МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Денисов Пётр Васильевич

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ.

1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2024

Диссертация подготовлена на кафедре общих проблем управления Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Научные руководители:	**Шамолин Максим Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор **Заплетин Максим Петрович** кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Солдатов Александр Павлович** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела вычислительных методов и математической физики Вычислительного центра им. А.А.Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН **Васильев Владимир Борисович** доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» **Половинкин Игорь Петрович** доктор физико-математических наук, доцент, профессор Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет»

Защита диссертации состоится «28» февраля 2024г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу Ленинские горы, 1, главное здание МГУ, ауд.16-10.
E-mail: ast.difficty@gmail.com
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте dissovet.msu.ru:

https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.8/2810

Автореферат разослан ... января 2024г.

Ученый секретарь диссертационного совета 011.8,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Чечкин Григорий Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

.

Диссертация посвящена изучению вопросов о нелокальном поведении (при больших значениях времени t) решения задачи Коши для параболических по И.Г.Петровскому систем уравнений и поведения при больших t решения обобщенной задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Изучаются два случая указанных выше задач:

1) систему параболических по И.Г.Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и без младших членов.

2) систему параболических по И.Г.Петровскому уравнений с коэффициентами, зависящими от t и содержащую младшие коэффициенты не нулевого порядка.

Кроме того, изучается поведение при $t \to +\infty$ интеграла Пуассона для итерированного уравнения теплопроводности, с начальными условиями при $t = 0$.

Дадим общее определение параболической по И. Г. Петровскому системы[1] с матрицей $A^{(k_1,...,k_N)} = A_{ij}^k,\ i,j = 1,...,m,\ k = (k_1,...,k_N)$.

Система линейных уравнений (с неизвестными $u_1,...,u_m$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{0 \leqslant k_1+...+k_N \leqslant 2b, b \in N} A_{ij}^k(t, x_1,...,x_N)(-i)^{|k|} \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_N^{k_N}} +$$

$$+F_i(t, x_1,...,x_N)(i = 1,...,m)$$

называется параболической по И. Г. Петровскому в точке $t^{(0)},\ \ x_1^{(0)},...,x_N^{(0)} \in \mathbb{E}^{N+1}$, где $\mathbb{E}^{N+1}-$линейное пространство размерности $N+1$, если при любых действительных $\alpha_1,...,\alpha_N$, сумма квадратов которых равна 1, все корни $\lambda = \lambda_1,...,\lambda_N$ алгебраического уравнения относительно λ

$$\det(\sum_{k_1+...+k_N=2b} (-i)^{|k|} A^k(t^{(0)}, x_1^{(0)},...,x_N^{(0)}) \alpha_1^{k_1}...\alpha_N^{k_N} - \lambda E) = 0$$

имеют отрицательные действительные части, где $E-$единичная матрица размера $N \times N$.

Для параболических систем корректно поставлена задача Коши для положительных t в классе ограниченных функций с достаточно гладкими

[1] И.Г.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными // М., Физ.-мат. литература, 2009, 400 с.

начальными данными при $t = 0$. Корректность сохраняется также в классе функций, возрастающих при $x_1 + ... + x_N \to \infty$ не быстрее, чем $e^{(x_1^2+\cdots+x_N^2)\frac{b}{2b-1}}$, где $2b$—порядок системы.

В начале первой главы мы рассмотрим параболическую по И. Г. Петровскому систему уравнений без младших коэффициентов

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A^k D^k u(x,t), x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \tag{1}$$

где A^k квадратные матрицы размера $m \times m$, с постоянными элементами, для решения которой выполняются начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), x \text{ из } \mathbb{E}^N, \tag{2}$$

где $u_0(x) = (u_0^1(x), ..., u_0^m(x))$— заданная, ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор функция $u_0(x)$ (верхний индекс обозначает номер компоненты вектор функции $u_0(x)$), D^k в (1) означает

$$(-i)^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_N^{k_N}}, |k| = k_1 + k_2 + ... + k_N.$$

С. Д. Эйдельман и Ф. О. Порпер [2] показали, что для матрицы Грина системы (1)

$$G(x,t) =$$

$$= (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} \exp\Big[i(x,y) - t \sum_{|k|=2b} A^k(y_1^{k_1}, ..., y_N^{k_N})\Big] dy, b \in N, \tag{3}$$

справедлива оценка

$$\Big|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_N^{k_N}}\Big| <$$

$$< C_1 t^{-\frac{N+k}{2b}} \exp\Big(-C_2 \Big(\frac{||x||}{t^{1/2b}}\Big)^q\Big), C_1, C_2 > 0, \tag{4}$$

$$(x,y) = x_1 y_1 + ... + x_N y_N, ||x|| = [x_1^2 + ... + x_N^2]^{1/2,}, q = \frac{2b}{2b-1}.$$

Решение задачи (1), (2) представимо в виде интеграла Пуассона [3]

[2]Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О. О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем // Известия вузов матем., 1960, № 4, с. 210-217.

