

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертационной работе
Балашовой Дарьи Михайловны
«Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными источниками»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 –
теории вероятностей и математическая статистика

Рассматриваемая диссертация посвящена **современному разделу теории стохастических процессов --- ветвящимися случайным блужданиями** с непрерывным временем. Основным объектом исследования в таких процессах является анализ предельной пространственной структуры популяций и субпопуляций частиц в ветвящемся случайном блуждании по многомерной целочисленной решетке с конечным или бесконечным числом источников ветвления произвольных интенсивностей, расположенных в узлах решетки, и различными начальными распределениями частиц

Представленная работа значительно расширяет круг задач, решенных в теории ветвящихся случайных блужданий (ВСБ). Актуальность тематики подтверждается многочисленными исследованиям в этой области. Во введении к диссертации содержится достаточный полный обзор литературы. В работе Е. Б. Яровой (2012) была предложена модель с конечной дисперсией скачков случайного блуждания и конечным количеством источников трех типов, в некоторых из которых допускается нарушение симметричности блуждания и, тем самым, нарушается самосопряженность эволюционного оператора средних численностей частиц. В работе И. И. Христолюбова и Е. Б. Яровой (2019) исследована модель с источниками генерации частиц различной положительной интенсивности, в которых интенсивность деления частиц превосходит интенсивность гибели. В работе С. Молчанова, Дж. Витмайера (2017) доказано существование устойчивого состояния для критического ветвящегося процесса с делением на двух потомков в каждой точке решетки и

возвратным случайным блужданием, описывающим движение частиц по решетке.

Естественным обобщением перечисленных направлений, предложенным в диссертации Д.М. Балашовой, является рассмотрение ВСБ с нарушением симметрии случайного блуждания в конечном числе точек решетки и знакопеременными интенсивностями источников, а также переход к бесконечному количеству источников на решетке и бесконечному числу начальных частиц. Новым направлением является изучение многотипных ветвящихся случайных блужданий и получение предельных теорем для популяций и субпопуляций частиц различных типов.

В работе получены новые результаты для ВСБ со знакопеременными источниками, а также для ВСБ с бесконечным числом источников в условиях критического и надкритического ветвления в точках решетки. В отличие от предыдущих исследований, в диссертационной работе, по-видимому, впервые рассмотрены многотипные ВСБ. Для них был изучен эффект пространственной кластеризации в том случае, когда в основе процесса лежит возвратное случайное блуждание. Проанализируем более детально структуру и основные результаты диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. **Во введении** приведен краткий исторический обзор по тематике диссертации, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, описана структура и взаимосвязь глав, а также изложены основные результаты. **В первой главе** описывается модель ВСБ со знакопеременными источником ветвления, приводятся основные дифференциальные уравнения. Существование положительного собственного значения эволюционного оператора обеспечивает экспоненциальный рост первого момента полного числа частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке. Такой результат был ранее получен в работе Е.Б. Яровой и И.И. Христолюбова (2019) для конечного числа источников положительной интенсивности. В диссертации проводится обобщение для знакопеременных источников. В случае произвольной конфигурации источников основное внимание уделено анализу

спектральных характеристик оператора, описывающего эволюцию средних чисел частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке. Полученные результаты обеспечивают явные условия для экспоненциального роста числа частиц без каких-либо предположений о дисперсии скачков лежащего в основе случайного блуждания. **Вторая глава** содержит результаты для ВСБ с бесконечным количеством начальных частиц и бесконечным количеством источников с возможностью деления на произвольное число потомков. Для критического ветвящегося процесса в каждой точке решетки, т.е. когда интенсивность гибели частиц равна интенсивности рождения, в случае невозвратного случайного блуждания по решетке доказана сходимость распределения поля частиц к предельному стационарному распределению. **В третьей главе** рассматривается непрерывное по времени симметричное ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с частицами нескольких типов и марковским процессом ветвления в каждой точке решетки. Предполагается, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится по одной частице каждого из типов, в процессе ветвления частица может произвести произвольное число потомков каждого из типов. В случае возвратности случайного блуждания для критического процесса ветвления исследуется эффект пространственной кластеризации популяции частиц. Завершается глава результатами численного моделирования, которые позволяют обнаружить этот эффект при конечном времени. **В заключении** кратко перечислены основные результаты работы.

