ОТЗЫВ
официального оппонента
Королева Максима Александровича
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Добровольского Николая Николаевича на тему:
«Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы»
по специальности 1.1.5 –
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика»

Не будет большим преувеличением сказать, что круг задач, рассмотренных в диссертационной работе, сформировался под влиянием теоретико-числового метода в приближённом анализе и, в частности, под влиянием классических работ Н.М. Коробова. Вопросы приближённого анализа по-прежнему сохраняют свою актуальность и, таким образом, свидетельствуют об актуальности тематики исследований соискателя. Отправной точкой исследований в указанном направлении стало появление в работах Н.М. Коробова объекта, ставшего прообразом того, что сейчас именуется гиперболической дзета-функцией решётки. Эта функция исследовалась поначалу лишь для вещественных значений переменной, причём лишь в области абсолютной сходимости.

Но, как это не раз бывало, объект, сыгравший однажды вспомогательную роль (как дзета-функция решётки - при оценке погрешности теоретико-числовых формул приближённого интегрирования), со временем сам стал предметом исследования: дзета-функции решёток стали изучать и при комплексных значениях аргумента. Последнее неизбежно привело к вопросу об аналитическом продолжении таких функций на более широкую нежели область абсолютной сходимости ряда Дирихле. Такой подход приводит к лучшему пониманию исследуемого объекта - хотя бы в силу возможности сопоставления его с «эталоном» - классической дзета-функцией Римана.

В выявлении как общих с $\zeta(s)$, так и отличных свойств дзета-функции решётки имеется и существенная заслуга соискателя. Среди наиболее ярких результатов отмечу лишь две главные теоремы главы 7 - о новой асимптотической формуле для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки $\zeta_H(\Lambda(t,F)|\alpha)$ и о новой асимптотике для числа ненулевых точек решётки Λ, лежащих в гиперболическом кресте $K(T)$.

По ходу развития теоретико-числового метода в приближённом анализе естественным образом возникла задача исследования дзета-функций моноидов натуральных чисел, причём как тех, что обладают однозначностью разложения на простые элементы, так и тех, которые лишены этого свойства. На страницах диссертации автор немало места уделил «модельному» случаю, когда моноид порожден либо единственным простым числом, либо конечным числом простых чисел. Следующим шагом стало для автора исследование моноидов, которые порождены бесконечными, хотя и очень редкими, последовательностями простых. Здесь, несомненно, следует упомянуть о доказанной в главе 6 теореме о том, что для дзета-функции моноида, отвечающего последовательности простых, растущей как геометрическая прогрессия, мнимая ось будет естественной границей аналитичности. В этом проявляется её коренное отличие от дзета-функции Римана, допускающей мероморфное продолжеие на всю комплексную плоскость. Изучение моноидов низбежно приводит к задачам о поведении величин $\pi_M(x)$ и $\nu_M(x)$, которые выражают количество простых и, соответственно, количество всех элементов моноида M, не превосходящих x. Этим вопросам также уделено место на страницах работы. Тем самым соискателем продолжены исследования Б.М. Бредихина.

При построении квадратурных формул с весами еще в 1970-е гг. была выявлена тесная связь таких формул с приведёнными алгебраическими иррациональностями n-й степени. Эта связь обусловила ещё одно направление исследований соискателя, результаты которых нашли отражение в главе 11. Здесь соискатель, действуя в духе Э. Галуа, смог описать, в частности, способ нахождения в явном виде минимального многочлена $f_k(x)$ для любой остаточной дроби α_k, которая возникает при разложении вещественной алгебраической иррациональности α степени n.

Перейдём теперь к краткому обзору диссертации по главам.

Глава 1 имеет вспомогательный характер. В ней изучаются непрерывные функции, полученные почленным логарифированием эйлеровских произведений в области абсолютной сходимости (и, в частности, главные ветви таких логарифмов). Основными результатами этой главы оказываются теоремы о существовании горизонтальных отрезков, находящихся в комплексной плоскости, на очень больших высотах, правее единичной прямой, при изменении переменной α вдоль которых дзета-функция Римана $\zeta(\alpha)$ принимает любое наперёд заданное число N положительных (чисто мнимых) значений. Также в этой главе исследуется поведение вблизи справа от единичной прямой логарифма функции вида

$$L(s;z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

отвечающей значению $z = i$ (здесь $\Omega(n)$ - количество простых делителей n, взятых с учётом кратности).

