

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Соляев Юрий Олегович

**Неклассические масштабные эффекты в прикладных моделях градиентной
теории упругости и электроупругости**

Специальность 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант:
д.т.н., проф., Лурье С.А.

Москва – 2022

Содержание

Введение	4
Глава 1 Масштабные эффекты в механике материалов и конструкций. Обзор работ по тематике исследования	20
Глава 2 Основные соотношения градиентной теории упругости и электроупругости	31
2.1 Градиентная теория упругости (ГТУ)	31
2.2 Градиентная теория электроупругости (ГТЭ)	35
2.3 Модели с упрощенными определяющими соотношениями	39
2.4 Уравнения ГТУ в криволинейных системах координат	46
2.5 Уравнения равновесия в перемещениях	48
Глава 3 Привлекаемые методы построения решений	50
3.1 Представление решения в форме Папковича-Нейбера	50
3.1.1 Общий случай изотропной среды	50
3.1.2 Упрощенный вариант представления решения в форме Папковича-Нейбера	52
3.1.3 Физический смысл потенциалов в решении Папковича-Нейбера в ГТУ	55
3.1.4 Общее решение для уравнений равновесия упрощенных градиентных теорий	56
3.2 Интегральные формулы Эшелби в общей теории Миндлина-Тупина	58
3.3 Прямые и энергетические методы осреднения в ГТУ и в ГТЭ	64
3.4 Полуобратный метод	69
3.5 Реализация численного моделирования	73
3.5.1 Смешанный метод конечных элементов	73
3.5.2 Метод Треффца	78
Глава 4 Масштабные эффекты в градиентной теории упругости	97
4.1 Проблема построения масштабозависимых балочных теорий	97
4.1.1 Модель градиентных балок Бернулли-Эйлера	98
4.1.2 Чистый изгиб балки. Трехмерное полуобратное решение в ГТУ	104
4.1.3 Трехмерные численные решения для задач изгиба	114
4.1.4 Вариационная формулировка градиентных балочных моделей с учетом неклассических граничных условий	120
4.2 Прогноз эффективных характеристик и уровня концентрации напряжений в композиционных материалах с учетом размера включений	124
4.2.1 Композит со сферическими включениями	124
4.2.2 Композит с цилиндрическими включениями. Антиплоское нагружение	144

4.2.3	Аналогия с градиентными моделями гидродинамики. Эффективная вязкость нано-жидкостей	163
4.3	Применение ГТУ к задачам механики разрушения	173
4.3.1	Анализ сходимости численных решений для задач с трещинами	174
4.3.2	Когезионные эффекты в решениях ГТУ для задач о трещинах	176
4.3.3	Описание размерных эффектов, связанных с изменением длины трещины	179
4.3.4	Влияние микро-геометрии вершины трещины	181
4.3.5	Сравнение с экспериментальными данными и идентификация масштабных параметров	183
4.4	Решение задачи о клине с заданной сосредоточенной нагрузкой в вершине . .	196
4.4.1	Постановка задачи	197
4.4.2	Анализ асимптотического решения в перемещениях вблизи вершины клина	199
4.4.3	Пример асимптотического решения для задачи со смешанными граничными условиями	205
4.4.4	Примеры численного моделирования. Анализ сходимости КЭ решений в упрощенных градиентных теориях	207
Глава 5 Масштабные эффекты в градиентных моделях пьезоэлектрических материалов		213
5.1	Проблема построения балочных теорий в ГТЭ	213
5.1.1	Модель градиентной балки Бернулли-Эйлера в ГТЭ	213
5.1.2	Полуобратное решение задачи о чистом изгибе слоя в ГТЭ	225
5.2	Размерные эффекты в композитах с пьезоактивными фазами	236
5.2.1	Антиплоский сдвиг композита с цилиндрическими включениями	236
5.2.2	Эффективные свойства наполненных композитов	245
5.3	Пространственная дисперсия поверхностных и объемных электроупругих волн	252
5.3.1	Динамическая формулировка ГТЭ	252
5.3.2	Динамическая антиплоская задача	254
5.3.3	Объемные волны сдвига	255
5.3.4	Волны Блюстейна-Гуляева	255
5.3.5	Волны Лява	259
5.3.6	Примеры численных расчетов	261
Заключение		268
Список литературы		271

Введение

В отличие от классических моделей механики деформируемого твердого тела, в градиентной теории упругости (ГТУ) предполагается, что энергия деформаций среды зависит не только от самих деформаций, но и от их пространственных производных. Это приводит к тому, что в определяющих соотношениях ГТУ возникают константы различной размерности и, как следствие, появляется возможность описания масштабных эффектов. Уравнения равновесия ГТУ, получаемые на основе вариационного подхода, обладают повышенным четвертым порядком, а формулировка начально-краевых задач содержит расширенный набор граничных условий.

С одной стороны, возникновение дополнительных материальных констант и повышение порядка уравнений приводит к усложнению теории. Однако, с другой стороны, ГТУ предоставляет возможность более аккуратного описания явлений и процессов, в которых градиенты деформаций оказываются достаточно велики на масштабном уровне характерных размеров рассматриваемых объектов. В частности, ГТУ предоставляет возможность описания эффектов пространственной дисперсии высокочастотных волн, согласованное с моделями динамики кристаллической решетки [1, 2]; возможность регуляризации решений для классических сингулярных задач о трещинах [3–6], острых углах [7], дислокациях [8–10], сосредоточенных нагрузках [11, 12]; возможность учета влияния размера включений на эффективные свойства композитов [13–16]; обеспечивает сеточную сходимость решений при численном моделировании тел с негладкой геометрией [17, 18]; позволяет моделировать механическое поведение материалов с учетом особенностей их микроструктуры [19, 20], в том числе моделирование некоторых классов механических метаматериалов [21]; предоставляет возможность уточненного описания условий закрепления элементов конструкций за счет наличия расширенного спектра граничных условий [22, 23].

Формулировка общей изотропной ГТУ впервые была предложена в работах Р. Тупина и Р. Миндлина [24, 25], хотя необходимость учета повышенных производных от перемещений в определяющих соотношениях теории упругости рассматривалась или упоминалась многими авторами, начиная с середины 19-го века и работ А. Коши [1, 26] и Г. Пиолы [27, 28]¹. В 1960-х годах многими авторами рассматривался частный случай ГТУ – моментная теория упругости (couple stress theory), в которой учитывается вклад в энергию деформаций градиентов от ротора перемещений [24, 29, 30]. Необходимость рассмотрения градиентных теорий упоминается и в классической монографии Л.И. Седова [31] в разделе, связанном с концентрацией напряжений². Позднее, в 70-90-х годах XX века фундаментальные результаты в градиентных

¹Коши исследовал возможность корректного континуального описания колебаний цепочек атомов, как точечных масс, соединенных упругими связями, а Пиола рассматривал меры деформаций в виде рядов Тейлора с учетом слагаемых повышенного порядка

²Л.И. Седов, Механика сплошной среды, Том II, 1973 г., с. 525: "В местах очень больших напряжений, высокой концентрации напряжений, линейная теория упругости, вообще говоря, неприложима. Для уточненного описания реальных явлений в этих областях необходимо учитывать эффекты нелинейной теории упругости, пластичности и ползучести материала. Кроме этого, большое влияние на величину внутренней энергии и других термодинамических функций и на механическое поведение материалов в этих местах могут оказывать не только сами деформации, но и их градиенты, что не учитывается в обычной теории, использу-

теориях были получены в работах П. Жермена [32], Н. Эшела и Г. Розенфельда [33], И.А. Кунина [34], Ж. Можена [35], К. Ру и Э. Айфантиса [36], Д. Хатчинсона и Н. Флека, особенно применительно к масштабным эффектам при пластических деформациях [37], М.Ю. Гуткина и Э. Айфантиса [8, 38], Д. Лама и др. [39, 40]. С начала 2000-х годов в этой области проводятся активные исследования. Обзоры зарубежных работ представлены в публикациях [1, 27]. В российских изданиях градиентной теории упругости были посвящены работы С.А. Лурье и П.А. Белова [41–44], В.В. Васильева и С.А. Лурье [45, 46], Д.Б. Волкова-Богородского и С.А. Лурье [47–49], Е.В. Ломакина, С.А. Лурье и Л.Н. Рабинского [22, 50], В.И. Ерофеева [51–53] и др. Задачи и приложения моментной теории упругости (псевдоконтинуум Коссера, модель Койтера) рассматривались в работах В.И. Ерофеева [54], М.А. Кулеш, В.П. Матвеевко и И.Н. Шардакова [55], Д.В. Тарлаковского [56, 57], П.В. Трусова и П.С. Волегова [58] и др. Детальный обзор публикаций, связанных с тематикой данной диссертации приведен далее.

Заметим, что в диссертации рассматривается круг задач, связанный только с градиентными теориями, то есть с теориями повышенного порядка и с классической кинематикой. Поэтому модели сред с микроструктурой (микро-морфные теории, микрополярная теория сред Коссера и т.д.) в данном случае не рассматриваются, хотя многие эффекты в этих моделях оказываются схожими (например, возникновение размерных эффектов и эффектов типа межфазных зон и т.п.). Градиентные теории можно рассматривать, как частный случай моделей сред с микроструктурой путем введения гипотез о пропорциональности микро- и макродеформаций и поворотов [25, 59]. За прошедшие 20 лет большое количество исследований было посвящено такого рода моделям и, в первую очередь, модели сред Коссера. В России это работы П.А. Жилина [60], В.И. Ерофеева [61], М.А. Кулеш, В.П. Матвеевко и И.Н. Шардакова [62, 63], Е.Ф. Грековой [64], В.А. Еремеева [65], Е.А. Ивановой, А.М. Кривцова и Н.Ф. Морозова [66–68], М.У. Никабадзе [69], Д.В. Тарлаковского [70], Г.Л. Бровко [71], Е.Н. Вильчевской [72], В.И. Горбачева [73] и др. К моделям обобщенных континуумов, учитывающих размерные эффекты, относятся и модели с поверхностными эффектами, которые рассматривались в работах П.А. Белова и С.А. Лурье [74], В.А. Еремеева и Н.Ф. Морозова [75], Р.В. Гольдштейна и К.Б. Устинова [76] и др. Для некоторых классов проблем (например, зависимость свойств микроантислеверов от размера) в настоящее время открытым остаются вопросы выбора подходящей обобщенной континуальной теории (градиентной, поверхностной, микрополярной и т.п.), необходимой для корректного описания известных экспериментальных данных. Решение подобного рода задач на примере градиентных теорий, в том числе, рассматривается в диссертации.

Важно отметить, что разработка градиентных теорий не является спецификой механики деформируемого твердого тела. В физике сплошной среды известно достаточно много нелокальных и градиентных теорий [35]. Более 70-и лет назад была предложена электродинамика Бопша-Подольски, лагранжиан которой записывается с учетом градиентов напряженности электрического и магнитного поля [77–79]. Хорошо известной является теория диэлектрической для определения напряжений закон Гука".

ков с оптической активностью, в которой учитывается нелокальный и, как частный случай, градиентный характер связи между электрической индукцией и напряженностью электрического поля [80]. За последние 20 лет предложены градиентные обобщения, фактически, всех классических моделей в механике сплошной среды – теплопроводности и диффузии [81, 82], пороупругости и фильтрации [83], гидродинамики [84, 85], термоупругости и электроупругости [86], магнитоупругости [87] и др.

Актуальность темы исследования

Градиентные теории обеспечивают получение уточненных решений для задач с высокой концентрацией напряжений, которая может реализовываться вблизи дефектов, дислокаций или включений, в малоразмерных структурах (микрочастицах, пленках, наночастицах), в наноструктурированных средах, а также в условиях высокочастотных динамических процессов [1]. Соответственно построение таких уточненных решений может быть полезным при разработке новых микро/нано-механических устройств, при моделировании и прогнозе свойств перспективных наноструктурированных сплавов и композиционных материалов, при описании свойств механических метаматериалов с нелокальным характером внутренних взаимодействий, при исследовании высокочастотных механических процессов, например, при описании упругих волн терагерцового частотного диапазона, возникающих при взаимодействии электромагнитных волн с кристаллической решеткой твердых тел.

Важнейшим вопросом является разработка численных методов в рамках градиентных теорий для создания конечно-элементных решателей, свободных от проблемы сеточной расходимости решений в моделях с негладкой геометрией, которая присутствует не только в исходном состоянии тела (может быть устранена заданием скруглений), но и в процессе образования и развития повреждений. Такие методы на основе ГТУ фактически являются естественной альтернативой к существующим методам сингулярных и обобщенных конечных элементов (XFEM), когезионных элементов, моделям виртуального закрытия трещины (VCCT) и т.д., так как, например, существование когезионных напряжений в вершине трещины является естественным следствием формулировки ГТУ [3, 5].

Развитие методов градиентной теории электроупругости (ГТЭ) является важной задачей с точки зрения описания масштабных эффектов в пьезоэлектриках, широко применяемых во многих микромеханических устройствах, размер которых может быть сопоставим с характерным размером микроструктуры или (для наноразмерных систем) атомарной структуры материала. Например, один из известных ранних результатов, полученных Р. Миндлиным в области градиентных теорий, связан с описанием размерных эффектов для емкости ультратонких диэлектрических пленок на основе градиентной теории электроупругости [88]. В современной компонентной базе пьезоэлектрики применяются в различных преобразователях, резонаторах, сенсорах, в частотных фильтрах [89, 90]; при этом тенденцией является уменьшение размеров применяемых устройств и повышение их рабочих частот [91], что требует привлечения, в том числе, адекватных расчетных моделей.

Таким образом, рассматриваемые в данной диссертации проблемы, связанные с построе-

нием корректных и прикладных моделей в рамках ГТУ и ГТЭ, определением классов явлений, для которых возможно и необходимо применять эти градиентные теории, разработкой методов построения аналитических и численных решений, являются **актуальными задачами**. Более того, решение рассматриваемых проблем направлено и на разработку достоверных методов идентификации дополнительных материальных констант градиентных теорий, что является принципиально важным с точки зрения их практического применения.

Степень разработанности темы исследования

Несмотря на достаточно большой объем фундаментальных и прикладных результатов, полученных за последнее время в области моделей обобщенных континуумов, к которым относятся и градиентные теории, остается большое количество открытых вопросов, которые требуют, как теоретических, так и экспериментальных исследований. Касательно рассматриваемых в данной диссертации методов осреднения, моделей градиентных балок, моделей динамических процессов в ГТУ и ГТЭ, методов идентификации масштабных параметров и методов численного моделирования, отметим следующие известные результаты.

В настоящее время хорошо известным является факт возникновения неоднородного поля деформаций и напряжений внутри включений в задачах осреднения в рамках градиентных теорий (и в целом, в моделях обобщенных континуумов) [13, 15, 92]. Поэтому применение многих прямых методов осреднения³, основанных на решении задачи об изолированном включении и использовании тензора Эшелби, оказывается затруднительным. Для реализации этих методов было предложено вычислять осредненные по включению значения тензора Эшелби [15, 92–94]. Справедливость и точность такого подхода, вообще говоря, требует подтверждения и рассматривается в настоящей диссертации. Проводится сравнение различных методов осреднения, основанных на аналитических и численных вычислениях в ГТУ и в ГТЭ. Исследуются особенности эффектов концентрации вблизи включений различного размера, которые, в частности, могут быть использованы для теоретической оценки прочности композиционных материалов. Такие исследования на основе аналитических решений задач об изолированных включениях были выполнены в работах [94–96]. Исследование в рамках обобщенного самосогласованного метода и численного моделирования, в том числе для взаимодействующих включений, ранее не проводилось и выполнено в данной диссертации и в опубликованных работах автора [16, 97].

В диссертации рассматривается и общий случай задачи о включении произвольной гладкой формы, для которого показана эквивалентность прямых и энергетических методов осреднения в ГТУ, как обобщение соответствующего классического доказательства [98, 99]. Этот результат получен на основе интегральных формул Эшелби, которые были получены им в классической теории упругости в работе [100]. Обобщение этих формул на случай градиентной теории межфазного слоя (упрощенный вариант ГТУ, [13]) было сделано в работах С.А.

³Прямые методы осреднения основаны на вычислении эффективных свойств путем осреднения значений переменных модели по объему неоднородного представительного фрагмента. Энергетические методы основаны на предположении о равенстве энергии деформаций в исходной неоднородной и в эквивалентной эффективной среде

Лурье и Д.Б. Волкова-Богородского [49]. Вывод формул Эшелби в общей теории Миндлина-Тупина представлен в диссертации и в работе [101]. В представленном доказательстве эквивалентности прямых и энергетических методов осреднения в ГТУ существенным является использование фактических (не осредненных) значений тензора концентрации напряжений.

Рассматриваемые в диссертации градиентные балочные теории представляют собой модели, построенные на основе вариационной формулировки трехмерной ГТУ и классических гипотез Бернулли-Эйлера. В настоящее время известно два принципиально различных подхода к построению градиентных балочных теорий, отличающихся предположением о характере распределения градиентных напряжений по толщине балки. Условно, эти варианты можно обозначить как модели с одноосным напряженным состоянием [102] и с обобщенным напряженным состоянием [103]. Отличие между этими моделями существенное и заключается в структуре получаемых дифференциальных уравнений, в которых коэффициент изгибной жесткости при четвертой производной от прогибов либо остается классическим (в "одноосных" моделях), либо модифицируется и начинает зависеть от отношения толщины балки и масштабного параметра материала (в "обобщенных" моделях). Как следствие, "обобщенные" модели предсказывают бесконечный рост изгибной жесткости балки (по сравнению с классическим решением) при уменьшении ее толщины и в ГТУ [103], и в ГТЭ [104]. Аналогичные эффекты возникают и в градиентных теориях пластин и оболочек [105]. В последнее время проводятся активные исследования таких теорий, и их сопоставление в различных статических и динамических задачах [106–108]. В данной диссертации получены трехмерные и плоские полуобратные аналитические решения, которые могут быть использованы для проверки корректности градиентных балочных моделей. Предложен вариационный подход к построению "одноосных" балочных теорий, основанный на выполнении дополнительных граничных условий на верхней и нижней поверхностях балки. На основе этого подхода построен новый вариант градиентной балочной теории в рамках ГТЭ.

Важным является тот факт, что испытание малоразмерных балок на изгиб часто позиционируется как один из основных методов определения дополнительных масштабных параметров градиентных теорий [39, 109]. Поэтому принципиальным является построение корректных решений в ГТУ и ГТЭ для описания таких экспериментов, которые, вообще говоря, необязательно могут требовать привлечения градиентных теорий, а могут быть альтернативным образом описаны и в рамках других моделей обобщенных континуумов, например, с учетом поверхностных свойств [110]. Исследованию характера размерных эффектов, которые могут быть описаны в рамках градиентных моделей посвящены разделы 4.1 и 5.1 диссертации.

В диссертации построены полуобратные решения для задачи чистого изгиба. Примененный подход основан на идее, которая, по-видимому, впервые была предложена в работе Cowin и Nunziato [111] в микро-дилатационной теории упругости. Этот подход основан на предположении о выполнении гипотезы плоских сечений в центральных сечениях балки и введении неизвестной функции, определяющей неклассическое распределение поперечных перемещений по толщине балки. Эта функция находится из решения уравнений равновесия модели

с выполнением граничных условий на верхней и нижней поверхностях балки, что является принципиальным для исследования возникающих неклассических эффектов [112]. При этом граничные условия на остальных поверхностях балки формулируются в слабой (интегральной) форме для результирующих усилий и моментов на основе принципа Сен-Венана, обобщение которого на случай ГТУ было получено в работе [113].

Помимо испытаний микрокантилеверов, для идентификации дополнительных масштабных параметров градиентных теорий в настоящее время предложено достаточно много различных методик. В работе [114] идентификация проводилась путем сопоставления дисперсионных соотношений континуальной градиентной теории с оценками, получаемыми на основе динамики кристаллической решетки. В работах [115] масштабные параметры были определены на основе известных параметров потенциалов межатомного взаимодействия, а в работах [116, 117] на основе квантово-механических расчетов в рамках теории функционала плотности. В работе [115] рассматривались структуры двухатомных цепочек с потенциалом взаимодействия Леннарда-Джонса и, в том числе с нелокальным характером взаимодействий. Эти результаты позднее были обобщены нами на случай потенциала Морзе, и были получены аналитические оценки для связи масштабных параметров с параметрами потенциалов [118].

В работах [114–118] было показано, что идентифицируемые значения масштабных параметров для идеализированных структур и монокристаллов оказываются небольшими и имеют порядки межатомных расстояний. Однако для неоднородных сред масштабные параметры соответствующей модели эффективной среды, учитывающей градиентные эффекты, могут значительно превосходить параметры межатомных расстояний и определяться размерами ячейки периодичности материала. На основе решения обобщенной задачи осреднения для композитов с различными включениями, масштабные параметры были идентифицированы в работах [119, 120]. В том числе была показана связь этих параметров с известными в теории асимптотического осреднения решениями для приближений (членов разложения) второго и более высокого порядков [121], которые не рассматриваются при определении классических эффективных характеристик. При этом связь этих членов с градиентами макродеформаций обсуждалась и в классических работах по методам асимптотического осреднения [122]. Для некоторых классов механических метаматериалов с крупными ячейками периодичности масштабные параметры могут иметь и макроскопические значения [21].

Методы идентификации дополнительных параметров градиентных теорий могут быть основаны и на исследовании масштабных эффектов, проявляющихся в макроскопических испытаниях материалов. Во-первых, для композиционных материалов с различным размером включений можно получить теоретическую оценку зависимости эффективных свойств от размера включений и далее наложить эту оценку на результаты эксперимента. Подбирая значения масштабных параметров, можно получить хорошую согласованность расчета и эксперимента [13, 15, 123]. Типичные идентифицируемые значения масштабных параметров в таких задачах составляют порядка микрон [15], и они характеризуют, в первую очередь, межфазное взаимодействие между матрицей и включениями в композите. Другим методом определения масштабных параметров в ГТУ является испытание образцов с различной дли-

ной нанесенных трещин или с различным размером дефектов [45, 124]. В диссертации такой подход назван методом Васильева-Лурье, так как впервые он последовательно был реализован в работе [45] с подтверждением стабильности идентифицируемых значений в различных типах испытаний одного и того же материала (эпоксидной смолы). В диссертации на основе численной обработки экспериментальных данных проведена аналогичная идентификация для различных классов материалов, предложены методики описания размерных эффектов и прогноза разрушающих нагрузок в условиях сложно-напряженного состояния образцов с различными дефектами в рамках ГТУ.

Численные методы в градиентных теориях в настоящее время достаточно активно развиваются. Среди известных разработанных методов численного решения задач ГТУ можно отметить следующие основные подходы:

- Смешанный метод конечных элементов с введением промежуточных переменных для повышенных производных и с C^0 аппроксимацией (непрерывность основных переменных модели в узлах конечно-элементной сетки) [17, 18, 125–135].
- Метод конечных элементов с C^1 аппроксимацией (непрерывность основных переменных и их производных в узлах сетки) [23, 136–138]
- Методы изогеометрического анализа [139–144].
- Метод граничных элементов [145, 146].
- Бессеточный метод Галеркина [147–149].
- Метод Треффца и его обобщения [13, 150, 151].
- Некоторые другие методы, например, операторные [152] и метод штрафных функций [153].

У каждого из этих методов есть свои преимущества и недостатки, которые известны, в том числе и в рамках классических теорий. В диссертации привлекается и развивается смешанный метод конечных элементов (МКЭ) и метод Треффца. Первый является одним из наиболее перспективных и гибких, так как может быть реализован в рамках стандартных решателей. В частности, в диссертации используется Comsol. Среди стандартных интерфейсов и моделей в Comsol нет градиентных теорий, как и во всех остальных известных коммерчески доступных решателях. Поэтому для реализации численных расчетов уравнения ГТУ и ГТЭ были запрограммированы в Comsol с использованием универсальных интерфейсов для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка – General Form PDE и Weak Form PDE. При этом в исходных соотношениях градиентных моделей вводились промежуточные переменные для снижения необходимых порядков дифференцирования и, таким образом, был реализован смешанный МКЭ. Полученные в диссертации численные решения верифицированы с использованием построенных точных аналитических решений, в том числе для криволинейной геометрии и сложного трехмерного напряженного состояния.

Кроме этого, проведено сопоставление МКЭ и метода Треффца. Достоинством последнего является точное выполнение уравнений равновесия модели в объеме и аккуратный явный контроль ошибки решения на поверхности тела [151]. Последнее является особенно важным в градиентных теориях, в которых граничные условия могут иметь значительно более сложную форму, по сравнению с классическими моделями, и учитывать, например, кривизну поверхности и наличие острых кромок [25]. Ранее вариант обобщенного метода Треффца (гибридного метода с разбиением области на блоки-конечные элементы) был реализован в работах Д.Б. Волкова-Богородского и С.А. Лурье для градиентной теории межфазного слоя [13]. В диссертации этот метод реализован для варианта упрощенной градиентной теории упругости в формулировке Гао и Парка [154], учитывающей, в том числе, дополнительные граничные условия на кромках (ребрах) тела.

Применяемая в диссертации градиентная теория электроупругости учитывает связанные и градиентные эффекты в распределении полей перемещений и потенциала электрического поля в пьезоэлектрических средах. В качестве независимых переменных в определяющих соотношениях этой теории используются деформации и напряженность электрического поля, через которые выражаются напряжения и электрическая индукция. Вариант этой теории был впервые предложен в работе [86] и рассматривался недавно в работах [93, 104, 155, 156]. Существует и иная часто используемая формулировка градиентной электроупругости, в которой учитываются градиенты поляризации [157, 158] (то есть в качестве независимых переменных используются компоненты вектора поляризации). Достоинством рассматриваемой теории является ее естественное обобщение других хорошо известных моделей – в отсутствии эффектов связанности эта теория распадается на градиентную теорию упругости [25] и на так называемую теорию диэлектриков с естественной оптической активностью [80, 159]. При этом уравнения рассматриваемой ГТЭ имеют более простую структуру, что позволяет получать более простые замкнутые аналитические решения. Именно ГТЭ с учетом градиентов напряженности электрического поля, может быть сформулирована с использованием обобщенной нотации Барнета и Лоте, в которой основные переменные модели (перемещения точек среды и потенциал электрического поля) образуют единый четырехмерный вектор, а из их производных может быть составлен тензор обобщенных деформаций (включающий напряженность электрического поля) [160]. Таким образом, учитывая градиентные эффекты для обобщенных деформаций, получаем рассматриваемый вариант теории градиентной электроупругости. Запись соотношений модели в форме Барнета и Лоте позволяет удобным образом обобщать решения задач упругости на соответствующие задачи электроупругости. В диссертации это используется при выводе интегральных формул Эшелби для ГТЭ. Связь между теориями, учитывающими градиенты напряженности электрического поля и градиенты поляризации была показана в работе Ж. Можена [161]. Обобщенный самоогласованный метод осреднения в классической теории пьезоэлектриков рассматривался в работах [162, 163]. Этот метод реализован в диссертации для ГТЭ. Балочные теории, широко применяемые при анализе различных пьезоэлектрических элементов, рассматривались в работах [164–166].

В последней главе диссертации рассматриваются, в том числе динамические проблемы в ГТЭ. Здесь, в частности, показана важность учета градиентных инерционных эффектов, игнорирование которых приводит к некорректным дисперсионным соотношениям с аномальной пространственной дисперсией объемных волн, что не согласуется с моделями динамики кристаллической решетки [1]. Такие эффекты являются характерными для градиентных теорий. При разработке динамической формулировки ГТУ, Р. Миндлин в 60-х годах предположил, что форма плотности кинетической энергии должна оставаться классической в градиентных моделях [167]. Однако в этом случае возникает аномальная пространственная дисперсия⁴, и поэтому Р. Миндлином было сделано предположение, что градиентные теории второго порядка являются некорректными, а для динамических задач требуется рассматривать теории третьего порядка (с учетом вторых производных от деформаций) [167]. Эта позиция сохранялась более 40 лет и отчасти именно она ограничивала развитие и применение градиентных теорий. Такая же позиция распространялась и на модели пьезоэлектриков в ГТЭ [159]. Однако, в начале 2000-х годов было показано, что форма плотности кинетической энергии в ГТУ также должна быть модифицирована и должна учитывать градиенты инерционных слагаемых, что позволяет получить корректные дисперсионные соотношения [1, 51, 168].

Модификацию формы кинетической энергии градиентных теорий можно достаточно просто обосновать путем рассмотрения их связи с микроморфными теориями типа Миндлина-Эрингена. Микроморфные теории обладают расширенным набором кинематических переменных и предполагают существование различных форм микро-деформаций в точках среды, которые также можно трактовать как поля дефектов [59]. Если предположить, что микро- и макро-деформации пропорциональны (или равны)⁵, то вариационная формулировка микроморфной теории может быть сведена к соответствующей градиентной теории. Так вот, если рассматривать динамическую формулировку микроморфной теории, то она должна включать в себя инерционные слагаемые для дополнительных кинематических переменных (это так называемые эффекты "микро-инерции"). При переходе к "длинноволновому приближению" эти слагаемые переходят в градиенты от классических инерционных слагаемых и приводят к возникновению в уравнениях движения ГТУ членов вида $u_{,ttxx}$. В своей исходной работе по градиентным теориям Р. Миндлин получал именно такие соотношения [25], однако затем отказался от них, предполагая их несущественными для градиентных теорий [167, 169]. Заметим, что подобные же члены вида $u_{,ttxx}$ возникают во многих известных физических моделях, учитывающих эффекты пространственной дисперсии, например, в двойных дисперсионных уравнениях [170, 171], в уравнении Rochhammer-Chree [172] и в некоторых моделях гидродинамики. Эти известные модели являются нелинейными, однако, в ГТУ и ГТЭ такие слагаемые возникают и в корректной линейной постановке. Важность их учета в ГТЭ впервые показана в диссертации.

⁴При аномальной пространственной дисперсии фазовая скорость волн возрастает при увеличении частоты. Напротив, при нормальной дисперсии фазовая скорость убывает. Модели динамики кристаллической решетки предсказывают нормальную дисперсию для акустической ветви упругих колебаний. Корректно формулируемые модели обобщенных континуумов позволяют такие эффекты описывать.

⁵Такое предположение называется "длинноволновым приближением" [25] или обобщенной гипотезой Аэро-Кувшинского [59]

Цели и задачи

Целью диссертации является развитие аналитических и численных моделей и методов построения решений в градиентной теории упругости и электроупругости для достоверного и корректного описания масштабных эффектов, возникающих в упругих и пьезоэлектрических материалах и в элементах конструкций. Целью также является развитие методов идентификации дополнительных параметров градиентных теорий.

Задачи диссертации:

1. Развитие аналитических подходов к построению решений задач ГТУ и ГТЭ, в том числе, полуобратного метода, метода представления решения в форме Папковича-Нейбера в ГТУ, метода преобразования переменных для связанных задачах ГТЭ.
2. Построение трехмерных и плоских решений для задачи изгиба балки (полосы) в рамках ГТУ и ГТЭ. Применение полученных решений для исследований корректности формулировки градиентных масштабозависимых балочных теорий. Разработка вариационных подходов для построения и обоснования корректности градиентных балочных теорий, учитывающих расширенный спектр граничных условий.
3. Построение аналитических и численных решений для задач о включениях в рамках ГТУ и ГТЭ. Сопоставление различных методов определения эффективных характеристик в рамках градиентных теорий. Доказательство эквивалентности энергетических и прямых методов осреднения в ГТУ и ГТЭ. Исследование особенностей эффектов концентрации вблизи включений различного размера. Исследование влияния масштабных эффектов на эффективные свойства композитов с упругими и пьезоактивными фазами.
4. Развитие методов численного моделирования в рамках ГТУ и ГТЭ на основе смешанного метода конечных элементов и метода Треффца. Верификация реализованных численных решателей на основе сопоставления с аналитическими решениями.
5. Развитие методов идентификации масштабных параметров ГТУ и ГТЭ путем описания масштабных эффектов в композитах, а также в рамках реализации метода Васильева-Лурье. Развитие методов оценки прочности тел с трещинами и концентраторами в рамках численного моделирования в ГТУ.
6. Анализ возможности получения регулярных решений и анализ размерных эффектов в упрощенных моделях ГТУ для задач с сосредоточенными нагрузками, задаваемыми на острых кромках.
7. Исследование возможности корректного описания эффектов пространственной дисперсии высокочастотных электроакустических волн в пьезоэлектрических средах на основе моделей ГТЭ.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются упругие и пьезоэлектрические материалы, в которых в процессе механического нагружения реализуется деформированное состояние с высокими пространственными градиентами вследствие наличия неоднородной структуры, концентраторов, трещин, разрывных граничных условий.

Предметом исследований являются модели механики деформируемого твердого тела, учитывающие зависимость плотности энергии деформаций от деформаций и их градиентов, что обеспечивает возможность уточненного описания напряженно-деформированного состояния материалов в зонах с концентрацией напряжений и позволяет учитывать неклассические масштабные эффекты.

Научная новизна

Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. Предложены новые аналитические и численные методы построения решений в ГТУ и ГТЭ. Построены новые масштабозависимые решения для задач о сферических и цилиндрических включениях. Впервые получено доказательство эквивалентности прямых и энергетических методов осреднения в рассматриваемых теориях. Продемонстрирована возможность описания масштабного эффекта прочности хрупких и квази-хрупких материалов на основе численного моделирования и концепции концентрации напряжений в ГТУ. Предложен модифицированный критерий прочности для оценки разрушающих нагрузок на основе ГТУ в условиях смешанной I/II моды в зонах с концентраторами напряжений. Проведена идентификация масштабных параметров градиентных теорий на основе экспериментальных данных для широкого класса материалов. Впервые в рамках ГТУ решена обобщенная задача Фламана, на основе которой определен класс градиентных теорий, в которых возможна регуляризация решений вблизи нагруженных острых кромок. Предложена новая формулировка динамической ГТЭ, позволяющей корректно описывать эффекты пространственной дисперсии.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы определяется построенными новыми аналитическими решениями, которые могут быть использованы, как для тестирования прикладных моделей (градиентных балочных теорий, численных решателей), так и для упрощенной и быстрой обработки экспериментальных данных. Предложено новое упрощенное представление общего решения уравнений равновесия ГТУ, использование которого является удобным при построении аналитических решений широкого класса задач.

Практическая значимость работы определяется развитием методов численного моделирования в рамках градиентных теорий, которые могут быть использованы для построения сходящихся решений, не зависящих от размера сетки, в задачах с линейно упругими телами с негладкой геометрией или с разрывными граничными условиями. Практическая значимость также определяется развитием и реализацией методов идентификации масштабных параметров градиентных теорий, в том числе на основе численной обработки результатов испытаний

образцов с различными концентраторами.

Методология и методы исследования

Формулировка рассматриваемых градиентных теорий основана на использовании вариационного подхода, в частности, привлекаются принцип минимума полной потенциальной энергии и принцип наименьшего действия и их обобщения на случай модели электроупругих сред. Все решения построены в предположении линейных физических соотношений и малых деформаций.

В задачах осреднения рассматриваются и сравниваются, в первую очередь, обобщенный самосогласованный метод (энергетический) и метод Мори-Танака (прямой). Также в ряде задач привлекаются модель изолированного включения и дифференциальный метод осреднения. Численный расчет эффективных свойств и параметров концентрации основан на решении задачи осреднения для представительных фрагментов с одним или несоколькими включениями, и с заданием обобщенных периодических граничных условий, учитывающих как непрерывность классических переменных модели, так и дополнительные граничные условия градиентных теорий. Аналитическое решение для задачи сферического включения построено на основе представления общего решения в форме Папковича-Нейбера в ГТУ, в котором для градиентной составляющей решения использована теорема разложения Гельмгольца для представления векторного потенциала через соответствующие скалярные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца. Для скалярных потенциалов, в свою очередь, использовано известное представление через сферические гармоники и сферические функции Бесселя. Аналогичный подход использован в плоских задачах ГТУ, в которых скалярные потенциалы представляются через модифицированные функции Бесселя и тригонометрические функции.

Замкнутые аналитические решения для антиплоских задач осреднения в ГТЭ получены с использованием метода замены переменных, основанного на одновременной диагонализации матриц материальных констант в фазе включения и матрицы, что обеспечивает сведение связанной задачи электроупругости к двум несвязанным задачам упругости и электростатики.

Оценки для эффективных свойств суспензий с учетом размеров наполнителей получены на основе замкнутых аналитических решений для упругих сред со сферическими и цилиндрическими включениями, в которых сделано предположение о несжимаемости матриц и абсолютно жестких включениях.

Градиентные балочные теории, рассматриваемые в диссертации, построены на основе гипотез Бернулли-Эйлера для перемещений и их обобщения на случай пьезоэлектрической среды с заданием квадратичной функции распределения потенциала по толщине балки. Трехмерные и плоские решения построены на основе полуобратного метода Сен-Венана с заданием условий нагружения на краях балки в слабой форме относительно результирующих. Сопоставление трехмерных и плоских решений с балочными теориями проводится для проверки корректности последних. Для этого в более общих 3d и 2d решениях дела-

ется предельный переход к среде с нулевым коэффициентом Пуассона (что предполагается в балочных теориях) и оценивается распределение прогибов на нейтральной оси балки. Полученное значение прогибов сопоставляется с соответствующими оценками из балочных теорий. В численном моделировании дополнительно оценивается влияние краевых эффектов на напряженное состояние градиентных упругих и электроупругих балок.

Идентификация масштабных параметров градиентных теорий реализована на основе сопоставления расчетных и экспериментальных данных по зависимости эффективных свойств композитов с разным размером включений и по зависимости разрушающей нагрузки от размеров концентратора в различных типах образцов хрупких и квази-хрупких материалов (в рамках метода Васильева-Лурье).

Численное моделирование реализовано на основе смешанного метода конечных элементов с введением аппроксимации не только для основных переменных модели, но и для их производных. Сходимость реализованного МКЭ проверена сопоставлением с аналитическими решениями при увеличении плотности сетки. Для ГТУ реализован метод Треффца, в котором решение для перемещений представлено в виде разложения по системе функций из полиномиальных и экспоненциальных функций. Сходимость метода Треффца исследована при увеличении числа членов ряда в разложении искомого решения и при увеличении коллокационных точек, в которых требуется выполнение граничных условий.

В динамических задачах ГТЭ построены дисперсионные соотношения для моделей, учитывающих градиентные инерционные эффекты, которые вводятся в модели путем рассмотрения обобщенной формы кинетической энергии, учитывающей "миро-инерцию". Решения построены для плоских гармонических волн сдвига в электростатическом приближении.

Все примеры численных расчетов реализованы в Comsol (метод конечных элементов) и в Wolfram Mathematica.

Положения, выносимые на защиту

1. Общее решение в перемещениях для уравнений равновесия ГТУ может быть представлено в виде аддитивного разложения на классическую часть, представляемую в стандартной форме Папковича-Нейбера, и градиентную часть, для которого используется модифицированное разложение Гельмгольца. Предлагаемое представление позволяет свести решение задачи ГТУ к отысканию скалярных потенциалов, которые удовлетворяют уравнению Лапласа и модифицированному уравнению Гельмгольца.
2. Построенные аналитические и численные решения для задач о включениях и реализованные методы осреднения в ГТУ и в ГТЭ позволяют описывать повышение эффективных механических и электромеханических характеристик композиционных материалов при уменьшении размера включений и при отсутствии их агломерации. Причиной возникающего масштабного эффекта является дополнительное условие непрерывности нормальных градиентов перемещений (и потенциала поля) на границе контакта фаз.
3. Показано, что прямые и энергетические подходы к определению эффективных свойств

неоднородных сред в ГТУ и ГТЭ эквивалентны, что позволяет использовать численное моделирование и замкнутые решения прямых методов для достоверного прогноза эффективных свойств композитов с учетом размера включений. Отличие в прогнозах прямых методов возникает при осреднении тензоров концентрации по объему включений, что приводит к погрешностям при больших объемных содержаниях малоразмерных включений.

4. Предложенный полуобратный метод для решения задач изгиба в градиентных теориях позволяет построить замкнутые трехмерные решения и проверить корректность одномерных градиентных балочных теорий. Построенные полуобратные решения и предложенный модифицированный вариационный подход позволили сформулировать новую градиентную теорию пьезоэлектрических балок.
5. Реализованный смешанный метод конечных элементов позволяет получать достоверные сходящиеся решения для задач ГТУ и ГТЭ, содержащих области с угловыми точками, трещинами и сосредоточенными нагрузками.
6. На основе численного моделирования в ГТУ показана возможность описания размерных эффектов в отношении зависимости номинальной прочности хрупких и квази-хрупких материалов от длины и ориентации трещин. Обработка данных по испытаниям образцов с различными типами трещин позволяет идентифицировать дополнительные масштабные параметры ГТУ. Для прогноза разрушающих нагрузок в условиях смешанной I/II моды в рамках ГТУ необходимо привлекать обобщенный критерий, учитывающий триаксиальность напряженного состояния.
7. На основе построенных асимптотических решений для обобщенной задачи Фламана установлен класс градиентных теорий, которые обеспечивают регуляризацию поля перемещений, деформаций и напряжений, и, как следствие, отсутствие сеточной зависимости решений в задачах для тел с нагруженными острыми кромками.
8. Предложенная формулировка динамической ГТЭ, учитывающая градиентные инерционные эффекты, позволяет корректно описывать нормальную пространственную дисперсию высокочастотных объемных и поверхностных электроакустических волн.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов определяется применяемыми строгими методами механики деформируемого твердого тела, привлечением вариационных принципов для формулировки моделей, использованием апробированных подходов микромеханики композиционных материалов, методов теории дифференциальных уравнений и векторного анализа. Проводится сопоставление решений, получаемых на основе различных аналитических и численных методов, для оценки корректности последних. Проводится сопоставление результатов моделирования с известными экспериментальными данными, для подтверждения результатов расчетов и идентификации дополнительных параметров моделей.

Результаты диссертационной работы докладывались на российских и международных конференциях, семинарах и симпозиумах: 16th European Mechanics of Materials Conference (2018 г., Нант, Франция), 10th European Solid Mechanics Conference (2018 г., Болонья, Италия), международная конференция "Advanced Problems in Mechanics" (2015, 2019 гг., Санкт-Петербург), XI и XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (2015, Казань; 2019, Уфа), конференция Mechanics of Composites, Mechcomp 3 (Болонья, Италия, 2017), конференциях Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред (2017, 2018, 2019, 2020, 2021, Москва, ИПРИМ РАН), международный симпозиум "IUTAM Symposium – Generalized continua emerging from microstructures" (2021, Париж, Франция), международный семинар Advances in ELAstoDYNamic, NonLinear mechanics and Stability of architected materials and structures (2021, Париж, Франция, CNRS).

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 22 печатных работах [16, 22, 50, 97, 101, 107, 151, 173–187], из которых 21 опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus и RSCI, и 1 статья опубликована в сборнике трудов конференции, индексируемом в Scopus.

Личный вклад автора

Результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор принимал активное участие в постановке научных задач, разработке теоретических моделей и построении аналитических решений, проведении численного моделирования, анализе полученных результатов и предоставлении их в печати. Непосредственное построение решений для задач о включениях, задач об изгибе балок и задачи Фламана, реализация численных решателей в виде программного кода в Wolfram Mathematica и в виде пользовательских моделей в Comsol, обработка экспериментальных данных были выполнены автором лично. Постановка задач о чистом изгибе балки и анализ построенных решений для задач с концентрацией напряжений в ГТУ – были выполнены совместно с С.А. Лурье, Е.В. Ломакиным, Л.Н. Рабинским [22, 50, 107, 176, 182]. Анализ масштабных эффектов в решениях ГТУ и ГТЭ – совместно с С.А. Лурье, В.А. Короленко, А.Д. Устенко [16, 97, 107, 173, 175, 177, 178, 181, 185]. Формулировка концепции концентрации напряжений для численных решателей в задачах механики разрушения – совместно с В.В. Васильевым и С.А. Лурье [188]. Анализ вариационной постановки и граничных условий в различных формулировках ГТУ – совместно с С.А. Лурье, А.Л. Каламкарковым, Н. Altebach, F. dell’Isola [186, 187].

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации составляет 295 страниц, включая 90 рисунков и 2 таблицы. Список цитируемой

литературы содержит 388 наименований.

В первой главе представлен краткий обзор литературы по проблеме теоретического описания известных масштабных эффектов в механике материалов и конструкций. **Во второй главе** представлены общие формулировки рассматриваемых градиентных теорий, их упрощенные варианты с редуцированным набором дополнительных масштабных параметров в определяющих соотношениях, представлена формулировка ГТУ в произвольной криволинейной системе координат в терминах ковариантных производных. **В третьей главе** изложены привлекаемые методы построения аналитических и численных решений. Предложены варианты записи решения уравнений равновесия в форме Папковича-Нейбера для общей формулировки ГТУ и некоторых частных случаев. Получены интегральные формулы Эшелби для общей ГТУ Миндлина-Тупина и для ГТЭ, представлено доказательство эквивалентности прямых и энергетических методов осреднения, дана формулировка применяемых численных методов. **В четвертой главе** представлены результаты, полученные в рамках ГТУ. Здесь представлены решения для задач изгиба, на основе которых проведен анализ известных балочных моделей в ГТУ. Дано изложение вариационного подхода к построению градиентных балочных теорий с учетом граничных условий на верхней и нижней поверхностях балки. Представлены решения задач осреднения для композитов со сферическими и цилиндрическими включениями. Проведено сопоставление различных методов осреднения. Исследовано влияние масштабных эффектов на эффективные свойства и параметры концентрации напряжений вблизи включений. Представлены результаты идентификации дополнительных масштабных параметров ГТУ. Представлены решения ГТУ для задач с концентрацией напряжений, включая моделирование размерных эффектов в задачах о трещинах и острых вырезах и решение задачи о клине с заданной сосредоточенной нагрузкой в вершине. **В пятой главе** представлены результаты, полученные в рамках ГТЭ. Представлено новое решение задачи чистого изгиба полосы, которое использовано для тестирования градиентных теорий пьезоэлектрических балок. На основе обобщения предложенного в четвертой главе вариационного подхода, получена формулировка новой градиентной балочной теории в ГТЭ. Представлены аналитические и численные решения задач осреднения в ГТЭ. Проведен анализ влияния масштабных эффектов, прогнозируемых в ГТЭ для пьезокомпозитных материалов. Предложена корректная динамическая формулировка ГТЭ и построены решения для объемных и поверхностных поперечных электроакустических волн, включая волны Блюстейна-Гуляева и волны Лява.

Глава 1. Масштабные эффекты в механике материалов и конструкций. Обзор работ по тематике исследования

Определяющие соотношения классических моделей механики и физики сплошных сред включают в себя первые пространственные производные от обобщенных переменных (перемещений, потенциала электрического поля, температуры⁶ и т.д.). Следствием этого является тот факт, что в несвязанной постановке классических моделей присутствуют материальные константы одинаковой размерности, а масштабных параметров не возникает. Вводимые термодинамические потенциалы записываются в виде квадратичных форм от первых производных обобщенных переменных, а балансовые уравнения в локальной форме имеют второй порядок по пространственным координатам.

Предположение о том, что внутренняя энергия среды может зависеть и от производных второго, третьего и т.д. порядков, приводит к возникновению в модели дополнительных материальных констант, отличающихся от классических на размерность длины. Действительно, для записи скалярной функции плотности внутренней энергии в виде квадратичной формы от производных порядка m от одной и той же величины, необходимо, чтобы соответствующие слагаемые входили с коэффициентами, которые отличаются по размерности на значение $[M]^{2(m-1)}$. В частности, в рассматриваемых в данной диссертации градиентных теориях второго порядка учитывается вклад во внутреннюю энергию от вторых производных обобщенных переменных, а все возникающие дополнительные материальные константы отличаются по своей размерности от классических на квадрат длины. На этом основан подход к введению масштабных параметров в градиентных теориях (и в целом в моделях обобщенных континуумов). Например, в градиентной теории упругости (ГТУ) дополнительные материальные константы обычно представляются в виде $A = l^2 C$, где A - некоторая дополнительная константа градиентной теории размерности $[Pa \cdot m^2]$, C - некоторая классическая константа жесткости с размерностью $[Pa]$, и l - дополнительный масштабный параметр ГТУ.

Наличие дополнительных констант и, связанных с ними масштабных параметров, позволяет применять градиентные теории для описания явлений, называемых масштабными (или размерными) эффектами. Суть масштабных эффектов заключается в том, что абсолютные размеры изучаемого объекта оказывают влияние на его свойства и характер протекающих в нем физических процессов. В экспериментальной физике и в механике известно достаточно большое количество размерных эффектов. Краткая характеристика некоторых известных явлений, для описания которых могут привлекаться градиентные теории, дается ниже.

Наиболее известный в механике масштабный эффект связан с зависимостью прочности материалов от размера испытываемого образца. Разделяют статистический и так называемый

⁶Соответствующие определяющие соотношения – это обобщенный закон Гука в теории упругости, связь между электрической индукцией и напряженностью электрического поля в электростатике, закон Фурье в теории теплопроводности и т.д.

мый "энергетический" масштабные эффекты прочности [189]. Статистический эффект определяет зависимость прочности образцов от их размеров вследствие более высокой вероятности присутствия дефектов (пор, микротрещин) в большом объеме материала. Такие эффекты не являются предметом для изучения в рамках градиентных теорий. А вот "энергетический" эффект, то есть влияние размера дефекта на величину интенсивности напряжений, уже может быть описан в рамках градиентных теорий [45, 46, 124, 131, 190–192].

В классической линейно упругой механике разрушения (ЛУМР) "энергетический" масштабный эффект может быть описан для дефектов относительно большой длины [189]. При этом необходимо задавать дополнительные характеристики трещиностойкости материала (например, в рамках силового подхода – критические коэффициенты интенсивности напряжений K_{Ic} , K_{IIc} , K_{IIIc}), а роль масштабных параметров в ЛУМР играют величины, пропорциональные соотношению вида $l_{KIc} \sim (K_{Ic}/\sigma_u)^2$ [м], где σ_u – предел прочности материала. Для дефектов малой длины (меньше l_{KIc}) ЛУМР оказывается не применима, так как прогнозирует бесконечный рост прочности материала при уменьшении размеров присутствующих в нем дефектов.

Для описания явления перехода от разрушения, определяемого интенсивностью напряжений вблизи малоразмерного дефекта в виде надреза или трещины, к разрушению, определяемому пределом прочности материала, в классических теориях требуется введение дополнительных гипотез и соотношений, таких как закон размерного эффекта Базанта [193] или модели когезионных элементов в рамках подхода Баренблатта-Дагдейла. В линейной ГТУ, оказывается, что такие дополнительные предположения делать нет необходимости. Для трещин произвольной длины в ГТУ в вершине трещины прогнозируется конечное значение напряжений ("классических" напряжений, которые энергетически связаны с деформациями) [4, 7, 194, 195], и оценку прочности можно проводить на основе стандартных критериев [45, 46, 124, 190]. Для малоразмерных дефектов, размер которых сопоставим с масштабным параметром модели, в ГТУ прогнозируется снижение концентрации напряжений. Вследствие этого материал в ГТУ "не чувствует" наличия малоразмерных дефектов, присутствующих в геометрии модели, и разрушающая нагрузка для него определяется пределом прочности [124, 190]. Таким образом в ГТУ появляется возможность единого описания зависимости разрушающей нагрузки от размеров дефектов вплоть до микроскопических [124, 190]. Этим ГТУ аналогична теории критических расстояний [196], и взаимосвязь между этими теориями при описании прочности тел с трещинами обсуждалась в работах [197, 198].

Другой тип масштабных эффектов, который может быть описан в рамках градиентных теорий, связан с влиянием размера включений на эффективные свойства композитов. В наиболее значительной степени такие эффекты проявляются в нанокompозитах, содержащих включения размером менее 1...0.1 мкм, в которых площадь межфазной поверхности оказывается чрезвычайно большой, и свойства границ контакта начинают существенно влиять на макроскопические свойства материала [199–205].

Описание масштабных эффектов в композитах в рамках градиентных теорий основно на

учете дополнительных условий непрерывности, которые должны выполняться на границе раздела фаз. В отличие от классических моделей микромеханики, в градиентных теориях требуется удовлетворение непрерывности не только по классическим переменным модели, но и по нормальным производным от этих переменных на границе контакта. Как следствие, например, в ГТУ более жесткие фазы, в которых деформации относительно малы, начинают оказывать влияние на контактирующие с ними более податливые фазы. Вблизи границы контакта деформации фаз изменяются непрерывно, что приводит к появлению эффекта межфазного (пограничного) слоя, то есть зоны, в которой деформации более податливой фазы оказываются сниженными по сравнению с классическим решением [13–15, 94, 123, 150, 175]. Заметим, что подобные эффекты наблюдаются и в дискретном атомистическом моделировании [206]. Протяженность межфазной зоны определяется дополнительными градиентными материальными константами. При нулевых значениях этих параметров реализуется классическое решение, а при их увеличении происходит рост интенсивности градиентных эффектов и соответствующее увеличение межфазной зоны, в которой материал податливой фазы находится в стесненном ("упрочненном") состоянии. При этом в отличие от классического решения, в котором микроструктура материала характеризуется только безразмерными параметрами (объемное содержание, относительное удлинение включений и т.п.), в градиентном решении появляется дополнительный размерный параметр, который всегда входит в решение в виде отношения характерного размера включения (например, радиуса) к масштабному параметру модели. Иллюстрация к определению размера включений в представительных фрагментах композитов через масштабный параметр представлена на рисунке 1.

Для композитов с меньшим размером включений градиентные теории всегда предсказывают повышение эффективных характеристик – тех, которые входят в запись квадратичной формы соответствующей термодинамической функции. Например в градиентной теории деформаций (strain gradient elasticity) внутренняя энергия (энергия деформаций) зависит от деформаций и их градиентов. Поэтому эта теория предсказывает повышение эффективных

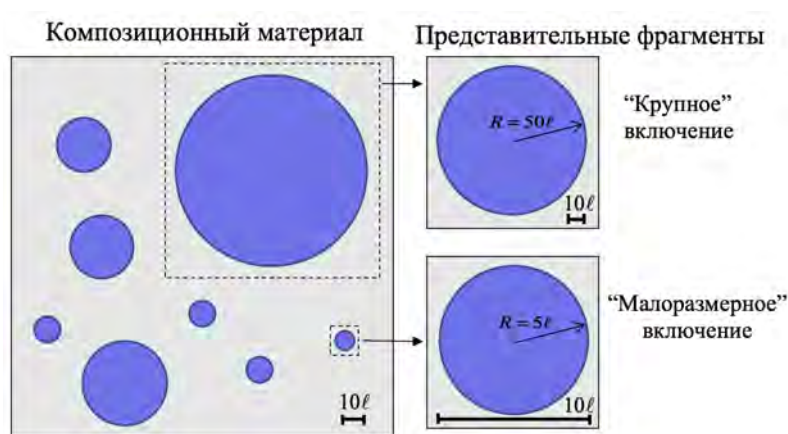


Рис. 1: К определению размера включений в представительных фрагментах композиционных материалов в рамках градиентных теорий. Модели представительных фрагментов с "крупным" и с "малоразмерным" включениями обладают одинаковой геометрией, но разным отношением радиуса включений R к масштабному параметру l

модулей упругости композиционных материалов [13–15, 94, 175]. Причем повышение свойств не выходит за рамки классических вариационных оценок (вилки Фойгта-Рейса), что объясняется тем, что эти классические оценки получены в предположении однородного напряженного или деформированного состояния фаз композита, для которых градиентные и классические решения совпадают [175]. С энергетической точки зрения, повышение эффективных свойств объясняется тем, что работа внешних сил расходуется в ГТУ, в том числе, на дополнительную часть энергии деформаций, которая связана с их градиентами. Как следствие, происходит снижение средних деформаций представительного фрагмента, определяющих классические эффективные модули упругости.

В градиентной теории напряжений (stress gradient elasticity) происходит обратный эффект – эффективные модули упругости всегда снижаются по сравнению с классическим решением [207]. Этот факт объясняется тем, что в этой теории основными переменными становятся напряжения, а записываемая через них дополнительная энергия деформаций среды выражается через коэффициенты податливости. Поэтому в этом случае происходит повышение эффективной податливости материала. Аналогичные эффекты реализуются и в других физических моделях в теплопроводности, в диффузии, в электроупругости, вязкоупругости и т.д. Поэтому, вообще говоря, область применимости градиентных теорий ограничивается такого рода зависимостями для эффективных свойств. Если в композиционном материале реализуется более сложный размерный эффект (например немонотонный [208]), то, с точки зрения его феноменологического континуального описания, требуется привлечение более общих моделей, например, дополнительно учитывающих поверхностные эффекты [209], поля дефектов и параметры поврежденности материала [210, 211], эффектов агломерации включений [212, 213] и т.п. При этом влияние агломераций включений может быть учтено и в численных расчетах в рамках градиентных моделей для представительных фрагментов, содержащих несколько включений. В таких моделях расстояние между включениями начинает влиять на значения эффективных характеристик. Например, для эффективных свойств материалов со сферическими включениями это было показано в работе автора [16] в рамках градиентной теории электроупругости (ГТЭ).

Заметим, что размерные эффекты в композиционных материалах часто могут быть описаны на основе различных других моделей, помимо градиентных. Например, присутствие межфазных зон может учитываться введением в классических моделях микромеханики дополнительного слоя между включением и матрицей, который обладает собственными свойствами [214]. Могут привлекаться различные теории из класса микро-морфных моделей Миндлина и Эрингена [215] или модели сред с поверхностными свойствами типа Гуртина-Мердока и их обобщения [216, 217]. Выбор конкретной теории для описания композиционного материала является в настоящее время достаточно произвольным и основанным чаще всего на простоте получаемого решения и на хорошем совпадении результатов расчетов с экспериментальными данными. Достоинством градиентных теорий является, во-первых, возможность в некоторых случаях более простого описания возникающих эффектов с меньшим числом дополнительных параметров. Например, для двухфазного композита можно

получить решение с единственным масштабным параметром материала матрицы вместо дополнительных двух классических характеристик упругости межфазного слоя, к которым также необходимо добавить толщину этого слоя. Во-вторых, в некоторых материалах зона межфазного слоя может вообще не наблюдаться в эксперименте ни визуально, ни на основе химического анализа состава, хотя из макроэксперимента непосредственно следует, что эффекты упрочнения связаны с объемным содержанием и размером частиц наполнителя [218]. В этом случае толщина и характеристики межфазного слоя становятся свободными параметрами модели и применение двухфазных градиентных моделей вместо трехфазных классических представляется наиболее обоснованным.

Еще одним критерием, который может говорить о целесообразности применения той или иной микромеханической модели, является характер изменения переменных модели и их производных вблизи включений. Например, теоретические оценки для параметров концентрации напряжений и деформаций в представительном фрагменте могут быть использованы для прогноза эффективных характеристик пластичности и прочности композитов [219, 220]. Поэтому измерение таких макроскопических характеристик материала позволяет дополнительно оценить достоверность микромеханических теорий. Кроме этого, с привлечением современных экспериментальных методов, измерения могут проводиться и на микроуровне. В классических моделях максимум напряжений и деформаций реализуется на границе контакта фаз (в том числе в моделях многослойных включений). В моделях с поверхностными эффектами на границе контакта реализуется разрыв в касательных напряжениях [217] (или в перемещениях в направлении нормали к поверхности [221]). В градиентных же моделях выполняются все классические условия непрерывности переменных модели, а также условия по непрерывности их производных. Это приводит к тому, что максимум деформаций смещается от границы включения в объем более податливой фазы [175, 182]. Следствием этого, является тот факт, что в ГТУ прогнозируется начало образования микродефектов или переход в пластичность в материале матрицы на некотором удалении от границы контакта с малоразмерными включениями. Для крупных включений градиентное решение выходит на классическое, и начало разрушения прогнозируется на границе контакта. Поэтому анализ картины деформаций и повреждений на уровне микроструктуры материала (с использованием методов микроанализа и методов цифровой корреляции изображений) может позволить идентифицировать конкретный тип микромеханической модели, который целесообразно применять для рассматриваемого материала.

Таким образом, необходимо отдельно выделять механизмы упрочнения композитов, связанные с градиентными эффектами, при которых в материале матрицы вблизи включений реализуются стесненное состояние (для упругих сред), и происходит повышение эффективных свойств. Очевидно, что такие эффекты могут реализовываться только в случае хорошей адгезионной связи между матрицей и включениями, которая обеспечивает непрерывность и перемещений, и деформаций на границе контакта фаз. Если же в материале присутствует явно выраженная межфазная зона с известными собственными характеристиками, то наиболее естественное описание таких материалов основано на классических моделях мно-

гослойных включений. Если включение покрыто некоторым жестким или, наоборот, податливым слоем очень малой толщины по сравнению с радиусом включения, то такие материалы следует описывать в рамках моделей поверхностной теории упругости [216, 221]. Еще одной причиной упрочнения нанокомпозитов может являться изменение свойств самих армирующих включений при уменьшении их размера. Такие эффекты были установлены на основе молекулярно-динамического моделирования для нанодисперсных наполнителей размером менее 20 нм [222]. Учет таких эффектов может проводиться как на основе моделей поверхностной теории упругости, так и на основе градиентных теорий [186].

Отметим, что аналоги перечисленных моделей в настоящее время разработаны не только в рамках моделей упругих сред, но и для различных других физических теорий, например, в электроупругости, в теории теплопроводности и т.д. [156, 223–225]. Известны и комбинированные модели, в которых для многослойной структуры включений дополнительно учитываются поверхностные и градиентные эффекты [226].

Для поликристаллических материалов размерным эффектом обычно называют влияние размера зерна на предел текучести, параметры упрочнения, предел прочности, твердость [227, 228]. Феноменологическое теоретическое описание таких эффектов может быть дано в рамках градиентных моделей пластичности, в которых закон упрочнения включает зависимость от градиентов пластических деформаций [229, 230]. Вариант подхода к учету влияния размера зерен в хрупких поликристаллических материалах также может быть основан на учете собственных свойств межзеренной фазы в рамках моделей неоднородных сред в ГТУ [231].

Для теоретической оценки параметров упрочнения дисперсно-армированных сплавов и твердых растворов в металловедении обычно привлекаются соотношения Орована (дисперсионное упрочнение, связанное с торможением дислокаций на малоразмерных частицах) и Тейлора (упрочнение, связанное с различием термомеханических свойств частиц и матрицы, и образованием дислокаций вблизи включений) [232]. Эти соотношения получены на основе дислокационных теорий, и в них напрямую входят такие параметры как размер частиц и расстояние между ними. В настоящее время нет работ, в которых бы приводился анализ и сопоставление моделей упрочнения Орована и Тейлора с оценками, следующими из градиентных моделей, хотя с точки зрения феноменологического описания таких процессов последние могут включать в себя ряд эффектов, предсказываемых дислокационными теориями.

Еще одним известным масштабным эффектом, который часто позиционируется, как один из основных способов идентификации дополнительных материальных констант неклассических моделей деформируемых твердых тел, является аномальная зависимость свойств ультратонких структур (балок, пластин, нитевидных кристаллов, нанотрубок, пленок, фольги и т.д.) от их толщины [39, 109, 110, 233]. Для механических свойств такие неклассические зависимости были выявлены во многих экспериментах для различных материалов [109, 110, 234–236]. Причем по сравнению с объемными характеристиками макроскопических образцов (модуль

упругости, предел текучести и т.д.) соответствующие характеристики микрообразцов могут как повышаться, так и снижаться [110, 234]. Аналогичные эффекты известны и для различных физических характеристик - для теплопроводности нитевидных кристаллов, для электропроводности, для пьезоэлектрических свойств и т.д. [237–239]. Причиной возникновения указанных эффектов является существенное влияние атомарного или молекулярного строения и поверхности ультра-тонких образцов на их свойства. Важность теоретического описания таких эффектов связана с необходимостью достоверного моделирования физических процессов в микро/нано- системной технике, в которой конструктивные элементы могут иметь очень малые характерные размеры.

Идентификация дополнительных масштабных параметров градиентных теорий на основе экспериментальных данных по неклассической зависимости динамических и статических характеристик микробалок от их толщины была реализована в работах [39, 109, 233]. Однако аналогичные эксперименты использовались и для идентификации параметров других неклассических теорий, например, с поверхностными эффектами [110] и др. В настоящее время не существует четкого понимания роли и преимущественного значения градиентных, микрополярных, поверхностных и т.д. эффектов в таких экспериментах. Известно, что, например, нелокальные теории и градиентные теории напряжений позволяют описывать снижение изгибной жесткости тонких структур при уменьшении их толщины [240, 241]. Градиентные теории деформаций и микрополярные теории могут быть использованы для описания эффектов повышения кажущейся изгибной жесткости [65, 241]. Модели с поверхностными свойствами использовались для описания и положительных, и отрицательных масштабных эффектов за счет введения поверхностных модулей соответствующего знака [110]. При этом в поверхностной теории упругости известны работы, в которых использование отрицательных значений поверхностных модулей считается запрещенным с точки зрения необходимой положительной определенности поверхностной энергии [242].

Можно также отметить, что эффекты возрастания кажущейся изгибной жесткости тонких балок были установлены на основе молекулярно-динамического моделирования, например, в работе [243]. Однако в этих работах, как и во всех экспериментах, не наблюдался бесконечный рост нормированной изгибной жесткости, как это прогнозируют некоторые модели обобщенных континуумов. Для примера, коротко остановимся на трех моделях. Во-первых, это два варианта формулировки теории балки Бернулли-Эйлера в ГТУ. Как будет более детально показано в Главе 4, в градиентной теории возможно построение двух вариантов градиентных балочных моделей (аналогично и для пластин, и оболочек) с так называемыми "одноосным" и "обобщенным" напряженным состоянием. В обеих моделях уравнения равновесия имеют повышенный шестой порядок, однако, в "одноосных" теориях коэффициент изгибной жесткости балки остается классическим:

$$Dw^{IV} - l^2 Dw^{VI} = q, \quad (1.1)$$

где $D = EI$ – изгибная жесткость балки, E – модуль Юнга, I – момент инерции сечения, w – прогибы балки, l – масштабный параметр, q – распределенная нагрузка.

В "обобщенных" теориях возникает модифицированное значение коэффициента изгибной жесткости:

$$(D + l^2 EA)w^{IV} - l^2 Dw^{VI} = q, \quad (1.2)$$

где A – площадь поперечного сечения балки.

Рассматривая нормированное значение кажущейся (эффективной) жесткости градиентной балки $D^* = (D + l^2 EA)$ в (1.2) и предполагая, например, прямоугольное поперечное сечение ($I = bh^3/12$, $A = bh$, b – ширина балки, h – толщина балки), получим:

$$\frac{D^*}{D} = 1 + 12 \left(\frac{l}{h} \right)^2 \quad (1.3)$$

Как видно, выражение (1.3) прогнозирует рост кажущейся изгибной жесткости балки, обратно пропорциональный квадрату ее толщины. Поэтому, например, при чистом изгибе балки в модели (1.2) прогнозируется соответствующий масштабный эффект и уменьшение прогибов балки по сравнению с классическим решением. Напротив, в модели (1.1), изгибная жесткость остается классической, и этот вариант теории можно использовать только для описания масштабных эффектов, связанных с условиями закрепления и длиной балки (см. главу 4 и [107]). Справедливость двух представленных моделей, как представляется, не может быть в настоящее время окончательно проверена экспериментально, потому что существуют различные данные и в пользу одной, и в пользу другой теории. Поэтому важным является построение тестовых трехмерных и плоских решений, которые позволили бы исследовать корректность этих моделей. Такие решения представлены в данной диссертации в главе 4 для ГТУ и в главе 5 для ГТЭ.

