МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Дорофеева Александра Владимировна

Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертация подготовлена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	**Королев Виктор Юрьевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Булинский Александр Вадимович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В.Ломоносова», профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета
	Сипин Александр Степанович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», профессор кафедры прикладной математики
	Коссова Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», доцент факультета экономических наук департамента прикладной экономики

Защита диссертации состоится «28» июня 2023 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.3/2517

Автореферат разослан «27» мая 2023 г.

Заместитель председателя
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент И.С. Ломов

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент Н.А. Раутиан

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Сегодня, в эпоху больших данных и стремительно развивающихся компьютерных технологий, существует большое количество задач в различных областях человеческой деятельности, для которых характерно наличие стохастических ситуаций, хорошо описываемых математическими моделями, базирующимися на схемах суммирования. В связи с этим при решении данных задач может возникнуть вопрос об использовании функции распределения суммы независимых случайных величин, вычисление которой в явном виде затруднительно или же вовсе невозможно. Это связно с тем, что операции сложения независимых случайных величин соответствует операция свертки их распределений.

Описанные выше обстоятельства приводят к необходимости использования аппроксимаций функций распределения сумм независимых случайных величин, которые должны быть удобны для практического применения, а также должны обеспечивать хорошую точность. В такой ситуации наиболее популярным подходом является использование асимптотических аппроксимаций, основанных на соответствующих предельных теоремах, самой известной из которых является центральная предельная теорема (ЦПТ), описывающая сближение функции распределения суммы независимых случайных величин с нормальной функцией распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz$, $x \in \mathbb{R}$. Классическая ЦПТ устанавливает, что при некоторых условиях, например, при выполнении условия Линдеберга, распределение суммы независимых случайных величин сходится к нормальному закону при неограниченном возрастании количества слагаемых.

Задача изучения скорости сходимости в ЦПТ имеет богатую историю, и множество именитых ученых внесли свой вклад в ее развитие. В свое время над ней работали А. М. Ляпунов, А. Я. Хинчин, П. Леви, А. Н. Колмогоров, Г. Крамер, С. Н. Бернштейн, Я. Линдеберг, В. Феллер, Б. В. Гнеденко, Ю В. Прохоров, К.-Г. Эссеен, И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, С. В. Нагаев, В. М. Золотарев, В. В. Сазонов, В. В. Петров, Л. В. Осипов, К. Хейди, Х. Правитц, Р. Михель, П. Холл, А. В. Булинский. Такие выдающиеся ученые как А. Н. Колмогоров и Б. В. Гнеденко, В. В. Петров, В. М. Золотарев посвятили этой теме отдельные главы в своих ставших классическими книгах, а В. В. Сенатов, П. Холл, Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао и И. Г. Шевцова — целые монографии. Существенный прогресс достигнут и в распространении оценок на более сложные объекты. В частности, в работах В. В. Сазонова и В. В. Сенатова рассматривался многомерный случай, а А. В. Булинский и его ученики рассматривали оценки скорости сходимости в ЦПТ для векторных случайных полей[1].

В 1901 г. А. М. Ляпунов установил первую оценку скорости сходимости в ЦПТ[2]. Данная оценка была представлена в терминах Ляпуновской дроби

[1] A.Bulinski, N.Kryzhanovskaya. Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization // Probab. and Math. Statist. — 2007. — V. 26. — P. 29-49.

[2] Ляпунов А. М. Новая форма теоремы о пределе вероятности // Записки Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия. — 1901. — Т. 12, № 5. — С. 1–24.

(функции числа слагаемых и их первых моментов). Подобные оценки стали называться моментными, а необходимые условия существования моментов определенных порядков — моментными условиями.

Моментные оценки являются наиболее простыми и удобными оценками точности аппроксимации в ЦПТ, несмотря на то, что они не лишены некоторых недостатков. Например, в них отсутствует информация о близости исходного распределения и предельного закона, поэтому в некоторых случаях такие оценки могут быть достаточно грубыми. Тем не менее, описываемые в литературе альтернативы моментным оценкам, как правило, непросто вычисляются и имеют сложный вид. Этот факт приводит к возникновению трудностей при практическом применении, в то время как моменты случайных величин достаточно просто оценить по выборкам.

Рассмотрим класс функций $\mathcal{G}$, в который входят функции со следующими характеристиками

- функция $g(x)$ четна;
- функция $g(x)$ неотрицательна при всех x и $g(x)>0$ при $x>0$;
- функция $g(x)$ не убывает при $x>0$;
- функция $x/g(x)$ не убывает при $x>0$.

Основными типами моментных условий, при выполнении которых исторически рассматриваются оценки скорости сходимости являются

1. $\mathsf{E}\exp\{a|X_i|\}<\infty,\ a>0,\ i=1,\ldots n,\ n\in\mathbb{N};$
2. $\mathsf{E}|X_i|^3<\infty,\ i=1,\ldots n,\ n\in\mathbb{N};$
3. $\mathsf{E}|X_i|^{2+\delta}<\infty,\ \delta\in(0,1),\ i=1,\ldots n,\ n\in\mathbb{N};$
4. $\mathsf{E}X_i^2 g(X_i)<\infty,\ i=1,\ldots n,\ n\in\mathbb{N};$
5. $\mathsf{E}X_i^2<\infty,\ i=1,\ldots n,\ n\in\mathbb{N}.$

Наибольший прогресс в исследовании оценок скорости сходимости в ЦПТ достигнут при требовании существования третьих абсолютных моментов у слагаемых. Это обстоятельство обусловлено тем, что одна из самых простых и удобных оценок точности нормальной аппроксимации устанавливается неравенством Эссеена, которое справедливо при требованиях типов 2 и 3 (при $\delta=1$ Берри–Эссеена), и доказано что скорость сходимости возрастает с ростом δ лишь до тех пор, пока $\delta\leqslant 1$.

Четвертый класс составляют оценки, для использования которых требуется наличие моментов вида $\mathsf{E}X_i^2 g(X)<\infty$, $g\in\mathcal{G}$. Также рассмотрим подклассы $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1$ класса $\mathcal{G}$.

$\mathcal{G}_0$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x)\in\mathcal{G}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x^2)}{xg(x)}=0.$

$\mathcal{G}_1$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x)\in\mathcal{G}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{g(x)}=\infty.$

Так, например, В. В. Петровым и Л. В. Розовским были рассмотрены оценки при выполнении условий вида $\mathsf{E}X_i^2 g(X) < \infty$, $g \in \mathcal{G}_0$, и $\mathsf{E}X_i^2 g(X) < \infty$, $g \in \mathcal{G}_1$.

