Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Козик Игорь Александрович

Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Диссертация подготовлена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Питербарг Владимир Ильич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Чечкин Александр Витальевич**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор Департамента анализа данных, принятия решения и финансовых технологий Федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,

Рохлин Дмитрий Борисович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор, и.о. зав. каф. высшей математики и исследования операций Института математики, механики и компьютерных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южный федеральный университет»,

Зверкина Галина Александровна
кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Лаборатории 27 Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.

Защита диссертации состоится ”21” июня 2024 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/2968.

Автореферат разослан ”____” мая 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук В.Б. Шерстюков

Общая характеристика работы

Математические модели реальных процессов строятся, как правило, в непрерывном времени. Это позволяет применять весь необходимый математический аппарат в полном объеме, например, теорию случайных процессов, а также теорию дифференциальных уравнений и теорию динамических систем. Однако, при использовании таких моделей на практике возникает задача их численной реализации, в связи с чем появляется необходимость перехода к дискретному времени и другим видам аппроксимаций. При этом также возникает вопрос об устойчивости результатов, полученных при переходе от непрерывного времени к дискретному, и о выборе оптимального шага дискретизации.

Кроме того, в настоящее время задача перехода к дискретному времени в математических моделях реальных процессов относится к наиболее актуальным, поскольку для непрерывных процессов не только невозможно численное моделирование, но и измерения различных параметров процессов возможны в определенные моменты времени или в определенных точках пространства. Например, в финансовой математике дискретизация накладывается на временную шкалу.

Начало исследований вероятностей высоких выбросов траектории гауссовского стационарного процесса в непрерывном времени положил Дж. Пикандс в своей работе[1] 1969 года. После этого В. И. Питербарг и В. П. Присяжнюк существенно развили методы, представленные Дж. Пикандсом, исправив определенные недостатки доказательства, но используя основные концепции, после чего расширили результат на случай нестационарных процессов[2].

В свою очередь, для стохастизации при моделировании биомеханических систем используется гауссовский белый шум как процесс с наиболее изученными характеристиками поведения *и реалистичными аппроксимациями*. Одним из частных случаев такого применения является стохастизация математической модели Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова[3].

[1] Pickands J., III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. 145. P. 51–73.

[2] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского нестационарного процесса // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Т. 18. – С. 121–133.

[3] Александров В. В., Александрова О. В., Тихонова К. В. [и др.]. Алгоритм коррекции выходного сигнала вестибулярного механорецептора для имитации пассивных поворотов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2015. – № 5. – С. 130–134.

Актуальность темы. В последние десятилетия происходит активное развитие теории гауссовских случайных процессов и полей. Это развитие можно обосновать тем, что случайные гауссовские функции составляют широкий класс случайных процессов и полей. Дополнительным привлекательным фактором является то, что для гауссовских процессов имеется возможность получения общих предельных теорем в терминах естественных характеристик – математического ожидания и ковариационной функции. Также необходимо отметить значительные результаты, полученные при изучении асимптотик вероятностей больших выбросов гауссовских процессов и полей.

Одним из важных путей развития изучения асимптотики вероятностей больших выбросов гауссовских процессов и полей является переход от непрерывного времени к дискретному. Актуальность данной проблемы кроется в необходимости численного моделирования случайных процессов при изучении высоких экстремумов. Такие задачи возникают в тех случаях, когда невозможно непрерывное получение потока данных, то есть для численной реализации необходима модель с дискретным временем. Как показали исследования последних двадцати лет, построение такой модели и ее результативность напрямую зависит от частоты выборки данных по времени, то есть от шага дискретизации. Например, практические вычисления константы Пикандса в теории экстремальных значений встречаются с высокой неустойчивостью при моделировании траекторий стационарного гауссовского процесса или, в частности, дробного броуновского движения. Связанные с этим задачи активно обсуждаются в финансовой литературе, когда наличие данных с высокой временной частотой позволяет исследователю применить математические результаты, полученные ранее для дискретного времени, что невозможно было бы сделать для данных, обновляемых с ежедневной или более редкой частотой.

Вероятности больших выбросов траекторий различных случайных гауссовских функций в дискретном времени, рассматриваемые в данной работе, могут быть использованы в различных моделях реального мира. Одно из приложений результатов для нестационарного процесса описано в четвертой главе данной работы для задачи актуарной математики, а именно для задачи о разорении в случае дробного броуновского движения. В данной задаче дискретизация накладывается на временную шкалу.

Изучение влияния стохастического воздействия на поведение динамической системы является одним из важнейших, поскольку по нему можно сделать выводы о стабильности этой системы. Стохастизация математической модели Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова помогает решить последовательно две задачи, первая из которых является

теоретическим приложением и подводит нас к решению крайне актуальной прикладной задачи:
1. получение математической интерпретации основного закона в нейрофизиологии «Всё или ничего»;
2. исследование влияния гауссовского белого шума на возможность реализации управляемого перехода в математической модели афферентного первичного нейрона (АПН).
Следствием решения второй задачи является возможность оценки целесообразности проведения космического эксперимента по применению гальванической стимуляции вестибулярного аппарата космонавта при выполнении работ по визуальному управлению сближением космического модуля с Российской Орбитальной Служебной Станцией (РОСС).

Цель работы заключается в исследовании вероятностей больших выбросов траекторий различных стационарных и нестационарных случайных гауссовских функций (гауссовские процессы и поля) в дискретном времени в зависимости от поведения корреляционной функции и степени сгущения решетки (шага дискретизации).

Также целью работы является дополнение стохастизацией белым гауссовским шумом модифицированной модели формирования процесса нейронного управления АПН со стимуляцией, разработанной ранее в работе К.В. Тихоновой под руководством В.А. Садовничего, В.В. Александрова[4].

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Соотвествие паспорту научной специальности. В диссертации изучается дискретное и непрерывное время при моделировании траекторий гауссовских процессов, в силу чего дисертация соотвествует паспорту специальности 1.1.4. "Теория вероятностей и математическая статистика" по направлению "7. Стохастические процессы (точечные, гауссовские, мартингалы и другие)".

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Получена точная асимптотика вероятностей высоких максимумов траекторий стационарных гауссовских процессов в дискретном времени на полуинтервале.

[4]Тихонова К. В. Математические задачи коррекции активности вестибулярных механорецепторов. – Кандидатская диссертация. – Москва, 2019. – 134 с.

2. Получена точная асимптотика вероятностей высоких максимумов траекторий нестационарных гауссовских процессов в дискретном времени на полуинтервале.

3. Получена точная асимптотика вероятностей высоких максимумов траекторий двумерных однородных гауссовских полей в дискретном времени на замкнутом множестве после преобразования сжатия.

4. Получена точная асимптотика вероятностей высоких максимумов траекторий двумерных однородных гауссовских полей в дискретном времени на замкнутом множестве.

5. Получена математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии "Все или ничего".

6. В математической модели афферентного первичного нейрона получена оценка влияния гауссовского белого шума на возможность реализации управляемого перехода.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит как теоретический, так и практический характер. Методы и результаты первых трех глав являются теоретическим, но имеют и приложения в актуарной математике, описанные в четвертой главе. Результаты пятой главы имеют практическую ценность для понимания целесообразности проведения космического эксперимента по применению гальванической стимуляции вестибулярного аппарата космонавта при выполнении работ по визуальному управлению.

Методология и методы исследования. Асимптотические методы исследования вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов в непрерывном времени достаточно хорошо развиты. Начало этих исследований положил Дж. Пикандс в своей работе[5], введя метод двойных сумм в 1969 году для стационарных процессов. В настоящее время результаты этих исследований обобщены для нестационарных гауссовских процессов В.И. Питербаргом[6] [7].

Методы исследований асимптотики вероятностей высоких выбросов гауссовских полей в целом очень схожи с методами исследований гауссовских

[5]Pickands J., III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. 145. P. 51–73.

[6]Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Random Processes and Fields. – Providence. Amer. Math. Soc. Ser. Translations of Mathematical Monographies, 2012. – Vol. 148. – 206 с.