[3]Тихонов А.Н. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюллетень МГУ, математика и механика, 1938, секция А1, № 9, с.1-45.

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{E}^N} G(x-\sigma,t)u_0(\sigma)d\sigma, (d\sigma=d\sigma_1,d\sigma_2...d\sigma_N). \tag{6}$$

Из того, что едининичная матрица E удовлетворяет системе (1), вытекает тождество

$$\int\limits_{E^N} G(x-\xi,t)d\xi=E. \tag{7}$$

Далее,мы сформулируем и затем докажем основные результаты для решения системы (1), (2), а затем перенесем полученные результаты на случай задачи Коши для параболической по И. Г. Петровскому системы с младшими коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant 2b} A^k(t)D^k u, x\in\mathbb{E}^N, t>0, b\in N, \tag{8}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{9}$$

в которой $A^k(t)$ обозначает квадратные матрицы размера $m\times m$, элементы которых зависят только от времени t, $u_0(x)$ - ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$ вектор функция.

Доказательства результатов о решениях систем (1), (2) остаются справедливы и для решений параболической по И. Г. Петровскому системы (8), (9), для матрицы Грина которой справедливы оценки [4].

$$\left|\left|D^b G(x,t)\right|\right|_{\mathbb{C}}\leqslant C_b(a(t))^{-b-N}\exp\Big(-C_1\Big(\frac{||x||}{a(t)}\Big)^q\Big), \tag{10}$$

где

$$q=\frac{2b}{2b-1}, a(t)\to+\infty, t\to+\infty, C_b>0, C_1>0.$$

Для формулировки основных результатов о решениях систем (1), (2) нам потребуется ряд определений, которые будут так же использоваться и для решений систем (8), (9).

Будут изучаться необходимые и достаточные условия существования предела

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau=0, \tag{11}$$

средних по времени t от решения задачи (1), (2), равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

[4]Эйдельман С.Д. Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Матем. сб., 1958, т.44, № 4, с. 481-508.

Замечание. Вопросы существования предела (11) были впервые изучены в работе [5].

Будут также изучаться необходимые и достаточные условия существования предела при $t \to +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha+1}{t} \int\limits_0^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} u(x,\tau)d\tau = 0, \tag{12}$$

средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ по t от решения системы (1), (2), равномерно по x в E^N.

Перейдем к определениям различных усреднений начальной вектор функции $u_0(x)$.

Определение 1. Будем говорить, что вектор функция $u_0(x)$, имеет равномерные предельные средние[6], равные вектору с нулевыми компонентами, по кубам K_R^x, со сторонами, равными $2R$ и с центром куба в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, если для всякого куба K_R^x справедливо предельное равенство

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(2R)^N} \int\limits_{K_R^x} u_0(y)dy = 0, \tag{13}$$

при всех x из $\mathbb{E}^N$.

Замечание. Условие, что предел средних (11) или (12) по времени t от $u(x,t)$ равен нулю, не ограничивает общности, так как всегда можно, в случае, если $u(x,t) \to l \neq 0$ при $t \to +\infty$, заменить $u(x,t)$ на разность $u(x,t)-l$, и тогда в силу линейности пределов (11) и (12) получим, что предел (11) (или (12)) равен нулю.

Аналогичные замечания относятся ко всем рассматриваемым здесь пределам.

Определение 2. Будем говорить, что вектор – функция $u_0(x)$ имеет равномерные предельные средние по шарам[6]

$$B_R^x = [y : |x-y| \leqslant R]$$

с центром в точке $x \in \mathbb{E}^N$, радиуса R, если существует нулевой предел шаровых средних вектор – функции $u_0(x)$ при $R \to \infty$, раномерно по x в $\mathbb{E}^N$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_0(\varepsilon)$, такое, что при $R > R_0(\varepsilon)$ и всех x из $\mathbb{E}^N$ справедливо неравенство

$$\left\| \frac{N}{w_N R^N} \int\limits_{B_R^x} u_0(y)dy \right\|_{\mathbb{C}} < \varepsilon, \tag{14}$$

[5]Харди Г.Г. Расходящиеся ряды. // Изд. 2-е стереотипное, М.Ком.Книга, 2006, 504с.

