gakis, E. N. Saridakis, *Gravitational Waves in Modified Teleparallel Theories* //Phys. Rev. , Vol. D97, no. 12 p. 124064, (2018).