[7]Питербарг В. И. Двадцать лекций по гауссовским процессам. – МЦНМО, 2015. – 188 с.

процессов. Существенное отличие возникает при наложении условий зависимости функции ковариации от векторного аргумента, поскольку для полей одной размерности эти функции могут отличаться своей структурой, определения структуры даны в работах В.И Питербарга[6 7]. Понятие структуры удобно при исследовании высоких выбросов траекторий гауссовских полей с размерностью аргумента большей двух. В двумерном случае это понятие становится тривиальным: имеются всего две структуры, которые удобно рассматривать в терминах двух ковариационных функций, отличающихся строением.

Что касается соотношений асимптотик вероятностей в дискретном и непрерывном времени, имеются работы, где рассмотрены стационарные гауссовские процессы[8], нестационарные гауссовские процессы[9] и однородные двухпараметрические гауссовские поля[10]. Результаты, опубликованные в статьях[9 10], также перечислены в этой работе. По методике и методологии рассуждений и доказательств оценки в дискретном времени также немногим отличаются от аналогичных оценок в непрерывном времени, однако для случая дискретного времени характерно существенное возрастание технической сложности за счет разных возможных типов решеток, а также их сочетаний в многомерном случае. Таким образом, для процессов необходимо рассматривать три типа решеток, а для двухпараметрических полей — шесть, что, в свою очередь, влечет рассмотрение соответственно трех и шести разных случаев.

Математическая модель Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова[11] описывает формирование нейронного управления и является бистабильной динамической системой, обладающей двумя аттраторами: точечным и периодическим. Точечный аттрактор — асимптотически устойчивый фокус. Он расположен близко от предельного цикла, устойчивого по Пуанкаре и являющегося периодическим аттрактором. Область притяжения точечного аттрактора была получена при интегрировании математической модели в обратном времени и нахождении предельного цикла, являющегося в прямом времени границей области притяжения точечного аттрактора.

[8]Piterbarg V. I. Discrete and continuous time extremes of Gaussian processes // Extremes. – 2004. № 2. – P. 161–177.

[9]Козик И. А., Питербарг В. И. Большие выбросы гауссовских нестационарных процессов в дискретном времени // Фундаментальная и прикладная математика. Москва: Интуит. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 159–169.

[10]Козик И. А. Экстремумы однородных двухпараметрических гауссовских полей при дискретизации параметров // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2022. – № 5. – С. 9–17.

[11]Садовничий В. А., Александров В. В., Александрова Т. Б., Вега Р., Сото Э. Информационный процесс в латеральных полукружных каналах // Доклады Академии наук. Биологические науки. – 2011. – Т. 436. – № 1. – С. 129–132.

В связи с очень близким расположением этой области притяжения к периодическому аттрактору возникает возможность построения множества достижимости при наличии управляемого перехода (гальванической стимуляции малой амплитуды) из области притяжения точечного аттрактора в область притяжения периодического аттрактора.

Стохастизация математической модели происходит за счет добавления гауссовского белого шума. Для численного моделирования траекторий шума в качестве аппроксимации используются ряды Каца–Шинозуки[12]. Для комплексного исследования влияния стохастизации на модель Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова рассматривались шумы с разной амплитудой.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

1. «Большие выбросы гауссовских нестационарных процессов в дискретном времени и их приложения», Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2018», Москва, Россия, 11 апреля 2018 года.

2. «Большие выбросы двумерных однородных гауссовских полей в дискретном времени», Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2021», Москва, Россия, 14 апреля 2021 года.

3. «Большие выбросы однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени», 7-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, Санкт-Петербург, Россия, 7 декабря 2023 года.

А также на аспирантских семинарах:

1. «Большие выбросы двумерных однородных гауссовских полей в дискретном времени», Аспирантский коллоквиум кафедры Теории вероятностей, Москва, Россия, 10 марта 2021 года.

2. «Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов», Совместный семинар Кафедры теории вероятностей и Фонда содействия развитию науки «Институт «Вега», Москва, Россия, 27 марта 2024 года.

[12] Симиу Э. Хаотические переходы в детерминированных и стохастических системах. Применение метода Мельникова в технике, физике и нейрофизиологии. – Физматлит, 2007. – 208 с.

Публикации соискателя по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях автора. Все 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы SCOPUS, Web of Science, RSCI.

Личный вклад

Теоретические и практические результаты, изложенные в пунктах 1, 2, 5 и 6 раздела "Итоги проведенного исследования", получены соискателем совместно с научным руководителем доктором физико-математических наук профессором Питербаргом Владимиром Ильичем.

Теоретические результаты, изложенные в пунктах 3 и 4 раздела "Итоги проведенного исследования", получены соискателем самостоятельно.

В теоретических и практических результатах, изложенных в пунктах 7 и 8 раздела "Итоги проведенного исследования", постановка задачи и интерпретация результатов была проведена В.В. Александровым и Ю.С. Семеновым, а подбор стохастизации и аппроксимации гауссовского белого шума рядами Каца–Шинозуки был произведен соискателем.

Объем и структура работы. Научно-квалификационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 97 страниц текста. Список литературы содержит 29 наименований.

Содержание работы

Во введении к диссертации обсуждается практическая и теоретическая важность и актуальность задачи исследования и применения связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов, отмечается научная новизна работы, формулируются основные цели и задачи.

Первая глава содержит постановку и все необходимые промежуточные и итоговые результаты для случая стационарных процессов в дискретном времени в зависимости от выбора типа решетки. В разделе 1.1 приведены определения стационарного процесса и одномерных решеток, на которых будет рассматриваться наша вероятность. Далее следует формулировка и доказательство локальной леммы для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией стационарного процесса на трех видах решеток. Также приведены вспомогательные результаты, требующиеся далее для доказательства теоремы. В разделе 1.2 приведена формулировка теоремы, аналогичной теореме Пикандса, для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией стационарного процесса на всех трех типах решеток и полное ее доказательство.

Рассмотрим гауссовский стационарный процесс $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с нулевым средним и единичной дисперсией, корреляционная функция которого $r(t)$ удовлетворяет условиям

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha),\ t\to 0,\ \alpha > 0, \quad r(t)<1\ \forall\ t>0. \tag{1}$$

Мы рассмотрим три типа решеток на $\mathbb{R}$ при $\alpha \in (0, 2]$:

1. $\mathcal{R}_d(\gamma) = \{ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma < \alpha$, — плотная решетка (dense grid);
2. $\mathcal{R}_p(b,\gamma) = \{kbu^{-2/\gamma}, k\in\mathbb{Z}\}$, $b>0$, $\gamma = \alpha$, — решетка Пикандса (Pickands' grid);
3. $\mathcal{R}_s(\gamma) = \{ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma > \alpha$, — разреженная решетка (sparse grid).

Обозначим $\chi(t) = \sqrt{2}B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha$, где $B_{\alpha/2}(t)$ — дробное броуновское движение с показателем Хёрста $\alpha/2$, $\Psi(u) = \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}u$ — асимптотика хвоста стандартного нормального распределения.