[6]Денисов В.Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи матем. наук, 2005, т. 60, № 4, с. 145-212.

где $w_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)-$ площадь поверхности сферы $|y| = 1$ единичного радиуса в $\mathbb{E}^N$, а $\frac{w_N R^N}{N}-$ объем шара B_R^x в $\mathbb{E}^N$.

Из огромного числа работ по качественной теории уравнений параболического типа, по корректности постановок задач об асимптотике решений параболических уравнений необходимо отметить работы А. Н. Тихонова [3,7], В. А. Ильина [8], А. М. Ильина, А. С. Калашникова, О. А. Олейник[9], А. К. Гущина, В. П. Михайлова[10].

Особую важность для случая решений параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений представляют собой работы С. Д. Эйдельмана[4, 11], С. Д. Эйдельмана и Ф. О. Порпера[2], монография С. Д. Эйдельмана [12].

В работе С. Д. Эйдельмана [11] были впервые получены экспоненциальные оценки фундаментального решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений.

Различные достаточные признаки справедливости экспоненциальных оценок для фундаментального решения параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений были изучены в в работе С. Д. Эйдельмана [4]. Основная теорема о стабилизации решений параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений была доказана в работе С. Д. Эйдельмана, Ф. О. Порпера[2]

Важное научное значение также имеет монография С. Д. Эйдельмана[12], в которой заложены фундаментальные основы для параболических систем уравнений.

Первой работой, в которой изучалась асимптотическое при $t \to +\infty$ поведение решения обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения, является следующая работа Ю. Н. Дрожжинова[13].

Из работ последнего времени отметим работы В. В. Городецкого[14] и работу В. А. Литовченко и И. М. Довжицкой [15], в которых изучалась стабилизация в различных классах обобщенных функций.

С подробными обзорами по качественным свойствам решений параболических уравнений можно ознакомиться в статьях А. К. Гущина, В. П.

---

[7]Tychonoff A.N. Theoremes d'unicite pour l'equatim de la chaleur // Mat. Sb., 1935, v. 45, N. 2, p. 199-216.

[8]Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 2, с. 97-154.

[9]Ильин А.М.., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук, 1962, т. 17, № 3, с. 3-146.

[10]Гущин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 2, с. 297-311.

[11]Эйдельман С.Д. Оценки решений параболических систем и некоторые их приложений // Матем. сб. 1953, т. 33, № 2, с.359-382.

[12]Эйдельман С.Д. Параболические системы // Наука, 1964, 443 с.

[13]Дрожжинов Ю.Н. Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Известия АН СССР, серия матем., 1969, т. 33, № 2, с. 368-378

[14]Городецкий В.В. Некоторые теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций // Укр. матем. журн., 1988, т. 40, № 1, с. 43-48.

[15]Литовченко В.А., Довжицкая И.М. Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сибирский матем. журн., 2014, т. 55, № 2, с. 341-349.

Михайлова, Л. А. Муравья [16], В. Н. Денисова и В. Д. Репникова [17], В. Н. Денисова[6].

Глубокие результаты по качественным свойствам решений параболических функционально-дифференциальных уравнений получены в работе А. Б. Муравника [18].

Существование предела средних по времени t от решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка было изучено в работе В. Н. Денисова и В. В. Жикова. [19]

Начало исследований асимптотического поведения решений уравнений параболического типа при $t \to \infty$ было положено работой А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [20].

Первой работой по стабилизации решения уравнения теплопроводности является работа А. Н. Тихонова[3]. Важную роль в вопросах единственности решения параболических уравнений сыграла работа А. Н. Тихонова[7].

В работе М. Кржижанского [21] началось изучение поведения при $t \to +\infty$ решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, в которой впервые построен пример ограниченной начальной функции, такой, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с этой начальной функцией не стабилизируется ни в одной точке x пространства.

В работе В. Д. Репникова и С. Д. Эйдельмана [22] получено необходимое и достаточное условие поточечной стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Основным инструментом в доказательстве необходимости в этом утверждении служит тауберова теорема Н. Винера [5].

В работе В. М. Поляковой [23] впервые исследованы вопросы стабилизации параболических уравнений с переменными коэффициентами.

Ю. Н. Дрожжинов[13] изучил асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ решения задачи Коши для ультрапараболического уравнения.

---

[16]Гущин А.К., Михайлов В.П., Муравей Л.А. О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Сибирское отдел. АН СССР. Институт гидромеханики. Динамика сплошной среды, вып. 23, 1975, с. 57-89.