Заметим также, что для объяснения многих экспериментальных данных можно применять модели балок с поверхностными свойствами, в которых также происходит модификация коэффициента изгибной жесткости, но уравнения равновесия имеют классический четвертый порядок:

$$(D + lEK)w^{IV} = q, \quad (1.4)$$

где S – дополнительный поверхностный модуль упругости, K – неклассический аналог момента инерции сечения для поверхностной теории ("момент инерции периметра сечения"), который имеет размерность $[м^3]$ [110].

Для прямоугольного поперечного сечения имеем $K = 2bh^2/3$ [110] и нормированная кажущаяся изгибная жесткость балки имеет вид:

$$\frac{D^*}{D} = 1 + 8 \frac{l}{h} \quad (1.5)$$

Поэтому в поверхностной теории упругости также удастся описать положительный (или отрицательный, если допустить $l < 0$ в (1.5)) масштабный эффект, который отличается от модели (1.2) только более медленной скоростью роста относительной изгибной жесткости балки, пропорциональной h^{-1} . В пользу применения моделей поверхностной теории упругости для описания свойств масштабозависимых тонких балок также может говорить тот факт,

что неклассические эффекты в жесткости проявляются и в экспериментах на растяжение. При однородных деформациях (при растяжении) градиентные эффекты исчезают и не дают вклад в жесткость балки на растяжение. Напротив, поверхностные эффекты сохраняются и при однородных деформациях. Поэтому применение градиентных теорий в таких экспериментах может быть оправданным только в том случае, если для достаточно длинных балок масштабные эффекты возникают при изгибе и не возникают при растяжении/сжатии. Достаточная длина балки необходима, чтобы исключить влияние условий закрепления, которые могут оказывать влияние на кажущуюся жесткость и на изгиб, и на растяжение (см. главу 4).

Для проявления неклассических эффектов при механических испытаниях, размеры образцов (балок, пластин) не обязательно должны быть очень малы в абсолютном отношении. Размеры должны быть малы только по отношению к характерному размеру структуры материала, который в моделях обобщенных континуумов обычно связан с дополнительными масштабными параметрами. Например, в работах R. Lakes и его соавторов [244, 245] идентификация материальных констант микрополярной теории (Коссера) была выполнена с использованием образцов пористых материалов размером 10–20 мм при характерном размере структуры 1 мм. Более того в настоящее время предложено достаточно большое количество искусственно созданных структур механических метаматериалов, в которых ячейки могут иметь характерный размер от микронов до сантиметров, а континуальное описание их механического поведения может быть реализовано в рамках ГТУ [21], микрополярной теории упругости [246], микро-дилатационной теории [247].

Неклассические эффекты могут проявляться и в элементах конструкций с неоднородной или регулярной структурой, для описания которой привлекаются модели с эффективными свойствами. Например, для сэндвич-балок с различными типами облегченных и регулярных заполнителей недавно было предложено применять модели микрополярной и моментной теории упругости [248, 249]. Такие модели позволяют учесть особенности специфических деформаций заполнителя в рамках моделей сред с неклассической кинематикой. Модели ГТУ привлекались для описания масштабных эффектов в сетчатых балках различной структуры в работах [250, 251]. Интересным является то, что модель градиентных балок (1.2) хорошо описывает масштабные эффекты при изгибе сетчатых структур, состоящих из треугольных периодических ячеек. Однако, как показано в работе [251], модель (1.1) лучше описывает кажущиеся характеристики при растяжении и изгибе сетчатых структур с ромбовидными ячейками.

Размерные эффекты при моделировании элементов конструкций могут проявляться не только в связи с особенностями их геометрии и структуры (заполнителя, периодических ячеек), но и вследствие особенностей нагружения и закрепления. Градиентные модели, обладая расширенным спектром граничных условий, позволяют более аккуратным образом описывать эффекты, связанные с наличием стесненной зоны материала вблизи зоны закрепления, в которой запрещены не только перемещения точек среды, но и их деформации или кривизны [22, 23]. Например, при наличии протяженной области захвата образца или

при наличии дополнительных соединительных элементов, погруженных в объем материала конструкции, вблизи зоны закрепления могут быть запрещены нормальные или сдвиговые деформации материала. Такими эффектами в классических моделях обычно пренебрегают, основываясь на принципе Сен-Венана, или учитывают их в рамках уточненной прорисовки геометрии креплений при трехмерном моделировании. В градиентных же теориях имеется возможность непосредственного задания граничных условий на деформации материала, что зачастую обеспечивает получение достаточно простых (хотя и приближенных) аналитических решений [22, 23]. Для задач с сосредоточенными нагрузками также появляется дополнительный размерный параметр, который может быть связан с размером малой площадки, в которой действует нагрузка, моделируемая сосредоточенным усилием [22]. В этом случае применение градиентных теорий позволяет приблизить решение с заданной сосредоточенной нагрузкой к более аккуратному решению соответствующей контактной задачей. Для тонкостенных конструкций переменной толщины появляется возможность описать непрерывное изменение напряжений в зоне резкого изменения толщины и также приблизить получаемое решение к трехмерному. Таким образом, применение градиентных теорий для описания перечисленных масштабных эффектов позволяет получать уточненные и в то же время достаточно простые модели конструктивных элементов, которые, конечно, не заменяют полноценного численного трехмерного моделирования, но могут быть использованы, например в проектировочных расчетах для уточнения известных классических решений.

В заключение данной главы остановимся на динамических эффектах. Модели механики деформируемого твердого тела, с точки зрения описания процессов распространения упругих волн, являются длинноволновым приближением для моделей динамики кристаллической решетки. Для высокочастотных процессов последние прогнозируют возникновение явлений пространственной дисперсии, при которой фазовая скорость волны оказывается зависящей от частоты и дисперсионные соотношения отклоняются от линейного закона. В экспериментах эффекты пространственной дисперсии упругих волн наблюдаются в терагерцовом диапазоне [1, 252]. В классических решениях таких эффектов нет. Для упругой однородной среды скорости распространения продольных и поперечных волн являются константами: $v_l = \sqrt{C_{11}/\rho}$, $v_s = \sqrt{C_{44}/\rho}$ (C_{ij} – константы жесткости в нотации Фойгта, ρ – плотность). Однако, явление пространственной дисперсии упругих волн может моделироваться на основе динамической формулировки ГТУ. Соответствующие уравнения движения имеют вид [1]:

$$\rho(u_{,tt} - g^2 u_{,ttxx}) = C(u_{,xx} - l^2 u_{,xxxx}) \quad (1.6)$$

где u – смещения точек среды (продольные или поперечные) и C – соответствующая классическая константа жесткости, l – масштабный параметр, определяющий градиентные эффекты для упругих взаимодействий в среде, g – масштабный параметр, определяющий влияние градиентов инерции.

Выражение для фазовой скорости гармонических волн, следующее из (1.6), включает

зависимость от волнового числа (k) и имеет вид:

$$v = \sqrt{\frac{C(1 + l^2k^2)}{\rho(1 + g^2k^2)}}, \quad (1.7)$$

откуда видно, что при увеличении частоты и соответствующих значений волновых чисел, скорость распространения продольных и поперечных волн не будет оставаться постоянной. При этом для соответствия градиентной теории дискретным моделям необходимо, чтобы выполнялось условие $g > l$. В этом случае для более высоких значений волновых чисел будет происходить снижение фазовой скорости волн.

Заметим, что в динамической формулировке ГТУ, принятой Миндлиным [253] предполагалось, что инерционные градиентные эффекты отсутствуют ($g = 0$). Поэтому возникали некорректные дисперсионные соотношения и было сделано предположение о необходимости рассмотрения теорий более высокого порядка [253]. Однако, позднее было показано, что инерционные эффекты с $g > 0$ являются естественной составляющей градиентных теорий [1]. Корректное описание динамических процессов в ГТУ было выполнено в работах А.В. Метрикина [168], в работах В.И. Ерофеева [51] и др.. Более того, соотношения вида (1.7) были использованы для идентификации дополнительных масштабных параметров ГТУ, путем их наложения на результаты дискретного моделирования [254]. В диссертации формулировка моделей с учетом инерционных градиентных эффектов обобщена на случай рассмотренного варианта теории электроупругости. Построенные решения прогнозируют эффекты пространственной дисперсии для электроупругих волн высоких частотных диапазонов. Проявление таких эффектов в пьезоэлектрических структурах было показано ранее на основе моделей молекулярной динамики [255].

Как следует из представленного обзора, применение континуальных градиентных теорий позволяет описывать эффекты, связанные с влиянием микроструктуры материалов и межфазным взаимодействием, а также явления, характерные для коротковолновых процессов. Далее в диссертации рассматриваются специфические прикладные модели ГТУ и ГТЭ, в которых эти эффекты проявляются и могут быть использованы для описания известных экспериментальных данных. В частности, это задачи микромеханики и масштабозависимые балочные теории в ГТУ и ГТЭ, задачи с концентрацией напряжений в ГТУ и динамические задачи ГТЭ. Потенциально, градиентные теории могут привлекаться для моделирования и более широкого спектра явлений. Развитие таких подходов является одним из актуальных направлений современных исследований.

Глава 2. Основные соотношения градиентной теории упругости и электроупругости

В данной главе представлены вариационные формулировки градиентных теорий, применяемые далее в главах 3-5. Рассмотрены варианты моделей с упрощенными определяющими соотношениями. Представлены постановки краевых задач, в том числе, в терминах ковариантных производных для произвольной криволинейной системы координат. Предложена формулировка градиентной теории электроупругости в форме Барнета-Лоте. Новые результаты, содержащиеся в данной главе, были опубликованы в работах [16, 179, 186, 187].

2.1 Градиентная теория упругости (ГТУ)

Рассматриваем изотропное линейно упругое тело, занимающее область Ω с границей $\partial\Omega$, содержащей ребра $\partial\partial\Omega$. Плотность энергии деформаций рассматриваемой среды в общей формулировке линейной градиентной теории Миндлина-Гупина может быть представлена в виде [25, 253]:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.1)$$

где \mathbf{C} – это классический тензор модулей упругости четвертого ранга, \mathbf{A} – тензор шестого ранга, содержащий дополнительные материальные константы градиентной теории (градиентные модули); $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ – тензор бесконечно малых деформаций; $\boldsymbol{\eta}$ – тензор третьего ранга градиентов деформаций ($\boldsymbol{\eta} = \nabla \boldsymbol{\varepsilon}$) или вторых градиентов от перемещений ($\boldsymbol{\eta} = \nabla \nabla \mathbf{u}$); $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ – вектор перемещений в точке $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$; ∇ – оператор набла.

Заметим, что формулировка ГТУ в терминах вторых градиентов от перемещений обычно называется Формой I Миндлина, а в терминах градиентов деформаций – Формой II Миндлина, в соответствии с терминологией работы [25]. В этой же работе предложен третий вариант формулировки, основанный на разложении тензора вторых градиентов от перемещений на полностью симметричную и антисимметричную части. Эквивалентность между всеми тремя формулировками в общем виде показана в [25].

Определяющие соотношения теории следуют из записанной формы плотности потенциальной энергии (2.1). Для так называемых классических напряжений Коши $\boldsymbol{\tau}$, энергетически связанных с деформациями, и для градиентных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ (double stress), энергетически связанных с градиентами деформаций, получаем:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.2)$$

Физический смысл градиентных напряжений, обсуждался, например, в работе [256]. Эти напряжения представляют собой реакцию среды на возникновение неоднородного поля деформаций.

Подставляя (2.2) в (2.1) получаем выражение для плотности энергии деформаций в сле-

дующем виде:

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.3)$$

Формулировка краевой задачи может быть получена на основе принципа минимума полной потенциальной энергии (вариационного принципа Лагранжа), в соответствии с которым:

$$\delta \Pi = 0, \quad \Pi = U - A, \quad U = \int_{\Omega} u \, dv \quad (2.4)$$

где A – работа внешних (консервативных) сил.

Подставляя (2.3) в (2.4) и используя определение для деформаций и тензора градиентов деформаций, получим:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\tau} : \delta(\nabla \mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu} : \delta(\nabla \nabla \mathbf{u}) \right) dv - \delta A = 0 \quad (2.5)$$

Далее, используя формулу для градиента от свертки двух тензорных величин и применяя теорему Остроградского-Гаусса, получим:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} : \delta(\nabla \mathbf{u})) \, dv \\ &\quad + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} : \delta(\nabla \mathbf{u})) \, ds - \delta A \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}) \, dv \\ &\quad + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} : \delta(\nabla \mathbf{u})) \, ds - \delta A = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где \mathbf{n} - вектор внешней единичной нормали к поверхности тела.

В выражении (2.6) удобно ввести обозначение для так называемого тензора полных напряжений (total stress): $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}$. Именно этот тензор в ГТУ входит в уравнения равновесия.

Далее в поверхностном интеграле в (2.6) необходимо учесть возможность разложения тензора градиентов перемещений на нормальную и тангенсальные составляющие:

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla_S \mathbf{u} + \mathbf{n} \partial_n \mathbf{u} \quad (2.7)$$

где $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n} \partial_n$ – поверхностный градиент, ∂_n – производная в направлении нормали к поверхности.

В полученном разложении часть, связанная с поверхностным градиентом, и соответствующая часть в поверхностном интеграле в (2.6) может быть проинтегрирована еще один раз "по частям" на основании теоремы Стокса для поверхностной дивергенции, что приводит к появлению слагаемых, интегрируемых вдоль ребер тела. Для этого необходимо выполнить

следующие преобразования [154]:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} : \delta(\nabla_S \mathbf{u}) ds &= \int_{\partial\Omega} (\nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}) ds \\
&= \int_{\partial\Omega} (-2H \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}) ds \\
&\quad + \int_{\partial\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \mathbf{n} : \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u} dl
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ – вектор, нормальный к данному ребру на поверхности тела и касательный к поверхности, которая содержит это ребро (при выбранном направлении обхода контура против часовой стрелки, этот вектор всегда направлен внутрь поверхности, и условно будем обозначать его далее, как ко-нормаль к данному ребру); $H = -\frac{1}{2} \nabla_S \mathbf{n}$ – средняя кривизна поверхности тела; и использованы обозначения вида $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu}$.

Подставляя (2.7) в (2.6) и учитывая (2.8), получим:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} dv \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) - 2H \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \cdot \delta(\partial_n \mathbf{u}) ds \\
&\quad + \int_{\partial\partial\Omega} [\boldsymbol{\nu} \mathbf{n} : \boldsymbol{\mu}] \cdot \delta \mathbf{u} dl - \delta A = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где квадратные скобки [...] обозначают необходимость вычисления разности заключенных в них величин с двух сторон от одного и того же ребра.

Полученная вариационная формулировка (2.9) позволяет сделать предположение о следующей структуре работы внешних сил, действующих в объеме ($\bar{\mathbf{b}}$), на поверхности ($\bar{\mathbf{t}}$, $\bar{\mathbf{m}}$), и на ребрах тела ($\bar{\mathbf{t}}_e$):

$$A = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} + \bar{\mathbf{m}} \cdot (\partial_n \mathbf{u})) ds + \int_{\partial\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}}_e \cdot \mathbf{u} dl \tag{2.10}$$

Заметим, что заданные силы в объеме $\bar{\mathbf{b}}$ и на поверхности $\bar{\mathbf{t}}$ имеют классические размерности $[\text{H}/\text{м}^3]$ и $[\text{H}/\text{м}^2]$, соответственно, и представляют собой классические нагрузки. Градиентные нагрузки на поверхности $\bar{\mathbf{m}}$ (double traction) имеют размерность $[\text{H}/\text{м}]$, и определяют неклассические силы, совершающие работу на изменениях значений нормальных производных от вектора перемещений (по-другому говоря, это некоторая обобщенная форма моментных напряжений с размерностью $[\text{м} \cdot \text{H}/\text{м}^2]$). Нагрузки, распределенные вдоль ребер тела, $\bar{\mathbf{t}}_e$ также имеют размерность $[\text{H}/\text{м}]$ и по-сути представляют собой обычную погонную нагрузку, распределенную вдоль линии. В краевой задаче классической теории упругости нагрузки типа $\bar{\mathbf{t}}_e$ не возникают, и их задание требует введения обобщенных функций (дельта-функции).

В ГТУ нагрузки вдоль линий могут быть заданы, и, более того, материал может воспринимать такого рода условия нагружения без возникновения сингулярных решений (см. [18] и раздел 4.4).

Подставляя (2.10) в (2.9), получаем окончательный вид вариационной постановки модели:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}) \cdot \delta\mathbf{u} dv \\ & + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) - 2H\mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{m}}) \cdot \delta(\partial_n \mathbf{u}) ds \\ & + \int_{\partial\partial\Omega} ([\boldsymbol{\nu}\mathbf{n} : \boldsymbol{\mu}] - \bar{\mathbf{t}}_e) \cdot \delta\mathbf{u} dl = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Учитывая независимость вариаций в объеме и на поверхности тела, получаем следующую формулировку краевой задачи ГТУ, включающую уравнения равновесия и естественные (статические) и главные (кинематические) граничные условия [25, 154, 257]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \quad \text{или} \quad \partial_n \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{t}_e = \bar{\mathbf{t}}_e \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_e, & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ – это перемещения, заданные на поверхности тела (стандартные кинематические граничные условия); $\bar{\mathbf{g}}$ – это нормальные производные от вектора перемещений, которые могут быть заданы в качестве дополнительных (неклассических) кинематических граничных условий на поверхности тела; $\bar{\mathbf{u}}_e$ – перемещения, заданные на острых кромках тела (дополнительные кинематические граничные условия на ребрах); и введены обозначения для вектора напряжений \mathbf{t} и вектора моментных напряжений \mathbf{m} , действующих на поверхности тела, а также для вектора погонных внутренних усилий \mathbf{t}_e , действующих на ребрах тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) - 2H\mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{t}_e &= [\boldsymbol{\nu}\mathbf{n} : \boldsymbol{\mu}] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Краевая задача классической теории упругости может быть получена, как частный случай рассматриваемой формулировки при $\mathbf{A} \equiv 0$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.14)$$

причем выполняется $\boldsymbol{\mu} \equiv 0 \implies \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\tau}$.

2.2 Градиентная теория электроупругости (ГТЭ)

В данном разделе рассмотрим постановку задачи ГТЭ. Рассматриваем электроупругое анизотропное тело, занимающее область Ω с поверхностью $\partial\Omega$, содержащей ребра $\partial\partial\Omega$. Принимая, что независимыми переменными теории являются деформации и напряженность электрического поля, в качестве термодинамического потенциала будем использовать электрическую энтальпию⁷, которая с учетом вклада градиентов независимых переменных в общем случае линейной теории может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{E}, \nabla\mathbf{E}) = & \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \\ & - \mathbf{E} \cdot \mathbf{f} : \boldsymbol{\eta} - \nabla\mathbf{E} : \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\mathbf{E} : \mathbf{h} : \boldsymbol{\eta} \\ & + \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{B} : \boldsymbol{\eta} - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} : \nabla\mathbf{E} \\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2}\nabla\mathbf{E} : \boldsymbol{\alpha} : \nabla\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где \mathbf{C} , \mathbf{e} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ – это классические тензоры упругих констант (4-го ранга), пьезоэлектрических констант (3-го ранга) и деэлектрических проницаемостей (2-го ранга); \mathbf{f} , \mathbf{d} – тензоры 4-го ранга, содержащие материальные константы, определяющие флексоэлектрические эффекты, \mathbf{h} – тензор 5-го ранга, определяющий градиентные пьезоэлектрические эффекты, \mathbf{A} – тензор 6-го ранга градиентных модулей упругости, $\boldsymbol{\alpha}$ – тензор 4-го ранга, содержащий дополнительные градиентные характеристики диэлектрической проницаемости среды, \mathbf{B} – тензор 5-го ранга, определяющий эффекты связанности деформаций и градиентов деформаций в анизотропной среде, $\boldsymbol{\beta}$ – тензор 3-го ранга, определяющий аналогичные эффекты связанности в электростатической части задачи; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор бесконечно малых деформаций, $\boldsymbol{\eta} = \nabla\boldsymbol{\varepsilon}$ или $\boldsymbol{\eta} = \nabla\nabla\mathbf{u}$ – тензор градиентов деформаций или вторых градиентов от перемещений (в зависимости от варианта формулировки), $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ – вектор напряженности электрического поля; $\phi(\mathbf{x})$ – потенциал электрического поля. Все константы, входящие в формулировку модели являются "адиабатическими", то есть экспериментально они должны определяться при отсутствии теплообмена с внешней средой.

Здесь и далее при формулировке теории электроупругости составляющая энергии, связанная с диэлектрической проницаемостью вакуума, отдельно не выделяется, и все выкладки сразу даны в терминах электрической индукции (электрического смещения), а не в терминах поляризации. Последняя может быть найдена в рассматриваемой теории на основе своего стандартного определения через вычисляемые значения электрической индукции и классическую связь диэлектрических проницаемостей и восприимчивостей. Такой же подход используется при рассмотрении классической теории электроупругости, например, в монографии [258].

Для исследования основных градиентных эффектов, а также для упрощения получаемых выкладок и для уменьшения неизвестных дополнительных материальных констант, в диссер-

⁷Обозначение рассматриваемого термодинамического потенциала соответствует стандарту IEEE 176-1987 и монографиям [258, 259]. Тем не менее это обозначение не соответствует принятым в термодинамике, так как энтальпия обычно подразумевает использование напряжений в качестве независимых переменных.

тации рассматривается упрощенная формулировка теории. Поэтому из модели исключаются все эффекты связанности, за исключением классического пьезоэлектрического эффекта ($\mathbf{f} \equiv 0$, $\mathbf{d} \equiv 0$, $\mathbf{h} \equiv 0$, $\mathbf{B} \equiv 0$, $\boldsymbol{\beta} \equiv 0$). Заметим, что явлению флексоэлектричества (тензоры \mathbf{f} , \mathbf{d}) было посвящено достаточно много отдельных исследований [243, 260, 261], причем такие эффекты возникают и в изотропных средах, так как соответствующие тензоры материальных констант имеют четный ранг. Структура же тензоров нечетного ранга (тензоры \mathbf{B} , \mathbf{h} , $\boldsymbol{\beta}$), определяющих неклассические связанные эффекты, вообще говоря, в настоящее время до конца не исследована. Например, для упругих тел структура тензора \mathbf{B} рассматривались в недавней работе [262].

Таким образом, далее будем рассматривать вариант ГТЭ, в которой плотность электрической энтальпии определяется в следующем виде:

$$h(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{E}, \nabla \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} : \boldsymbol{\alpha} : \nabla \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

Определяющие соотношения теории имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{D} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial h}{\partial (\nabla \mathbf{E})} = \boldsymbol{\alpha} : \nabla \mathbf{E} \quad (2.20)$$

где $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\mu}$ – это тензоры классических и градиентных напряжений, введенные в предыдущей главе; \mathbf{D} – это вектор электрической индукции; \mathbf{Q} – это тензор электрических квадрупольей, энергетически связанный с градиентами электрического поля [263, 264].

Подставляя записанные определяющие соотношения в (2.16), получим:

$$h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2} \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{E}, \quad (2.21)$$

Формулировка краевой задачи ГТЭ может быть получена на основе вариационного подхода из условия минимума полной потенциальной энергии:

$$\delta \Pi = 0, \quad \Pi = \mathcal{H} - A, \quad \mathcal{H} = \int_{\Omega} h \, dv \quad (2.22)$$

Последующие выкладки полностью аналогичны представленным в предыдущем разделе для ГТУ, за исключением того, что дополнительные электростатические слагаемые, входящие в (2.21), являются тензорными величинами на один ранг ниже, по сравнению с соответствующими слагаемыми, относящимися к задаче упругости. Не повторяя рассуждений, запишем окончательную формулировку краевой задачи ГТЭ, в которую входят уравнения

равновесия, обобщенный закон Гаусса и расширенный набор граничных условий следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{D} + \bar{\rho} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ q = \bar{q}, \quad \text{или} \quad \phi = \bar{\phi}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \quad \text{или} \quad \partial_n \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ m = \bar{m} \quad \text{или} \quad \partial_n \phi = \bar{E}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{t}_e = \bar{\mathbf{t}}_e \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_e, & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \\ q_e = \bar{q}_e \quad \text{или} \quad \phi = \bar{\phi}_e, & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.23)$$

где остаются справедливыми обозначения, использованные в (2.23) для задачи упругости и введены следующие обозначения: $\mathbf{D} = \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{Q}$ – вектор полной электрической индукции, учитывающий вклад квадрупольных моментов в балансовое уравнение для заряда; $\bar{\rho}$, \bar{q} , \bar{q}_s – заданная объемная, поверхностная и линейная (на ребрах тела) плотность заряда; $\bar{\phi}$, $\bar{\phi}_e$ – значения электрического потенциала, задаваемые на гранях и ребрах тела, соответственно; $\bar{\mathbf{m}}$, \bar{E} – значения квадрупольного момента и напряженности электрического поля в направлении нормали к поверхности, задаваемые в качестве дополнительных граничных условий рассматриваемой теории повышенного порядка; и для упрощения записи граничных условий использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}) - H \mathbf{nn} : \mathbf{Q}, \\ m &= \mathbf{nn} : \mathbf{Q} \\ q_e &= [\boldsymbol{\nu} \mathbf{n} : \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Классическая теория электроупругости может быть получена, как частный случай записанной формулировки, в предположении, что все неклассические градиентные константы равны нулю ($\mathbf{A} \equiv 0$ и $\boldsymbol{\alpha} \equiv 0$):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{D} + \bar{\rho} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \bar{q}, \quad \text{или} \quad \phi = \bar{\phi}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (2.25)$$

где выполняется равенство полных (вводимых в градиентной теории) и классических напряжений $\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\tau}$ и электрической индукции $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}$.

Заметим также, что представленная формулировка ГТЭ также может быть переписана в обобщенной нотации Барнета и Лоте [160, 265], которая часто используется в классической

теории электроупругости для построения решений для пьезоэлектрических сред, на основе аналогичных известных решений для упругих сред (см., например, [265, 266]). В этой нотации используется обобщенный четырехмерный вектор перемещений, включающий в себя в качестве четвертой компоненты потенциал электрического поля $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}, \phi\}^T$. Соответственно, после необходимых подстановок, можно ввести обобщенные тензор деформаций $\mathbf{E} = \{\boldsymbol{\varepsilon}, -\mathbf{E}\}^T$, градиентов деформаций $\mathbf{H} = \nabla \mathbf{E} = \{\boldsymbol{\eta}, -\nabla \mathbf{E}\}^T$, напряжений $\mathbf{T} = \{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}\}^T$, градиентных напряжений $\mathbf{M} = \{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}\}^T$, полных напряжений $\mathbf{S} = \mathbf{T} - \nabla \cdot \mathbf{M} = \{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}^T$, тензоры классических и градиентных материальных констант $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{e} \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$ и $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$.

Не останавливаясь подробно на получаемой формулировке теории, так как она будет привлекаться в данной диссертации только в разделе 3.2 при выводе формул Эшелби, укажем только, что электрическая энтальпия среды в этом случае может быть представлена в виде:

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{M} : \mathbf{H}, \quad (2.26)$$

а соответствующая формулировка краевой задачи ГТЭ (2.23) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{S} + \bar{\mathbf{B}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{S}_s = \bar{\mathbf{S}}_s, \quad \text{или} \quad \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}_s, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{M}_s = \bar{\mathbf{M}}_s \quad \text{или} \quad \partial_n \mathbf{U} = \bar{\mathbf{G}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{S}_e = \bar{\mathbf{S}}_e \quad \text{или} \quad \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}_e, & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \end{cases} \quad (2.27)$$

где также введены обозначения $\mathbf{S}_s = \{\mathbf{t}, q\}^T$, $\mathbf{M}_s = \{\mathbf{m}, m\}^T$, $\mathbf{S}_e = \{\mathbf{t}_e, q_e\}^T$ и аналогичные обозначения для заданных величин в обобщенных статических и кинематических граничных условиях.

2.3 Модели с упрощенными определяющими соотношениями

Представленная в разделе 1.1 формулировка ГТУ содержит дополнительные материальные константы, которые входят в постановку задачи в виде тензора шестого ранга, обозначенного \mathbf{A} (2.1), (2.2). Структура этого тензора в настоящее время хорошо исследована, в том числе для анизотропных сред произвольной симметрии [267, 268]. Для случая изотропии этот тензор содержит пять независимых констант. Это было показано в исходной работе Миндлина [25], в которой содержались небольшие погрешности в соответствующих выкладках, что было скорректировано позднее в работе [269]. Там же были получены условия, накладываемые на компоненты тензора градиентных модулей требованием положительной определенности энергии деформаций.

С точки зрения практики, представляет интерес получение упрощенных градиентных теорий, в которых можно было бы обойтись, например, одним дополнительным параметром (изотропия градиентных свойств) или двумя (различные градиентные эффекты в деформациях растяжения/сжатия и сдвига). В данной главе представлены такого рода упрощенные определяющие соотношения для ГТУ и их обобщения на случай ГТЭ, которые используются далее в диссертационной работе. Для записи определяющих соотношений используется индексное представление, так как это упрощает анализ структуры рассматриваемых тензорных величин и, более того, получаемая форма соотношений оказывается инвариантой к выбору системы координат при использовании физических компонент входящих в них величин (см. следующий раздел).

Во-первых, отметим, что структура классического тензора модулей упругости \mathbf{C} остается неизменной и имеет вид в индексном представлении:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.28)$$

где λ, μ – классические параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

Записанные в (2.28) условия симметрии по перестановке индексов следуют из требования достаточной гладкости энергии деформаций, как функции деформаций (перестановка по парам индексов), симметрии тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и тензора классических напряжений $\boldsymbol{\tau}$. Все эти условия выполняются и в рассматриваемых градиентных теориях. Также классическими остаются и ограничения на параметры Ламе: $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$.

Определяющие соотношения для классических напряжений $\boldsymbol{\tau}$ в индексном представлении, соответственно, имеют вид:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.29)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ – это компоненты тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, и по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Тензор градиентных модулей упругости \mathbf{A} в случае изотропии может быть представлен

в следующем виде [269]:

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} &= A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk} \\
&= a_1(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}) \\
&+ a_2\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} \\
&+ a_3(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}) \\
&+ a_4(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}) \\
&+ a_5(\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl})
\end{aligned} \tag{2.30}$$

где a_i ($i=1\dots5$) – это дополнительные градиентные модули теории, которые имеют размерность $[M^2 \cdot H / M^2 = H]$.

Записанное выражение для тензора градиентных модулей соответствует Форме II Миндлина, в которой предполагается, что основными переменными модели являются градиенты деформаций. При этом в (2.30) возникают условия симметрии на перестановку троек индексов (требование гладкой зависимости энергии деформаций от градиентов деформаций) и первых пар индексов внутри этих троек. Последнее условие определяется требованием симметрии тензора деформаций и следующим из него требованием симметрии тензора градиентов деформаций и градиентных напряжений по соответствующим индексам. Подставляя (2.30) в определяющие соотношения Формы II Миндлина для тензора градиентных напряжений, получим:

$$\begin{aligned}
\mu_{ijk} &= \mu_{jik} = A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n} \\
&= a_1(2\delta_{ij}\varepsilon_{kl,l} + \delta_{ik}\varepsilon_{ll,j} + \delta_{jk}\varepsilon_{ll,i}) + a_2\delta_{ij}\varepsilon_{ll,k} \\
&+ 2a_3(\delta_{jk}\varepsilon_{il,l} + \delta_{ik}\varepsilon_{jl,l}) + 2a_4\varepsilon_{ij,k} + 2a_5(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ik,j}),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

где запятая в индексах обозначает дифференцирование по соответствующим пространственным координатам.

В случае рассмотрения Формы I Миндлина, в которой энергия деформаций и определяющие соотношения записываются через тензор вторых градиентов от перемещений, структура тензора градиентных модулей имеет вид и симметрии по перестановке индексов, отличные от (2.30):

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} &= A_{ikjlmn} = A_{ijklnm} = A_{lmnijk} \\
&= a_1(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln}) \\
&+ a_2\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} \\
&+ a_3(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln}) \\
&+ a_4(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}) \\
&+ a_5(\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

где использованы те же самые обозначения для констант a_i ($i=1\dots5$), как в (2.30), хотя их значения здесь уже другие и могут быть пересчитаны с учетом перегруппировки слагаемых.

Определяющие соотношения для тензора градиентных напряжений в Форме I Миндлина

с учетом (2.32) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\mu_{ijk} &= \mu_{ikj} = A_{ijklmn} u_{l,mn} \\
&= a_1(\delta_{ij} u_{k,ll} + 2\delta_{jk} u_{l,li} + \delta_{ik} u_{j,ll}) + a_2 \delta_{jk} u_{i,ll} \\
&\quad + 2a_3(\delta_{ij} u_{l,lk} + \delta_{ik} u_{l,lj}) + 2a_4 u_{i,jk} + 2a_5(u_{j,ik} + u_{k,ij}),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

где имеет место симметрия тензора градиентных напряжений по второй паре индексов, в отличие от аналогичных соотношений для Формы II (2.31), где выполняется симметрия по первой паре индексов.

Далее рассмотрим варианты упрощенных определяющих соотношений, которые будут привлекаться в диссертации. Во-первых, используем одну из наиболее известных формулировок определяющих соотношений в ГТУ, предложенную в работах Э. Айфантиса и его соавторов [1]. Для получения этой формулировки предполагается, что в определяющих соотношениях Формы II Миндлина (2.31) выполняется следующее условие:

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0, \quad a_2 = \lambda l^2, \quad a_4 = \mu l^2 \tag{2.34}$$

Таким образом, предполагается, что три из пяти градиентных модулей равны нулю, а два других пропорциональны классическим упругим константам с одинаковым коэффициентом пропорциональности, который является квадратом от единственного масштабного параметра данной теории l . Такие предположения являются допустимыми, с точки зрения требований положительной определенности энергии деформаций [269], а получаемую формулировку будем обозначать далее как упрощенная ГТУ (simplified strain gradient elasticity theory, SSGET) [154]. Тензор градиентных напряжений в этой модели имеет очень простой вид и задается градиентом классического тензора напряжений:

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = l^2 \tau_{ij,k} = \lambda l^2 \delta_{ij} \varepsilon_{ll,k} + 2\mu l^2 \varepsilon_{ij,k} \tag{2.35}$$

или в безиндексной записи:

$$\boldsymbol{\mu} = l^2 \nabla \boldsymbol{\tau} = l^2 \nabla (\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{2.36}$$

Другой упрощенный вариант градиентной теории упругости был предложен в работе Гусева А.А. и Лурье С.А. [270]. В этой теории одновременно используются условия симметрии Формы II Миндлина, следующие из симметрии тензора деформаций, и Формы I, как дополнительные требования по порядку дифференцирования для вторых производных от перемещений. В результате, эта теория может быть получена и на основе Формы I, и на основе Формы II введением соответствующих дополнительных условий на симметрию тензора градиентных модулей. Для построения этой теории необходимо, например, в (2.30), предпо-

ЛОЖИТЬ:

$$\begin{aligned}
a_1 = a_2 = a_3, a_4 = a_5 &\implies A_{ijklmn} = A_{ikjlmn} = A_{ijklmn} = A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk}, \\
A_{ijklmn} &= a_2(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} \\
&+ \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln}) \\
&+ a_4(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Определяющие соотношения для градиентных напряжений в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mu_{ijk} = \mu_{jik} = \mu_{ikj} &= a_2(\delta_{ij}(2\varepsilon_{kl,l} + \varepsilon_{ll,k}) + \delta_{ik}(2\varepsilon_{jl,l} + \varepsilon_{ll,j}) + \delta_{jk}(2\varepsilon_{il,l} + \varepsilon_{ll,i})) \\
&+ 2a_4(\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ik,j})
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Получаемый вариант модели называют полностью симметричной ГТУ [226] или моделью Гусева-Лурье [271]. В этой теории уже нет нулевых градиентных констант, в отличие от упрощенной ГТУ Айфантиса. Можно показать, что полностью симметричная ГТУ также является частным случаем Формы III Миндлина, в которой в качестве основных переменных используются градиенты антисимметричной части тензора дистории (градиенты вращений, соответствующие коэффициенты при которых как раз должны быть обнулены) и полностью симметричная часть тензора вторых градиентов перемещений. Таким образом, в полностью симметричной ГТУ предполагается отсутствие поля поворотов в точках среды и отсутствие связанных с ними моментных напряжений [271], которые присутствуют в общей формулировке ГТУ и, например, в таких упрощенных ее вариантах, как моментная теория упругости (couple stress theory)[25,30]. Требования положительной определенности энергии деформаций накладывают ограничения на градиентные модули этой теории в виде $a_4 > 0$ и $5a_2 + 2a_4 > 0$. Для проведения вычислений будем учитывать эти условия и использовать полностью симметричную теорию с обозначением для градиентных констант с единственным масштабным параметром: $a_1 = a_2 = a_3 = \lambda l^2$, $a_4 = a_5 = \mu l^2$. Такое определение градиентных констант всегда удовлетворяет указанным ограничениями при положительных значениях первого параметра Ламе λ .

Вариант упрощенной однопараметрической ГТУ также может быть построен в предположении присутствия в среде только градиентных эффектов, связанных с функцией дилатации. Вариант такой дилатационной ГТУ [186] может быть получен из общей постановки Формы II (2.30) следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, a_2 &= l^2(\lambda + 2\mu) \\
\implies A_{ijklmn} &= l^2(\lambda + 2\mu) \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} \implies \mu_{ijk} = \mu_{jik} = l^2(\lambda + 2\mu) \delta_{ij}\varepsilon_{ll,k}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Дилатационная теория является в некотором смысле моделью-антиподом к широко известной моментной теории упругости (couple stress theory), в которой градиентных эффектов в поле дилатации не возникает, но учитывается влияние градиентов вектора поворотов. Формально, из Формы II Миндлина моментная теория упругости может быть получена с

использованием следующих гипотез для констант:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2l^2\eta\mu, & a_2 &= -4l^2\eta\mu, & a_3 &= -l^2\eta\mu, \\ a_4 &= 2l^2(\eta + 1)\mu, & a_5 &= -l^2(\eta + 1)\mu \end{aligned} \quad (2.40)$$

где параметр η изменяется в диапазоне $-1 < \eta < 1$.

Тензор градиентных напряжений в моментной теории упругости принимает вид:

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = 2\mu l^2 \left(2\eta(2\delta_{ij}\omega_{kp,p} - \delta_{ik}\omega_{jp,p} - \delta_{jk}\omega_{ip,p}) + (1 + \eta)(\omega_{ik,j} + \omega_{jk,i}) \right), \quad (2.41)$$

где $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ это тензор малых поворотов, возникающих в точках деформируемой среды.

Так называемая модифицированная моментная теория упругости (modified couple stress theory) [272] может быть получена из общей формулировки в предположении, что $\eta = 0$ в (2.40). Тогда градиентные напряжения определяются только через симметричную часть тензора градиентов поворотов:

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = 2\mu l^2(\omega_{ik,j} + \omega_{jk,i}), \quad \text{то есть} \quad \boldsymbol{\mu} = 2\mu l^2(\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T) \quad (2.42)$$

Еще один вариант упрощенных определяющих соотношений, который будет рассматриваться в диссертации, относится к градиентной теории межфазного слоя, предложенной и развитой в работах С.А. Лурье, П.А. Белова, Д.Б. Волкова-Богородского [13, 150]. Тензор градиентных модулей в этой теории можно представить в виде следующей свертки классических тензоров модулей упругости четвертого ранга:

$$A_{ijklmn} = \frac{l_1^2}{C} C_{ijkp} C_{lmnp} \implies \mu_{ijk} = \mu_{jik} = \frac{l_1^2}{C} C_{ijkp} C_{lmnp} \varepsilon_{lm,n} \quad (2.43)$$

где l_1 - единственный дополнительный масштабный параметр теории, а константа C [Н/м²] выбирается из условий удобства нормировки, например в виде $C = C_{1111}$.

Вариант определяющих соотношений (2.43) будет использован в задачах с анизотропией в ГТЭ, так как он позволяет достаточно просто обобщить известную структуру тензора четвертого ранга для заданной симметрии среды на градиентные характеристики. При этом, в общем случае, вместо единственного масштабного параметра может возникать соответствующая тензорная характеристика [268]. Однако, для рассматриваемых далее задач будет использоваться записанный однопараметрический вариант теории – для упрощения анализа получаемых решений. Введение обозначения масштабного параметра с индексом l_1 обусловлено тем, что в задачах ГТЭ будет присутствовать и второй параметр для электростатической части задачи (см. ниже).

Аналогичный подход к построению градиентных определяющих соотношений анизотропных материалов на основе соответствующих классических соотношений был предложен и для упрощенной ГТУ [93, 268, 273]. В этой теории в общем случае анизотропной среды тензор градиентный модулей и градиентные напряжения предложено представлять в следующем

виде[268]:

$$A_{ijklmn} = l_1^2 \delta_{kn} C_{ijlm} \implies \mu_{ijk} = \mu_{jik} = l_1^2 C_{ijlm} \varepsilon_{lm,k} = l_1^2 \tau_{ij,k} \quad (2.44)$$

Заметим, что оба записанных варианта определяющих соотношений для анизотропных сред (2.43) и (2.44) удовлетворяют соответствующим требованиям симметрии Формы I (2.32) и II (2.30), соответственно. Записанная структура этих тензоров, вообще говоря, является предположением, которое делается здесь для упрощения построения и анализа получаемых аналитических и численных решений. В частности, такой вид определяющих соотношений позволяет упростить структуру уравнений равновесия модели, а соотношения (2.43) позволяют использовать меньшее число дополнительных промежуточных переменных при реализации смешанного метода конечных элементов.

Для решения задач ГТЭ также необходимо рассмотреть структуру тензора классических и градиентных диэлектрических констант. Классический тензор ϵ имеет второй ранг, и его структура должна соответствовать симметрии рассматриваемого анизотропного материала. В частности, в работе будут рассмотрены примеры задач для трансверсально изотропных сред, в которых этот тензор содержит три ненулевые положительные компоненты, стоящие на главной диагонали, среди которых две равны друг другу, то есть $\epsilon : \epsilon_{ij} = 0, (i \neq j), \epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$. Структуру тензора градиентных диэлектрических констант будем определять, следуя работам [16, 93] на основе подхода, аналогичного принятому для задач ГТУ (2.43) и (2.44):

$$\alpha_{ijkl} = \frac{l_2^2}{\epsilon} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \implies Q_{ij} = \frac{l_2^2}{\epsilon} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} E_{k,l} \quad (2.45)$$

или

$$\alpha_{ijkl} = l_2^2 \delta_{jl} \epsilon_{ik} \implies Q_{ij} = l_2^2 \epsilon_{ik} E_{k,j} = l_2^2 D_{i,j} \quad (2.46)$$

где Q_{ij}, E_i, D_i – это компоненты тензора электрических квадрупольей \mathbf{Q} , вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектора электрической индукции \mathbf{D} , соответственно; l_2 – масштабный параметр, определяющих градиентные эффекты в электростатической части задачи ГТЭ; и ϵ – нормировочный коэффициент, который может быть выбран, например, равным одной из классических диэлектрических констант материала $\epsilon = \epsilon_{11}$.

Заметим, что вариант соотношений (2.46) в общем случае не удовлетворяет условиям симметрии по перестановке индексов внутри первой и второй пары индексов в тензоре α_{ijkl} , которое следует из требования равенства вторых производных от функции электрического потенциала. Тем не менее, для случая трансверсально изотропных материалов это требование выполняется, и вариант определяющих соотношений (2.46) использовался в работах [16, 93].

Связанные пьезоэлектрические эффекты в рассматриваемой формулировке ГТЭ (2.16) определяются только классическими пьезоэлектрическими константами. Тензор e , образованный этими константами, имеет третий ранг и должен отвечать требованиям по перестановке двух последних индексов, по которым проводится свертка с симметричным тензором деформаций: $e_{ijk} = e_{ikj}$. Структура этого тензора хорошо исследована для различных пьезоэлектрических материалов [259]. В частности, для трансверсально изотропных материалов,

относящихся к классу симметрии $6mm$, в нем присутствует три независимых компоненты. На значения этих пьезоэлектрических констант не накладывается никаких ограничений, и они могут иметь, в том числе, отрицательные значения.

В диссертации далее для обозначения материальных констант будет использоваться нотация Фойгта, в соответствии с которой четырехиндексное обозначение упругих констант заменяется двухиндексной по правилу: $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $23, 32 \rightarrow 4$, $13, 31 \rightarrow 5$, $12, 21 \rightarrow 6$. Аналогичная замена делается и для пьезоэлектрических констант, для которых, например, используются обозначения: $e_{311} \rightarrow e_{31}$, $e_{333} \rightarrow e_{33}$, $e_{113} \rightarrow e_{15}$.

2.4 Уравнения ГТУ в криволинейных системах координат

Для аналитического решения задач с криволинейной геометрией удобно использовать подходящие криволинейные системы координат, в частности, для рассматриваемых далее задач потребуется запись уравнений ГТУ в форме II Миндлина в сферической системе координат $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \theta, \varphi\}$ и в полярной цилиндрической системе $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \theta, z\}$.

Варианты формулировки ГТУ в криволинейных координатах ранее были представлены в работах [274], однако в окончательных выкладках в этих работах содержатся некоторые погрешности. Поэтому в диссертации все исходные соотношения получены на основе общего подхода. Для этого в исходной индексной формулировке в прямоугольной декартовой системе координат, которая легко может быть получена на основании соотношений (2.12), (2.13), (2.38) необходимо заменить частные производные на ковариантные (∇_i) , а суммирования (свертки) должны выполняться по повторяющимся индексам, расположенным в диагональной позиции [31, 275]. Приведем далее получаемые соотношения теории.

Ненулевые компоненты метрического тензора g_{ij} (g^{ij}) и символы Кристоффеля второго рода Γ_{jk}^i в сферической системе координат имеют вид:

$$g_{11} = 1/g^{11} = 1, \quad g_{22} = 1/g^{22} = r^2, \quad g_{33} = 1/g^{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = 1/r, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \end{aligned} \quad (2.48)$$

а в полярной цилиндрической системе координат:

$$g_{11} = 1/g^{11} = 1, \quad g_{22} = 1/g^{22} = r^2, \quad g_{33} = 1/g^{33} = 1 \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r \quad (2.50)$$

Кинематические соотношения между компонентами вектора перемещений u_i , тензора деформаций ε_{ij} и тензора градиентов деформаций η_{ijk} принимают следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)/2, \quad \eta_{ijk} = \nabla_k \varepsilon_{ij}, \quad (2.51)$$

где ковариантные производные вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_j u_i &= \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k u_k, \\ \nabla_k \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l \varepsilon_{lj} - \Gamma_{jk}^l \varepsilon_{il} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Физические компоненты этих тензоров (их индексы заключены в скобки) вычисляются на основе соотношений:

$$u_{(i)} = u_i \sqrt{g^{ii}}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \sqrt{g^{ii} g^{jj}}, \quad \eta_{(ijk)} = \eta_{ijk} \sqrt{g^{ii} g^{jj} g^{kk}}, \quad (2.53)$$

где по подчеркнутым индексам суммирование не проводится.

Определяющие соотношения для физических компонент тензоров напряжений и градиентных напряжений имеют, формально, одинаковую запись в криволинейных и в декартовой системах координат:

$$\begin{aligned}\tau_{(ij)} &= \lambda \varepsilon_{(kk)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{(ij)}, \\ \mu_{(ijk)} &= a_1(2\delta_{ij}\eta_{(kl)} + \delta_{ik}\eta_{(lj)} + \delta_{jk}\eta_{(li)}) + a_2\delta_{ij}\eta_{(lk)} \\ &\quad + 2a_3(\delta_{jk}\eta_{(il)} + \delta_{ik}\eta_{(jl)}) + 2a_4\eta_{(ijk)} + 2a_5(\eta_{(ikj)} + \eta_{(jki)})\end{aligned}\quad (2.54)$$

где физические компоненты тензоров напряжений и градиентных напряжений вычисляются следующим образом:

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{ii}g_{jj}}, \quad \mu_{(ijk)} = \mu^{ijk} \sqrt{g_{ii}g_{jj}g_{kk}}, \quad (2.55)$$

Уравнения равновесия и граничные условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_j \sigma^{ij} + b^i = 0, & x^i \in \Omega \\ \sigma^{ij} n_j - \nabla_l \mu^{ijk} n_k (\delta_j^l - n^l n_j) - H \mu^{ijk} n_j n_k = \bar{t}^i & x^i \in \partial\Omega_t \\ \mu^{ijk} n_j n_k = \bar{m}^i & x^i \in \partial\Omega_m \\ [\mu^{ijk} \nu_j n_k] = \bar{s}^i & x^i \in \partial\partial\Omega_m \\ u_i = \bar{u}_i & x^i \in \partial\Omega_u \\ \nabla_j u_i n^j = \bar{g}_i & x^i \in \partial\Omega_g \\ u_i = \bar{u}_i^{(e)} & x^i \in \partial\partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (2.56)$$

где b^i это компоненты вектора объемных сил, действующих внутри области Ω ; \bar{t}^i , \bar{m}^i , \bar{s}^i , \bar{u}_i , $\bar{u}_i^{(e)}$ и \bar{g}_i это компоненты заданных векторов нагрузок, градиентных нагрузок, перемещений и нормальных производных от перемещений на соответствующих частях поверхности и ребрах тела; H - средняя кривизна поверхности; и по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Ковариантные производные в (2.56) вычисляются на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \tau^{ij} - \nabla_k \mu^{ijk}, \\ \nabla_j \sigma^{ij} &= \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^i \sigma^{lj} + \Gamma_{lj}^j \sigma^{il} \\ \nabla_l \mu^{ijk} &= \frac{\partial \mu^{ijk}}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^i \mu^{mjk} + \Gamma_{ml}^j \mu^{imk} + \Gamma_{ml}^k \mu^{ijm}\end{aligned}\quad (2.57)$$

Все вычисления в диссертации проводятся в терминах физических компонент тензоров, для которых используются соответствующие обозначения, например: $\sigma_{r\theta}$ обозначает $\sigma_{(12)}$, то есть $\sigma^{12} \sqrt{g_{11}g_{22}}$ и т.п. Запись уравнений равновесия и граничных условий в терминах физических компонент может быть получена подстановкой определений (2.53), (2.55) в (2.56).

2.5 Уравнения равновесия в перемещениях

Подставляя определяющие соотношения, например, в Форме II Миндлина (2.38) в уравнения равновесия (2.12) и учитывая кинематические соотношения между перемещениями и деформациями, можно получить следующую запись уравнений равновесия ГТУ в терминах перемещений [25]:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \bar{\mathbf{b}} = 0, \quad (2.58)$$

то есть $(\lambda + 2\mu)(u_{k,ki} - l_1^2 u_{k,kjji}) - \mu(u_{k,ki} - u_{i,kk} - l_2^2(u_{k,kjji} - u_{i,kkjj})) + \bar{b}_i = 0$

где возникают два масштабных параметра l_1 и l_2 .

Использование любых других определяющих соотношений, являющихся переформулировкой общей изотропной теории Миндлина-Тупина или ее частным случаем, приводит к аналогичной форме уравнений равновесия (2.58). Отличие в разных вариантах градиентных теорий возникает только в определении масштабных параметров l_1 , l_2 , которые фактически определяют градиентные эффекты в дилатации и в сдвиговых деформациях (или в поворотах) в среде, соответственно. Эти параметры стоят внутри операторов типа Гельмгольца в уравнениях равновесия (2.58). Если один из масштабных параметров оказывается равным нулю, то будет получен вариант ГТУ, в которой проявляются градиентные эффекты, связанные только со сдвигом и поворотами ($l_1 = 0$, моментная теория упругости, couple stress theory [30]) или только с дилатацией ($l_2 = 0$, дилатационная градиентная теория упругости [186]). В других упрощенных теориях масштабные параметры l_1 , l_2 имеют ненулевые значения.

Выражения масштабных параметров l_1 , l_2 через материальные константы, использованные при записи различных определяющих соотношений в разделе 2.3, представлены в таблице 1. Здесь видно, что наиболее простая форма уравнений равновесия возникает в дилатационной и моментной теориях. Однако, недостатком этих теорий является неучет градиентных эффектов для одной из форм деформаций (сдвиг или дилатация, соответственно). В упрощенной ГТУ Айфантиса оба типа градиентных эффектов учитываются, при этом два масштабных параметра в уравнениях равновесия оказываются равны единственному дополнительному масштабному параметру, введенному в определяющих соотношениях $l_1 = l_2 = l$. Это достаточно сильно упрощает структуру уравнений равновесия так, что их можно пред-

Таблица 1: Выражения масштабных параметров l_1 , l_2 через материальные константы, фигурирующие в определяющих соотношениях различных градиентных теорий

Теория	l_1^2	l_2^2
Форма I Миндлина	$\frac{2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}{\lambda+2\mu}$	$\frac{2(a_2+a_4)}{\mu}$
Форма II Миндлина	$\frac{4a_1+a_2+4a_3+2a_4+4a_5}{\lambda+2\mu}$	$\frac{a_3+a_4+a_5}{\mu}$
Упрощенная ГТУ Айфантиса	l^2	l^2
Симметричная теория Гусева-Лурье	$3\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} l^2$	$\frac{\lambda+2\mu}{\mu} l^2$
Дилатационная градиентная теория	l^2	0
Моментная теория упругости (couple stress)	0	l^2

ставить в виде произведения классического оператора теории упругости и оператора Гельмгольца. В других теориях масштабные параметры в уравнения равновесия определяются более сложным образом, однако эти теории также часто допускают построение различных замкнутых аналитических решений.

Для случая теории электроупругости форма уравнений равновесия и обобщенного закона Гаусса оказывается более сложной, и ее удобно записать в индексном представлении. После подстановки физических соотношений упрощенной ГТУ (2.44) в (2.58), получим:

$$\begin{aligned} (1 - l_1^2 \Delta) \mathcal{L}_{ij} u_j + e_{kij} \phi_{,kj} + \bar{b}_i &= 0 \\ (1 - l_2^2 \Delta) \mathcal{L} \phi - e_{ikl} u_{k,li} + \bar{\rho}_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

а в случае соотношений градиентной теории межфазного слоя (2.43):

$$\begin{aligned} (\delta_{ik} - \frac{l_1^2}{C} \mathcal{L}_{ik}) \mathcal{L}_{kj} u_j + e_{kij} \phi_{,kj} + \bar{b}_i &= 0 \\ (1 - \frac{l_2^2}{\alpha} \mathcal{L}) \mathcal{L} \phi - e_{ikl} u_{k,li} + \bar{\rho}_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $\mathcal{L}_{ij} u_j = C_{ijkl} u_{kl,j}$ – это оператор классической теории упругости, $\mathcal{L} \phi = \epsilon_{ij} \phi_{,ij}$ – это оператор, который выражает закон Гаусса для анизотропного диэлектрика; Δ – оператор Лапласа.

Из записанных соотношений видно, что вариант определяющих соотношений упрощенной градиентной теории упругости (2.44), (2.46) приводят к структуре уравнений, в которых возникает оператор Гельмгольца $(1 - l^2 \Delta)$. При использовании соотношений градиентной теории межфазного слоя (2.43), (2.45) в уравнениях ГТЭ возникает обобщенный оператор Гельмгольца, в котором вместо оператора Лапласа используется оператор соответствующей классической модели (упругости или электростатики).

Глава 3. Привлекаемые методы построения решений

В данной главе диссертации получены предварительные соотношения и дано описание основных методов построения решений, привлекаемых в рассматриваемых далее задачах. Представлена формулировка смешанного метода конечных элементов (МКЭ), который используется далее для получения численных решений. Предложена формулировка и реализован вариант метода Треффца для ГТУ, который использован в диссертации в качестве дополнительного теста для численных решений, получаемых на основе МКЭ. Новые результаты, содержащиеся в данной главе, были опубликованы в работах [50, 101, 107, 151, 173, 175, 179, 187].

3.1 Представление решения в форме Папковича-Нейбера

3.1.1 Общий случай изотропной среды

Для случая изотропной ГТУ (2.58) в диссертации будет построен ряд численных и аналитических решений, использующих представление типа Папковича-Нейбера для общего решения в перемещениях. Будет привлекаться вариант этого представления, предложенный в работах [14, 49] для градиентной теории межфазного слоя. Обобщение этого представления на случай двухпараметрической структуры уравнений равновесия общей ГТУ (2.58) позволяет записать общее решение для перемещений в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \Psi_0 - \alpha \nabla(\mathbf{r} \cdot \Psi_0) + \Psi_2 - \nabla \nabla \cdot (l_1^2 \Psi_1 + l_2^2 \Psi_2) \quad (3.1)$$

где $\alpha = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}$ и $\Psi_0(\mathbf{r})$, $\Psi_1(\mathbf{r})$, $\Psi_2(\mathbf{r})$ – это векторные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Гельмгольца⁸, соответственно:

$$\nabla^2 \Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 - l_1^2 \nabla^2 \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 - l_2^2 \nabla^2 \Psi_2 = 0 \quad (3.2)$$

Справедливость записанного решения проверяется прямой подстановкой (3.1) в (2.58). Заметим, что представление (3.1) сводится к классическому решению Папковича-Нейбера при нулевых значениях масштабных параметров $l_2 = l_1 = 0$. Классический скалярный потенциал в (3.1) не используется, так рассматриваемые далее решения будут построены для материалов с коэффициентом Пуассона, отличным от 0.25, и для задач, в которых нет объемных нагрузок [276]. Поэтому классическая часть решения определяется единственными потенциалом Ψ_0 , который удовлетворяет векторному уравнению Лапласа, как и в классической теории упругости. Соответствующая часть вектора перемещений, определяемая Ψ_0 , удовлетворяет как классическим уравнениям равновесия, так и уравнениям ГТУ (2.58). Поэтому общее решение (3.1) можно переписать в следующем виде, выделяя классическую и

⁸Здесь и далее под уравнением Гельмгольца понимается именно представленный вариант, содержащий разность функции и оператора Лапласа от функции.

градиентную часть перемещений:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_{clas} + \mathbf{u}_{grad}, \\ \mathbf{u}_{clas} &= \Psi_0 - \alpha \nabla(\mathbf{r} \cdot \Psi_0), \\ \mathbf{u}_{grad} &= \Psi_2 - \nabla \nabla \cdot (l_1^2 \Psi_1 + l_2^2 \Psi_2)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Отсюда видно, что использование двух дополнительных потенциалов для определения градиентной части решения, обеспечивает для него ненулевые значения дивергенции и ротора, причем выполняется $\nabla \cdot \mathbf{u}_{grad} = \nabla \cdot \Psi_1$ и $\nabla \times \mathbf{u}_{grad} = \nabla \times \Psi_2$.

Для построения аналитических решений представление (3.3) является очень удобным, так как в случае известного классического общего решения рассматриваемой задачи (\mathbf{u}_{clas}), остается найти только градиентную составляющую общего решения (\mathbf{u}_{grad}). Последняя же легко записывается в виде решения векторных уравнений Гельмгольца (3.2) в произвольной криволинейной системе координат, допускающей разделение переменных для этих уравнений. Соответственно, на основе теоремы Гельмгольца о представлении векторного поля, можно записать следующий вид общего решения для потенциалов, определяющих градиентную часть решения [277]:

$$\begin{aligned}\Psi_k &= \mathbf{L}_k + \mathbf{M}_k + \mathbf{N}_k \\ \mathbf{L}_k &= \nabla \varphi_k^{(1)}, \quad \mathbf{M}_k = \nabla \times (\mathbf{a}_1 \omega \varphi_k^{(2)}), \quad \mathbf{N}_k = l_k \nabla \times \nabla \times (\mathbf{a}_1 \omega \varphi_k^{(3)}) \\ \varphi_k^{(s)} - l_k^2 \nabla^2 \varphi_k^{(s)} &= 0, \quad (k = 1, 2, s = 1, 2, 3),\end{aligned}\quad (3.4)$$

где векторные потенциалы Ψ_k представлены в виде суммы продольной \mathbf{L}_k и двух поперечных компонент $\mathbf{M}_k, \mathbf{N}_k$; эти компоненты представлены, в свою очередь, через шесть функций $\varphi_k^{(s)}$, удовлетворяющих скалярным уравнениям Гельмгольца. Для упрощения индексной записи здесь также использовано обозначение l_k ($k = 1, 2$): $l_1 = l_1, l_2 = l_2$.

Вектор \mathbf{a}_1 и функция ω в (3.4) по-разному определены в различных системах координат. Для построения решения о сферическом включении в диссертации будет использоваться сферическая система координат, в которой $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_r$ – это единичный вектор в радиальном направлении, и $\omega = r$ – это радиальная координата. Множитель l_k в определении \mathbf{N}_k в (3.4) использован для того, чтобы все скалярные потенциалы $\varphi_k^{(1)}, \omega \varphi_k^{(2)}$ и $\omega \varphi_k^{(3)}$ имели одинаковую размерность.

Общее решение для введенных функций, удовлетворяющих скалярным уравнениям Гельмгольца в сферической системе координат, имеет вид:

$$\varphi_k^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_{n,m}^{(k,s)} j_n\left(\frac{ir}{l_k}\right) + B_{n,m}^{(k,s)} y_n\left(\frac{ir}{l_k}\right) \right) Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (3.5)$$

где $A_{n,m}^{(k,s)}$ и $B_{n,m}^{(k,s)}$ – это неизвестные константы, которые должны определяться из граничных условий задачи; $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ – сферические функции; j_n и y_n – сферические функции Бесселя; i – мнимая единица.

Таким образом, общее решение для перемещений в ГТУ может быть построено в виде суммы классического решения и градиентного. Последнее выражается через три векторных потенциала (3.4), которые в свою очередь, выражаются через шесть скалярных потенциалов (3.5). Интересно отметить, что классическую часть решения оказывается сложнее формально записать в общем виде для произвольной криволинейной системы координат. Это связано со сложностью представления общего решения для векторного уравнения Лапласа в криволинейных системах координат [277].

3.1.2 Упрощенный вариант представления решения в форме Папковича-Нейбера

Можно заметить, что использование шести скалярных потенциалов для определения трех компонент градиентной составляющей вектора перемещений является избыточным. Аналогичная ситуация возникает в классическом решении Папковича-Нейбера, в котором присутствуют четыре потенциала (один скалярный и три компоненты векторного), но они всегда являются зависимыми (один всегда можно исключить), кроме того случая, когда коэффициент Пуассона материала равен 0.25 [276]. Форма общего решения в виде (3.3) была использована нами в работе [175] и будет привлекаться в разделе 3.2 диссертации. Однако, позднее была предложена упрощенная запись этого общего решения, которая будет использована, в частности, в разделе 3.4 диссертации. Для получения этой упрощенной записи воспользуемся представлением (3.4) и подставим его в определение \mathbf{u}_{grad} в исходных соотношениях (3.3). Получим:

$$\mathbf{u}_{grad} = \mathbf{L}_2 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{N}_2 - \nabla \nabla \cdot (l_1^2 \mathbf{L}_1 + l_2^2 \mathbf{L}_2) \quad (3.6)$$

где учтено, что применение оператора дивергенции ($\nabla \cdot$) к поперечным компонентам $\mathbf{M}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{N}_2$ дает ноль.

Далее учтем определение векторных потенциалов $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ через скалярные (3.4), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{grad} &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{N}_2 - l_1^2 \nabla (\nabla^2 \phi_1^{(1)}) + \nabla \phi_2^{(1)} - l_2^2 \nabla (\nabla^2 \phi_2^{(1)}) \\ &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{N}_2 - \nabla \phi_1^{(1)} + \nabla (\phi_2^{(1)} - l_2^2 \nabla^2 \phi_2^{(1)}) \\ &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{N}_2 - \nabla \phi_1^{(1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где также учтено, что скалярные потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (см. (3.4)).

Окончательно, упрощая обозначения (индексы уже оказываются не нужны), получаем следующее упрощенное представление решения для вектора перемещений в ГТУ, в котором для градиентной составляющей \mathbf{u}_{grad} , по сути, используется теорема Гельмгольца, то есть разложение векторного поля на потенциальную и вихревую части:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{clas} + \mathbf{u}_{grad}, \\ \mathbf{u}_{clas} &= \Phi - \alpha \nabla (\mathbf{r} \cdot \Phi), \\ \mathbf{u}_{grad} &= \Psi + l_1^2 \nabla \psi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где векторный потенциал $\mathbf{\Psi} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{N}_2$ представляет собой соленоидальное векторное поле ($\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0$), а скалярный потенциал $\psi = -l_1^{-2} \phi_1^{(1)}$ определяет безвихревую часть решения, причем оба эти потенциала удовлетворяют уравнениям Гельмгольца вида:

$$\psi - l_1^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad \mathbf{\Psi} - l_2^2 \nabla^2 \mathbf{\Psi} = 0 \quad (3.9)$$

а классический векторный потенциал $\mathbf{\Phi}$, как и ранее удовлетворяет векторному уравнению Лапласа.

Таким образом, представление градиентной составляющей в решении для перемещений \mathbf{u}_{grad} сведено в (3.8) к разложению Гельмгольца на безвихревое и соленоидальное поля. С формальной точки зрения векторного анализа, разложение Гельмгольца справедливо в ограниченных областях, либо для полей, затухающих на бесконечности быстрее чем $1/r$ (более того, известны обобщения теоремы Гельмгольца для полей, которые растут на бесконечности медленнее чем линейная функция). Для классической части поля перемещений такое требование было бы слишком сильным [278]. Однако для градиентной составляющей оно оказывается естественным, так как все градиентные эффекты в ГТУ определяются решениями, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а соответствующие затухающие на бесконечности функции (экспоненты, функции Бесселя и др.) удовлетворяют указанному требованию. Поэтому предложенное представление является допустимым и, более того, на основании теоремы разложения Гельмгольца, оно является полным.

Решение в форме (3.8) будет привлекаться в разделе 3.4. для задачи плоской деформации о клине. Эта задача будет рассматриваться в полярной цилиндрической системе координат ($r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [-\infty, \infty]$), и будет предполагаться отсутствие перемещений в направлении оси z . В этом случае покомпонентная запись представления решения для перемещений (3.8) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u_r^{(c)} + u_r^{(g)}, u_\theta^{(c)} + u_\theta^{(g)}, 0\} \\ u_r^{(c)} &= (1 - \alpha)\Phi_r - r\alpha \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} \\ u_\theta^{(c)} &= \Phi_\theta - \alpha \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} \\ u_r^{(g)} &= \Psi_r + l_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ u_\theta^{(g)} &= \Psi_\theta + \frac{l_1^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

где используется предположение, что векторный потенциал $\mathbf{\Psi} = \{\Psi_r, \Psi_\theta, 0\}$ определяет чисто вихревое поле.