Лемма 1. *В вышеприведенных условиях, для любого $T > 0$:*

$$P\left(\max_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha}]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\right) = H\Psi(u)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad u\to\infty.$$

- *В случае плотной решетки:*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma),\ H = H_\alpha(T) = E\exp\left(\max_{t\in[0,T]}\chi(t)\right) < \infty.$$

- *В случае решетки Пикандса:*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma),\ H = H_\alpha(b,T) = E\exp\left(\max_{k:kb\in[0,T]}\chi(kb)\right) < \infty.$$

- *В случае разреженной решетки: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $H = 1$.*

Замечание 1. *В случае решетки Пикандса асимптотическое распределение зависит от константы b.*

Следствие 1. *В условиях предыдущей леммы для всех T, $T' > 0$ и $\tau_0 > T$ получим:*

$$P\left(\max_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha}]\cap\mathcal{R}} X(t) > u, \max_{t\in[\tau_0u^{-2/\alpha},(\tau_0+T')u^{-2/\alpha}]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\right) =$$
$$= H\Psi(u)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad u\to\infty.$$

- *В случае плотной решетки: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$,*

$$H_\alpha(\tau_0,T,T') = \int_{-\infty}^{\infty} e^v P\left(\max_{t\in[0,T]}\chi(t) > v, \max_{t\in[\tau_0,\tau_0+T']}\chi(t) > v\right)dv < \infty.$$

• *В случае решетки Пикандса:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$,

$$H_\alpha(b,\tau_0,T,T') = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^v P\left(\max_{k:kb\in[0,T]} \chi(kb) > v, \max_{l:lb\in[\tau_0,\tau_0+T']} \chi(lb) > v\right) dv < \infty, \quad k,\ l \in \mathbb{N}.$$

• *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $H = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $\varepsilon \in (0,1/2)$ *и*

$$1 - \frac{1}{2}|t|^\alpha \geqslant r(t) \geqslant 1 - 2|t|^\alpha$$

для всех $t \in [0,\varepsilon]$ *(такое* ε *всегда существует). Тогда для каждой решетки найдутся свои константы* $h_d, h_p, h_s > 0$ *такие, что для всех* $T > 0$, $\tau_0 > T$, $u \geqslant u_0 := (2(\tau_0+T)/\varepsilon)^{\alpha/2}$ *имеет место*

$$P(\tau_0,T,\mathcal{R}) := P\left(\max_{t\in[0,u^{-2/\alpha}T]\cap\mathcal{R}} X(t) > u, \max_{t\in[u^{-2/\alpha}\tau_0,u^{-2/\alpha}(\tau_0+T)]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\right) \\ \leqslant h\Psi(u)\exp\left(-\frac{1}{8}(\tau_0-T)^\alpha\right).$$

• *В случае плотной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $h = h_d$.
• *В случае решетки Пикандса:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $h = h_p$.
• *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $h = h_s$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (1). Тогда для любого p такого, что* $r(t) < 1$, $t \in (0,p]$ *имеет место соотношение:*

$$P\left(\max_{t\in[0,p]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\right) = Hp\hat{u}\Psi(u)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad u \to \infty.$$

• *В случае плотной решетки:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $\hat{u} = u^{2/\alpha}$, $H = H_\alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(T)}{T}$ *и* $0 < H_\alpha < \infty$.
• *В случае решетки Пикандса:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $\hat{u} = u^{2/\alpha}$, $H = H_{\alpha,b} = \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(b,T)}{T}$ *и* $0 < H_{\alpha,b} < \infty$.
• *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $\hat{u} = u^{2/\gamma}$, $H = 1$ *(результат заимствован из Леммы 2 работы*[13]*). При этом p может убывать к нулю при* $u \to \infty$ *таким образом, чтобы* $pu^{2/\alpha} \to \infty$. *Число p также может стремиться к бесконечности, лишь бы правая часть асимптотики стремилась к нулю.*

Аналогичные результаты получены в работе[13] В.И. Питербарга: для плотной решетки в Леммах 4 и 5 (для этого случая точная асимптотика

[13] Piterbarg V. I. Discrete and continuous time extremes of Gaussian processes // Extremes. – 2004. № 2. – P. 161–177.

не указана), для решетки Пикандса в Лемме 3 и для разреженной решетки в Лемме 2.

Во **второй главе** содержатся определения нестационарного гауссовского процесса и необходимые ограничения на его дисперсию, функцию корреляции и дисперсию приращений. Далее получен основной результат для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией нестационарного процесса на трех решетках в зависимости от отношения параметров степенного поведения дисперсии и функции корреляции.

Рассмотрим гауссовский нестационарный процесс, дисперсия которого достигает максимума в единственной точке. Итак, пусть теперь $X(t), t \in [0, T]$, с нулевым средним, дисперсией $\sigma^2(t) = EX^2(t)$ и корреляционной функцией $r(s,t) = EX(s)X(t)/\sigma(s)\sigma(t)$. Мы предположим, что дисперсия достигает своего единственного максимума во внутренней точке $t_0 \in (0, T)$. Случай, когда дисперсия достигает своего максимума на краях отрезка $[0, T]$, то есть $t_0 = 0$ или $t_0 = T$, рассматривается также и в тех же условиях.
Введем следующие условия на процесс $X(t)$:

E1 Существуют положительные a, β такие, что

$$\sigma(t) = 1 - a|t - t_0|^\beta(1 + o(1)) \text{ при } \ t \to t_0.$$

E2 (Локальная стационарность). Найдется $\alpha \in (0, 2]$ такая, что

$$r(s,t) = 1 - |t - s|^\alpha(1 + o(1)) \text{ при } \ s \to t_0, \ t \to t_0.$$

E3 (Регулярность). Существуют положительные g, G такие,что для всех s, t выполнено

$$E(X(t) - X(s))^2 \leqslant G|t - s|^g.$$

Для разреженной решетки допустим, что вершина решетки попадает в точку максимума дисперсии, остальные варианты не интересны. Разреженная решетка и решетка Пикандса не зависят от расположения точки максимума.

Теорема 2. *Предположим, что дисперсия гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0, T]$, достигает своего единственного максимального значения в точке t_0, являющейся внутренней точкой отрезка $[0, T]$. Предположим также, что выполнены условия* **E1** – **E3**. *Тогда*

(i) *если $\beta > \alpha$, то*

$$P\left(\max_{t \in [0,T] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) = \frac{2\Gamma(1/\beta)}{a^{1/\beta}\beta} H\hat{u}\Psi(u)(1 + o(1)) \quad \textit{при} \ \ u \to \infty$$

• *В случае плотной решетки:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $\hat{u} = u^{2/\alpha-2/\beta}$, $H = H_\alpha = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} \frac{H_\alpha(\Lambda)}{\Lambda}$ *и* $0 < H_\alpha < \infty$.
• *В случае решетки Пикандса:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $\hat{u} = u^{2/\alpha-2/\beta}$, $H = H_{\alpha,b} = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} \frac{H_\alpha(b,\Lambda)}{\Lambda}$,
$H_\alpha(b,\Lambda) = E\exp\left(\max\limits_{k:kb\in[0,\Lambda]} \chi(kb)\right)$ *и* $0 < H_{\alpha,b} < \infty$.
• *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $\hat{u} = u^{2/\gamma-2/\beta}$, $H = 1$

(ii) *если* $\beta = \alpha$, *то*

$$P\left(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\right) = H_\alpha \Psi(u)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad u\to\infty$$

• *В случае плотной решетки:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $H^a = H^a_\alpha = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda)$,
$H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda) = E\exp\left(\max\limits_{t\in[-\Lambda,\Lambda]} \chi(t) - a|t|^\alpha\right)$ *и* $0 < H^a_\alpha < \infty$.
• *В случае решетки Пикандса:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $H^a = H^a_{\alpha,b} = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda,b)$,
$H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda,b) = E\exp\left(\max\limits_{k:kb\in[-\Lambda,\Lambda]} \chi(kb) - a|kb|^\alpha\right)$ *и* $0 < H^a_{\alpha,b} < \infty$.
• *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $H^a = 1$

(iii) *если* $\beta < \alpha$, *то для всех решеток получим при* $u\to\infty$

$$P\left(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}} X(t) > u\right) = \Psi(u)(1+o(1)),$$

где $\mathcal{R}$ *– нужная решетка из трех.*

В случае, когда дисперсия достигает своего максимума на краях отрезка $[0,T]$, *то есть* $t_0 = 0$ *или* $t_0 = T$, *и выполнены все те же условиях, тогда* ***1)*** *асимптотические соотношения из* ***(i)*** *имеют место при делении правой части на 2;*
2) *асимптотические соотношения из* ***(ii)*** *имеют место с заменой:*
• *для плотной решетки* $H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda)$ *на* $H^a_\alpha(0,\Lambda)$ *и* H^a_α *на* $H^{0,a}_\alpha = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} H^a_\alpha(0,\Lambda)$,
• *для решетки Пикандса* $H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda,b)$ *на* $H^a_\alpha(0,\Lambda,b)$ *и* $H^a_{\alpha,b}$ *на* $H^{0,a}_{\alpha,b} = \lim\limits_{\Lambda\to\infty} H^a_\alpha(0,\Lambda,b)$;
3) *асимптотическое соотношение из* ***(iii)*** *не изменяется.*