[17]Денисов В.Н., Репников В.Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 1, с. 20-41.

[18]Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // СМФН, 2014, т. 52, с. 3-141.

[19]Денисов В.Н., Жиков В.В. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Матем. заметки, 1985, т. 37, № 6,с. 834-850.

[20]Колгоморов А.Н., Петровский И.П., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической задаче // Бюлл. Моск.Гос.Ун-та, сек. Математ. и механ., 1937, т. 1, № 6, с. 1-26.

[21]Krzyzanski M. Sur l'allure asymptotique des o potentials de chaleur et de I'integrall de Fourier-Poisson // Annal. Polonici, Math., 1957, v. 111, N. 2, p. 288-299.

[22]Репников В.Д., Эйдельман С.Д. Необходимые и достаточные условия установления задачи Коши // ДАН СССР, 1966, т. 167, № 2, с. 298-301.

[23]Полякова В.М. О стабилизации уравнения теплопроводности // ДАН СССР, 1959, т. 129, № 6.

В работах В. Н. Денисова [24, 25] доказано, что в классе неограниченных начальных функций (растущих полиномиально на бесконечности) для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности теряется связь между усреднениями (предел которых при $t \to +\infty$ существует и гарантируется стабилизация) и характеристиками роста начальной функции.

В дальнейшем, в статье В. Н. Денисова[26] доказано, что такая связь между порядком средних от начальной функции, имеющей не более, чем степенной рост, еще существует, если предположить, что решение задачи Коши стабилизируется равномерно по x во всем пространстве $\mathbb{E}^N$.

При изучении необходимых и достаточных условий стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с переменном коэффициентом $p(x)$ в уравнении $p(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, А. К. Гущин и В. П. Михайлов [27, 28] предложили усреднять этот коэффициент в метрике пространства L_1, считая, что начальная функция является ограниченной.

Новый подход к решению вопросов стабилизации решений параболических уравнений предложен В. В. Жиковым [29,30]. Предложенным им методом удалось решить задачу о стабилизации в классе ограниченных начальных функций в тех случаях, когда семейство операторов, порождаемых исходным уравнением, допускает существование усредненного оператора с постоянными коэффициентами.

В работе В. Н. Денисова и В. В. Жикова[19] этим методом усреднения решена задача о необходимых и достаточных условиях стабилизации средних по времени t от решения задачи Коши для параболического уравнения, с ограниченной начальной функцией.

В работе В. Н. Денисова и Е. В. Шелеповой[31] изучен вопрос о равностабилизации при $t \to +\infty$ решения уравнения теплопроводности с правой частью $f(x)$ и с модифицированными средними Рисса от $f(x)$.

---

[24] Денисов В.Н. К вопросу о необходимых условиях стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве E^N и на любом его компакте // ДАН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 780-783.

[25] Денисов В.Н. О необходимых условиях равномерной во всем пространстве стабилизации решения задачи Коши в классах функций, имеющих степенной рост // ДАН СССР, 1982, т. 262, № 4, с. 785-786.

[26] Денисов В.Н. О поведении при больших значениях времени решений параболических уравнений // СМ.ФН., 2020, т. 66, № 1, с. 1-155.

[27] Гущин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // ДАН СССР, 1970, т. 194, № 3, с. 492-495.

[28] Гущин А.К., Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для одномерного параболического уравнения // ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2, с. 257-266.

[29] Жиков В.В. О стабилизации решений параболических уравнений // Матем. сб. 1977, т.104, № 4, с. 597-611.

[30] Жиков В.В. Критерий поточечной стабилизации для параболических уравнений с почти - пертодическими коэффициентами // Матем. сб., 1979, т. 110, № 2, с. 304-318.

[31] Денисов В.Н., Шелепова Е.В. О скорости стабилизации решения параболического уравнения // Проблемы матем. анализа, 2020, т. 103, с.85-90.

В работе автора диссертации[32]сформулированы теоремы о стабилизации при $t \to +\infty$ средних по времени t,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t u(x, \tau) d\tau = 0,$$

где предел является поточечным по x в $\mathbb{E}^N$ от решения задачи Коши для параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A^k D^k u, x \in E^N, t > 0, u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{E}^N,$$

где A^k квадратные матрицы размера $m \times m$, с постоянными коэффициентами,

$$u_0(x) = (u_0^1(x), ..., u_0^m(x))$$

$-$заданная начальная вектор – функция, ограниченная и непрерывная в $\mathbb{E}^N$.