В случае плоской задачи и полярных координат компоненты потенциалов, входящие в представление (3.10), могут быть представлены в виде рядов. Для компонент классического

векторного потенциала, удовлетворяющего векторному уравнению Лапласа, имеем [277]:

$$\begin{aligned}
\Phi_r &= c_{10} \ln r \sin \theta + c_{30} \sin \theta + c_{50} \ln r \cos \theta + c_{70} \cos \theta \\
&+ \sin \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{1n} \cos n\theta + c_{2n} \sin n\theta) + r^n (c_{3n} \cos n\theta + c_{4n} \sin n\theta) \right) \\
&+ \cos \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta) + r^n (c_{7n} \cos n\theta + c_{8n} \sin n\theta) \right) \\
\Phi_\theta &= c_{10} \ln r \cos \theta + c_{30} \cos \theta - c_{50} \ln r \sin \theta - c_{70} \sin \theta \\
&+ \cos \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{1n} \cos n\theta + c_{2n} \sin n\theta) + r^n (c_{3n} \cos n\theta + c_{4n} \sin n\theta) \right) \\
&- \sin \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta) + r^n (c_{7n} \cos n\theta + c_{8n} \sin n\theta) \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где c_{mn} ($m = 1..8$, $n = 0.. \infty$) это неизвестные константы, которые должны определяться из граничных условий.

Потенциалы для градиентной части решения могут быть представлены следующим образом. Во-первых, вихревой потенциал Ψ , удовлетворяющий уравнению Гельмгольца, для задачи плоской деформации может быть определен через соответствующий скалярный потенциал (по аналогии с (3.4), но для полярной системы координат [277]):

$$\Psi = l_2^2 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\chi), \quad i.e. \quad \Psi_r = \frac{l_2^2}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \Psi_\theta = -l_2^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \tag{3.12}$$

где рассматриваются только перемещения в плоскости, и поэтому компонента потенциала, определяющая перемещения "из плоскости" ($\nabla \times (\mathbf{r}\chi)$) исключена; $\mathbf{r} = \{r, 0, 0\}$ – это радиус вектор точки в полярной системе координат, а скалярный потенциал χ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца:

$$\chi - l_2^2 \nabla^2 \chi = 0 \tag{3.13}$$

Решения скалярного уравнения Гельмгольца в полярной системе координат может быть представлено в виде ряда [279]. Используя это представление, определяем два введенных скалярных потенциала ψ (3.8) и χ (3.12), (3.13) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n \left(\frac{r}{l_1} \right) (b_{1n} \cos n\theta + b_{2n} \sin n\theta) + I_n \left(\frac{r}{l_1} \right) (b_{3n} \cos n\theta + b_{4n} \sin n\theta) \right) \\
\chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n \left(\frac{r}{l_2} \right) (d_{1n} \cos n\theta + d_{2n} \sin n\theta) + I_n \left(\frac{r}{l_2} \right) (d_{3n} \cos n\theta + d_{4n} \sin n\theta) \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где b_{mn} , d_{mn} – это неизвестные константы; K_n и I_n – это модифицированные функции Бесселя.

Таким образом, получено представление решения ГТУ для задачи плоской деформации, в котором классическая часть поля перемещений $\mathbf{u}^{(c)} = \{u_r^{(c)}, u_\theta^{(c)}, 0\}$ определяется двумя компонентами векторного потенциала Φ_r , Φ_θ (3.11), а градиентная часть $\mathbf{u}^{(g)} = \{u_r^{(g)}, u_\theta^{(g)}, 0\}$

определена через два скалярных потенциала χ и ψ (3.14). Отметим, что записанное представление в рядах является полным, так как оно выражается через решения уравнений Лапласа и Гельмгольца в полярной системе координат, полнота которых была доказана (см., например, [280]).

В прямоугольной декартовой системе координат нет необходимости в использовании представлений (3.4) или (3.12), так как решение векторного уравнения Гельмгольца, как и векторного уравнения Лапласа, может быть представлено в виде вектора из трех функций, удовлетворяющих соответствующим скалярным уравнениям. Именно такое представление используется в разделе 2.9.2. в предложенном подходе к реализации метода Треффца в ГТУ.

3.1.3 Физический смысл потенциалов в решении Папковича-Нейбера в ГТУ

Вычисляя дивергенцию и ротор от уравнений равновесия ГТУ (2.58), найдем, что функция дилатации $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ и вектор малых поворотов $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$ должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla^2 \Theta = 0 \quad (3.15)$$

$$(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla^2 \mathbf{w} = 0 \quad (3.16)$$

Решения этих уравнений могут быть представлены в виде суммы решений, удовлетворяющих уравнению Лапласа и уравнению Гельмгольца:

$$\Theta = \Theta_c + \Theta_g, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_c + \mathbf{w}_g \quad (3.17)$$

$$\nabla^2 \Theta_c = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{w}_c = 0 \quad (3.18)$$

$$(1 - l_1^2 \nabla^2) \Theta_g = 0, \quad (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{w}_g = 0 \quad (3.19)$$

где использовано разложение функции дилатации и вектора поворотов на классическую и градиентную составляющие, которые удовлетворяют уравнению Лапласа и Гельмгольца, соответственно. При этом эти составляющие связаны с представлением для перемещений (3.3), (3.8) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \nabla \cdot \mathbf{u}^{(c)}, & \mathbf{w}_c &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^{(c)} \\ \Theta_g &= \nabla \cdot \mathbf{u}^{(g)}, & \mathbf{w}_g &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^{(g)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Использование представления решения для $\mathbf{u}^{(c)}$ и $\mathbf{u}^{(g)}$ в форме Папковича-Нейбера с учетом (3.20) позволяет удовлетворить соотношения (3.18), (3.19) тождественно. При этом можно установить физический смысл потенциалов, входящих в предложенное упрощенное представление решения ГТУ. Подставляя представление (3.8) в (3.20), получим:

$$\begin{aligned} \Theta_g &= \nabla \cdot \mathbf{u}^{(g)} = l_1^2 \nabla^2 \psi \\ \mathbf{w}_g &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^{(g)} = \frac{1}{2} \nabla \times \Psi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Учитывая далее, что потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, находим:

$$\begin{aligned}\Theta_g &= \psi \\ \mathbf{w}_g &= \frac{1}{2}\nabla \times \Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi = -2l_2^2\nabla \times \mathbf{w}_g\end{aligned}\tag{3.22}$$

Таким образом, скалярный потенциал ψ в представлении решения ГТУ (3.8), фактически, совпадает с градиентной частью функции дилатации. Векторный потенциал Ψ определяет градиентную часть вектора поворотов. Этот физический смысл является естественным следствием использования разложения Гельмгольца для $\mathbf{u}^{(g)}$.

3.1.4 Общее решение для уравнений равновесия упрощенных градиентных теорий

Остановимся далее на проблеме представления общего решения для уравнений равновесия упрощенных градиентных теорий, варианты которых рассматривались в разделе 2.3. Записанные варианты представления решения (3.3) и (3.8) остаются верны в случае любой частной градиентной модели при использовании соответствующих гипотез этой модели. В упрощенной ГТУ Айфантиса (2.34) и в полностью симметричной теории (2.37) в уравнениях равновесия присутствуют два масштабных параметра, как и в общем случае (см. Таблицу 1). Поэтому запись общего решения остается неизменной, при этом она даже может быть упрощена. В частности, для теории Айфантиса два масштабных параметра в уравнениях равновесия оказываются равны, поэтому в (3.3), (3.8) следует использовать $l_1 = l_2 = l$.

Несколько иная ситуация возникает в случае дилатационной градиентной теории упругости (2.37) и моментной теории (2.40). Дело в том, что эти модели являются редуцированными вариантами общей ГТУ, и их гипотезы обеспечивают только положительную полуопределенность плотности энергии деформаций (значения градиентных модулей упругости лежат на границе допустимых значений, необходимых для положительной определенности энергии деформаций). Эта особенность этих теорий обсуждалась в работах [186, 269]. В уравнениях равновесия в этих теориях возникает только один масштабный параметр. В частности, подстановка гипотез дилатационной теории упругости (2.39) в уравнения равновесия ГТУ (2.58), приводит к следующему их виду:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l^2\nabla^2)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0\tag{3.23}$$

а соответствующее представление общего решения (3.8) в этой теории:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(c)} + \mathbf{u}^{(g)}, \\ \mathbf{u}^{(c)} &= \Phi - \kappa\nabla(\mathbf{x} \cdot \Phi), \quad \mathbf{u}^{(g)} = l^2\nabla\psi, \\ \nabla^2\Phi &= 0 \quad \psi - l^2\nabla^2\psi = 0\end{aligned}\tag{3.24}$$

В этих соотношениях учтено, что масштабный параметр, который определяет градиентные эффекты в отношении бесконечно малых вращений, равен нулю $l_2 = 0$. При этом общее

решение в дилатационной теории, как оказывается, не должно содержать вращательных потенциалов в градиентной части поля перемещений $\mathbf{u}^{(g)}$, что означает, что соответствующий потенциал тождественно равен нулю $\Psi \equiv 0$. Поэтому градиентная часть перемещений оказывается потенциальным векторным полем. Более того, как было показано выше, оставшийся единственный скалярный потенциал ψ определяет градиентную часть поля дилатации $\Theta_g = \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \psi$, а поле малых поворотов при этом остается классическим: $\mathbf{w}^{(g)} \equiv 0$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(c)}$.

Использование гипотез моментной теории упругости (2.40) приводит к следующему виду уравнений равновесия (2.58) [30]:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - l^2\nabla^2)\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (3.25)$$

а общее решение этих уравнений (3.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(c)} + \mathbf{u}^{(g)}, \\ \mathbf{u}^{(c)} &= \Phi - \kappa\nabla(\mathbf{x}\cdot\Phi), \quad \mathbf{u}^{(g)} = \Psi \\ \nabla^2\Phi &= 0, \quad \Psi = l^2\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\chi), \quad \chi - l^2\nabla^2\chi = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Как видно из (3.26), в моментной теории упругости, наоборот, поле перемещений содержит градиентные эффекты только в части, связанной с поворотами. Потенциальная же часть (дилатация) остается классической $\Theta_g \equiv 0$, $\Theta = \Theta_c$. Градиентная часть перемещений в моментной теории является соленоидальным векторным полем и определяется только через вращательный потенциал Ψ .

Таким образом, в общей ГТУ и в упрощенных теориях, таких как теории Айфантиса или Гусева-Лурье, градиентная часть поля перемещений содержит, как потенциальную, так и вращательные части. Однако, существуют модели, в которых градиентная часть перемещений в этом смысле оказывается неполной. В дилатационной теории градиентные эффекты проявляются только в потенциальной составляющей поля перемещений, а в моментной теории упругости – только во вращательной. Такая особенность этих теорий является существенной с точки зрения регуляризации классических сингулярных задач теории упругости. Вблизи таких концентраторов, как трещины или острые углы, реализуется сложное напряженное состояние и сингулярность присутствует, как в поле дилатации, так и в поле поворотов. Если модель оставляет одну из этих составляющих решения классическим, то и в целом, получаемое решение будет оставаться сингулярным. Эти эффекты подробнее будут рассмотрены в разделе 3.4 на примере задачи о клине, нагруженном сосредоточенной силой.

3.2 Интегральные формулы Эшелби в общей теории Миндлина-Тупина

Интегральные формулы Эшелби в классической теории упругости позволяют оценить изменение энергии деформаций неоднородного материала по сравнению с однородным материалом при заданных одних и тех же нагрузках, приложенных на поверхности тела [100]. В данном разделе представлен вывод этих формул в общей градиентной теории упругости Миндлина-Тупина (2.12), (2.13). Ранее эти формулы были получены в градиентной теории межфазного слоя [14, 49] с учетом упрощенной структуры граничных условий этой теории.

Использование интегральных формул Эшелби является удобным в некоторых прикладных задачах. В диссертации они используются для доказательства эквивалентности энергетических и прямых методов осреднения и для реализации обобщенного самосогласованного метода в задачах микромеханики. Вывод, представленный в данном разделе, обобщает аналогичный подход, использованный в монографии [99] в рамках классической теории упругости для композиционного материала, содержащего матрицу и включение. Для реализации этого подхода рассмотрим неоднородное тело, занимающее область Ω , которое состоит из фазы включения Ω_1 и фазы матрицы Ω_2 , при этом $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ область. На внешней поверхности тела $\partial\Omega$ заданы статические граничные условия, которые в ГТУ определяются вектором классических напряжений $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ и моментных напряжений $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$ (Рис. 2, а). При этом предполагаем, что внешняя поверхность тела $\partial\Omega$ и контактная поверхность между матрицей и включением $\partial\Omega_1$ являются гладкими и не содержат ребер. Полная энергия деформаций тела Ω определяется в ГТУ следующим интегралом (см. (2.3)):

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\eta}) dv \quad (3.27)$$

Таким образом, мы предполагаем, что напряженно-деформированное состояние фаз рассматриваемой среды может быть описано в рамках градиентной теории упругости с учетом вклада градиентов деформаций ($\boldsymbol{\eta} = \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$) или вторых градиентов от перемещений ($\boldsymbol{\eta} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}$) в потенциальную энергию. А также с учетом всех вытекающих отсюда следствий: наличие масштабных параметров в определяющих соотношениях, непрерывность градиентов перемещений на границе контакта, изменение уровня концентрации напряжений в зависимости от размера включения и т.д.

Для дальнейших рассуждений также рассмотрим три вспомогательные задачи:

1. Тело Ω состоит только из материала матрицы и находится в условиях действия того же набора нагрузок $\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{m}}$ (Рис. 2б). Переменные для этой вспомогательной задачи будут обозначаться с нижним индексом "0", например, $\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\tau}_0$ и т.д. Энергия деформаций такого тела определяется выражением:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_0) dv \quad (3.28)$$

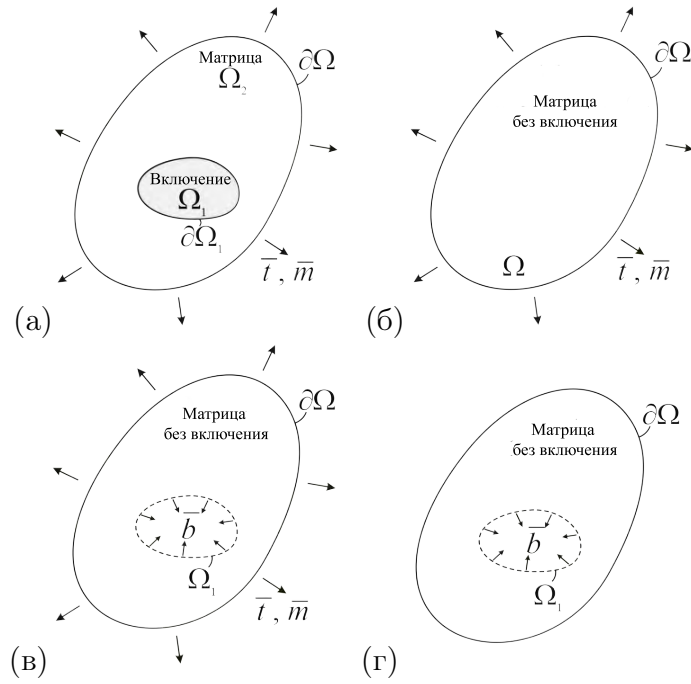


Рис. 2: К выводу интегральных формул Эшелби в градиентной теории упругости

2. Тело Ω , состоящее только из материала матрицы, нагруженное теми же внешними нагрузками $\bar{\mathbf{t}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, а также, дополнительно, объемными нагрузками $\bar{\mathbf{b}}$, которые действуют внутри области, занимаемой включением Ω_1 (Рис. 2в). Эти объемные нагрузки, по предположению, приводят к реализации такого напряженно-деформированного состояния материала матрицы вне включения, которое полностью аналогично соответствующему состоянию в исходной задаче (Рис. 2а). В этой вспомогательной задаче переменные будут обозначаться с нижним индексом "1", при этом выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (3.29)$$

3. Тело Ω , состоящее только из материала матрицы и подверженное воздействию только объемных нагрузок $\bar{\mathbf{b}}$, действующих внутри зоны включения Ω_1 (Рис. 2г). Переменные этой задачи будут обозначаться с нижним индексом "2", например, \mathbf{u}_2 , $\boldsymbol{\tau}_2$ и т.д. В этой задаче на внешней поверхности тела предписано отсутствие внешних нагрузок:

$$\mathbf{t}_2 = 0, \quad \mathbf{m}_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.30)$$

Итак, используя соотношение (3.28), энергия деформаций неоднородного тела (3.27) может быть вычислена следующим образом:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_0) dv \quad (3.31)$$

Учитывая в (3.31) условия симметрии тензора напряжений и правило вычисления дивер-

генции от скалярного произведения двух тензорных величин, получим:

$$\begin{aligned}
U &= U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_0 : \nabla \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\mu} : \nabla \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_0 : \nabla \nabla \mathbf{u}_0) dv \\
&= U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathbf{u}_0) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_0) \cdot \mathbf{u}_0 \\
&\quad + \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} : \nabla \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu}_0 : \nabla \mathbf{u}_0) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}_0) : \nabla \mathbf{u}_0) dv
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Учитывая определения для тензоров полных напряжений, а также уравнения равновесия (например, для исходной задачи имеем $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}$ и $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$), упрощаем (3.32) следующим образом:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{u}_0) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu} : \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu}_0 : \nabla \mathbf{u}_0)) dv \tag{3.33}$$

Используя далее теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем (3.33) к следующему виду:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} : \nabla \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}_0 : \nabla \mathbf{u}_0) ds \tag{3.34}$$

Последние два слагаемые под интегралом в (3.34) могут быть упрощены путем стандартных преобразований, которые используются обычно при выводе вариационной формулировки градиентных теорий [25, 154]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} : \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} : \nabla_S \mathbf{u} + \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_n \mathbf{u} \\
&= \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}) - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_n \mathbf{u} \\
&= -H \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u})) \\
&\quad - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_n \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

и аналогичные же соотношения необходимо записать для переменных с индексом "0".

Заметим, что преобразования (3.35) подразумевались при использовании теоремы Стокса для поверхностной дивергенции в вариационной формулировке (2.9), а их вывод был показан, например, в работе [154].

В данном случае необходимо также применить теорему Стокса для слагаемых вида $\nabla \times (\dots)$ в (3.35), что приводит к возникновению интегралов вдоль ребер тела в (3.34). Однако, так как рассматриваем тело с гладкой поверхностью, то соответствующие слагаемые могут быть просто исключены. В результате, на основании (3.34) и (3.35) получаем:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds, \tag{3.36}$$

где учтены определения для векторов напряжений \mathbf{t} , \mathbf{t}_0 и векторов градиентных (моментных)

напряжений \mathbf{m} , \mathbf{m}_0 , полученные в главе 2.1 (см. (2.13)).

Наконец, учитывая, что в рассматриваемых задачах (Рис. 2а и Рис. 2б) на поверхности тела предписаны одинаковые граничные условия ($\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}$, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = \bar{\mathbf{m}}$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega$), на основании (3.36) получаем вариант формулы Эшелби, обобщенной на случай ГТУ для тел с гладкой поверхностью:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \bar{\mathbf{m}} \cdot (\partial_n \mathbf{u} - \partial_n \mathbf{u}_0)) ds. \quad (3.37)$$

Записанное соотношение позволяет вычислить изменение энергии тела, содержащего включение, по сравнению с аналогичным телом без включения, если из решения соответствующих задач известно распределение перемещений и нормальных градиентов от перемещений на поверхности тела. Таким образом, формула Эшелби позволяет заменить интегрирование по объему на интегрирование по поверхности и, в некотором смысле, является обобщением теоремы Остроградского-Гаусса для задач о неоднородных средах.

Далее, следуя [99], получим вариант формулы Эшелби, который является более удобным для применения в задачах осреднения в микромеханике. Для этого рассматриваем вторую и третью вспомогательные задачи, представленные на Рис. 2в, г. Во-первых заметим, что в силу линейности, переменные во второй вспомогательной задаче (Рис. 2в) могут быть представлены в виде суммы соответствующих переменных в первой и в третьей вспомогательных задачах (Рис. 2б, г), то есть:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_2, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \\ \boldsymbol{\eta}_1 &= \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_2, \\ \boldsymbol{\tau}_1 &= \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2, \\ \boldsymbol{\mu}_1 &= \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Энергия однородной среды с эквивалентным состоянием в матрице во второй задаче (Рис. 2в), может быть представлена в этом случае:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left((\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2) : (\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + (\boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_2) \dot{:} (\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_2) \right) dv \\ &= U_0 + U_2 + U_{int} \end{aligned} \quad (3.39)$$

где энергия деформаций в третьей задаче U_2 (Fig. 2d) и энергия взаимодействия двух полей напряжений U_{int} определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \dot{:} \boldsymbol{\eta}_2) dv \\ U_{int} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\tau}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\mu}_0 \dot{:} \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \dot{:} \boldsymbol{\eta}_0) dv \end{aligned} \quad (3.40)$$

Далее учтем следующие условия симметрии:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \boldsymbol{\varepsilon}_2 : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_2 : \boldsymbol{\eta}_0 &= \boldsymbol{\eta}_2 : \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}_0 : \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_2\end{aligned}\quad (3.41)$$

и выполняя преобразования, аналогично сделанным в (3.31)-(3.37), получим из (3.40) следующее выражение для энергии взаимодействия:

$$U_{int} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_2) dv = \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}_2 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \partial_n \mathbf{u}_2) ds \quad (3.42)$$

Далее заметим, что граничные условия на внешней поверхности $\partial\Omega$ в исходной задаче (Рис. 2а) совпадают с условиями во второй вспомогательной задаче (Рис. 2в). Поэтому из представления (3.38) следует выполнение равенств $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ и $\partial_n \mathbf{u}_2 = \partial_n \mathbf{u}_1 - \partial_n \mathbf{u}_0 = \partial_n \mathbf{u} - \partial_n \mathbf{u}_0$ на поверхности тела $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Следовательно, интегралы в (3.42) и в (3.37) совпадают, и можно записать следующее соотношение между энергией рассматриваемых неоднородного и однородного тел:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} U_{int}, \quad (3.43)$$

Далее рассмотрим замкнутую поверхность Σ , расположенную в матрице и не пересекающую область включения. Эта поверхность разделяет исходное тело Ω на внутреннюю часть Ω_I , содержащую включение ($\Omega_1 \subset \Omega_I$), и внешнюю область Ω_{II} . Тогда представление для энергии взаимодействия U_{int} (3.42) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}U_{int} &= \int_{\Omega_I} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_2) dv + \int_{\Omega_{II}} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_2) dv \\ &= \int_{\Omega_I} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}_2) dv + \int_{\Omega_{II}} (\boldsymbol{\tau}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\mu}_2 : \boldsymbol{\eta}_0) dv \\ &= \int_{\Sigma} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u}_2) ds - \int_{\Sigma} (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{m}_2 \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds + \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}}_2 \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds\end{aligned}\quad (3.44)$$

где учтены условия симметрии (3.41) и также учтен различный знак внешней единичной нормали к поверхности Σ при выходе на эту поверхность со стороны области Ω_I и Ω_{II} .

Граничные условия по отсутствию нагрузки в третьей вспомогательной задаче $\bar{\mathbf{t}}_2 = 0$, $\bar{\mathbf{m}}_2 = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$ (3.30) приводят к тому, что последний интеграл в (3.44) оказывается тождественно равен нулю. Далее, используя соотношения (2.13), (3.29) и (3.38), приводим выражение (3.44) к следующему виду:

$$U_{int} = \int_{\Sigma} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_0) ds + \int_{\Sigma} (\mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds \quad (3.45)$$

Наконец, подставляя (3.45) в (3.43), мы находим еще один вариант формулы Эшелби,

обобщенный на случай градиентной теории упругости:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_0) ds + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds \quad (3.46)$$

Заметим, что используя другой набор (комбинацию) классических и градиентных кинематических и статических граничных условий на внешней поверхности $\partial\Omega$, можно получить четыре различных варианта формул Эшелби в градиентной теории упругости. Формула (3.46) получена для заданных векторов напряжений и градиентных напряжений $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$, $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$. Если вместо условия на вектор напряжений использовать соответствующее кинематическое условие относительно перемещений, то есть $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, то мы получим:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u}) ds + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds \quad (3.47)$$

(изменилась расстановка индексов в первом интеграле).

Представленный в данном разделе диссертации вывод формул Эшелби для ГТУ был опубликован в работе [101]. Классические варианты формул Эшелби следуют из (3.46), (3.47), если предположить отсутствие градиентных эффектов в среде. В этом случае все градиентные модули в определяющих соотношениях равны нулю, градиентные напряжения не возникают $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = 0$, и имеет место классическое определение вектора напряжений на поверхности среды $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{clas} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{t}_0 = (\mathbf{t}_0)_{clas} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_0$.

Полученные соотношения можно достаточно просто обобщить и на случай геометрии, содержащей ребра, при этом в формулах Эшелби возникнут соответствующие линейные интегралы вдоль ребер.

Формулы Эшелби для градиентной теории электроупругости могут получены на основе аналогичных рассуждений, представленных в данном разделе для ГТУ. Проще всего это показать используя формулировку ГТЭ в обобщенной нотации Барнета-Лоте (2.26), (2.27). С точностью до обозначений эта формулировка повторяет задачу градиентной теории упругости, и следовательно, все изложенные результаты могут быть автоматически обобщены на случай ГТЭ. Например, в обобщенной нотации формула Эшелби (3.46) для электрической энтальпии неоднородной среды принимает вид:

$$h = h_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{U} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_0) ds + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{M}_0 \cdot \partial_n \mathbf{U} - \mathbf{M} \cdot \partial_n \mathbf{U}_0) ds \quad (3.48)$$

Переходя к обычной записи в (3.48), получим:

$$h = h_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} + q \phi_0 - q_0 \phi) ds + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u}_0 + m_0 \partial_n \phi - m \partial_n \phi_0) ds \quad (3.49)$$

3.3 Прямые и энергетические методы осреднения в ГТУ и в ГТЭ

На основе полученных формул Эшелби можно провести сопоставление энергетических и прямых (direct, straightforward) подходов к реализации процедуры осреднения для определения эффективных свойств в ГТУ и ГТЭ. В энергетическом подходе предполагается, что эффективные константы можно найти, приравнявая энергию деформаций неоднородной среды и эквивалентной однородной среды с эффективными свойствами при заданных одинаковых условиях нагружения (в задачах микромеханики, это обычно "однородные" граничные условия). В прямых методах осреднения эффективные свойства определяются путем непосредственного осреднения переменных модели по представительному фрагменту, а эффективные характеристики находятся на основе записи определяющих соотношений эффективной среды в терминах соответствующих осредненных переменных – средних напряжений, средних деформаций и т.д. Доказательство эквивалентности прямых и энергетических методов осреднения в классической микромеханике основано на использовании формул Эшелби [98, 99]. Для ГТУ это доказательство представлено в данном разделе. Обобщение результатов, представленных в этом разделе, на случай ГТЭ следует автоматически из обобщенной формы записи уравнений ГТЭ в нотации Барнета-Лоте (2.26), (2.27), которая формально совпадает с формулировкой ГТУ.

Рассмотрим неоднородное тело Ω , состоящее из фазы включения Ω_1 и матрицы Ω_2 , объемы которых будем обозначать, соответственно, V_1 и V_2 . Объемное содержание включений определяются отношением $c = V_1/V$, где $V = V_1 + V_2$. Упругие деформации фаз композита описываем в рамках ГТУ. В рассматриваемом двухфазном композите средние классические напряжения $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle$ и средние деформации $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ могут быть найдены на основе следующих соотношений:

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = c \langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle + (1 - c) \langle \boldsymbol{\tau}^{(2)} \rangle, \quad (3.50)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = c \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \rangle + (1 - c) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \rangle, \quad (3.51)$$

где верхними индексами "1" и "2" обозначены соответствующие переменные в фазе включения и матрицы, а осредненные значения определяются интегрированием по соответствующим объемам:

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} dv, \quad \langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle = \frac{1}{V_1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^{(1)} dv, \quad \dots$$

Подставляя в выражение для средних деформаций (3.51) определяющие соотношения для фаз композита $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1,2)} = \mathbf{S}^{(1,2)} : \boldsymbol{\tau}^{(1,2)}$, где $\mathbf{S}^{(1,2)} = (\mathbf{C}^{(1,2)})^{-1}$ – тензоры податливостей, получим:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = c \mathbf{S}^{(1)} : \langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle + (1 - c) \mathbf{S}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\tau}^{(2)} \rangle \quad (3.52)$$

Далее введем тензоры концентрации напряжений $\mathbf{T}^{(1,2)}$, которые определяют связь сред-

них классических напряжений в фазах и средних классических напряжений в композите:

$$\langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle = \mathbf{T}^{(1)} : \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \quad (3.53)$$

$$\langle \boldsymbol{\tau}^{(2)} \rangle = \mathbf{T}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \quad (3.54)$$

Также будем использовать определяющие соотношения для эквивалентной однородной среды, записанные в терминах средних деформаций, средних напряжений и эффективных податливостей (непосредственное использование этих соотношения является основой в реализации прямых методов осреднения):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{S}^* : \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \quad (3.55)$$

Подставляя (3.54), (3.55) в (3.52), получаем выражение для определения эффективных свойств композиционного материала на основании известных характеристик фаз:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{(2)} + c(\mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(2)}) : \mathbf{T}^{(1)} \quad (3.56)$$

где учтена связь между тензорами концентрации напряжений в фазах композита ($c\mathbf{T}^{(1)} + (1-c)\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{I}$), которая следует из (3.50), (3.54), и \mathbf{I} – это единичная матрица.

Заметим, что основное отличие представленного выражения (3.56) от аналогичного в классической микромеханике [98, 99, 281] заключается в определении тензора концентрации напряжений. В классической микромеханике известно, что при заданных однородных граничных условиях на бесконечности, внутри включений реализуется однородное поле напряжений и деформаций. Таким образом в классической теории тензор концентрации напряжений может быть введен на основе соотношения $\langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle = \boldsymbol{\tau}^{(1)} = \mathbf{T}^{(1)} : \langle \boldsymbol{\tau} \rangle$ (то есть не применяя процедуры осреднения в фазе включения). Именно эта особенность делает удобным применение прямых методов в классических моделях. За счет постоянного поля во включении, все необходимые переменные задачи могут быть выражены через константы, что позволяет получать простые замкнутые аналитические соотношения для эффективных свойств.

В градиентных теориях возникают эффекты межфазных (пограничных) зон. Напряженно-деформированное состояние внутри включений оказывается неоднородным даже при заданных на бесконечности однородных граничных условиях [15, 95, 97, 123]. При этом среднее значение напряжений во включении не равно фактическому локальному значению в данной точке $\langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle \neq \boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{r})$, а тензор концентрации напряжений содержит не только константы, но и функции координат и связывает заданное однородное поле на бесконечности с переменным полем внутри включения: $\boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{r}) : \langle \boldsymbol{\tau} \rangle$. Поэтому при реализации прямых методов осреднения, основанных на использовании соотношений вида (3.56), в ГТУ оказывается существенной процедура осреднения тензора концентрации внутри включений. Без такого осреднения не удастся получать замкнутые аналитические решения для эффективных свойств. Использование осредненного тензора концентрации в выражении (3.56) под-

разумеает замену фактического значения тензора концентрации на осредненное: $\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{r}) \leftrightarrow \langle \mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle$. Это является некоторым допущением, которое впервые было предложено для ГТУ в работе [15] и затем использовалось в [94]. В этих работах тензор концентрации напряжений выражался через тензор Эшелби для заданной формы включений (по аналогии с классическими подходами микромеханики). При этом тензор Эшелби предварительно определялся в рамках градиентной теории упругости и затем осреднялся по объему включения. То есть фактически вычисления производились на основе соотношения (3.56) с осредненным значением тензора концентрации. Достоинством полученных решений [15, 94] является их компактность с одновременной возможностью учета размерных эффектов. Однако уровень возникающих погрешностей в таком подходе необходимо отдельно оценивать. Эта задача, в том числе решается в данной диссертации.

В данном разделе далее будет показано, что если не использовать процедуру осреднения тензора концентрации, то прямые и энергетические методы осреднения совпадают и в градиентных теориях. Это позволяет использовать прямой подход к осреднению, например, в численных расчетах без возникновения дополнительных погрешностей. Различие, которое возникает в случае использования осредненного тензора концентрации, проанализировано в разделе 3.2 данной диссертации.

Эквивалентность прямого и энергетического методов осреднения в классической микромеханике доказывается на основе вывода формулы Эшелби из соотношения (3.56) [98, 99]. Для реализации аналогичного подхода в рассматриваемой градиентной теории предположим, что на внешней границе рассматриваемого тела заданы статические граничные условия следующего вида (Рис. 2а):

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (3.57)$$

Такой тип граничных условий относится к классу "однородных" в ГТУ (в терминологии Хашина [281]), так как обеспечивает возникновение однородного поля классических напряжений $\boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \boldsymbol{\tau}_0$, ($\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \bar{\mathbf{t}}$) и $\boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{0}$ в однородной среде⁹. Выполняя двойную свертку выражения (3.56) с тензором $\boldsymbol{\tau}_0$ и учитывая (3.53), находим:

$$\boldsymbol{\tau}_0 : \mathbf{S}^* : \boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_0 : \mathbf{S}^{(2)} : \boldsymbol{\tau}_0 + c \boldsymbol{\tau}_0 : (\mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(2)}) : \langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle \quad (3.58)$$

Записанное равенство содержит в левой части плотность энергии деформаций неоднородного тела, выраженную через эффективные податливости $2u = \boldsymbol{\tau}_0 : \mathbf{S}^* : \boldsymbol{\tau}_0$ (Рис. 2а), а первое слагаемое в правой части – это энергия деформаций однородной матрицы при тех же условиях нагружения $2u_0 = \boldsymbol{\tau}_0 : \mathbf{S}^{(2)} : \boldsymbol{\tau}_0$ (Рис. 2б). Градиентные напряжения не возникают в этих выражениях, так как при заданных граничных условиях (3.57) они будут отсутствовать в среде, как и градиенты деформаций. Интегрируя равенство (3.58) по объему включения

⁹Задание граничных условий (3.57) приводит к одинаковому однородному полю напряжений в однородной эквивалентной среде, для которой переменные обозначаются без индекса, и в чистом (неармированном) материале матрицы, для которого соответствующие переменные обозначаются с нижним индексом "0".

Ω_1 и используя определение для средних напряжений $\langle \boldsymbol{\tau}^{(1)} \rangle$, находим:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\tau}_0 : (\mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(2)}) : \boldsymbol{\tau}^{(1)} dv \quad (3.59)$$

Используя в (3.59) определяющие соотношения для материала матрицы и включений, получаем:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\tau}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}_0) dv \quad (3.60)$$

где переменные без индексов относятся к задаче о неоднородном теле (Рис. 2а), потому что внутри включения выполняются равенства $\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)} : \boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}$; а напряжения $\boldsymbol{\tau}_0$ и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{S}^{(2)} : \boldsymbol{\tau}_0$ в записанном выражении относятся к задаче с неармированной матрицей, не содержащей включения (Рис. 2б).

Выражение (3.60) может быть преобразовано далее с использованием рассуждений, аналогичных примененным при выводе формулы Эшелби в предыдущем разделе 2.6. После применения к (3.60) правила вычисления дивергенции от свертки тензоров и теоремы Остроградского - Гаусса, а также учитывая условия симметрии (3.41), уравнения равновесия (2.12), равенства (3.35) и определения (2.13), получаем следующее соотношение:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} U_{int} + \frac{1}{2} U'_{int} \quad (3.61)$$

где энергия взаимодействия U_{int} определяется выражением (3.45), в котором необходимо предположить, что поверхность интегрирования совпадает с поверхностью включения $\Sigma = \partial\Omega_1$, а дополнительная энергия взаимодействия U'_{int} , связанная с градиентными эффектами, определяется на основе следующего выражения:

$$U'_{int} = \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}) dv \quad (3.62)$$

Как отмечалось выше, для заданных граничных условий (3.57) решение для однородной среды будет содержать нулевые значения градиентных напряжений и градиентов деформаций во всей области Ω , то есть $\boldsymbol{\mu}_0 \equiv 0$, $\boldsymbol{\eta}_0 \equiv 0$. Следовательно, в рассмотренной задаче получаем, что дополнительная энергия взаимодействий оказывается равной нулю $U'_{int} = 0$, и выражение (3.62) будет совпадать с выражением (3.43), полученным при выводе формул Эшелби в предыдущем разделе. Поэтому прямой подход к определению эффективных свойств на основе соотношения (3.56) будет эквивалентен предположению равенства энергий деформаций, которые запасаются в исходной неоднородной и эквивалентной однородной средах, что может быть выражено в данном случае формулой Эшелби (3.46).

Таким образом, показана эквивалентность между энергетическими и прямыми методами осреднения в ГТУ для задач, в которых вычисляются классические эффективные материальные константы с использованием однородных статических граничных условий вида (3.57). Аналогичный результат может быть получен и для классических кинематических гранич-

ных условий, при которых на удалении от включения в материале матрицы предписывается однородное поле деформаций, то есть соответствующая линейная изменяемость функций перемещений по координатам.

Однако, в градиентных теориях могут рассматриваться и более общие варианты граничных условий с заданием ненулевых моментных напряжений ($\bar{\mathbf{m}} \neq 0$) или градиентов от перемещений ($\partial_n \mathbf{u} = \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{g}}$). Такая форма граничных условий используется для определения эффективных градиентных характеристик эквивалентной среды, то есть эффективных масштабных параметров [282, 283]. В этом случае энергия взаимодействия W'_{int} может обладать ненулевыми значениями, что означает, что прямой метод осреднения на основе соотношения (3.56) и энергетические методы будут приводить к различным результатам.

Как было сказано выше, использование обобщенной нотации, позволяет распространить полученные результаты и на градиентную теорию электроупругости. Прямые методы осреднения в этой теории также будут совпадать с энергетическими только в случае непосредственного осреднения переменных модели по представительному фрагменту. Если же вводить тензор концентрации и использовать его осредненное значение, то представленные в данном разделе рассуждения оказываются несправедливыми, и будет возникать различие между прямыми и энергетическими методами осреднения, что будет показано на примерах решениях задач в разделе 4.2 диссертации.

Таким образом, в отличие от классических моделей, в градиентных теориях отличия между различными методами осреднения могут возникать не только как следствие выбора схемы осреднения (изолированное включение, само-согласованный метод, метод Мори-Танака и т.д.) и выбора представительного фрагмента композита, но и вследствие различий, связанных с реализуемым подходом (прямой или энергетический) к определению эффективных характеристик.

Представленные в данном разделе диссертации результаты были опубликованы в работе [179].

3.4 Полуобратный метод

В диссертации построен ряд новых решений для задач чистого изгиба в ГТУ и ГТЭ. Эти решения построены на основе полуобратного метода, в котором сделано предположение, что трехмерное или плоское деформированное состояние материала балки в градиентной теории может быть описано с использованием модифицированного классического решения, в котором изменяется характер распределения перемещений-прогибов по толщине балки и изменяются константы, определяющие амплитудные значения поперечных и продольных перемещений. Фактически, таким образом делается предположение о том, что в градиентном решении для балки при чистом изгибе не возникает сдвигов, и сечения балки остаются плоскими, как и в классическом решении.

По-видимому, впервые такой подход был использован при построении решения задачи чистого изгиба в микро-дилатационной теории упругости Cowin и Nunziato [111]. Справедливость такого подхода для этой теории была подтверждена на основе трехмерного численного моделирования в работе [173], где было показано, что получаемое численное решение и аналитическое полуобратное решение совпадают вблизи центрального продольного сечения балки, вдали от ее концов, на которых задан изгибающий момент. В частности, получаемые решения совпадают и на нейтральной оси балки и позволяют с хорошей точностью оценивать прогибы балки, которые в неклассических теориях начинают отличаться от соответствующих классических решений. Поэтому получаемые полуобратные решения (как и численные, при уверенности в их достоверности) могут быть использованы для тестирования балочных одномерных моделей, формулируемых в неклассических теориях упругости.

Также существенным в реализации представленного подхода к построению полуобратных решений является использование интегральной формы граничных условий относительно результирующих усилий и моментов на торцах и боковых поверхностях балки. Для возможности задания торцевых усилий через результирующие необходимо, чтобы в рассматриваемой теории выполнялся принцип Сен-Венана. В градиентной теории упругости справедливость этого принципа была установлена в работе [113], где было показано, что при задании различных вариантов самоуравновешенных нагрузок в ГТУ реализуется экспоненциальное затухание плотности энергии деформаций при удалении от точки приложения сил. Скорость затухания отличается от классической и определяется дополнительными параметрами ГТУ.

Проиллюстрируем применяемый в диссертации подход построением классического решения задачи чистого изгиба прямолинейной балки с прямоугольным поперечным сечением (Рис. 3). Это решение может быть построено на основе полиномиального представления для компонент вектора перемещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$. Для построения решения задачи с учетом предположения о том, что сечения балки остаются плоскими при чистом изгибе (а также с учетом отсутствия сдвигов и отсутствия поворотов балки как жесткого целого), необходимо и достаточно представить компоненты перемещений в следующем виде:

$$u_1 = C_1xz, \quad u_2 = C_2yz, \quad u_3 = -\frac{1}{2}C_1x^2 - \frac{1}{2}C_2y^2 + w(z) \quad (3.63)$$

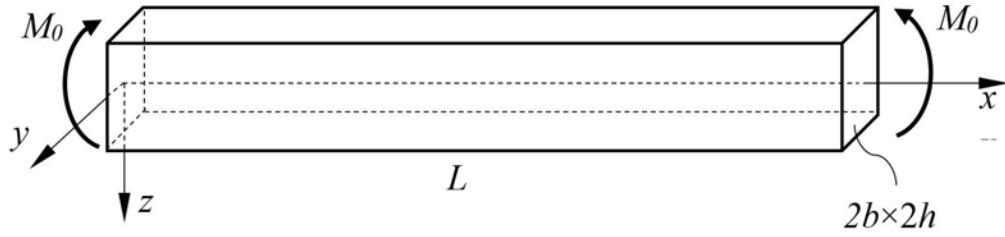


Рис. 3: К трехмерному решению задачи о чистом изгибе балки. Балка нагружена только на торцах распределенной нагрузкой с единственной ненулевой результирующей в виде изгибающего момента M_0 , приводящего к изгибу балки в плоскости XZ

где C_1, C_2 – неизвестные константы, и $w(z)$ – неизвестная функция.

Записанные выражения для перемещений являются предположением, которое делается для построения полубратного решения. Вообще говоря, здесь можно было бы сразу предположить и квадратичную зависимость для прогибов на основе, например, известного решения в теории балок Бернулли-Эйлера, однако для иллюстрации общего подхода функция $w(z)$ оставлена пока неизвестной.

Тогда, действительно, среди компонент тензора деформаций ненулевыми будут только линейные деформации, а сдвиги будут отсутствовать:

$$\varepsilon_{11} = C_1 z, \quad \varepsilon_{22} = C_2 z, \quad \varepsilon_{33} = w', \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (3.64)$$

где $w' = \frac{\partial w}{\partial z}$.

Соответствующие значения напряжений в случае изотропного материала:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11} C_1 z + C_{12} (C_2 z + w'), \\ \sigma_{22} &= C_{11} C_2 z + C_{12} (C_1 z + w'), \\ \sigma_{33} &= C_{11} w' + C_{12} (C_1 + C_2) z \end{aligned} \quad (3.65)$$

Полученные выражения для напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия в продольном (x) и в поперечном (y) направлениях. Граничные условия относительно касательных напряжений также тривиальным образом удовлетворяются на всей поверхности балки. В вертикальном направлении (z) уравнения равновесия классической теории упругости позволяют записать следующее уравнение на введенную функцию $w(z)$:

$$z \in [-h, h]: \quad C_{11} w'' + C_{12} (C_1 + C_2) = 0, \quad (3.66)$$

которое необходимо решать совместно с граничными условиями для нормальных напряжений на верхней и нижней поверхностях балки, а также с учетом закрепления балки в точке $z = 0$ для исключения вертикальных смещений как жесткого целого:

$$\begin{aligned} z = \pm h: \quad & C_{11} w' + C_{12} (C_1 + C_2) z = 0 \\ z = 0: \quad & w = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Решение краевой задачи (3.66), (3.67) имеет вид:

$$w = -\frac{C_{12}}{2C_{11}}(C_1 + C_2)z^2 \quad (3.68)$$

Подстановка решения (3.68) в (3.65) позволяет исключить функцию $w(z)$ из выражений для напряжений и получить:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}})C_1z + (C_{12} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}})C_2z, \\ \sigma_{22} &= (C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}})C_2z + (C_{12} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}})C_1z, \\ \sigma_{33} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Для выполнения граничных условий на боковых поверхностях балки необходимо, чтобы напряжения σ_{22} были тождественно равны нулю. Это дает нам условие связи между константами:

$$\sigma_{22} \equiv 0 \implies C_2 = -\frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}C_1 \quad (3.70)$$

Тогда после необходимых упрощений получаем единственную ненулевую компоненту напряжений:

$$\sigma_{11} = C_1 E z \quad (3.71)$$

где $E = \frac{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})}{C_{11}+C_{12}}$ - модуль Юнга изотропного материала балки.

Последняя константа определяется с учетом заданных условий нагружения относительно результирующих на торцах балки. Вследствие антисимметричного распределения напряжений по z результирующее продольное усилие от σ_{11} оказывается равным нулю, а условие по изгибающему моменту позволяет определить последнюю неизвестную константу:

$$\int_{-h}^h \int_{-b}^b z \sigma_{11} dz dy = M_0 \implies C_1 = \frac{M_0}{I}, \quad I = 4bh^3/3 \quad (3.72)$$

где момент инерции поперечного сечения балки I определяется с учетом ее ширины $2b$ и толщины $2h$.

Заметим, что решение задачи чистого изгиба можно было бы построить и на основе предварительного анализа для напряжений, учитывая необходимость линейного распределения по толщине балки напряжений σ_{11} и нулевых значений других компонент, что позволяет сразу выполнить все статические граничные условия задачи. В классической теории упругости такой подход, очевидно, является более удобным и наглядным [31]. Однако его обобщение на градиентные теории представляет определенные трудности из-за более сложной структуры граничных условий и наличия градиентных напряжений, которые также входят в уравнения равновесия.

При построении полуобратных решений для градиентных теорий будем использовать предположение об отсутствии сдвигов и об отсутствии деформации сечений, считая, что рассматриваемое решение является справедливым вдали от торцевых сечений балки, то есть

в области где эти гипотезы выполняются. Поэтому в градиентных теориях также будем использовать предположение о распределении перемещений в балке, определяемое выражениями (3.63). Получаемые решения в общем случае будут отличаться от классического, как значениями констант C_1, C_2 , так и видом функции $w(z)$, которая должна будет удовлетворять уравнению равновесия четвертого порядка вместо (3.66). Влияние краевых эффектов с учетом сдвигов и т.п. будем исследовать на основе численного моделирования.

Для построения аналогичного полуобратного решения в градиентной электроупругости потребуется сделать дополнительное предположение о распределении потенциала электрического поля. Соответствующее решение будет строиться в предположении плоского деформированного состояния для трансверсально изотропных материалов. Наличие изменчивости деформаций только в направлении толщины балки позволяет сделать вывод, что и потенциал электрического поля будет зависеть только от вертикальной координаты $\phi(z)$, и, как следствие, вектор напряженности электрического поля будет обладать единственной ненулевой компонентой в направлении прогибов балки.

3.5 Реализация численного моделирования

Численное моделирование в диссертации реализовано с использованием смешанного метода конечных элементов (МКЭ). Изложение реализации этого метода представлено ниже в разделе 3.5.1. Получаемые численные решения сопоставляются далее в большинстве последующих разделов диссертации с аналитическими решениями. Это сопоставление проводится с двумя целями. Во-первых, для исследования особенностей поведения решений вблизи границ и кромок областей, где аналитические решения оказывают несправедливы. И, во-вторых, для проверки корректности самой схемы численного моделирования в задачах и в областях, где удается построить строгие аналитические решения. Для достижения этой же цели в диссертации реализован другой численно-аналитический метод – метод Треффца, изложение которого дано в разделе 3.5.2. Метод Треффца используется для дополнительной проверки корректности реализуемого смешанного МКЭ в задачах, которые не допускают точных аналитических решений.

Реализация корректного и достоверного численного моделирования является важной задачей, с точки зрения практики. Описание сложной геометрии реальных изделий требует привлечения численных методов. Например, перспективным является использование градиентных решателей для описания процессов развития дефектов, как альтернативу существующим методам, таким как когезионные модели и др. Поэтому наличие протестированных и отработанных методов численного моделирования является принципиально важным с точки зрения дальнейшего развития градиентных теорий деформируемых тел.

3.5.1 Смешанный метод конечных элементов

Численное моделирование выполнено в системе Comsol Multiphysics. Стандартных интерфейсов для построения решений в рамках градиентных теорий в этой системе в настоящее время нет (как и в других системах конечно-элементного моделирования). Однако Comsol предоставляет универсальные интерфейсы для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка, что соответствует "слабой" формулировке краевых задач в терминах первых производных от основных переменных модели. Уравнения равновесия рассматриваемых в диссертации градиентных теорий обладают четвертым порядком, а "слабая" формулировка краевых задач содержит вторые производные от перемещений в ГТУ и, дополнительно, от потенциала электрического поля в ГТЭ. Поэтому для использования интерфейсов Comsol требуется применение метода понижения порядка уравнений теорий с введением дополнительных промежуточных переменных для повышенных производных. С точки зрения конечно-элементной реализации это означает использование отдельной аппроксимации как для переменных модели, так и для их производных. Такой подход носит названия смешанного МКЭ (mixed FEM). В классической теории упругости смешанный МКЭ применяется, например, для задач с почти несжимаемыми материалами (с коэффициентом Пуассона близким к 0.5), в которых стандартная аппроксимация приводит к недостаточной устойчивости решений. Такой подход в том числе реализован в Comsol в модуле Solid Mechanics. Однако для рассматриваемых в данной диссертации задач необходимо непосредственное програм-

мирование уравнений теории, и это было выполнено в модуле General Form PDE для использования постановки задач в "строгой" форме с явной покомпонентной записью всех граничных условий и в модуле Weak Form PDE для формулировки задач в "слабой" форме. Последняя использовалась для моделей со сложной геометрией, для которой запись всех граничных условий в строгой форме является достаточно трудоемкой задачей. Реализация моделирования с записью уравнений модели в "строгой" форме проводилась для контроля (поточечного) выполнения численным решателем всех граничных условий задач, которые в градиентных теориях имеют достаточно сложную структуру.

Для использования интерфейса General Form PDE уравнения теории должны быть сформулированы в дивергентной форме в следующем виде:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} + \bar{\mathbf{f}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Gamma} = \bar{\mathbf{F}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{R}_s = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{R}_e = 0 & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \end{cases} \quad (3.73)$$

где \mathbf{v} - вектор обобщенных узловых переменных; $\mathbf{\Gamma}$ - тензор обобщенных потоков; $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ - это заданные обобщенные нагрузки или обобщенные перемещения; \mathbf{R}_s , \mathbf{R}_e - это дополнительные ограничения, предписываемые на поверхности и на ребрах тела, соответственно.

Для построения трехмерного решения в ГТУ вектор обобщенных переменных, содержащий в себе компоненты вектора перемещения $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, и также дополнительные 18 переменных для обозначения градиентов деформаций (или вторых производных от перемещений), имеет вид:

$$\mathbf{v} = \{u_1, u_2, u_3, \eta_{111}, \eta_{112}, \eta_{113}, \eta_{121}, \eta_{122}, \eta_{123}, \eta_{131}, \eta_{132}, \eta_{133}, \eta_{221}, \eta_{222}, \eta_{223}, \eta_{231}, \eta_{232}, \eta_{233}, \eta_{331}, \eta_{332}, \eta_{333}\}^T \quad (3.74)$$

где $\eta_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$ - градиенты деформаций (в формулировке по Форме II Миндлина) или $\eta_{ijk} = u_{i,jk}$ - вторые градиенты от перемещений (в формулировке по Форме I Миндлина).

Тензор обобщенных потоков записывается с учетом введения дополнительных соотношений для связи промежуточных переменных с производными от деформаций (для ГТУ в Форме II Миндлина):

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}^T \quad (3.75)$$

где $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$ - компоненты тензора полных напряжений, относительно которых формулируются уравнения равновесия ГТУ (см. (2.12)); $\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ и $\mu_{ijk} = A_{ijklmn}\eta_{lmn}$ - компоненты тензоров классических и градиентных напряжений, соответственно, которые задаются в КЭ реализации непосредственной покомпонентной записью определяющих соотношений; и для получения записи в Форме I необходимо заменить ε_{ij} на $u_{i,j}$.

Векторы обобщенных объемных и поверхностных нагрузок и векторы дополнительных ограничений на поверхности и на ребрах тела записываем в виде:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}} &= \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, -\eta_{111}, -\eta_{112}, -\eta_{113}, -\eta_{121}, -\eta_{122}, -\eta_{123}, -\eta_{131}, -\eta_{132}, -\eta_{133}, \\
&\quad -\eta_{221}, -\eta_{222}, -\eta_{223}, -\eta_{231}, -\eta_{232}, -\eta_{233}, -\eta_{331}, -\eta_{332}, -\eta_{333}\}^T \\
\bar{\mathbf{F}} &= \{\bar{t}_1 + t_1^*, \bar{t}_2 + t_2^*, \bar{t}_3 + t_3^*, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{13}, \\
&\quad \varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}\}^T. \tag{3.76} \\
\mathbf{R}_s &= \{m_1 - \bar{m}_1, m_2 - \bar{m}_2, m_3 - \bar{m}_3, u_{1,1} - \bar{g}_{11}, u_{1,2} - \bar{g}_{12}, u_{1,3} - \bar{g}_{13}, \\
&\quad u_{2,1} - \bar{g}_{21}, u_{2,2} - \bar{g}_{22}, u_{2,3} - \bar{g}_{23}, u_{3,1} - \bar{g}_{31}, u_{3,2} - \bar{g}_{32}, u_{3,3} - \bar{g}_{33}\}^T, \\
\mathbf{R}_e &= \{t_{e1} - \bar{t}_{e1}, t_{e2} - \bar{t}_{e2}, t_{e3} - \bar{t}_{e3}, u_1 - \bar{u}_{e1}, u_2 - \bar{u}_{e2}, u_3 - \bar{u}_{e3}\}^T,
\end{aligned}$$

где \bar{t}_i – компоненты заданного вектора нагрузок на поверхности тела $\bar{\mathbf{t}}$; t_i^* – это дополнительные члены, входящие в граничные условия ГТУ, связанные с поверхностной дивергенцией от моментных напряжений и кривизной поверхностью (см. (2.13)), эти члены прописываются покомпонентно для каждой рассматриваемой задачей с учетом геометрии рассматриваемого тела; m_i – компоненты вектора градиентных напряжений на поверхности тела \mathbf{m} ; \bar{m}_i – компоненты заданных градиентных нагрузок на поверхности тела $\bar{\mathbf{m}}$; g_{ij} – заданные на соответствующих частях поверхности тела градиенты нормальных напряжений; t_{ei} , \bar{t}_{ei} – компоненты напряжений вдоль ребер тела и соответствующие заданные величины нагрузок; \bar{u}_{ei} – перемещения задаваемые на ребрах тела.

Заметим, что вектор заданных обобщенных перемещений $\bar{\mathbf{v}}$ не входит в формулировку задачи целиком. Каждая отдельная компонента этого вектора, если она предписана в постановке краевой задачи, вводится на отдельном множителе Лагранжа. Для рассматриваемой теории в этом векторе имеет смысл задавать только первые три компоненты, связанные с перемещениями точек среды $\bar{\mathbf{u}}$. Остальные компоненты этого вектора вообще не фигурируют в формулировке ГТУ и в конечно-элементной реализации.

При подстановке (3.75) и (3.76) в формулировку (3.73) получим постановку краевой задачи ГТУ с порядком дифференциальных уравнений не выше второго. В объеме тела получим три уравнения равновесия ГТУ и 18 дополнительных дифференциальных соотношений для введенных промежуточных переменных вида $\varepsilon_{11,1} = \eta_{111}$ или $u_{1,11} = \eta_{111}$ и т.п. В статических граничных условиях получим три соотношения для задания компонент вектора напряжений. Еще 18 соотношений в граничных условиях окажутся тривиальными и будут иметь вид $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Левая часть этих соотношений возникает автоматически как следствие введенной структуры тензора Γ (так работает интерфейс Comsol), а правая часть задается специально в векторе нагрузок $\bar{\mathbf{F}}$ ((3.76)), чтобы в задаче не возникало ненужных ограничений на деформации на поверхности тела. Векторы дополнительных ограничений \mathbf{R}_s и \mathbf{R}_e используются для задания неклассических граничных условий на поверхности и на ребрах тела.

Постановку краевой задачи (3.73) Comsol преобразует далее к слабой форме, необходимой для реализации МКЭ. При этом все кинематические граничные условия и дополнительные

ограничения вводятся на множителях Лагранжа. В качестве аппроксимирующих тестовых функций используются полиномиальные функции третьего порядка, необходимые для обеспечения достаточной гладкости вычисляемых производных. В вычислениях использовались стандартные настройки. Дискретизация модели, сборка матрицы жесткости, ее обращение и т.д. осуществлялись далее стандартными средствами Comsol. В качестве решателя использовался MUMPS (Multifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver). Общее количество переменных в каждом узле в трехмерных задачах ГТУ в представленной реализации составляет 21 – это 3 компоненты перемещений и 18 промежуточных переменных. В плоских задачах количество узловых переменных составляет 8.

Для задач градиентной электроупругости реализация смешанного МКЭ полностью аналогична, с тем учетом, что в соответствующие обобщенные векторные и тензорные переменные в формулировке (3.73) необходимо включить величины, относящиеся к задаче электростатики, а определяющие соотношения записывать с учетом связанных пьезоэлектрических эффектов. Соответственно, при реализации в Comsol необходимо использовать:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \{u_1, u_2, u_3, \phi, \eta_{111}, \eta_{112}, \eta_{113}, \eta_{121}, \eta_{122}, \eta_{123}, \eta_{131}, \eta_{132}, \eta_{133}, \\
&\quad \eta_{221}, \eta_{222}, \eta_{223}, \eta_{231}, \eta_{232}, \eta_{233}, \eta_{331}, \eta_{332}, \eta_{333}, \eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{33}\}^T \\
\mathbf{\Gamma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & D_1 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 & \phi_{,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & D_2 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 & \phi_{,1} & 0 & \phi_{,2} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & D_3 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 & \phi_{,1} & 0 & \phi_{,2} & \phi_{,3} \end{pmatrix}^T \\
\bar{\mathbf{f}} &= \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{\rho}, -\eta_{111}, -\eta_{112}, -\eta_{113}, -\eta_{121}, -\eta_{122}, -\eta_{123}, -\eta_{131}, -\eta_{132}, -\eta_{133}, -\eta_{221}, -\eta_{222}, \\
&\quad -\eta_{223}, -\eta_{231}, -\eta_{232}, -\eta_{233}, -\eta_{331}, -\eta_{332}, -\eta_{333} - \eta_{11}, -\eta_{12}, -\eta_{13}, -\eta_{22}, -\eta_{23}, -\eta_{33}\}^T \\
\bar{\mathbf{F}} &= \{\bar{t}_1 + t_1^*, \bar{t}_2 + t_2^*, \bar{t}_3 + t_3^*, \bar{q} + q^*, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{13}, \\
&\quad \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}, \phi_{,1}, \phi_{,1}, \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,2}, \phi_{,3}\}^T \\
\mathbf{R}_s &= \{m_1 - \bar{m}_1, m_2 - \bar{m}_2, m_3 - \bar{m}_3, m - \bar{m}, u_{1,1} - \bar{g}_{11}, u_{1,2} - \bar{g}_{12}, u_{1,3} - \bar{g}_{13}, u_{2,1} - \bar{g}_{21}, \\
&\quad u_{2,2} - \bar{g}_{22}, u_{2,3} - \bar{g}_{23}, u_{3,1} - \bar{g}_{31}, u_{3,2} - \bar{g}_{32}, u_{3,3} - \bar{g}_{33}, \phi_{,1} - \bar{E}_1, \phi_{,2} - \bar{E}_2, \phi_{,3} - \bar{E}_3\}^T, \\
\mathbf{R}_e &= \{t_{e1} - \bar{t}_{e1}, t_{e2} - \bar{t}_{e2}, t_{e3} - \bar{t}_{e3}, q_e - \bar{q}_e, u_1 - \bar{u}_{e1}, u_2 - \bar{u}_{e2}, u_3 - \bar{u}_{e3}, \phi_e - \bar{\phi}_e\}^T,
\end{aligned} \tag{3.77}$$

где η_{ij} – это дополнительные промежуточные переменные, вводимые для вторых производных от потенциала электрического поля (в системе уравнений модели получаем $\eta_{ij} = \phi_{,ij}$); D_i - компоненты полного вектора электрической индукции, которые входят в формулировку обобщенного закона Гаусса для ГТЭ (2.23); $\bar{\rho}, \bar{\rho}, \bar{q}$ – это объемная и поверхностная плотность заряда, соответственно; q^* - это поправки в граничных условий ГТЭ, связанные с вкладом квадрупольных величин; m, \bar{m} - это значения квадрупольных моментов на поверхности и соответствующие заданные величины; \bar{E}_i – компоненты вектора электрического поля, которые могут быть заданы в качестве дополнительных граничных условий ГТЭ на поверхности тела; $q_e, \phi_e, \bar{q}_e, \bar{\phi}_e$ – линейная плотность заряда и потенциал на ребрах тела и соответствующие величины, задаваемые в граничных условиях.

В формулировке смешанного МКЭ для градиентной электроупругости возникает 28 узловых переменных: 3 перемещения, 1 потенциал электрического поля, 18 дополнительных переменных для задачи упругости и 6 дополнительных переменных для задачи электростатики. В плоских задачах возникает 12 узловых переменных.

Формулировка МКЭ для градиентных теорий в модуле Weak Form PDE представляет собой более простую задачу, по сравнению с описанной выше, так как требует только записи энергии деформаций среды в терминах узловых переменных и введения дополнительных промежуточных переменных (для понижения порядка производных) на множителях Лагранжа. Необходимая расширенная форма записи плотности энергии деформаций в случае, например, Формы II Миндлина, имеет вид:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{A} : \nabla \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\Lambda} : (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.78)$$

где компоненты тензора второго ранга $\boldsymbol{\kappa}$ являются самостоятельными переменными, для которых вводится отдельная аппроксимация, и имеют место соотношения $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varepsilon}$, вводимые на множителях Лагранжа $\boldsymbol{\Lambda}$.

Форма статических граничных условий на поверхности и на ребрах реализуется естественным образом при использовании формулировки модели в слабой форме и не требует отдельного контроля (что с одной стороны является очень удобным при рассмотрении сложной геометрии, но с другой стороны требует тщательной предварительной проверки, для чего и были реализованы расчеты с использованием модуля General Form PDE). Для задания условий нагружения/закрепления в такой формулировке требуется только прописать необходимые значения заданных величин в статических и кинематических условиях на соответствующих тестовых функциях. Детальная формулировка такого подхода для ГТУ была описана в работе [18]. Для аппроксимации при этом могут использоваться стандартные полиномиальные функции Лагранжа или Эрмита третьего порядка. При этом при использовании последних численное решение оказывается более стабильным и требует меньшей плотности конечно-элементной сетки [18].

Применение интерфейсов General Form PDE или Weak Form PDE при решении конкретных задач будет отдельно отмечаться в соответствующих разделах диссертации.

3.5.2 Метод Треффца

В данном разделе представлена формулировка метода Треффца для ГТУ и примеры сопоставления результатов расчетов, полученных на основе этого метода, с результатами смешанного МКЭ.

Метод Треффца обычно относят к разновидности метода граничных элементов. Основная идея метода Треффца заключается в представлении искомого решения краевой задачи в виде ряда функций (аппроксимирующих функций), которые тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям модели. Граничные условия удовлетворяются затем в некотором приближении, например с использованием метода коллокаций, метода Галеркина и т.п. [279, 284]. Для классических задач математической физики метод Треффца хорошо известен и применяется достаточно широко [284–286]. Достоинствами этого метода является 1) использование несингулярных аппроксимирующих функций (в отличие от стандартного метода граничных элементов), 2) непосредственный контроль структуры и точности выполнения граничных условий в процессе построения решения, 3) автоматическое удовлетворение уравнений равновесия модели. Еще одним преимуществом по сравнению с МКЭ является возможность построения решений в неограниченных областях.

Необходимость применения метода Треффца в данной диссертации обоснована тем, что он позволяет получить альтернативные численные решения для задач, которые не могут быть решены аналитически в ГТУ и таким образом дополнительно проверить результаты МКЭ. В отличие от МКЭ метод Треффца позволяет в явном виде проверить точность выполнения граничных условий в процессе построения численного решения. Это является особенно важным для градиентных теорий, в которых граничные условия формулируются более сложным образом, чем в классических моделях, а также присутствуют дополнительные граничные условия для моментных напряжений и условия на ребрах. Заметим, что в настоящее время известно, что результаты МКЭ могут существенным образом зависеть от типа применяемых аппроксимирующих функций, неправильный выбор которых может приводить к потере точности градиентного решения вблизи границ области [287]. Более того, недавно было показано, что некоторые КЭ решатели, разработанные ранее для ГТУ, в принципе не позволяют получать решения с корректным выполнением граничных условий [141].

Метод Треффца в данной диссертации реализован с использованием полностью собственного кода для построения системы аппроксимирующих функций, для дискретизации границы области и для сборки матрицы жесткости модели. Встроенные алгоритмы Wolfram Mathematica были использованы только для решения системы линейных уравнений, которая составляется в процессе реализации метода.

Одной из основных задач при реализации метода Треффца является выбор системы аппроксимирующих функций. Для классических задач такие системы функций хорошо известны: для уравнения Лапласа, Гельмгольца, бигармонического уравнения, для уравнений классической теории упругости и др. [280]. Для многих таких систем функций доказана их полнота (так называемая "Г-полнота" для систем аппроксимирующих функций метода Треффца) [285].

В диссертации аппроксимирующие функции получены на основе представления для общего решения в перемещениях в форме Папковича-Нейбера (раздел 2.5). Такой подход был предложен ранее в работах Волкова-Богородского Д.Б., Лурье С.А. и др. [13] для реализации варианта гибридного метода Треффца (метода блоков) с дискретизацией области построения решения в рамках градиентной теории межфазного слоя, которая обладает упрощенной формой граничных условий. В данном случае рассматривается полная структура граничных условий Миндлина-Тупина и учитываются дополнительные условия на ребрах тела. Так же в диссертации используется другой набор аппроксимирующих функций, по сравнению с предложенными ранее. В частности, для классической части общего решения для перемещений используется полная классическая система полиномов, удовлетворяющих уравнению Лапласа, а для градиентной части решения используются экспоненциально-тригонометрические функции, для которых сходимость решений проверяется на примерах тестовых задач. Аналогичная система "эвристических" функций применялась ранее в теории пологих оболочек [280].