Третья глава содержит переход от одномерного случая к двумерному: двумерному гауссовскому однородному полю. По аналогии с первой главой вводится определение поля и ограничения на его ковариационную функцию, а также все результаты, необходимые для доказательства теоремы. В разделе 3.1 приведены определения двумерного гауссовского однородного поля и условия на его функцию корреляции, также приведены определения шести двумерных решеток, на которых будут рассматриваться наши вероятности. Далее следует формулировка и доказательство локальной леммы для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторий двумерного однородного гауссовского поля на шести видах решеток для двух типов ковариационной функции. Также приведены вспомогательные результаты, требующиеся далее для доказательства теоремы. В разделе 3.2 приведена формулировка теоремы, аналогичной теореме Пикандса, для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией двумерного однородного гауссовского поля на всех трех типах решеток и полное ее доказательство.

Пусть $X(s,t)$, $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, – гауссовское однородное (стационарное) поле с нулевым средним, $EX(s,t)=0$ и единичной дисперсией, $EX^2(0,0)=1$, обозначим его ковариационную функцию через $r(s,t)=EX(s_1,t_1)X(s_1+s,t_1+t)$. Предположим, что для некоторых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha\in(0,2]$ в некоторой системе координат выполнено одно из двух соотношений

$$r_1(s,t) = 1-|s|^{\alpha_1}-|t|^{\alpha_2}+o(|s|^{\alpha_1}+|t|^{\alpha_2}), \quad s,t\to 0, \tag{2}$$
$$r_2(s,t) = 1-(s^2+t^2)^{\alpha/2}(1+o(1)), \quad s,t\to 0, \tag{3}$$

и для некоторого $T>0$ выполнены соответственно неравенства $r_1(s,t)<1$ или $r_2(s,t)<1$ для всех $(s,t)\in(0,T]\times(0,T]$.

Другими словами, существует такая невырожденная матрица C, что ковариационная функция $r(C\mathbf{t})$ имеет одно из двух представлений (2) или (3). Далее, когда ход рассуждений относится к каждой из перечисленных ковариационных функций, будем использовать общее обозначение $r(s,t)$, а в формулировках будем конкретизировать, к какой из двух функций или к обоим относится утверждение.
Обозначим

$$\chi_1(s,t) = \sqrt{2}\left(B_{\alpha_1/2}(s)+B_{\alpha_2/2}(t)\right)-|s|^{\alpha_1}-|t|^{\alpha_2},$$
$$\chi_2(s,t) = \sqrt{2}B_{\alpha/2}\left((s^2+t^2)^{1/2}\right)-(s^2+t^2)^{\alpha/2},$$

где $B_H(s)$ – процесс дробного броуновского движения с показателем Хёрста H. Предположим, что процессы $B_{\alpha_1/2}(t)$ и $B_{\alpha_2/2}(t)$ независимы.
Для произвольного множества $\mathcal{T}\subset[0,T]\times[0,T]$, являющегося замыканием открытого, любых положительных b, c и целых k, l введем константы Пикандса:

• для первой ковариационной функции:

$$H^1_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{T}) = E\exp\left(\max_{(s,t)\in\mathcal{T}} \chi_1(s,t)\right) < \infty;$$
$$H^1_{\alpha_1,\alpha_2}((b,c),\mathcal{T}) = E\exp\left(\max_{k,l:\,(kb,lc)\in\mathcal{T}} \chi_1(kb,lc)\right) < \infty;$$
$$H^1_{\alpha_1,\alpha_2}((0,c),\mathcal{T}) = E\exp\left(\max_{s,l:\,(s,lc)\in\mathcal{T}} \chi_1(s,lc)\right) < \infty;$$

• для второй ковариационной функции:

$$H^2_{\alpha}(\mathcal{T}) = E\exp\left(\max_{(s,t)\in\mathcal{T}} \chi_2(s,t)\right) < \infty;$$
$$H^2_{\alpha}((b,c),\mathcal{T}) = E\exp\left(\max_{k,l:\,(kb,lc)\in\mathcal{T}} \chi_2(kb,lc)\right) < \infty;$$
$$H^2_{\alpha}((0,c),\mathcal{T}) = E\exp\left(\max_{s,l:\,(s,lc)\in\mathcal{T}} \chi_2(s,lc)\right) < \infty.$$

Как и с ковариационными функциями, для удобства изложения для $\chi_1(s,t)$ и $\chi_2(s,t)$ мы будем использовать одно общее обозначение $\chi(s,t)$, уточняя при необходимости, какое из двух полей имеется в виду. Для первых двух констант будем использовать обозначение $H_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{T})$, для третьей и четвертой – $H_{\alpha_1,\alpha_2}((b,c),\mathcal{T})$, для пятой и шестой – $H_{\alpha_1,\alpha_2}((0,c),\mathcal{T})$.
Необходимо отметить, что поскольку при $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$ выполняются следующие неравенства: $r_1(s,t)\neq r_2(s,t)$ и $\chi_1(s,t)\neq\chi_2(s,t)$, то и $H^1_{\alpha,\alpha}(\mathcal{T})\neq H^2_{\alpha}(\mathcal{T})$, $H^1_{\alpha,\alpha}((b,c),\mathcal{T})\neq H^2_{\alpha}((b,c),\mathcal{T})$, и также $H^1_{\alpha,\alpha}((0,c),\mathcal{T})\neq H^2_{\alpha}((0,c),\mathcal{T})$.
Введем в $\mathbb{R}^2$ преобразование гомотетии $g_{\alpha_1,\alpha_2}\colon (s,t)\to(u^{-2/\alpha_1}s, u^{-2/\alpha_2}t)$.
Рассмотрим шесть типов двухмерных решеток на $\mathbb{R}^2$ при $\alpha_i\in(0,2]$, $i=1,2$:

1. $\mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1,\gamma_2)=\{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}),\ k,l\in\mathbb{Z}\}$, $\gamma_1<\alpha_1$, $\gamma_2<\alpha_2$
   – плотные решетки по обеим координатам;

2. $\mathcal{R}_{p,p}((b,\gamma_1),(c,\gamma_2))=\{(kbu^{-2/\gamma_1}, lcu^{-2/\gamma_2}),\ k,l\in\mathbb{Z}\}$, $b,c>0$, $\gamma_1=\alpha_1$, $\gamma_2=\alpha_2$
   – решетки Пикандса по обеим координатам;

3. $\mathcal{R}_{s,s}(\gamma_1,\gamma_2)=\{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}),\ k,l\in\mathbb{Z}\}$, $\gamma_1>\alpha_1$, $\gamma_2>\alpha_2$
   – разреженные решетки по обеим координатам;

4. $\mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1,(c,\gamma_2))=\{(ku^{-2/\gamma_1}, lcu^{-2/\gamma_2}),\ k,l\in\mathbb{Z}\}$, $\gamma_1<\alpha_1$, $c>0$, $\gamma_2=\alpha_2$
   – плотная решетка и решетка Пикандса;

5. $\mathcal{R}_{d,s}(\gamma_1,\gamma_2)=\{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}),\ k,l\in\mathbb{Z}\}$, $\gamma_1<\alpha_1$, $\gamma_2>\alpha_2$
   – плотная решетка и разреженная решетка;

6. $\mathcal{R}_{s,p}(\gamma_1,(c,\gamma_2))=\{(ku^{-2/\gamma_1},lu^{-2/\gamma_2}),\ k,l\in\mathbb{Z}\}$, $\gamma_1>\alpha_1$, $\gamma_2>\alpha_2$
   – разреженная решетка и решетка Пикандса.