Глава 2 посвящена функциональным свойствам гиперболической дзета-функции Гурвица. Основным результатом автора является вывод функционального уравнения для гиперболических дзета-функций решёток размерностей 1 и 2.

Главы 3 и 4 посвящены изучению дзета-функций моноидов. В частности, автором вводится понятие экспоненциальной последовательности PE простых чисел (растущей со скоростью геометрической прогрессии), рассматривается моноид, порождённый такой последовательностью, и отвечающая ему дзета-функция. Здесь же рассматриваются вложенные последовательности моноидов, примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы, отвечающие им дзета-функции, а также функции, им обратные.

Глава 5 посвящена построению последовательностей простых чисел, таких, что дзета-функции, отвечающие порождёнными ими моноидам, имеют заданную абсциссу сходимости σ_0, $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1$. При этом в случае $\sigma_0 \leqslant 1/3$ используется теорема о существовании простого числа между двумя соседними кубами натуральных чисел, а при $1/3 < \sigma_0 < 1$ - двусторонние оценки Россера для n-го простого числа p_n.

В главе 6 продолжено изучение дзета-функций различных моноидов: простейшего, порожденного единственным простым числом, моноида, порожденного конечным числом простых, и др. В частности, автор доказывает, что мнимая ось является естественной границей аналитичности для дзета-функции моноида $M(PE)$, порожденного экспоненциальной последовательностью PE простых чисел. Здесь же рассматриваются примеры рядов Дирихле и эйлеровских произведений, задающих функции, аналитические (мероморфные) во всей плоскости.

В главе 7 доказывается асимптотическая формула для дзета-функции гиперболической решётки $\zeta_H(\Lambda(t,F)|\alpha)$ и асимптотическая формула для числа ненулевых точек решётки Λ, лежащих в гиперболическом кресте $K(T)$. Первая из доказанных формул уточняет результат Н.М. Добровольского, В.С. Ваньковой и С.Л. Козловой (1990 г.), вторая - результат Н.М. Добровольского и А.Л. Рощени (1998 г.).

В главах 8, 9 для ряда конкретных примеров моноидов приведены верхние оценки и асимптотики для количества простых элементов моноида, не превосходящих заданного предела.

В главе 10 с помощью аддитивной теоремы Ингама получена оценка для количества элементов моноида, порожденного PE-последовательностью простых чисел, которые не превосходят заданного предела.

В главе 11 изучаются свойства минимальных многочленов остаточных дробей, которые возникают в ходе работы алгоритма Лагранжа для алгебраических иррациональностей n-й степени. В частности, автором указан способ нахождения в явном виде минимального многочлена $f_k(x)$ для любой остаточной дроби α_k, которая возникает при разложении вещественной алгебраической иррациональности α степени n. Доказано также, что при всех m, начиная с некоторого $m_0 = m_0(\alpha)$, остаточные дроби α_m являются приведёнными алгебраическими числами (в случае чисто вещественного поля) или приведёнными числами Пизо (в общем случае). Здесь же установлена стационарность последовательности дискриминантов минимальных многочленов $f_m(x)$ остаточных дробей α_m.

В главе 12 описана новая конструкция, связывающая с каждым моноидом M натуральных чисел класс M_s^α периодических функций многих переменных, и рассмотрен вопрос об уравнении Фредгольма второго рода на этом классе функций. Здесь же описаны конструкции бесконечномерных линейных функциональных пространств рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

Имеется ряд замечаний к тексту работы, которые приводятся ниже в виде списка с разбивкой по главам. Условно их можно разделить на три группы. К первой группе относятся претензии к оформлению. В их числе - недостатки в нумерации утверждений работы (лемм, теорем), а именно:

– сквозная нумерация, не позволяющая по номеру теоремы понять, в какой главе приведено её доказательство;

– единая нумерация утверждений, как принадлежащих автору, так и вспомогательных утверждений, заимствованных из других работ;

– дублирование под разными номерами некоторых утверждений.