Использование предложенной системы аппроксимирующих функций продиктовано рассмотренными вариантами тестовых задач, содержащих острые кромки. Вообще говоря, для градиентной части решения можно использовать и хорошо известные полные ("Т-полные") системы функций, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца. Однако такие системы могут быть записаны только в полярных координатах для плоских задач и в сферических координатах для трехмерных [280]. В процессе работы над диссертацией было установлено, что использование таких стандартных систем функций в неканонических областях (например в прямоугольной области с кромками) приводит к очень медленной сходимости решения или к ее отсутствию. Более того, переход к неканонической области требует преобразования координат, которое с учетом необходимости вычисления от аппроксимирующих функций производных до пятого порядка приводит к достаточно длительным вычислениям с функциями Бесселя. Поэтому было предложено использовать систему экспоненциально-тригонометрических функций, которые удовлетворяют уравнения равновесия ГТУ в декартовой системе координат.

Метод Треффца реализован для упрощенной ГТУ с определяющими соотношениями в форме (2.35). Эта теория допускает обезразмеривание относительно единственного масштабного параметра, который в ней присутствует. Это является удобным, как с точки зрения записи соотношений самого метода, так и с точки зрения дальнейшего сопоставления со смешанным МКЭ и с соответствующими классическими решениями. Для получения безразмерной постановки краевой задачи упрощенной ГТУ введем безразмерные координаты и безразмерные смещения, нормированные на значение масштабного параметра l :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/l, \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/l \quad (3.79)$$

Тогда уравнения равновесия (2.58) могут быть представлены в следующем обезразмерен-

ном виде, в предположении отсутствия объемных сил:

$$(1 - \nabla^2)(\nabla\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.80)$$

Деформации и градиенты от перемещений (задаются в граничных условиях) оказываются безразмерными, как и в обычной постановке, а определяющие соотношения для классических (2.28) и градиентных (2.46) напряжений принимают вид:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mu (\nabla \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}})^T) \quad \hat{\boldsymbol{\mu}} = l \nabla \hat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (3.81)$$

Величины, входящие в статические граничные условия ГТУ – вектор напряжений, вектор моментных напряжений и вектор усилий, распределенных вдоль ребер (2.13) – определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \mathbf{n} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\tau}}) - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{\boldsymbol{\tau}}) - 2H \mathbf{nn} : \nabla \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ \hat{\mathbf{m}} &= l \mathbf{nn} : \nabla \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ \hat{\mathbf{t}}_e &= l [\mathbf{n} \boldsymbol{\nu} : \nabla \hat{\boldsymbol{\tau}}]_+^- \end{aligned} \quad (3.82)$$

Из записанных соотношений (3.80)-(3.82) видно, что получение универсальных безразмерных решений, не содержащих масштабного параметра, возможно для задач, в которых в качестве неклассических граничных условий задаются нулевые значения для вектора моментных напряжений $\hat{\mathbf{m}}$ и усилий вдоль ребер $\hat{\mathbf{t}}_e$, либо для задач с соответствующими кинематическими неклассическими условиями относительно градиентов перемещений на поверхности и перемещений на ребрах. Такие решения в безразмерном виде не будут содержать масштабного параметра, а масштабные эффекты в них будут проявляться только после подстановки абсолютных значений координат и перемещений по формулам (3.79).

В примерах численных решений будут рассмотрены задачи плоской деформации, в которых предполагается, что третья компонента вектора перемещений равна нулю $u_3 \equiv 0$, и что все величины, входящие в формулировку ГТУ, не зависят от третьей координаты x_3 . Представленная выше безразмерная формулировка в этом случае остается неизменной, при этом только два из трех уравнений равновесия будут нетривиальны, граничные условия на поверхностях сведутся к граничным условиям вдоль линий (границ), и граничные условия на ребрах будут записываться только в угловых точках области, которая является проекцией рассматриваемого тела на плоскость x_1x_2 .

Система аппроксимирующих функций метода Треффца может быть получена на основе представления для общего решения ГТУ в форме Папковича-Нейбера (3.1). Для безразмерных уравнений равновесия (3.80) это представление имеет вид:

$$\hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Psi}_0 - \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \nabla (\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_0) + \boldsymbol{\Psi}_2 - \nabla \nabla \cdot (\boldsymbol{\Psi}_2 - \boldsymbol{\Psi}_1) \quad (3.83)$$

где потенциалы $\boldsymbol{\Psi}_i(\hat{\mathbf{x}})$, ($i = 0, 1, 2$) должны удовлетворять векторным уравнению Лапласа и

уравнению Гельмгольца следующего вида:

$$\nabla^2 \Psi_0 = 0, \quad \nabla^2 \Psi_i - \Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.84)$$

Для задач плоской деформации в декартовой системе координат векторные потенциалы могут быть представлены в следующем виде:

$$\Psi_i(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} \psi_{i1}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \psi_{i2}(\hat{\mathbf{x}}) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.85)$$

где ψ_{ij} – это скалярные потенциалы, которые удовлетворяют скалярным уравнениям Лапласа и Гельмгольца, соответственно:

$$\nabla^2 \psi_{ij} = 0, \quad (i = 0; j = 1, 2) \quad (3.86)$$

$$\nabla^2 \psi_{ij} - \psi_{ij} = 0, \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \quad (3.87)$$

Для решения скалярных уравнений Лапласа и Гельмгольца метод Треффца разработан достаточно хорошо. В частности, известны полные системы функций по которым можно раскладывать решения этих уравнений [280]. Для плоских задач в декартовой системе координат ($\hat{x}_1 = x$, $\hat{x}_2 = y$), для представления скалярных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа, будем использовать систему функций, составленную из гармонических полиномов:

$$\{1, x, y, 2xy, x^2 - y^2, 3x^2y - y^3, x^3 - 3xy^2, \dots\} \quad (3.88)$$

Эти полиномы могут быть получены на основе известной Т-полной системы функций для уравнения Лапласа в ограниченной области $\{1, r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta\}$ [280] с использованием подстановки $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan y/x$ и с дальнейшим упрощением тригонометрических функций.

Доказательство полноты систем функций, являющихся решением уравнения Гельмгольца, построено в полярной системе координат [288]. Для ограниченных областей это система вида $\{1, I_n(r) \cos \theta, I_n(r) \sin n\theta\}$ [280]. Однако для ГТУ непосредственное применение этой системы для неканонических областей с кромками оказывается достаточно затруднительным, так как требует длительных вычислений высоких производных от функций Бесселя и не позволяет получать сходящиеся решения (ошибки численного округления при увеличении числа членов ряда в представлении решения нарастают быстрее, чем реализуется сходимое решение). Поэтому был рассмотрен другой вариант системы функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (3.87), которая ранее использовалась для решения аналогичных (с точки зрения математической формулировки) задач в теории оболочек [280]. В данном случае, эта система функций представляется следующим образом:

$$\{e^{\xi_n x} \cos \beta_n y, \quad e^{\xi_n x} \sin \beta_n y, \quad e^{\gamma_n y} \cos \alpha_n x, \quad e^{\gamma_n y} \sin \alpha_n x\} \quad (3.89)$$

где $\alpha_n = \frac{n\pi}{2a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{2b}$ – это нормирующие множители в тригонометрических функциях; $\xi_n = \pm\sqrt{1 + \beta_n^2}$, $\gamma_n = \pm\sqrt{1 + \alpha_n^2}$ – это корни характеристических уравнений, которые следуют из (3.87); и $2a$, $2b$ – это размеры рассматриваемой прямоугольной области.

Таким образом, скалярные потенциалы ψ_{ij} , которые используются для записи общего решения (3.83) и (3.85), могут быть представлены в следующем виде:

$$\psi_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} N_{ik} a_{ijk}, \quad (i = 0, 1, 2; j = 1, 2) \quad (3.90)$$

где a_{ijk} – это неизвестные коэффициенты; N_{0k} – это функции из полной системы гармонических полиномов (3.88); N_{1k} и N_{2k} – это функции из системы (3.89). Эти функции удовлетворяют уравнениям Лапласа и Гельмгольца, соответственно:

$$\nabla^2 N_{0k} \equiv 0, \quad \nabla^2 N_{ik} - N_{ik} \equiv 0 \quad (i = 1, 2; k = 0 \dots \infty)$$

В численном решении используется некоторое ограниченное число функций N_{ik} ($k = 1 \dots \bar{N}$) для записи рядов (3.90). При этом число этих функций \bar{N} в разложении для классических потенциалов ψ_{0j} и для градиентных потенциалов должно быть одинаковым, что определяется требованием известных в ГТУ теорем [289].

Формулировка метода Треффца выполнена в так называемой "непрямой" (indirect) [284, 290] форме, при которой решение строится непосредственно для краевой задачи. В "прямом" подходе используется соответствующая вариационная постановка. Следуя стандартному подходу для реализации метода Треффца, представим решение для перемещений в виде ряда, образованного функциями, удовлетворяющими уравнениям равновесия ГТУ (3.80):

$$\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{u}^*(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad (3.91)$$

где приближенное численное решение метода Треффца обозначено звездочкой; $\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{x}})$ – это вектор аппроксимирующих функций, удовлетворяющих (3.80); a_i – это неизвестные коэффициенты, которые должны определяться из граничных условий.

Тестовые функции \mathbf{u}_i строятся аналитически на основе описанного выше подхода. Для этого используем представление для скалярных потенциалов (3.90) с ограниченным числом членов ряда \bar{N} . Далее, подставляем (3.90) в (3.85) и затем в общее решение Папковича-Нейбера (3.83). Заметим, что полное число аппроксимирующих функций N в (3.91) будет составлять $6\bar{N}$, так как общее решение (3.83) записано через шесть скалярных потенциалов. Неизвестные коэффициенты a_i в (3.91) вводятся переопределением соответствующих коэффициентов a_{ijk} , которые были изначально введены в определении для скалярных потенциалов (3.90).

Процедура получения аппроксимирующих функций \mathbf{u}_i была реализована в системе Wolfram Mathematica на основе символьных вычислений. Полнота получаемой системы функций

$\{\mathbf{u}_i\}$, вообще говоря, не является доказанной в общем виде, поэтому, следуя стандартному подходу, сходимость численных решений необходимо будет проверять в каждом рассматриваемом примере численного моделирования.

Используя определяющие соотношения (3.81) и определения (3.82), найдем величины, которые необходимы для записи граничных условий – вектор напряжений, градиентных напряжений, распределенные внутренние усилия вдоль ребер тела и градиент перемещений в направлении нормали к поверхности:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{x}}) &\approx \mathbf{t}^*(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{x}}) & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \\
\hat{\mathbf{m}}(\hat{\mathbf{x}}) &\approx \mathbf{m}^*(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{m}_i(\hat{\mathbf{x}}) & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \\
\hat{\mathbf{t}}_e(\hat{\mathbf{x}}) &\approx \mathbf{t}_e^*(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{t}_i^{(e)}(\hat{\mathbf{x}}) & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\partial\Omega \\
\partial_n \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) &\approx \partial_n \mathbf{u}^*(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N a_i \partial_n \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{x}}) & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{3.92}$$

где $\mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{m}_i(\hat{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{t}_i^{(e)}(\hat{\mathbf{x}})$ – это векторные функции, которые могут быть выражены через систему аппроксимирующих функций $\{\mathbf{u}_i\}$ подстановкой приближенного решения для перемещений (3.91) в (3.81) и (3.82).

Граничные условия задачи удовлетворяются далее использованием достаточно большого количества членов ряда N в (3.91), (3.92) и определением соответствующих значений коэффициентов a_i . Точность выполнения граничных условий может контролироваться введением функций невязок, вычисляемых на поверхностях и ребрах тела:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{u}^* - \bar{\mathbf{u}}_s, & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_1 \\
\mathbf{R}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{t}^* - \bar{\mathbf{t}}, & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_2 \\
\mathbf{R}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \partial_n \mathbf{u}^* - \bar{\mathbf{g}}, & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_3 \\
\mathbf{R}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{m}^* - \bar{\mathbf{m}}, & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_4 \\
\mathbf{R}_5(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{u}^* - \bar{\mathbf{u}}_e, & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\partial\Omega_1 \\
\mathbf{R}_6(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{t}_e^* - \bar{\mathbf{t}}_e, & \hat{\mathbf{x}} \in \partial\partial\Omega_2
\end{aligned} \tag{3.93}$$

где векторы невязок имеют вид $\mathbf{R}_i(\hat{\mathbf{x}}) = \{R_{i1}, R_{i2}, 0\}$ в плоских задачах, а нижние индексы $i = 1 \dots 6$ обозначают соответствующий тип граничных условий; $\partial\Omega_i$ ($i = 1 \dots 4$) и $\partial\partial\Omega_j$ ($j = 1, 2$) – это части поверхности и ребер тела, где предписаны соответствующие кинематические и статические граничные условия, причем выполняется: $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$, $\partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 = \partial\Omega$ и $\partial\partial\Omega_1 \cup \partial\partial\Omega_2 = \partial\partial\Omega$.

Для отыскания решения задачи введенные функции невязок (3.93) должны быть минимизированы. В предлагаемом подходе это реализовано методом коллокаций. Для этого

выбираем набор коллокационных точек, располагаемых на поверхностях и ребрах тела:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_s &= \{\mathbf{x}_{ij} : \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_i, (i = 1\dots 4, j = 1\dots M_i)\}, \\ \mathcal{P}_e &= \{\mathbf{x}_{ij} : \hat{\mathbf{x}} \in \partial\partial\Omega_{i-4}, (i = 5, 6, j = 1\dots M_i)\},\end{aligned}\tag{3.94}$$

где M_i ($i = 1\dots 6$) – это число точек, выбранных на соответствующих частях поверхности и ребер; общее количество выбранных коллокационных точек определяется суммой $M = M_s + M_e$, где $M_s = |\mathcal{P}_s|$ и $M_e = |\mathcal{P}_e|$ – это общее количество точек на поверхности и на ребрах.

Заметим, что для плоских задач, будем иметь фиксированное количество угловых точек, которые являются проекциями ребер тела и на которых должны быть записаны соответствующие граничные условия ГТУ. Поэтому все эти угловые точки всегда включаются в набор коллокационных точек \mathcal{P}_e , и полное количество этих точек M_e для одного и того же региона остается неизменным во всех вариантах приближенных решений.

Далее в выбранных коллокационных точках требуем необходимость обнуления функций невязок:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_i : \mathbf{R}_i(\mathbf{x}_{ij}) &= \mathbf{0}, & (i = 1\dots 4, j = 1\dots M_i) \\ \mathbf{x}_{ij} \in \partial\partial\Omega_{i-4} : \mathbf{R}_i(\mathbf{x}_{ij}) &= \mathbf{0}, & (i = 5, 6, j = 1\dots M_i)\end{aligned}\tag{3.95}$$

Записанные условия (3.95) представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_i . Эта система (3.95) может быть предстала в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b},\tag{3.96}$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{11}) & \dots & \mathbf{u}_N(\mathbf{x}_{11}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{1M_1}) & \dots & \mathbf{u}_N(\mathbf{x}_{1M_1}) \\ \mathbf{t}_1(\mathbf{x}_{21}) & \dots & \mathbf{t}_N(\mathbf{x}_{21}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{t}_1(\mathbf{x}_{2M_2}) & \dots & \mathbf{t}_N(\mathbf{x}_{2M_2}) \\ \partial_n \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{31}) & \dots & \partial_n \mathbf{u}_N(\mathbf{x}_{31}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_n \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{3M_3}) & \dots & \partial_n \mathbf{u}_N(\mathbf{x}_{3M_3}) \\ \mathbf{m}_1(\mathbf{x}_{41}) & \dots & \mathbf{m}_N(\mathbf{x}_{41}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{m}_1(\mathbf{x}_{4M_4}) & \dots & \mathbf{m}_N(\mathbf{x}_{4M_4}) \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{51}) & \dots & \mathbf{u}_N(\mathbf{x}_{51}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{5M_5}) & \dots & \mathbf{u}_N(\mathbf{x}_{5M_5}) \\ \mathbf{t}_1^{(e)}(\mathbf{x}_{61}) & \dots & \mathbf{t}_N^{(e)}(\mathbf{x}_{61}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{t}_1^{(e)}(\mathbf{x}_{6M_6}) & \dots & \mathbf{t}_N^{(e)}(\mathbf{x}_{6M_6}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_s(\mathbf{x}_{11}) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_s(\mathbf{x}_{1M_1}) \\ \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{21}) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{2M_2}) \\ \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_{31}) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_{3M_3}) \\ \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_{41}) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_{4M_4}) \\ \bar{\mathbf{u}}_e(\mathbf{x}_{51}) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_e(\mathbf{x}_{5M_5}) \\ \bar{\mathbf{t}}_e(\mathbf{x}_{61}) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{t}}_e(\mathbf{x}_{6M_6}) \end{Bmatrix}$$

В полученной системе матрица \mathbf{K} имеет размерность $(4M_s + 2M_e) \times N$ так как в плоских задачах ГТУ в каждой точке на поверхности необходимо записать четыре граничных условия, а в каждой точке на ребре (в угловой точке) записываются два условия. Система (3.96) может быть решена точно, если выполняется $4M_s + 2M_e = N$. Для произвольного числа аппроксимирующих функций и коллокационных точек эта система может быть решена в приближении метода наименьших квадратов следующим образом:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{b} \quad (3.97)$$

В общем случае матрица системы (3.96) может быть плохо обусловленной. Для повышения точности получаемых численных решений использовался метод нормировки этой матрицы по столбцам (multiple scaling technique) [286] и нормировка экспоненциальных функций, входящих в представление для градиентной части решения (3.89).

Оценка для ошибки численного решения (3.91) и (3.92) может быть получена на основании различных подходов. В условиях, когда точное решение задачи неизвестно, эта ошибка оценивается только для выполнения задаваемых граничных условий. Уравнения равновесия в объеме выполняются всегда в данном методе, и проверяется только сходимость решения при увеличении числа членов ряда в (3.91) и числа коллокационных точек M . В предлагаемом подходе ошибка метода Треффца оценивалась отдельно для граничных условий на поверхности e_s и на ребрах тела e_e , как нормированное максимальное значение невязок в

соответствующих коллокационных точках:

$$e_s = \max_{\substack{i=1..4 \\ k=1,2 \\ \hat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega}} \frac{|R_{ik}(\hat{\mathbf{x}})|}{\bar{R}_i}, \quad e_e = \max_{\substack{i=5,6 \\ k=1,2 \\ \hat{\mathbf{x}} \in \partial\partial\Omega}} \frac{|R_{ik}(\hat{\mathbf{x}})|}{\bar{R}_i} \quad (3.98)$$

где \bar{R}_i это нормировочные коэффициенты.

Выбор коэффициентов \bar{R}_i является важным для корректного вычисления величины ошибки, так как величины в различных граничных условиях и связанные с ними невязки имеют разную размерность, а их абсолютные численные значения могут отличаться на 5-10 порядков (например, напряжения могут иметь значения порядка мегапаскалей при значениях перемещений порядка долей миллиметра). Один из возможных подходов для определения этих коэффициентов основан на введении некоторых приближенных априорных оценок для величины вектора напряжений t_0 и перемещений u_0 на основе задаваемых граничных условий с учетом размера рассматриваемой области. В вычислениях использовалось следующее определение для нормировочных коэффициентов в выражениях для ошибок (3.98):

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_5 = u_0, \quad \bar{R}_2 = t_0, \quad \bar{R}_3 = u_0/d, \quad \bar{R}_4 = \bar{R}_6 = l t_0/d, \quad (3.99)$$

где d – это некоторый характерный геометрический размер тела; а величина масштабного параметра в выражениях для коэффициентов \bar{R}_4 и \bar{R}_6 является несущественной, так как этот параметр сокращается в соответствующей записи граничных условий для моментных напряжений на поверхности и на ребрах тела.

Примеры численных расчетов будут представлены для области $\Omega : x \in [0, 1], y \in [-0.5, 0.5]$. Нормирующие множители в системе функций (3.89) имеют значения $a = 1, b = 0.5$. В качестве закрепления для рассматриваемого региона задаются условия по отсутствию горизонтальных перемещений u_1 на левой границе $x = 0$. Смещение тела как жесткого целого в вертикальном направлении ограничено требованием закрепления точки в начале координат: $x = y = 0 : u_2 = 0$. В качестве нагрузки задаются значения вектора напряжений на правой границе $x = a$, причем предполагается, что заданные усилия действуют в горизонтальном направлении, но могут быть переменными по вертикальной координате $\bar{t}(y)$ (Рис. 4). для остальных граничных условий рассматриваем следующие три варианта комбинаций:

Вариант I:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad & u_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 0 \\ x = a : \quad & t_1 = \bar{t}(y), \quad t_2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 0 \\ y = \pm b : \quad & t_1 = t_2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Вариант II:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & u_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad m_1 = 0, \quad u_{2,1} = 0 \\
 x = a : \quad & t_1 = \bar{t}(y), \quad t_2 = 0, \quad m_1 = 0, \quad u_{2,1} = 0 \\
 y = \pm b : \quad & t_1 = t_2 = 0, \quad m_2 = 0, \quad u_{1,2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.101}$$

Вариант III:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & u_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad u_{1,1} = u_{2,1} = 0 \\
 x = a : \quad & t_1 = \bar{t}(y), \quad t_2 = 0, \quad u_{1,1} = u_{2,1} = 0 \\
 y = \pm b : \quad & t_1 = t_2 = 0, \quad u_{1,2} = u_{2,2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.102}$$

где компоненты перемещений, векторов напряжений и градиентных напряжений определены следующим образом: $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0\}$, $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, 0\}$ и $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, 0\}$, соответственно.

Различие между вариантами (3.100)-(3.102) заключается в неклассических граничных условиях. В Варианте I задаются условия по отсутствию градиентных напряжений на всей поверхности области. В Варианте 2 используются кинематические граничные условия, которые предписывают нулевые значения нормальных производных от тангенсальных компонент перемещений на границе региона (таким образом задает комбинация статических и кинематических неклассических граничных условий). В Варианте III используются наиболее "жесткие" граничные условия, которые предписывают нулевые значения градиентов всех компонент перемещений на границе области.

Покомпонентная запись вектора напряжений и градиентных напряжений (3.100)-(3.102) для соответствующих границ квадратной области может быть получена с использованием

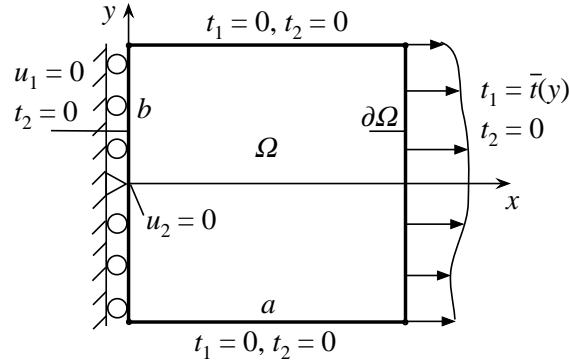


Рис. 4: Иллюстрация граничных условий относительно вектора напряжений и перемещений, использованных в примерах численных решений

определений (2.13) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x = 0, a : \quad t_1 &= \tau_{11} - \mu_{111,1} - \mu_{112,2} - \mu_{121,2}, \\
t_2 &= \tau_{21} - \mu_{211,1} - \mu_{212,2} - \mu_{221,2}, \\
m_1 &= \mu_{111}, \quad m_2 = \mu_{211}, \\
y = \pm b : \quad t_1 &= \tau_{12} - \mu_{121,1} - \mu_{122,2} - \mu_{112,1}, \\
t_2 &= \tau_{22} - \mu_{221,1} - \mu_{222,2} - \mu_{212,1}, \\
m_1 &= \mu_{122}, \quad m_2 = \mu_{222}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

где для рассматриваемой далее Формы II Миндлина выполняются условия $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ и $\mu_{ijk} = \mu_{jik}$.

Условия на ребрах для рассматриваемой задачи сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
x = 0, y = \pm b : \quad u_1 = 0, t_2^{(e)} &= 0 \\
x = a, y = \pm b : \quad t_1^{(e)} = t_2^{(e)} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.104}$$

где компоненты внутренних усилий на ребрах должны вычисляться на основе соотношений $t_1^{(e)} = \mu_{112} + \mu_{211}$ и $t_2^{(e)} = \mu_{221} + \mu_{122}$, которые следуют из определений (2.13). Для горизонтальных перемещений в угловых точках на левой границе области учтено требование непрерывности соответствующих кинематических условий (3.100)-(3.102), которые должны быть продлены и на эти точки.

Представленная формулировка задачи является достаточно простой, однако она содержит различные смешанные варианты классических и неклассических граничных условий и условия на ребрах. Эта задача не может быть решена аналитически в замкнутом виде в ГТУ, и она будет использована в качестве тестовой – и для исследования сходимости самого метода Треффца, и для сопоставления результатов расчетов со смешанным МКЭ и аналогичной классической задачей. Формулировку граничных условий такой классической задачи можно получить из записанной, предполагая тождественное равенство нулю моментных напряжений.

В расчетах предполагаем изотропию материала и значения модуля Юнга $E = 1$ ГПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. Все остальные классические упругие константы могут быть получены на основе стандартных соотношений. В тестовых вычислениях рассмотрим симметричные и несимметричные варианты распределения нагрузки $\bar{t}(y)$ относительно оси X , которые будут приводить к растяжению и изгибу области, соответственно.

Численное решение по методу Треффца находится для безразмерной формулировки ГТУ (3.80)-(3.82). Исследуется зависимость введенных функций ошибок (3.98) от числа аппроксимирующих функций и числа коллокационных точек.

Задача неоднородного растяжения. Очевидно, что при постоянной нагрузке ($\bar{t}(y) = const$) вариантам граничных условий I и II соответствует точное классическое решение с нулевыми градиентами деформаций и градиентных напряжений. Однако если распределе-

ние нагрузки вдоль границы области является неоднородным, то в решении ГТУ возникает неклассическая составляющая. Градиентные эффекты также проявятся в варианте граничных условий III даже в условиях однородного нагружения. В последующих примерах рассмотрим вариант растяжения области под действием нагрузки, распределенной по параболическому закону:

$$\bar{t}(y) = t_0 \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right) \quad (3.105)$$

Нормирующие коэффициенты в функциях ошибок (3.98) определяем следующим образом:

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_5 = \frac{t_0 a}{E}, \quad \bar{R}_2 = t_0, \quad \bar{R}_3 = \frac{t_0}{E}, \quad \bar{R}_4 = \bar{R}_6 = l \frac{t_0}{a}, \quad (3.106)$$

Вычисленная зависимость функций ошибок в решении метода Треффца для трех вариантов граничных условий (3.100)–(3.102) представлена на Рис. 5а. Для сравнения здесь также показаны результаты для решения краевой задачи без учета условий в угловых точках (3.104) (Рис. 5б). В выполненных расчетах использовано по 100 коллокационных точек, регулярно расположенных на каждой границе области, так что общее их число составило $M_s = 400$. Из представленных зависимостей видно, что наилучшая (линейная) сходимость решения по методу Треффца при увеличении количества аппроксимирующих функций N реализуется в случае второго варианта (3.101) граничных условий (Рис. 5а, оранжевые линии). Для первого варианта граничных условий (3.100) возникают небольшие ($< 1\%$ в использованной нормировке), но неустранимые ошибки в выполнении граничных условий. Эти ошибки не удается устранить даже для достаточно большого количества аппроксимирующих функций, для которого уже начинают оказывать существенное влияние ошибки численного округления. Для третьего варианта граничных условий (3.102) сходимость не достигается – условия в угловых точках содержат погрешности не менее 10% (зеленые пунктирные линии на Рис.

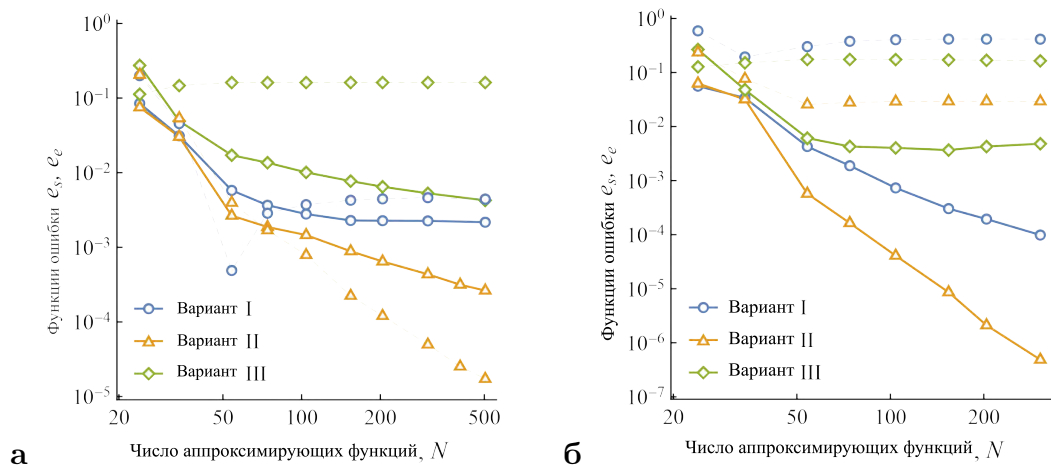


Рис. 5: Зависимость величины ошибки в граничных условиях на поверхности (e_s , сплошные линии) и на ребрах (e_e , штриховые линии) от числа аппроксимирующих функций в задаче неоднородного растяжения. Количество коллокационных точек составляет $M_s = 400$, то есть общее число решаемых уравнений составляет 1604. На рисунке (а) показаны результаты решения задачи с учетом условий в угловых точках, на рисунке (б) – решение без учета этих условий.

5а). Поэтому для решения краевой задачи с таким набором граничных условий требуется дискретизации области.

Если не учитывать граничные условия в угловых точках области, то сходимость для первого (3.100) и второго (3.101) вариантов задачи значительно улучшается (см. оранжевую и синюю сплошные линии на Рис. 5б). Следовательно, эти дополнительные условия в точках являются основным источником погрешностей, возникающих в численном решении. Напротив, в третьем варианте задачи (3.102) учет или неучет угловых точек практически не влияет на качество сходимости решения. Ошибки в решении возникают как следствие слишком "жестких" кинематических граничных условий, которые поставлены на одной стороне области относительно перемещений и их производных, а на другой стороне – относительно классических напряжений и относительно градиентов деформаций (линейно связаны друг с другом). В некотором смысле возникает ситуация, аналогичная известной проблеме решения задач о пластинах с заделкой по контуру. Такие задачи невозможно решить на основе представления решения через тригонометрические функции, и они требуют дискретизации области с дальнейшим использованием МКЭ или других численных методов. Метод Треффца для таких задач, очевидно, тоже должен применяться в реализации с разбиением области на несколько подобластей и сращиванием решения на границах таких конечных элементов. Такой вариант метода Треффца обычно называется гибридным, и он может быть построен, в том числе, как обобщение подхода, предложенного в данной диссертации.

Сходимость численного решения метода Треффца к заданным граничным условиям, и его сходимость в объеме области проиллюстрирована на Рис. 6. На Рис. 6а, показано распределение величин, входящих в граничные условия, на нагруженной стороне области в случае малого и большого числа коллокационных точек и аппроксимирующих функций. Для менее точного решения здесь использовано $M_s = 40$ точек и $N = 24$ аппроксимирующие функции, что соответствует размерности матрицы в численном решении $\mathbf{K}_{168 \times 24}$. Для более точного решения использовано $M_s = 160$ и $N = 204$, и в этом случае матрица задачи имеет размерность $\mathbf{K}_{648 \times 204}$. Заметим, что в обоих случаях общее число решаемых уравнений превышает число аппроксимирующих функций, то есть получаемое решение является единственным. Графики на Рис. 6а представлены для второго варианта граничных условий (3.101). На них видно идеальное совпадение приближенного численного решения с предписанными условиями. В других вариантах (I и III) в численном решении возникают небольшие "шумы" вблизи угловых точек.

На Рис. 6б показана сходимость численного решения для нормированных значений классических напряжений τ_{11} и перемещений u_1 во внутренней $x = a/2, y = b/2$ и в угловой точке $x = a, y = b$ области. Число коллокационных точек здесь составляло $M_s = 400$. Видно, что решение быстро выходит на асимптотическое значение при увеличении числа аппроксимирующих функций. Также, видно, что решения для вариантов граничных условий I и II оказываются очень близки.

Сравнение решений для напряжений, полученных методом Треффца и смешанным МКЭ, для рассматриваемой задачи, а также сравнение с соответствующим классическим решением

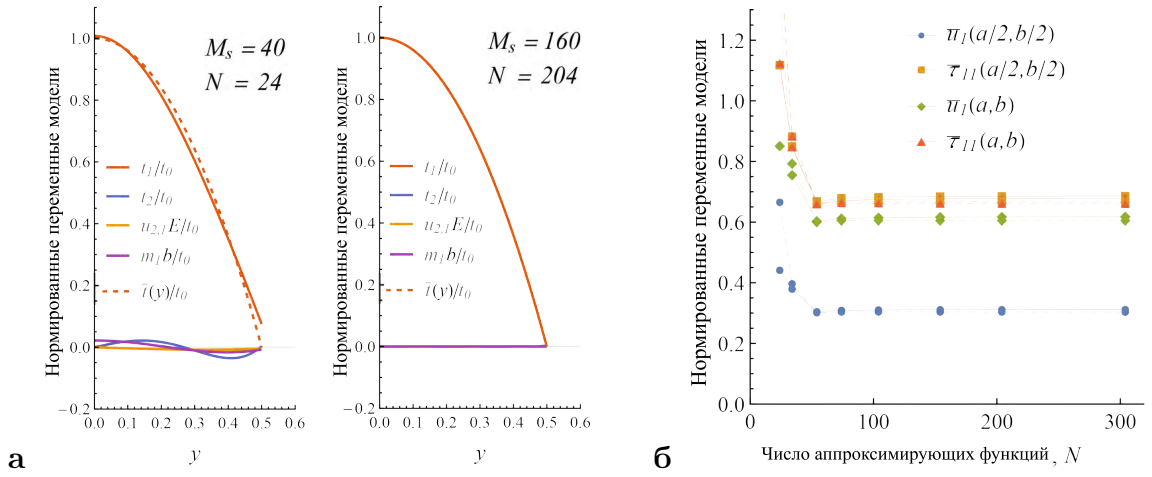


Рис. 6: **а**: Сходимость решения по методу Треффца к заданным граничным условиям (3.101) на нагруженной стороне области $x = a, y \in [0, b]$ для различного числа коллокационных точек M и аппроксимирующих функций N ; **б**: Сходимость метода Треффца внутри области в точке $x = a/2, y = b/2$ и в угловой точке $x = a, y = b$ для нормированных значений перемещений $\bar{u}_1 = u_1E/(at_0)$ и классических напряжений $\bar{\tau}_{11} = \tau_{11}/t_0$ для вариантов граничных условий I (сплошные линии) и II (штриховые линии).

ем показано на Рис. 7. Здесь показано решение для Варианта I граничных условий с использованием $N = 504$ аппроксимирующих функций и $M_s = 400$ коллокационных точек в методе Треффца ($\mathbf{K}_{1608 \times 504}$). Решение смешанного МКЭ получено в модуле Weak Form PDE в Comsol с использованием квадратных элементов второго порядка (по 25 элементов вдоль каждой границы области). Классическое решение построено методом Треффца с использованием только классических аппроксимирующих функций (3.88). Видно, что оба численных метода в ГТУ дают согласованные результаты. Отличие решений не превышает 1%, что соответствует ошибке метода Треффца для данных граничных условий (см. Рис. 5). По сравнению с классическим решением, напряжения в ГТУ оказываются ниже. Это естественный результат для такого рода задач, так как в ГТУ учитывается, что работа внешних сил расходуется не только на накопление внутренней энергии, связанной с деформациями, но и на градиенты деформаций, работу на которых совершают градиентные напряжения. Поэтому кажущееся деформированное состояние среды соответствует более жесткому материалу, в котором деформации уменьшаются и, как следствие, классические напряжения также уменьшаются [1, 175]. Такие эффекты прогнозируются для малых размеров области, в частности, в решении МКЭ рассматривалась область с размером границы $a = 1$ мкм и при значении масштабного параметра также $l = 1$ мкм, а на представленных графиках решение МКЭ дано в обезразмеренных координатах.

Примечательным является тот факт, что в градиентном решении (рис. 7а, б) классические напряжения не зануляются на соответствующих границах области. Это является следствием более сложного определения вектора напряжений в ГТУ, которое учитывает вклад моментных напряжений (см. (2.13)). Напротив, для классического решения (рис. 7б, в) выполняются стандартные классические граничные условия, и, например, касательные напряжения τ_{12} оказываются равны нулю на всей границе области.

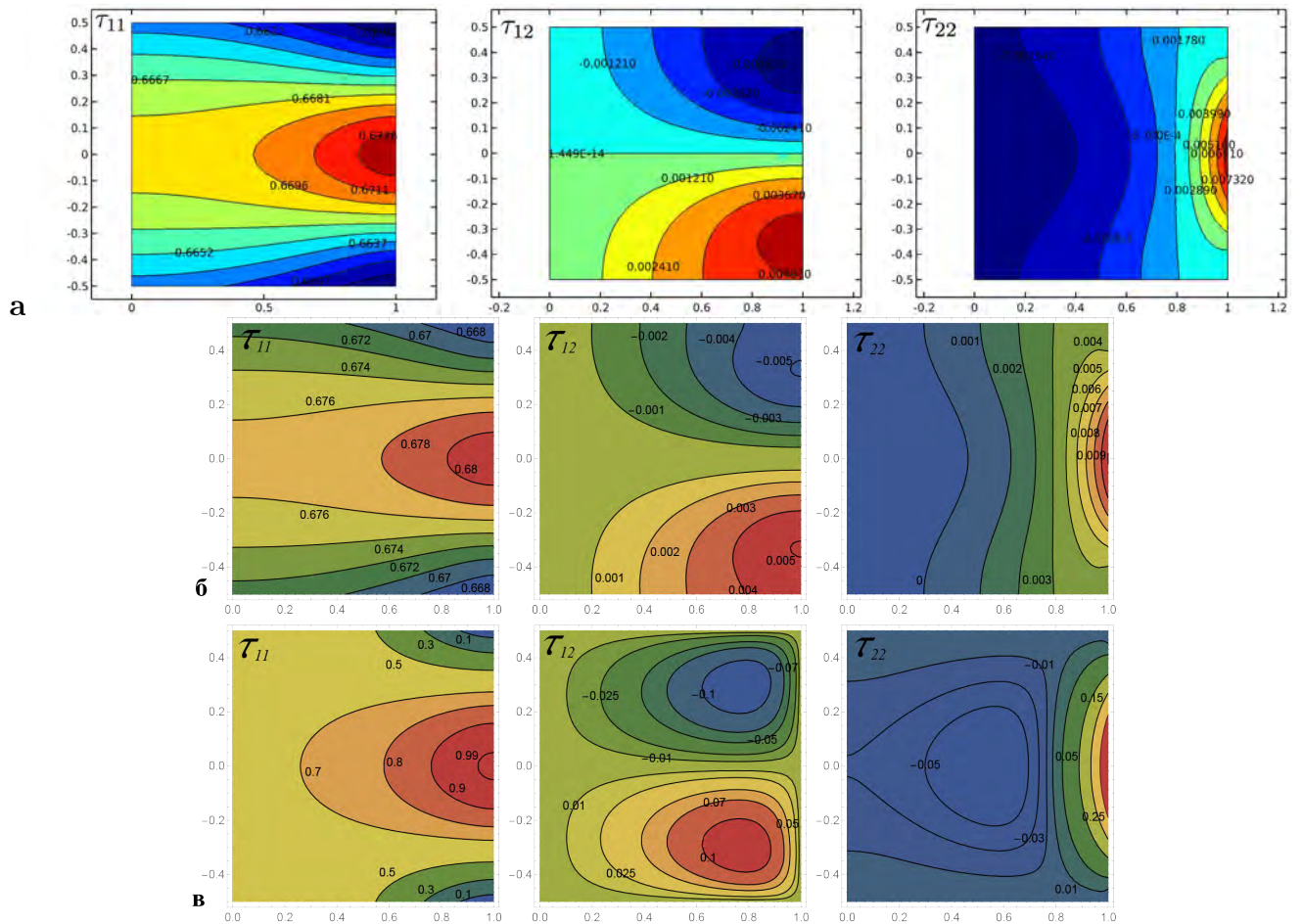


Рис. 7: Сопоставление решений для напряжений τ [МПа], полученных смешанным МКЭ в ГТУ (а), методом Треффца в ГТУ (б) и классического решения (в). Параметр нагрузки $t_0 = 1$ МПа.

Выполнение неклассических граничных условий в решении для ГТУ видно на рисунке Рис. 8а, б, где показано найденное распределение градиентных напряжений. Здесь видно, что, в частности, компонента μ_{111} оказывается равной нулю на боковых сторонах области, а компоненты μ_{122} обнуляются на верхней и нижней поверхностях. При этом решения МКЭ и метода Треффца также дают хорошо согласованные результаты.

Для сравнения на рис. Рис. 8в показан пример построения решения задачи ГТУ, в которой игнорируются граничные условия в угловых точках (3.104). Такое решение можно построить методом Треффца, просто исключая из системы уравнений соответствующие условия, а также в МКЭ, реализуемым для "строгой" постановки задачи в модуле General Form PDE в Comsol (при корректном построении решения в слабой форме все статические граничные условия выполняются автоматически и исключить их из решения задачи достаточно затруднительно). Для такой редуцированной, и, вообще говоря, некорректной постановки задачи граничные условия на ребрах также выполняются. Однако изменяется решение внутри области. При этом наибольшее изменение претерпевают величины, которые не входят в граничные условия задачи на поверхности области. В частности, это компонента напряжений μ_{112} (в ГТУ она входит только в граничные условия в угловых точках), представленная на рис. Рис. 8.

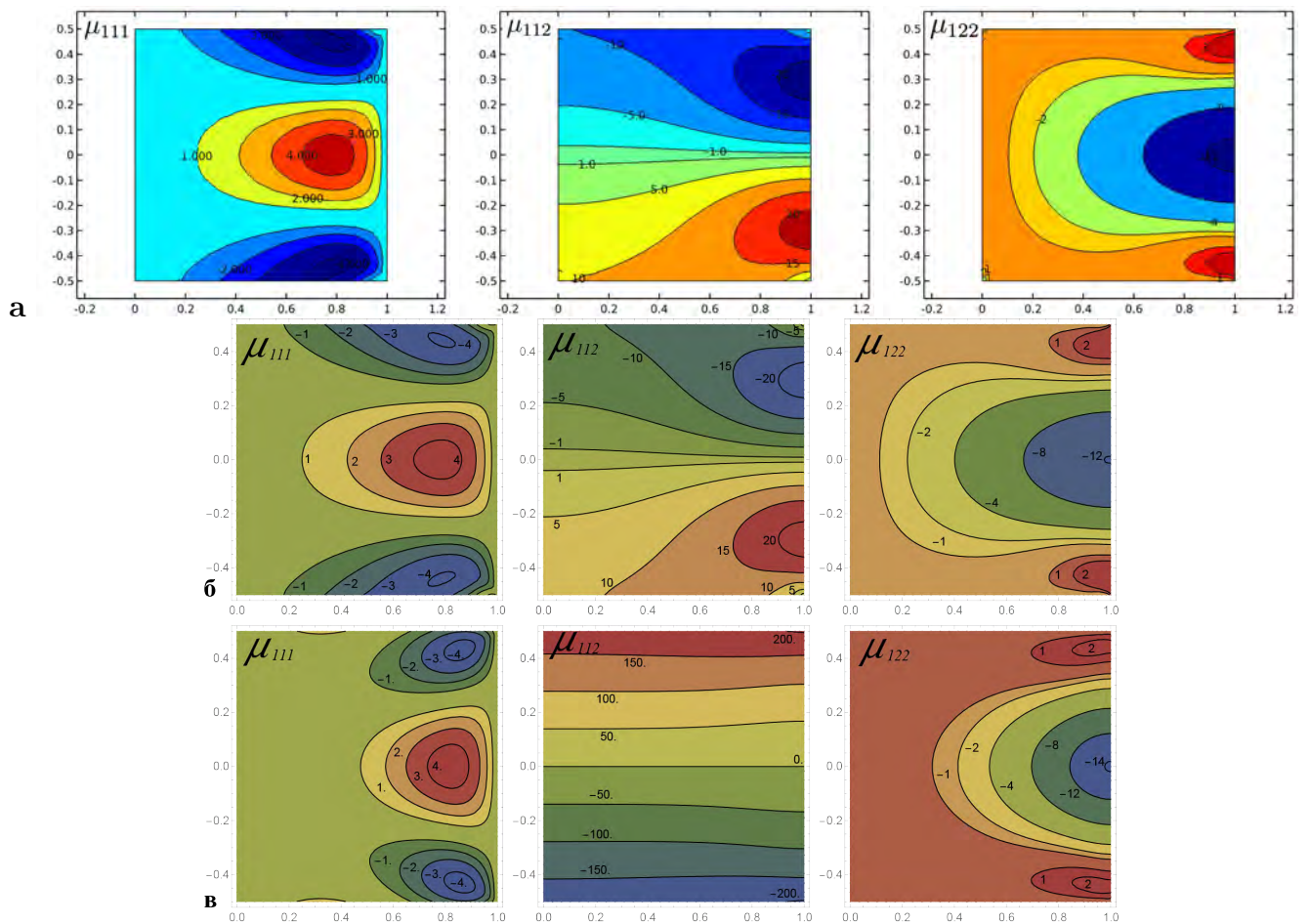


Рис. 8: Сопоставление решений для градиентных напряжений μ/\bar{R}_4 , полученных смешанным МКЭ в ГТУ(а) и методом Треффца в ГТУ (б) и вариант решения метода Треффца без учета граничных условий в угловых точках (в). Параметр нагрузки $t_0 = 1$ МПа

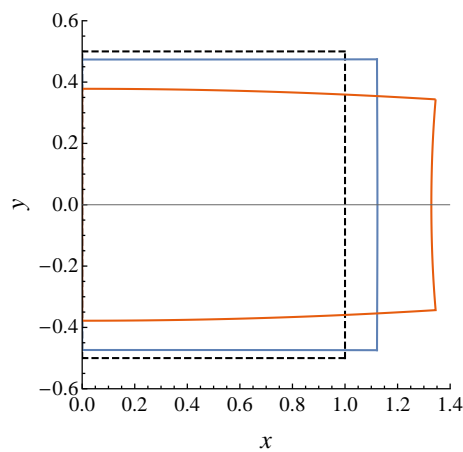


Рис. 9: Деформированное состояние области при неоднородном растяжении и заданных граничных условиях варианта I, в котором учитываются (синий цвет) и не учитываются (красный цвет) граничные условия в угловых точках. Величина нагрузки $t_0 = 1$ МПа. Использовано 20-ти кратное увеличение деформаций.

Заметим, что влияние условий на ребрах в ГТУ не сводится к перераспределению градиентных напряжений, но также оказывает существенное влияние и на классические переменные задачи, включая перемещения. Это видно на Рис. 9, где показано деформированное

состояние области, найденное из решения задачи с учетом и без учета условий на ребрах. Видно, что игнорирование этих условий приводит к повышению деформаций материала, и кажущаяся жесткость такого градиентного материала снижается. Более того, возникают значительные нефизичные искажения формы области – для заданных граничных условий на поверхности максимум нагрузки реализуется в центре правой грани, между тем в решении без учета условий в угловых точках возникают максимальные смещения вблизи этих точек около верхней и нижней поверхностях области.

Квадратная область в условиях чистого изгиба. Во втором примере численного решения рассмотрим чистый изгиб области под действием нагрузки, антисимметрично распределенной по линейному закону:

$$\bar{t}(y) = t_0 y / b$$

Аналогично предыдущему примеру, будем рассматривать три варианта граничных условий (3.100)-(3.102). При этом сразу заметим, что для Варианта I (3.100) без учета граничных условий в угловых точках можно сразу предложить точное аналитическое решение [176]. Это решение совпадает с классическим, и оно содержится в полиномиальном представлении для классической части решения в методе Треффца (3.83), (3.88). Однако, если учитывать условия в точках, то решение ГТУ отклоняется от классического. Это означает, что в такой задаче только точки (ребра) области оказываются источниками неклассических градиентных эффектов. Это является следствием рассматриваемой упрощенной теории (2.35). В общей формулировке ГТУ градиентные эффекты в задаче чистого изгиба имеют более сложную природу, что было показано в работе [107] и будет также показано в разделе 3.1 данной диссертации.

Нормирующие коэффициенты для функций ошибок (3.98) будем определять на основе классического решения для задачи чистого изгиба, в следующем виде:

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_5 = \frac{t_0 a^2}{2E}, \quad \bar{R}_2 = t_0, \quad \bar{R}_3 = \frac{t_0}{E}, \quad \bar{R}_4 = \bar{R}_6 = l \frac{t_0}{b} \quad (3.107)$$

Сходимость решения по методу Треффца для рассматриваемой задачи представлена на Рис. 10а. Здесь видно, что ошибки в граничных условиях могут быть уменьшены при увеличении числа аппроксимирующих функций для вариантов граничных условий I и II. Для третьего варианта (3.102) задача оказывается неразрешимой в рамках используемого подхода, и она требуется дискретизации области построения решения (так же как и в предыдущем примере с растяжением области). На Рис. 10б показана сходимость решения, если в нем не учитываются условия в точках для вариантов граничных условий II и III. Видно, что скорость сходимости решения повышается в обоих случаях. Поэтому именно ребра оказываются основными источниками возникновения и накопления ошибок в численном решении. Такой эффект является существенно неклассическим для обоих рассмотренных примеров. Фактически, он означает, что в ГТУ для аккуратного исследования напряженно-деформированного состояния материала необходимо использовать более мелкую сетку на любых острых кром-

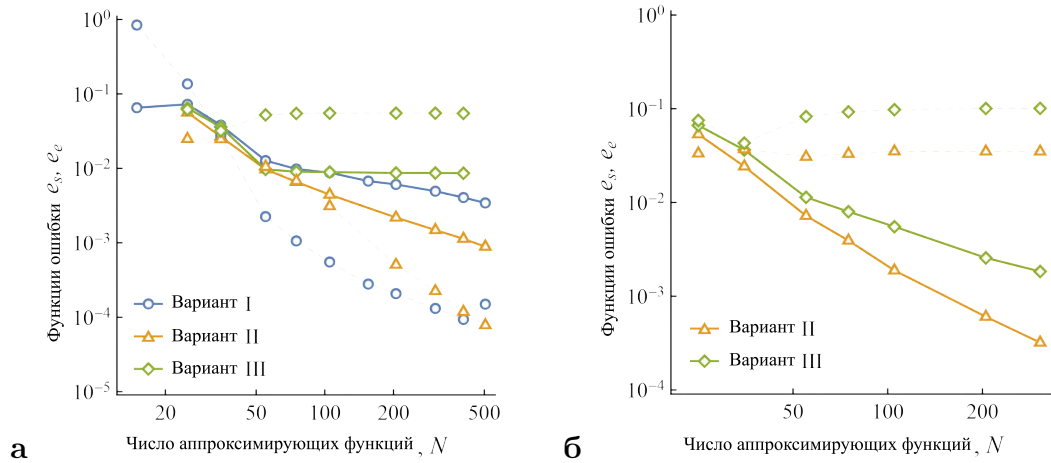


Рис. 10: Зависимость функций ошибок в граничных условиях на поверхности (e_s , сплошные линии) и в угловых точках (e_e , штриховые линии) от числа аппроксимирующих функций для решения задачи чистого изгиба по методу Треффца. Число коллокационных точек на границах $M_s = 400$, т.е. общее число решаемых уравнений составляет 1604. Показаны результаты для постановки задачи с учетом (а) и без учета (б) граничных условий в угловых точках.

ках, которые в классической теории упругости могут не приводит ни к каким сложностям или искажениям решения (не вызывать концентрации). В ГТУ же такие элементы геометрии могут оказывать существенное влияние на решение, если в их близи реализуются состояния с ненулевыми градиентными напряжениями.

Полученные решения для распределения классических и градиентных напряжений для варианта граничных условий I показаны на Рис. 11. Здесь представлены решения, полученные и смешанным МКЭ и методом Треффца. Видна согласованность обоих применяемых численных методов. Также видно, что в противоположность классическому решению, в ГТУ возникают ненулевые компоненты нормальных напряжений, действующих в поперечном направлении к нагрузке. Вблизи углов области возникают и касательные напряжения. Для градиентных напряжений заметим интересный эффект. Компонента μ_{112} вблизи углов области уменьшается и становится равной нулю в угловых точках, что является следствием граничного условия для усилий на ребрах ($t_1^{(e)} = 0$). Распределение напряжений μ_{111} и μ_{122} представлено на Рис. 11 для того, чтобы показать выполнение соответствующих граничных условий на вертикальных и горизонтальных границах области. Решение без учета ребер здесь не представлено, так как оно, как было сказано, сводится к классическому за тем исключением, что в нем возникают градиентные напряжения (из классических напряжений ненулевая компонента это $\tau_{11} = t_0 y/b$, а из градиентных это $\mu_{112} = l^2 t_0/b$).

Из приведенных примеров численных расчетов следует, что предложенный вариант реализации метода Треффца позволяет получать сходящиеся решения ГТУ для канонических областей с угловыми точками в декартовых координатах в случае использования статических (вариант I) и смешанных (вариант II) неклассических граничных условий. Для более сложного случая с кинематическими условиями (вариант III) необходима дискретизация области. Такие задачи достаточно легко решаются с использованием МКЭ для которого по-

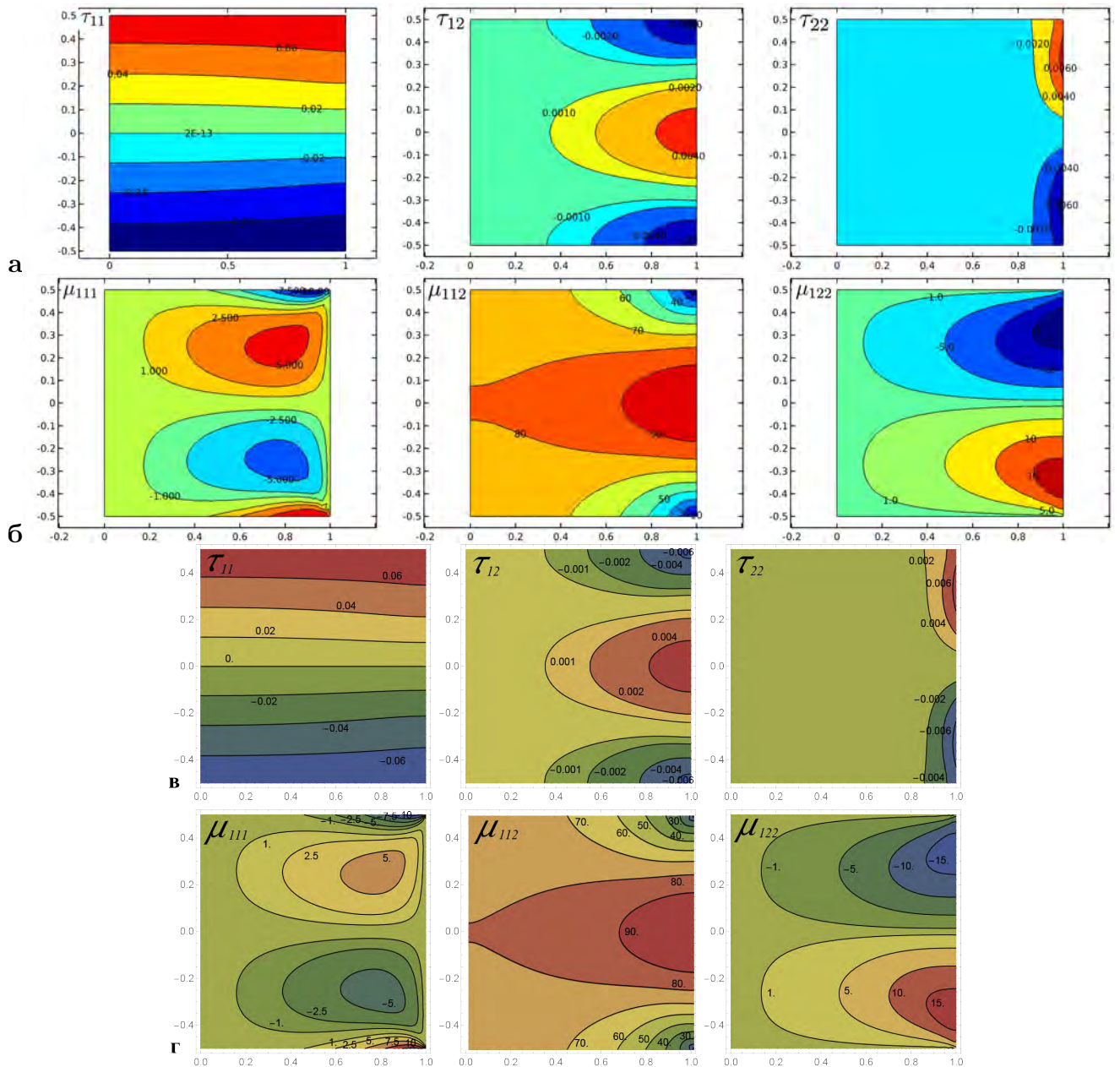


Рис. 11: Распределение классических напряжений τ [МПа] и градиентных напряжений μ/\bar{R}_d в решении ГТУ для задачи чистого изгиба, построенного смешанным МКЭ (а,б) и методом Треффца (в, г) для варианта граничных условий (3.100). Величина нагрузка $t_0 = 1$ МПа

казана хорошая согласованность с методом Треффца в вариантах задач I, II.

Таким образом, в данном разделе, во-первых, показана эффективность и перспективность использования систем аппроксимирующих функций (3.88), (3.89). Такие системы функций и их обобщения могут быть развиты в будущем для построения гибридной реализации метода Треффца с дискретизацией области. Во-вторых, показана возможность получения достоверных решений на основе смешанного МКЭ, реализованного в Comsol.

Результаты, представленные в данном разделе в отношении формулировки и реализации метода Треффца в ГТУ, были опубликованы в работе [151].

Глава 4. Масштабные эффекты в градиентной теории упругости

В данной главе представлены результаты, связанные с описанием масштабных и градиентных эффектов в упругих средах на основе моделей ГТУ. Рассмотрены проблемы построения балочных теорий в ГТУ. Предложены новые трехмерные и плоские решения для верификации этих теорий. Получены новые решения для задач о включениях в ГТУ. Проведен анализ влияния размера включений на характер изменения эффективных свойств и параметров концентрации. Представлены и реализованы подходы к идентификации дополнительных материальных констант ГТУ. Новые результаты, представленные в данной главе, были опубликованы в работах [97, 107, 175, 176, 180, 181, 186, 187, 289].

4.1 Проблема построения масштабозависимых балочных теорий

Впервые балочные теории типа Бернулли-Эйлера в рамках ГТУ были построены в работах [102, 291]. Причем, в этих работах были использованы принципиально различные подходы к построению теорий, которые детально обсуждаются ниже. В работе [102] с самого начала построения теории использовалось предположение, что в балке присутствует только одна ненулевая компонента градиентных напряжений, действующих вдоль ее оси. Напротив, в работе [291] (и в более детальной формулировке в [103]) проводился анализ структуры всего тензора градиентных напряжений, что привело к иному виду соотношений теории и другому характеру возникающих масштабных эффектов. В течение последних двадцати лет оба этих подхода существовали независимо, и разными авторами они были развиты на более общие случаи – для градиентных балок типа Тимошенко [292, 293], для градиентных теорий пластин [294, 295], для градиентной теорий оболочек [105, 296], для моделей термоупругих и электроупругих балок [297, 298], для динамических задач [299, 300] и т.д. (в перечисленных ссылках их порядок соответствует первому и второму подходу, который используют авторы при построении теории). Тем не менее, во всех этих вариантах градиентных теорий присутствует единственное принципиальное различие – это подход к анализу структуры тензора градиентных напряжений. Известны работы, где этот вопрос сравнения теорий обсуждался и был детально проанализирован [106, 108]. В данном разделе диссертации построены трехмерные и плоские решения, которые позволяют утверждать о корректности первого типа теорий – с так называемым "одноосным напряженным" состоянием. Отметим также, что верификация такого рода моделей была проведена в сопоставлении с методами молекулярной динамики для параметров жесткости и собственных частот нанотрубок в работах [2, 301]. Представленные в диссертации результаты получены для градиентных теорий в форме I и II Миндлина. Вообще говоря, для моделей, в которых учитываются градиентные эффекты, связанные с ротором вектора перемещений, возникающие масштабные эффекты могут быть иными (аналогичными известным в микрополярных теориях [302–304]).

В следующих двух подразделах проводится сравнение трехмерных решений с наиболее

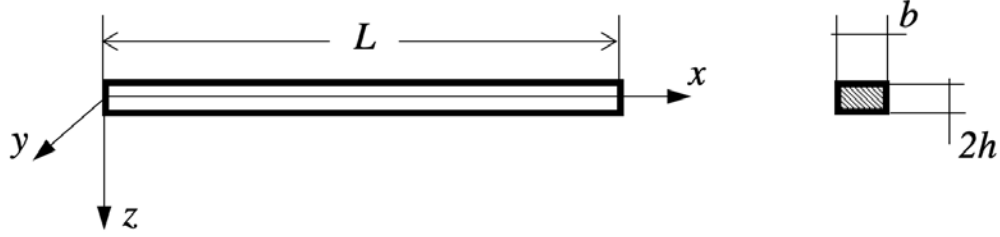


Рис. 12: Балка с прямоугольным поперечным сечением

простыми балочными теориями Бернулли-Эйлера. Тем не менее получаемые выводы позволяют утверждать и о корректности более широкого класса градиентных теорий (пластин, оболочек, связанных моделей), основанных на аналогичном подходе к использованию гипотез о характере распределения напряжений по толщине тонкостенных элементов. Вариант вариационной формулировки таких теорий представлен в подразделе 3.1.3.

4.1.1 Модель градиентных балок Бернулли-Эйлера

Рассмотрим прямолинейную балку с прямоугольным поперечным сечением. Материал балки изотропный. Длина балки L , толщина $2h$ и ширина b (см. Рис. 12). Для построения теории используем стандартные гипотезы Бернулли-Эйлера о распределении перемещений по толщине балки при изгибе (задачу растяжения/сжатия не рассматриваем в данном случае):

$$u_1 = -z w'(x), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x) \quad (4.1)$$

где $x = x_1$, $z = x_3$, $w' = \partial w / \partial x$.

Из сделанных предположений (4.1) следует, что в балке возникают следующие ненулевые значения компонент тензора деформаций, тензора градиентов деформаций и вторых градиентов от перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = -z w'', \quad \varepsilon_{11,1} = -z w''', \quad \varepsilon_{11,3} = -w'' \\ u_{1,1} = -z w'', \quad u_{1,3} = -w', \quad u_{3,1} = w', \quad u_{1,11} = -z w''', \quad u_{1,13} = -w'', \quad u_{3,11} = w'' \end{aligned} \quad (4.2)$$

Среди классических напряжений, очевидно, возникает единственная ненулевая компонента (как и в классической теории) – нормальные напряжения, действующие в направлении оси балки:

$$\tau_{11} = E \varepsilon_{11} = -z E w'' \quad (4.3)$$

Среди градиентных напряжений возникает большее число ненулевых компонент, что определяется, в частности, вариантом градиентной теории. В дальнейшем рассмотрим четыре теории: общую формулировку определяющих соотношений ГТУ в форме I и II Миндлина (2.30), (2.32), полностью симметричную теорию (2.37) и упрощенную ГТУ (2.34). Для этих теорий возникают следующие ненулевые значения компонент тензора градиентных напряжений:

В Форме I:

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= -(4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) z w''' = -l^2 (\lambda + 2\mu) z w''' \\
\mu_{113} &= -(-a_1 + 2a_3 + 2a_4) w'' = -l_1^2 (\lambda + 2\mu) w'' \\
\mu_{311} &= -(2a_1 - a_2 - 2a_4 + 4a_5) w'' = -l_2^2 (\lambda + 2\mu) w''
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где введенные масштабные параметры определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
l^2 &= (4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) / (\lambda + 2\mu) \\
l_1^2 &= (-a_1 + 2a_3 + 2a_4) / (\lambda + 2\mu) \\
l_2^2 &= (2a_1 - a_2 - 2a_4 + 4a_5) / (\lambda + 2\mu)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

В Форме II:

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= -(4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) z w''' = -l^2 (\lambda + 2\mu) z w''' \\
\mu_{113} &= -(a_2 + 2a_4) w'' = -l_1^2 (\lambda + 2\mu) w''
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где масштабные параметры определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
l^2 &= (4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) / (\lambda + 2\mu) \\
l_1^2 &= (a_2 + 2a_4) / (\lambda + 2\mu)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

В полностью симметричной теории:

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= -3(3a_1 + 2a_2) z w''' = -l^2 (\lambda + 2\mu) z w''' \\
\mu_{113} &= -(a_1 + 2a_2) w'' = -l_1^2 (\lambda + 2\mu) w''
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где :

$$\begin{aligned}
l^2 &= 3(3a_1 + 2a_2) / (\lambda + 2\mu) \\
l_1^2 &= (a_1 + 2a_2) / (\lambda + 2\mu)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

В упрощенной ГТУ:

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= -(a_1 + 2a_2) z w''' = -l^2 (\lambda + 2\mu) z w''' \\
\mu_{113} &= -(a_1 + 2a_2) w'' = -l^2 (\lambda + 2\mu) w''
\end{aligned} \tag{4.10}$$

где единственный масштабный параметр определяется стандартным образом:

$$l^2 = (a_1 + 2a_2) / (\lambda + 2\mu) \tag{4.11}$$

В записанных выражениях необходимо учесть, что для построения балочной теории используется предположение о нулевом значении коэффициента Пуассона $\nu = 0$ (отсутствие деформаций поперечного сечения балки [305]), что приведет к возникновению модуля Юнга в определяющих соотношениях, так как в этом случае $\lambda + 2\mu = E(1 - \nu) / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)) =$

E.

Для дальнейших рассуждений разными авторами применяются два различных подхода, которые приводят к различной форме уравнений равновесия и граничных условий. Рассмотрим эти подходы.

Модель с одноосным напряженным состоянием

Во-первых, можно предположить, что несмотря на возникающие при формальном применении гипотез Бернулли-Эйлера ненулевые градиенты деформаций и вторые градиенты перемещений в (4.2), в балке будут присутствовать только продольные ненулевые напряжения τ_{11} и градиентные напряжения μ_{111} . Обосновать это предположение можно, например, следуя С. Polizzotto [271], и считая что вторые градиенты от перемещений должны обнуляться на поверхностях балки без возникновения эффектов "пограничного слоя" (то есть вторые градиенты от функции перемещений в направлении толщины балки должны быть малы и внутри балки), а возникающая распределенная поперечная нагрузка в случае балки малой толщины оказывается пренебрежимо малой. Другим возможным обоснованием является отсылка к теореме о представлении общего решения ГТУ[112], которая требует, чтобы классическая часть уравнений равновесия в градиентной теории сохранялась неизменной, а все возникающие дополнительные слагаемые были связаны только с производными повышенного порядка (как будет видно далее именно этот вариант реализуется при использовании гипотезы об "одноосном напряженном состоянии").