Заметим, что эти двумерные решетки являются естественным обобщением одномерных, рассмотренных в главах 1 и 2. Заметим также, что, как нетрудно видеть, возможны и другие комбинации плотной, разреженной решеток и решетки Пикандса. Их рассмотрение ничем не отличается от рассмотрения приведенных здесь.

Обозначим $\Psi(u)=\exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}u$ – асимптотика хвоста стандартного нормального распределения.

Лемма 3. *В вышеприведенных условиях, для любого замкнутого множества $\mathcal{T}\subset[0,T]\times[0,T]$, $T>0$, имеет место следующее соотношение:*

$$P\left(\max_{(s,t)\in(g_{\alpha_1,\alpha_2}\mathcal{T})\cap\mathcal{R}} X(s,t)>u\right)=H\Psi(u)(1+o(1))\quad \textit{при}\quad u\to\infty.$$

• *В случае плотных решеток по обеим координатам:*
$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1,\gamma_2)$, $H=H_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{T})$.

• *В случае решеток Пикандса по обеим координатам:*
$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{p,p}((b,\gamma_1),(c,\gamma_2))$, $H=H_{\alpha_1,\alpha_2}((b,c),\mathcal{T})$.

• *В случае разреженных решеток по обеим координатам:*
$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{s,s}(\gamma_1,\gamma_2)$, $H=1$.

• *В случае плотной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой:*
$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1,(c,\gamma_2))$, $H=H_{\alpha_1,\alpha_2}((0,c),\mathcal{T})$.

• *В случае плотной решетки по одной координате и разреженной – по другой и для $\mathcal{T}=[0,T_1]\times[0,T_2]$, $T_1,T_2\le T$:*
$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{d,s}(\gamma_1,\gamma_2)$, $H=H_{\alpha_1}([0,T_1])$.

• *В случае разреженной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой и для $\mathcal{T}=[0,T_1]\times[0,T_2]$, $T_1,T_2\le T$:*
$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{s,p}(\gamma_1,(c,\gamma_2))$, $H=H_{\alpha_2}(c,[0,T_2])$.

Лемма 4. *Для ковариационных функций $r_1(s,t)$ и $r_2(s,t)$ найдется константа G такая, что для любого компактного множества $\mathcal{T}$, содержащего единичный квадрат и для любой двумерной решетки $\mathcal{R}_2$, обозначающей для краткости любую двумерную решетку из 6 определенных ранее выполняется неравенство*

$$H_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{T})\leqslant G\ mes(\mathcal{T}),$$

где $H_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{T})$ обозначает константу, соответствующую этой решетке в лемме 1.

Лемма 5. *Пусть гауссовское поле $X(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (s,t) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяет всем вышеприведенным условиям. Пусть ε, $1/2 > \varepsilon > 0$, такое, что для всех $\boldsymbol{t}\in B(\varepsilon)$ выполнены соотношения*

$$1 - \frac{1}{2}\left(|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}\right) \geqslant r_1(s,t) \geqslant 1 - 2\left(|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}\right)$$

для первой ковариационной функции и для второй:

$$1 - \frac{1}{2}\left((s^2+t^2)^{\alpha/2}\right) \geqslant r_2(s,t) \geqslant 1 - 2\left((s^2+t^2)^{\alpha/2}\right).$$

Тогда существует такая константа F, что для двумерной решетки $\mathcal{R}_2$, обозначающую для краткости любую двумерную решетку из 6 определенных ранее, выполняется неравенство

$$P\left(\max_{g_{\alpha_1,\alpha_2}K(\lambda)\cap\mathcal{R}_2} X(\boldsymbol{t}) \geqslant u, \max_{g_{\alpha_1,\alpha_2}(\boldsymbol{t}_0+K(\lambda))\cap\mathcal{R}_2} X(\boldsymbol{t}) \geqslant u\right)$$
$$\leqslant \lambda_1^2\lambda_2^2 F\Psi(u)\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha(K(\lambda), \boldsymbol{t}_0 + K(\lambda))\right)$$

для всех прямоугольников $K(\lambda) = [0,\lambda_1]\times[0,\lambda_2]$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 1$, любого вектора $\boldsymbol{t}_0 \in \mathbb{R}^2$ такого, что $K(\lambda)\cap\{\boldsymbol{t}_0 + K(\lambda)\} = \varnothing$ и любого $u > u_0$, где

$$u_0 = \inf\{u : g_{\alpha_1,\alpha_2}K(\lambda) \subset B(\varepsilon/4), g_{\alpha_1,\alpha_2}(\boldsymbol{t}_0 + K(\lambda)) \subset B(\varepsilon/4)\}.$$

Лемма 6. *Для любых компактных множеств на прямой K_1 и K_2 и $K = K_1 \times K_2$ выполнены соотношения:*

• *для плотных решеток по обеим координатам*

$$H_{\alpha_1,\alpha_2}(K) = H_{\alpha_1}(K_1)H_{\alpha_2}(K_2);$$

• *для решеток Пикандса по обеим координатам*

$$H_{\alpha_1,\alpha_2}((b,c),K) = H_{\alpha_1}(b,K_1)H_{\alpha_2}(c,K_2);$$

• *для плотной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой*

$$H_{\alpha_1,\alpha_2}((0,c),(K) = H_{\alpha_1}(K_1)H_{\alpha_2}(c,K_2).$$

Определения констант $H_{\alpha_1}(K_1)$ и $H_{\alpha_2}(c,K_2)$ для одномерной плотной решетки и одномерной решетки Пикандса соответственно даны в формулировке леммы 1.

Лемма 7. *Для любой из определенных выше констант Пикандса, обозначим их для краткости $H_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{T})$, имеет место соотношение*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{H_{\alpha_1,\alpha_2}([0,T]^2)}{T^2} > 0.$$

Теорема 3. *Пусть для ковариационной функции двумерного однородного гауссовского поля выполняется первое из условий (2) и другие вышеприведенные условия на $r_1(s,t)$. Тогда для любого измеримого по Жордану множества $A \subset [0,T]^2$ ненулевой меры, являющегося замыканием открытого, выполняется следующее асимптотическое соотношение:*

$$P\left(\max_{(s,t)\in A\cap\mathcal{R}} X(s,t) > u\right) = \mathrm{mes}(A) H \hat{u} \Psi(u)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad u \to \infty.$$

- *В случае плотных решеток по обеим координатам:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{d,d}$, $\hat{u} = u^{2/\alpha_1+2/\alpha_2}$, $H = H_{\alpha_1,\alpha_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{H_{\alpha_1,\alpha_2}([0,T]^2)}{T^2}$ *и* $0 < H_{\alpha_1,\alpha_2} < \infty$.
- *В случае решеток Пикандса по обеим координатам:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{p,p}$, $\hat{u} = u^{2/\alpha_1+2/\alpha_2}$, $H = H_{\alpha_1,\alpha_2}(b,c) = \lim_{T\to\infty} \frac{H_{\alpha_1,\alpha_2}((b,c),[0,T]^2)}{T^2}$ *и* $0 < H_{\alpha_1,\alpha_2}(b,c) < \infty$.
- *В случае плотной решетки по одной координате и решетки Пикандса — по другой:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{d,p}$, $\hat{u} = u^{2/\alpha_1+2/\alpha_2}$, $H = H_{\alpha_1,\alpha_2}(0,c) = \lim_{T\to\infty} \frac{H_{\alpha_1,\alpha_2}((0,c),[0,T]^2)}{T^2}$ *и* $0 < H_{\alpha_1,\alpha_2}(0,c) < \infty$.
- *В случае плотной решетки по одной координате и разреженной – по другой:*
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{d,s}$, $\hat{u} = u^{2/\alpha_1+2/\gamma_2}$, $H = H_{\alpha_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{H_{\alpha_1}([0,T])}{T}$ *и* $0 < H_{\alpha_1} < \infty$.