Ко второй группе относятся замечания, связанные с тем, что в ряде случаев автор, с одной стороны, приводит в тексте доказательства известных утверждений (что, в принципе, удобно для читателя), в то время как можно было бы ограничиться ссылкой на источник. С другой стороны, автор не всегда приводит наилучшие на сегодняшний день версии вспомогательных утверждений (см. далее замечание о «теореме Ингама») и не всегда снабжает приводимые и доказываемые утверждения исторической справкой, позволяющей чётко очертить вклад автора (см. далее замечание о дзета-функции Гурвица).

Наконец, к третьей группе относятся замечания, связанные с тем, что автор не всегда выбирал оптимальный путь вывода тех или иных утверждений (см. далее замечание о применении теоремы Миттаг-Леффлера), а также неудачные фразы, обороты, опечатки, которые, впрочем, неизбежны в работе такого объёма.

Список замечаний

К главе 1.

1. Фраза «Формула (1.9) требует уточнения, которое даётся с помощью следующих лемм...» на стр. 49 некорректна, так как речь в ней идёт о конкретной и законченной (точной) формуле для логарифма дзета-функции правее единичной прямой, в то время как последующие утверждения устанавливают определённые свойства этого логарифма.

2. В центральной выносной формуле на стр. 51 вместо $\sum\limits_{m=1}^{2}$ должно быть $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}$.

К главе 2.

1. Утверждение леммы 15 о разложении в ряды Фурье периодизированных многочленов Бернулли является общеизвестным и не требует включения в текст работы доказательства. Оно имеется (правда, в виде упражнения с указанями) в книге Ф. Олвера[1]. При желании можно отыскать в литературе и доказательство этих разложений. В качестве примера можно указать, например, книгу Н.И. Ахиезера[2].

[1] *Ф. Олвер*, Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990, гл. 8, задача 1.5 после §1 (с. 276)

[2] *Н.И. Ахиезер*, Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. М.: Наука, 1965, §55, с. 113-115.

2. К сожалению, в этом разделе отсутствуют ссылки на классическую работу А. Гурвица[3] (1882 г.), в которой впервые была введена дзета-функция $\zeta(s,\alpha)$, носящая теперь его имя.

3. Понятия решётки, определителя решётки было бы хорошо предварить определениями.

К главе 4.

1. Лемма 47 - простое следствие полиномиальной формулы.

2. На стр. 147 (формулировка Леммы 62) использовано крайне неудачное выражение: «равномерно сходится предел».

К главе 5.

1. Теорема 33 (стр. 153) аттрибутируется А.Е. Ингаму, причём ссылка даётся на стр. 66 книги Э. Троста «Простые числа», где помещена единственная фраза: «Ингам доказал, что для всех достаточно больших x между x^3 и $(x+1)^3$ лежит простое число». Обращение к оригинальной работе Ингама[4], которая здесь подразумевается показывает, что в действительности Ингам установил, что из оценки

$$\zeta(0.5+it) \ll |t|^c, \quad t\to\pm\infty, \quad c>0,$$

следует асимптотика для разности $\pi(x+h)-\pi(x)$ при $h=x^{\alpha+\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ - сколь угодно малое фиксированной число, $x\to+\infty$, и при этом

$$\alpha=\frac{1+4c}{2+4c}.$$

Соответственно, из старой оценки[5], отвечающей $c=1/6+\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1>0$ - любое фиксированное), при надлежащем выборе ε можно получить $\alpha=2/3-\delta(\varepsilon,\varepsilon_1)$, откуда и будет следовать существование простого между кубами соседних натуральных чисел.

Далее, на стр. 154 автор отмечает следующее: «Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ-последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma\geqslant 3$. Вопрос о существовании таких последовательностей при $1<\sigma<3$ остаётся открытым». С этим никак нельзя согласиться.

[3] *A. Hurwitz*, Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen $F(s)=\sum\left(\frac{D}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binarer quadratischer Formen auftreten // Zeitschrift für Mathematik and Physik, Bd. 27, 1882, s. 86-101. Её текст имеется и в собрании трудов Гурвица: *A. Hurwitz*, Mathematische Werke. Band I. Funktionentheorie. Springer Basel AG, 1962. S. 72-88.

[4] *A.E. Ingham*, On the difference between consecutive primes // Quart. J. Math. 8 (1937), № 1, p. 255–266.