Требования третьего и четвертого типов являются промежуточными между требованиями наличия вторых и третьих моментов, причем требования четвертого типа обобщают условия третьего типа на функции, возрастающие медленнее степенных.

Оценки скорости сходимости, которые получаются при требовании наличия нескольких первых моментов слагаемых, принято называть оценками скорости сходимости при ослабленных моментных условиях. Так, например, требования 1–5 есть не что иное, как ослабленные моментные условия.

Очевидно, более удобными, с практической точки зрения, будут оценки, справедливые при минимальных моментных условиях. Тем не менее, важно подчеркнуть, что требование наличия абсолютного второго момента нельзя ослабить, поскольку это приведет к невыполнению условия Линдеберга, критерия сходимости в ЦПТ.

Важным примером случаев, когда оценки скорости сходимости при ослабленных моментных условиях 2–5 типов особенно полезны, являются ситуации, в которых распределения слагаемых имеют тяжелые хвосты. Примерами могут служить распределения Стьюдента и Парето. Именно распределения с тяжелыми хвостами часто встречаются в задачах физики, геологии, страхования, в задачах анализа финансовых и экономических данных, поскольку они хорошо описывают ситуации, когда нельзя пренебрегать редкими, но важными событиями, такими как землетрясения, аварии, различного рода сбои функционирования систем и т.д. Задачи, рассматриваемые в работе, соответствуют ситуациям, когда хвосты могут быть довольно тяжелыми при условии адекватности нормальной аппроксимации.

Также важно подчеркнуть, что при построении математических моделей порой приходится иметь дело со случайным числом факторов, что делает задачу об аппроксимации функций распределения случайных сумм особенно актуальной. Всюду далее под случайной суммой независимых случайных величин будет подразумеваться сумма, в которой число слагаемых есть ни что иное, как случайная величина. Суммы независимых случайных величин с детерминированным числом слагаемых $n \in \mathbb{N}$ будут называться неслучайными суммами или же просто суммами независимых случайных величин.

Пуассон-биномиальные, биномиальные и смешанные пуассоновские (особенно геометрические) случайные суммы используются в теории страхования (динамические и статические модели коллективного риска[3], представление Беекмана–Поллачека–Хинчина для вероятности разорения в рамках классического процесса риска), в финансовой математике при описании остановленных

[3] Cramér H. On the Mathematical Theory of Risk // Skandia Jubilee Volume. — Stockholm Centraltryckeriet. — 1930.
Reprinted in: Cramer H. // Collective Works. — Berlin. — Springer-Verlag. — 1994. — P. 601–607.

случайных блужданий (модель Кокса–Росса–Рубинштейна[4]), теории надежности (моделирование редких событий[5]) и т.д.

При решении практических задач зачастую пренебрегают проверкой условий применимости нормальной аппроксимации, из-за чего становится важным вопрос, какой может быть реальная точность нормальной аппроксимации, когда теоретически она не применима, но используется в практических вычислениях. В работе также рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости.

Более того, иногда стоит задача получить числовые характеристики распределения какой-либо случайной величины. Так, например, традиционной мерой разброса является дисперсия, представляющая собой число, однако в дисперсии отсутсвует информация о том, какие отклонения от ожидаемого значения случайной величины являются наиболее вероятными. Данная информация содержится в функциях концентрации.

В работе рассмотрены оценки точности приближения функций концентрации некоторых случайных и неслучайных сумм независимых случайных величин функцией распределения полунормального закона или его смесей.

Степень разработанности темы. Получение оценок точности нормальной аппроксимации является фундаментальной задачей теории вероятностей, имеющей богатую историю, часть которой будет рассмотрена далее.

Пусть всюду далее $X_1,X_2,\ldots$ — независимые случайные величины, причем $\mathsf{E}X_i = a_i$ и $0 < \mathsf{D}X_i^2 \equiv \sigma_i^2 < \infty$, $i = 1,2,\ldots$ Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. $\Phi(x)$, как и ранее, — стандартная нормальная функция распределения, также

$$\Delta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n - \mathsf{E}S_n < xB_n) - \Phi(x)|.$$

Пусть $\mathcal{G}$ — класс вещественных функций $g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, определенный выше.

В 1963 г. М. Кац доказал[6], что для любой функции $g \in \mathcal{G}$, если случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ одинаково распределены, а $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, то существует конечная положительная абсолютная константа C_1 такая, что

$$\Delta_n \leqslant C_1 \cdot \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma_1^2 g\big(\sigma_1\sqrt{n}\big)}. \tag{1}$$

В 1965 г. результат (1) был обобщен В. В. Петровым[7] на случай не обязательно одинаково распределенных случайных величин. Он показал, что какой бы ни была функции $g \in \mathcal{G}$, если $\mathsf{E}X_i^2 g(X_i) < \infty$, $i = 1,\ldots n$, то существует

[4]Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach // Journal of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7. — P. 229–263.

[5]Kalashnikov V. V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. — 1997.

[6]Katz M. Note on the Berry–Esseen theorem // Annals of Math. Statist. — 1963. — Vol. 39. — № 4. — P. 1348–1349.

[7]Петров В. В. Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 160. — Вып.5. — С. 1013–1015.

конечная положительная абсолютная постоянная C_2 такая, что

$$\Delta_n \leqslant \frac{C_2}{B_n^2 g(B_n)} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E} X_i^2 g(X_i). \tag{2}$$

Всюду далее символ $\mathbb{I}(A)$ будет обозначать индикаторную функцию события A. Для $\varepsilon \in (0,\infty)$ обозначим

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| \geqslant \varepsilon B_n), \quad M_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E} |X_i|^3 \mathbb{I}(|X_i| < \varepsilon B_n).$$

В 1966 г. Л. В. Осипов доказал[8], что существует такая конечная положительная абсолютная постоянная C_3, что для любого $\varepsilon \in (0,\infty)$

$$\Delta_n \leqslant C_3 \big[L_n(\varepsilon) + M_n(\varepsilon)\big]. \tag{3}$$

Частным случаем (3) является неравенство

$$\Delta_n \leqslant C_3' \big[L_n(1) + M_n(1)\big]. \tag{4}$$

В работе В. В. Петрова показано[9], что $C_3 \leqslant 2C_3'$.