К достоинствам работы можно отнести использование автором разнообразных методов доказательств как из теории вероятностей и случайных процессов, так и методов теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и спектральной теории; Отдельно хочется отметить отличное владение методами численного моделирования, которое позволило проиллюстрировать наличие критических поверхностей для ВСБ с экспоненциальным ростом численностей частиц по времени в каждой точке в зависимости от струк-

туры дискретного спектра эволюционного оператора. Д.М. Балашовой удалось промоделировать процесс возникновения скоплений частиц (кластеров) с течением времени для невыродившихся субпопуляций при изначально однородной структуре поля частиц при критическом ветвящемся процессе в каждой точке решетки для возвратного случайного блуждания.

Хочу подчеркнуть, что результаты диссертации, выносимые на защиту, **получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств.** Автором доказаны: теорема о собственных значениях эволюционного оператора для ВСБ со знакопеременными источниками ветвления, находящимися в симплициальной конфигурации; теорема об экспоненциальном росте числа частиц без предположений о дисперсии скачков основного случайного блуждания для ВСБ со знакопеременными источниками и псевдо-источниками ветвления; теорема о нерегулярности роста субпопуляций частиц в случае критического закона ветвления в каждой точке решетки с бесконечным числом начальных частиц; теорема о наличии зоны регулярного роста моментов в предположении суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки; теоремы об асимптотике второго условного момента численности субпопуляции в случаях суперэкспоненциально легких и тяжелых хвостов случайного блуждания; теорема об асимптотике численности субпопуляции частиц при условии ее невырождения для многотипного ВСБ с критическим ветвящимся процессом, теорема о нерегулярности предельного поведения поля частиц на одно- и двумерных решетках при условии конечности дисперсии скачков случайного блуждания, лежащего в основе процесса. изучены достаточные условия существования предельного стационарного распределения поля частиц.

В заключение остановимся на 6 работах, в которых опубликовано основное содержание диссертации. ВСБ с нарушением симметрии случай-

ного блуждания в конечном числе точек решетки и знакопеременными интенсивностями источников рассмотрено в статье *E. Yarovaya, D. Balashova, I. Khristolubov. Branching Walks with a Finite Set of Branching Sources and Pseudo-sources. Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. ICSM-5 2020. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 371:144--163, 2021. Для этого случая описаны фазовые переходы в надкритическом ВСБ в статье *Д. М. Балашовой Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными интенсивностями источников ветвления. Фундаментальная и прикладная математика*, 23(1):75--88, 2020. Другим направлением исследований стало ВСБ с бесконечным количеством источников генерации частиц на решетке и бесконечным числом начальных частиц, которое представлено в статье *Yu. Makarova, D. Balashova, S. Molchanov, E. Yarovaya. Branching Random Walks with Two Types of Particles on Multidimensional Lattices. Mathematics*, 10(6):1--46, 2022. Для случая критического ветвящегося процесса в каждой точке решетки при возвратном случайном блуждании и однородных начальных условиях описан эффект кластеризации частиц в работе *D. Balashova, S. Molchanov, E. Yarovaya. Structure of the particle population for a branching random walk with a critical reproduction law. Methodology and Computing in Applied Probability*, 23:85--102, 2021. Структура популяции частиц для ВСБ в однородной среде изучена в работе *Д. М. Балашовой, Е. Б. Яровой. Структура популяции частиц для ветвящегося случайного блуждания в однородной среде. Ветвящиеся процессы и смежные вопросы, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения Андрея Михайловича Зубкова и 70-летию со дня рождения Владимира Алексеевича Ватутина, Труды МИАН*, 316:64--78, 2022. Переход к исследованию многотипных ВСБ и получение предельных теорем для популяций и субпопуляций частиц различных типов является новым направлением в теории стохастических процессов, см. *Д. М. Балашова. Эффект кластеризации для многотипного ветвящегося случайного блуждания. Теория вероятностей и ее применения*, 67:3 (2022), 443--455, 2022.

В автореферате и диссертации для каждой работы с соавторами оценен личный вклад в публикацию Д.М. Балашовой.

Результаты диссертации докладывались на многочисленных российских конгрессах и конференциях, список которых приведен в автореферате и диссертации.

Основные идеи и положения работы изложены в 18 научных работах, в том числе 6 публикациях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Все перечисленные публикации соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. По форме и содержанию автореферат соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а сама работа соответствует специальности 1.1.4 - теория вероятностей и математическая статистика. Таким образом, в диссертационной работе Д. М. Балашовой «Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными источниками» решено несколько актуальных и сложных задач теории стохастических процессов. Эта работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3(01.07).

Профессор кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391403
email: probability@yandex.ru,
сайт <http://new.math.msu.su/department/probab/>)
доктор физико-математических наук, доцент

Е.Б. Яровая

Подпись профессора кафедры теории вероятностей,
доктора физико-математических наук, доцента Е. Б. Яровой удостоверяю
декан механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор

А. И. Шафаревич