[5] Согласно К. Чандрасекхарану, эта оценка восходит к Г. Харди и Дж. Литтлвуду; её доказательство помещено в классическом труде Э. Ландау (1927 г.). См.: *К. Чандрасекхаран*, Арифметические функции. М.: Наука, 1975, с. 162 (Замечания к гл. V, §1); *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd. II, s. 61 (Satz 414). Leipzig, 1927.

Во-первых, после Харди и Литтлвуда было получено множество последовательно уточняющих друг друга оценок для модуля дзета-функции на критической прямой. Подстановка соотвествующих значений c в теорему Ингама автоматически влечёт существование простых на всё более коротких промежутках.

Во-вторых, за прошедшие (с 1937 г. - времени появления рабоы Ингама) годы были разработаны гораздо более совершенные методы, позволяющие «улавливать» простые числа в промежутках $(x, x+h)$ малой длины $h = x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Отметим, что из существования простого p на всяком промежутке такого вида влечет существование простого между числами вида n^{σ} и $(n+1)^{\sigma}$ при

$$\sigma = \frac{1}{1-\alpha} + \varepsilon.$$

Так, плотностная теорема М. Хаксли[6] влечёт существование простых на промежутке с $\alpha = 7/12 + \varepsilon_1$, что приводит к значению $\sigma = 12/5 + \varepsilon = 2.4 + \varepsilon$. Далее, для автора наличие асимптотики не является принципиальным - для построения соответствующей σ-последовательности достаточно, например, утверждения о «положительной доле» простых на $(x, x+h)$. Такие утверждения имеются; рекордом в настоящее время продолжает оставаться теорема Бейкера, Хармана и Пинтца[7], согласно которой

$$\pi(x+h) - \pi(x) \geqslant \frac{ch}{\ln x}$$

уже при $h = x^{\alpha}$, $\alpha = 21/40$. Это влечёт существование σ-последовательности при $\sigma > 40/19 + \varepsilon = 2.105\ldots + \varepsilon$.

2. Содержимое стр. 159 дублирует содержимое стр. 153, 155 и 156. Именно, Теорема 42 - это Теорема 33 (стр. 153), Определение 12 - это Определение 9 (стр. 156), Определение 13 - это Определение 10 (стр. 156) и, наконец, Теорема 43 (Россера) - это Теорема 37 (стр. 155).

К главе 6.

1. В §6.2 автор получает представление для дзета-функции $\zeta(M(q)|\alpha)$ геометрической прогресии разложение вида

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha \ln q}{(\alpha \ln q)^2 + (2\pi n)^2},$$

используя теорему Миттаг-Леффлера. Вывод указанной формулы занимает около 5 страниц. Между тем, такое разложение проще получить из разложения в бесконечное произведение гиперболического синуса (собственно, это разложение, по сути,

[6] *M.N. Huxley*, On the difference between consecutive primes // Invent. Math., v. 15 (1972), p. 164-170.

[7] *R.C. Baker, G. Harman, Y. Pintz*, The difference between consecutive primes, II // Proc. London Math. Soc., 83 (2001), p. 532–562

приводится автором на стр. 171). Действительно, полагая $g(w) = e^{2w} - 1$, получим

$$g(w) = 2e^{w}\,\mathrm{sh}\,(w) = 2we^{w}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{w^2}{(\pi n)^2}\right),$$

$$\ln g(w) = w + \ln w + \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1 + \frac{w^2}{(\pi n)^2}\right),$$

откуда

$$\frac{g'(w)}{g(w)} = 1 + \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2w}{w^2 + (\pi n)^2}.$$

Вместе с тем, $(\ln g(w))' = e^{w}/\,\mathrm{sh}(w)$, так что

$$\frac{e^{w}}{\mathrm{sh}\,w} = 1 + \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2w}{w^2 + (\pi n)^2}.$$

Но

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{1 - 1/q^{\alpha}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{(\alpha/2)\ln q}}{\mathrm{sh}\left((\alpha/2)\ln q\right)}.$$

Отсюда, полагая $w = (\alpha/2)\ln q$, получим искомое разложение.

2. На стр. 186 автор употребляет термины «порядок» и «вес» функции в точке, однако их определения приводятся лишь на стр. 193.