Для одинаково распределенных случайных величин неравенство (4) имеет вид

$$\Delta_n \leqslant \frac{C_4}{\sigma_1^3 \sqrt{n}} \mathsf{E} X_1^2 \min\big\{\sigma_1 \sqrt{n}, |X_1|\big\}. \tag{5}$$

В 1968 г. неравенство (3) было обобщено В. Феллером[10]. При помощи метода характеристических функций было показано, что $C_3 \leqslant 6$.

В работах Л. Падитца[11,12] была опубликована оценка константы $C_4 < 4.77$. Позднее, в 1986 г., он же уточнил[13] данную оценку и показал, что $C_4 < 3.51$.

А. Барбур и П. Холл в 1984 г. доказали[14], ссылаясь на упомянутый выше результат Феллера, неравенство (4) методом Стейна и представили оценку $C_3' \leqslant 22$.

В 2001 г. Л. Чен и К. Шао опубликовали работу[15], не содержащую ссылок на упомянутые выше результаты Л. Падитца, в которой при помощи метода Стейна было доказано, что неравенство (4) справедливо с константой $C_3' = 4.1$.

---

[8] Осипов Л. В. Уточнение теоремы Линдеберга // Теория вероятностей и ее применения. — 1966. — Т. 11. — Вып. 2. — С. 39–342.

[9] Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. — Москва: Наука, 1972. — 416 с.

[10] Feller W. On the Berry–Esseen theorem // Z. Wahrsch. — Verw. Geb. — 1968. — Bd. 10. — S. 261–268.

[11] Paditz L. Bemerkungen zu einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List». — 1980. — Bd. 27. — № 4. — S. 829–837.

[12] Paditz L. On error-estimates in the central limit theorem for generalized linear discounting // Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statistics. — 1984. — Bd. 15. — № 4. — S. 601–610.

[13] Paditz L. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List». — 1986. — Vol. 33. — № 2. — P. 399–404.

[14] Barbour A. D., Hall P. Stein's method and the Berry – Esseen theorem // Australian Journal of Statistics. — 1984. — Vol. 26. — P. 8–15.

[15] Chen L. H. Y., Shao Q. M. A non-uniform Berry–Esseen bound via Stein's method // Probability Theory and Related Fields. — 2001. — Vol. — 120. — P. 236–254.

В 2011 г. В. Ю. Королев и С. В. Попов показали[16], что существуют универсальные константы C_1 и C_2, не зависящие от конкретного вида функции $g\in\mathcal{G}$, такие, что неравенства (1), (2), (4) и (5) справедливы соответственно с $C_1=C_4\leqslant 3.0466$ и $C_2=C_3'\leqslant 3.1905$. Этот результат затем был уточнен теми же авторами[17], было показано, что $C_1=C_2=C_4=C_3'\leqslant 2.011$.

В упомянутой выше работе также представлены нижние оценки констант C_1 и C_2. А именно, пусть g – произвольная функция из класса $\mathcal{G}$. Пусть также $\mathcal{H}_g$ – множество всех случайных величин X, для которых выполнено условие $\mathsf{E}X^2g(X)<\infty$. Было показано, что справедливо неравенство

$$C^*\equiv\sup_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\substack{X_i\in\mathcal{H}_g,\\ i=1,\ldots,n}}\frac{\Delta_nB_n^2g(B_n)}{\sum_{i=1}^n\mathsf{E}X_i^2g(X_i)}\geqslant\sup_{z>0}\left|\frac{1}{1+z^2}-\Phi(-z)\right|=0.54093\ldots$$

Несложно видеть, что C^* – это наименьшее возможное значение абсолютной константы C_2, гарантирующее справедливость неравенства (2) сразу для всех функций $g\in\mathcal{G}$.

Из неравенства (3) вытекает, что для любого $\varepsilon\in(0,\infty)$

$$\Delta_n\leqslant C_3\bigl(\varepsilon+L_n(\varepsilon)\bigr). \tag{6}$$

Таким образом, оценка (6) связывает скорость сходимости с критерием сходимости (условием Линдеберга), и ее правая и левая части стремятся или не стремятся к нулю одновременно. По терминологии В. М. Золотарева[18], данная оценка называется естественной.

Приведенные выше оценки скорости сходимости распределений сумм независимых случайных величин в ЦПТ равномерны по x. Однако в силу того, что предельная и аппроксимируемая функции являются функциями распределения, должно выполняться соотношение $\Delta_n(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ при каждом фиксированном n. Это обстоятельство не отражается в равномерных оценках. Тем не менее, точность нормальной аппроксимации для функций распределения сумм независимых случайных величин при больших значениях аргумента представляет большой интерес, и в данном случае полезными оказываются неравномерные оценки скорости сходимости.

Задачу зависимости остаточного члена в ЦПТ от x рассматривал еще в 1938 г. Г. Крамер[19] для распределений с экспоненциально убывающими хвостами ($\mathsf{E}\exp\{a|X_i|\}<\infty$ для некоторого $a>0$).

[16]Korolev V., Popov S. On the universal constant in the Katz–Petrov and Osipov inequalities // Discussiones Mathematicae. Probability and Statistics. — 2011. — Vol. 31. — P. 29–39.

[17]Королев В. Ю., Попов С. В. Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго // Теория вероятностей и ее применения. — 2011. — Т. 56. — Вып. 4. — С. 797–805.

[18]Zolotarev V. M. Modern Theory of Summation of Random Variables. Utrecht: VSP, 1997.

[19]Cramér H. Sur un nouveau théorèm-limite de la théorie des probabilités // Actualités scientifiques et industrielles. — Paris. — 1938. — № 736.

Пусть далее $\mathsf{E}|X_i - a_i|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta,i} < \infty$, $\mathsf{E}X_i = a_i$, $\delta \in (0;1]$, $i \in \mathbb{N}$. Также обозначим

$$l_{2+\delta,n} = \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \beta_{2+\delta,i},$$

$l_{2+\delta,n}$ — это так называемая ляпуновская дробь.

Первая неравномерная оценка скорости сходимости в ЦПТ для одинаково распределенных случайных величин с существующим третьим абсолютным центральным моментом была получена К.–Г. Эссееном[20] в 1945 г.

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{C_5(\beta_{3,1})}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\ln(2+|x|)}{1+|x|^3},$$

где $C_5(\beta_{3,1})$ – постоянная, зависящая только от $\beta_{3,1}$.