В главе 2 будет изучено [33] поведение при $t \to \infty$ решений обобщений задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности, построенных в работе[35].

В работах автора [34, 35] изучены вопросы о стабилизации средних по времени, а также средних Рисса по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений, а также задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

В работе M. Nicolescu[36] изучены различные постановки задач для итерированного уравнения теплопроводности.

В книге Г. Г. Харди[5] приведены основные методы суммирования расходящихся интегралов и рядов. Доказаны тауберовы теоремы, включая важную в приложениях тауберову теорему Н. Винера.

Развитие основных теорем работы[32] мы проводим в главе 1 диссертации, в параграфах 2, 3, 4.

---

[32]Денисов П.В. Об асимптотике средних от решения задачи Коши для системы параболических уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры., 2018, т. 145, с. 110-113.

[33]Денисов П.В. Об асимптотических свойствах решений итерированного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения., 2021, т.192, с. 155-160.

[34]Денисов П.В. О стабилизации средних по времени от решения параболической по И.Г.Петровскому системы уравнений // Дифференциальные уравнения,2022, т. 58, № 11, с. 1557-1561

[35]Денисов П.В. О стабилизации средних Рисса по времени решения задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2022, № 2, с. 13-16

[36]Nicolescu Miron. Ecuatia iterata a caldurii Studii Si-Cercetari Matematici // Academia Republicii Populare Romine, 1954, т. 5, N 3-4, p. 243-332.

Цель работы

Диссертационная работа посвящена изучению вопросов о нелокальном поведении (при больших значениях времени t) решения задачи Коши для параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений и поведения при больших значениях времени решения обобщений задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Положения, выносимые на защиту

1. Критерии существования равномерного предела средних по времени от решения задачи (1), (2),

А так же критерий существования равномерного по x предела средних Чезаро по времени от решения системы (8), (9).

2. Критерий существования пределов (11), (12) в терминах поведения средних (13) по кубам, а так же в терминах существования предела средних (14) по шарам, равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Методология и методы исследования

Основными математическими методами используемыми в данной работе, являются методы интегральных оценок, методы теории усреднения и качественной теории дифференциальных операторов в частных производных.

Научная новизна

Автором получены новые результаты, которые состоят в следующем:

Получены критерий существования предела средних по времени от решения параболической системы, равномерного в $\mathbb{E}^N$, а таже критерий существования равномерного предела средних по времени Чезаро неотрицательного порядка от решений.

Получены критерии существования пределов средних по t в терминах существования средних по кубам или средних по шарам, рavромерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Установлено, что если $\beta \geqslant p-1$, а начальные функции $\varphi_l(x)(l = 0, 1, ..., p-1)$ имеют пределы шаровых средних Рисса порядков $\alpha_l \geqslant 0$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$, тогда решение задачи имеет предел средних типа Рисса по t порядка $\beta \geqslant p-1$.

Теоретическая и практическая значимость

Предлагаемая работа имеет теоретический характер. Развитые в работе подходы могут быть применены к более общим параболическим задачам.

Степень достоверности

Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами. Научные результаты автора опубликованы в открытой печати, прошли апробацию на научных семинарах.

Все результаты, выносимые автором на защиту, получены лично.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на заседаниях следующих научных семинаров:

- МПГУ, Институт математики и информатики, семинар кафедры теоретической информатики и дискретной математики;
- МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, семинар кафедры общих проблем управления;
- МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, семинар "Актуальные проблемы геометрии и меха- ники" имени профессора В. В. Трофимова под руководством Д. В. Геогиевского и М. В. Шамолина;
- МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, семинар "Прикладные задачи оптимального управления и численные методы"под руководством М. П. Заплетина и И. С. Григорьева.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора, список которых приводится в конце автореферата [1-3].

Структура и объем работы

Диссертация занимает 79 страницы текста и состоит из введения, двух глав, разбитых на пять параграфов и списка литературы, включающего 77 наименований.

Основное содержание работы.

В первой главе получены критерии стабилизации решения задачи Коши для параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений без младших коэффициентов, также и для систем с младшими коэффициентами.

Теорема 1. Если начальная вектор функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал предел (11) средних по времени t от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \tag{15}$$

решения задачи (1), (2), равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 1 впервые сформулирована в работе [32].

Теорема 2. Пусть начальная вектор функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, и $\alpha > 0$—– произвольное фиксированное число. Для того, чтобы существовал предел (12) средних по t Чезаро порядка α от решения задачи (1), (2) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$, необходимо и достаточно, чтобы решение $u(x,t)$ имело предел (15) равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

При $\alpha = 0$ теорема 2 переходит в теорему 1. Теоремы 1 и 2 дают критерий существования пределов (11) и (12) в терминах существования предела (15) самого решения $u(x,t)$ задачи (1), (2).