В этом случае полная энергия деформаций балки определяется выражением:

$$U = \int_0^L \int_S (\tau_{11}\varepsilon_{11} + \mu_{111}\varepsilon_{11,1}) dS dx = \int_0^L (-M w'' - M_h w''') dx \quad (4.12)$$

где введены определения для изгибающего момента и для равнодействующей градиентных напряжений (градиентного момента):

$$\begin{aligned} M &= \int_S z \tau_{11} dS = -EI w'' \\ M_h &= \int_S z \mu_{111} dS = -l^2 EI w''' \end{aligned} \quad (4.13)$$

Работа внешних сил определяется выражением:

$$W = \int_0^L q w dx + Q_0 w|_0^L - M_0 w'|_0^L - M_{h0} w''|_0^L$$

где q – распределенная поперечная нагрузка, а Q_0 , M_0 , M_{h0} – это заданные на концах балки перерезывающее усилие, изгибающий момент и градиентный момент, соответственно.

Применение принципа возможных перемещений приводит к следующей вариационной формулировке модели:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta U - \delta W = 0 \\
\delta L &= (M' - M_h'' - Q_0) \delta w \Big|_0^L - (M - M_h' - M_0) \delta w' \Big|_0^L - (M_h - M_{h0}) \delta w'' \Big|_0^L \\
&\quad - \int_L (M'' - M_h''' + q) \delta w dx = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Таким образом, уравнение равновесия и граничные условия теории имеют вид:

$$x \in [0, L] : \quad M'' - M_h''' + q = 0 \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
x = 0, L : \quad M' - M_h'' &= Q_0 \quad \text{или} \quad w = w_0 \\
M - M_h' &= M_0 \quad \text{или} \quad w' = \theta_0 \\
M_h &= M_{h0} \quad \text{или} \quad w'' = \kappa_0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

В записанных граничных условиях (4.16), соответственно представлены обобщенные определения для задаваемых величин перерезывающей силы, изгибающего момента и градиентного момента, которые совершают работу на прогибах, углах поворота и кривизне балки. При этом последние могут быть заданы в качестве кинематических граничных условий (w_0, θ_0, κ_0).

Подстановка определений для моментов (4.13) в уравнения равновесия (4.15) приводит к следующему виду уравнения изогнутой оси балки в терминах функции прогибов:

$$D_0 w^{IV} - l^2 D_0 w^{VI} = q \tag{4.17}$$

где $D_0 = EI$ и $I = 2bh^3/3$ (толщина балки $2h$).

Как видим, в этом уравнении присутствует классическое слагаемое, связанное с четвертой производной от прогибов, при котором стоит классический коэффициент – изгибная жесткость балки D_0 . Коэффициент при шестой производной от прогибов определяется через масштабный параметр модели l , который по-разному определен в разных градиентных теориях (см. (4.5), (4.7), (4.9), (4.11)).

Модель с обобщенным напряженным состоянием

В общем случае формального анализа структуры тензора градиентов деформаций и тензора вторых градиентов от перемещений полная энергия деформаций балки должна быть представлена в следующем виде:

В Форме I:

$$U = \int_0^L \int_S (\tau_{11} \varepsilon_{11} + \mu_{111} u_{1,11} + 2\mu_{113} u_{1,13} + \mu_{311} u_{3,11}) dS dx = \int_0^L (-M w'' - M_h w''') dx \tag{4.18}$$

и в Форме II, в полностью симметричной и в упрощенной ГТУ:

$$U = \int_0^L \int_S (\tau_{11}\varepsilon_{11} + \mu_{111}\varepsilon_{11,1} + \mu_{113}\varepsilon_{11,3}) dS dx = \int_0^L (-M w'' - M_h w''') dx \quad (4.19)$$

где градиентные напряжения определяются в соответствии с (4.4), (4.6), (4.8), (4.10), выражениями $\mu_{111} = -l^2 E z w'''$, $\mu_{113} = -l_1^2 E w''$, $\mu_{311} = -l_2^2 E w''$, а изгибающие моменты определены следующим образом:

В Форме I:

$$M = \int_S (z \tau_{11} + 2\mu_{113} - \mu_{311}) dS = -E (I + (2l_1^2 - l_2^2) A) w'' \quad (4.20)$$

В Форме II и в полностью симметричной теории:

$$M = \int_S (z \tau_{11} + \mu_{113}) dS = -E (I + l_1^2 A) w'' \quad (4.21)$$

В упрощенной ГТУ:

$$M = \int_S (z \tau_{11} + \mu_{113}) dS = -E (I + l^2 A) w'' \quad (4.22)$$

В записанных выражениях для моментов $A = 2bh$ – это площадь поперечного сечения балки, а масштабные параметры l_1 и l_2 определяются соотношениями (4.5), (4.7), (4.9), (4.11).

Вариационная формулировка и постановка краевой задачи в терминах результирующих силовых факторов в рассматриваемом варианте балочной теории полностью аналогична той, которая была приведена для "одноосной"/, модели (4.14)-(4.16). Однако как видно из (4.20)-(4.22), сами определения для классических изгибающих моментов принимают иной вид, что приводит к модификации соотношений теории при их записи в терминах функции прогибов. В частности, вместо уравнения (4.17), получаем следующее уравнение изогнутой оси балки:

$$D w^{IV} - l^2 D_0 w^{VI} = q \quad (4.23)$$

где D – это модифицированный коэффициент изгибной жесткости балки, который имеет вид $D = E (I + (2l_1^2 - l_2^2) A)$ в Форме II, $D = E (I + l_1^2 A)$ в Форме I и в симметричной теории, и $D = E (I + l^2 A)$ в упрощенной теории (аналогичное определение использовалось в исходной работе [103]).

Таким образом, в теории градиентных балок с "обобщенным" напряженным состоянием возникает модифицированный вид уравнений равновесия, в которых классический коэффициент изгибной жесткости балки при четвертой производной от прогибов оказывается масштабозависимым. Присутствующие в его определении площадь поперечного сечения и масштабный параметр приводят к существенно иным размерным эффектам по сравнению с "одноосной" теорией (4.17). В обобщенной модели можно ввести значение нормированной изгибной жесткости балки, например для упрощенной ГТУ и прямоугольного поперечного

сечения имеем:

$$\frac{D}{D_0} = 1 + l^2 \frac{3}{h^2} \quad (4.24)$$

и эта величина растет при уменьшении толщины балки обратно пропорционально квадрату ее толщины. То есть при стремлении толщины балки к нулю нормированное значение ее изгибной жесткости стремится в бесконечность.

Наиболее простой тестовой задачей для рассматриваемых теорий является задача чистого изгиба. С точки зрения балочной теории в этом случае необходимо предполагать, что на концах балки заданы только классические изгибающие моменты M_0 , а перерезывающие усилия и градиентные моменты отсутствуют ($Q_0=0$, $M_{h0} = 0$). В этом случае на основе анализа уравнений равновесия и граничных условий (4.15), (4.16) в обоих вариантах теории получим, что изгибающий момент в сечениях балки оказывается постоянным и равным заданному: $M(x) = M_0$. Далее на основе определения моментов в "одноосной" теории получим, что кривизна балки имеет классический вид:

$$w'' = -\frac{M_0}{D_0}, \quad (4.25)$$

а в "обобщенной" теории получаем масштабозависимое значение кривизны, которое снижается (по сравнению с классическим решением) при уменьшении толщины балки:

$$w'' = -\frac{M_0}{D_0 \left(1 + l^2 \frac{3}{h^2}\right)}, \quad (4.26)$$

То есть "обобщенная" теория предсказывает повышение кажущейся изгибной жесткости тонких балок, при этом в задаче однородного растяжения/сжатия в обеих теориях жесткость балок остается неизменной и классической. Полученные решения могут быть проверены на основе анализа соответствующих трехмерных решений ГТУ. Для задачи растяжения/сжатия такие решения элементарны (см. например [180]) и в работе не рассматриваются. Для задачи чистого изгиба эти решения представлены в следующем подразделе диссертации.

4.1.2 Чистый изгиб балки. Трехмерное полуобратное решение в ГТУ

Рассматриваем балку (брус) длиной L с прямоугольным поперечным сечением с толщиной $2h$ и шириной $2b$ (Рис. 3). Балка находится в состоянии чистого изгиба и изгибается в плоскости XZ . Ось X идет вдоль центральной оси балки, а ось Z – в направлении ее толщины (в направлении прогибов балки). Ось Y направлена в направлении "из плоскости", то есть в направлении ширины балки.

Для построения полуобратного решения рассматриваемой задачи в рамках трехмерной постановки ГТУ будем следовать подходу, первоначально предложенному в работе [111] в микро-дилатационной теории упругости. Для этого необходимо предположить, что торцевые поверхности балки ($x = 0, L$), а также ее боковые поверхности ($y = \pm b$) остаются плоскими. Такое предположение позволяет рассмотреть решение для перемещений балки, не содержащее сдвигов, и оно является полностью справедливым для классической теории упругости. Однако, в моделях обобщенных континуумов это предположение является приближением, которое допустимо для исследования напряженно-деформированного состояния балки вдали от ее концов и вблизи к ее центральному продольному сечению. Вблизи же концов балки и вблизи ее боковых поверхностей происходит искривление (депланация) поперечных и продольных сечений балки и получаемое решение оказывается несправедливым. Впервые это было предсказано в микро-дилатационной теории упругости на основе аналитических рассуждений в работе [306] и показано на основе численного моделирования в [173]. Тем не менее получаемое решение является хорошим приближением для проверки балочных моделей. Справедливость полуобратного решения вблизи центрального продольного сечения позволяет с достоверностью исследовать характер прогибов нейтральной оси балки и сравнить его с аналогичным решением, следующим из теории балок Бернулли-Эйлера.

Для решения задачи используем граничные условия относительно напряжений и градиентных напряжений (2.12), (2.13), в которых необходимо учесть, что поверхности балки плоские и имеют нулевую кривизну. Верхняя и нижняя поверхности балки $z = \pm h$ свободны от нагрузки, что определяется следующими условиями:

$$\sigma_{13} - \mu_{113,1} - \mu_{123,2} = 0 \quad (4.27)$$

$$\sigma_{23} - \mu_{213,1} - \mu_{223,2} = 0 \quad (4.28)$$

$$\sigma_{33} - \mu_{313,1} - \mu_{323,2} = 0 \quad (4.29)$$

$$\mu_{133} = 0, \quad \mu_{233} = 0, \quad \mu_{333} = 0 \quad (4.30)$$

На боковых поверхностях балки $y = \pm b$ нагрузка также отсутствует:

$$\sigma_{12} - \mu_{112,1} - \mu_{132,3} = 0 \quad (4.31)$$

$$\sigma_{22} - \mu_{212,1} - \mu_{232,3} = 0 \quad (4.32)$$

$$\sigma_{32} - \mu_{312,1} - \mu_{332,3} = 0 \quad (4.33)$$

$$\mu_{122} = 0, \quad \mu_{222} = 0, \quad \mu_{322} = 0 \quad (4.34)$$

На торцах балки $x = 0, L$ предполагаем наличие распределенной продольной нагрузки t_1 , приводящей к возникновению чистого изгиба:

$$\sigma_{11} - \mu_{121,2} - \mu_{131,3} = t_1 \quad (4.35)$$

$$\sigma_{21} - \mu_{221,2} - \mu_{231,3} = 0 \quad (4.36)$$

$$\sigma_{31} - \mu_{321,2} - \mu_{331,3} = 0 \quad (4.37)$$

$$\mu_{111} = 0, \quad \mu_{211} = 0, \quad \mu_{311} = 0 \quad (4.38)$$

Вообще говоря, в задаче для балки с прямоугольным поперечным сечением также возникают и граничные условия на ребрах (см. (2.12)). Однако, в рассматриваемом полуобратном решении будем считать, что балка является достаточно длинной и широкой, так что влиянием ребер можно пренебречь при оценке ее изгибной жесткости (для сопоставления с балочным решением). В численном же моделировании эти условия будут учитываться.

Для получения замкнутого аналитического решения, граничные условия для нормальных напряжений на торцах (4.35)-(4.38) и на боковых поверхностях балки (4.31)-(4.34) будем выполнять в интегральном смысле относительно результирующих усилий и моментов. При этом на верхней и нижней поверхностях соответствующие граничные условия (4.35)-(4.38) будут выполняться в строгом смысле ("по-точечно") относительно напряжений, что является принципиальным при исследовании изгибной жесткости балки [112].

Таким образом, вводим результирующие усилие и изгибающий момент на торцах балки $x = 0, L$:

$$Q_x = \int_{S_1} t_1 dS_1 = 0 \quad (4.39)$$

$$M_x = \int_{S_1} z t_1 dS_1 = M_0 \quad (4.40)$$

и на боковых поверхностях $y = \pm b$:

$$Q_y = \int_{S_2} t_2 dS_2 = 0 \quad (4.41)$$

$$M_y = \int_{S_2} z t_2 dS_2 = 0 \quad (4.42)$$

где $S_1 : y \in [-b, b], z \in [-h, h]$ – это поперечное сечение балки (или соответствующая торцевая поверхность при $x = 0, L$); $S_2 : x \in [0, L], z \in [-h, h]$ – это продольное сечение балки (или соответствующая боковая поверхность при $y = \pm b$), $t_1 = \sigma_{11} - \mu_{121,2} - \mu_{131,3}$ – это нормальная компонента вектора напряжений на торцевых поверхностях балки (соответствует граничному условию (4.35)), $t_2 = \sigma_{22} - \mu_{212,1} - \mu_{232,3}$ – это нормальная компонента вектора напряжений на боковых поверхностях балки (соответствует граничному условию (4.32)).

Заметим, что введенные результирующие фактически будут являться и погонными результирующими, так как в реализуемом решении напряжения не будут зависеть от координат вдоль длины и ширины балки. Это не является существенным для результирующих на торцах балки Q_x , M_x , так как они вводятся стандартным образом, как и в балочных теориях. Однако, для результирующих на боковых поверхностях Q_y , M_y это существенно из-за большой протяженности этих поверхностей вдоль координаты x . Независимость напряжений от этой координаты позволяет говорить, что граничные условия выполняются в интегральном смысле на этих поверхностях в каждом поперечном сечении, определяемом координатой x .

Следуя методике, изложенной в разделе 3.4, используем следующее предположение о виде функций перемещений:

$$u_1 = C_1 x z \quad (4.43)$$

$$u_2 = C_2 z y \quad (4.44)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}C_1 x^2 - \frac{1}{2}C_2 y^2 + w(z) \quad (4.45)$$

где C_1 , C_2 – это неизвестные константы и $w(z)$ – это неизвестная функция, которые необходимо определять из уравнений равновесия и граничных условий задачи. С точки зрения физического смысла эти константы и функция (точнее ее вторая производная) определяют градиенты деформаций $\varepsilon_{11,3}$, $\varepsilon_{22,3}$, $\varepsilon_{33,3}$ (см. ниже).

На основе записанных гипотез, находим следующие выражения для первых и вторых градиентов от перемещений, деформаций и их градиентов (приведены выражения для ненулевых компонент):

$$\begin{aligned} u_{1,1} = C_1 z, \quad u_{1,3} = C_1 x, \quad u_{2,2} = C_2 z, \quad u_{2,3} = C_2 y, \\ u_{3,1} = -C_1 x, \quad u_{3,2} = -C_2 y, \quad u_{3,3} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} u_{1,13} = C_1, \quad u_{1,31} = C_1, \quad u_{2,23} = C_2, \quad u_{2,32} = C_2, \\ u_{3,11} = -C_1, \quad u_{3,22} = -C_2, \quad u_{3,33} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_{11} = C_1 z, \quad \varepsilon_{22} = C_2 z, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_{11,3} = C_1, \quad \varepsilon_{22,3} = C_2, \quad \varepsilon_{33,3} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4.49)$$

Как видно из записанных соотношений, введенные гипотезы для перемещений предполагают отсутствие деформаций сдвига. В случае изотропного материала касательных напряжений также не возникает, а нормальные компоненты тензора классических напряжений τ_{ij} определяются выражениями (2.29) и имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= (\lambda + 2\mu) C_1 z + \lambda C_2 z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{22} &= (\lambda + 2\mu) C_2 z + \lambda C_1 z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{33} &= \lambda (C_1 + C_2) z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Выражения для градиентных напряжений μ_{ijk} определяются соотношениями (2.33), (2.31),

(2.37), (2.35). Запишем эти выражения в различных градиентных теориях для ненулевых компонент.

В Форме I ГТУ, используя (2.33) и (4.47), получим:

$$\begin{aligned}
\mu_{113} &= \mu_{131} = (-a_1 + 2a_3 + 2a_4) C_1 + (-a_1 + 2a_3) C_2 + (a_1 + 2a_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{223} &= \mu_{232} = (-a_1 + 2a_3) C_1 + (-a_1 + 2a_3 + 2a_4) C_2 + (a_1 + 2a_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{311} &= (2a_1 - a_2 - 2a_4 + 4a_5) C_1 + (2a_1 - a_2) C_2 + (2a_1 + a_2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{322} &= (2a_1 - a_2) C_1 + (2a_1 - a_2 - 2a_4 + 4a_5) C_2 + (2a_1 + a_2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{333} &= (-a_2 + 4a_3) C_1 + (-a_2 + 4a_3) C_2 + (4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

В Форме II ГТУ, используя (2.31) и (4.49), получим:

$$\begin{aligned}
\mu_{113} &= (a_2 + 2a_4) C_1 + a_2 C_2 + (2a_1 + a_2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{223} &= a_2 C_1 + (a_2 + 2a_4) C_2 + (2a_1 + a_2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{131} &= \mu_{311} = (a_1 + 2a_5) C_1 + a_1 C_2 + (a_1 + 2a_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{232} &= \mu_{322} = a_1 C_1 + (a_1 + 2a_5) C_2 + (a_1 + 2a_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{333} &= (2a_1 + a_2) C_1 + (2a_1 + a_2) C_2 + (4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

В симметричной ГТУ, используя (2.37) и (4.49), получим:

$$\begin{aligned}
\mu_{113} &= \mu_{131} = \mu_{311} = (a_1 + 2a_2) C_1 + a_1 C_2 + 3a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{223} &= \mu_{232} = \mu_{322} = a_1 C_1 + (a_1 + 2a_2) C_2 + 3a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\mu_{333} &= 3a_1 C_1 + 3a_1 C_2 + 3(3a_1 + 3a_2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

В упрощенной ГТУ, используя (2.35) и (4.49), получим:

$$\begin{aligned}
\mu_{113} &= a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = l^2 \left((\lambda + 2\mu) C_1 + \lambda C_2 + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\
\mu_{223} &= a_2 C_1 + a_1 C_2 + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = l^2 \left(\lambda C_1 + (\lambda + 2\mu) C_2 + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\
\mu_{333} &= a_2 C_1 + a_2 C_2 + a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = l^2 \left(\lambda C_1 + \lambda C_2 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Далее необходимо вычислить значения полных напряжений $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$. Уравнения равновесия ГТУ записываются именно относительно этих напряжений. Используя (4.50) и (4.51)-(4.54), получим:

В Форме I ГТУ:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu C_1 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - (a_1 + 2a_3) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{22} &= 2\mu C_2 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - (a_1 + 2a_3) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{33} &= \lambda(C_1 + C_2)z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} - l^2(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

В Форме II ГТУ:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu C_1 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - (2a_1 + a_2) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{22} &= 2\mu C_2 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - (2a_1 + a_2) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{33} &= \lambda(C_1 + C_2)z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} - (4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

В симметричной ГТУ:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu C_1 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - 3a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{22} &= 2\mu C_2 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - 3a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{33} &= \lambda(C_1 + C_2)z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} - 3(3a_1 + 2a_2) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

В упрощенной ГТУ:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu C_1 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{22} &= 2\mu C_2 z + \lambda(C_1 + C_2)z + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
\sigma_{33} &= \lambda(C_1 + C_2)z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} - (a_1 + 2a_2) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Далее можно показать, что записанное решение тождественно удовлетворяет уравнениям равновесия ГТУ в направлении длины и толщины балки. Это делается непосредственной подстановкой полученных выражений для полных напряжений (4.55)-(4.58) в уравнения равновесия вида $\sigma_{ij,j} = 0$ ($i = 1, 2$). Также тождественно удовлетворяются граничные условия относительно касательных компонент вектора напряжений на поверхностях балки (4.27),(4.28),(4.31),(4.33),(4.36), (4.37) и относительно компонент градиентных напряжений $\mu_{133} = \mu_{233} = \mu_{111} = \mu_{211} = \mu_{122} = \mu_{222} = 0$ в (4.30),(4.34),(4.34). Заметим, что граничные условия в (4.34), (4.34), требующие обнуления компонент градиентных напряжений μ_{311} (на торцах) и μ_{322} (на боковых поверхностях балки) не могут быть выполнены в рассматриваемом варианте решения и требуют дополнительных предположений о характере сдвиговых деформаций вблизи этих поверхностей. Однако эти эффекты (связанные со сдвигами) затухают при удалении от поверхностей балки и ими можно пренебречь при анализе характера распределения прогибов нейтральной оси балки достаточно большой длины. Это в том числе будет показано на основе численного моделирования.

Оставшееся третье уравнение равновесия в направлении толщины балки используем для нахождения неизвестной функции $w(z)$. Во всех рассматриваемых теориях это уравнение принимает вид:

$$\sigma_{33,3} = 0 \quad \implies \quad l^2 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^4 w(z)}{\partial z^4} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} - \lambda (C_1 + C_2) = 0 \tag{4.59}$$

где масштабный параметр l по-разному определяется в разных вариантах ГТУ (см. (4.5), (4.7), (4.9), (4.11)).

Уравнение равновесия (4.59) необходимо дополнить граничными условиями на верхней и нижней поверхностях балки ((4.29) и третье условие в (4.29)). Эти условия не удовлетво-

ряются тождественно выбранным видом решения, и с учетом полученных выражений для градиентных напряжений они приводятся к виду:

$$z = \pm h : \quad \sigma_{33} = 0, \quad \mu_{333} = 0 \quad (4.60)$$

Также учтем, что для исключения смещений балки как жесткого целого в направлении оси z необходимо закрепить хотя бы одну ее точку (смещения в других направлениях и повороты запрещены выбранным видом решения для перемещений). Такой закрепленной точкой будем считать начало координат:

$$z = 0 : \quad w = 0 \quad (4.61)$$

Общее решение уравнения равновесия (4.59) имеет следующий вид:

$$w(z) = A_1 + A_2 \cosh\left(\frac{z}{l}\right) - (C_1 + C_2) \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{z^2}{2} \quad (4.62)$$

Используя граничные условия (4.60) найдем, что константы A_1, A_2 в записанном общем решении определяются выражениями вида:

$$A_1 = -A_2 = (C_1 + C_2) \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\bar{l}^2 - l^2}{\cosh(h/l)} \quad (4.63)$$

где введено обозначение \bar{l} для еще одного масштабного параметра, возникающего в решении. Этот параметр в Форме I ГТУ определяется выражением $\bar{l} = (4a_3 - a_2)/\lambda$, в Форме II $\bar{l} = (2a_1 + a_2)/\lambda$, в симметричной ГТУ $\bar{l} = 3a_1/\lambda$, а в упрощенной ГТУ сохраняется однопараметрический характер модели и выполняется $\bar{l} = l = a_1/\lambda$, что сразу приводит к требованию $A_1 = A_2 = 0$.

Подставляя найденные значения констант в общее решение (4.62), получим:

$$w(z) = (C_1 + C_2) \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\bar{l}^2 - l^2}{\cosh(h/l)} \left(1 - \cosh\left(\frac{z}{l}\right) \right) - \frac{z^2}{2} \right) \quad (4.64)$$

В этом решении заметим, что если градиентные константы имеют нулевые значения $a_i = 0$, то выполняется также $l = \bar{l} = 0$ и реализуется классическое решение, совпадающее с (3.68).

Далее необходимо найти константы C_1, C_2 . Следуя подходу [111], это делается с использованием граничных условий относительно результирующих моментов и усилий (4.39)-(4.42). Эти результирующие записываются через компоненты вектора напряжений t_1 на торцах балки и t_2 на ее боковых поверхностях, которые в построенном решении имеют вид:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11} - \mu_{121,2} - \mu_{131,3} = \tau_{11} - s\mu_{113,3} \\ t_2 &= \sigma_{22} - \mu_{212,1} - \mu_{232,3} = \tau_{22} - s\mu_{223,3} \end{aligned} \quad (4.65)$$

где $s = 2$ в Форме I и II, и в симметричной ГТУ, и $s = 1$ в упрощенной ГТУ.

Условия относительно результирующих усилий (4.39), (4.41) выполняются тождественно

(решение оказывается антисимметричным в сечении балки), а условия относительно моментов (4.40), (4.42) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} z (\tau_{11} - s\mu_{113,3}) dS_1 &= M_0 \\ \int_{S_2} z (\tau_{22} - s\mu_{223,3}) dS_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Подставляя выражение для прогибов в определения для напряжений (4.50) и градиентных напряжений (4.51)-(4.54), и затем подставляя полученные значения в условия (4.66), получим два уравнения относительно двух неизвестных констант C_1 , C_2 . Решение этих уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{M_0}{D_0} J, & C_2 &= -\frac{M_0 \nu}{D_0} J, \\ J &= \frac{2\nu(1+\nu)N - \frac{\nu^2}{1-2\nu} + \frac{h^3}{3(\bar{l}^2 - l^2)(h-l \tanh(h/l))}}{4\nu N - \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{h^3}{3(\bar{l}^2 - l^2)(h-l \tanh(h/l))}} \end{aligned} \quad (4.67)$$

где D_0 – классическая изгибная жесткость балки, $I = 4bh^3/3$ – момент инерции поперечного сечения балки, и введены вспомогательные обозначения $N = \frac{a_1 + 2a_3}{l^2 E}$ в Форме I, $N = \frac{2a_1 + a_2}{l^2 E}$ в Форме II, $N = \frac{3a_1}{l^2 E}$ в симметричной ГТУ и $N = \frac{a_1}{2l^2 E}$ в упрощенной ГТУ.

Если учтем, что в упрощенной ГТУ выполняется условие $l = \bar{l}$, то сразу получим $J = 1$. Также легко видеть, что и для всех остальных теорий возникает решение с $J = 1$, если потребовать равенство нулю коэффициента Пуассона материала $\nu = 0$. И именно такое условие должно быть использовано при сопоставлении трехмерного решения с балочной теорией. В результате получаем классический вид констант, входящих в решение задачи:

$$C_1 = \frac{M_0}{D_0}, \quad C_2 = 0 \quad (4.68)$$

И используя далее (4.68), (4.64) и (4.45), находим решение для вертикальных смещений точек балки:

$$u_3 = -\frac{1}{2} \frac{M_0}{D_0} x^2 - \frac{M_0}{D_0} \left(\frac{\bar{l}^2 - l^2}{\cosh(h/l)} \left(1 - \cosh\left(\frac{z}{l}\right) \right) - \frac{z^2}{2} \right) \quad (4.69)$$

Наконец, для прогибов нейтральной оси балки (используем $y = z = 0$ в (4.69)) получаем классическое решение:

$$u_3(x, 0, 0) = -\frac{1}{2} \frac{M_0}{D_0} x^2 \quad (4.70)$$

и кривизна нейтральной оси градиентной балки определяется классическим выражением $-M_0/D_0$. Более того, предполагая, что толщина балки мала (то есть $\max(z/l) = h/l \rightarrow 0$) получим, что неклассическое слагаемое в (4.69) стремится к нулю $(1 - \cosh(z/l))/\cosh(h/l) \rightarrow 0$ и для прогибов балки при чистом изгибе градиентных эффектов не возникает.

Таким образом, для стандартных предположений балочных теорий (коэффициент Пуассона равен нулю, малая толщина балки, рассматриваются прогибы нейтральной оси) мы получаем, что трехмерное решение выходит на классическое во всех рассмотренных вариантах ГТУ. Некоторые отклонения в трехмерном решении возникают для достаточно толстых балок, как результат влияния эффектов Пуассона и связанных с ними градиентных эффектов. Неклассическое масштабозависимое значение изгибной жесткости балки в построенном решении не возникает, а ее кривизна определяется стандартным коэффициентом D_0 , что говорит о справедливости "одноосного" варианта градиентной теории балок Бернулли-Эйлера (4.17), предложенной в работе [102]. Неучтенными в построенном решении являются граничные условия на ребрах и возможность возникновения деформации поперечных сечений торцов балки. Влияние этих эффектов необходимо исследовать в рамках численного моделирования.

Завершая этот подраздел, сделаем два следующих замечания.

Замечание 1. В построенном решении было использовано определение для моментов и усилий, как результирующих для вектора напряжений t_i , действующего на поверхности (или в сечении) балки. Для вычисления этого вектора напряжений через компоненты тензоров классических и градиентных напряжений использовались его определения, выводимые в ГТУ при записи естественных граничных условий в рамках вариационного подхода (4.35). Однако, если использовать иные определения для результирующих и, в частности, для изгибающего момента, то можно получить другой результат. Например, рассмотрим условие для заданного на торцах изгибающего момента в упрощенной ГТУ (4.66):

$$M_0 = \int_{S_1} z (\tau_{11} - \mu_{113,3}) dS_1 \quad (4.71)$$

Интегрируя по частям записанное выражение для балки с прямоугольным поперечным сечением, получим:

$$M_0 = \int_{S_1} (z \tau_{11} + \mu_{113}) dS_1 - 2b (z \mu_{113})_{-h}^h \quad (4.72)$$

Сравнивая полученное выражение с соответствующим определением, которое используется в "обобщенной" градиентной модели балок Бернулли-Эйлера (4.22), заметим, что оно содержит дополнительное слагаемое вида $2b (z \mu_{113})_{-h}^h$. Присутствие этого слагаемого в (4.72) связано с использованием в трехмерном решении естественных граничных условий в качестве определения вектора напряжений (4.35). Если же в трехмерном решении формально исключить это слагаемое из рассматриваемого определения для момента (таким образом мы приведем определение момента в трехмерном решении к виду, который используется при построении "обобщенной" градиентной модели балок), то при удовлетворении граничных условий на торцах балки вместо исходных условий (4.66) будет использоваться условие вида:

$$x = 0, L : \quad M_0 = \int_{S_1} (z \tau_{11} + \mu_{113}) dS_1 \quad (4.73)$$

В результате использования такого формального модифицированного определения момента в окончательном решении возникнет масштабный эффект, соответствующий "обобщенной" градиентной балочной теории. В частности, для коэффициентов, входящих в определение прогибов вместо (4.68) получим решение вида:

$$C_1 = -\frac{M}{D_0 (1 + 3(l/h)^2)}, \quad C_2 = 0 \quad (4.74)$$

где возникает масштабозависимое значение изгибной жесткости $D = D_0(1 + 3(l/h)^2)$, совпадающее с (4.24).

Замечание 2. Как видно из проведенных рассуждений, для упрощенной ГТУ полуобратное решение задачи чистого изгиба оказывается полностью классическим. Если подставить все упрощения, которые были отмечены выше, то это решение можно сразу строить, предполагая классическое решение для перемещений:

$$u_1 = \frac{M_0}{2EI} x z, \quad u_2 = -\frac{\nu M_0}{2EI} y z, \quad u_3 = -\frac{M_0}{2EI} (x^2 + \nu(z^2 - y^2)), \quad (4.75)$$

В этом случае ненулевые деформации и градиенты деформаций имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{M_0}{EI} x, \quad \varepsilon_{11,3} = \frac{M_0}{EI}, \quad (4.76)$$

Ненулевые классические напряжения, градиентные напряжения и полные напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{M_0}{I} z, \\ \mu_{113} &= \tau_{11,3} = \ell^2 \frac{M_0}{I} \\ \sigma_{11} &= \tau_{11} - \mu_{113,3} = \tau_{11} = \frac{M_0}{I} z \end{aligned} \quad (4.77)$$

Записанное решение, очевидно, удовлетворяет всем уравнениям равновесия ($\sigma_{ij,j} = 0$). Также это решение поточечно (не в интегральном смысле) удовлетворяет всем граничным условиям. В частности, нетривиальным оказывается только условие для нормальной компоненты вектора напряжений на торцах балки, которое имеет вид (4.35):

$$\sigma_{11} - \mu_{121,2} - \mu_{131,3} = t_1 \quad \implies \quad \sigma_{11} = t_1 \quad (4.78)$$

Предполагая далее, что внешняя нагрузка задана в виде распределенных поверхностных усилий по закону $t_1 = n_1 M_0 z / I$ (как и в классическом решении для задачи чистого изгиба), получим тождественное выполнение и этого граничного условия (4.78).

Таким образом, в упрощенной ГТУ в градиентной балке при чистом изгибе не возникает

депланации поперечных и продольных сечений. Поэтому "источником" неклассических градиентных эффектов остаются только дополнительные граничные условия на ребрах, учет влияния которых возможен в рамках численного моделирования.

4.1.3 Трехмерные численные решения для задач изгиба

Рассмотрим численное решение задачи чистого изгиба. Это решение построено в системе Comsol в модуле General Form PDE (описание реализации численного моделирования в Comsol дано в разделе 3.5.1). В отличие от аналитических подходов, рассмотренных выше, в численном решении все граничные условия на поверхностях балки учитываются в явном виде, в том числе дополнительные граничные условия на ребрах.

Моделирование было реализовано для определяющих соотношений упрощенной ГТУ (2.34). Пример конечно-элементной сетки, использованной в расчетах, показан на Рис. 13. Использовались элементы с аппроксимацией второго порядка. Общее количество элементов в модели составляло 608, однако количество степеней свободы составило 125307, что определяется большим количеством промежуточных переменных, которые вводятся в каждом узле КЭ сетки для понижения порядка уравнений теории (см. описание в разделе 3.5.1). В тестовом расчете использовались значения свойств материала $E = 3.5$ ГПа, $\nu = 0.3$. При решении задачи чистого изгиба учитывалась симметрия задачи и рассматривалась $1/4$ часть балки с размерами $L/2 \times b \times 2h$ с граничными условиями, определяющими симметрию задачи:

$$\begin{aligned}x = L/2 : \quad u_1 = 0, \quad u_{2,1} = u_{3,1} = 0 \\ y = 0 : \quad u_2 = 0, \quad u_{1,2} = u_{3,2} = 0\end{aligned}\tag{4.79}$$

В записанных условиях в том числе учитываются условия симметрии повышенного порядка для нормальных градиентов от тангенсальных компонент перемещений. Эти условия определяют требования по отсутствию сдвигов на поверхности симметрии. Нагрузку задаем в виде поверхностной силы, линейно распределенной по торцевой поверхности балки:

$$x = 0 : \quad t_1 = -zp\tag{4.80}$$

На всех остальных поверхностях балки и на ее ребрах задаются условия по отсутствию напряжений. Для исключения поворотов балки, как жесткого целого, в точке в начале координат запрещены вертикальные смещения балки. Все остальные смещения и повороты балки исключаются введенными условиями симметрии.

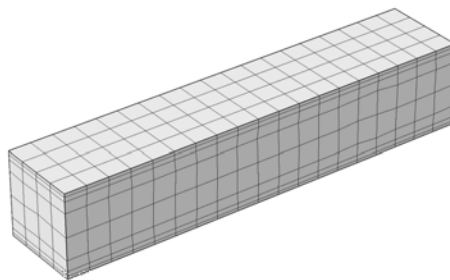


Рис. 13: Конечно-элементная модель балки, использованная в численном моделировании

Результаты численного моделирования для задачи чистого изгиба показаны на рис. 14. Получено, что в балке реализуется классическое решение для перемещений, деформаций и напряжений вдали от торцов. В частности, реализуется линейное распределение классических напряжений $\tau_{11} = zp$, а их производная определяет единственные ненулевые градиентные напряжения $\mu_{113} = l^2 \tau_{11,3} = l^2 p$ (см. Рис. 14 а,д). Некоторое отклонение от классического решения возникает вблизи торцевых поверхностей, и, в частности, вблизи острых кромок. При этом эти эффекты не оказывают влияния на изгибную жесткость балки, поэтому численное решение фактически подтверждает приведенное выше полубратное решение.

Далее рассмотрим еще один вариант задачи – изгиб консольно закрепленной балки. На одном конце балки будем задавать условия "жесткого" закрепления, задавая кинематические классические (по перемещениям) и градиентные (по нормальным градиентам от перемещений) граничные условия. А на другой торцевой поверхности балки будем задавать тангенсальную составляющую вектора перемещений:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad u_{1,1} = u_{2,1} = u_{3,1} = 0 \\ x = L : \quad t_3 = -p \end{aligned} \tag{4.81}$$

Симметрия в данной задаче не учитывалась и рассматривалась достаточно протяженная балка большого удлинения. Пример сопоставления классического и градиентного численного решения для задачи консольного изгиба показан на Рис. 16. В классическом решении задавались только стандартные ограничения на прогибы балки в заделке. Из сопоставления решений видно, что прогибы в градиентной балке оказываются ниже при более высоком уровне концентрации напряжений (полных напряжений, входящих в уравнения равновесия). Таким образом, градиентная консольная балка оказывается более жесткой по сравнению с классической. Степень повышения жесткости определяется значением масштабного параметра. При нулевом значении этого параметра решение выходит на классическое. Распределение градиентных напряжений, возникающих в решении задачи ГТУ, представлено на Рис. 16. Видно, что рассматриваемого варианта нагружения максимальные значения реализуются для компонент μ_{111} , μ_{131} , μ_{113} . Для некоторых компонент градиентных напряжений также возникают эффекты, связанные с острыми кромками балки (см. например, решения для компонент μ_{123} , μ_{133}).

Таким образом, для случая консольной балки в численном решении проявляются масштабные эффекты, и ее кажущаяся изгибная жесткость отклоняется от классического значения (повышается). Попробуем сопоставить получаемое численное решение с решениями, следующими из градиентной модели балок Бернулли-Эйлера. Для этого введем оценку для кажущегося модуля упругости балки, реализующегося в численном моделировании. Эта оценка основана на классическом решении для прогибов консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной на ее конце:

$$E^* = \frac{PL^3}{3I\delta} \tag{4.82}$$

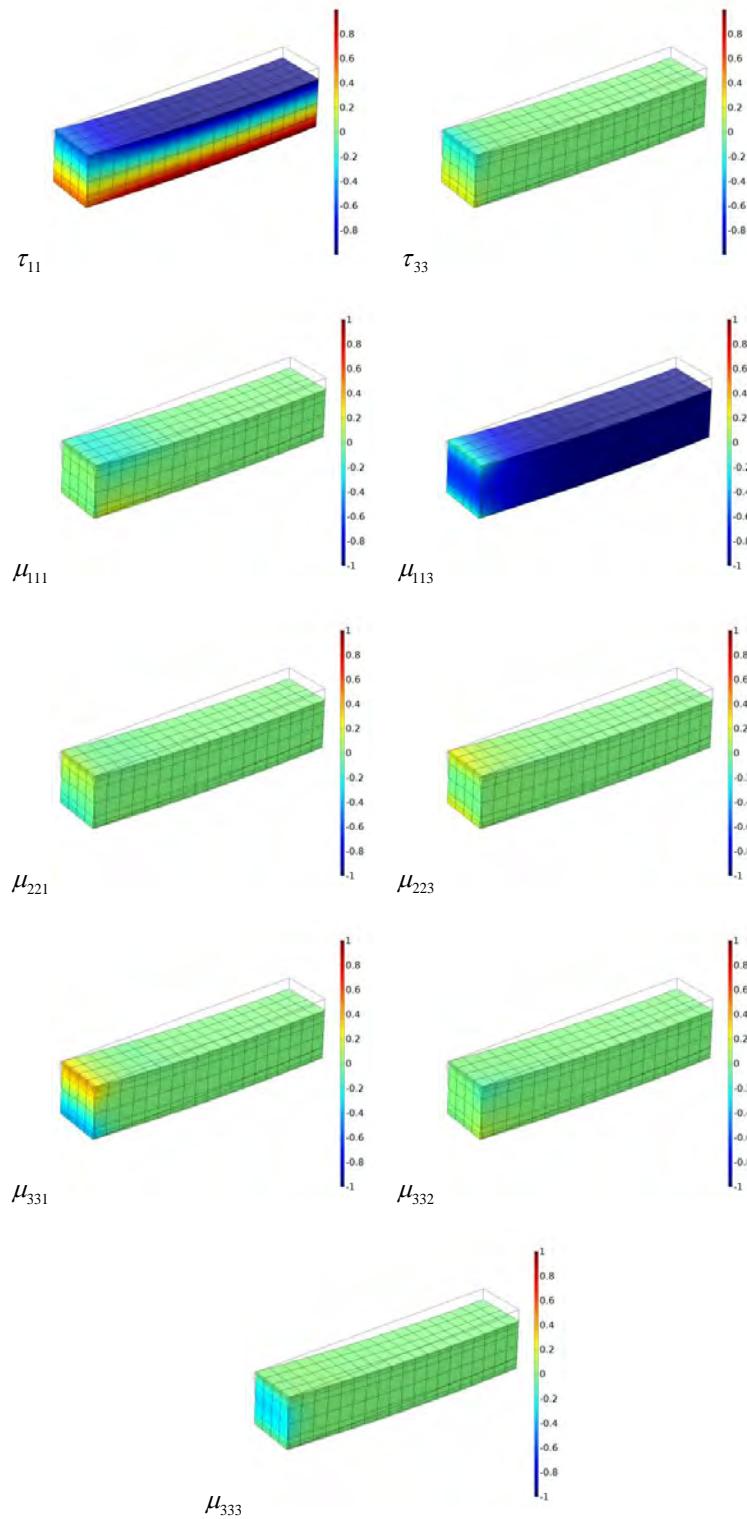


Рис. 14: Распределение напряжений [МПа] и градиентных напряжений [МПа·мкм] в численном решении для задачи чистого изгиба балки. Размеры балки: $L/l = 5$, $h/l = 1$, $b = 2h$. Нагрузка $p = 1$ МПа, масштабный параметр: $l = 1$ мкм. Деформации увеличены в 40 раз. Нагруженный конец балки – слева, плоскость симметрии – справа.

где $P = pbh$ – величина изгибающей силы и $\delta = u_3(L, 0, 0)$ – это прогибы балки на нагруженном конце, которые определяются в численном решении.

Аналитические решения для задачи изгиба консольной балки могут быть легко построены в рассматриваемых градиентных балочных теориях. Такие решения были представлены, например, в работах [251]. Нормированное значение кажущегося изгибного модуля для консольной балки может быть найдено аналитически, как отношение прогибов в классическом и градиентном решениях. Для "одноосной" теории получим [102]:

$$E^*/E = \frac{\bar{L}^3 \cosh(\bar{L})}{\bar{L}(3 + \bar{L}^2) \cosh(\bar{L}) + 3(1 - \bar{L}^2) \sinh(\bar{L}) - 6\bar{L}} \quad (4.83)$$

и в "обобщенной" теории [103]:

$$E^*/E = \frac{\tilde{L}^3 \cosh(\tilde{L}) \sqrt{1 + 12\frac{l^2}{h^2}}}{\tilde{L}(3 + \tilde{L}^2) \cosh(\tilde{L}) + 3(1 - \tilde{L}^2) \sinh(\tilde{L}) - 6\tilde{L}} \quad (4.84)$$

где $\bar{L} = \frac{L}{l}$ и $\tilde{L} = \frac{L}{l} \sqrt{1 + 12\frac{l^2}{h^2}}$

Эти решения (4.83), (4.84) найдены в предположении заданных кинематических ограничений на прогибы, углы поворота и кривизну балки в заделке (см. (4.16)). Особенность этих решений в разном характере масштабных эффектов, которые в "одноосной" теории оказываются связаны с длиной балки (4.83), в то время как в "обобщенной" теории (4.84) существен-

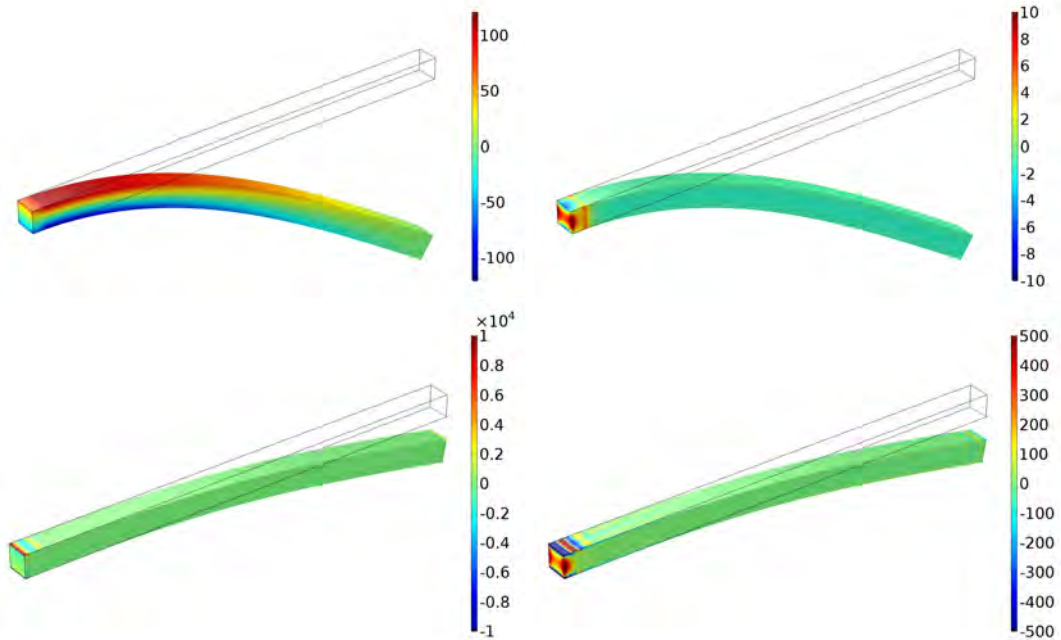


Рис. 15: Сопоставление деформаций и напряженного состояния консольной балки в классическом и градиентном численном решении. Параметры модели $L = 20$ мкм, $b = h = 1$ мкм, $l = 8$ мкм, $p = 1$ МПа, а: напряжения $\sigma_{11} = \tau_{11}$ в классическом решении, б: напряжения $\sigma_{13} = \tau_{13}$ в классическом решении, в: полные напряжения σ_{11} в градиентном решении, г: полные напряжения σ_{13} в градиентном решении. Размерность на цветовой схеме [МПа].

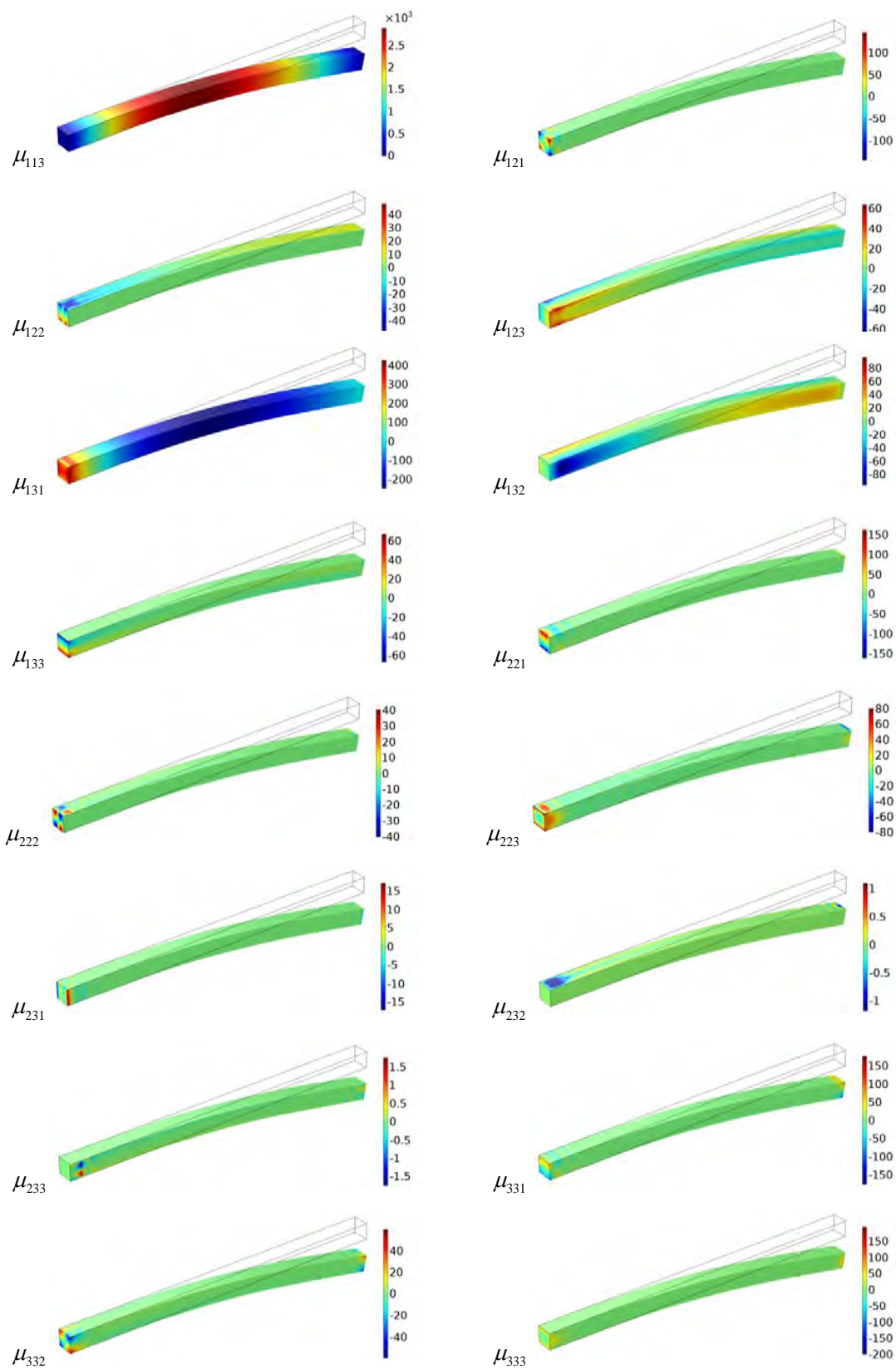


Рис. 16: Распределение градиентных напряжений в численном решении для консольного изгиба градиентной балки. Параметры: $L = 20$ мкм, $b = h = 1$ мкм, $l = 8$ мкм, $p = 1$ МПа. Размерность на цветовой схеме [МПа·мкм].

ным образом проявляется влияние толщины. Сравнение полученных решений представлено на Рис. 17. Здесь показана зависимость нормированного значения кажущегося модуля упругости балки, который реализуется в аналитических и в численном решениях. Причем для численного решения представлены как результаты в модели, учитывающей дополнительные граничные условия на острых краях балки, так и решение без этих условий (в Comsol они формально были исключены из формулировки задачи). Результаты расчетов приведены для балки с размерами $L = 20$ мкм, $b = h = 1$ мкм. Значения масштабного параметра варьировались в диапазоне от $l = 1$ мкм (малая протяженность градиентных эффектов) до $l = 20$ мкм (значительные градиентные эффекты). Видно, что хорошая согласованность реализуется между численным решением и аналитическим решением в рамках "одноосной" теории (4.83). Кажущийся модуль упругости балки растет при уменьшении ее длины, однако этот рост не настолько существенен, как предсказывает "обобщенное" решение (4.84) с учетом эффектов, связанных с толщиной балки. Причиной повышения кажущейся жесткости балки в одноосном решении является влияние заделки – для коротких балок влияние дополнительных граничных условий, накладываемых на кривизну балки в градиентном решении, в большей степени оказывает влияние на ее прогибы. Влияние граничных условий на острых краях (ребрах) балки в трехмерном численном решении сводится к небольшому дополнительному повышению ее кажущегося модуля упругости (см. Рис. 17, белые точки). Однако, это повышение жесткости в любом случае оказывается не столь значительным, и численное решение лучше соответствует одноосной модели (4.83), особенно при достаточно большой длине балки $L/l > 2$, для которой модель Бернулли-Эйлера и должна применяться.

Таким образом, в данном разделе представлены численные решения, которые позволяют верифицировать построенные полубратные решения для трехмерных задач чистого изгиба и подтвердить корректность формулировки "одноосных" моделей градиентных балок Бернулли-Эйлера.

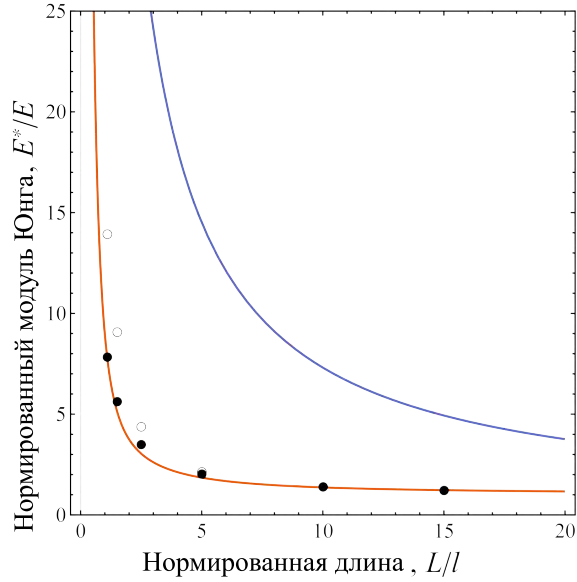


Рис. 17: Зависимость нормированного значения кажущегося модуля упругости консоли от нормированной длины в решении градиентной теории упругости. Аналитические решения – линии, численное моделирование – точки. Красная линия – решение "одноосной" теории (4.83), синяя линия – решение "обобщенной" теории (4.84)

4.1.4 Вариационная формулировка градиентных балочных моделей с учетом неклассических граничных условий

Сравнивая два подхода к построению градиентных балочных теорий, можно заметить, что формально строгим является вариант построения "обобщенной" теории, в которой учитываются все ненулевые компоненты тензора градиентов деформаций (или вторых градиентов от перемещений), возникающие в результате применения гипотез Бернулли-Эйлера. Использование единственной компоненты градиентных напряжений μ_{111} и исключение μ_{113} в "одноосной" теории изначально являлось предположением [102], которое можно обосновать некоторыми логическими предпосылками, но не вывести на основе гипотез Бернулли-Эйлера. Поэтому для этого варианта теории интересным представляется доказательство возможного формального вывода соотношений, не содержащих компоненту градиентных напряжений μ_{113} в определении классического изгибающего момента (по сути именно в этом и заключается разница между двумя рассматриваемыми теориями). Для этого рассмотрим следующий возможный вариант рассуждений в рамках реализации вариационного подхода при построении градиентных балочных теорий. Рассмотрим структуру энергии деформаций балки, которая возникает при формальном применении гипотез Бернулли-Эйлера к трехмерным соотношениям ГТУ при построении "обобщенной" теории (4.19):

$$U = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11}\varepsilon_{11} + \mu_{111}\varepsilon_{11,1} + \mu_{113}\varepsilon_{11,3}) dz dx \quad (4.85)$$

При дальнейшей непосредственной подстановке в это выражение определений для напряжений, деформаций и их градиентов (4.2), (4.3), (4.6), из него следуют соотношения, в которых классический изгибающий момент определяется как $M = b \int_{-h}^h (z\tau_{11} + \mu_{113}) dz =$

$-E(I + \ell^2 A)w''$ (рассматриваем вариант ГТУ в форме II Миндлина).

Однако возможен и другой вариант рассуждений. Выражение (4.85) можно предварительно записать в эквивалентной форме в терминах перемещений, используя стандартные определения для малых деформаций:

$$U = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11}u_{1,1} + \mu_{111}u_{1,11} + \mu_{113}u_{1,13}) dz dx \quad (4.86)$$

В рамках реализации вариационного подхода к построению балочной теории далее необходимо рассматривать условие равенства нулю вариации от полной потенциальной энергии модели $\delta U - \delta W = 0$. Не останавливаясь на выражении для работы δW , которое не принципиально для дальнейших рассуждений, рассмотрим вариацию потенциальной энергии δU , которая для полученного выражения (4.86) будет иметь вид:

$$\delta U = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11}\delta u_{1,1} + \mu_{111}\delta u_{1,11} + \mu_{113}\delta u_{1,13}) dz dx \quad (4.87)$$

Здесь заметим, что к слагаемым, присутствующим под интегралом можно применить интегрирование по частям, как в направлении длины балки (ось $x_1 = x$), так и в направлении ее толщины (ось $x_3 = z$). Тогда получим выражение для энергии деформаций балки, в котором будут содержаться члены, вычисляемые на верхней и нижней поверхностях балки, а также на кромках ее торцевых сечений:

$$\begin{aligned} \delta U = & -b \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11,1} - \mu_{111,11} - \mu_{113,13}) \delta u_1 dz dx \\ & + b \int_{-h}^h ((\tau_{11} - \mu_{111,1} - \mu_{113,3})\delta u_1 + \mu_{111}\delta u_{1,1}) \Big|_{x=0}^{x=L} dz \\ & - b \int_0^L (\mu_{113,1}\delta u_1) \Big|_{z=-h}^{z=h} dx + ((\mu_{113}\delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=L}) \Big|_{z=-h}^{z=h} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Далее потребуем выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} z = \pm h : \quad \mu_{113,1} &= 0 \\ x = 0, L \cup z = \pm h : \quad \mu_{113} &= 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

Справедливость этих требований (4.89), вообще говоря, не очевидна. Для их обоснования рассмотрим трехмерную вариационную формулировку ГТУ (2.11), которая в индексной записи может быть представлена в следующем виде [154]:

$$\begin{aligned} \delta U_{3D} = & - \int_{\Omega} (\tau_{ij,j} - \mu_{ijk,jk}) \delta u_i dv \\ & - \int_{\partial\Omega} ((\tau_{ij} - \mu_{ijk,k})n_j - (\mu_{ijk}n_k)_{,j} + (\mu_{ijk}n_k n_l)_{,l}n_j) \delta u_i ds \\ & - \int_{\partial\Omega} \mu_{ijk}n_j n_k \delta(u_{i,l}n_l) ds + \int_{\Gamma} [[\mu_{ijk}m_j n_k]] \delta u_i dl \end{aligned} \quad (4.90)$$

где $\Omega = \{x \in [0, L], y \in [-b/2, b/2], z \in [-h, h]\}$ это область занятая балкой, $\partial\Omega$ это поверхность балки, и $\partial\partial\Omega$ это ребра балки с прямоугольным поперечным сечением; n_i это компоненты внешней единичной нормали \mathbf{n} к $\partial\Omega$; $m_j = \epsilon_{mlj}s_m n_l$ это внешняя ко-нормаль к ребрам балки; s_m это компоненты касательных векторов к ребрам $\partial\partial\Omega$; ϵ_{mlj} это тензор Леви-Чивиты; и двойные квадратные скобки, присутствующие в контурных интегралах вдоль ребер $\partial\partial\Omega$, обозначают необходимость вычисления разности между величинами, вычисляемыми на двух поверхностях, пересечение которых образует данное ребро.

Легко видеть, что если среди всех напряжений и градиентных напряжений, присутствующих в трехмерной постановке ГТУ в (4.90), оставить только те, которые имеют ненулевые значения в модели балок Бернулли-Эйлера (то есть это компоненты τ_{11} , μ_{111} и μ_{113} для Формы II Миндлина (2.30)), то интеграл по объему трехмерной теории (4.90) примет такой же вид, как и соответствующий интеграл в балочной теории в полученном нами выражении после применения интегрирования по частям (4.88), то есть

$$(\tau_{ij,j} - \mu_{ijk,jk})\delta u_i \implies (\tau_{11,1} - \mu_{111,11} - \mu_{113,13})\delta u_1$$

Проводя аналогичную подстановку в поверхностный интеграл в (4.90), получим, что условия на торцах балки в выражении (4.88), фактически, являются выражением трехмерных граничных условий для нормальной компоненты вектора напряжений и для вектора градиентных напряжений на этих поверхностях ($x = 0, L$, $\mathbf{n} = \{\pm 1, 0, 0\}$, $i = 1$):

$$((\tau_{1j} - \mu_{1jk,k})n_j - (\mu_{1jk}n_k)_{,j} + (\mu_{1jk}n_k n_l)_{,l}n_j)\delta u_1 \implies (\tau_{11} - \mu_{111,1} - \mu_{113,3})\delta u_1$$

$$\mu_{1jk}n_j n_k \delta(u_{1,l}n_l) \implies \mu_{111}\delta u_{1,1}$$

Два последних члена в выражении для энергии в балочной теории (4.88) оказываются выражением трехмерных граничных условий для касательной компоненты вектора напряжений на верхней и нижней поверхностях балки и выражением трехмерных условий для градиентных напряжений на ребрах, соответственно. Чтобы показать это, в поверхностном интеграле в трехмерной постановке используем $z = \pm h$, $\mathbf{n} = \{0, 0, \pm 1\}$, $i = 1$ и получим:

$$((\tau_{13} - \mu_{13k,k}) - \underline{\mu_{1j3,j}} + \mu_{133,3})\delta u_1 = 0 \implies \mu_{113,1}\delta u_1 = 0 \quad (4.91)$$

где подчеркнуто слагаемое, присутствие которого дает единственный ненулевой член в этом граничном условии при использовании гипотез Бернулли-Эйлера. Именно этот член и возникает в записи вариации энергии деформаций в балочной модели (4.88).

Для условия на кромках торцевых поверхностей балки учтем, что эти ребра имеют координаты $x = 0, L \cup z = \pm h$, и они образованы поверхностями с нормальными $\mathbf{n} = \{\pm 1, 0, 0\}$ и $\mathbf{n} = \{0, 0, \pm 1\}$. Вектор ко-нормали к данному ребру будет всегда направлен по нормали к этому ребру и по касательной к поверхности, границей которой это ребро является. Поэтому для ребер с нормалью вдоль оси x ко-нормаль будет иметь ненулевую компоненту m_3 , а для ребер с нормалью вдоль оси z ненулевое значение будет у m_1 . Тогда из условия, соответствую-

ющего $i = 1$ (то есть выражение для виртуальной работы усилий действующих на ребрах в направлении оси x), получим следующее соответствие между трехмерной и балочной формулировками:

$$[[\mu_{1jk}m_jn_k]]\delta u_1 = 0 \implies \mu_{113}\delta u_1 = 0 \quad (4.92)$$

Остальные, не упомянутые выше граничные условия в трехмерной формулировке (4.90), удовлетворяются тождественно в рамках гипотез Бернулли-Эйлера. Таким образом, имеет место полное соответствие между этой трехмерной формулировкой (4.90) и полученным выражением для энергии деформаций балки (4.88). При этом условия, постулированные в (4.89), являются выражением трехмерных граничных условий, которые предписывают отсутствие нагрузок, действующих в тангенсальном направлении на верхней и нижней поверхностях балки (4.91), и отсутствие нагрузок, заданных на ребрах балки (4.92). Поэтому учитывая эти дополнительные требования трехмерной градиентной теории, а также, учитывая что компоненты тензора градиентных напряжений μ_{113} не зависят от координаты $x_3 = z$, получим, что вид энергии деформаций в "обобщенной" балочной теории (4.88) сводится к соответствующему "одноосному" варианту:

$$\begin{aligned} \delta U &= -b \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11,1} - \mu_{111,11} - \cancel{\mu_{113,13}}) \delta u_1 dz dx \\ &+ b \int_{-h}^h ((\tau_{11} - \mu_{111,1} - \cancel{\mu_{113,3}})\delta u_1 + \mu_{111}\delta u_{1,1}) \Big|_{x=0}^{x=L} dz \\ &- b \int_0^L (\mu_{113,1}\delta u_1) \Big|_{z=-h}^{z=h} dx + \cancel{((\mu_{113}\delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=L}) \Big|_{z=-h}^{z=h}} \quad (4.93) \\ \implies \delta U &= -b \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11,1} - \mu_{111,11}) \delta u_1 dz dx \\ &+ b \int_{-h}^h [(\tau_{11} - \mu_{111,1})\delta u_1 + \mu_{111}\delta u_{1,1}]_{x=0}^{x=L} dz \end{aligned}$$

Дальнейшая подстановка гипотезы $u_1 = -z\partial w/\partial x$ и определений для τ_{11} , μ_{111} (4.3), (4.6) в выражение (4.93) приводит к формулировке "одноосной" балочной теории с соответствующими уравнениями равновесия (4.15), граничными условиями (4.16) и с классическим определением изгибающего момента $M = b \int_{-h}^h z\tau_{11} dz = -EIw''$.

Результаты, представленные в данной главе диссертации были опубликованы в работах [107, 176]. Возможность применения "одноосной" теории для получения уточненных решений для задач с балками, нагруженными сосредоточенными силами, была показана в работе [50], а для описания кажущихся характеристик балок с сетчатой структурой – в работе [251].

4.2 Прогноз эффективных характеристик и уровня концентрации напряжений в композиционных материалах с учетом размера включений

В данном разделе представлены новые решения для задач о сферическом и цилиндрическом включении в ГТУ. Проведен анализ влияния методов осреднения на прогнозируемые эффективные упругие свойства композитов в ГТУ. Исследован характер влияния размерных эффектов на концентрацию деформаций и напряжений вблизи включений, что является основой для оценки прочности композиционных материалов. На основе математической аналогии с градиентной теорией гидродинамики предложены новые решения для прогноза свойств нано-жидкостей.

4.2.1 Композит со сферическими включениями

Решение задачи о сферическом включении на основе построения тензора Эшелби и реализации прямой схемы осреднения в рамках метода Мори-Танака было представлено для ГТУ в работах [15, 94]. В данном разделе решение будет построено на основе другого подхода – энергетического в рамках обобщенного самосогласованного метода (метода трех фаз). Этот метод использовался ранее в ГТУ с определяющими соотношениями градиентной теории межфазного слоя в работах С.А. Лурье, Д.Б. Волкова-Богородского и др. [14, 226], где он был реализован в декартовой системе координат с применением так называемого метода радиальных множителей. В данном разделе задача о включении решается в сферической системе координат с использованием записанного представления общего решения ГТУ через сферические гармоники (3.3)-(3.5). Используется общая формулировка ГТУ с учетом особенностей граничных условий, в которых, в частности, учитывается кривизна поверхности включения.