С. В. Нагаевым[21] и А. Бикялисом[22] были получены неравенства для случая одинаково распределенных случайных величин и $\delta = 1$ и для случая необязательно одинаково распределенных случайных величин и $0 < \delta \leqslant 1$ соответственно. Было показано, что существуют такие положительные конечные числа $C(\delta)$, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(1+|x|^{2+\delta}\right) \Delta_n(x) \leqslant C(\delta) l_{2+\delta,n}. \tag{7}$$

Вопрос точности устанавливаемого оценкой (7) порядка по n и x изучался также в работах Р. Михеля, Т. Накаты, Л. В. Осипова, В. В. Петрова, Л. В. Розовского, К. Хейди.

Первым верхние оценки для $C(\delta)$ для разнораспределенных случайных величин в серии своих работ получил Л. Падитц[23,24,25,26]. Первая работа из данного цикла содержала оценку для $C(1) > 1955$. Затем были приведены численные оценки для $C(\delta)$ при $0.1 \leqslant \delta \leqslant 0.9$, и было показано, что $C(\delta) \leqslant 820.4$. Затем было показано, что $C(1) \leqslant 114.7$.

[20] Esseen C. G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace – Gaussian law // Acta Math. — 1945. — Vol. 77. — P. 1–125.

[21] Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. — 1965. — Т. 10. — Вып. 2. — С. 231–254.

[22] Бикялис А. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме – Литовский математический сборник. — 1966. — Т. 6. — Вып. 3. — С. 323–34.

[23] Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. der TU Dresden. — 1976. — Vol. 25. — P. 1169–1177.

[24] Paditz L. Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung: Dissertation A. Technische Universität Dresden. — Dresden, 1977.

[25] Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente // Math. Nachr. — 1978. — Vol. 82. — P. 131–156.

[26] Paditz L. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. der TU Dresden. — 1979. — Vol. 28. — № 5. — P. 1197–1200.

Наилучшая оценка $C(1) \leqslant 18.12$ для случая одинаково распределенных случайных величин была получена в 2012 г. Ю. С. Нефедовой и И. Г. Шевцовой[27]. В то же время наилучшая оценка для случая разнораспределенных случайных величин $C(1) \leqslant 22.25$ была получена М. Е. Григорьевой и С. В Поповым[28].

Также для случая $\delta = 0$ в 1979 г. В. В. Петров показал[29], что при выполнении условия существования вторых моментов существует конечная положительная постоянная C_6 такая, что

$$\Delta_n(x) \leqslant C_6 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}\big(|X_i| \geq (1+|x|)B_n\big)}{(1+|x|)^2 B_n^2} + \frac{\mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+|x|)B_n\big)}{(1+|x|)^3 B_n^3} \right\}.$$

Верхним оценкам константы C_6 свои работы посвятили многие исследователи. В работе С. В. Попова[30] представлены наилучшие известные в настоящий момент оценки $C_6 \leqslant 47.62$ в общем случае и $C_6 \leqslant 39.25$ в случае одинаково распределенных случайных величин.

В 1979 г. В. В. Петров также доказал[31] неравномерный аналог неравенства (1)

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{C_7}{B_n^2 (1+|x|)^2 g\big(B_n(1+|x|)\big)} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E} X_k^2 g(X_k).$$

В 1967 г. в статье Л. В. Осипова и В. В. Петрова было доказано[32], что если $\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta \in (0,1)$, то

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{Q\big(\sqrt{n}(1+|x|)\big)}{n^{\delta/2}(1+|x|)^{2+\delta}},$$

где $Q(y)$ – ограниченная функция, такая что $Q(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Позднее в работе В. В. Петрова[33] указанная выше оценка была обобщена. А именно, был рассмотрен уже упомянутый ранее класс $\mathcal{G}_0$, и было показано, что если $\mathsf{E} X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции $g(x) \in \mathcal{G}_0$, то существует ограниченная функция $Q(y)$ такая, что $Q(y) \to 0$ при $y \to \infty$, и

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{Q\big(\sqrt{n}(1+|x|)\big)}{(1+|x|)^2 g\big(\sigma\sqrt{n}(1+|x|)\big)} \tag{8}$$

---

[27] Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятностей и ее применения. — 2012. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 62–97.

[28] Григорьева М. Е., Попов С. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Системы и средства информатики. — 2012. — Т. 22. — № 1. — С. 180–204.

[29] Петров В. В. Одна предельная теорема для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1979. — Т. 85. — С. 188–192.

[30] Попов С. В. Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме при ослабленных моментных условиях: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. — Москва, 2011.

[31] См. сноску 28 выше.

[32] Осипов Л. В., Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме – Теория вероятностей и ее применения. — 1967. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 322–329.

[33] Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — Т. 341. — С. 142–146.

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Неравенство (8) было уточнено Л. В. Розовским[34]. Он показал, что оно справедливо для функций из более широкого класса, нежели $\mathcal{G}_0$. А именно для $g \in \mathcal{G}_1$, где $\mathcal{G}_1$ – класс, содержащий функции $g(x)$, также определенный выше.

Также рассмотрим короткую историю развития оценок функций концентрации. Данное понятие было введено П. Леви[35] в 1937 г.

$$Q_\xi(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathsf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x+z),\ z \geqslant 0.$$

Оценки скорости убывания функций концентрации сумм независимых случайных величин с ростом числа слагаемых рассматривались достаточно давно, например, в работе В. В. Петрова[36], однако они не учитывали изменения формы функций концентрации. Впервые оценки функций концентрации, описывающие асимптотические изменения их формы, были получены В. Е. Бенингом, Н. К. Галиевой, В. Ю. Королевым[37]. В вышеуказанной работе результаты получены при предположении о существовании третьих абсолютных моментов у слагаемых.

Целью диссертационной работы является уточнение существующих и получение новых оценок скорости сходимости в ЦПТ и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях, а также изучение точности нормальной аппроксимации в случае, когда она не применима.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих **задач:**

1) уточнение равномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ для неслучайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях;
2) перенесение полученных в п.1 результатов на некоторые случайные суммы;
3) уточнение неравномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при ослабленных моментных условиях;
4) пренесение полученных в п.3 результатов на некоторые случайные суммы;
5) получение оценок точности аппроксимации функций концентрации как неслучайных, так и некоторых случайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях;
6) рассмотрение оценок точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима.

Научная новизна диссертационной работы заключается в:

- уточнении как равномерных, так и неравномерных оценок точности нормальной аппроксимации распределений сумм независимых (одинаково

[34]Розовский Л. В. Неравномерная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — Т. 351. — С. 238–241.

[35]Lévy P. Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires. – Paris: Gauthier-Villars, 1937.

[36]Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Москва: Наука, 1987.

[37]Бенинг В. Е., Галиева Н. К., Королев В. Ю. Об оценках функций концентрации регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема // Информатика и ее применения. — 2013. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 116–123.