Представляет интерес выразить критерий существования пределов (11) и (12) в терминах поведения различных средних от начальной вектор функции $u_0(x)$.

Теорема 3. Если начальная вектор функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал предел (12) средних Чезаро от $u(x,t)$– решения задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор – функция $u_0(x)$ имела предел средних (13) по кубам K_R^x со стороной $2R$ и с центром в точке x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теорема 4. Если начальная вектор функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в $\mathbb{E}^N$, тогда для того, чтобы существовал предел (12) средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ от решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор – функция $u_0(x)$ имела предел (14) средних по шарам B_R^x равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теоремы 1 и 2 дают критерий стабилизации средних по времени (11) и средних по времени (12) в терминах стабилизации решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), т.е. существование предела (14), равномерно по x в $\mathbb{E}^N$.

Теоремы 3 и 4 дают исчерпывающее решение проблемы равномерной по x в $\mathbb{E}^N$ стабилизации средних (12) Чезаро порядка α от решения задачи (1), (2), в терминах существования пределов (13) средних по кубам K_R^x, либо предела средних (14) по шарам B_R^x.

При доказательстве необходимости в теоремах 1—4 мы нигде не используем тауберову теорему Н. Винера [5].

Сформулированные результаты доказываются в параграфе 3 главы 1, затем переносятся в параграфе 3 на случай решений параболических по И. Г. Петровскому систем уравнений (8), (9) с младшими коэффициентами.

Во второй главе изучаются вопросы стабилизации для средних по времени от решений параболических уравнений высокого порядка.

Пусть $(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{E}^N$. Введем обозначение $\{(t > 0)\} = \{(x,t) : x \in \mathbb{E}^N, t > 0\}, \{t \geqslant 0\} = \{(x,t); x \in E^N, t \geqslant 0\}$.

Пусть $\Omega = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)-$ оператор теплопроводности, символ $\Omega^{(p)}-$ обозначает результат повторного p кратного применения оператора Ω к функции $u(x,t)$ из класса $C^{2p,p}\{t > 0\}$, т.е. функции $u(x,t)$, которая имеет непрерывные производные по x до порядка $2p$ включительно и непрерывные производные по t до порядка p включительно.

Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x,t)$ из класса $C^{2p,p}\{t > 0\}$ такой, что справедливо уравнение

$$\Omega^{(p)} u(x,t) = 0 \text{ в } \{t > 0\}, \text{ где } p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2, \tag{16}$$

и выполняются начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,t)|_{t=0} =$$

$$= f_0(x), \Omega^{(k)} u(x,t)|_{t=0} = f_k(x), k = 1, ..., p-1, x \in \mathbb{E}^N, \tag{17}$$

где $f_k(x), k = 0, ..., p-1-$ - заданные функции из класса $C(\mathbb{E}^N)$, для которых выполнены условия А. Н. Тихонова[3]: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C(\varepsilon) > 0$, что при $\forall x \in \mathbb{E}^N$ справедливы неравенства

$$|f_k(x)| < C(\varepsilon) e^{\varepsilon |x|^2}, k = 0, ..., p-1. \tag{18}$$

Итерированное уравнение теплопроводности впервые изучено в работе М. Николеску, который установил в [36], что при сформулированных условиях для решения задачи (16), (17), справедливо равенство

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sqrt{t})^N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} e^{-\frac{r^2}{4t}} F(y,t) dy, \tag{19}$$

где

$$r^2 = ||x-y||^2, F(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \frac{t^l}{l!} f_l(x). \tag{20}$$

Решение (19) можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l u_l(x,t) \frac{t^l}{l!}, \tag{21}$$

где $u_l(x,t)-$ решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $f_l(x), l=0,...,p-1$,

$$\Omega u = 0, u|_{t=0} = f_l(x).$$

Ясно, что если функции $f_l(x) \in C^{(2)}, l = 0,...,p-1$, и является гармоническими в $\mathbb{E}^N$, т.е. $\Delta f_l(x) = 0, x \in \mathbb{E}^N$, то (21) приобретает вид

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{t^l}{l!}(-1)^l f_l(x). \tag{22}$$

Очевидно, что для решения (22) свойство стабилизации при $t \to +\infty$ не имеет места.