В случае выполнения второго условия на ковариационную функцию (3), то есть, имеется гауссовское поле с ковариационной функцией $r_2(s,t)$, имеют место эти же утверждения, заменив $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ и взяв соответствующий набор констант Пикандса из приведенных выше для поля $\chi_2(s,t)$.

В **четвертой главе** содержится приложение результатов из первой и второй глав для дробного броуновского движения и задачи о разорении для дробного броуновского движения в дискретном времени. В разделе 4.1 приведено определение дробного броуновского движения, а также находятся необходимые константы для применения теоремы из второй главы. После этого приводятся асимптотики вероятностей достижения высокого максимума траекторией дробного броуновского движения в зависимости от типа решетки и величины параметра Хёрста. В разделе 4.2 приведено описание задачи о разорении для дробного броуновского движения и поиск соответствующих констант для применения теоремы из второй главы. После этого приводится асимптотика искомой вероятности в общем виде для всех решеток.

Дробным броуновским движением $B_H(t)$, $t \geqslant 0$, $H \in (0,1]$ называется гауссовский процесс со стационарными приращениями и нулевым средним, начинающийся в нуле ($B_H(0)=0$), дисперсией приращений

$$\sigma^2(t-s) := E(B_H(t)-B_H(s))^2 = \sigma^2|t-s|^{2H}$$

и ковариационной функцией для $s \leqslant t$

$$r(s,t) := E\left(B_H(t)B_H(s)\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-(t-s)^{2H}\right).$$

Если $\sigma^2 = 1$, то этот процесс называется стандартным дробным броуновским движением. Параметр H называется показателем Хёрста. Мы видим, что при $H = 1/2$ процесс является броуновским движением (винеровским процессом). Для упрощения возьмем $\sigma^2 = 1$ и найдем асимптотику вероятности $P(\max_{t\in[0,1]} B_H(t) > u)$. Тривиальный случай $H = 1$ исключаем для простоты. Подсчитаем для условий Теоремы 10.1 работы[14], что при s, $t \to 1$

$$\sigma(t) = 1-2H|1-t|(1+o(1)) \quad \text{и} \quad r(s,t) = 1-\frac{1}{2}|t-s|^{2H}(1+o(1)),$$

т.е. для дробного броуновского движения в терминах условий **E1** и **E2** Теоремы 2 $\alpha = 2H$, $\beta = 1$.
При $H < 1/2$, случай (**i**) для теоремы 2, следует сделать замену $t' = 2^{-1/2H}t$, и получаем, что $a = 2H2^{-1/2H}$.

Утверждение 1. *При $H < 1/2$ выполнится соотношение*

$$P\left(\max_{t\in[0,1]\cap\mathcal{R}} B_H(t) > u\right) = \hat{H}\hat{u}\Psi(u)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad u\to\infty.$$

- *В случае плотной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $\hat{u} = u^{\frac{1}{H}-2}$, $\hat{H} = 2^{\frac{1}{2H}}(H_{2H}/2H)$.
- *В случае решетки Пикандса:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $\hat{u} = u^{\frac{1}{H}-2}$, $\hat{H} = 2^{\frac{1}{2H}}(H_{2H,b}/2H)$.
- *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $\hat{u} = u^{\frac{1}{\gamma}-2}$, $\hat{H} = 2^{\frac{1}{2H}-2}/H$.

При $H = 1/2$ задача нахождения вероятности высоких выбросов на отрезке сводится к решению задачи для броуновского движения (винеровского процесса) $B_{1/2}(t) = W_t$ с единичной дисперсией и $\alpha = \beta = 1$. Также, зная точное выражение для вероятности в непрерывном случае, получаем, что $H_1^{0,1} = 2$. Для этого случая применим часть (**ii**) Теоремы 2 с заменой $t' = t/2p$, и получаем, что $a = 1$.

Утверждение 2. *При $H = 1/2$ выполнится соотношение*

$$P\left(\max_{t\in[0,p]\cap\mathcal{R}} W_t > u\right) = \hat{H}\Psi(\hat{u})(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad u\to\infty.$$

- *В случае плотной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $\hat{u} = u/\sqrt{p}$, $\hat{H} = 2$.
- *В случае решетки Пикандса:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $\hat{u} = u/\sqrt{p}$, $\hat{H} = H_{1,b}^{0,1}$.
- *В случае разреженной решетки:* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $\hat{u} = u$, $\hat{H} = 1$.

[14] Питербарг В. И. Двадцать лекций по гауссовским процессам. – МЦНМО, 2015. – 188 с.

При $H > 1/2$ действует часть (**iii**) Теоремы 2, то есть

Утверждение 3. *При $H > 1/2$ выполнится соотношение для всех решеток*

$$P\left(\max_{t\in[0,1]\cap\mathcal{R}} B_H(t) > u\right) = \Psi(u)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad u\to\infty,$$

где $\mathcal{R}$ – нужная решетка из трех.

В актуарной математике модель изменения по времени совокупного капитала страховой компании часто описывается суммой

$$K(t) = u - S_1(t) + ct,$$

где $u > 0$ – начальный капитал компании, $c > 0$, ct - прирост капитала за счет страховых взносов, $S_1(t) \geqslant 0$ – расходы на выплаты страховых премий. Поскольку страховые компании, как правило, вкладывают деньги в различные другие финансовые инструменты (довольно часто именно это – основная часть доходов), то модель усложняется,

$$K(t) = u - S_1(t) + S_2(t) + ct,$$

$S_2(t) \geqslant 0$. Процессы S_1, S_2 обычно описываются при помощи случайных скачкообразных процессов с положительными скачками. В больших компаниях скачки происходят очень часто, и часто для простоты математических выводов переходят к процессам с непрерывными траекториями, как правило это – броуновское движение. Иногда рассматривают дробное броуновское движение, поскольку скачки, вообще говоря, не независимы, а броуновское движение есть предел процессов с независимыми скачками. Имеются обоснования, что в качестве модели процесса $-S_1(t) + S_2(t)$ можно использовать дробное броуновское движение, однако мы на этих обоснованиях останавливаться не будем, а рассмотрим достаточно популярную в актуарной математике модель

$$K(t) = u + B_H(t) + ct, \quad t \geqslant 0.$$

Одной из важнейших задач является *задача о разорении:* оценить вероятность разорения $P\left(\exists t \geqslant 0 : K(t) < 0\right)$.
Мы же рассмотрим эту вероятность в дискретном времени – на трех решетках (учтя, что в случае дробного броуновского движения $\alpha = 2H$) при условии, что решетка проходит через единственную точку максима дисперсии t_0:

1. $\mathcal{R}_d(\gamma) = \{t_0 + ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma < 2H$ – плотная решетка (dense grid);
2. $\mathcal{R}_p(b,\gamma) = \{t_0 + kbu^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $b > 0$, $\gamma = 2H$ – решетка Пикандса (Pickands' grid);

3. $\mathcal{R}_s(\gamma) = \{t_0 + ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma > 2H$ – разреженная решетка (sparse grid).

Для краткости обозначим нужную решетку за $\mathcal{R}$ и приступим к задаче о разорении игрока в дискретном времени:

$$P\left(\exists t \in \mathcal{R} : K(t) < 0\right) = P\left(\sup_{t\in\mathcal{R}} -B_H(t) - ct > u\right)$$
$$= P\left(\sup_{t\in\mathcal{R}} B_H(t) - ct > u\right), \quad (4)$$

где последнее равенство имеет место в силу симметрии гауссовских распределений с нулевым средним. Мы рассмотрим эту вероятность для больших значений начального капитала, $u \gg 1$, попросту говоря, найдем асимптотику этой вероятности при $u \to \infty$.