распределенных для неравномерных оценок) случайных величин при ослабленных моментных условиях за счет актуализации констант в промежуточных неравенствах и улучшения промежуточных результатов;

- переносе полученных равномерных и неравномерных оценок на некоторые случайные суммы;
- получении равномерных оценок точности аппроксимации функций концентрации как неслучайных, так и некоторых случайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях;
- получении оценок точности нормальной аппроксимации в случае, когда ее применение некорректно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертационной работы имеют теоретическую значимость и допускают применение при решении практических задач в одной из самых перспективных областей прикладных наук – анализе данных. Задача аппроксимации как случайных, так и неслучайных сумм независимых случайных величин актуальна для финансовой математики, клиентской аналитики, физики, геологии и т.д. Также важно отметить, что полученные оценки справедливы в задачах, когда хвосты могут быть сколь угодно тяжелыми при условии адекватности нормальной аппроксимации. Также известно, что при решении практических задач зачастую пренебрегают проверками условий, в которых справедлива нормальная аппроксимация. Результаты работы позволяют оценить адекватность применения нормальной аппроксимации в случаях, когда ее использование, вообще говоря, некорректно. Более того, в работе особое внимание уделено оценкам функций концентрации сумм независимых случайных величин. Функции концентрации, в свою очередь, могут применяться в качестве информативной характеристики волатильности и дают возможность напрямую сравнить информативность функций концентрации и дисперсии как мер разброса.

Методология и методы исследования. При получении основных результатов диссертационной работы применялись классические методы математического анализа и теории вероятностей, например, метод характеристических функций. В части промежуточных результатов улучшения удалось достичь посредством актуализации констант в неравенстве Берри–Эссеена или с помощью получения более точных новых неравенств.

Численные расчеты были проведены на языках программирования R и Python.

Положения, выносимые на защиту:

1. Улучшены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Оценки констант выписаны в явном виде: $C \leqslant 1.8627$ в случае независимых случайных величин, $C \leqslant 1.8546$ в случае независимых одинаково распределенных случайных величин, $C \leqslant 1.5769$ в случае независимых симметричных случайных величин, $C \leqslant 1.5645$ в случае независимых симметричных одинаково распределенных случайных величин.

2. Получены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм: пуассон-биномиальных, биномиальных, пуассоновских случайных сумм.
3. Получены равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответствующим предельным законам при ослабленных моментных условиях: общий случай, случай сходимости распределений геометрических случайных сумм к распределению Лапласа, случай сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм к дисперсионному гамма-распределению, случай сходимости распределений зихелевых случайных сумм к распределению Стьюдента.
4. Улучшены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что константы в данных оценках не превосходят 37.9.
5. Получены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм: биномиальных случайных сумм, пуассоновских случайных сумм.
6. Получены равномерные оценки отклонений функций концентрации сумм независимых случайных величин от функции распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях.
7. Получены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации некоторых случайных сумм функцией распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях: пуассон-биномиальных случайных сумм, биномиальных случайных сумм, пуассоновских случайных сумм.
8. Получены равномерные оценки скорости сходимости функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм к соответсвующим предельным законам при ослабленных моментных условиях: общий случай, случай сходимости функций концентрации геометрических случайных сумм к экспоненциальному распределению, случай сходимости функций концентрации отрицательных биномиальных случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей симметричное дисперсионное гамма-распределение, случай сходимости функций концентрации зихелевых случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей распределение Стьюдента.
9. Рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима.

Личный вклад автора заключается в выполнении теоретических исследований и численных расчетов, в то время как вклад научного руководителя заключается в постановке задач и общем подходе к их решению. Полученные результаты диссертационной работы были представлены автором в виде научных публикаций и докладывались на научных конференциях, семинарах и рабочих столах. Подготовка части материалов к публикациям проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты работы докладывались:

- на конференции «Ломоносов – 2015», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 13 – 17 апреля 2015;
- на конференции «Тихоновские чтения – 2015», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 26 октября – 2 ноября 2015;
- на конференции «Задачи современной информатики – 2015», Институт проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН), Москва, Россия, 29 – 30 октября 2015;
- на 4 международном воркшопе «Analysis, Geometry and Probability», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 28 сентября – 2 октября 2016;
- на XXXVI Международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей, Петрозаводск, Карелия, Россия, 21 – 25 июня 2021;
- неоднократно на научно-исследовательском семинаре «Теория риска и смежные вопросы», кафедра математической статистики, факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ имени М. В. Ломоносова.

По итогам конференций были выполнены публикации в сборниках тезисов.

Публикации. Основные результаты работы представлены в 9 статьях [1]–[9], из них 5 — в рецензируемых научных изданиях. Статья [2] имеет две версии: на русском и английском языках. Статьи [1], [2] (на английском языке) и [5] опубликованы (в соавторстве) в научных журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus, статьи [3] и [4] (в соавторстве) — в изданиях, входящих в базы Scopus и RSCI, а работа [2] (на русском языке) опубликована (в соавторстве) в журнале, входящем в базу RSCI. Список статей приведен в конце автореферата и диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка терминов и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 103 страницы. Список литературы содержит 81 наименование.

Основное содержание работы

Во **введении** описывается область исследования, ставятся цели и задачи, обосновываются научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, описываются методология и методы исследования, перечисляются положения, выносимые на защиту, а также рассказывается о личном вкладе автора и апробации результатов работы.

Первая глава посвящена уточнению равномерных оценок скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Первыми рассматриваются оценки точности нормальной аппроксимации. Сначала излагаются вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов. Затем приводятся основные результаты для неслучайных сумм независимых случайных величин и рассматриваются частные случаи: независимые одинаково распределенные случайные величины, независимые симметричные случайные величины, независимые симметричные одинаково распределенные случайные величины. Оценки констант для каждого случая представляются в явном виде. Далее описываются равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для пуассон-биномиальных, биномиальных и пуассоновских случайных сумм. Затем излагаются равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответствующим предельным законам. Рассматривается как общий случай, так и случаи геометрических, отрицательных биномиальных и зихелевых случайных сумм. Результаты данной главы опубликованы в статьях [1]–[3].