Для реализации метода трех фаз необходимо рассмотреть вариант геометрии представительного фрагмента дисперсно-армированного композиционного материала, представленного на рис. 18. Здесь в центре фрагмента находится сферическое включение (фаза 1) радиусом R_1 , вокруг которого располагается сферический слой матрицы, внешний радиус которого составляет R_2 , а толщина – $R_2 - R_1$. Такое составное включение погружено в бесконечную среду с эффективными свойствами. Значения этих эффективных свойств необходимо найти из решения задачи. Будем считать, что известным является размер включений R_1 и их объемное содержание c . Значение внешнего радиуса для слоя матрицы определяется тогда соотношением $R_2 = R_1/\sqrt[3]{c}$. Все фазы считаем изотропными и их свойства описываем в рамках ГТУ, то есть с учетом вклада градиентов деформаций в плотность энергии деформаций. Для эффективной среды предполагаем классическую модель изотропной теории упругости, и ее свойства определяются двумя модулями, например, эффективным объемным модулем и эффективным модулем сдвига. Вообще говоря, можно было бы и для эффективной среды предполагать градиентную модель и в качестве эффективных характеристик определять и модули упругости, и эффективные градиентные модули (или эффективные масштабные

параметры), как это было сделано, например в [180]. Однако в данном случае будем рассматривать задачу определения только классических характеристик упругости и прочности (текучести) наполненных композитов. Для вычисления эффективных модулей упругости будем использовать стандартный подход, при котором отдельно рассматривается задача всесторонних деформаций для определения эффективного объемного модуля и затем задача чистого сдвига для определения эффективного модуля сдвига.

Эффективный объемный модуль

Рассматриваем случай гидростатического нагружения. Считаем, что соответствующие условия однородных деформаций всестороннего растяжения или сжатия ε_{kk}^0 (однородной дилатации) предписаны на бесконечности в фазе эффективной среды. Вследствие сферической симметрии задачи, решение сводится к определению радиальной компоненты перемещений и нормальных напряжений, действующих в направлении радиальной координаты. Таким образом, задача является одномерной и, вообще говоря, может быть решена без привлечения представления решения в форме (3.3)-(3.5), однако, будем его использовать для демонстрации общего подхода.

Классическая часть общего решения рассматриваемой проблемы известна и может быть представлена в сферической системе координат в следующем виде [99]:

$$\mathbf{u}_{clas} = \{Ar + Br^{-2}, 0, 0\} \quad (4.94)$$

Для того чтобы определить градиентную часть общего решения для рассматриваемой задачи достаточно использовать только первые члены в рядах (3.5), предполагая что все остальные члены домножаются на нулевые коэффициенты для выполнения заданных граничных условий. Тогда скалярные потенциалы в представлении решения принимают следующий вид:

$$\phi_k^{(s)} = A_{0,0}^{(k,s)} j_0(ir/l_k) + B_{0,0}^{(k,s)} y_0(ir/l_k) \quad (4.95)$$

Подставляя (4.95) в (3.4) получим, что векторные функции $\mathbf{M}_k, \mathbf{N}_k$ (поперечные составля-

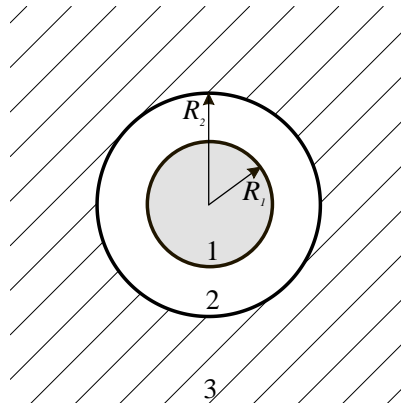


Рис. 18: Иллюстрация к обобщенному самосогласованному методу осреднения. Трехфазная модель композита со сферическими включениями; 1 – включение, 2 – матрица, 3 – эффективная среда

ющие потенциалов) равны нулю, а представление Папковича-Нейбера записывается только через продольную компоненту $\Psi_k = \mathbf{L}_k$. Тогда, используя (3.3), получим следующую запись для градиентной части решения:

$$\mathbf{u}_{grad} = \left\{ r^{-2}((A_{0,0}^{(1,1)}l_1 - iB_{0,0}^{(1,1)}r) \sinh(r/l_1) - (A_{0,0}^{(1,1)}r - iB_{0,0}^{(1,1)}l_1) \cosh(r/l_1)), 0, 0 \right\} \quad (4.96)$$

Общее решение для радиальной компоненты вектора перемещений является суммой соответствующих компонент классической (4.94) и градиентной (4.96) частей решения. Переобозначая константы $C = (A_{0,0}^{(1,1)} + iB_{0,0}^{(1,1)})/2$ и $D = iB_{0,0}^{(1,1)}$, получим:

$$u_r = Ar + Br^{-2} + Cr^{-2}(l_1 \sinh(r/l_1) - r \cosh(r/l_1)) + Dr^{-2}(l_1 + r)e^{-r/l_1} \quad (4.97)$$

где слагаемые при константах A и C стремятся к нулю в начале координат $r = 0$, а два остальных члена при коэффициентах B и D стремятся к нулю на бесконечности $r \rightarrow \infty$.

Таким образом, требуя ограниченность решения в центре включения и на бесконечности в эффективной среде, а также учитывая требование однородного поля деформаций на бесконечности, получим следующий вид решения для функции перемещений во включении (индекс 1), в матрице (индекс 2) и в эффективной среде (индекс 3):

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= A_1 r + C_1 l_1^{(1)} (\sinh \bar{r} - \bar{r} \cosh \bar{r}) r^{-2} \\ u_r^{(2)} &= A_2 r + B_2 r^{-2} + C_2 l_1^{(2)} (\sinh \bar{r} - \bar{r} \cosh \bar{r}) r^{-2} + D_2 l_1^{(2)} (1 + \bar{r}) e^{-\bar{r}} r^{-2} \\ u_r^{(3)} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^0 r + B_3 r^{-2} \end{aligned} \quad (4.98)$$

где предполагается, что эффективная среда является классической и, следовательно, градиентные части решения в ней не учитываются; во включении же и в матрице материал характеризуется масштабными параметрами $l_1^{(1)}$ и $l_1^{(2)}$ – это масштабные параметры материала включения и матрицы, соответственно, и нормированное значение радиальной координаты определяется внутри фаз выражением: $\bar{r} = r/l_1^{(k)}$, ($k = 1, 2$).

Неизвестные константы $A_1, A_2, B_2, B_3, C_1, C_2, D_2$ в (4.98) должны определяться из условий контакта на границах включение/матрица и матрица/эффективная среда. Эти условия предписывают непрерывность значений перемещений и их нормальных градиентов, а также нормальной компоненты вектора напряжений и градиентных напряжений. Соответствующие условия (2.12) в задаче со сферической симметрией записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} r = R_1 : \quad & u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad \varepsilon_{rr}^{(1)} = \varepsilon_{rr}^{(2)}, \quad t_r^{(1)} = t_r^{(2)}, \quad \mu_{rrr}^{(1)} = \mu_{rrr}^{(2)}, \\ r = R_2 : \quad & u_r^{(2)} = u_r^{(3)}, \quad t_r^{(2)} = \tau_{rr}^{(3)}, \quad \mu_{rrr}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (4.99)$$

где вектор напряжений определяется с учетом постановки ГТУ в сферической системе координат (раздел 2.4) следующим образом:

$$t_r^{(k)} = \tau_{rr}^{(k)} - \frac{\partial \mu_{rrr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2}{r} (3\mu_{r\theta\theta}^{(k)} + \mu_{\theta\theta r}^{(k)}), \quad (k = 1, 2)$$

и входящие в это выражение компоненты тензоров напряжений должны вычисляться на основании соотношений (2.54).

Заметим, что в выражении (4.99) учтено, что градиентные напряжения не возникают в классической эффективной среде. Как следствие, условия контакта на границе матрица/эффективная среда $r = R_2$ записываются в виде $\mu_{rrr}^{(2)} = 0$ и $t_r^{(2)} = t_r^{(3)} = \tau_{rr}^{(3)}$. Использование этого "статического" условия для напряжений связано с требованием выполнения условий глобального равновесия во всей рассматриваемой области, и оно не может быть проигнорировано. Напротив, соответствующее условие для нормальных градиентов от перемещений (то есть деформаций вдоль радиуса) необходимо записывать только на границе матрицы и включения, для которых градиентные эффекты учитываются. А вот решение в классической эффективной среде не может быть использовано для выполнения такого рода условий – как и в классической задаче теории упругости на этой границе нормальная компонента деформаций будет терпеть разрыв. Если же, наоборот, потребовать непрерывность деформаций на границе $r = R_2$ и не использовать условие обнуления градиентных напряжений, то в решении возникнут некорректные эффекты. В частности, вычисляемый эффективный модуль упругости будет принимать значения вне вилки Фойгта-Рейсса. Одновременное выполнение указанных контактных условий невозможно в рассматриваемой постановке задачи – для этого в общем решении будет недостаточно констант. Это можно сделать, только если предположить, что эффективная среда, также как и фазы, обладает градиентными свойствами. В этом случае по результатам вычислений в задаче осреднения можно будет определять и значение эффективного масштабного параметра композита, что не рассматривается в диссертации.

Заметим, что система уравнений (4.99) включает в себя неизвестные модули упругости эффективной среды, которые входят в определение напряжений $\tau_{rr}^{(3)}$. Для вычисления этих модулей необходимо привлекать дополнительные условия. В рамках обобщенного самосогласованного метода таким условием является требование равенства энергии деформаций в рассматриваемом представительном фрагменте (рис. 18) и в соответствующей однородной бесконечной среде с эффективными свойствами в условиях аналогичного нагружения. Это условие удобно записать с использованием формулы Эшелби (3.47), которая позволяет вычислить разность между энергией деформаций однородной среды и среды, содержащей включение. В рамках рассматриваемого метода трех фаз таким включением является двухслойная сфера, состоящая из ядра-включения и оболочки-слоя матрицы (рис. 18). Для решения задачи осреднения необходимо требовать, что присутствие такого включения в бесконечной эффективной среде не должно изменять ее полную энергию деформаций, то есть $W - W_0 = 0$ (в классическом методе трех фаз рассуждения полностью аналогичны и они детально обсуждаются, например, в монографии [99]). Таким образом, на основании (3.47) получим следующее условие:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^0 - \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}) ds + \int_{\Sigma} (\mathbf{m}^0 \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u}^0) ds = 0 \quad (4.100)$$

где величины $\mathbf{t}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{m}^0, \partial_n \mathbf{u}^0$ должны вычисляться в однородной эффективной среде в условиях заданных однородных деформаций на бесконечности; а величины $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{m}, \partial_n \mathbf{u}$ должны быть найдены в аналогичной задаче, но для модели трех фаз (4.98), то есть для эффективной среды, содержащей включение (Рис. 18).

Интегрирование в выражении (4.100) удобно проводить, считая что поверхность Σ это есть граница между матрицей и эффективной средой, то есть $\Sigma = \Sigma_2 = \{r = R_2, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)\}$. В этом случае в формуле Эшелби (4.100) все величины могут быть определены на основе наиболее простого решения для классической третьей фазы, и само это соотношение в случае задачи со сферической симметрией может быть переписано в следующем виде:

$$\int_{\Sigma_2} (\tau_{rr}^{(3)} u_r^0 - \tau_{rr}^0 u_r^{(3)}) ds = 0 \quad (4.101)$$

Полученное соотношение (4.101) представляет собой классическую запись формулы Эшелби в обобщенном самосогласованном методе для задачи со сферической симметрией. Это является следствием предположения о классических свойствах эффективной среды (впервые это было показано в работах Волкова-Богородского Д.Б. и Лурье С.А. [14, 49]). Поэтому подстановка (4.98) в (4.101) и учет решения для задачи однородных деформаций в однородной эффективной среде $u_r^0 = \varepsilon_{kk}^0 r/3$, $\tau_{rr}^0 = K^* \varepsilon_{kk}^0$ приводит к классическому требованию обнуления константы $B_3 = 0$ в общем решении (4.98) для фазы эффективной среды (см. [99]). Это условие сводится к требованию, что в эффективной среде не возникает гиперболического члена r^{-2} . Также это приводит к тому, что в рассматриваемой задаче объемных деформаций возникает единственная неизвестная материальная константа – эффективной объемный модуль $K_3 = \lambda_3 + 2\mu_3/3 = K^*$. В результате решение задачи сводится к решению системы из семи линейных уравнений (4.99) относительно шести констант общего решения $A_1, A_2, B_2, C_1, C_2, D_2$ и эффективного модуля K^* . Замкнутое аналитическое решение для такой системы возможно, но оно достаточно громоздко в ГТУ (в отличие от классической микромеханики), и не приводится здесь. Примеры численных решений рассматриваемой задачи приведены ниже в данном разделе.

Эффективный модуль сдвига

Как и в классическом случае, в ГТУ определение эффективного модуля сдвига в рамках обобщенного самосогласованного метода, оказывается намного более сложной задачей, чем определение объемного модуля (в первую очередь, с точки зрения объема необходимых вычислений). В данном случае предполагается, что в эффективной среде на бесконечности задано однородное поле деформаций сдвига:

$$r \rightarrow \infty : \quad u_1^{(3)} = \gamma x_1, \quad u_2^{(3)} = -\gamma x_2, \quad u_3^{(3)} = 0 \quad (4.102)$$

где γ это заданные деформации сдвига в плоскости $x_1 x_2$, которые реализуются в данном случае на площадках, расположенных под углом 45 градусов к осям координат x_1 и x_2 .

Используя стандартные соотношения для компонент вектора перемещений в декартовой и сферической системах координат, на основании (4.102) получим:

$$r \rightarrow \infty : \quad u_r^{(3)} = \gamma r \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad u_\theta^{(3)} = \gamma r \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \quad u_\phi^{(3)} = -\gamma r \sin \theta \sin 2\phi \quad (4.103)$$

Классическая часть общего решения для рассматриваемой задачи чистого сдвига известно и имеет следующий вид [99]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{clas} = \left\{ \left(A r - \frac{3\lambda}{\mu} B r^3 + \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu} C r^{-2} + 3D r^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi, \right. \\ \left(A r - \frac{5\lambda + 7\mu}{\mu} B r^3 + 2C r^{-2} - 2D r^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\ \left. - \left(A r - \frac{5\lambda + 7\mu}{\mu} B r^3 + 2C r^{-2} - 2D r^{-4} \right) \sin \theta \sin 2\phi \right\} \end{aligned} \quad (4.104)$$

где λ и μ это классические константы Ламе.

Градиентная часть общего решения может быть получена на основании представления (3.5), в котором необходимо рассматривать члены с коэффициентами $(n, m) = (2, 2)$, а все остальные положить равными нулю (обнуляя соответствующие коэффициенты ряда) для выполнения граничных условий. Тогда получим, что скалярные потенциалы, через которые выражается решение, имеют вид:

$$\phi_k^{(s)} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \left(A_{2,2}^{(k,s)} j_2(i r/l_k) + B_{2,2}^{(k,s)} y_2(i r/l_k) \right) e^{2i\phi} \sin^2 \theta \quad (4.105)$$

Для соответствия четности/нечетности функций, входящих в общее решение (4.105), заданным условиям (4.103), необходимо также обнулить коэффициенты $A_{n,m}^{(k,2)} = B_{n,m}^{(k,2)} = 0$, то есть предположить, что соответствующий потенциал тождественно равен нулю $\varphi_k^{(2)} = 0$, как и трансверсальная составляющая решения $\mathbf{M}_k = 0$ в (3.4). Таким образом, векторные потенциалы Папковича-Нейбера будут содержать в себе продольную и единственную поперечную компоненты: $\Psi_k = \mathbf{L}_k + \mathbf{N}_k$. После подстановки (4.105) в (3.4), переобозначения констант и выполнения упрощающих преобразований можно получить следующую запись для градиентной части общего решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{grad} = \left\{ \sum_{k=1}^2 \left(E_k (R_{k1} \sinh(r/l_k) - R_{k2} \cosh(r/l_k)) + F_k R_{k3} e^{-r/l_k} \right) r^{-4} \sin^2 \theta \cos 2\phi, \right. \\ \sum_{k=1}^2 \left(E_k (R_{k4} \sinh(r/l_k) - R_{k5} \cosh(r/l_k)) + F_k R_{k6} e^{-r/l_k} \right) r^{-4} \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\ \left. - \sum_{k=1}^2 \left(E_k (R_{k4} \sinh(r/l_k) - R_{k5} \cosh(r/l_k)) + F_k R_{k6} e^{-r/l_k} \right) r^{-4} \sin \theta \sin 2\phi \right\} \end{aligned} \quad (4.106)$$

где E_k, F_k ($k = 1, 2$) это неизвестные константы, которые стоят перед членами общего решения, затухающими в начале координат $r = 0$ и на бесконечности $r \rightarrow \infty$, соответственно;

$R_{kn} = R_{kn}(r, l_k)$ это полиномиальные функции радиальной координаты, коэффициенты которых выражаются только через масштабные параметры материала:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= 4l_1r^2 + 9l_1^3, & R_{12} &= r^3 + 9l_1^2r, & R_{13} &= R_{11} + R_{12}, \\
R_{14} &= -2l_1r^2 - 6l_1^3, & R_{15} &= -6l_1^2r, & R_{16} &= R_{14} + R_{15}, \\
R_{21} &= -6l_2^2r^2 - 18l_2^4, & R_{22} &= -18l_2^3r, & R_{23} &= -R_{21} - R_{22}, \\
R_{24} &= 6l_2^2r^2 + 12l_2^4, & R_{25} &= 2l_2r^3 + 12l_2^3r, & R_{26} &= -R_{24} - R_{25},
\end{aligned} \tag{4.107}$$

где l_1, l_2 это значения масштабных параметров, которые входят в уравнения равновесия рассматриваемого варианта градиентной теории упругости (см. (2.58) и таблицу 1).

Общее решение для перемещений в модели трех фаз может быть представлено, как сумма классической и градиентной частей (4.104) и (4.106). Обеспечивая ограниченность решения в начале координат и на бесконечности, получим следующие перемещения в фазе включения, матрицы и эффективной среды:

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= \left(A_1 r - \frac{3\lambda_1}{\mu_1} B_1 r^3 + \sum_{k=1}^2 (E_{1k}(R_{k1} \sinh \bar{r}_k - R_{k2} \cosh \bar{r}_k)) r^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi \\
u_\theta^{(1)} &= \left(A_1 r - \frac{5\lambda_1 + 7\mu_1}{\mu_1} B_1 r^3 + \sum_{k=1}^2 (E_{1k}(R_{k4} \sinh \bar{r}_k - R_{k5} \cosh \bar{r}_k)) r^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\
u_r^{(2)} &= \left(A_2 r - \frac{3\lambda_2}{\mu_2} B_2 r^3 + \frac{3\lambda_2 + 5\mu_2}{\mu_2} C_2 r^{-2} + 3D_2 r^{-4} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^2 (E_{2k}(R_{k1} \sinh \bar{r}_k - R_{k2} \cosh \bar{r}_k) + F_{2k} R_{k3} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi, \\
u_\theta^{(2)} &= \left(A_2 r - \frac{5\lambda_2 + 7\mu_2}{\mu_2} B_2 r^3 + 2C_2 r^{-2} - 2D_2 r^{-4} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^2 (E_{2k}(R_{k4} \sinh \bar{r}_k - R_{k5} \cosh \bar{r}_k) + F_{2k} R_{k6} e^{-\bar{r}_k}) r^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \\
u_r^{(3)} &= \left(\gamma r + \frac{3\lambda_3 + 5\mu_3}{\mu_3} C_3 r^{-2} + 3D_3 r^{-4} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi, \\
u_\theta^{(3)} &= \left(\gamma r + 2C_3 r^{-2} - 2D_3 r^{-4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi
\end{aligned} \tag{4.108}$$

где нормированные значения радиальной координаты вычисляются внутри соответствующей n -ой фазы, как $\bar{r}_k = r/l_k^{(n)}$ и перемещения в азимутальном направлении определяются согласно выражению $u_\phi^{(n)} = -u_\theta^{(n)} \tan 2\phi / \cos \theta$, ($n = 1, 2, 3$).

В решении (4.108) присутствует 14 неизвестных констант: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_2, C_3, D_2, D_3, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, F_{21}, F_{22}$. Эти константы необходимо определять на основании условий контакта на границах включение/матрица и матрица/эффективная матрица. В случае задачи чистого сдвига все компоненты классических и градиентных напряжений оказываются ненулевыми и для решения задачи необходимо использовать общий вид определений для вектора напряжений и вектора градиентных напряжений (2.13). В классической задаче условия на контакте фаз сводятся к требованию непрерывности компонент вектора напря-

жений $t_r = \tau_{rr}$, $t_\theta = \tau_{r\theta}$, $t_\phi = \tau_{r\phi}$ и вектора перемещений u_r , u_θ , u_ϕ . Среди этих 6-и условий, только 4 являются независимыми. В градиентной теории непрерывность также предписывается для градиентных напряжений и нормальных градиентов от перемещений. Общее число независимых условий в градиентной теории оказывается равным 14. Это следующие условия:

$$\begin{aligned}
r = R_1 : \quad & u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \quad \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial u_\theta^{(2)}}{\partial r}, \\
& t_r^{(1)} = t_r^{(2)}, \quad t_\theta^{(1)} = t_\theta^{(2)}, \quad \mu_{rrr}^{(1)} = \mu_{rrr}^{(2)}, \quad \mu_{\theta rr}^{(1)} = \mu_{\theta rr}^{(2)}, \\
r = R_2 : \quad & u_r^{(2)} = u_r^{(3)}, \quad u_\theta^{(2)} = u_\theta^{(3)}, \\
& t_r^{(2)} = \tau_{rr}^{(3)}, \quad t_\theta^{(2)} = \tau_{\theta r}^{(3)}, \quad \mu_{rrr}^{(2)} = 0, \quad \mu_{\theta rr}^{(2)} = 0,
\end{aligned} \tag{4.109}$$

где выражения для компонент вектора напряжений определяются в соответствии с (2.56) в сферической системе координат и в компонентной записи имеют вид:

$$\begin{aligned}
t_r^{(k)} &= \tau_{rr}^{(k)} - \frac{\partial \mu_{rrr}^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu_{rr\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \mu_{rr\phi}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mu_{r\phi r}^{(k)}}{\partial \phi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(3\mu_{r\phi\phi}^{(k)} + \mu_{\phi\phi r}^{(k)} + 3\mu_{r\theta\theta}^{(k)} + \mu_{\theta\theta r}^{(k)} - \mu_{rr\theta}^{(k)} \cot \theta \right) \\
t_\theta^{(k)} &= \tau_{\theta r}^{(k)} - \frac{\partial \mu_{\theta rr}^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu_{\theta r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \mu_{\theta r\phi}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mu_{\theta\phi r}^{(k)}}{\partial \phi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(2\mu_{\theta\theta\theta}^{(k)} + 2\mu_{\theta\phi\phi}^{(k)} - \mu_{rr\theta}^{(k)} + \cot \theta (\mu_{r\phi\phi}^{(k)} + \mu_{\phi\phi r}^{(k)} - \mu_{r\theta\theta}^{(k)} - \mu_{\theta\theta r}^{(k)}) \right)
\end{aligned}$$

Аналогично задаче всесторонних деформаций, в записанных условиях (4.109), учтено, что на границе матрицы и классической эффективной среды $r = R_2$ необходимо требовать равенство нулю градиентных напряжений со стороны фазы матрицы. Дополнительный учет непрерывности для градиентов перемещений может быть реализован только в предположении градиентной модели для эффективной среды, что в данном случае не рассматривается и соответствующие условия исключены из (4.109).

Для определения эффективного модуля сдвига $\mu_3 = \mu^*$, который входит в условия (4.109) через определение классических напряжений $\tau_{rr}^{(3)}$ и $\tau_{r\theta}^{(3)}$, необходимо использовать формулу Эшелби (3.47). Аналогично задаче со сферической симметрией, в задаче чистого сдвига общая запись формулы Эшелби в ГТУ (3.47) может быть сведена к классическому при проведении соответствующего интегрирования по поверхности Σ_2 , разделяющей матрицу и эффективную матрицу, и учитывая классическую модель упругости для эффективной среды:

$$\int_{\Sigma_2} (\tau_{rr}^{(3)} u_r^0 + \tau_{r\theta}^{(3)} u_\theta^0 + \tau_{r\phi}^{(3)} u_\phi^0 - \tau_{rr}^0 u_r^{(3)} - \tau_{r\theta}^0 u_\theta^{(3)} - \tau_{r\phi}^0 u_\phi^{(3)}) ds = 0 \tag{4.110}$$

Как следствие, записанное условие (4.110) обеспечивает выполнение классического условия задачи микромеханики в модели трех фаз: гиперболический член r^{-2} в фазе эффективной среды исключается, так как выражение (4.110) требует равенства нулю соответству-

ющего коэффициента $C_3 = 0$ в (4.108). Таким образом, имеем 14 уравнений в контактных условиях (4.109) для определения 13 констант в представлении общего решения (4.108). Четырнадцатой неизвестной, определяемой из решения задачи является эффективный модуль сдвига μ^* . Более того, модуль сдвига μ^* является единственной эффективной константой, которая возникает в решении рассматриваемой системы. Поэтому, как и в классической микромеханике задачи всесторонних деформаций и чистого сдвига оказываются несвязанными друг с другом, то есть эффективный модуль сдвига μ^* определяется независимым образом от эффективного объемного модуля K^* и наоборот.

Примеры вычислений и сравнение с численным моделированием

Рассмотрим пример дисперсно-армированного композита на основе эпоксидной матрицы, наполненной частицами керамики оксида алюминия (корунда). Модуль Юнга и коэффициент Пуассона включений равны $E_1 = 320$ ГПа, $\nu=0.2$, соответствующие характеристики матрицы: $E_2 = 2.5$ ГПа, $\nu_2 = 0.35$. Материалы изотропные и их модули сдвига и объемные модули могут быть пересчитаны и имеют следующие значения $\mu_1 = 133$ ГПа, $K_1 = 178$ ГПа и $\mu_2 = 0.92$ ГПа, $K_2 = 2.77$ ГПа. Будем предполагать, что масштабные параметры фаз равны $l^{(1)} = l^{(2)} = l$ и изменяются в диапазоне от $R_1/l = 2$ (малоразмерные включения и наиболее сильные градиентные эффекты) до $R_1/l = 100$ (крупные включения и незначительные градиентные эффекты, решение близкое к классическому). Радиус включений будем считать равным $R_1 = 1$ мкм.

Примеры расчетов будут представлены для определяющих соотношений упрощенной ГТУ (2.34) и симметричной ГТУ (2.37). Решение для упрощенной ГТУ сопоставим с численными конечно-элементным моделированием в COMSOL, построенным в модуле General Form PDE (см. раздел 3.5.1). В численном моделировании будем рассматривать два варианта представительных фрагментов. В первом случае рассматриваем фрагмент с кубической симметрией, содержащей единственное включение (Рис. 19а). Решение для распределения полей перемещений, напряжений т.д. в таком фрагменте удобнее сопоставить с аналитическим решением в задаче сферического включения, представленным выше. Во втором случае будем рассматривать представительный фрагмент композита с кубической гранецентрированной упаковкой (Рис. 19б), которая позволяет моделировать высоконаполненные материалы с содержанием включений до $c_{max} \approx 0.74$. Такой вариант моделей будем использовать для оценки эффективных упругих свойств композитов. Область, занятая представительным фрагментом в обоих случаях следующая: $\Omega = \{x_1 \in [-D/2, D/2], x_2 \in [-D/2, D/2], x_3 \in [-D/2, D/2]\}$. На противоположных сторонах этой области используются периодические граничные условия, которые в ГТУ должны быть записаны относительно перемещений, деформаций, полных напряжений и градиентных напряжений [97]. В расчетах используются тетраэдрические и гексагональные элементы с аппроксимацией второго порядка. Количество элементов в КЭ модели составляет до $2 \cdot 10^4$, а количество степеней свободы (с учетом промежуточных переменных для понижения порядка уравнений) до $6 \cdot 10^5$.

Далее проведем сопоставление аналитического и численного решений для полей переме-

щений, деформаций и напряжений в рассматриваемых задачах. Это сопоставление дается для определяющих соотношений упрощенной ГТУ, и оно необходимо для подтверждения корректной реализации обоих применяемых методов (получаем одно и то же решение разными методами). При этом надо учитывать, что рассматриваемые решения построены для представительных фрагментов разной формы – кубической в МКЭ и сферической в аналитике. Более того, в решениях разными являются предположения о влиянии окружающего материала на представительный фрагмент. В аналитическом решении в рамках обобщенного самосогласованного метода используется бесконечная третья фаза с эффективными свойствами, а в численном решении ставятся периодические граничные условия. Тем не менее характер концентрации напряжений и деформаций вблизи включений, особенно в случае не слишком больших объемных содержаний, должен быть аналогичным в обеих моделях, так как они соответствуют одному и тому же композиционному материалу. Для сопоставления рассмотрен случай объемного содержания включений $c = 0.02$. При этом размер представительного фрагмента в аналитическом решении составляет $R_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ (радиус двухслойной сферы при единичном радиусе ядра-включения), а в численном кубическая ячейка имеет размер грани $R_2^{FE} = D/2 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6c}} \approx 0.8R_2$.

Сопоставление решений для задачи всесторонних деформаций представлено на рисунке 20. Здесь представлено распределение переменных модели в радиальном направлении $x_1 = r$, $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$. Представленные решения найдены для заданного уровня средних деформаций изменения объема $\langle \varepsilon_{kk} \rangle / 3 = \varepsilon_{kk}^0 / 3 = 0.01$. На рис.20б можно видеть, что этот уровень деформаций реализуется на удалении от включения. В аналитическом решении эта область относится к третьей фазе (эффективной среде) и соответствует задаваемому виду решения в этой фазе (4.98). В целом представленные решения хорошо согласуются даже в случае достаточно интенсивных градиентных эффектов, который соответствует случаю малого относительного размера включений R_1/l . Возникающие отличия решений связаны с различием формы представительных фрагментов и заданных граничных условий. Так, в численном решении деформации в матрице не затухают до заданного среднего уровня, так как область расчета ограничена размером фрагмента, в отличие от бесконечной расчетной области в аналитическом решении. Характер изменения градиентных напряжений оказывается почти

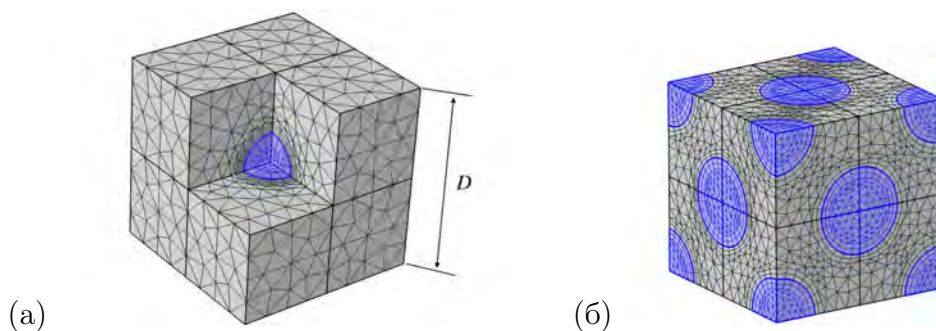


Рис. 19: Представительные фрагменты дисперсно-армированного композита, использованные в численном моделировании, (а) фрагмент, содержащий единственное включение (кубическая упаковка частиц), (б) фрагмент с гранецентрированной кубической упаковкой включений

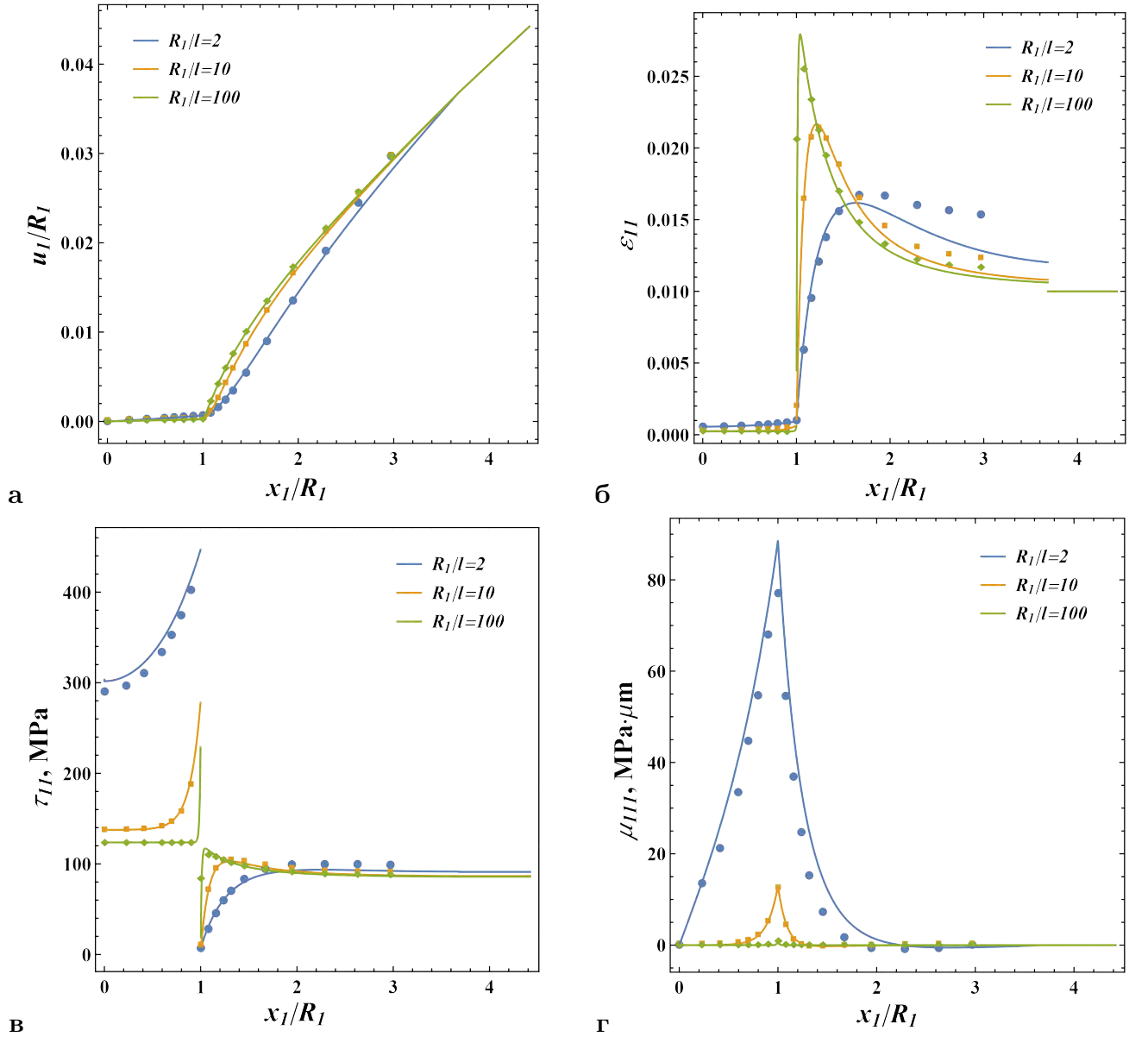


Рис. 20: Сопоставление аналитического решения (линии) и конечно-элементного моделирования (точки) в задаче всесторонних деформаций для различных относительных размеров включения R_1/l ; **а:** нормированные значения радиальных перемещений u_1/R_1 , **б:** нормальные радиальные деформации ε_{11} , **в:** Нормальные классические напряжения τ_{11} , **г:** градиентные напряжения μ_{111} . Объемное содержание включений $c = 0.02$. Распределение построенных величин дано вдоль направления $r = x_1$, $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ в сферической системе координат в аналитическом решении и вдоль оси x_1 в декартовой системе координат. Граничные условия в аналитическом решении определены выражением (4.98), которое предписывает значение однородных деформаций на бесконечности $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk}^0/3 = 0.01$. В КЭ решении использованы граничные условия вида: $x_1 = \pm D/2 : u_1 = \pm 0.01D/2$, $x_2 = \pm D/2 : u_2 = \pm 0.01D/2$, $x_3 = \pm D/2 : u_3 = \pm 0.01D/2$ и периодические граничные условия для остальных переменных модели, которые должны определяться на соответствующих гранях фрагмента

одинаковым в обоих решениях (Рис. 20г). Реализуется концентрация этих напряжений вблизи границы контакта включений и матрицы, и при удалении от границы эти напряжения затухают, что соответствует требованию классических свойств в фазе эффективной среды в аналитическом решении и принципу Сен-Венана в численном.

Сопоставление решений для задачи чистого сдвига представлено на рис. 21. Задаваемые условия нагружения (4.102) обеспечивают состояние чистого сдвига в эквивалентной однородной среде под углом ± 45 градусов к осям x_1, x_2 ($\phi = \pm \pi/4$), поэтому для наглядности на рис. 21 решения представлены в декартовой системе координат, повернутой на 45 градусов вокруг оси x_3 (соответствующие оси этой системы координат обозначен как $x'_1 x'_2 x_3$, при этом ось x'_1 определена направлением $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/4$). Аналитическое решение, построенное в сферической системе координат, предварительно преобразовывалось к декартовой системе на основе стандартных правил тензорного анализа. Задаваемое значение средних деформаций сдвига составляло $\langle \varepsilon_{11} \rangle = -\langle \varepsilon_{22} \rangle = \gamma = 0.01$, таким образом, в системе координат $x'_1 x'_2 x_3$ деформации сдвига составляют $\varepsilon_{1'2'} = 1\%$. Это видно, в частности, в результатах аналитического решения (рис. 21а, г). На представленных рисунках специально использован одинаковый масштаб для изображения представительных фрагментов – размер включений в них одинаковый, а внешний размер отличается, как это было описано выше. Тем не менее видно, что имеет место качественная и количественная согласованность аналитического и численного решений, хотя совпадение и не настолько точное, как это было в случае центрально-симметричной задачи. Можно отметить следующие особенности представленных на рис. 21 решений. В случае крупных включений максимум деформаций реализуется вблизи включений (рис. 21а), при этом, как известно, в классическом решении этот максимум находится точно на границе контакта матрицы и включения, где деформации в фазах терпят разрыв. В градиентном решении максимум деформаций реализуется вдали от включений (рис. 21г). При этом деформации непрерывным образом изменяются при переходе через межфазную границу, и деформации в матрице вблизи включения имеют тот же порядок, что и деформации внутри включения. Таким образом возникает эффект "межфазного слоя" (или boundary layer effect, как его чаще называют в англоязычной литературе). Вблизи включений возникает стесненное состояние фазы матрицы со сниженным уровнем деформаций [13, 95]. Эта зона межфазного слоя отображается на рис. 21г как область голубого цвета вокруг включения, как в аналитическом, так и в численном решениях.

Внутри включений возникает неоднородное поле деформаций и классических напряжений. Возмущения (неоднородность) этого поля оказываются очень малы в случае крупных включений (рис. 21а, б), что соответствует случаю, близкому к классической теории упругости. Однако в случае малых включений и деформации, и напряжения неравномерно изменяются по объему включения – их уровень повышается вблизи межфазной границы и превышает классические оценки (рис. 21г, д). Градиентные напряжения имеют почти нулевые значения в случае крупных включений (рис. 21в), однако для малых включений на рис. 21е хорошо виден характер возникающей концентрации градиентных напряжений, распределение которых отражает и тип внешнего нагружения с характерной симметрией относительно

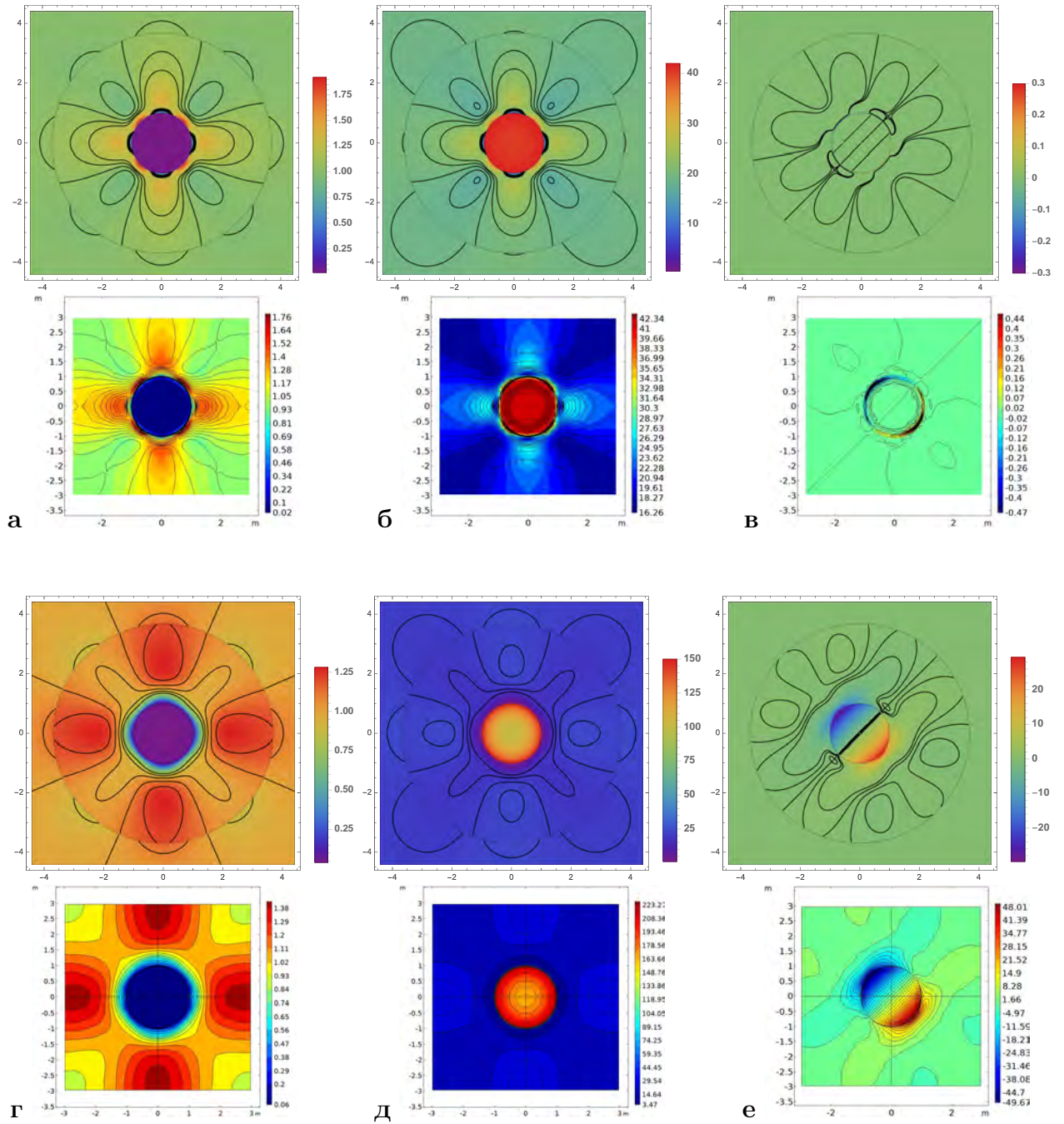


Рис. 21: Сопоставление аналитического решения, полученного в Wolfram Mathematica (верхние рисунки), и численного решения, полученного в Comsol (нижние рисунки), для задачи чистого сдвига. Представлено распределение переменных модели в плоскости $x_3 = 0$ ($\theta = \pi/2$) в повернутой системе координат $x'_1 x'_2 x_3$ (где $x'_1 : \theta = \pi/2, \phi = \pi/4$). Объемное содержание включений $c = 0.02$.

а: $\varepsilon_{1'2'}$ [%], $R_1/l = 100$, **б:** $\tau_{1'2'}$ [МПа], $R_1/l = 100$, **в:** $\mu_{1'2'1'}$ [МПа·мкм], $R_1/l = 100$,
г: $\varepsilon_{1'2'}$ [%], $R_1/l = 2$, **д:** $\tau_{1'2'}$ [МПа], $R_1/l = 2$, **е:** $\mu_{1'2'1'}$ [МПа·мкм], $R_1/l = 2$

направления под углом 45 градусов к осям исходной системы координат.

На основе полученных результатов мы можем сделать вывод, что для случая малоразмерных наполнителей модель сферического включения в рамках ГТУ прогнозирует более интенсивную передачу нагрузки от матрицы к включениям. Это является причиной повышения эффективных упругих характеристик наполненных композитов, содержащих малоразмерные включения. Также изменяется характер концентрации напряжений и деформаций в фазе матрицы, что может определять и уровень "эффективной" прочности композиционного материала. В случае снижения средних и максимальных деформаций в матрице происходит ее "разгрузка" и, следовательно, прочность композита растет. Этот эффект обсуждается далее в данном разделе.

Сопоставление упрощенных моделей ГТУ

Сопоставим решения, которые могут быть получены в рамках упрощенной ГТУ (2.34) и полностью симметричной ГТУ (2.37). Последняя предписывает более строгие требования к структуре тензора градиентных напряжений, в котором должны выполняться условия по произвольной перестановке индексов вида $\mu_{ijk} = \mu_{jik} = \mu_{ikj}$. Пример решения для полностью симметричной теории для задачи сдвига представлен на рис. 22. Это решение можно сравнить с аналогичным для упрощенной ГТУ, представленным на рис. 21г-е. Здесь видно, что в симметричной теории реализуется более гладкое изменение деформаций, особенно на границе матрица/эффективная среда, и их уровень в матрице ниже, чем в упрощенной теории. В то же время, концентрация напряжений внутри включений значительно повышается. С точки зрения макроскопических свойств композита, это означает, что в симметричной теории реализуются более высокие эффективные свойства. Значительное различие между решениями реализуется и в отношении градиентных напряжений. Для симметричной ГТУ решение для равных друг другу компонент $\mu_{1'2'1'} = \mu_{1'1'2'}$ показано на рис 22в. Уровень этих напряжений оказывается в два раза выше по сравнению с компонентой $\mu_{1'2'1'}$ в упрощенной ГТУ (рис. 21е). Более того, компонента $\mu_{1'1'2'}$ в упрощенной ГТУ имеет принципиально иное распределение и не удовлетворяет условию $\mu_{1'2'1'} = \mu_{1'1'2'}$ (см. рис. 23).

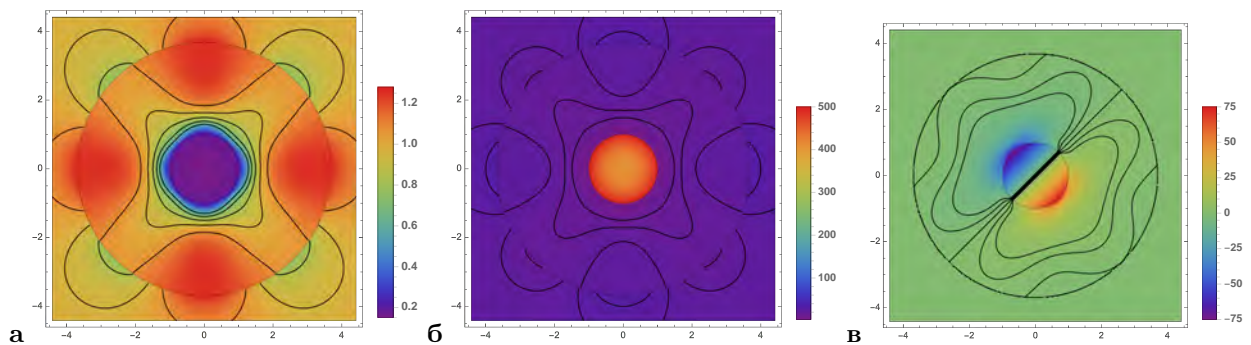


Рис. 22: Аналитическое решение для задачи сдвига в рамках полностью симметричной ГТУ. Рисунки представлены в плоскости $x_3 = 0$ ($\theta = \pi/2$) в системе координат $x'_1 x'_2 x_3$ ($x'_1 : \theta = \pi/2, \phi = \pi/4$). Объемное содержание включений $c = 0.02$, относительный размер включений $R_1/l = 2$. **a:** $\varepsilon_{1'2'}$ [%], **b:** $\tau_{1'2'}$ [MPa], **c:** $\mu_{1'2'1'} = \mu_{1'1'2'}$ [MPa· μm]

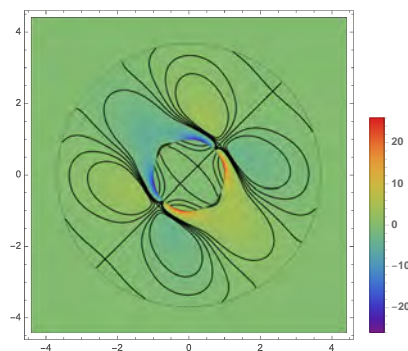


Рис. 23: Аналитическое решение для градиентных напряжений $\mu_{1'1'2'}$ [МПа·мкм], полученное в упрощенной ГТУ

Эффективные свойства и параметры концентрации

Рассмотрим теперь прогнозируемые значения эффективных модулей упругости дисперсно-армированного композита для различных объемных содержаний и размеров включений. Эти зависимости показаны на рис. 24а. Здесь показаны аналитические решения, полученные в рамках обобщенного согласованного метода с определяющими соотношениями упрощенной ГТУ (2.34) и симметричной ГТУ (2.37). Численное решение найдено для упрощенной ГТУ для представительного фрагмента, показанного на рис. 19б. В численном моделировании решалась задача с предписанными периодическими граничными условиями со средней дилатацией $\langle \varepsilon_{kk} \rangle / 3 = \varepsilon_{kk}^0 / 3 = 0.01$ и средними деформациями сдвига $\langle \varepsilon_{12} \rangle = \gamma / 2 = 0.01$. Эффективные модули упругости в численном решении определялись на основе соотношений $K^* = \langle \tau_{11} \rangle / \varepsilon_{kk}^0$ и $\mu^* = \langle \tau_{12} \rangle / \gamma$, где $\langle \tau_{11} \rangle$ и $\langle \tau_{12} \rangle$ – это средние классические напряжения, определенные в представительном фрагменте по результатам численного моделирования для заданных условий нагружения.

Здесь важно отметить, что в численном решении реализован прямой подход к определению эффективных свойств. Проводится непосредственное осреднение переменных модели по объему представительного фрагмента, а эффективные материальные константы определяются как отношение соответствующих средних значений компонент классического тензора напряжений и тензора деформаций. При этом здесь не вводится тензор концентрации напряжений, то есть задача не сводится к оценке напряженного состояния внутри включения (как это делается в классических подходах, основанных на использовании решения задачи Эшелби, и как это делается в подходе, предложенном в ГТУ в работах Ма, Гао [15, 94]). Осреднение в численном моделировании проводится по всему представительному фрагменту. Поэтому фактически реализуется условие, при котором энергетические и прямые методы должны совпадать (как это было показано в разделе 3.3 данной диссертации). И действительно, результаты расчетов показывают хорошую согласованность двух рассмотренных методов – прямого численного и энергетического аналитического. Это видно на рис. 24, где показана зависимость прогнозируемых эффективных упругих характеристик от объемного содержания включений.

На рисунке 24 можно видеть, что модели ГТУ прогнозируют положительный масштабный эффект для эффективных модулей упругости композита. Уменьшение размера вклю-

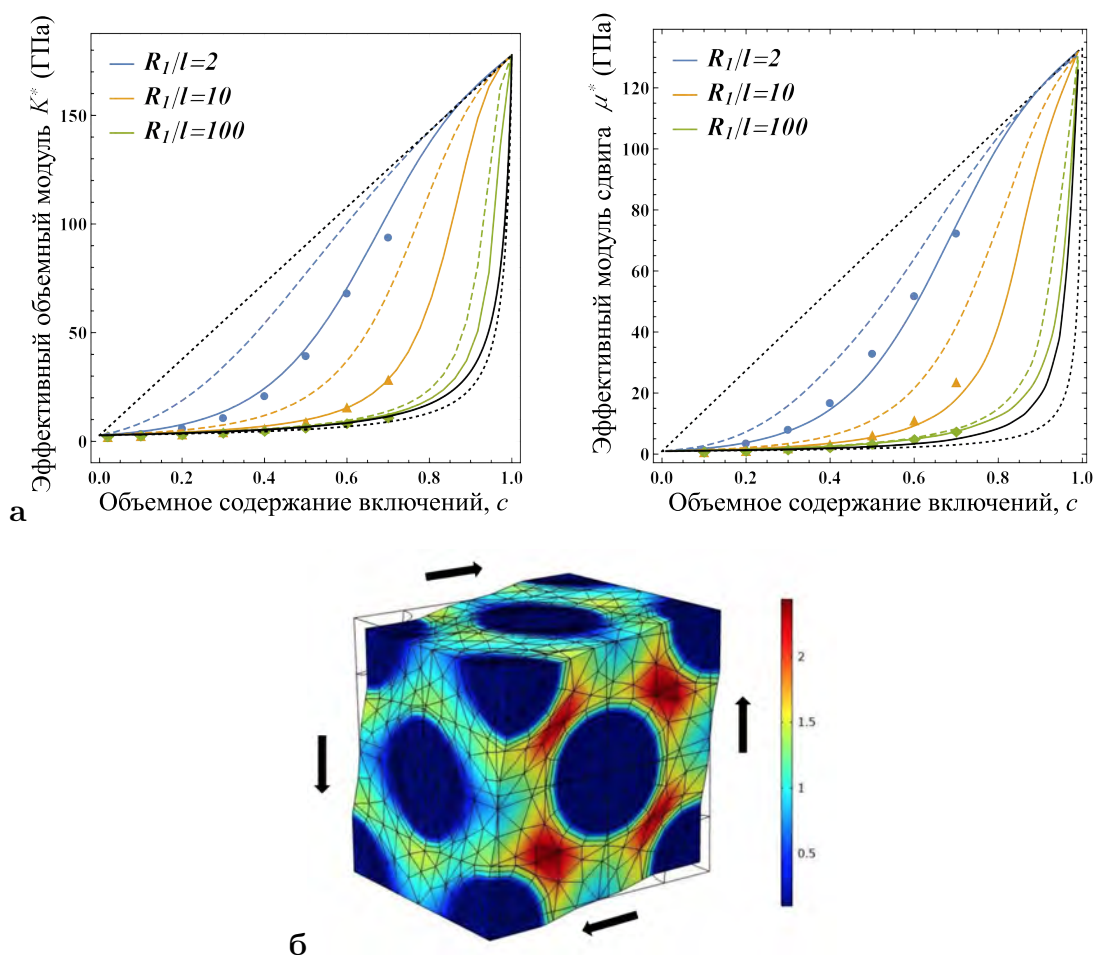


Рис. 24: **а** – Зависимость эффективных модулей упругости от объемного содержания и размера включений. Сплошные линии – аналитическое решение, упрощенная ГТУ. Штриховые линии – аналитическое решение, симметричная ГТУ. Точки – численное решение, упрощенная ГТУ. Черная линия – классическое решение ($R_1/l \rightarrow \infty$). Черный пунктир – вилка Фойгта-Рейсса. **б** – Пример распределения деформаций сдвига ε_{12} [%] в представительном фрагменте, найденное в численном моделировании для заданных периодических граничных условий и условий для перемещений вида: $x_1 = \pm D/2 : u_2 = \pm 0.01D/4, \quad x_2 = \pm D/2 : u_1 = \pm 0.01D/4, \quad x_3 = \pm D/2 : u_3 = 0$.

чений приводит к повышению жесткости материала вследствие увеличения относительной объемной доли, которую занимают возникающие в материале "межфазные зоны" [13, 15]. Тем не менее найденные эффективные модули упругости в ГТУ всегда находятся внутри вилки Фойгта-Рейсса, которая остается справедливой и в случае градиентных теорий. Это объясняется достаточно просто на основе следующих рассуждений. В классическом вариационном подходе для получения верхней оценки (решение Фойгта) и нижней оценки (решение Рейсса) для эффективных модулей упругости композитов используется предположение о реализации однородного поля деформаций и однородного поля напряжений в фазах композита, соответственно. Обобщая это предположение на случай материалов, описываемых в рамках ГТУ, получим, что в случае реализации однородных деформаций или напряжений в фазах композита, все градиентные эффекты в них должны исчезать. Таким образом, эти предельные случаи, соответствующие решениям Фойгта и Рейсса в классической теории,

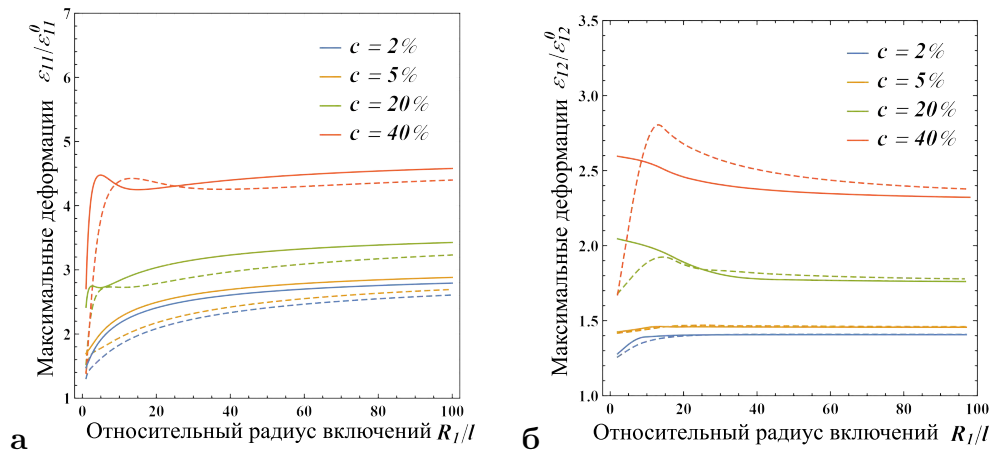


Рис. 25: Зависимость нормированных значений максимальных деформаций в фазе матрицы от объемного содержания и размера включений, найденные на основе аналитического решения. Сплошные линии – упрощенная ГТУ, штриховые линии – симметричная ГТУ; **а** – задача всесторонних деформаций, **б** – задача чистого сдвига.

оказываются допустимыми и также предельными и в градиентной теории, при этом они соответствуют нулевому значению градиентной части энергии деформаций. Поэтому рассуждения, проводимые в классической микромеханике при построении вилки Фойгта-Рейсса остаются полностью аналогичными и в ГТУ, а сама эта вилка ограничивает допустимое изменение эффективных свойств композита с учетом влияния размера включений, который возникает как дополнительный параметр в решениях ГТУ.

Как и было указано выше, эффективные модули упругости, прогнозируемые упрощенной ГТУ, оказываются ниже соответствующих значений в симметричной ГТУ вследствие более интенсивных градиентных эффектов, возникающих в симметричной теории. Вычисленные численные значения для эффективных характеристик оказываются достаточно близки к аналитическому решению в широком диапазоне объемных содержаний и размеров включений, даже несмотря на различный тип представительных фрагментов, использованных в этих решениях. Пример деформированного состояния такого фрагмента в численном решении в условиях сдвига показан на Рис. 24б.

На рисунке 25 показан пример зависимости концентрации деформаций в фазе матрицы от размера и объемного содержания включений. Здесь представлено нормированное значение компоненты тензора деформаций ε_{11} относительно заданного среднего уровня деформаций. Показано, что уровень деформаций в матрице немонотонным образом зависит от размера включений. В случае малых объемных содержаний включений малого размера уровень деформаций в матрице оказывается ниже, чем предсказывает классическая теория, справедливая для крупных включений. Однако, для достаточно больших объемных содержаний $c > 0.2$, можно видеть, что для некоторого диапазона размера включений ($R_1/l \in [1, 20]$) уровень концентрации деформаций в матрице в градиентной модели может быть выше, чем в классическом решении (зеленая и красная линии на рис. 25). Таким образом, если говорить о прогнозе прочности композита, например, на основе критерия максимальных деформаций в матрице, то можно прогнозировать рост прочности при использовании малоразмерных

включений, однако, их объемное содержание не должно быть слишком большим, так как в противном случае уровень концентрации деформаций в матрице может оказаться таким же или даже выше, по сравнению со случаем использования крупных включений. Соответствующие эффекты наблюдались в экспериментах с полимерными дисперсными композитами, например, в работе [307].

Сопоставление прогнозов для эффективных модулей упругости, полученных в рамках реализованного обобщенного самосогласованного метода и численного моделирования с известными ранее решениями для эффективных свойств композитов со сферическими включениями, полученными в рамках метода Мори-Танака, показано на рис. 26. Само решение, полученное по методу Мори-Танака, как и в классической микромеханике, обладает несомненным достоинством, связанным с компактной аналитической записью. Это решение было построено введением осредненного тензора Эшелби и соответствующего осредненного тензора концентрации деформаций в рамках реализации прямого метода осреднения в упрощенной ГТУ авторами Ма и Гао в работе [15]. Эффективный объемный модуль и модуль сдвига композита в этом решении выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} K^* &= K_2 \left(1 + \frac{c(K_1 - K_2)}{K_2 + (1 - c)S_s(K_1 - K_2)} \right), \\ \mu^* &= \mu_2 \left(1 + \frac{c(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2 + (1 - c)S_p(\mu_1 - \mu_2)} \right), \\ S_s &= \frac{1 + \nu_2}{3(1 - \nu_2)} \left(1 + \frac{3}{2}\bar{R}_1^{-3} \left(1 - \bar{R}_1^2 - (1 + \bar{R}_1)^2 e^{-2\bar{R}_1} \right) \right), \\ S_p &= \frac{8 - 10\nu_2}{15(1 - \nu_2)} \left(1 + \frac{3}{2}\bar{R}_1^{-3} \left(1 - \bar{R}_1^2 - (1 + \bar{R}_1)^2 e^{-2\bar{R}_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

где $\bar{R}_1 = R_1/l$.

На представленных рисунках 26 видно, что прогнозы по методу Мори-Танака значительно отклоняются от двух других рассмотренных методов. Эффективные свойства в этом методе оказываются ниже, чем в других, причем, особенно сильно это снижение проявляется для больших объемных содержаний ($c > 0.2$) включений малого размера ($R_1/l < 10$). Прогнозируемые значения модулей упругости в этом случае могут отличаться в 2..10 раз. Здесь важно отметить, что результаты численного моделирования, в данном случае, можно считать некоторым эталонным приближением, в котором учитывается взаимодействие между соседними включениями в структуре материала. Как видим, аналитический обобщенный самосогласованный метод позволяет более точно приблизиться к описанию таких эффектов, по сравнению с методом Мори-Танака.

Пример сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными представлен на рис. 27. Экспериментальные данные взяты из работы [308], в которой было исследование влияние размера наполнителей в виде стеклянных микросфер диаметром 4...100 мкм на модуль упругости композитов с различными полимерными матрицами. В частности, был рассмотрен вариант матриц на основе полистирена ($E = 3.4$ ГПа, $\nu = 0.34$), поликарбоната ($E = 2.15$ ГПа, $\nu = 0.38$) и полипропилена ($E = 1.5$ ГПа, $\nu = 0.42$). Свойства стеклянных

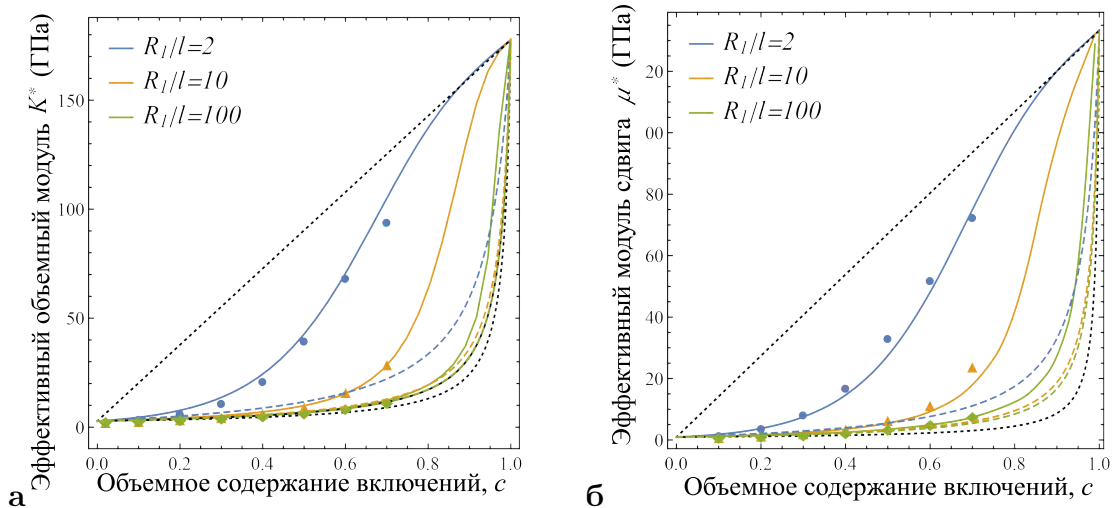


Рис. 26: Сопоставление прогнозируемых значений эффективных модулей упругости композитов со сферическими включениями, вычисленных на основе разных методов осреднения в упрощенной ГТУ. Сплошные линии – обобщенный самосогласованный метод, штриховые линии – метод Мори-Танака, точки – численное моделирование. Черный пунктир – вилка Фойгта-Рейсса.

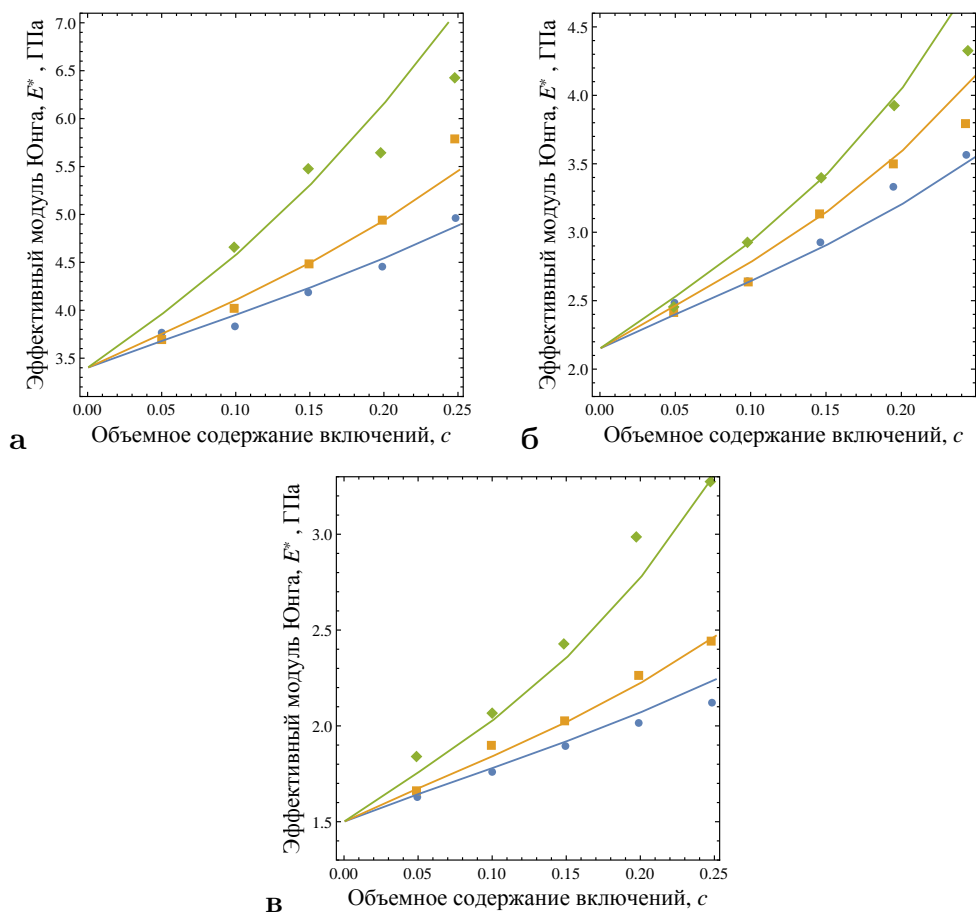


Рис. 27: Моделирование экспериментальных данных по влиянию объемного содержания и размера включений на эффективный модуль упругости наполненных композитов с матрицей на основе полистирена (а), поликарбоната (б) и полипропилена (в). Точки – экспериментальные данные, линии – моделирование на основе построенного аналитического решения. Диаметр включений: 4 мкм (зеленый цвет), 30 мкм (оранжевый цвет), 100 мкм (синий цвет).