3. Странно выглядит фраза на стр. 191: «Естественно возникает вопрос о возможности аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. Как будет показано выше, ответ на этот вопрос будет, **скорее всего**, отрицательный» (выделено мною - *М.К.*). Согласно Теореме 51 (стр. 196), мнимая ось является для такой дзета-функции естественной границей: любая её точка является для этой функции особой. В каком смысле следует понимать приведённую фразу, неясно.

К главе 7.

1. В этой главе не лишним было бы напомнить читателям определения гиперболического параметра решётки $q(\Lambda)$, гиперболического креста $K_s(T)$, решётки $\Lambda(t, F)$

К главе 8.

1. В §2 главы «Общие формулы для числа составных с двумя делителями» исследуется, в частности, величина $\pi_2(x)$, равная количеству натуральных n, не превосходящих x, имеющих ровно два простых делителя (возможно, совпадающих). Для этой величины путём рассуждений, занимающих с.с. 239-240, 242-247, выводится оценка (Теорема 58 на с. 247)

$$\pi_2(x) = O\left(x\,\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Между тем, функция $\pi_2(x)$, равно как и её аналог $\pi_k(x)$ (где $k \geqslant 2$ - произвольное фиксированное натуральное число) исследовалась ещё Э. Ландау[8], который получил асимптотическое соотношение вида

$$\pi_k(x) = (1 + o(1))\frac{x}{(k-1)!}\,\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

Позже эта же задача исследовалась при k, растущем вместе с x, в серии работ 1953-1954 гг. Л. Сатэ[9] и А. Сельбергом[10] Современное изложение этих результатов содержится в книге Г. Тененбома[11] Все перечисленное делает лишённым смысла замечание 5 автора на стр. 247: неравенства чебышевского типа для $\pi(x)$ в любом случае уступают по точности асимптотикам.

2. Нет смысла приводить оценку для $\pi(x, k, l)$ из монографии К.Прахара (Теорема 60 на стр. 248), поскольку она во всех отношениях уступает оценке Теоремы 59 (та же стр.). Здесь же имеется путаница в обозначениях: для согласования Теорем 59 и 60 следовало бы писать в первой $\pi(x, k, a)$ вместо $\pi(x, a, k)$.

3. В формулировке теоремы 61 на стр. 248 отсутствует какое-либо пояснение к обозначению β_1 (это «зигелевский нуль» - возможный вещественный нуль функции $L(s, \chi_1)$, отвечающей примитивному характеру χ_1 по модулю k, такой, что $\beta_1 \geqslant 1 - c/\ln q$ при некотором фиксированном c).

4. Неудачно выражение на стр. 249: «...даётся более точное выражение формулы (8.13)». Речь может идти в данном случае о явных выражениях для постоянных a и B, участвующих в асимптотиках (8.12) и (8.13).

5. В условии Теоремы 64 (стр. 249) никак не поясняются обозначения η и a. Если относительно первого можно, в свете Теоремы 59, догадаться, что это - сколь угодно малое фиксированное число, то второе используется как обозначение для постоянной Мертенса (Теорема 63), так и для первого члена прогрессии (в выкладках на стр. 250-251).

6. Замечания об обозначениях η и a можно отнести и к формулировкам Теорем 66, 67 (стр. 253). Кроме того, ограничение $x > q^4/64$ здесь теряет смысл, поскольку в теоремах рассматриваются лишь случаи $q = 3, 4, 6$ (для которых $\varphi(q) = 2$).

---

[8] *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, B. 1. Leipzig und Berlin, 1909. Kap. 13, §56 (s. 203-213).

[9] *L.G. Sathe*, On a Problem of Hardy on The Distribution of Integers having a Given Number of Prime Factors, I // J. Indian Math. Soc. Vol. 17 (1953), № 2, p. 63-82. *Он же*, On a Problem of Hardy on the Distribution of Integers having a Given Number of Prime Factors, II // J. Indian Math. Soc. Vol. 17 (1953), № 3, p. 83-141. *Он же*, On a Problem of Hardy on the Distribution of Integers having a Given Number of Prime Factors, III // J. Indian Math. Soc. Vol. 18 (1954), № 1, p. 27-42.

[10] *A. Selberg*, Note on a paper by L.G. Sathe // J. Indian Math. Soc., V. 18 (1954), № 1, p. 83-87.