Утверждение 4. *Для любого положительного a процессы $\{B_H(t), t \geqslant 0\}$ и $\{a^{-H}B_H(at), t \geqslant 0\}$ распределены одинаково.*

Утверждение 5. *В вышеприведенных условиях, для задачи о разорении для дробного броуновского движения имеем*

$$P\left(\max_{t\in\mathcal{R}} B_H(t) - ct > u\right) = \hat{H}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1-3H}{2H}}H^{\frac{1}{2}}(1-H)^{\frac{1}{2}}}\hat{u}\Psi(\hat{u})(1+o(1)) \text{ при } u \to \infty.$$

- *В случае плотной решетки:*
  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_d(\gamma)$, $\hat{u} = \left(\frac{u^{1-H}}{\sigma(t_0)}\right)^{\frac{1-H}{H}}$, $\hat{H} = H_{2H}$ *и* $\sigma(t_0) = \frac{H^H}{c^H(1-H)^{H-1}}$.
- *В случае решетки Пикандса:*
  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_p(b,\gamma)$, $\hat{u} = \left(\frac{u^{1-H}}{\sigma(t_0)}\right)^{\frac{1-H}{H}}$, $\hat{H} = H_{2H,b}$ *и* $\sigma(t_0) = \frac{H^H}{c^H(1-H)^{H-1}}$.
- *В случае разреженной решетки:*
  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\gamma)$, $\hat{u} = \left(\frac{u^{1-H}}{\sigma(t_0)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, $\hat{H} = 1$ *и* $\sigma(t_0) = \frac{H^H}{c^H(1-H)^{H-1}}$.

В **пятой главе** рассматривается применение гауссовских процессов (случайного белого шума) при исследовании вестибулярного аппарата человека. Изучается модель Ходжкина–Хаксли с модификацией Сото–Александрова поведения афферентного первичного нейрона при наличии гауссовского белого шума и стимуляции.

Математическая модель формирования информационного процесса в афферентном первичном нейроне (АПН) была создана в 1949 – 1953 годах физиологом А.Л. Ходжкином и биофизиком Э. Хаксли и в 1963 году была отмечена Нобелевской премией. Использование этой модели в течение следующих лет подтвердило эффективность созданной модели и определило возможности её модификации.

Описание модифицированной модели, которое приводится в разделе 5.1, включает действие основных токов калия (K) и натрия (Na) на основе закона Ома и динамики проводимости этих токов, а также тока утечки (возникающем, например, при эксперименте) на основе гипотез их формирования в присутствии параметров активации и в отсутствие параметров инактивации (соответствующих воротным токам). Система обыкновенных дифференциальных уравнений модели написана с использованием правила Кирхгофа для токов калия, натрия, тока утечки и входящего тока – постсинаптического. Для параметров активации токов калия и натрия и параметра инактивации тока натрия можно использовать уравнения Колмогорова для непрерывного марковского процесса с двумя состояниями.

Начиная с 2000 года в течении девяти лет в лаборатории клеточной нейрофизиологии (Мексика) проводились эксперименты на волосковых клетках и афферентных первичных нейронах вестибулярного аппарата млекопитающих (крысы). В результате руководителем экспериментов – доктором медицинских наук Энрике Сото – был введён новый постоянный параметр h_{K}. В дальнейшем был проведён математический анализ полученной модели Ходжкина–Хаксли и проведено упрощение до второго порядка, что соответствует рассмотрению модели на центральном многообразии $h_{\mathrm{K}} \cong \mathrm{const}$ в трёхмерном пространстве $\{(V, n, h_{\mathrm{K}})\}$.

В разделе 5.2 мы рассматриваем упрощенную и модифицированную модель Ходжкина–Хаксли с шумом, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_m \cdot \dfrac{dV}{dt} = I_{\mathrm{syn}} + I_{\mathrm{noise}} - I_{\mathrm{Na}} - I_{\mathrm{K}} - I_L, \\ \tau_n(V) \cdot \dfrac{dn}{dt} = (n_\infty(V) - n)Q, \end{cases} \tag{5}$$

где I_{syn} – синаптический ток (выходная информация от волосковой клетки к афферентному первичном нейрону),

$$I_{\mathrm{Na}} = g_{\mathrm{Na}} m_\infty^3(V)(C(V) - n)(V - V_{\mathrm{Na}}), \quad I_{\mathrm{K}} = g_{\mathrm{K}} n^4 h_{\mathrm{K}}(V - V_{\mathrm{K}}), \quad I_L = g_L(V - V_L)$$

– токи натрия и калия соответственно, I_L – ток утечки; g_{Na}, g_{K} и g_L – проводимости для этих токов, I_{noise} – случайный ток, играющий роль "шум" (все токи относятся к единице площади, единица измерения – мкА/см^2).

Кроме того,

$$C(V) = n_\infty(V) + h_{\mathrm{Na}\,\infty}(V),$$

$$m_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{V+33.8}{5.2}\right)}, \quad h_{\mathrm{Na}\,\infty}(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{V+60.5}{9.9}\right)},$$

$$n_\infty(V) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{V+35}{5}\right)}, \quad \tau_n(V) = \frac{68}{\exp\left(-\frac{V+25}{15}\right)+\exp\left(\frac{V+30}{20}\right)}.$$

Здесь V – мембранный потенциал афферентного нейрона, C_m – ёмкость мембраны нейрона, n – вероятность присутствия частицы активации калиевого тока; h_{Na} и h_{K} – параметры, которые являются вероятностями отсутствия частиц инактивации натриевого и калиевого тока; $h_{\mathrm{Na}\,\infty}$ и $h_{\mathrm{K}\,\infty}$ – их стационарные значения (считаем, что значение h_{K} постоянно: $h_{\mathrm{K}} = h_{\mathrm{K}\,\infty}$). Последние служат для описания процесса инактивации соответствующего тока.

Параметр τ_n – постоянная времени процесса активации калиевого тока; n_∞, m_∞ – стационарные значения; Q – определённый температурный безразмерный фактор.

Известно, что при отсутствии шума у динамической системы, описываемой уравнениями (5), имеется устойчивый внешний предельный цикл – так называемый "утиный нос" (периодический аттрактор), а также расположенный внутри "утиного носа" неустойчивый внутренний предельный цикл (устойчивый в обратном времени), являющийся границей области притяжения точечного аттрактора типа устойчивый фокус. Внутренний и внешний предельные циклы в определённом месте очень близко подходят друг к другу. Такое поведение системы (5) имеет место, когда постоянный параметр I_{syn} принадлежит интервалу $(0,92; 1,147)$ в единицах измерения мкА/см^2. Правая граница интервала является точкой бифуркации Андронова–Хопфа. В левой окрестности этой точки система (5) является грубой системой с двумя аттракторами – периодическим и точечным, находящимся внутри периодического.

Под действием случайного шума возможен переход из области притяжения точечного аттрактора типа устойчивый фокус в область притяжения периодического аттрактора и обратный переход в область притяжения точечного аттрактора. При этом такие переходы могут неоднократно чередоваться, что является математической интерпретацией основного закона нейрофизиологии «Всё или ничего».

Как показало численное моделирование с использованием аппроксимации гауссовского случайного процесса в качестве шума, такой эффект чередования выходов и возвращений имеет место быть. В этом и состоит математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии «Всё или ничего». Отметим, что этот эффект носит явно стохастический характер.

Таким образом, в зависимости от интенсивности шума, сопровождающего постсинаптический ток, информация, поступающая от волосковой клетки в АПН, в основном сформирована в виде серии пачек (релаксационных автоколебаний) и готова для передачи в виде автоволны по нейронной цепочке. При увеличении интенсивности шума в постсинаптическом сигнале могут происходить сбои в передаче информации.

Подводя итоги приведенного выше описания информационного процесса в афферентном первичном нейроне вестибулярного аппарата, можно утверждать, что формат этого процесса в виде релаксационных автоколебаний (импульсов – спайков) почти одной и той же амплитуды, следующих пачками (группами – бёрстами), имеет место благодаря трём свойствам:

• наличие точки бифуркации Андронова–Хопфа;

• существование интервала бифуркации в левой окрестности этой точки, в каждой точке которого система (5) является бистабильной динамической системой;

• область притяжения точечного аттрактора расположена очень близко от основного предельного цикла, генерирующего спайки.