частиц составляли $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.22$. На рис. 27 показана зависимость модуля Юнга композитов от объемного содержания и размера частиц наполнителя, найденная в экспериментах и на основе расчетов в рамках реализованного аналитического обобщенного самосогласованного метода. Для обработки экспериментальных данных были подобраны значения масштабных параметров модели (в рамках упрощенной ГТУ), таким образом, чтобы прогнозируемые значения модулей упругости примерно совпадали с экспериментальными. Эти масштабные параметры составили $l = 1.85$ мкм для полистирена, $l = 2.18$ мкм для поликарбоната, $l = 1.23$ мкм для полипропилена. На представленном рисунке видно, что эти значения масштабных параметров позволяют с достаточно хорошей точностью описать экспериментальные данные. Интересно также отметить, что зависимость модулей упругости от размера включений наблюдалась в экспериментах только в случае хорошей адгезии наполнителей к матрице. После обработки наполнителей с целью снижения сил адгезии, зависимость свойств от размера включений не возникала [309].

Результаты, представленные в данном разделе диссертации были опубликованы в работе [175].

4.2.2 Композит с цилиндрическими включениями. Антиплоское нагружение

4.2.2.1. Эффективные свойства

Далее рассмотрим задачу о цилиндрическом включении, то есть модель композита, армированного протяженными прямолинейными волокнами. Для описания свойств таких композитов в рамках обобщенного самосогласованного метода (или численного моделирования) необходимо решать четыре отдельных задачи, из которых определяются пять эффективных характеристик упругости эффективной трансверсально изотропной среды [99]. В частности, должны решаться задачи о растяжении вдоль оси цилиндра (для определения модуля упругости вдоль волокон и соответствующего коэффициента Пуассона), о растяжении поперек волокон (для определения поперечного модуля упругости), о сдвиге поперек волокон (для определения модуля сдвига поперек армирования) и сдвиге вдоль волокон (задача антиплоского сдвига для определения продольного модуля сдвига). В данной диссертации в качестве иллюстрации градиентных эффектов в волокнистых композитах рассмотрено только решение задачи о сдвиге вдоль волокон, которое оказывается наиболее компактным, и оно обобщено также и на случай волокон с эллиптическим поперечным сечением.

Можно отметить, что для продольного модуля упругости волокнистых композитов, вообще говоря, с очень высокой точностью работает классическое решение Фойгта. Это решение получено в приближении представления об однородном поле деформаций во включениях и в матрице, и его обобщение в рамках трехмерной классической теории упругости (с поправкой на эффект Пуассона) дает очень небольшие поправки. Применение же градиентных моделей для оценки продольного модуля упругости дает поправки еще более высокого порядка и поэтому не является целесообразным. Для прогноза поперечных модуля Юнга и модуля сдвига градиентные модели могут давать существенные уточнения [48]. Решение соответствующей задачи может быть построено на основе аналогичного метода, который был реализован в предыдущей главе. Для этого необходимо записать представление общего решения (3.3), но уже в цилиндрической системе координат через функции Бесселя и тригонометрические функции. Затем потребуется записать все граничные условия градиентной теории в цилиндрической системе координат с использованием соответствующих символов Кристоффеля и соотношений (2.51)-(2.57). После этого остается только провести численные вычисления и определить константы общего решения из системы граничных и контактных условий. Таким образом, задача о поперечном нагружении фрагмента с цилиндрическим включением становится технической, и она оставлена для будущей работы.

На примере задачи об антиплоском сдвиге интересным представляется сопоставить еще раз реализуемые методы осреднения и подтвердить для другой геометрии включений сделанное утверждение о том, что применение энергетических методов осреднения позволяет снизить погрешности вычислений эффективных свойств в градиентных теориях. Кроме этого, эта задача также в аналитическом виде легко обобщается на случай пьезоэлектрических материалов, что будет показано в следующем разделе диссертации.

Для построения решения предположим, что в материале присутствуют только перемещения в направлении оси x_3 , и они являются функцией от координат x_1, x_2 , то есть $u_1 = 0$,

$u_1 = 0, u_3 = w(x_1, x_2)$. Тогда ненулевые компоненты тензора деформаций определяются выражениями:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{Bmatrix} = \nabla w \quad (4.112)$$

где $\nabla = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\}$ это двумерный оператор набла.

Ненулевые значения классических и градиентных напряжений могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{32} \end{Bmatrix} = G \nabla w \quad (4.113)$$

$$\begin{Bmatrix} \mu_{311} & \mu_{312} \\ \mu_{321} & \mu_{322} \end{Bmatrix} = l^2 G \nabla \nabla w \quad (4.114)$$

где $G = C_{44}$ – это модуль сдвига материала, l – масштабный параметр ГТУ.

Единственное остающееся нетривиальным уравнение равновесия ГТУ для задачи анти-плоского сдвига ($\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0, \sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$) в отсутствии объемной нагрузки может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta w - l^2 \Delta \Delta w = 0 \quad (4.115)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ – это двумерный оператор Лапласа.

Рассматривая задачу о цилиндрическом включении (см. рис. 28), решение задачи удобно строить в цилиндрических координатах $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. В этом случае условие однородных средних деформаций сдвига на бесконечности сводится к виду функции перемещений $w_0 = 2\gamma_0 x = 2\gamma_0 r \cos \theta$, а общее решение уравнения равновесия (4.115) следует представить с учетом соответствующей периодичности и четности по угловой координате в следующем виде:

$$w(r, \theta) = \left(ar + \frac{b}{r} + c I_1\left(\frac{r}{l}\right) + d K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right) \cos \theta \quad (4.116)$$

где a, b, c, d – это неизвестные константы, а $I_1(r), K_1(r)$ – это модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, соответственно.

Далее, на основе рассматриваемой задачи о цилиндрическом включении определим эффективный модуль сдвига волокнистого композита при сдвиге вдоль волокон. Как и в предыдущем разделе в задаче сферического включения, будем предполагать, что эффективная среда является классической и, следовательно, общее решение в этой среде необходимо записывать, обнуляя соответствующие константы общего решения (c, d в решении (4.116)). Для сопоставления будем использовать два метода осреднения – Мори-Танака и обобщенный самосогласованный метод. Для первого метода решение является известным – оно было получено Гао и Ма в работе [15], в которой тензор концентрации деформаций был выражен через осредненные компоненты тензора Эшелби и затем использован в стандартных соотношениях прямого подхода к определению эффективных свойств вида (3.56). В данной диссертации это же решение получено без привлечения задачи Эшелби, непосредственным осреднением

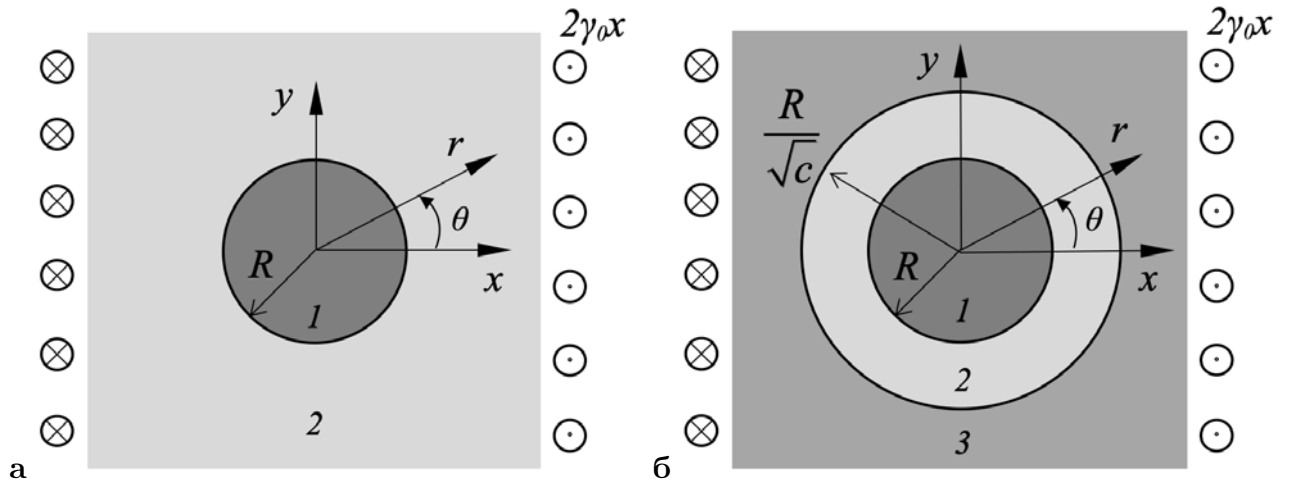


Рис. 28: К задаче антиплоского сдвига композита с цилиндрическими включениями, **а**: вспомогательная задача об изолированном включении, используемая в методе Мори-Танака, **б**: представительный фрагмент трехфазной модели в обобщенном самосогласованном методе. 1 – включение, 2 – матрица, 3 – эффективная среда.

тензора концентрации деформаций по объему включения. Получаемые решения при этом совпадают. Новым же является полученное решение для модуля сдвига, найденное на основе обобщенного самосогласованного метода в рассматриваемых вариантах ГТУ, а также проводимое сопоставление методов осреднения друг с другом и с численным моделированием.

В начале рассматриваем решение в рамках метода Мори-Танака. Этот метод основан на следующем представлении тензора эффективных модулей упругости композита \mathbf{C}^* , через объемное содержание включений c , свойства включения \mathbf{C}_1 и свойства матрицы \mathbf{C}_2 :

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_2 + c(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)\mathbf{T}((1 - c)\mathbf{I} + c\mathbf{T})^{-1} \quad (4.117)$$

где \mathbf{T} – это тензор концентрации деформаций, определяемый из вспомогательной задачи об изолированном включении в бесконечной матрице (рис. 28а), этот тензор связывает деформации внутри включения $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ с однородными деформациями, задаваемыми на бесконечности $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, то есть $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

В рамках нотации Фойгта выражение (4.117) можно рассматривать как матричное с соответствующим представлением для тензоров модулей упругости и концентрации в виде матриц 6×6 . Однако для задачи антиплоского сдвига матричное выражение (4.117) сводится к более простому алгебраическому виду при вычислении эффективного модуля сдвига композита, образованного изотропными фазами:

$$G^* = \frac{G_2(1 - c) + G_1cT}{1 - c + cT} \quad (4.118)$$

где G_1, G_2 – это модули сдвига матрицы и включения, соответственно, и T – это единственная компонента тензора концентрации \mathbf{T} , которая возникает в рассматриваемой задаче.

В рамках классической теории упругости задача об изолированном включении легко решается. Концентрация деформаций внутри включения определяется выражением $T = \frac{2G_2}{G_1 + G_2}$,

а выражение (4.118) сводится к следующему известному решению для эффективного модуля сдвига, которое приводится во многих монографиях и часто используется в прикладных расчетах:

$$G^* = G_2 \frac{G_1(1+c) + G_2(1-c)}{G_1(1-c) + G_2(1+c)} \quad (4.119)$$

В градиентной теории упругости компонента тензора концентрации T перестает быть константой, но становится функцией координат. Для определения этой функции построим решение для задачи изолированного включения (рис. 28а). Радиус включения равен R , а в окружающей матрице на бесконечности заданы однородные деформации сдвига, так что перемещения в этой фазе должны стремиться к выражению $w_0 = 2\gamma_0 r \cos \theta$. Общий вид решения в фазах следующий:

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(a_1 r + c_1 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right) \cos \theta \\ w_2 &= \left(2\gamma_0 r + \frac{b_2}{r} + d_2 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (4.120)$$

где учтено условие ограниченности решения внутри включения и заданные условия по перемещениям на бесконечности в матрице.

Выражения для деформаций и напряжений следуют из соотношений (4.112), (4.113), в которых для цилиндрической системы координат имеет место соответствие $31 \rightarrow zr$, $32 \rightarrow z\theta$. Условия непрерывности решения на границе контакта включения и матрицы $r = R$ записываются в следующем виде [104, 154]:

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad \sigma_{zr}^{(1)} = \sigma_{zr}^{(2)}, \quad \mu_{zrr}^{(1)} = \mu_{zrr}^{(2)}, \quad (4.121)$$

где верхний индекс в скобках обозначает номер фазы, и выражения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_{zr}^{(i)} = G_i \frac{\partial}{\partial r} (w_i - l^2 \Delta w_i), \quad \mu_{zrr}^{(i)} = l^2 G_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}, \quad (i = 1, 2)$$

Использование четырех уравнений (4.121) позволяет найти четыре константы, присутствующие в решении (4.120). Решение этой системы можно найти в замкнутом аналитическом виде. Для дальнейших вычислений представляет интерес получение аналитического выражения для функции концентрации деформаций внутри включения, причем для ее осредненного значения:

$$\bar{T} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R T(r, \theta) r dr d\theta \quad (4.122)$$

После построения решения для системы контактных условий (4.121) и записи выражений для функций перемещений (4.122), функция концентрации $T(r, \theta)$ определяется как отношение фактического значения деформаций сдвига $\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial r}$ (4.112) к деформациям, заданными на бесконечности. Так как поле деформаций внутри включения в ГТУ оказывается неоднородным, то и функция концентрации зависит от координат и не является константой (как в классическом решении). Осредняя эту функцию по объему включения (4.122),

получим:

$$\bar{T} = \frac{g_1 I_1(\bar{R}) K_0(\bar{R}) + (g_2 + g_3 I_1(\bar{R})) K_1(\bar{R}) + I_0(\bar{R}) (g_4 K_0(\bar{R}) + g_5 K_1(\bar{R}))}{I_1(\bar{R}) (g_6 K_0(\bar{R}) + g_7 K_1(\bar{R})) + I_0(\bar{R}) (g_8 K_0(\bar{R}) + g_9 K_1(\bar{R}))}, \quad (4.123)$$

где $\bar{R} = R/\ell$ и введены обозначения:

$$\begin{aligned} g_1 &= 8G_2(2(G_1 - G_2)\ell^2 + G_1 R^2)R \\ g_2 &= 16G_2(G_1 - G_2)\ell^2 R, \\ g_3 &= 8G_2(G_1 - G_2)(2\ell^2 + 3R^2)\ell \\ g_4 &= -8G_2(G_1 - G_2)\ell R^2 \\ g_5 &= -8G_2(3(G_1 - G_2)\ell^2 - G_2 R^2)R \\ g_6 &= 4(G_1 + G_2)(2(G_1 - G_2)\ell^2 + G_1 R^2)R \\ g_7 &= 8G_2(G_1 - G_2)(2\ell^2 + R^2)\ell \\ g_8 &= -4(G_1 - G_2)(G_1 + G_2)\ell R^2 \\ g_9 &= -4G_2(2(G_1 - G_2)\ell^2 - (G_1 + G_2)R^2)R \end{aligned} \quad (4.124)$$

Использование значения осредненной концентрации \bar{T} в классическом выражении для эффективного модуля сдвига (4.118) позволяет получить оценку влияния размерных и градиентных эффектов. Очевидно, что эта оценка является приближенной, так как проводимое осреднение, вообще говоря, приводит к потере точности решения. В предыдущем разделе это было показано для случая сферических включений. В данном разделе это будет показано для цилиндрического включения, для которого более точное решение может быть получено на основе энергетического подхода и обобщенного самосогласованного метода. Для этого рассмотрим модель трех фаз (рис. 28б). Общее решение для перемещений в этом методе представляем в виде:

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(a_1 r + c_1 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right) \cos \theta \\ w_2 &= \left(a_2 r + \frac{b_2}{r} + c_2 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + d_2 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right) \cos \theta \\ w_3 &= \left(2\gamma_0 r + \frac{b_3}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (4.125)$$

где в классической фазе эффективной среды используется только классическая часть решения.

Условия непрерывности должны быть записаны далее на границе включения и матрицы, а также матрицы и эффективной среды в следующем виде:

$$\begin{aligned} r = R : \quad w_1 &= w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad \sigma_{zr}^{(1)} = \sigma_{zr}^{(2)}, \quad \mu_{zrr}^{(1)} = \mu_{zrr}^{(2)}, \\ r = R/\sqrt{c} : \quad w_2 &= w_3, \quad \sigma_{zr}^{(2)} = \sigma_{zr}^{(3)}, \quad \mu_{zrr}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (4.126)$$

где учтено, что в классической фазе эффективной среды не возникают градиентные напряжения и не может быть обеспечена непрерывность деформаций на границе контакта (если в решении использовать соответствующее условие, то оценки для эффективных свойств будут выходить за вилку Фойгта-Рейса, что является не физическим в данном случае).

В результате, получаем семь уравнений (4.126) для определения семи констант в общем решении (4.125). Как и всегда в обобщенном самосогласованном методе, в выражениях для напряжений в (4.126) присутствует характеристика эффективной среды – эффективный модуль сдвига. Этот модуль является еще одной неизвестной, и поэтому необходимо привлекать дополнительное энергетическое соотношение для замыкания системы уравнений. Этим соотношением является формула Эшелби (3.47). В предположении, что разность энергии деформаций в трехфазном фрагменте (рис. 28б) и в эквивалентной однородной среде должна быть равна нулю, формула Эшелби может быть записана в рамках рассматриваемой антиплоской задачи на границе контакта эффективной среды и матрицы $r = R/\sqrt{c}$ в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_{rz}^{(3)} w_0 - \sigma_{rz}^{(0)} w_3) r d\theta = 0 \quad (4.127)$$

Это соотношение оказывается полностью классическим – перемещения и напряжения в фазе эффективной среды во фрагменте со включением имеют классическое представление, а перемещения и напряжения в эквивалентной однородной эффективной среде зависят только от граничных условий, задаваемых на бесконечности, и поэтому соответствуют классическому однородному полю деформаций. Таким образом, формула Эшелби, как и в задаче о сферическом включении, приводит к классическому результату, известному в микромеханике: гиперболический член в фазе эффективной среды не возникает [99]. То есть соответствующий коэффициент в общем решении должен быть обнулен ($b_3 = 0$ в (4.125)). Таким образом, система условий непрерывности (4.126) решения обеспечивает семь уравнений для нахождения шести констант общего решения и искомого значения модуля сдвига G^* . Решение этой системы является аналитическим, но достаточно громоздким. С точностью до вычисляемых значений констант общего решения, выражение для эффективного модуля сдвига композита может быть записано в следующем виде:

$$G^* = G_2 \frac{a_2 l \tilde{R} - b_2 / (l \tilde{R})}{l \tilde{R} - c_2 (\tilde{R} I_0(\tilde{R}) + I_1(\tilde{R})) + d_2 (\tilde{R} K_0(\tilde{R}) + K_1(\tilde{R}))} \quad (4.128)$$

где $\tilde{R} = R/(l\sqrt{c})$.

Далее проведем сопоставление решений, получаемых в рамках двух рассмотренных методов осреднения, и также сравним получаемые прогнозы для эффективного модуля сдвига с численным моделированием, реализованным в Comsol в интерфейсе General Form PDE. В качестве примера будем рассматривать композит с полимерной матрицей ($E_2 = 2$ ГПа, $\nu_2 = 0.35$), армированной стекловолокном ($E_1 = 20$ ГПа, $\nu_1 = 0.25$). Материалы фаз являются изотропными, и их модули сдвига имеют значения $G_1 = 8$ ГПа и $G_2 = 0.74$ ГПа. Значение

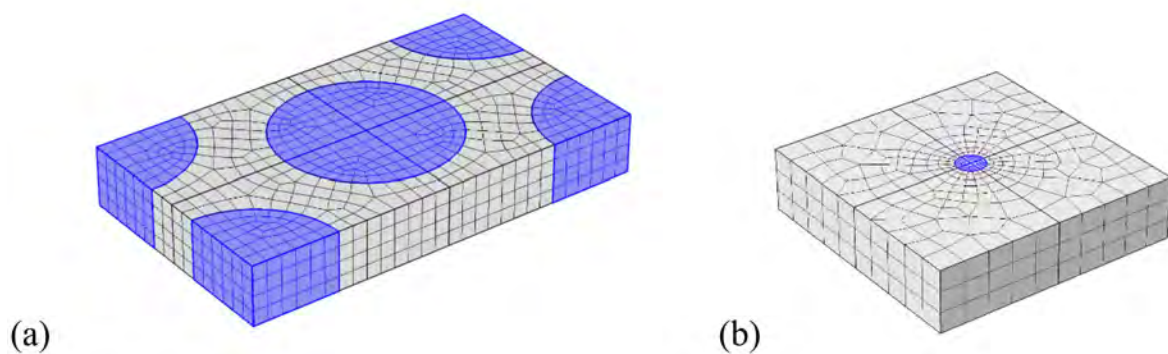


Рис. 29: Конечно-элементные модели представительных фрагментов композита с цилиндрическими включениями, а: модель с гексагональной упаковкой включений (~ 1800 элементов и $\sim 4 \cdot 10^5$ степеней свободы). (б): представительный фрагмент с единственным включением (~ 800 элементов и $\sim 1.65 \cdot 10^5$ степеней свободы).

масштабного параметра будем варьировать в диапазоне от $R/l = 1$ (волокна малого диаметра, значительные градиентные эффекты) до $R/l = 100$ (волокна большого диаметра и решение, близкое к классическому).

Численное моделирование проводится на представительных фрагментах, представленных на рис. 29. Для оценки эффективных свойств используем модель с гексагональной упаковкой включений, представленную на рис. 29а. Применение такой модели позволяет оценить эффективные свойства композитов с объемным содержанием волокон до 0.91. При построении фрагментов задавалось единичное значение радиуса включений, а значение масштабного параметра варьировалось. Размер фрагмента определялся с учетом задаваемого объемного содержания включений. В качестве граничных условий задавались относительные смещения противоположных граней фрагмента, нормали к которым параллельны оси 1. При этом сами смещения задавались в тангенсальном направлении на указанных плоскостях в направлении оси 3, таким образом, чтобы средние деформации во фрагменте составляли $\langle \varepsilon_{13} \rangle = \gamma_0/2$. Для остальных величин, присутствующих в кинематических и статических граничных условиях ГТУ, задавались условия периодичности. На основе численного решения задачи вычислялись значения классических напряжений $\langle \tau_{13} \rangle$. Эффективный модуль сдвига в численном решении определялся как отношение $G^* = \langle \tau_{13} \rangle / \gamma_0$.

Предварительно численное решение для распределения полей деформаций и напряжений вблизи одиночного включения было сопоставлено с аналитическим решением для задачи изолированного включения (рис. 28,б). Это сопоставление проводится для верификации численного решения. При достаточно большом размере фрагмента (малом объемном содержании включений) численное решение должно совпадать с аналитическим решением, которое построено для бесконечной среды. Такое сопоставление проводилось для фрагмента, представленного на рис. 29,б. Объемное содержание фазы включения в этом фрагменте составляло 1%. Задаваемый уровень деформаций составлял $\gamma_0 = 0.01$. Результаты сопоставления решений представлены на рис. 30, 31. Аналитическое решение для перемещений найдено на основе решения (4.125)-(4.127). На рисунке 30 показано распределение деформаций ε_{13} (4.112), напряжений τ_{13} (4.113) и градиентных напряжений μ_{311} (4.114) вдоль оси x_1 ($\theta = 0$). Получена

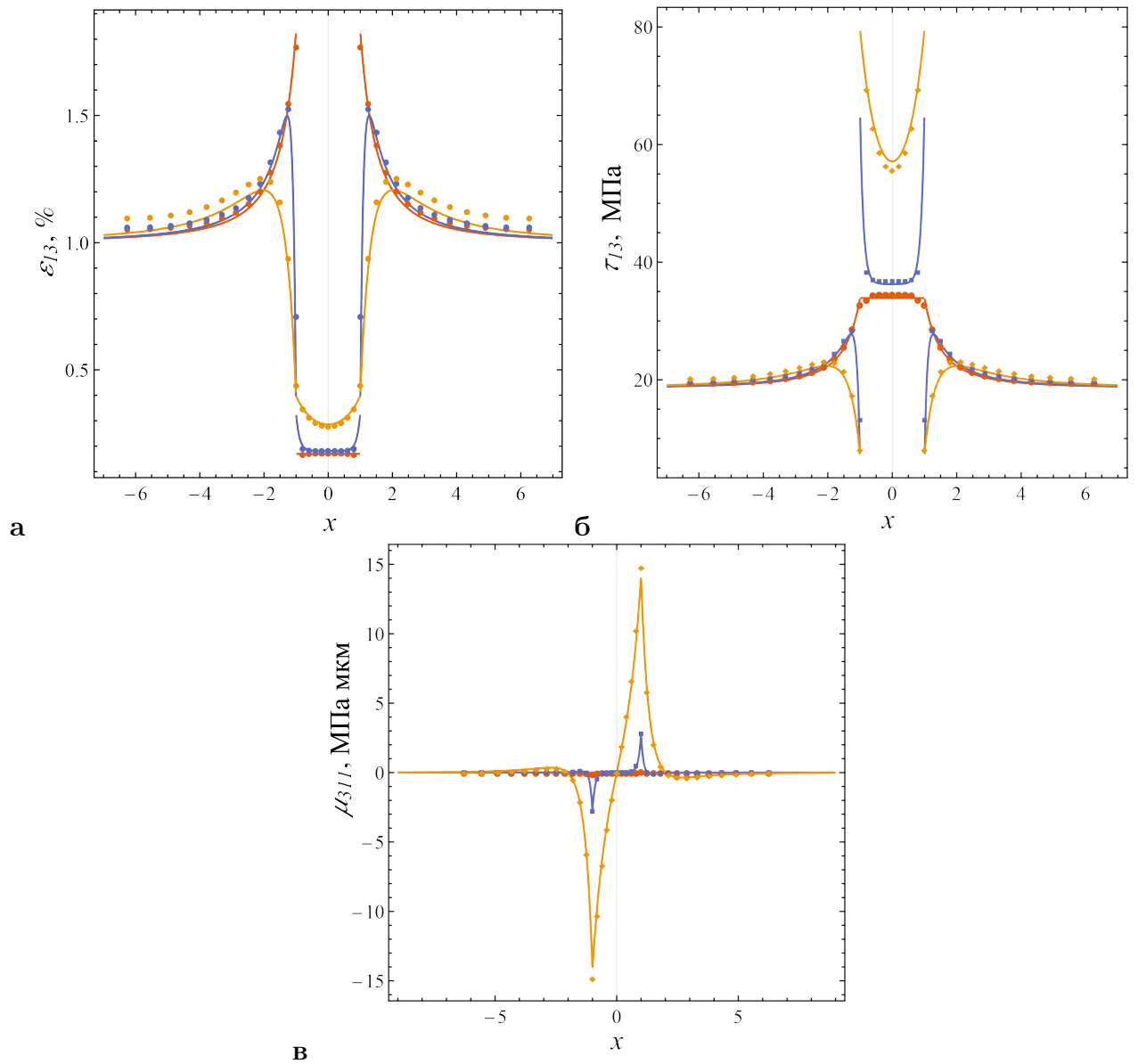


Рис. 30: Сопоставление аналитического и численного решений для задачи антиплоского сдвига фрагмента с цилиндрическим включением, **а**: деформации ε_{13} , **б**: напряжения τ_{13} , **в**: градиентные напряжения μ_{311} .

достаточно хорошая согласованность между численным и аналитическим решением. Для малых масштабных параметров возникает некоторое различие решений, так как вблизи границы матрицы и включения возникают области больших градиентов вычисляемых величин. Например, в классическом решении деформации терпят разрыв на границе контакта, а в градиентном решении при малых значениях масштабных параметров этот разрыв заменяется резким, но непрерывным изменением величины деформаций. Сопоставление трехмерной картины деформаций и напряжений во фрагментах в случае классического и градиентного решения показано на рис. 31. Здесь видно, что в случае решения ГТУ, во включении возникает неоднородное поле напряжений и деформаций. При этом уровень напряжений внутри включений возрастает, а концентрация деформаций вблизи границы матрица/включение снижается по сравнению с классическим решением.

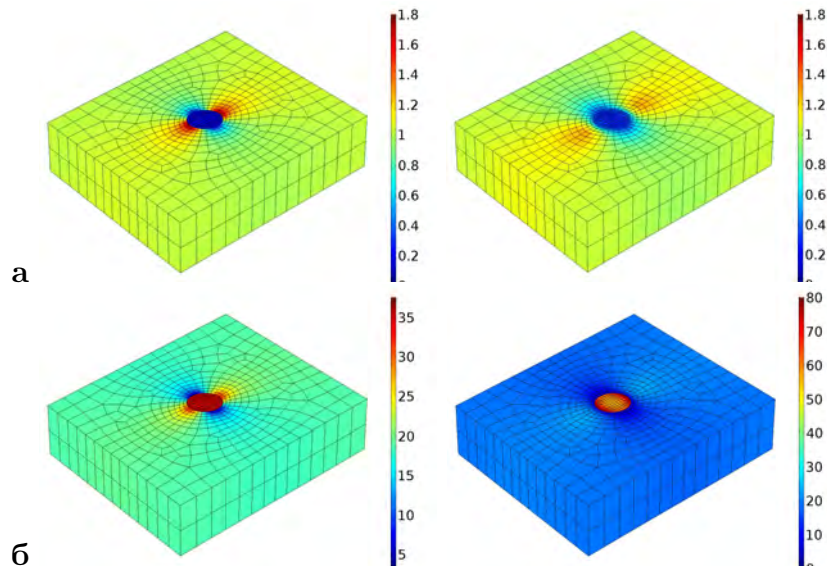


Рис. 31: Сравнение классического решения ($R/l \rightarrow \infty$, рисунки слева) и градиентного решения ($R/l = 2$, рисунки справа) для задачи антиплоского сдвига фрагмента с цилиндрическим включением, **а**: деформации ε_{13} [%], **б**: напряжения τ_{13} [МПа]

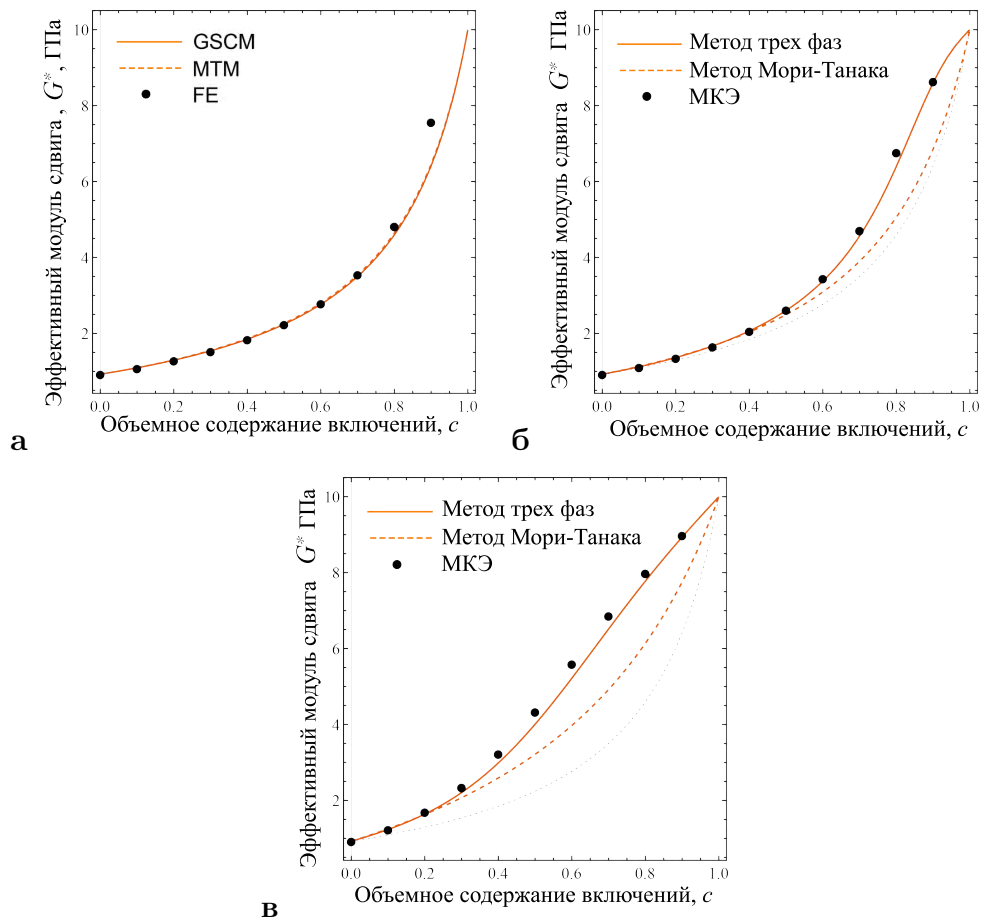


Рис. 32: Зависимость эффективного модуля сдвига от объемного содержания и размер включений, **а**: $R/l \rightarrow \infty$ (классическое решение), **б**: $R/l = 10$, **в**: $R/l = 2$. Линии – аналитические решения, точки – численное КЭ решение. Классическое решение на рис. **б** и **в** показано черным пунктиром.

Далее рассмотрим задачу определения эффективного модуля сдвига G^* . На рис. 32 показана рассчитанная зависимость G^* от объемного содержания и размера (R/l) включений. Линиями показаны аналитические решения, найденные на основе метода Мори-Танака (4.118), (4.123) (штриховые линии) и на основе метода трех фаз (4.128) (сплошные линии). Точками показаны значения эффективного модуля, определенные в численном моделировании. Для случая классического решения (рис. 32а) видно, что все методы совпадают почти до предельных объемных содержаний включений. В решении ГТУ возникает положительный масштабный эффект – при уменьшении размера включений прогнозируется рост эффективного модуля сдвига. Однако при этом в ГТУ возникает расхождение между аналитическими решениями и численным моделированием. При этом погрешность метода трех фаз по отношению к численному моделированию оказывается намного меньше (не более 5%), чем соответствующая погрешность метода Мори-Танака, которая достигает 40%. При этом в случае малых объемных содержаний включений (до 10-20%) реализуется хорошее совпадение между различными методами осреднения. Поэтому удобные замкнутые решения метода Мори-Танака и, вообще, прямых методов осреднения, основанных на введении осредненного тензора концентрации, можно рекомендовать применять для небольших объемных содержаний включений. При это важно учитывать, что при уменьшении размера включений и при увеличении отношения жесткостей фаз G_1/G_2 погрешность прямых методов осреднения будет расти, и область их применимости будет уменьшаться.

Характерное распределение деформаций и напряжений в представительном фрагменте, содержащем 50% включений, в случае классического и градиентного решений представлено на рис. 33. Ненулевые значения градиентных напряжений показаны на рис. 34. На этих рисунках можно видеть, что в решении ГТУ возникают существенно отличное от классического распределение полей деформаций и напряжений в фазах композита. Реализуется непрерывность деформаций на границе матрицы и включения (рис. 33, а, б) и неоднородная концентрация внутри включений. При этом наиболее существенный вклад в напряженное состояние фрагмента дает компонента градиентных напряжений $\mu_{311} = \tau_{31,1}$ (рис. 34а), что определяется видом нагружения фрагмента (сдвиг в плоскости 1-3), а также тем, что фрагмент имеет существенно неоднородную структуру в направлении оси 1, вдоль которой и вычисляются градиентные напряжения.

Интересным является тот факт, что присутствие "межфазных" зон в решении ГТУ приводит к изменению расположения зоны максимальных деформаций. На рис. 35 показано численное решение для фрагмента, содержащего два "взаимодействующих" близко расположенных включения. Здесь видно, что в отличие от классического решения, в котором максимум деформаций сдвига возникает между двумя близко расположенными включениями, в ГТУ максимальные деформации реализуются вне кластера. Таким образом, в ГТУ прогнозируется сниженный уровень деформаций внутри кластеров (агломератов) из включений, в том время, как классическая теория прогнозирует наибольшую концентрацию деформаций именно внутри кластеров. Как представляется, такие области микроструктуры материала характеризуются высокой скоростью изменения напряженного и деформированного состо-

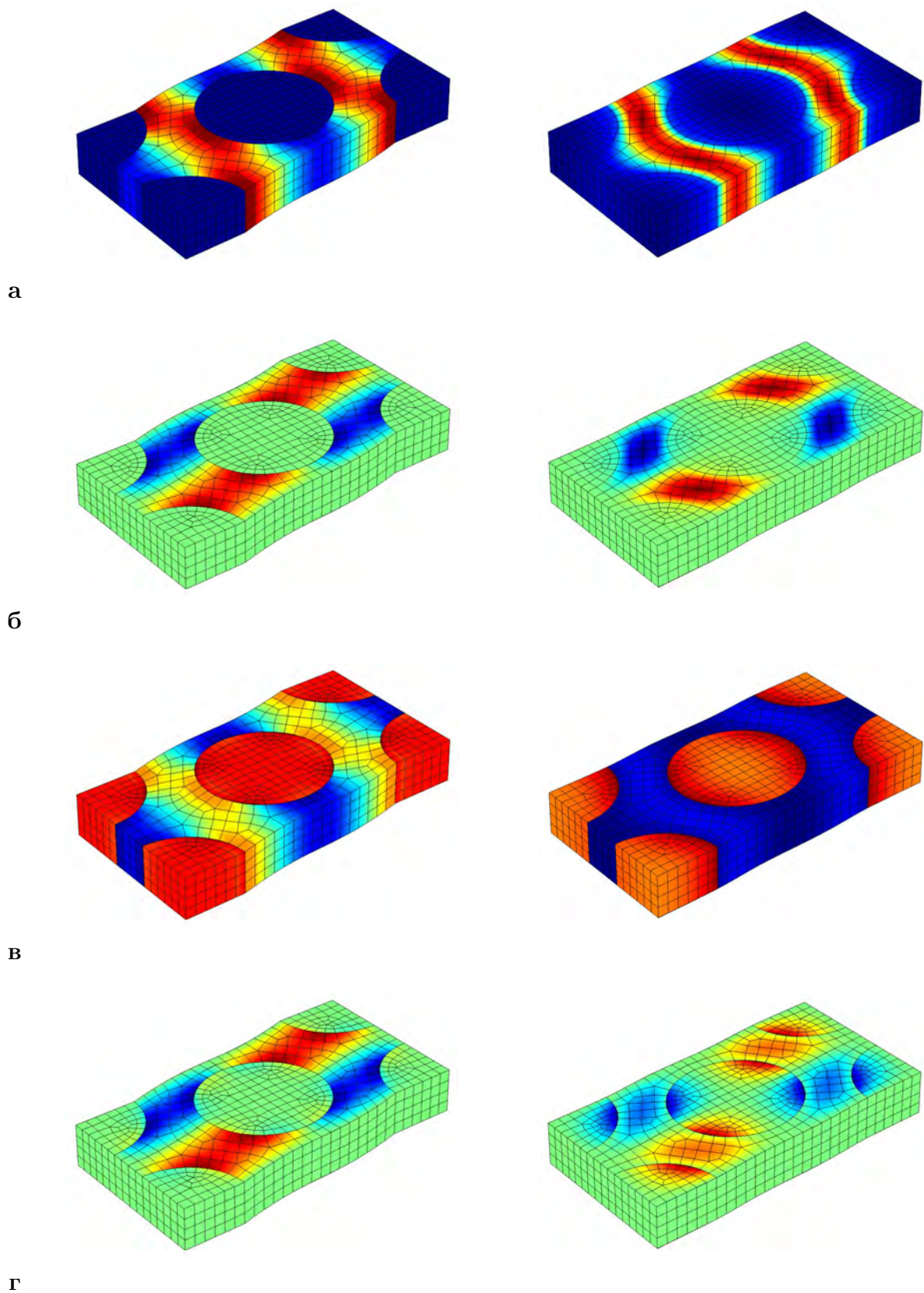


Рис. 33: Характерное распределение деформаций ε_{31} (**а**), ε_{32} (**б**) и напряжений τ_{31} (**в**), τ_{32} (**г**) в классическом ($R/l \rightarrow \infty$, рисунки слева) и градиентном ($R/l = 2$, рисунки справа) решениях для задачи антиплоского сдвига фрагмента с гексагональной упаковкой включений.

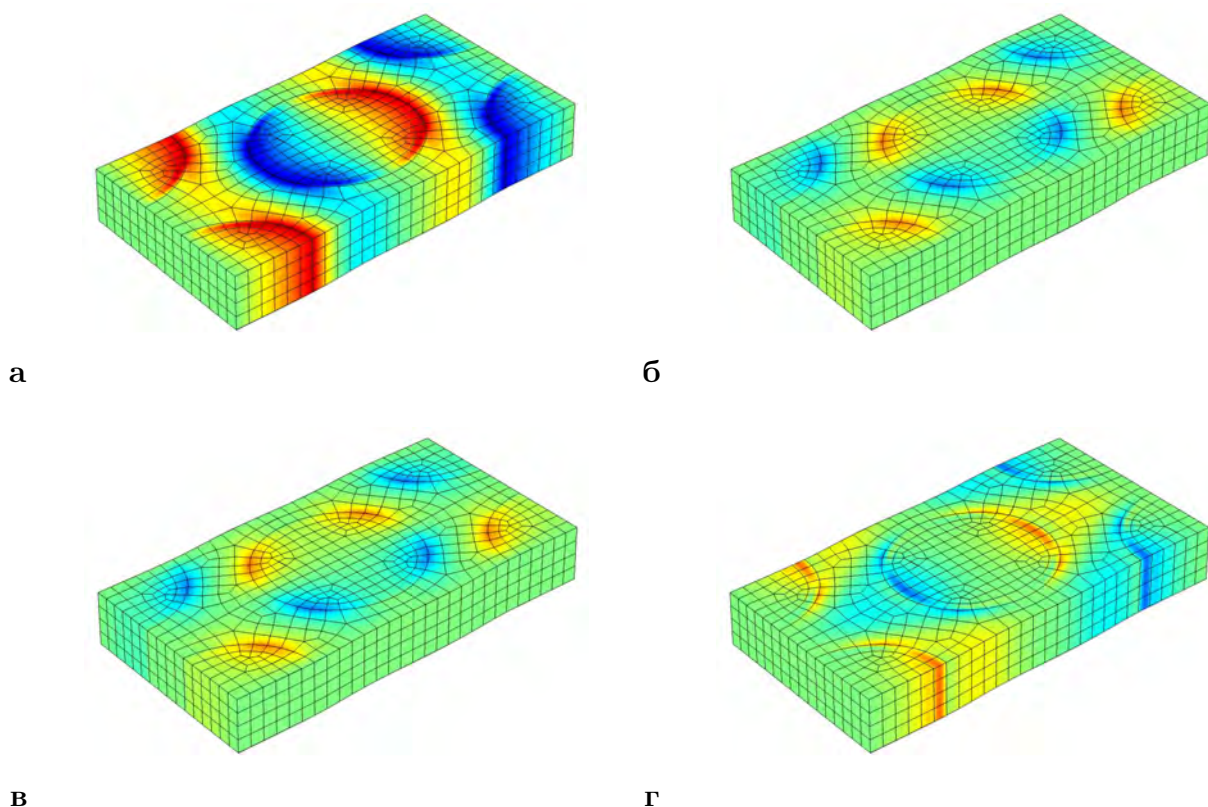


Рис. 34: Характерное распределение градиентных напряжений μ_{311} (а), μ_{312} (б), μ_{321} (в) и μ_{322} (г) во фрагменте с гексагональной упаковкой включений.

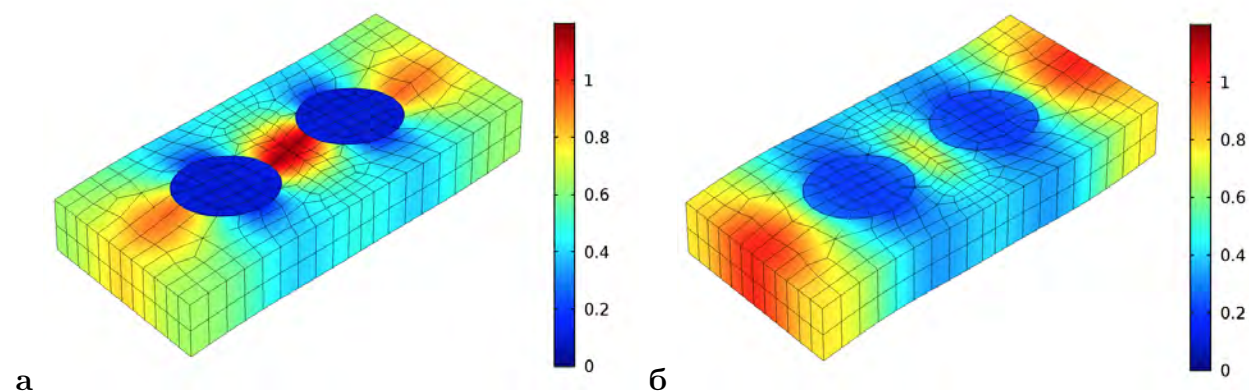


Рис. 35: Распределение деформаций сдвига ε_{31} (%) во фрагменте, содержащем близко расположенные включения, в классическом решении (а, $R/l \rightarrow \infty$) и в решении ГТУ (б, $R/l = 2$). Объемное содержание включений 20%. Расстояние между включениями $2.8R$

яния материала по пространственным координатам. Поэтому учет влияния градиентных эффектов в таких задачах является существенным, и решение ГТУ оказывается более физичным и соответствующим интуитивному представлению характера работы агломератов из включений. Например, при оценке прочности рассматриваемого волокнистого композита по критерию максимальных деформаций сдвига в матрице, классическое решение будет прогнозировать разрушение материала внутри кластера, в то время как ГТУ дает прогноз о начале разрушения вне кластера, то есть в зонах неармированной матрицы. Кроме этого в

ГТУ указанные варианты разрушения зависят от размера включений, образующих кластер. Если включения достаточно велики (и, соответственно, расстояния между ними велики), то справедливым оказывается классическое решение, и максимальная концентрация возникает между волокнами. В случае же волокон малого диаметра справедливым будет решение ГТУ, и концентрация деформаций оказывается максимальной в неармированных зонах матрицы.

Результаты, представленные в данном разделе диссертации, были опубликованы в работе [97].

4.2.2.4. Концентрация напряжений

Рассмотрим отдельно задачу ГТУ о концентрации напряжений и деформаций в рамках модели изолированного включения. Здесь дополнительно исследуем влияние формы поперечного сечения цилиндрических включений на характер концентрации напряжений при антиплоском сдвиге, то есть при сдвиге волокнистых композитов в направлении вдоль волокон. Для случая эллиптической формы поперечного сечения соответствующие решения можно построить аналитически, используя эллиптическую цилиндрическую систему координат. Такую форму (эллиптическую, овальную, "пощеную") имеют некоторые типы высокопрочных углеродных волокон [310], которые используются для создания изделий с повышенными коэффициентами армирования.

Аналогично предыдущему разделу, решаем задачу об антиплоском сдвиге в бесконечной упругой среде, содержащей единственное цилиндрическое включение с эллиптическим поперечным сечением с полуосями a и b (Рис. 36). Уравнения равновесия имеют вид (4.115). На бесконечности задано состояние однородного сдвига в плоскости YZ , которое предполагает следующий вид функции перемещений:

$$r \rightarrow \infty : \quad w = \gamma y = \gamma r \sin \theta \quad (4.129)$$

Для упрощения выкладок, будем считать, что включение является абсолютно жестким, а на границе матрицы и включения ($\partial\Omega$) должны выполняться условия идеального контакта, которые в ГТУ определяются условиями равенства перемещений и нормальных градиентов от перемещений:

$$w = 0, \quad \partial_n w = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4.130)$$

Для включения с круговым поперечным сечением решение рассматриваемой задачи легко находится в замкнутой форме. Общее решение уравнений равновесия имеет вид:

$$w(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + C_4 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right) \cos \theta \quad (4.131)$$

Подставляя это общее решение в граничные условия на бесконечности (4.129) найдем, что константы должны принимать значения $C_1 = \gamma l$ и $C_3 = 0$. Использование условий контакта (4.130), позволяет определить оставшиеся константы C_2 и C_4 . Напряжения в антиплоской задаче можно определить на основе инвариантных по отношению к системе координат вы-

ражений (4.113). Таким образом, используя (4.131), (4.113) и учитывая найденные значения констант, можно получить следующее решение для физических компонент тензора напряжений в цилиндрической системе координат:

$$\sigma_{zr}(\bar{r}, \theta) = \mu\gamma \left(1 + \frac{\bar{r}_0^2 K_2(\bar{r}_0) - \bar{r}^2 K_0(\bar{r}) - \bar{r}^2 K_2(\bar{r})}{\bar{r}^2 K_0(\bar{r}_0)} \right) \sin \theta \quad (4.132)$$

$$\sigma_{z\theta}(\bar{r}, \theta) = \mu\gamma \frac{\bar{r}^2 K_0(\bar{r}_0) + 2\bar{r}^2 K_1(\bar{r}) - \bar{r}_0^2 K_2(\bar{r}_0)}{\bar{r}^2 K_0(\bar{r}_0)} \cos \theta \quad (4.133)$$

Далее рассмотрим общий случай эллиптического поперечного сечения. Такую задачу удобно решать в цилиндрической-эллиптической системе координат, в которой условие для поля перемещений на бесконечности (4.129) приводится к виду:

$$\xi \rightarrow \infty : \quad w = \gamma y = \gamma c \sinh \xi \sin \eta \quad (4.134)$$

где $c^2 = a^2 - b^2$ – половина фокусного расстояния эллиптического сечения, а связь декартовых и эллиптических координат определяется соотношениями $x = c \cosh \xi \cos \eta$, $y = c \sinh \xi \sin \eta$.

Для построения решения в эллиптических координатах общее решение уравнений равновесия (4.115) должно быть представлено в виде ряда, в котором можно сразу учесть симметрию и 2π -периодичность решения, а также требование однородного поля деформаций на бесконечности:

$$w(\xi, \eta) = \gamma c \sinh \xi \sin \eta + \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} C_{1n} e^{-n\xi} \sin(n\eta) + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} C_{2m} K o_m(\xi, q) s e_m(\eta, q) \quad (4.135)$$

где $s e_m(\eta, q)$ – это периодические нечетные функции Матьё, $K o_m(\xi, q)$ – радиальные нечетные функции Матьё, удовлетворяющие требованию $\lim_{\xi \rightarrow \infty} K o_m(\xi, q) = 0$ (аналоги модифицированных функций Бесселя второго рода); $q = c^2/(4l^2)$ – параметр функций Матьё, который определяется отношением фокусного расстояния и масштабного параметра материала матрицы.

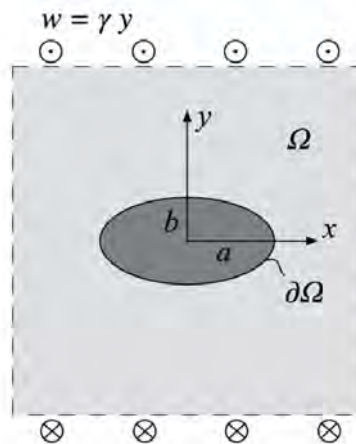


Рис. 36: К задаче о цилиндрическом включении с эллиптическим поперечным сечением

Следует отметить, что в решении (9) слагаемые, связанные с коэффициентами C_{1n} и C_{2m} , удовлетворяют уравнениям Лапласа и Гельмгольца, что соответствует представлению общего решения для градиентной теории упругости. Однако важным здесь является тот факт, что классическое решение может быть получено с использованием единственного слагаемого $C_{11}e^{-\xi} \sin \eta$, удовлетворяющего уравнению Лапласа, в то время, как в рамках градиентной теории возникает необходимость рассмотрения полного разложения, как для градиентной, так и для классической частей решения. Таким образом, в градиентном решении в эллиптических координатах появляются классические гармоники, которые отсутствуют в классическом решении.

Для построения решения рассматриваемой задачи, периодические функции Матьё, входящие в выражение (4.135), необходимо представить в виде ряда Фурье. В результате получим:

$$w(\xi, \eta) = \gamma c \sinh \xi \sin \eta + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(C_{1n} e^{-n\xi} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_{2m} B_n^m K o_m(\xi, q) \right) \sin(n\eta) \quad (4.136)$$

где коэффициенты ряда Фурье B_n^m для нечетной функции Матьё определяются на основе рекуррентных соотношений [311]:

$$\begin{aligned} (b_m - 1 + q)B_1^m - qB_3^m &= 0, \\ (b_m - (2r + 1)^2)B_{2r+1}^m - q(B_{2r+3}^m + B_{2r-1}^m) &= 0, \quad r \geq 1 \end{aligned}$$

где b_m — это характеристика m -го порядка нечетной функции Матьё (аналог номера гармоники у тригонометрических функций), а также необходимо учитывать дополнительное требование нормировки коэффициентов $\sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^m)^2 = 1$.

Подстановка (4.136) в граничные условия (4.130) позволяет найти коэффициенты C_{1n} и C_{2m} . При этом для разрешимости получаемой системы уравнений необходимо использовать одинаковое количество членов ряда во внутренней и внешней суммах в (4.136), что соответствует тому, что в получаемом приближенном решении берется одинаковое количество гармоник, удовлетворяющих уравнению Лапласа и Гельмгольца. В общем виде, получаемые граничные условия (4.130) после подстановки в них решения (4.136) для конечного числа (N) членов ряда записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} w(\xi_0, \eta) &= 0 : \\ \gamma c \sinh \xi_0 \sin \eta + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(C_{1n} e^{-n\xi_0} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_{2m} B_n^m K o_m(\xi_0, q) \right) \sin(n\eta) &= 0 \\ \partial_{\xi} w(\xi_0, \eta) &= 0 : \\ \gamma c \cosh \xi_0 \sin \eta - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(n C_{1n} e^{-n\xi_0} - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_{2m} B_n^m K o'_m(\xi_0, q) \right) \sin(n\eta) &= 0 \end{aligned} \quad (4.137)$$

где штрихом обозначена производная функции Матьё вдоль координаты ξ .

Далее необходимо приравнять нулю все соответствующие слагаемые одинаковой перио-

дичности и получить систему уравнений. Например, при $N = 1$ получим систему:

$$\begin{cases} \gamma c \sinh \xi_0 + C_{11} e^{-\xi_0} + C_{21} B_1^1 K o_1(\xi_0, q) = 0 \\ \gamma c \cosh \xi_0 - C_{11} e^{-\xi_0} + C_{21} B_1^1 K o_1'(\xi_0, q) = 0 \end{cases} \quad (4.138)$$

При $N = 2$:

$$\begin{cases} \gamma c \sinh \xi_0 + C_{11} e^{-\xi_0} + C_{21} B_1^1 K o_1(\xi_0, q) + C_{23} B_3^3 K o_3(\xi_0, q) = 0 \\ \gamma c \cosh \xi_0 - C_{11} e^{-\xi_0} + C_{21} B_1^1 K o_1'(\xi_0, q) + C_{23} B_3^3 K o_3'(\xi_0, q) = 0 \\ C_{13} e^{-3\xi_0} + C_{21} B_3^1 K o_1(\xi_0, q) + C_{23} B_3^3 K o_3(\xi_0, q) = 0 \\ -3C_{13} e^{-3\xi_0} + C_{21} B_3^1 K o_1'(\xi_0, q) + C_{23} B_3^3 K o_3'(\xi_0, q) = 0 \end{cases} \quad (4.139)$$

и т.д.

Решение задачи, таким образом, сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений, в которой коэффициенты вычисляются с учетом известного представления для радиальной функции Матьё через функции Бесселя (эта спецфункция отсутствует в стандартных системах символьных вычислений) [311]:

$$K o_{2m+1}(\xi, q) = (-1)^{m+1} \frac{p_{2m+1}}{\pi \sqrt{q} (A_1^{2m+1})^2} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2m+1} (I_r(v_1) K_{r+1}(v-2) + I_{r+1}(v_1) K_r(v_2)) \quad (4.140)$$

где использованы обозначения $v_1 = \sqrt{q} e^{-\xi}$, $v_2 = \sqrt{q} e^{\xi}$, $p_{2m+1} = c e_{2m+1}(0, q) c e_{2m+1}'(\pi/2, q)$; и $c e_{2m+1}(0, q)$ – это четные периодические функции Матьё, а коэффициенты A_{2r+1}^{2m+1} вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} (a_m - 1 - q) A_1^m - q A_3^m &= 0, \\ (a_m - (2r + 1)^2) A_{2r+1}^m - q (A_{2r+3}^m + A_{2r-1}^m) &= 0, \quad r \geq 1 \end{aligned}$$

где a_m – это характеристика m -го порядка четной функции Матьё, и должна выполняться нормировка $\sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{2m+1})^2 = 1$ [311]. Следует отметить, что в отличие от соотношений для B_n^m , в этих рекуррентных соотношениях другой знак в первом уравнении и используется другая характеристика (a_m).

Результаты вычислений представлены на рисунках 37 и 38. На рисунке 37а показан характер распределения касательных напряжений вдоль оси y ($\theta = \eta = \pi/2$). На этой оси функции напряжений во всех рассмотренных системах координат совпадают, то есть выполняется $\sigma_{zy} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\xi}$. Здесь видно, что уровень максимальных напряжений, нормированных на величину заданных на бесконечности напряжений $\sigma_{\infty} = \mu\gamma$, в решении градиентной теории упругости оказывается ниже, чем в классическом решении, в котором напряжения монотонно затухают по закону r^{-2} , а их максимум реализуется на границе включения, превосходя заданные напряжения σ_{∞} в 2 раза.

Из решения задачи градиентной теории упругости следует, что касательные напряжения достигают максимума на некотором расстоянии от поверхности раздела включения с матри-

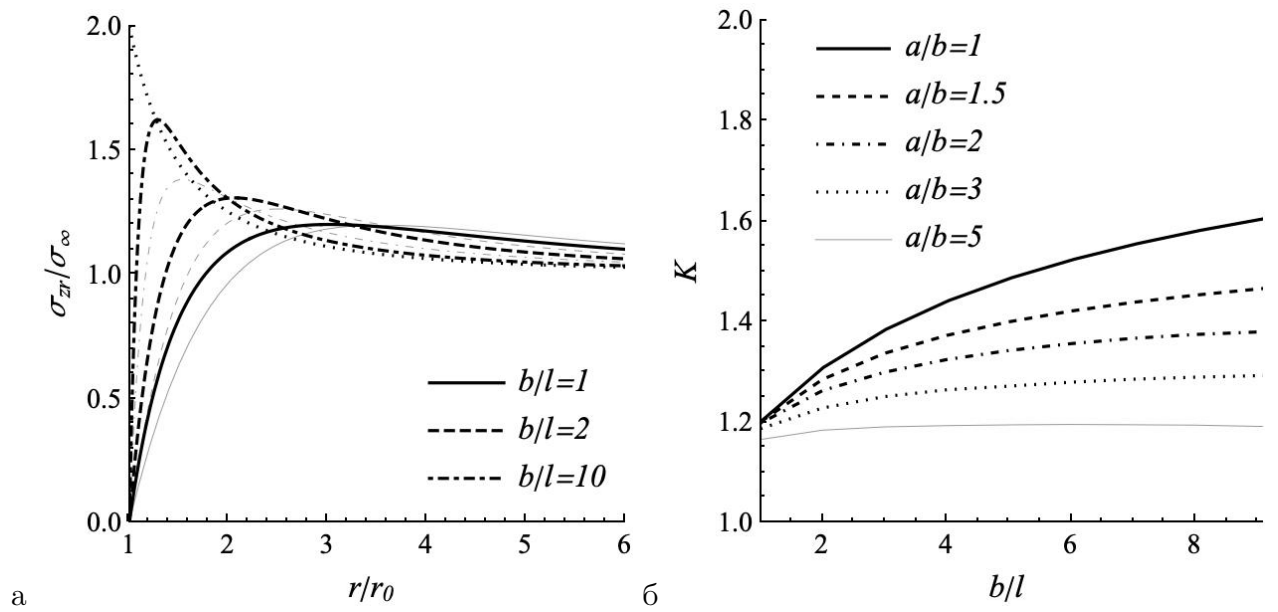


Рис. 37: Распределение касательных напряжений вдоль оси y (черный цвет - решение для кругового сечения, серый цвет - решение для эллиптического включения при $a/b = 2$, пунктир - классическое решение для кругового сечения), б: Зависимость коэффициента концентрации напряжений от относительного размера и формы поперечного сечения волокон.

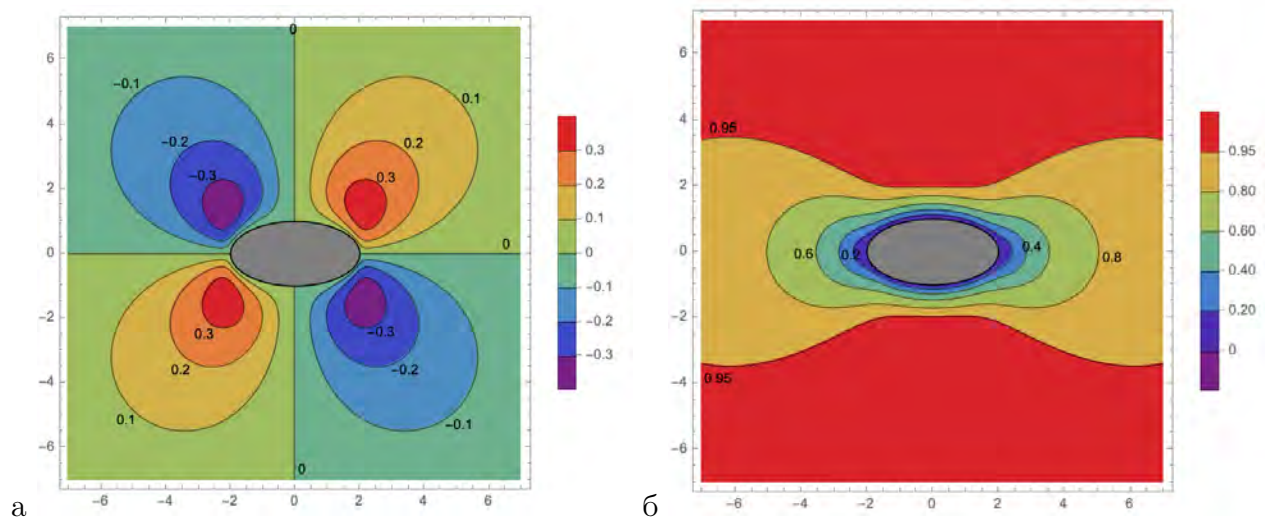


Рис. 38: Распределение деформаций сдвига ε_{zx}/γ (а) и ε_{zy}/γ (б) вблизи включения с эллиптическим поперечным сечением ($a/b = 2$).

цей, а вблизи включения снижаются, становясь равными нулю непосредственно на границе раздела. Этот результат отражает тот факт, что в ГТУ для рассмотренной задачи имеется дополнительное условие равенства нормальных производных от перемещений на границе раздела матрицы и включения (3). Таким образом, вследствие отсутствия деформаций сдвига на поверхности включения, касательные напряжения также равны нулю (в более общих моделях с включениями конечной жесткости эти напряжения и деформации оказываются близки к нулю). Распределение деформаций сдвига вблизи включения показано на рисунке 38.

С физической точки зрения полученный результат означает, что вблизи включения имеется некоторая область материала (межфазная зона), которая, вследствие особенностей взаимодействия материалов включения и матрицы, находится в стесненном состоянии [6-8]. Протяженность «межфазной зоны» определяется в рассматриваемой модели масштабным параметром $l = l_2$. При увеличении его относительного значения (то есть при уменьшении размера поперечного сечения волокон) концентрация напряжений снижается и пик напряжений становится менее выраженным (рис. 37а).

Влияние эллиптичности поперечного сечения волокон $a/b > 1$ приводит к дополнительному снижению напряжений (Рис. 37а, серые линии), что соответствует известным результатам в классических решениях, в которых, однако, максимум напряжений всегда реализуется на границе контакта. В представленном градиентном решении этот максимум смещается в область матрицы.

Коэффициент концентрации напряжений $K = (\sigma_{rz})_{max}/\sigma_\infty$ значительно зависит от относительного размера поперечного сечения волокон b/l (или r_0/l , в случае волокон с круговым сечением) и их формы, которая определяется отношением полуосей эллиптического сечения a/b . Эта зависимость показана на рис. 37б. При увеличении характерного поперечного размера волокон прогнозируется повышение концентрации напряжений. Асимптотическим значением для случая волокон большой толщины ($b \gg l$) является оценка, которая может быть получена на основе решения классической задачи для эллиптического цилиндрического включения: $K = 1 + b/a$. Приближение градиентных решений к этим асимптотическим значениям не показано на рис. 2б, так как в этом случае реализуются очень малые значения параметра функций Матрё q , и решение становится неустойчивым (необходимо делать соответствующий предельный переход). Тем не менее представленный диапазон значений b/l весьма интересен с точки зрения анализа влияния масштабных эффектов в композитах, содержащих волокна малой толщины. Помимо снижения концентрации напряжений можно отметить интересный эффект, связанный с влиянием формы. Из решения следует, что эллиптичность волокон оказывает положительный эффект и приводит к снижению концентрации напряжений только в случае волокон достаточно большой толщины. Для тонких волокон ($b/l \approx 1$) этот эффект оказывается несущественным, и значения K оказываются практически одинаковыми в случае кругового сечения и эллиптического сечения при $a/b = 3$ (см. рис. 2б).

Как видно из построенных решений, все масштабные эффекты в рассматриваемой задаче

определяются отношением характерного размера поперечного сечения волокон к масштабному параметру. Величина масштабного параметра, вообще говоря, является характеристикой материала матрицы (или дополнительной характеристикой прочности материала) и может быть определена экспериментально или теоретически, например на основе молекулярно-динамического моделирования. Для эпоксидных смол, например, известно, что масштабные параметры составляют от нескольких единиц и до нескольких десятков микрон, что при характерном размере поперечного сечения углеродных волокон 10 мкм означает, что для такого сочетания материалов отношение b/l имеет порядок единицы. Таким образом, при малом содержании армирующих волокон и при наличии хорошего адгезионного контакта между волокнами и матрицей полученные решения позволяют прогнозировать меньшее снижение прочности однонаправленного композита вследствие концентрации напряжений при сдвиге вдоль волокон по сравнению с тем, что дает классическое решение. В классическом решении коэффициент концентрации напряжений составляет $K = 2$, в то время как учет стесненной зоны деформаций вблизи включений приводит к значению $K = 1.2$ при $b/l = 1$ (рис. 37а). Отсюда следует также вывод, что масштабный параметр может быть идентифицирован по результатам испытаний образцов композиционного материала путем оценки значения коэффициента концентрации напряжений K и соответствующего ему отношения b/l (в соответствии с графиками на рис. 37б) или, например, путем измерений характера распределения деформаций вблизи включений с использованием, например, метода корреляции цифровых изображений и сопоставления этих данных с результатами моделирования (рис. 38). Для случая больших концентраций включений целесообразно использовать более сложные формулировки модели, учитывающие взаимовлияние соседних включений и численное моделирование, представленное в предыдущем разделе диссертации.

