

## ОТЗЫВ

официального оппонента

о диссертации на соискание ученой степени

**кандидата физико-математических наук**

**Резниченко Игоря Олеговича**

на тему: «Улучшенные квадратурные формулы

**для вычисления потенциалов простого и двойного слоя**

**для уравнений Лапласа и Гельмгольца»**

по специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения

**и математическая физика»**

В диссертации И.О. Резниченко разработаны новые квадратурные формулы для вычисления потенциалов простого и двойного слоя в трехмерных областях для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

**Актуальность темы.** Метод сведения краевых задач математической физики, постановки которых включают уравнения в частных производных, к решению граничных интегральных уравнений является мощным инструментом математического моделирования физических явлений и процессов, протекающих при функционировании разнообразных природных или технических систем. В его основе – представление решения задачи через интегралы по границе области и, вообще говоря, границам раздела сред с различающимися свойствами.

Очевидным преимуществом такого подхода является возможность уменьшения пространственной размерности задачи на единицу, однако достоинства методов граничных интегральных этим не ограничиваются: получаемое в результате решение задачи обладает такими весьма желательными свойствами как точное удовлетворение дифференциальному уравнению вне границ области, консервативность (удовлетворение балансовым соотношениям), отсутствие потери точности при вычислении

производных решения по пространственным переменным; возможность решения внешних задач без необходимости искусственного ограничения расчетной области и, следовательно, «сноса» каким-либо образом граничных условий с бесконечности на такую границу.

В настоящее время методы граничных интегральных уравнений применяются для решения краевых задач, возникающих в гидродинамических и электродинамических приложениях, в задачах теплопроводности и теории упругости, а также некоторых других областях.

Значительный интерес представляет развитие алгоритмов и технологий вычислений применительно к численному решению соответствующих задач. Особенно актуальны исследования в области разработки методов повышенной точности, а также «технологичных» («робастных») алгоритмов и подходов, которые могут быть применены для решения индустриальных задач, в которых расчетная область имеет сложную форму, при этом качество сетки на поверхности в общем случае весьма невысокое.

*Таким образом, исследования в данном и смежных направлениях, несомненно, являются актуальными.*

**Научная новизна и практическая значимость исследований.** К наиболее значимым новым научным результатам, полученным в диссертации, можно отнести решение автором проблемы вычисления с высокой точностью потенциалов простого и двойного слоя вблизи поверхности, на которой заданы плотности соответствующих потенциалов. Построенная автором квадратурная формула для потенциала простого слоя обеспечивает равномерную сходимость и равномерную аппроксимацию потенциала, а также сохраняет свойство непрерывности потенциала при переходе через поверхность. Для потенциала двойного слоя построена квадратурная формула, обеспечивающая значительно большую точность вычислений по сравнению с известными подходами. Получены также формулы для расчета с высокой точностью прямого значения нормальной

производной потенциала простого слоя и прямого значения потенциала двойного слоя.

Представленные результаты применения полученных квадратурных формул при численном решении краевых задач для уравнения Лапласа, возникающих в гидродинамических приложениях и в теории теплопроводности, убедительно показывают практическую значимость полученных результатов и возможность их практического использования в практике проведения расчетов.

#### **Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.**

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата, использованного при получении соответствующих квадратурных формул и обосновании их свойств, а также сопоставлением результатов расчетов с известными точными решениями.

Все основные результаты диссертационной работы представлены в 10 публикациях, из которых 7 опубликованных в рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК РФ или индексируемых в базах Scopus / Web of Science. Работа успешно прошла апробацию в докладах автора, представленных на различных научных конференциях и семинарах.

#### **Краткая характеристика основного содержания работы.**

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 100 наименований. Общий объем работы – 171 страница, включая 25 таблиц и 4 рисунка.

Во **введении** приведен краткий, но весьма обстоятельный обзор литературы по теме исследования и актуальных на сегодняшний день проблем; обоснована актуальность темы исследования, научная новизна полученных диссертантом результатов, их теоретическая и практическая значимость, вклад автора, сформулированы цель и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, и другие формальные пункты, относящиеся к общей характеристике представленной диссертации.