Поэтому имеет смысл изучать не стабилизацию решения (22), а свойство равностабилизации

$$\lim_{t\to+\infty}(u(x,t) - v(x,t)) = 0, \tag{23}$$

где $u(x,t)-$ решение задачи (16), (17) и некоторой специально построенной функции $v(x,t)$.

Рассмотрим средние Рисса порядка $\alpha \geqslant 0$ от $\varphi(x)$

$$S_R^\alpha \varphi(x) := \frac{C}{R^N} \int\limits_{r\leqslant R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha \varphi(y)dy, \tag{24}$$

где

$$C = \frac{2}{w_N B(N/2, \alpha+1)}, w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

При фиксированных $x \in \mathbb{E}^N, t > 0, \alpha \geqslant 0$ рассмотрим функцию

$$v(x,t,\alpha) = \frac{2}{B(N/2,\alpha+1)w_N \alpha^{N/2}} \times$$

$$\times \int\limits_{|\sigma|\leqslant\sqrt{\alpha}} \left(1 - \frac{|\sigma|^2}{\alpha}\right)^\alpha F(x + 2\sqrt{t}\sigma)d\sigma. \tag{25}$$

где $F(x,t)-$ функция (20).

Представим решение задачи (16), (17) в виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{E^N} e^{-|\sigma|^2} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x + 2\sqrt{t}\sigma)d\sigma. \tag{26}$$

Пусть для всех функций $f_l(x), l=0,...,p-1$, из (17) справедлива оценка

$$|f_l(x)| \leqslant M(1+||x||^m), M>0, m>0. \tag{27}$$

Теорема 1. Если выполняются условия (27) роста функций $f_l(x)(l=0,...,p-1)$ и

$$\alpha(t)=t^{m+p-1}, \tag{28}$$

где $\alpha(t)-$ порядок средних (25), тогда решение $u(x,t)$ задачи (16), (17) и функция (25) $v(x,t,\alpha(t))$ равностабилизируется при $t\to\infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{E}^N$ со скоростью не меньше, чем $t^{-m/2}$, т.е.

$$\sup_K |u(x,t)-v(x,t,\alpha(t)| \leqslant \frac{C}{t^{m/2}}. \tag{29}$$

Эта теорема доказана автором в параграфе 1 работы[5].

В параграфе 2 главы 2 мы изучим поведение при $t\to\infty$ решения для другой постановки задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности[6].

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$ из класса $C^{2p,p}\{t>0\}$, для которой справедливо уравнение

$$\Omega^{(p)}u(x,t)=0 \text{ в } \{t>0\}, \tag{30}$$

и начальные условия

$$u(x,0)=\varphi_0(x),$$
$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x,0)=\varphi_i(x), x\in\mathbb{E}^N, (i=1,...,p-1), \tag{31}$$

где $\varphi_i(x)\in C^{2(p-i-1)}\in\mathbb{E}^N$ и выполняются условия А. Н. Тихонова [3], т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $C(\varepsilon)>0$, такое, что при всех x из $\mathbb{E}^N$

$$\left|\left|\frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_N^{\alpha_N}}\varphi_i(x)\right|\right|_C < C(\varepsilon)\exp{(\varepsilon|x|^2)},$$

для всех $\alpha_i\geqslant 0, \alpha_i\in\mathbb{N}, \alpha_1+...+\alpha_N\leqslant 2(p-i-1)(i=0,1,...,p-1)$.

В работе M. Nicolescu[36] были изучены свойства решений уравнений (30), (31), в частности, было установлено существование и единственность решения задачи Коши (30), (31) и получено интегральное представление

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{t^l}{l!}\Big[\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k\frac{\partial^k u_{l-k}(x,t)}{\partial t^k}\Big], \tag{32}$$

где

$$C_l^k=\frac{l!}{k!(l-k)!},$$

$$u_l(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sqrt{t})^N} \int\limits_{\mathbb{E}^N} \varphi_l(y) e^{-\frac{||x-y||^2}{4t}} dy, \tag{33}$$

решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\Omega_l u(x,t) = 0 \text{ в } \{t > 0\}, u(x,0) = \varphi_l(x), x \in \mathbb{E}^N \tag{34}$$

с начальной функцией $\varphi_l(x)$.