Описанная выше математическая интерпретация нейробиологического закона «Всё или ничего» позволяет более детально объяснить функционирование афферентных первичных нейронов в режиме ожидания механического воздействия на вестибулярные механорецепторы.

В разделе 5.3 было продолжено исследование модифицированной модели Ходжкина–Хаксли при наличии случайного шума. Для исследования возможностей коррекции вестибулярного аппарата вводится кратковременная стимуляция с помощью гальванического тока. Необходимость применения такой стимуляции может возникать у людей, осуществляющих полеты в космос, у пилотов самолетов, а также у других специалистов, подвергающихся перегрузкам, или у людей с нарушениями работы вестибулярного аппарата.

В работе[15] К.В. Тихоновой в дифференциальных уравнениях, описывающих модель Ходжкина–Хаксли с модификацией Сото–Александрова, была добавлена стимуляция, описывающее гальванический ток для реализации гальванической имитации земной силы тяжести на входном блоке вестибулярного аппарата космонавта, находящегося в условиях невесомости.

Теперь мы рассматриваем упрощенную и модифицированную модель Ходжкина–Хаксли при наличии стимуляции шума, описываемую системой

[15]Тихонова К. В. Математические задачи коррекции активности вестибулярных механорецепторов. – Кандидатская диссертация. – Москва, 2019. – 134 с.

дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_m \cdot \dfrac{dV}{dt} = I_{\mathrm{syn}} + \gamma_1 P(t) + I_{\mathrm{noise}} - I_{\mathrm{Na}} - I_{\mathrm{K}} - I_L, \\ \tau_n(V) \cdot \dfrac{dn}{dt} = (n_\infty(V) - n)Q, \end{cases} \tag{6}$$

аналогичную системе (5). Слагаемое $\gamma_1 P(t)$, где $\gamma_1 > 0$, а $P(t)$ – кусочно-непрерывная функция с условием $|P(t)| \leqslant 1$, играет роль стимулирующего тока.

В разделе 5.3 показано, что при добавлении определенного тока кратковременной стимуляции случайный шум небольшой амплитуды не препятствует переходу системы из режима ожидания выходного сигнала от волосковой клетки, то есть движения в окрестности малого устойчивого предельного цикла (режим "Ничего" в соответствии с основным законом нейрофизиологии "Всё или ничего") в режим возбуждения, то есть движения в окрестности большого устойчивого предельного цикла, называемого "утиным носом" (соответственно режим "Всё"). Случай большого по амплитуде случайного шума может приводить к серии переходов системы из одного режима в другой и обратно даже при кратковременной стимуляции.

По результатам моделирования мы можем сделать вывод о том, что наличие небольшого шума, как правило (здесь мы основываемся на статистике результатов), не приводит к существенным изменениям поведения системы по сравнению со случаем отсутствия шума. Шум средней величины конкурирует со стимуляцией.

В то же время при достаточно большой амплитуде шума стимуляция в итоге довольно часто подавляется: система ведет себя так же, как и при полном отсутствии стимуляции, появляются и исчезают пачки спайков.

Основной результат, полученный в пятой главе, дал возможность утверждать, что при малой интенсивности случайного белого шума, соответствующего здоровому состоянию человека, гальваническая стимуляция афферентных первичных нейронов вестибулярного аппарата улучшает стабилизацию взгляда человека при визуальном управлении движением в открытом космосе.

В соответствии с решением 1-й секции Координационного научно-технического совета (КНТС) РОСКОСМОСА от 11 октября 2021 проводится подготовка эксперимента на борту МКС с использованием этого результата в космическом полёте.

Заключение

Итоги проведенного исследования. Тематика диссертации относится к области теории вероятностей и ее применения. В работе рассмотрены задачи поиска асимптотики вероятностей больших выбросов гауссовских процессов и полей, а также их приложения. В дополнение приведены приложения гауссовских процессов (белый шум) в стохастизации математических моделей биофизических систем. Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий стационарных гауссовских процессов в дискретном времени.

2. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий нестационарных гауссовских процессов в дискретном времени.

3. Сформулирована и доказана локальная лемма об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени.

4. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени.

5. Сформулирована и решена задача об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий дробного броуновского движения в дискретном времени.

6. Сформулирована и решена задача о разорении для дробного броуновского движения в дискретном времени.

7. Дана математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии "Всё или ничего".

8. Дана оценка влияния гауссовского белого шума на возможность реализации управляемого перехода в математической модели афферентного первичного нейрона.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы.

- Исследовать асимптотику поведения совместной вероятности высокого выброса в дискретном времени и в непрерывном времени для однородного двухпараметрического гауссовского поля, удовлетворяющего условиям из главы 3.

- Обобщить результаты, полученные для однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени, на однородные n-параметрические поля в дискретном времени.

- Получить вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия и т.д.) для реализаций модифицированной модели Ходжкина–Хаксли со стохастизацией и управлением при разных значениях амплитуды гауссовского белого шума.

Благодарность. Автор выражает особую признательность и огромную благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Питербаргу Владимиру Ильичу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

1. *Козик И. А., Питербарг В. И.* Большие выбросы гауссовских нестационарных процессов в дискретном времени // Фундаментальная и прикладная математика. Москва: Интуит. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 159–169. / 1.27 п.л. / вклад соискателя 1.15 п.л.
   Kozik I.A., Piterbarg V.I. High Excursions of Gaussian Nonstationary Processes in Discrete Time // Journal of Mathematical Sciences – 2021. – P. 159–169.
   Журнал индексируется в Scopus (Scopus SJR 0,169).
   Постановка задач принадлежит В.И. Питербаргу, все результаты получены И.А. Козиком самостоятельно.
2. *Александров В. В., Александрова О. В., Козик И. А., Семенов Ю. С.* Модификация модели Ходжкина–Хаксли и математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии «Всё или ничего» // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2021. – №3. – С. 66–69. / 0.45 п.л. / вклад соискателя 0.16 п.л.
   Журнал индексируется в РИНЦ, RSCI (ИФ РИНЦ 0.467).
   Aleksandrov V.V., Aleksandrova O.V., Kozik I.A., Semenov Yu. S. A Modification of the Hodgkin–Huxley Model and a Mathematical Interpretation of the Principal Neurophysiological “All-or-None“ // Moscow University Mechanics Bulletin – 2021. – Vol. 76. – P. 78–82.
   Журнал индексируется в Scopus (Scopus SJR 0,417).
   Постановка задачи и интерпретация полученных реализаций принадлежит В.В. Александрову, О.В. Александровой и Ю.С. Семенову, подбор стохастизации и аппроксимации гауссовского белого шума рядами Каца–Шинозуки были произведены И.А. Козиком самостоятельно.

3. *Козик И. А.* Экстремумы однородных двухпараметрических гауссовских полей при дискретизации параметров // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2022. – № 5. – С. 9–17. / 1.04 п.л.
   Журнал индексируется в РИНЦ, RSCI (ИФ РИНЦ 0.467).
   Kozik I.A. Extremes of Homogeneous Two-Parametric Gaussian Fields at Discretization of Parameters // Moscow University Mathematics Bulletin – 2023. – Vol. 77. – P. 217–226.
   Журнал индексируется в Scopus (Scopus SJR 0,607).
4. *Александров В. В., Козик И. А., Семенов Ю. С.* Исследование модифицированной модели Ходжкина-Хаксли при наличии стимуляции и случайного шума // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2024. – №2. – С. 44–47. / 0.44 п.л. / вклад соискателя 0.15 п.л.
   Журнал индексируется в РИНЦ, RSCI (ИФ РИНЦ 0.468).
   Постановка задачи и интерпретация полученных реализаций принадлежит В.В. Александрову и Ю.С. Семенову, подбор стохастизации и аппроксимации гауссовского белого шума рядами Каца–Шинозуки были произведены И.А. Козиком самостоятельно.

Козик Игорь Александрович

Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени
при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.__.____ . Заказ №___
Формат 60 × 90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 150 экз.
Типография ______