**Первая глава** посвящена решению задачи моделирования потенциального обтекания твёрдого тела потоком идеальной несжимаемой среды постоянной плотности, которая формулируется как внешняя краевая задача Неймана для уравнения Лапласа. Задача сведена к отысканию плотности потенциала простого слоя на поверхности тела; последняя является решением соответствующего граничного интегрального уравнения. Построены квадратурные формулы для вычисления потенциала простого слоя и его нормальной производной на поверхности. Также построены квадратурные формулы для вычисления потенциалов, возникающих при решении аналогичной краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Доказаны необходимые утверждения, обосновывающие возможность соответствующих представлений решений и свойства построенных квадратурных формул.

Во **второй главе** решается задача по расчету температурного состояния однородного тела, сводимая к решению внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Ее решение представлено в виде потенциала двойного слоя. Построены и обоснованы квадратурные формулы для вычисления потенциала двойного слоя и его прямого значения на поверхности, причем также и для случая, когда исходная краевая задача формулируется для уравнения Гельмгольца. Рассмотрена возможность повышения точности результатов в том случае, когда плотность потенциала – достаточно гладкая функция.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

В целом, давая общую оценку содержания работы, следует отметить, что работа написана достаточно ясным языком, обладает внутренним единством; все ее части служат достижению поставленной цели и решению сформулированных задач. При этом следует отметить, что главы диссертации оказались весьма объемными и «насыщенными»; представляется, что деление текста диссертации на большее число глав способствовало бы упрощению

и лучшему восприятию ее результатов.

Автореферат и опубликованные автором статьи по теме диссертации верно и достаточно полно отражают ее содержание и включают все основные положения.

По содержанию диссертации имеются некоторые **вопросы и замечания**.

1. В Главе 1 поставлена задача о моделировании стационарного потенциального обтекания тела. Сведение задачи к поиску потенциала поля скоростей, безусловно, является оправданным и наиболее естественным способом ее решения; при этом дальнейшие усилия автора относятся к вычислению данного потенциала с высокой точностью. Вместе с тем, для приложений представляет интерес определение и самого поля скоростей (градиента потенциала), однако данный вопрос в диссертации в должной мере не освещен. То же относится к градиенту потенциала двойного слоя.

2. Сведения о форме исходной области и ее границы, несомненно, следует отнести к исходным данным, или постановке задачи, однако при выполнении практических вычислений, очевидно, требуется обеспечить каким-либо образом ее параметризацию. Как следует из представленных результатов, требуется обеспечивать необходимую степень гладкости поверхности, что сделать сравнительно легко, если рассматривать тела простой формы, однако в практических приложениях часто приходится иметь дело с областями намного более сложной формы, заданными не аналитически, а лишь треугольной сеткой на поверхности. Не вполне ясно, насколько применимы и насколько эффективны в смысле обеспечиваемой точности в этих случаях полученные в диссертации квадратурные формулы.

3. На практике часто приходится иметь дело с поверхностями, которые не являются гладкими и имеют кромки; при приближении к ним плотность потенциала может быть неограниченной. Возможна ли адаптация разработанных подходов для таких задач?

4. Разработанные квадратурные формулы вместе с выражениями для их коэффициентов являются весьма громоздкими (что вполне объяснимо и естественно с учетом сложности решаемой задачи!), их воспроизведение с целью практического использования потенциальным читателем – весьма нетривиальная задача. Ее решение упростило бы приведение автором в свободном доступе соответствующих вычислительных процедур в виде исходных кодов или скриптов.

Указанные замечания не снижают значимости полученных результатов и не влияют на общую положительную оценку проведенного И.О. Резниченко диссертационного исследования.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (по физико-математическим наукам), а именно следующим ее направлениям: Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; Математические проблемы механики сплошной среды; Математические проблемы оптики и электродинамики; Математические проблемы термодинамики, кинетики и статистической физики.

Диссертационная работа отвечает критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова и оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Резниченко Игорь Олегович, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. - «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры «Прикладная математика»  
Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки»  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана (национальный  
исследовательский университет)».

Марчевский Илья Константинович

28.03.2023г.

Контактные данные:

тел.: +7 (903) 783-99-87, e-mail: iliamarchevsky@bmstu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:  
1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Адрес места работы:

105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, к. 1

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки»

тел.: +7 (499) 263-63-26; e-mail: fn2@bmstu.ru