Основным результатом данной части работы является

Теорема 1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, *случайные величины* $X_1,\ldots,X_n$ *независимы,* $\mathsf{E}X_i=0$ *и* $0<\mathsf{E}X_i^2<\infty$, $i=1,\ldots,n$. *Пусть* $\gamma=M_n(1)/L_n(1)$. *Тогда существует зависящее только от* γ *положительное конечное число* $C_8(\gamma)$ *такое, что*

$$\Delta_n\leqslant(1+\gamma)C_8(\gamma)L_n(1).$$

При этом для $\max\limits_{\gamma\geqslant0}C_8(\gamma)\leqslant1.8627$.

При этом справедливо

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 неравенства* (2)–(4) *имеют место с* $C_2=C_3=C_3'\leqslant1.8627$.

Доказательства остальных утверждений базируются на данной теореме, следствии из нее и вспомогательных утверждениях или же имеют аналогичный подход к доказательству. Далее рассмотрим результаты для пуассон-биномиальных случайных сумм.

Пусть $X_1,X_2,\ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_i=0$ и $0<\mathsf{E}X_i^2\equiv\sigma^2<\infty$, пусть также $p_j\in(0,1]$ — произвольные числа, $j=1,2,\ldots$, а для $n\in\mathbb{N}$ введем число $\theta_n=p_1+\ldots+p_n$ и вектор $\boldsymbol{p}_n=(p_1,\ldots,p_n)$.

Пуассон-биномиальным распределением с параметрами n; $\boldsymbol{p}_n$ будем называть распределение случайной величины

$$N_{n,\boldsymbol{p}_n}=\xi_1+\ldots+\xi_n,$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые случайные величины такие, что

$$\xi_j=\begin{cases}1 & \text{с вероятностью } p_j,\\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p_j,\end{cases}\quad j=1,\ldots,n.$$

Пусть также при каждом $n\in\mathbb{N}$ случайные величины $N_{n,\boldsymbol{p}_n},X_1,X_2,\ldots$ независимы в совокупности. Определим пуассон-биномиальную случайную сумму

$$S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}=X_1+\ldots+X_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}.$$

При этом, если $N_{n,\boldsymbol{p}_n}=0$, то $S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}=0$.

Имеют место следующие утверждения

Теорема 2. *При любых* $n\in\mathbb{N}$ *и* $p_j\in(0,1]$, $j\in\mathbb{N}$

$$\Delta_{n,\mathbf{p}_n}\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(S_{N_{n,\mathbf{p}_n}}<x\sigma\sqrt{\theta_n}\right)-\Phi(x)\right|\leqslant\frac{1.8627}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\mathsf{E}X_1^2\min\left\{\sigma\sqrt{\theta_n},|X_1|\right\}.$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2, какой бы ни была функция $g\in\mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2g(X_1)<\infty$, справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,\mathbf{p}_n}\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\mathsf{P}\big(S_{N_{n,\mathbf{p}_n}}<x\sigma\sqrt{\theta_n}\big)-\Phi(x)\Big|\leqslant 1.8627\frac{\mathsf{E}X_1^2g(X_1)}{\sigma^2g(\sigma\sqrt{\theta_n})}.$$

В диссертации использован подход, основанный на переносе результатов, справедливых для сумм неслучайного числа независимых случайных величин, на пуассон-биномиальные случайные суммы, с пуассон-биномиальных случайных сумм — на биномиальные случайные суммы, с биномиальных — на пуассоновские, а с пуассоновских — на смешанные пуассоновские случайные суммы.

Приведем результаты для смешанных пуассоновских случайных сумм.

Введем «бесконечно большой» параметр $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим случайную величину $N_n^\star$, такую что для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star=k)=\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}d\mathsf{P}(\Lambda_n<\lambda),\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

для некоторой положительной случайной величины Λ_n.

Пусть для любого $n\in\mathbb{N}$ случайные величины $N_n^\star$ и $X_1,X_2,\ldots$ независимы в совокупности. Как и ранее, пусть $S_{N_n^\star}=X_1+\ldots+X_{N_n^\star}$, и если $N_n^\star=0$, то полагаем $S_{N_n^\star}=0$.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 4. *Если $\mathsf{E}\Lambda_n<\infty$, то*

$$\Delta_n^\star\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\big(S_{N_n^\star}<x\sigma\sqrt{\mathsf{E}\Lambda_n}\big)-\int_0^\infty\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big)d\mathsf{P}\big(\Lambda_n<\lambda\mathsf{E}\Lambda_n\big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1.8546}{\sigma^2}\left[\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)+\mathsf{E}\frac{|X_1|^3}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\big(|X_1|<\sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)\right],$$

где случаный величины X_1 and Λ_n предполагаются независимыми.

<u>Вторая глава</u> посвящена неравномерным оценкам скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В начале главы так же представлены вспомогательные утверждения, а затем приводятся основные результаты. Верхняя оценка константы выписана в явном виде. Также в данной главе описаны неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для биномиальных и пуассоновских случайных сумм. Результаты данной главы опубликованы в статьях [5]–[7].

Основным результатом данной главы является

Теорема 5. *Пусть $X_1,X_2,\ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_i=0$ и $0<\mathsf{E}X_i^2\equiv\sigma^2<\infty,i\in\mathbb{N}$. Для любого $x\geqslant0$ имеет место неравенство*

$$\Delta_n(x)\leqslant C_9(x)\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}+C_{10}(x)\frac{M_n(1+x)}{(1+x)^3},$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — положительные ограниченные функции, для которых справедлива каждая из следующих оценок

1°.

$$C_9(x)\leqslant 1.8546(1+x)^2;\quad C_{10}(x)\leqslant 1.8546(1+x)^3.$$

2°. *Если $L_n(1+x)\leqslant A$ для некоторого $A\in(0,\frac{1}{2})$, то для любого $q\in[0,1]$*

$$(a)\quad C_9(x)\leqslant\frac{4\cdot 0.469q(1+x)}{(1-2A)^{3/2}}+D(x,A)+1;$$

$$C_{10}(x)\leqslant\frac{0.469(K+q-Kq)(1+x)^3}{(1-2A)^{3/2}};$$

$$(b)\quad C_9(x)\leqslant\frac{4\cdot C^{**}(x)s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}(1+x)^2}+D(x,A)+1;$$

$$C_{10}(x)\leqslant\frac{C^{**}(x)s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}};$$

где

$$D(x,A)=x(1+x)^2e^{-x^2/2}\frac{B(A)e^A}{\sqrt{2\pi}}+(1+x)e^{-x^2/2}\frac{\big(1+AB(A)\big)e^A}{\sqrt{2\pi}},$$

$$B(A)=\frac{2}{(1+\sqrt{1-2A})\sqrt{1-2A}},s(x;A)=\frac{(1+x)^3}{1+\left(x-\frac{A}{1+x}\right)^3},$$

$$C^{**}(x)=\begin{cases}17.369, & \text{если } x\geqslant 0;\\ 15.049, & \text{если } x\geqslant 4;\\ 12.029, & \text{если } x\geqslant 5;\\ 6.319, & \text{если } x\geqslant 10.\end{cases}$$