[11] *G. Tenenbaum*, Introduction to analytic and probabilistic number theory. Cambr. Stud. Adv. Math. V. 46. Camb. Univ. Press, Ch. II.6, §6.1 (p. 200-206). В частности, приводимая в этой главе теорема 4 содержит асимптотическое разложение $\pi_k(x)$ с явной оценкой остаточного члена.

7. Крайне неудачным кажется термин «обратное натуральное число по модулю q» на стр. 240; здесь речь, конечно, идёт об обратном вычете по заданному модулю.

К главе 9.

1. К стр. 251: история о мемуаре П.Л. Чебышёва уже излагалась (в том же виде) на стр. 200 (§6.13), 242 (§8.3).

2. Теоремы 67, 68 и 70 на стр. 262 дублируют, соотвественно, Теоремы 61, 62 и 63 со стр. 248-249.

3. На стр. 263 продублировано неудачное выражение «...даётся более точное выражение формулы...» (см. замечания к гл. 8).

4. В выкладках на стр. 264 (формулировка и доказательство Теоремы 72) в знаках O фигурируют постоянные $1/2$. Формально это ничему не противоречит, но эта символика и создана для того, чтобы упрощать запись выкладок там, где не требуется особой точности. То же относится и к выкладкам на стр. 266-268: величины $(p-1)/4$, $\ln\sqrt{x}$, $\ln\ln\sqrt{x}$ в знаках O следовало бы заменить на p, $\ln x$, $\ln\ln x$ соответственно.

К главе 10.

1. Определение экспоненциальной последовательности простых чисел дается на стр. 190 (в §6.10), причём со ссылкой на работу [148]. То же определение (но уже со ссылкой на работу [195]) даётся и на стр. 269 (§10.1). Аналогично, Теорема 74 (стр. 270) дублирует Теорему 49 (стр. 191). При этом также указано, что Теорема 49 доказана в [148], а Теорема 74 - в [195]. Очевидно, ссылка [148] неточна, т.к. под таким номером в списке литературы фигурирует классическая книга Б.В. Шабата «Введение в комплексный анализ» и явно не она имелась ввиду.

2. Формулировка Теоремы 75 (стр. 270) дублирует формулировку Теоремы 29 (стр. 141).

3. Определение 16 последовательности $\mathbf{P}_\sigma$ со стр. 271 дублирует определение 8 со стр. 153, а Теорема 76 (аттрибутируемая Ингаму, см. замечания выше) со стр. 271 - Теорему 33 со стр. 153.

4. Величину $-O\Bigl(\ln\Bigl(1-1/p_1\Bigr)\Bigr)$ в формуле (10.9) (стр. 273) корректнее было бы записать как $O(1/p_1)$. Вообще, эту формулу следовало бы заменить более информативной, поскольку из контекста не видно, что величины q и p_1 каким-то образом растут. Именно, можно показать, что

$$\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}=C\cdot\prod_{p_j>x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)=C\cdot\exp O\left(\sum_{p_j>x}\frac{1}{p_j}\right)=$$
$$=C\exp\left(O\left(\frac{q}{x}\right)\right)=C\left(1+O\left(\frac{q}{x}\right)\right),$$

где обозначено:

$$C=C(PE)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}.$$

Аналогичные изменения следовало бы внести и в формулу для величины $\nu_{M(PE)}(x)$ в Лемме 111 (стр. 274-275).

5. В формулировке Следствия 10 (аддитивной теоремы Ингама, стр. 283) не поясняется смысл обозначения $c(q)$ (оно расшифровывается только на стр. 284, по ходу доказательства).

Подводя итог, необходимо сказать, что все перечисленные замечания и недостатки не снижают ценности большой работы, проделанной соискателем.

В заключение остаётся отметить, что диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова к докторским диссертациям. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика», а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова».

Всё перечисленное выше даёт основание считать, что соискатель Добровольский Николай Николаевич заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Королев Максим Александрович

Профессор РАН, доктор физико-математических наук

Ведущий научный сотрудник Отдела теории чисел

Федерального государственного бюджетного учреждения науки

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Заместитель директора по научной работе

korolevma_@mi-ras.ru

15 марта 2024 г.