

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Щербаковой Елены Михайловны
на тему: «Матричные и тензорные разложения с условием
неотрицательности и их применение»
по специальности 1.2.2
Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ**

Актуальность диссертационной работы. Во многих приложениях данные, например, сигналы или изображения, подлежащие анализу, являются неотрицательными. В этом случае имеет смысл учитывать это ограничение при построении матричных и тензорных разложений, чтобы извлечь неотрицательные компоненты или факторы, имеющие физический смысл или допускающие разумную интерпретацию. Однако большинство быстрых алгоритмов для разложения матриц и тензоров не гарантируют неотрицательности. Существующие же методы, которые ее учитывают, либо обладают высокой вычислительной сложностью, либо недостаточно хорошо обоснованы теоретически. Это делает важным и актуальным разработку и анализ новых численных методов.

Новизна научной работы. В работе представлены новые эффективные методы для неотрицательной факторизации матриц и тензоров, указаны оценки алгоритмической сложности, приведены теоретические результаты, доказывающие эффективность алгоритмов для ряда задач.

Автор предлагает решение задачи неотрицательной матричной факторизации для сепарабельных матриц и матриц ранга 2, исследует погрешность метода при применении к зашумленным сепарабельным матрицам.

Для неотрицательной факторизации тензоров рассматривается разложение в неотрицательный TT-формат, предложены новые эффективные методы, основанные на идее двухэтапной факторизации, построен алгоритм для динамического подбора рангов разложения. Продемонстрировано, как использование TT-формата дает возможность ускорить построение других

видов неотрицательных тензорных разложений: канонического и разложения Таккера. Автором предложен подход к построению аппроксимации в ТТ-формате с неотрицательными значениями с помощью одноранговых корректировок.

Разработанные методы реализованы программно и протестированы на ряде примеров в сравнении с другими алгоритмами, описано применение модели неотрицательного ТТ при ранжировании узлов многомерного графа. Алгоритмы и подходы, предложенные автором, дают возможность, затрачивая гораздо меньшие ресурсы, работать с данными высокой размерности.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Достоверность результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, а также взаимодополняющими численными экспериментами. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных изданиях, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности, и докладывались на российских и международных конференциях.

Краткое содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и описывается ее общая структура.

В первой главе приводятся методы решения задачи неотрицательной матричной факторизации для неотрицательных сепарабельных матриц (для которых существует конус, натянутый на несколько столбцов исходной матрицы, содержащий все ее столбцы), для неотрицательных сепарабельных матриц с возмущениями и для неотрицательных матриц ранга 2. На практике количество операций и объем памяти, используемый предложенными алгоритмами, линейно зависят от размеров матрицы.

Вторая глава посвящена неотрицательной тензорной факторизации. В первую очередь рассматривается разложение в неотрицательный ТТ-формат

с неотрицательными вагонами, предлагаются два основных подхода к факторизации. Первый схож с ТТ-SVD, где вместо сингулярного разложения применяется метод неотрицательной факторизации матриц, для алгоритма автором выведена оценка точности приближения. Второй основан на идее чередующихся наименьших квадратов, комбинация его с методом DMRG позволяет определять неотрицательные ранги ТТ для большей точности. Предложенный двухшаговый подход и использование быстрых крестовых методов позволяет строить эффективные алгоритмы. Также демонстрируется, как можно использовать ТТ-формат исходного тензора размера n^d для вычисления неотрицательных разложения Таккера и канонического разложения, снижая при этом сложность итерации существующих методов с $O(dRn^d)$, где R – ранг разложения, до линейной зависимости от n . Автор рассматривает задачу построения неотрицательного тензорного произведения, когда снято требование неотрицательности вагонов, и предлагает решать ее с помощью одноранговых правок. Приводится альтернативный подход решения задачи неотрицательной аппроксимации, основанный на идее чередующихся проекций. Теоретические выкладки и численные результаты демонстрируют преимущество в части точности и скорости работы подхода, предложенного Щербаковой Е. М.

В третьей главе исследуется вопрос использования неотрицательного ТТ-разложения в такой прикладной задаче, как ранжирование узлов многомерного графа. Автор приводит оценку погрешности для получающихся векторов влиятельности в зависимости от ошибки аппроксимации.

В четвертой главе представлены результаты численных экспериментов, проведенных с помощью реализованного автором комплекса программ. Подтверждаются теоретические оценки в части точности и вычислительной сложности алгоритмов, проводится сравнение методов друг с другом и с существующими подходами применительно к таким задачам, как сжатие изображений, выявление признаков в данных об отклике мозга, разложение ядер уравнения Смолуховского, ранжирование узлов многомерного графа.

Полученные теоретические результаты и разработанный программный код подходят для работы с большими данными и позволяют существенно расширить круг задач, доступных для изучения методами математического моделирования. В заключении описываются основные результаты работы.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Замечания по диссертационной работе.

1) В Главе 1 упоминаются несколько приложений r -сепарабельных матриц. Применимы ли к ним разрабатываемые алгоритмы или они существенно требуют малых возмущений r -сепарабельных матриц?

2) В работе есть небольшое количество опечаток, а также встречаются неконсистентные обозначения операций. Однако это практически не сказывается на читаемости текста.

3) В секции 2.6 говорится об использовании степенного метода для поиска наименьшего значения тензора. Стоит отметить, что в ряде случаев, например, когда в окрестности наименьшего значения имеются близкие к нему значения, такой подход может требовать значительного количества итераций.

4) В секции 4.4 ранги у разложения с неотрицательными вагонами и неотрицательными значениями аппроксимирующего тензора выбирались одинаковыми, хотя предположительно они могут отличаться для достижения сравнимой точности.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени

кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Щербакова Елена Михайловна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
доцент департамента больших данных и информационного поиска
факультета компьютерных наук ФГАОУ ВО «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

РАХУБА Максим Владимирович

21.03.2025

Контактные данные:

тел.: +7(495)771-32-32, доб. 28116, e-mail: mrakhuba@hse.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена
диссертация:
01.01.07 – Вычислительная математика

Адрес места работы:

109028, Москва, Покровский бульвар, д. 11, ФГАОУ ВО «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет
компьютерных наук,
Тел.: +7(495)771-32-32, доб. 28116; e-mail: mrakhuba@hse.ru

Подпись сотрудника ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» Рахубы М. В. удостоверяю:

21.03.2025