3°. *Если $L_n(1+x)\geqslant A$ для некоторого $A\in(0,\frac{1}{2})$, то*

$$(a)\quad C_9(x)\leqslant\frac{0.541}{A}\cdot(1+x)^2;\quad C_{10}(x)=0;$$

$$(b)\quad C_9(x)\leqslant 1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^4(1+x)^2}+\left[\frac{1}{x^4}+\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\right]\cdot\frac{(1+x)^2}{A};$$

$$C_{10}(x)\leqslant\frac{(1+x)^4}{x^4}+\frac{(1+x)^2}{x^4}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 5 для любого $x\geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\Delta_n(x)\leqslant C_0(x)\left(\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}+\frac{M_n(1+x)}{(1+x)^3}\right),$$

где

$$C_0(x)=max\{C_9(x),C_{10}(x)\}.$$

Численная оптимизация на языке R позволяет получить оценку $C_0(x)\leqslant 37.9$.

На базе данных утверждений доказываются теоремы для упомянутых выше случайных сумм. Рассмотрим результаты, полученные для пуассоновских случайных сумм.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_i = 0$ и $0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma^2 < \infty$. Для $\lambda > 0$ пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму

$$S_{N_\lambda} = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}.$$

Если $N_\lambda = 0$, то полагаем $S_{N_\lambda} = 0$.

Имеют место следующие утверждения

Теорема 6. *Для любых $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2} \cdot \mathsf{E}X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)}\right\}.$$

Теорема 7. *Предположим, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции $g \in \mathcal{G}$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{37.9\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}.$$

Также были получены следующие результаты с участием функций из специальных подкалассов $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1$ класса $\mathcal{G}$.

Теорема 8. *Предположим, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции $g \in \mathcal{G}_0$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{Q\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)},$$

где $Q(y) = 37.9[Q_1(y) + Q_2(y) + Q_3(y)]$, $Q_1(y) = \mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}(|X_1| \geqslant y)$, $Q_2(y) = \mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| > \sqrt{y}\big)$, $Q_3(y) = \frac{g(y^2)\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{y g(y)}$.

При этом $\lim_{y\to\infty} Q(y) = 0$.

Теорема 9. *Предположим, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции $g \in \mathcal{G}_1$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{Q^*\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)},$$

где

$$Q^*(y) = 37.9 g(y)\mathsf{E}\left[X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{y}\right\}\right].$$

При этом $\lim_{y\to\infty} Q^*(y) = 0$.

Аналогичные утверждения получены для биномиальных случайных сумм.

В **третьей главе** представлены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Сначала рассматриваются оценки отклонений функций концентрации сумм независимых случайных величин от функции распределения полунормального закона. Далее представлены оценки точности аппроксимации функций концентрации пуассон-биномиальных, биномиальных и пуассоновских случайных сумм от функции распределения полунормального закона. Затем рассматриваются оценки точности аппроксимации функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм соответствующими предельными законами. Рассмотрен не только общий случай, но и случаи геометрических, отрицательных биномиальных и зихелевых случайных сумм. Результаты данной главы опубликованы в статье [4].

Обозначим функцию распределения полунормального закона $\Phi_0(x)$

$$\Phi_0(x)=\begin{cases}2\Phi(x)-1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

и рассмотрим основные результаты данной главы.

Теорема 10. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ и для любого $\varepsilon>0$ справедливо следующее неравенство*

$$\sup_{z\geqslant 0}\left|Q_{S_n}(z)-\Phi_0\left(\frac{z}{2B_n}\right)\right|\leqslant 7.4508\big[L_n(\varepsilon)+M_n(\varepsilon)\big].$$

Теорема 11. *Какой бы ни была функция $g\in\mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_i^2g(X_i)<\infty$, $i\geqslant 1$, для любого $n\in\mathbb{N}$ имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{z\geqslant 0}\left|Q_{S_n}(z)-\Phi_0\left(\frac{z}{2B_n}\right)\right|\leqslant \frac{7.4508}{B_n^2g(B_n)}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i^2g(X_i).$$

Остальные результаты имеют аналогичные доказательства и базируются на результатах первой главы и вспомогательных утверждениях. Приведем следующие теоремы для функций концентрации пуассоновских случайных сумм

Теорема 12. *Для любого $\lambda>0$*

$$\sup_{z\geqslant 0}\left|Q_{S_\lambda}(z)-\Phi_0\left(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\lambda}}\right)\right|\leqslant \frac{7.4184}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2\min\left\{1,\frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\}.$$

Теорема 13. *Какой бы ни была функция $g\in\mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2g(X_1)<\infty$, имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{z\geqslant 0}\left|Q_{S_\lambda}(z)-\Phi_0\left(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\lambda}}\right)\right|\leqslant 7.4184\frac{\mathsf{E}X_1^2g(X_1)}{\sigma^2g(\sigma\sqrt{\lambda})}.$$

Также приведем утверждение для функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм

Теорема 14. *Если $\mathsf{E}\Lambda_n<\infty$, то*

$$\sup_{z\geqslant 0}\left|Q_{S_{N_n^\star}}(z)-\int\limits_0^\infty\Phi_0\left(\frac{z}{2\sqrt{\lambda}}\right)d\mathsf{P}\big(\Lambda_n<\lambda\mathsf{E}\Lambda_n\big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{7.4184}{\sigma^2}\left[\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)+\mathsf{E}\frac{|X_1|^3}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\big(|X_1|<\sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)\right],$$

где случайные величины X_1 и Λ_n предполагаются независисмыми.

В **четвертой главе** рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима. Традиционно основные результаты представлены после необходимых для их доказательства вспомогательных утверждений. Сначала рассматривается общий случай, а затем случай независимых одинаково распределенных случайных величин. Результаты данной главы опубликованы в статьях [8] и [9]. Далее рассмотрим основной результат данной главы.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ как независимые случайные величины. Обозначим $F_j(x)=\mathsf{P}(X_j<x)$, $x\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$. Будем считать, что все функции распределения $F_j(x)$ непрерывны.