Пусть $\beta \geqslant p-1$, где p—порядок уравнения (30) и введем модифицированные средние типа Рисса по t порядка $\beta \geqslant p-1$ от решения $u(x,t)$ задачи (30), (31).

$$S(x,t,\beta;u) = \frac{(-1)^{p-1}2}{B(p/2,\beta+1)t^p} \times$$

$$\times \int\limits_0^t u(x,\tau) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)^{p-1} \Big[\tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^\beta\Big] d\tau, \beta \geqslant p-1. \tag{35}$$

Интегрируя по частям в (35) $p-1$ раз, получим:

$$S(x,t,\beta,u) =$$

$$= \frac{2}{B(p/2,\beta+1)t^p} \int\limits_0^t \tau^{p-1}\Big(1-\frac{\tau^2}{t^2}\Big)^\beta \frac{\partial^{p-1}u(x,\tau)}{\partial t^{p-1}} d\tau. \tag{36}$$

Так как для решения задачи Коши (30),(31) очевидно не может быть справедлив критерий стабилизации решения такой же, как для уравнения теплопроводности, то будем изучать не стабилизацию решения (30), (31), а стабилизацию модифицированных средних Рисса (35) по t от решения $u(x,t)$ задачи (30), (31), учитывающих формулу (32).

Теорема 2. Если $\beta \geqslant p-1$ и функции $\varphi_l(x)(l = 0,1,...,p-1)$ в (31) имеют пределы шаровых средних Рисса порядков $\alpha_l \geqslant 0$:

$$\lim_{R\to\infty} S_R^{\alpha_l}\varphi_l(x) = A_l(x), (l = 0,1,...,p-1), \tag{37}$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$.

Тогда решение задачи (30), (31) имеет предел средних типа Рисса (36) по t порядка $\beta \geqslant p-1$ и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} S(x,t,\beta;u) = A_{p-1}(x) \tag{38}$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$, при этом существует предел разности

$$\lim_{t\to\infty}[S(x,t,\beta;u) - u_{p-1}(x,t)] = 0 \tag{39}$$

равномерно по x на компакте K в $\mathbb{E}^N$.

Таким образом, в Теореме 1 установлена степенная оценка разности $u(x,t) - v(x,t,\alpha(t))$, **где** $u(x,t)-$ **решение задачи (16), (17), а** $v(x,t,\alpha(t))-$ **функция (25) при** $\alpha = t^{m+p-1}$**.**

В Теореме 2 получено утверждение о равностабилизации при $t \to +\infty$ **средних типа Рисса по** t **(25) от функции (20) и решения** $u_{p-1}(x,t)$**.**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты диссертационной работы автора являются новыми и состоят в следующем:

- Получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений без младших коэффициентов.
- Впервые также получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ по времени от решения параболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с младшими коэффициентами.
- Получены критерии существования пределов средних по времени и средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ по времени в терминах существования средних по кубам, а также в терминах существования предела средних по шарам равномерно по x во всем пространстве.
- Если выполнены некоторые условия роста и $\alpha(t) = tm + p - 1$ порядок средних, то установлено утверждение о равностабилизации предела разности решения итерированного уравнения и некоторой специально построенной функции при больших значениях времени, равномерно по x на каждом компакте со скоростью не менее, чем $t - m/2$ (т.е. установлена степенная оценка указанной разности).
- Получено утверждение о равностабилизации при больших значениях времени средних типа Рисса по времени от соответствующей функции и построенного решения.

Результаты работы могут быть использованы специалистами, работающими в области качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Благодарности

Автор выражает благодарность своем научным руководителям, доктору физико-математических наук, профессору Шамолину Максиму Владимировичу и кандидату физико-математических наук, доценту Заплетину Максиму Петровичу за постановку задачи, внимание и ценные советы по работе с диссертацией.

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой Общих проблем управления Механико-математического факультета, доктору физико-математических наук, профессору Фурсикову Андрею Владимировичу и всем сотрудникам кафедры за плодотворное обсуждение работы.

Автор также благодарит профессорско-преподавательский состав факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова за полученное математическое образование.

Основные публикации автора по теме диссертации

[1] *Denisov P.V.*, On the Asymptotics of Mean Values of Solutions to the Cauchy problem for a System of Parabolic Equations, J.Math.Sci.(N.Y.),2020, Vol.245,No.4,pp.524-527. (WoS, SJR 0.314);

[2] *Денисов П.В.* О стабилизации средних по времени от решения параболической по И.Г.Петровскому системы уравнений // Дифференциальные уравнения, 2022, т. 58, № 11, с. 1557-1561, DOI: 10.31857/S0374064122110115 (WoS, SJR 0.53);

[3] *Денисов П.В.* О стабилизации средних Рисса по времени решения задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2022, № 2, с. 13-16, DOI: 10.31857/S0374064122110115 (RINC 0.151).