Рассмотрим $u > 0$ такое, что $0 < F(u) < 1$. Очевидно, что $X_j = X_j\mathbb{I}_{\{|X_j|\,\leqslant\, u\}} + X_j\mathbb{I}_{\{|X_j|\,>\,u\}} \equiv X_j^{\leqslant\, u} + X_j^{>\,u}$. Тогда

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j\mathbb{I}_{\{|X_j|\leqslant u\}}+\sum_{j=1}^{n}X_j\mathbb{I}_{\{|X_j|>u\}}\equiv S_n^{(\leqslant u)}+S_n^{(>u)}.$$

Нормальную функцию распределения со средним $a\in\mathbb{R}$ и дисперсией $\sigma^2>0$ обозначим

$$\Phi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\Big\{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\Big\}dz=\Phi_{0,1}\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big)=\Phi_{0,\sigma}(x-a),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Равномерное расстояние между функциями распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ случайных величин ξ и η будем обозначать

$$\rho(F_\xi,F_\eta)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_\xi(x)-F_\eta(x)|.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 15. *Пусть $u>0$ – произвольно. Тогда для любых $a\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$*

$$\rho(F_{S_n},\Phi_{a,\sigma})\leqslant\rho(F_{S_n^{(\leqslant u)}},\Phi_{a,\sigma})+\sum_{j=1}^{n}\big[F_j(-u)+1-F_j(u)\big].$$

На практике в качестве параметров a и σ можно брать, например,

$$a=a(u)=\mathsf{E}S_n^{(\leqslant u)}\quad\text{и}\quad\sigma^2=\sigma^2(u)=\mathsf{D}S_n^{(\leqslant u)}.$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Уточнены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Показано, что данные оценки справедливы с константами: $C \leqslant 1.8627$ в общем случае; $C \leqslant 1.8546$ в случае независимых одинаково распределенных случайных величин; $C \leqslant 1.5769$ в случае независимых симметричных

случайных величин; $C \leqslant 1.5645$ в случае независимых симметричных одинаково распределенных случайных величин.

2. Получены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм: пуассон-биномиальных, биномиальных и пуассоновских случайных сумм.
3. Получены равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответсвующим предельным законам при ослабленных моментных условиях: общий случай, случай сходимости распределений геометрических случайных сумм к распределению Лапласа, случай сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм к дисперсионному гамма-распределению, случай сходимости распределений зихелевых случайных сумм к распределению Стьюдента.
4. Уточнены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что константы в данных оценках не превосходят 37.9.
5. Получены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм: биномиальных и пуассоновских случайных сумм.
6. Получены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации сумм независимых случайных величин функцией распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях.
7. Получены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации некоторых случайных сумм функцией распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях: пуассон-биномиальных, биномиальных и пуассоновских случайных сумм.
8. Получены равномерные оценки скорости сходимости функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм к соответсвующим предельным законам при ослабленных моментных условиях: общий случай, случай сходимости функций концентрации геометрических случайных сумм к экспоненциальному распределению, случай сходимости функций концентрации отрицательных биномиальных случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей симметричное дисперсионное гамма-распределение, случай сходимости функций концентрации зихелевых случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей распределение Стьюдента.
9. Рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима.

Полученные результаты могут послужить основой для дальнейших исследований в области предельных теорем теории вероятностей, а также могут использоваться при решении практических задач.

В заключение соискатель выражает благодарность и большую признательность научному руководителю В. Ю. Королеву за постановку задач, поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

Публикации по теме диссертации

В изданиях из списка Web of Science, Scopus, RSCI:

1. Korolev V., Dorofeeva A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment conditions // Lithuanian Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 57. — № 1. — P. 38–58 / 1.31 п. л. (Scopus, Web of Science, IF WoS = 0.78).
   В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Все остальные результаты и численные расчеты принадлежат А. В. Дорофеевой.
2. Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Оценки функций концентрации случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Теория вероятностей и ее применения. — Москва. — 2017. — Т. 62. — № 1. — С. 104–121 / 1.13 п. л. (RSCI, ВАК, РИНЦ, IF РИНЦ = 0.210).
   Версия на английском языке: Korolev V., Dorofeeva A. Bounds for the concentration functions of random sums under relaxed moment conditions // Theory of Probability and its Applications. — 2018. — Vol. 62. — № 1. — P. 84–97 / 0.88 п. л. (Scopus, Web of Science, IF WoS = 0.56).
   В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Все остальные результаты принадлежат А. В. Дорофеевой.
3. Королев В. Ю., Дорофеева А. В. О неравномерных оценках точности нормальной аппроксимации для распределений некоторых случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН. — Москва. — 2018. — Т. 12. — № 4. — С. 86–91 / 0.38 п. л.(Scopus, RSCI, ВАК, РИНЦ, IF Scopus = 0.604).
   В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Все остальные результаты и численные расчеты принадлежат А. В. Дорофеевой.
4. Королев В. Ю., Дорофеева А. В. О точности нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН. — Москва. — 2021. — Т. 15. — № 1. — С. 116–121 / 0.38 п. л. (Scopus, RSCI, ВАК, РИНЦ, IF Scopus = 0.604).
   В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Все остальные результаты и численные расчеты принадлежат А. В. Дорофеевой.
5. Dorofeeva A., Korolev V., Zeifman A. Bounds for the accuracy of invalid normal approximation // Colloquium Mathematicum. — 2022. — Vol. 169. — P. 243–253 / 0.69 п. л. (Scopus, Web of Science, IF WoS = 0.633).

В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. А. И. Зейфману принадлежит идея рассмотрения функций распределения, принадлежащих области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \in (0,2)$***. Все остальные результаты доказаны А. В. Дорофеевой.***

В остальных изданиях:

6. Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Оценки точности нормального приближения для распределений случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2015. — Вып. 26. — С. 106–133 / 1.75 п. л.
В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Все остальные результаты и численные расчеты принадлежат А. В. Дорофеевой.
7. Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Об абсолютной константе в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго // Вестник Карагандинского университета. — 2015. — Т. 78. — № 2. — С. 48–56 / 0.56 п. л.
В. Ю. Королеву принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Все остальные результаты и численные расчеты принадлежат А. В. Дорофеевой.
8. Дорофеева А. В. Неравенства типа Каца – Петрова для некоторых случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2018. — Вып. 28. — С. 66–75 / 0.63 п. л.
9. Дорофеева А. В. О неравенствах типа Каца – Петрова – Розовского для некоторых случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2019. — Вып. 29. — С. 11–18 / 0.5 п. л.

Дорофеева Александра Владимировна

Оценки скорости сходимости в центральной
предельной теореме и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____