Результаты, представленные в данном разделе диссертации были опубликованы в работе [182].

4.2.3 Аналогия с градиентными моделями гидродинамики. Эффективная вязкость нано-жидкостей

В классической микромеханике хорошо известным является тот факт, что решение задачи об изолированном включении в бесконечной упругой среде может быть использовано для вывода так называемой формулы Эйнштейна, которая представляет собой оценку для эффективной динамической вязкости суспензий, то есть жидкостей, содержащих включения [99]. Для этого необходимо рассмотреть решение для эффективного модуля сдвига композита со сферическими включениями μ_{clas}^* , которое имеет вид [99]:

$$\mu_{clas}^* = \mu_0 \left(1 - \frac{15(1 - \nu_0)(1 - \mu_1/\mu_0)\phi}{7 - 5\nu_0 + 2(4 - 5\nu_m)\mu_1/\mu_0} \right) \quad (4.141)$$

где индексы 0 и 1 соответствуют фазам матрицы и включения, соответственно; μ_i , ν_i это модули сдвига и коэффициенты Пуассона фаз; ϕ – объемное содержание включений.

Далее в этом решении необходимо предположить, что матрица является несжимаемой, а включение – абсолютно жестким, то есть сделать предельный переход следующего вида:

$$\lim_{\substack{\mu_1 \rightarrow \infty \\ \nu_0 \rightarrow 0.5}} \mu_{clas}^* = \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{5}{2}\phi \right) \quad (4.142)$$

Полученное соотношение (4.142) представляет собой формулу Эйнштейна. Эта формула записана для эффективного модуля сдвига упругой среды, однако, используя математическую аналогию, которая имеет место между формулировкой квази-статической теории упругости и теорией Ньютоновский вязких жидкостей при малых значениях критерия Рейнольдса (ползущее течение) [312], записанное выражение (4.142) можно использовать и для оценки эффективной динамической вязкости суспензий μ , в которых базовая жидкость имеет собственную динамическую вязкость μ_0 .

Таким образом, имея решение для эффективных модулей упругости композитов, в некоторых случаях можно получать соответствующие оценки и для эффективной динамической вязкости жидкостей, содержащих жесткие включения. При этом нет необходимости в построении решения гидродинамической задачи о воздействии вязких сил на включение, погруженное в жидкую среду [313]. Полностью аналогичный подход можно реализовать и в рамках градиентной теории упругости. Для этого, во-первых, необходимо показать, что для градиентной теории упругости и градиентной теории гидродинамики [84, 85, 314, 315] реализуется соответствующая математическая аналогия, как и в случае классических теорий. Во-вторых, необходимо выполнить предельный переход в решении ГТУ для эффективных модулей. Обе эти задачи реализованы в данном разделе диссертации.

Получаемое градиентное решение, как и в случае упругих композитов, позволит оценить влияние размера включений на эффективные свойства суспензий. Экспериментально такие явления хорошо известны. В большей степени они проявляются для суспензий, содержащих очень малые включения размером менее 100 нм [316, 317]. Такие суспензии называют нано-жидкостями (nano-fluids), и их практическое применение связано с разработкой теп-

лоносителей для систем охлаждения, с биомедицинскими изделиями, микро/нано- электро-механическими системами, и т.д. [318, 319]. Для теоретического описания и прогноза свойств нано-жидкостей привлекаются различные модели в рамках механики сплошной среды, статистической механики и молекулярной динамики [320, 321]. Формула Эйнштейна (4.142) редко используется для описания экспериментальных данных, так как практически всегда эта формула дает сильно заниженные оценки для свойств реальных суспензий (вообще говоря, эта формула справедлива только для очень малых объемных содержаний, близких к 0). Более аккуратным классическим решением является обобщение формулы Эйнштейна, полученное на основе дифференциального метода осреднения и учитывающее в некотором приближении взаимодействие частиц в суспензиях с "конечной" концентрацией включений [312, 322]. Учет влияния размера включений на свойства нано-жидкостей был реализован в моделях с эффектами Броуновского движения [323], агломерации включений [324, 325], прилипания жидкости к поверхности частиц и эффектов межфазных (присоединенных) зон [326, 327], а также в моделях, в которых вводился эффективный диаметр молекул базовой жидкости [328].

Эффекты, которые реализуются в представленных в данном разделе решениях, следует трактовать, как влияние адгезионных взаимодействий между частицами и базовой жидкостью, так как используемые дополнительные граничные условия на контакте частицы и окружающей среды предполагают непрерывность нормальных производных от кинематических переменных модели. Такую трактовку этих граничных условий, как обобщенное условие адгезии, вводят, в частности, в моделях градиентной гидродинамики [84]. Использование градиентных моделей для нано-жидкостей можно также обосновать тем, что в таких средах вокруг малоразмерных включений реализуются очень большие пространственные градиенты поля скорости. Как следствие, классические определяющие соотношения для тензора вязких напряжений (вводимые в предположении, что "градиенты скорости не очень велики" [313]) становятся не достаточно точны, а вклад вторых градиентов в энергию диссипации оказывается существенным [84].

Аналогия квази-стационарных формулировок ГТУ и градиентной гидродинамики вязкой жидкости.

Покажем, что имеет место математическая аналогия между формулировкой квази-стационарной градиентной теории несжимаемой вязкой жидкости и ГТУ. Для простоты рассмотрим соотношения упрощенной ГТУ, что, как будет показано ниже, не влияет на получаемые результаты, так как в рамках гипотезы о несжимаемости все градиентные теории, в том числе и наиболее общие в формулировке Миндлина-Тупина, будут приводить к одинаковым решениям. Будем привлекать подход, который используется в классических теориях [99, 312]. Во-первых, предположим, что закон сохранения массы (уравнение неразрывности) остается классическим [84], и для случая несжимаемой жидкости он принимает вид $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, где, следуя предлагаемой аналогии, \mathbf{u} – это вектор скорости точек среды в модели гидродинамики (в ГТУ это вектор перемещений). В определяющих соотношениях и в уравнениях равнове-

сия ГТУ будем предполагать, что коэффициент Пуассона стремится к 0.5, что означает, что объемный модуль $K = \lambda + 2\mu/3$ и первый параметр Ламе λ стремятся к бесконечности. В этом случае в определяющих соотношениях изотропной ГТУ (2.29), (2.36) и в уравнениях равновесия (2.58) член вида $(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u})$ содержит неопределенность, и он должен быть заменен на действующее гидростатическое давление $-p$ [99, 312]. Тогда определяющие соотношения теории (2.29), (2.36) принимают вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} & \Rightarrow & \boldsymbol{\tau} = -p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\mu} &= \ell^2 \nabla \boldsymbol{\tau} = \ell^2 \nabla (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) & \Rightarrow & \boldsymbol{\mu} = \ell^2 (-\nabla p \mathbf{I} + 2\mu \nabla \boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (4.143)$$

и уравнения движения (уравнения равновесия в ГТУ (2.58)):

$$(1 - \ell^2 \nabla^2) ((\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) + \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - \ell^2 \nabla^2) (\mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p) + \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad (4.144)$$

Далее, необходимо считать, что обозначения ГТУ для тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и градиентов деформаций $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$, в градиентной гидродинамике соответствуют тензорам скоростей деформаций и их градиентов. Напряжения классические $\boldsymbol{\tau}$ и градиентные $\boldsymbol{\mu}$ должны толковаться, как, соответственно, классические и градиентные вязкие напряжения. Обозначение для модуля сдвига μ переходит в обозначение для коэффициента динамической вязкости. Дополнительные граничные условия ГТУ для нормальных градиентов от перемещений становятся условиями на нормальные производные от вектора скорости и трактуются, как обобщенные условия адгезии [84]. Аналогом энергии деформаций ГТУ (2.1) становится скорость энергии диссипации вследствие действия вязкостных сил в жидкости, которая оказывается зависящей как от скоростей деформаций, так и от их градиентов.

В результате такой аналогии, записанные соотношения (4.143), (4.144) (а также и вид граничных условий и т.д.) полностью совпадают с формулировкой градиентной гидродинамики (см., например, [84]). Единственное отличие заключается в том, что выражение для так-называемого "вектора гипер-давления" $\boldsymbol{\mu}$ ("vectorial hyperpressure" [84]) здесь записано через градиент классического давления, что является следствием предположений, используемых в определяющих соотношениях упрощенной ГТУ.

Используя продемонстрированную аналогию, в некоторых случаях можно применять известные решения, построенные в ГТУ, для анализа задач, возникающих в градиентной гидродинамике вязких жидкостей. Решение ГТУ будет содержать дополнительный масштабный параметр (характеристическую длину ℓ), который в градиентной гидродинамике трактуется как характеристика адгезионной связи жидкости к поверхности окружающих твердых тел [84]. Рассматривая решения для эффективных модулей сдвига композитов, мы можем получить оценки для эффективной динамической вязкости суспензий с учетом размера включений. Здесь очень удобным оказывается применение замкнутых аналитических решений в рамках прямых подходов к определению эффективных свойств композитов. Эти решения оказываются достаточно точны для рассматриваемых задач, так как в нано-жидкостях концентрация включений обычно не превышает 5-10%.

Оценки для эффективного модуля сдвига и эффективной динамической вязкости с учетом влияния размера включений

В рамках прямого метода осреднения тензор эффективных упругих констант \mathbf{C}^* композиционного материала, содержащего малые объемные доли включений определяется на основании следующего соотношения [98]:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_0 + \phi(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)\mathbf{T}, \quad (4.145)$$

где ϕ – это объемное содержание включений, индексы 0 и 1 определяют характеристики матрицы и включений, соответственно, и \mathbf{T} – это тензор концентрации деформаций, который для задачи изолированного эллипсоидального включения может быть представлен через компоненты тензора Эшелби \mathbf{S} следующим образом [98]:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{C}_0^{-1}(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0))^{-1} \quad (4.146)$$

Тензор Эшелби \mathbf{S} для эллипсоидальных включений был построен в рамках ГТУ в недавних работах Ма, Гао [15,94]. Осредненные по объему сферического включения значения компонент тензора Эшелби могут быть представлены для случая упрощенной ГТУ в следующем виде [15,94]:

$$\begin{aligned} S_{ijkl} &= s_1\delta_{ij}\delta_{kl} + s_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ s_1 &= \frac{5\nu_0 - 1}{15(1 - \nu_0)}\Phi(\bar{d}), \quad s_2 = \frac{4 - 5\nu_0}{15(1 - \nu_0)}\Phi(\bar{d}) \\ \Phi(\bar{d}) &= 1 + \frac{3}{\bar{d}^3} \left(4 - \bar{d}^2 - (2 + \bar{d})^2 e^{-\bar{d}} \right) \end{aligned} \quad (4.147)$$

а для цилиндрического включения (ненулевые компоненты):

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta\gamma\delta} &= c_1\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + c_2(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}), \quad S_{\alpha 3\beta 3} = c_3\delta_{\alpha\beta}, \quad S_{\alpha\beta 33} = c_4\delta_{\alpha\beta}, \\ c_1 &= \frac{4\nu_0 - 1}{8(1 - \nu_0)}\Gamma(\bar{d}), \quad c_2 = \frac{3 - 4\nu_0}{8(1 - \nu_0)}\Gamma(\bar{d}), \quad c_3 = \frac{1}{4}\Gamma(\bar{d}), \quad c_4 = \frac{\nu_0}{2(1 - \nu_0)}\Gamma(\bar{d}), \\ \Gamma(\bar{d}) &= 1 - 2K_1\left(\frac{\bar{d}}{2}\right)I_1\left(\frac{\bar{d}}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.148)$$

где латинские индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, 3, а индексы, обозначенные греческими буквами, принимают значения 1, 2; ν_0 это коэффициент Пуассона матрицы; K_1 и I_1 это модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, соответственно; $\bar{d} = d/\ell$ это относительный диаметр включений, нормированный на значение масштабного параметра материала матрицы ℓ .

Используя соотношения (4.147), (4.146) и (4.145), можно получить следующее выражения для эффективного модуля сдвига композита, содержащего сферические включения, в рамках

модели изолированного включения:

$$\mu_s^* = \mu_0 + \frac{\phi(\mu_1 - \mu_0)\mu_0}{\mu_0 + 2s_2(\mu_1 - \mu_0)} \quad (4.149)$$

Далее на основе предельного перехода, аналогичного примененному в выражении (4.142), а также учитывая определение для s_2 (4.147), получим решение для модуля сдвига композита, состоящего из несжимаемой матрицы и абсолютно жестких сферических включений:

$$\lim_{\substack{\mu_1 \rightarrow \infty \\ \nu_0 \rightarrow 0.5}} \mu_s^* = \mu_s(\mu_0, \phi, \bar{d}) = \mu_0 \left(1 + \frac{5}{2\Phi(\bar{d})}\phi \right) \quad (4.150)$$

Учитывая указанную выше аналогию между ГТУ и градиентной гидродинамикой, решение (4.150) может быть использовано для оценки эффективной динамической вязкости μ_s суспензий, содержащих сферические включения в малой концентрации. Для относительно больших частиц ($\bar{d} \rightarrow \infty$), представленное решение (4.150) сводится к классической формуле Эйнштейна (4.142), так как выполняется $\lim_{\bar{d} \rightarrow \infty} \Phi(\bar{d}) = 1$. Таким образом, решение (4.150) является вариантом формулы Эйнштейна, который учитывает влияние размера частиц наполнителя.

Решение для относительно больших концентраций включений может быть получено на основе дифференциального метода осреднения. Этот метод впервые был предложен Бринкманом и другими авторами именно для суспензий [322], а уже позже стал применяться и в механике композитов [98]. Следуя дифференциальному методу осреднения, оценим увеличение (приращение) эффективной вязкости суспензии $d\mu$ вследствие добавления малого количества включений $d\phi$ следующим образом:

$$\mu + d\mu = \mu_s(\mu, d\phi', \bar{d}), \quad d\phi' = \frac{d\phi}{1 - \phi} \quad (4.151)$$

где $d\phi'$ это текущая концентрация включений, вычисляемая с учетом того, что при добавлении включений в количестве $d\phi$ происходит соответствующее снижение объемного содержания базовой жидкости (или матрицы, если рассматривается композит).

На основе соотношений (4.151) и решения для изолированного включения (4.150), получим следующее дифференциальное уравнения для оценки эффективной вязкости суспензии, в котором в качестве начального условия используется условие что в отсутствии включений эффективная вязкость равна вязкости базовой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{d\phi} = \frac{5\mu}{2(1-\phi)\Phi(\bar{d})} \\ \mu|_{\phi=0} = \mu_0 \end{cases} \quad (4.152)$$

Решение уравнения (4.152) позволяет получить следующую оценку для эффективной вяз-

кости суспензий, содержащих относительно большие концентрации сферических частиц:

$$\mu_{s,c} = \frac{\mu_0}{(1 - \phi)^{\frac{5}{2\Phi(\bar{d})}}} \quad (4.153)$$

Полученное решение (4.153) также учитывает влияние размера включений, при этом в случае крупных частиц ($\bar{d} \rightarrow \infty$) это решение сводится к классическому решению Бринкмана для концентрированных суспензий [322].

Для случая цилиндрических включений (волокон) решения получаются аналогичным образом. Используя выражения (4.145), (4.146) и (4.148), найдем выражения для эффективных модулей сдвига в направлении вдоль и поперек волокон:

$$\mu_L^* = \mu_0 + \frac{\phi(\mu_1 - \mu_0)\mu_0}{\mu_0 + c_3(\mu_1 - \mu_0)}, \quad \mu_T^* = \mu_0 + \frac{\phi(\mu_1 - \mu_0)\mu_0}{\mu_0 + c_2(\mu_1 - \mu_0)} \quad (4.154)$$

Выполняя предельный переход к несжимаемой матрице и жестким включениям в выражениях (4.154), получим решение для эффективной вязкости суспензий, содержащих волокнистые наполнители. При этом будем учитывать, что для цилиндрических включений существует две плоскости продольного сдвига и одна плоскость поперечного сдвига (в прямоугольной системе координат, связанной с осью цилиндра). Поэтому для среды, содержащей хаотически ориентированные волокна, получим следующую приближенную оценку для эффективной динамической вязкости:

$$\lim_{\substack{\mu_1 \rightarrow \infty \\ \nu_0 \rightarrow 0.5}} \frac{2\mu_L^* + \mu_T^*}{3} = \mu_c(\mu_0, \phi, \bar{d}) = \mu_0 \left(1 + \frac{4}{\Gamma(\bar{d})} \phi \right) \quad (4.155)$$

Для больших концентраций волокнистых включений применение дифференциального метода осреднения, аналогичного (4.151), (4.152), позволяет получить следующее решение:

$$\mu_{c,c} = \frac{\mu_0}{(1 - \phi)^{\frac{4}{\Gamma(\bar{d})}}} \quad (4.156)$$

Записанные решения (4.155) и (4.156) сводятся к классическим при больших значениях диаметра включений, так как выполняется $\lim_{\bar{d} \rightarrow \infty} \Gamma(\bar{d}) = 1$.

Примеры вычислений эффективной вязкости суспензий и сопоставление с известными экспериментальными данными

Полученные решения (4.150) и (4.153) проиллюстрированы на Рис. 39. Здесь показаны значения вязкости суспензий, нормированные на вязкость базовой жидкости ($\bar{\mu}_s = \mu_s/\mu_0$, $\bar{\mu}_{s,c} = \mu_{s,c}/\mu_0$). Видно, что в случае крупных включений ($\bar{d} \rightarrow \infty$) решения сводятся к классическим [322, 329], которые показаны черными линиями на Рис. 39а. Для малых размеров включений и малых отношений d/ℓ полученные соотношения прогнозируют положительный масштабный эффект и повышение вязкости. Влияние размера включений становится наиболее значительным при для размеров включений $d \approx 10\ell$ (т.е. $\bar{d} < 10$, см. Рис. 39б).

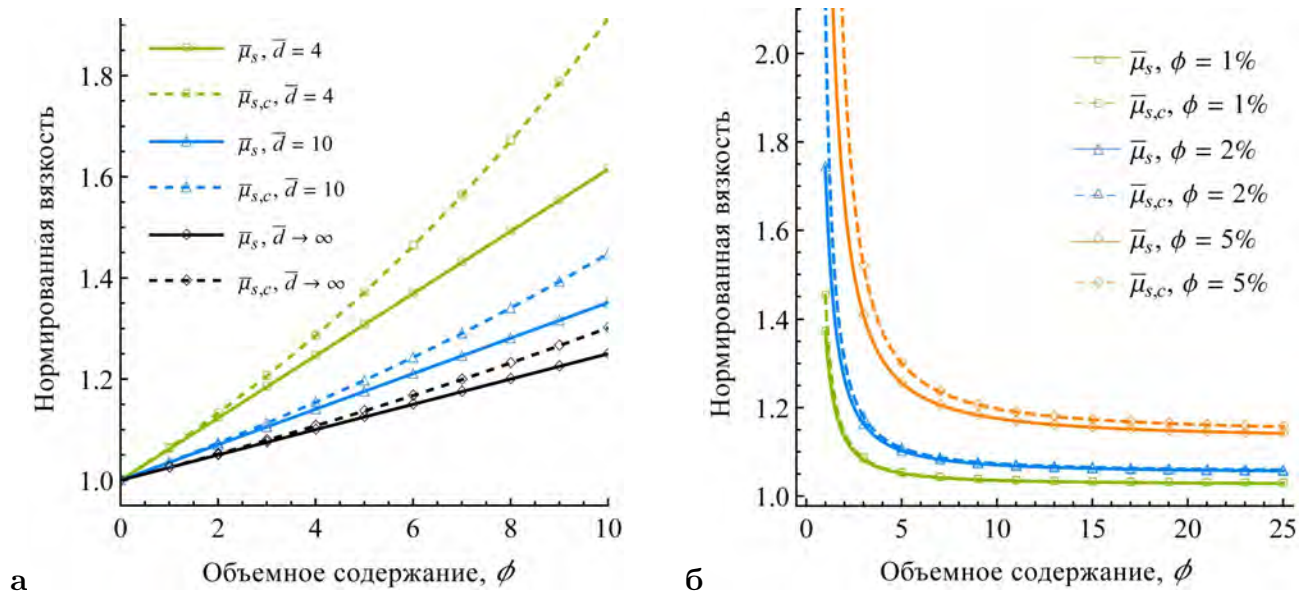


Рис. 39: Зависимость относительных значений вязкости суспензий от концентрации (а) и диаметра (б) сферических включений. Сплошные линии - обобщенное решение Эйнштейна (4.150), штриховые линии - обобщенное решение Бринкмана (4.153)

Зависимости для вязкости волокнистых суспензий μ_c (4.155) и $\mu_{c,c}$ (4.156) аналогичны представленным на Рис. 1.

Сравнение полученных решений с известными экспериментальными данными показано на Рис. 40 и 41. Экспериментальные данные для относительных значений вязкости различных нано-жидкостей взяты из работ [330–338], в которых в качестве базовой жидкости использовалась вода (W), этиленгликоль (EG) и полидиметилсилоксан (PDMS), а в качестве наполнителей применялись оксидные керамики, железо, наночастицы полиимида и нанотрубки из диоксида титана. На Рис. 40а показана зависимость вязкости от концентрации частиц. Для вычислений использованы модели для концентрированных суспензий со сферическими включениями $\mu_{s,c}$ (4.153) и волокнами $\mu_{c,c}$ (4.156). Модели были адаптированы к эксперименту выбором единственного дополнительного параметра - масштабного параметра ℓ , который и характеризует интенсивность возникающих масштабных эффектов. Остальные параметры (концентрация, диаметр частиц, вязкость базовой жидкости) были известны в эксперименте и брались из указанных выше работ. Таким образом, добиваясь наложения решения и эксперимента были идентифицированы значения масштабных параметров. Эти значения указаны на рисунках. Установлено, что масштабные параметры по порядку имеют значения близкие к диаметру частиц наполнителя. Более значительные масштабные эффекты, наблюдаемые в эксперименте, соответствуют большим значениям масштабных параметров в модели (см. например, результаты для суспензий ZrO_2 /вода на Рис. 40а). Обобщенные решения Эйнштейна для частиц и для волокон (4.150), (4.155) также могут быть использованы для описания эксперимента, но только для очень малых объемных содержаний включений. Классические решения Эйнштейна и Бринкмана (пунктирные и штриховые линии на Рис. 40а) не позволяют описать представленные экспериментальные данные.

На рис. 40б показана зависимость вязкости суспензий от размера частиц. Видно, что реа-

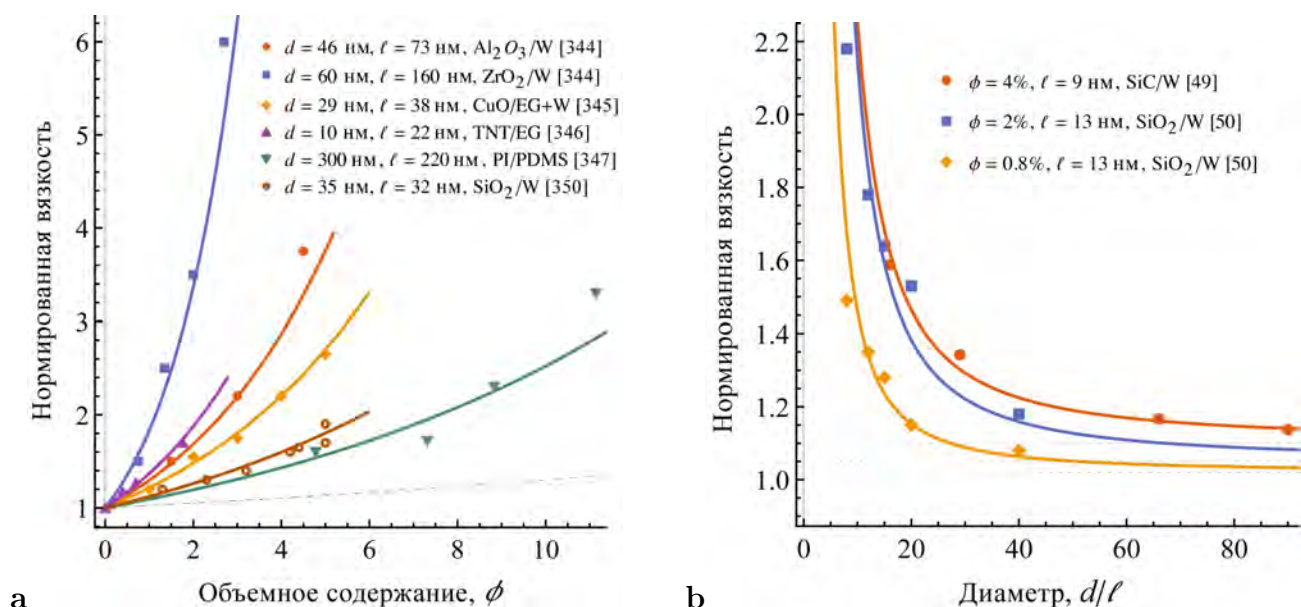


Рис. 40: Описание экспериментальных данных (точки) на основе обобщенного решения Бринкмана (линии, (4.153), (4.156)) для эффективной вязкости наносuspензий. Зависимость относительной вязкости от концентрации наночастиц и нанотрубок (а) и диаметра частиц (б). Классические решения Эйнштейна и Бринкмана показаны пунктирной и штриховой линиями, соответственно

лизуется достаточно хорошая согласованность характера размерного эффекта, наблюдаемого в эксперименте и прогнозируемого в построенных моделях (4.153). Выбором единственного дополнительного параметра ℓ удается описать значительное повышение эффективной вязкости, по отношению к классическим решениям при изменении и размера, и концентрации включений, что показано для суспензий $\text{SiO}_2/\text{вода}$ на рис. 40б. Для этого эксперимента из работы [336] установлено значение масштабного параметра порядка $\ell = 13$ нм.

Однако, для представленных решений существуют и очевидные ограничения, которые проявляются и при их сопоставлении с экспериментальными данными. Например, на Рис. 41а показано, что для суспензий $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{вода}$ [330] обобщенное решение Бринкмана (4.153) позволяет с хорошей точностью описать экспериментальные данные для концентраций до 5%. Для больших объемных содержаний, по всей видимости, необходимо использовать более общие модели [97]. На рис. 41б, экспериментальные данные для суспензий $\text{Fe}/\text{вода}$ [338] описаны на основе обобщенного решения Эйнштейна. Использование единственного масштабного параметра $\ell = 55$ позволяет описать имеющиеся экспериментальные данные для относительно крупных частиц ($d = 70$ нм и 100 нм). Однако для описания вязкости суспензий с меньшим размером включений ($d = 40$ нм) идентифицируемое значения масштабного параметра снижается: $\ell = 37$ нм (использование исходного значения приводит к завышенным оценкам вязкости, см. красный пунктир на рис. 41б). Таким образом, можно предполагать, что для частиц меньшего размера могут изменяться параметры взаимодействия с базовой жидкостью вследствие воздействия каких-либо физических или химических факторов (например, вследствие более интенсивного окисления поверхности малоразмерных частиц). Таким образом, как представляется, полученные решения можно применять не только для прогноза свойств

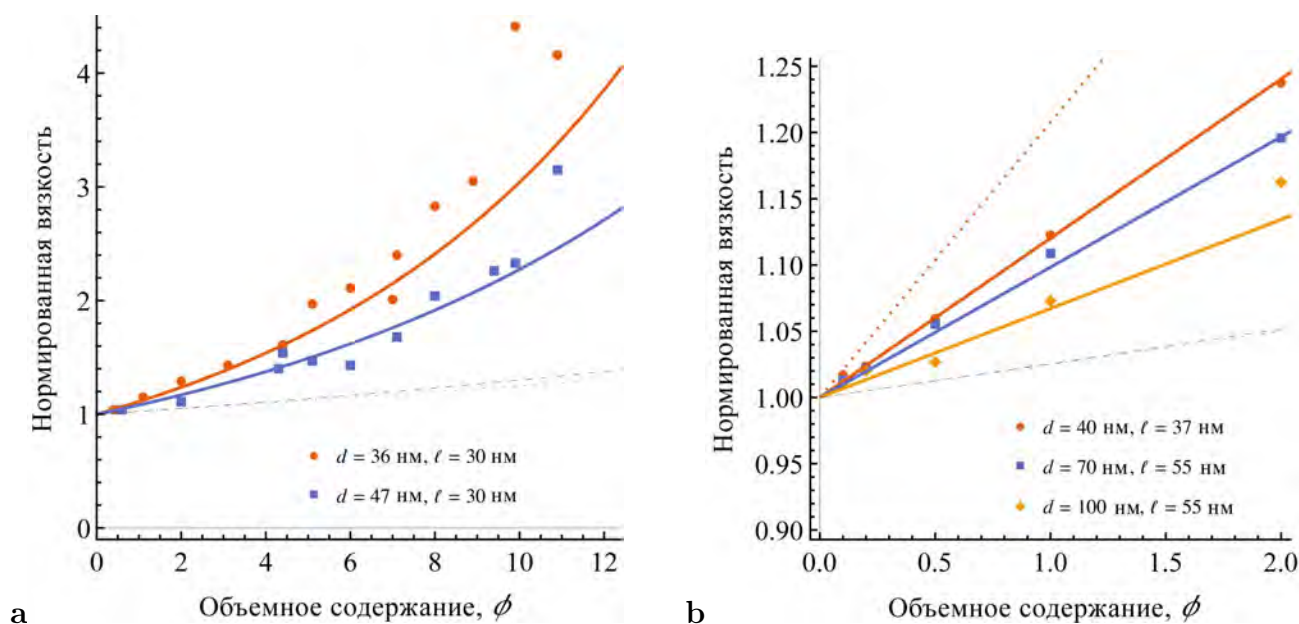


Рис. 41: Сопоставление градиентного решения с идентифицированными значениями масштабных параметров (линии) и экспериментальных данных (точки) для эффективной вязкости наножидкостей на основе Al_2O_3 /вода (а) и Fe/вода (б) [330, 338]. Показана зависимость нормированных значений эффективной вязкости от концентрации наночастиц. Использованы решения (4.153) и (4.150). Классические решения Эйнштейна и Бринкмана показаны пунктирными и штриховыми линиями, соответственно

суспензий, но и для косвенной оценки изменения состояния поверхности и характера взаимодействия наполнителя с базовой жидкостью – изменение эффективной вязкости суспензий при уменьшении размера включений в соответствии с представленной моделью говорит о неизменном характере реализующихся адгезионных взаимодействий. При этом необходимо учитывать, что записанные решения получены для ползущих течений, и их можно применять поэтому только при низких числах Рейнольдса (малых скоростях).

Таким образом, представленные новые решения для вязкости наножидкостей позволяют описать характерное повышение их вязкости при уменьшении размера включений, которые не могут быть описаны классическими моделями. Достоинством предложенных моделей является их строгость – при их выводе использовался подход механики сплошной среды, рассматривалась задача о включении и применялись методы осреднения для оценки эффективных свойств. Сделанное предположение о структуре энергии деформаций (в композите) или скорости энергии диссипации (в суспензии) является следующим по порядку приближением по сравнению с классической теорией. В классике энергия зависит только от первых пространственных производных от кинематических переменных модели, а в градиентной теории учитывается зависимость и от вторых производных. В представленных выше результатах использовалась упрощенная однопараметрическая градиентная теория. Однако в случае более общих теорий, полученные решения останутся неизменными. В частности, в случае использования в качестве исходной формулировки ГТУ по Форме I Миндлина, осредненный тензор Эшелби для сферического включения определяется следующим выражением [94]:

$$\begin{aligned}
S_{ijkl} &= s_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + s_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
s_1 &= \frac{3\lambda - 2\mu}{15(\lambda + 2\mu)} + \frac{5\lambda + 2\mu}{5(\lambda + 2\mu)} \Phi_1(d) - \frac{2}{5} \Phi_2(d), \\
s_2 &= \frac{3\lambda + 8\mu}{15(\lambda + 2\mu)} + \frac{2\mu}{5(\lambda + 2\mu)} \Phi_1(d) + \frac{3}{5} \Phi_2(d), \\
\Phi_i(d) &= 1 + \frac{3}{(d/\ell_i)^3} (4 - (d/\ell_i)^2 - (2 + d/\ell_i)^2 e^{-d/\ell_i}), \quad (i = 1, 2)
\end{aligned} \tag{A1}$$

где ℓ_1 и ℓ_2 это два масштабных параметра, возникающих в уравнениях равновесия общей ГТУ.

Рассматривая далее несжимаемую матрицу, мы должны предполагать, что параметр Ламе стремится в бесконечность: $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда получим:

$$s_1 = \frac{1}{5} + \Phi_1(d) - \frac{2}{5} \Phi_2(d), \quad s_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \Phi_2(d)$$

Как видно, параметр s_2 в определении тензора Эшелби в случае наиболее общей ГТУ (A1) будет в любом случае зависеть от единственного масштабного параметра ℓ_2 (так как $\Phi_2(d)$ зависит только от ℓ_2). При этом эффективный модуль сдвига наполненных композитов и, следовательно, значение динамической вязкости суспензий зависит только от s_2 (см (4.150), (4.153)), что подтверждает тот факт, что представленные результаты будут справедливы и в случае общей градиентной теории. Аналогичный результат можно получить и для включений цилиндрической формы.

Как и для случая композитов и упругих тел, причиной возникающих в представленных решениях размерных эффектов для вязкости суспензий является повышенный порядок уравнений движения и наличие дополнительных граничных условий. Обобщенные условия адгезии, которые связаны с непрерывностью нормальных производных на границе включений и базовой жидкости, обеспечивают дополнительное снижение скоростей (в решении градиентной гидродинамики) вблизи жесткой стенки (включения). Этот эффект детально обсуждался в работе [84]. С точки зрения физического смысла, этот эффект соответствует случаю "прилипания" некоторого малого объема жидкости к поверхности твердого тела вследствие адгезии. В случае наноразмерных частиц в среде присутствует большое количество границ. Как следствие, возникает большой объем жидкости, находящейся в связанном состоянии вблизи границ включений, и происходит повышение эффективной вязкости. Характеристикой адгезионных взаимодействий в модели является масштабный параметр. Этот параметр, может зависеть от состояния поверхности, от температуры и других факторов. Значение этого параметра, по-всей видимости, может коррелировать и с эффективным диаметром молекул базовой жидкости. Феноменологическая модель для описания свойств суспензий с учетом этого параметра была предложена, например, в работе [328].

Результаты, представленные в данном разделе диссертации, были опубликованы в работе [181].

4.3 Применение ГТУ к задачам механики разрушения

Применение моделей ГТУ для классических сингулярных задач теории упругости позволяет получать регуляризованные решения. В частности, в задачах ГТУ о трещинах и острых вырезах (углах) реализуются регулярные решения для полей деформаций и напряжений даже в линейно упругой постановке [5, 7]. Этот эффект использовался в недавних работах [124, 131, 188, 190, 197, 339, 340] где было показано, что применение ГТУ может быть чрезвычайно эффективным при описании прочности тел с трещинами, так как отсутствие сингулярностей позволяет использовать стандартные подходы прочностного анализа и прогнозировать уровень разрушающих нагрузок на основе критериев прочности. Эти критерии могут формулироваться относительно, например, классических напряжений (энергетически связанных с деформациями (2.2), уровень концентрации которых в вершине трещины является конечным в решении ГТУ и определяется свойствами материала, геометрией конструкции, углом острого выреза и типом напряженного состояния. Путем сопоставления результатов аналитических расчетов и экспериментальных данных было показано, что модели ГТУ в сочетании с критерием по максимальным главным напряжениям позволяют прогнозировать с высокой точностью разрушающие статические и циклические нагрузки для образцов хрупких и квази-хрупких материалов, содержащих различные типы трещин. Фактически было показано, что ГТУ является альтернативой классической линейно упругой механике разрушения, наряду с теорией критических расстояний [196], когезионными теориями типа Баренблатта-Дагдейла [341], теории размерного эффекта Базанта [193] и т.д. На основе анализа асимптотических решений было показано, что в ГТУ естественным образом реализуется равновесная форма трещины, а также появляется возможность описания размерных эффектов для трещин различной длины [4, 5, 7, 195, 342–346].

Наиболее последовательно, как представляется, методика прогноза разрушающих нагрузок в рамках ГТУ была реализована в недавних в работах Васильева В.В. и Лурье С.А. [45, 46]. Здесь, на основе нескольких серий экспериментов на растяжение и изгиб образцов эпоксидной смолы с нанесенными естественными трещинами различной длины был идентифицирован масштабный параметр для варианта упрощенной градиентной теории. Для прогноза разрушающей нагрузки использовались асимптотические решения для напряжений в вершине трещины и применялся критерий максимальных главных напряжений.

В данном разделе диссертации представлен вариант аналогичной методики идентификации масштабных параметров и описание экспериментальных данных на основе численного моделирования в ГТУ. Численные решения построены с учетом известной из экспериментов геометрии образцов, условий нагружения и, соответственно, всех граничных условий, которые должны быть предписаны в ГТУ. Показано, что численные решения ГТУ позволяют с хорошей точностью прогнозировать зависимость разрушающей нагрузки от длины трещины, присутствующей в образцах, при использовании критериев прочности относительно классических напряжений и при достоверной идентификации масштабного параметра по единственному тестовому эксперименту. Новым является то, что представленные результаты получены в численном расчете для полной геометрии испытываемых образцов с точным вы-

полнением всех граничных условий ГТУ, а также установленный факт, что для описания разрушения материалов по реализованной методике (называемой здесь методикой Васильева-Лурье) в условиях сложнапряженного состояния, может быть необходимым применение различных критериев прочности. В частности, показано, что критерий максимальных главных напряжений целесообразно применять при высоких значениях параметра триаксиальности напряженного состояния. Однако в условиях, близких к чистому сдвигу (т.е. к моде II в терминологии классической механики разрушения) при низких значениях коэффициента триаксиальности, более достоверные прогнозы дает критерий, формулируемый относительно второго инварианта тензора классических напряжений.

Все расчеты, представленные в данном разделе диссертации выполнены численно с использованием интерфейса Weak Form PDE в Comsol (см. раздел 2.9.2) для случая плоского деформированного состояния. В тестовых расчетах и в сопоставлениях с экспериментом рассматриваются хрупкие и квази-хрупкие материалы.

4.3.1 Анализ сходимости численных решений для задач с трещинами

Предварительно исследуем сходимость получаемых численных решений для задач ГТУ о деформациях тел с трещинами. Эти решения были сопоставлены с известными аналитическими решениями, представленными в работе [4], в которой применялся метод преобразования Фурье в рамках упрощенной ГТУ.

Пример анализа сходимости численного решения для трещины нормального отрыва представлен на рис. 42–43. На рисунке 42а представлена конечно-элементная модель, использованная в рассматриваемой задаче. С учетом соответствующих условий симметрии на границах АВ, ОD рассматривается 1/4 области. Трещина расположена на границе ОА. На этой границе, а также на верхней границе области ВС использованы естественные граничные условия с нулевой правой частью, то есть предписаны нулевые значения вектора напряжений \mathbf{t} и градиентных напряжений \mathbf{m} (см. (2.12), (2.13)). На правой границе области CD задана равномерно распределенная нагрузка \bar{t}_1 , действующая в направлении оси x_1 . Размер трещины составляет 1/16 от размера грани. В расчете использовалась КЭ сетка с крупными элементами вдали от трещины, но вблизи вершины трещины сетка измельчалась для оценки сходимости получаемых решений (рис. 42а).

На рисунке 42б показана зависимость численного решения упрощенной ГТУ от характерного размера конечно-элементной сетки h , который задавался вблизи вершины трещины. На этом рисунке показаны нормированные значения перемещений, вычисленные по центру трещины, и нормированные значения деформаций и напряжений, вычисленные в вершине трещины. Как видно, в решении ГТУ реализуются конечные значения напряжений и деформаций в вершине трещины, сходящиеся к некоторому асимптотическому значению при уменьшении размера сетки (применение классической теории упругости привело бы к неограниченному росту этих напряжений и деформаций при измельчении сетки). Анализ сходимости численного решения ГТУ показывает, что реализуется, примерно, линейная сходимость численного решения. При этом, как видно из рис.42б достаточно высокий уровень точности

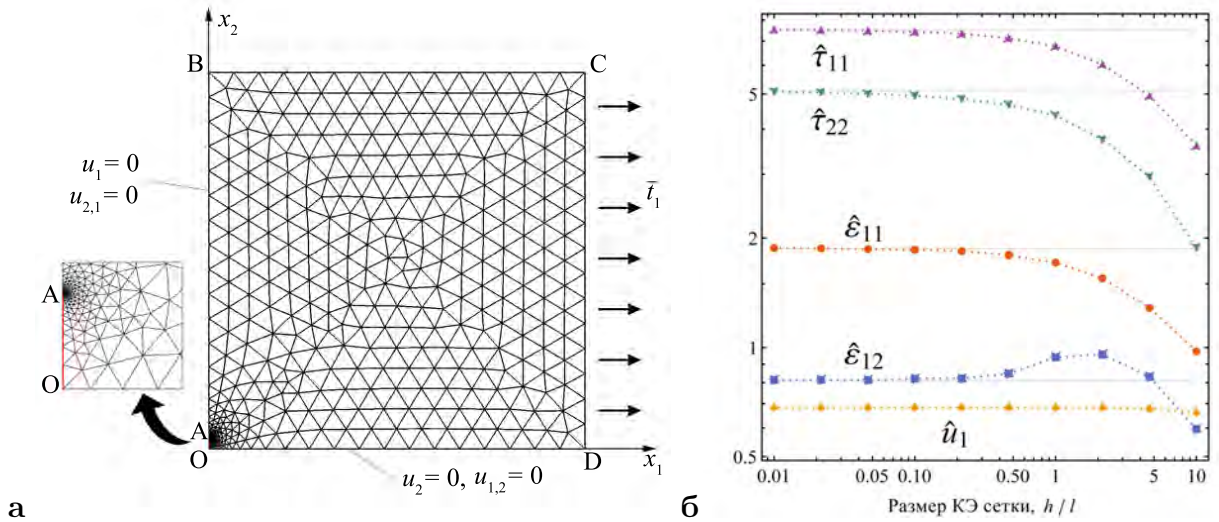


Рис. 42: **а**: Конечно-элементная модель области с трещиной в задаче о трещине нормального отрыва, **б**: Влияние размера конечно-элементной сетки в вершине трещины на численное решение. Нормированные значения напряжений $\hat{\tau} = \tau/\bar{t}_1$ и деформаций $\hat{\epsilon}_{ij} = \mu\epsilon_{ij}/\bar{t}_1$ вычислены в вершине трещины $x_1 = 0, x_2 = d$. Нормированное значение перемещений раскрытия трещины $\hat{u}_i = \mu u_i/(\bar{t}_1 d)$ вычислены в средней точке на берегу трещины $x_1 = x_2 = 0$. Масштабный параметр $l = d/50$.

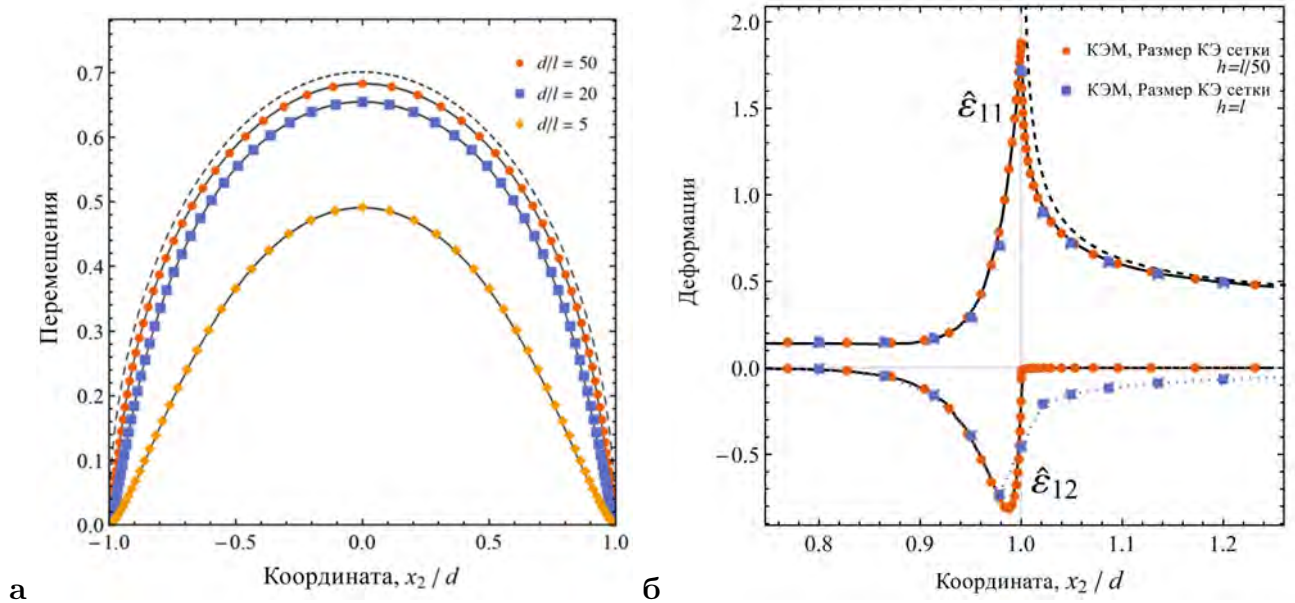


Рис. 43: Сопоставление численного решения (точки) для задачи о трещине нормального отрыва в рамках упрощенной ГТУ с аналитическим решением (сплошные линии), представленным в работе [4]. **а**: Распределение нормированных значений перемещений вдоль берега трещины (раскрытие трещины) для различных значений масштабного параметра, **б**: Распределение нормированных значений деформаций вокруг вершины трещины. Отношение размера трещины к масштабному параметру $d/l = 50$. Классическое решение показано черной штриховой линией.

может быть получен при использовании сетки с характерными размером в вершине трещины $h/l < 5$ (l это масштабный параметр). В дальнейших расчетах в данном разделе диссертации для надежности использовалась еще более мелкая сетка с характерным размером не более $h = l/50$ в относительных единицах и не более $h = 10$ мкм в абсолютных значениях.

Заметим, что представленные на рис. 42б решения сходятся к аналитическому решению, представленному в работе [4]. В этой работе авторы для задачи о трещине нормального отрыва представили решения для деформаций ε_{11} и ε_{12} и для компоненты перемещений u_1 . Эти решения показаны на рис. 42б горизонтальными линиями. Поточечное сравнение решений представлено на рис. 43. На этом рисунке показано распределение перемещений вдоль берегов трещины и деформаций в ее вершине. Получена хорошая согласованность численного решения (при достаточно хорошей КЭ сетке) и аналитического решения. Аналогичные сопоставления были проведены и для других мод нагружения (II и антиплоской III), для которых также была получена согласованность решений.

4.3.2 Когезионные эффекты в решениях ГТУ для задач о трещинах

На рис. 43б, а также на приведенных ниже рисунках 44–47, видно, что в решении ГТУ возникают ненулевые и неклассические значения напряжений и деформаций на берегах трещины вблизи ее вершины. Такое поведение решения может казаться некорректным, так как в классической механике разрушения на берегах трещины соответствующие нормальные и касательные напряжения равны нулю вследствие задаваемых граничных условий на свободных от нагрузки поверхностях. Однако, важно учитывать, что в ГТУ вектор напряжений на поверхности определяется не через свертку тензора напряжений с нормалью к поверхности (как в классической теории упругости), а более сложным образом с учетом производных от градиентных напряжений (2.13). В частности, для рассматриваемой задачи (рис. 42а) граничные условия на поверхности трещины должны предписывать нулевое значение вектора градиентных напряжений \mathbf{m} и вектора классических напряжений \mathbf{t} , что с учетом (2.12), (2.13) дает условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = 0 & \Rightarrow \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} = 0 \\ \mathbf{t} = 0 & \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) - 2H_S(\mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu}) = 0 \\ & \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{n} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \quad (4.157)$$

Учитывая, что на берегах трещины имеем $\mathbf{n} = \{\pm 1, 0, 0\}$, получаем следующие условия для компонент тензоров напряжений:

$$\begin{aligned} \mu_{111} &= 0, \\ \mu_{211} &= 0, \\ \tau_{11} &= \underline{\mu_{211,2}} + \mu_{111,1} + \mu_{112,2}, \\ \tau_{21} &= \mu_{221,2} + \mu_{211,1} + \mu_{212,2} \end{aligned} \quad (4.158)$$

где подчеркнутое слагаемое равно нулю вследствие заданного граничного условия относи-

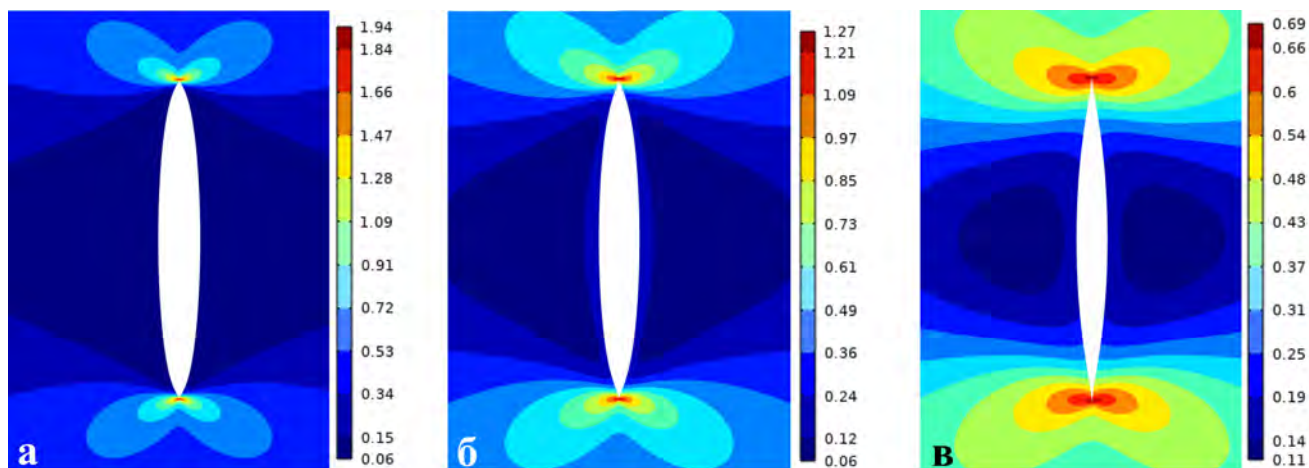


Рис. 44: Распределение деформаций ε_{11} вокруг трещины нормального отрыва в решении ГТУ, **a**: $d/l = 50$, **b**: $d/l = 20$, **c**: $d/l = 5$.

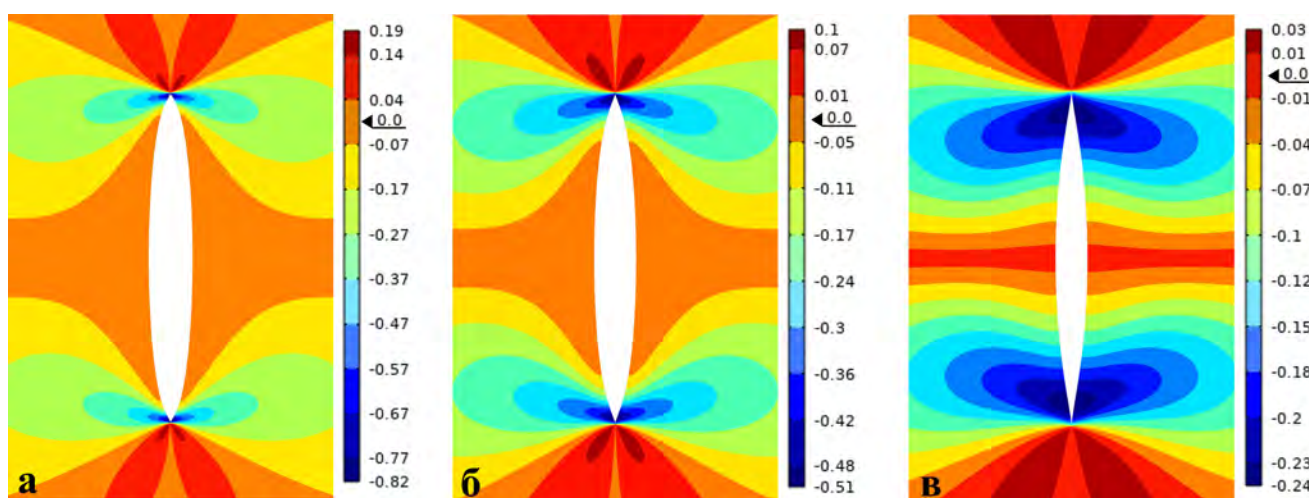


Рис. 45: Распределение деформаций сдвига ε_{12} вокруг трещины нормального отрыва в решении ГТУ, **a**: $d/l = 50$, **b**: $d/l = 20$, **c**: $d/l = 5$.

тельно градиентных напряжений, однако все остальные величины в правых частях выражений для классических напряжений ($\mu_{111,1}, \mu_{112,2} \dots$) могут быть не равны нулю даже на свободной от нагрузки поверхности.

Таким образом, в решении ГТУ на берегах свободной от нагрузки трещины возникают ненулевые значения классических напряжений τ (см. рис. 46), которые связаны с неоднородным распределением градиентных напряжений μ и связанных с ними градиентов деформаций. Неклассическое распределение напряжений приводит к изменению поля деформаций вблизи вершины трещины, и характер раскрытия трещины становится "равновесным", то есть таким, что в вершине трещины угол раскрытия становится меньше классического значения (π), и форма трещины принимает вид, характерный для когезионных теорий типа Баренблатта и Дагдейла. Такие эффекты в решениях ГТУ были отмечены во многих работах (см., например [4, 5]). Правые части в соотношениях (4.158) для компонент напряжений τ_{11}, τ_{12} могут трактоваться как когезионные силы сцепления, которые возникают в решении ГТУ естественным образом без введения дополнительных предположений [5]. Для относительно

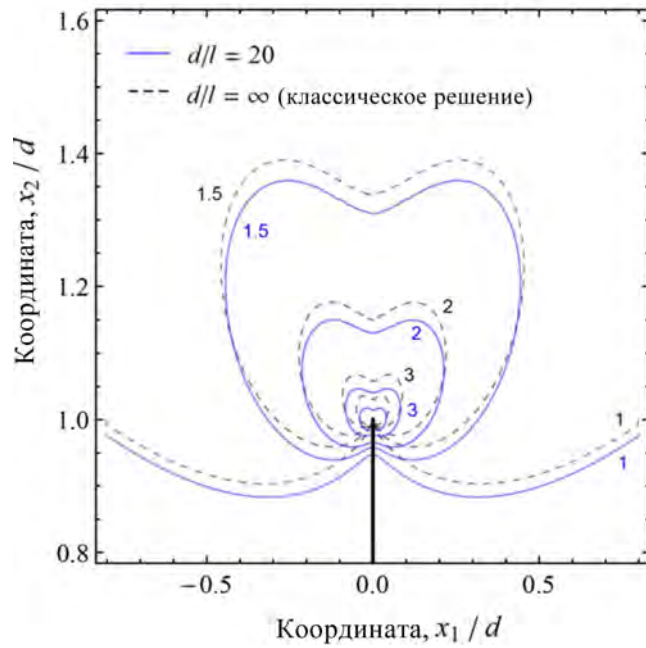


Рис. 46: Распределение нормальных напряжений $\hat{\tau}_{11}$ вблизи вершины трещины в классическом решении (штриховые линии) и в решении упрощенной ГТУ (синие сплошные линии) в задаче трещины нормального отрыва.

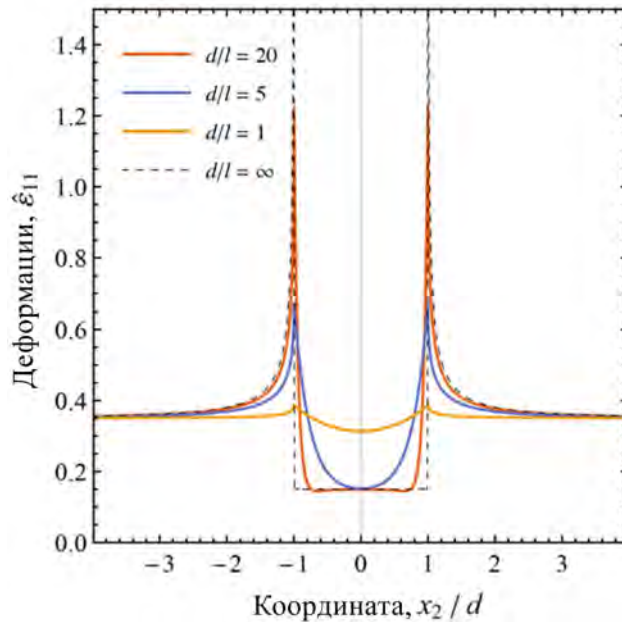


Рис. 47: Распределение деформаций $\hat{\epsilon}_{11}$ вдоль берегов трещины в классическом решении (штриховая линия) и в решении упрощенной ГТУ при различных отношениях длины трещины d и масштабного параметра l в задаче о трещине нормального отрыва. Трещина показана жирной сплошной линией.

длинных трещин когезионные эффекты концентрируются в очень малой окрестности вершины трещины (44а, 45а) и быстро затухают при удалении от вершины. При уменьшении относительной длины трещины d/l когезионные эффекты становятся более значительными и изменение формы раскрытия хорошо видно, например, на рисунках 44в, 45в.

В случае трещин очень малой длины, по размеру сопоставимых с масштабным параметром материала ($d/l \approx 1$), когезионные эффекты становятся настолько значительными, что распространяются по всей длине трещины и значительно уменьшают, как ее раскрытие, так и уровень концентрации напряжений и деформаций в ее вершине (рис. 47). В предельном случае микроскопических трещин ($d/l \ll 1$) решение ГТУ фактически перестает чувствовать присутствие трещины, и в материале реализуется однородное поле напряжений и деформаций во всей области построения решения. Таким образом, в решении ГТУ возникает возможность описания размерного эффекта для трещин малой длины, который хорошо известен из экспериментов [193] и который не может быть описан в рамках классической ЛУМР. Этот вопрос детально обсуждается в следующем подразделе диссертации.

4.3.3 Описание размерных эффектов, связанных с изменением длины трещины

Рассмотрим проблему описания размерного эффекта для номинальной прочности материалов, содержащих трещины. Под номинальной прочностью (σ_n) в данном случае подразумевается максимально допустимый уровень однородных напряжений, возникающий в материале вдали от трещины вследствие приложенной внешней нагрузки. В случае трещин микроскопических размеров, которые всегда присутствуют в реальных материалах, номинальная прочность материала определяется его пределом прочности. Однако при увеличении размеров трещины, уровень концентрации напряжений в ее вершине значительно растет, что приводит к снижению предельно допустимых внешних нагрузок и, соответственно, к снижению номинальной прочности материала. Описание размерного эффекта для относительно длинных трещин возможно в рамках классической ЛУМР, в которой номинальная прочность материала с трещиной обратно пропорциональна квадратному корню из длины трещины $\sigma_n \sim d^{(-1/2)}$. Однако для микроскопических трещин эта зависимость (и, соответственно, ЛУМР) оказывается неприменимой, так как прогнозирует неограниченный рост номинальной прочности материала. Для исключения таких эффектов были предложены некоторые специальные модели размерного эффекта, которые позволяют учесть асимптотический выход зависимости номинальной прочности материала на его предел прочности при уменьшении длины трещины (см. работы Э. Базанта и др. [124, 193, 196]).

В работах [124, 184] было показано, что размерный эффект для трещин произвольной длины естественным образом учитывается в моделях ГТУ. При этом для относительно длинных трещин ГТУ прогнозирует классический размерный эффект ЛУМР $\sigma_n \sim d^{(-1/2)}$, а для коротких трещин прогнозируется выход номинальной прочности на константу, то есть на предел прочности материала. Объяснение такого поведения решения ГТУ для малых трещин дано в предыдущем подразделе – в решении ГТУ реализуется снижение концентрации напряжений и деформаций в случае малых отношений d/l (рис. 47). Совпадение характера размерных эф-

фффектов для относительно длинных трещин в ЛУМР и в ГТУ является следствием того, что все уточнения в решении ГТУ по отношению к классической теории являются локальными (в вершине концентратора) и их влияние снижается для относительно крупных объектов.

Иллюстрация к описанию размерного эффекта в решении ГТУ для трещины нормального отрыва представлена на рис. 48. Здесь показаны результаты численного моделирования для КЭ модели, представленной на рис. 42. В численном решении для задаваемого отношения длины трещины к масштабному параметру d/l определялось максимальное значение напряжений $\tau_{11,max}$, которое реализуется в вершине трещины. Далее определялась обратная величина к уровню концентрации напряжений, которая в рамках линейной теории равна номинальной прочности материала, нормированной на предел прочности материала σ_u , то есть: $\hat{\sigma}_n = \sigma_n/\sigma_u = \bar{t}_1/\tau_{11,max}$. Найденная таким образом зависимость нормированного значения номинальной прочности от нормированного значения длины трещины представлена на рис. 48 для нескольких различных градиентных теорий. В частности, представлено описание размерного эффекта в рамках упрощенной ГТУ (красная линия), градиентной теории межфазного слоя (синяя линия), дилатационной теории упругости (фиолетовая линия) и варианта общей теории Миндлина-Тупина с пятью ненулевыми градиентными параметрами (желтая линия). Видно, что все эти теории в качестве асимптотических решений для длинных трещин содержат классический закон $\sigma_n \sim d^{(-1/2)}$ и выходят на константу для трещин малой длины. Существенной является область перехода между этими предельными случаями, которую обычно в теориях размерного эффекта относят к области справедливости нелинейной механики разрушения [193]. Как видно из рис. 48 решение ГТУ в этой области может существенно зависеть от типа применяемых определяющих соотношений. Фактически

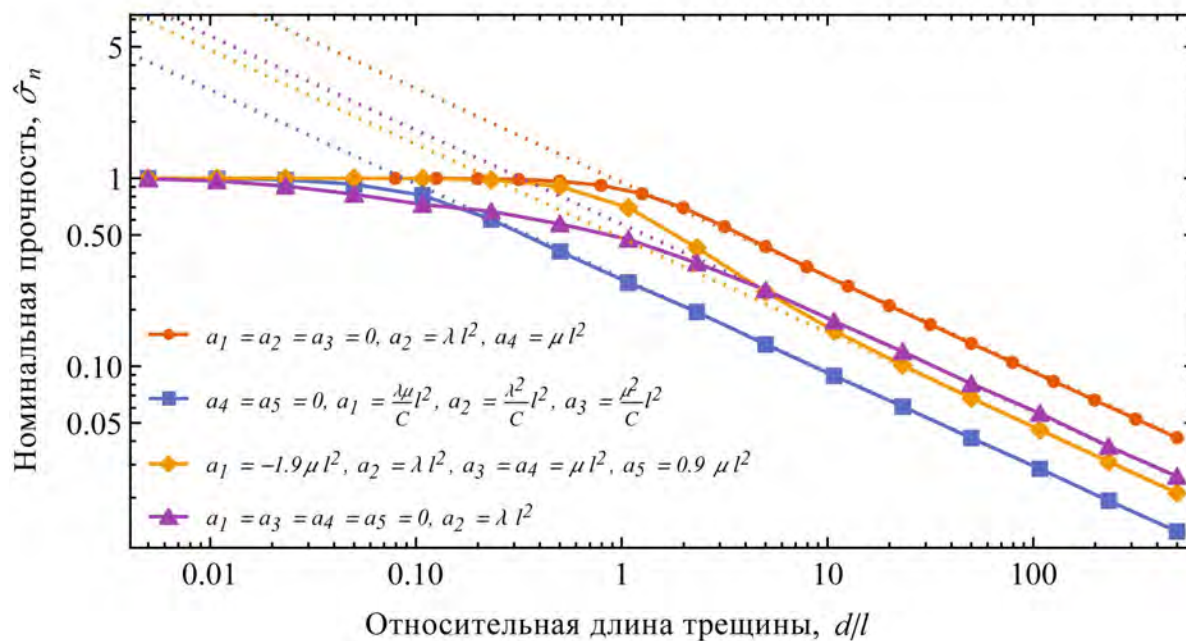


Рис. 48: Зависимость нормированного значения номинальной прочности от нормированной длины трещины в решении ГТУ для трещины нормального отрыва. Классические асимптотические зависимости $\sim (d/l)^{-0.5}$ показаны пунктиром

здесь показано, что характер размерного эффекта определяется набором значений градиентных параметров, или соответствующих масштабных параметров, которые могут быть введены в определяющих соотношения любой ГТУ (см. раздел 2.3). Для упрощенной ГТУ и теории межфазного слоя реализуются очень близкие решения (с точностью до перенормировки масштабного параметра) с относительно быстрым переходом между законом ЛУМР и горизонтальной асимптотой. Однако для других теорий этот переход может быть намного более протяженным (дилатационная теория, фиолетовая линия на рис. 48). Это означает, что отклонение от законов ЛУМР в таком материале будет возникать намного раньше, чем для стандартных материалов, а небольшие размерные эффекты будут проявляться даже для трещин очень малой длины. Кроме этого показано, что существуют градиентные теории, в которых размерный эффект для некоторого диапазона размеров трещин может оказываться более быстрым, чем предсказывает ЛУМР (оранжевая линия на рис. 48). Соответствующая этому случаю комбинация градиентных параметров указана на рис. 48, причем эта комбинация является допустимой с точки зрения ограничений, накладываемых на материальные константы в ГТУ [269].

Таким образом на примере трещины нормального отрыва показано, что решения ГТУ позволяют описывать аналогичные размерные эффекты, которые хорошо известны в линейной и нелинейной механике разрушения и подтверждаются экспериментами. Дальнейшей задачей является идентификация параметров градиентных теорий для конкретных типов материалов и, вообще говоря, выбор градиентной теории. В разделе 4.3.4 будет показано, что многие известные экспериментальные данные могут быть описаны наиболее простыми моделями, содержащими единственный дополнительный масштабный параметр.

4.3.4 Влияние микро-геометрии вершины трещины

Для корректной обработки экспериментальных данных необходимо исследовать насколько значительно влияет микро-геометрия вершины трещины на уровень концентрации напряжений в решении ГТУ. В экспериментальных исследованиях, связанных с механикой разрушения, используются различные методы нанесения трещин, такие как создание естественных усталостных трещин или нанесение вырезов с последующим их заострением тонкими лезвиями, и т.п. В некоторых экспериментальных работах конкретная геометрия нанесенных трещин излагается детально, однако в других работах соответствующие данные приводятся без подробностей и дается указание только на "макро" параметры трещины – ее длина, угол наклона и т.п. Поэтому необходимо понимать, насколько сильно зависят прогнозы ГТУ от малых изменений геометрии трещины вблизи ее вершины. Для такого анализа были проведены численные расчеты, в которых трещина нормального отрыва (рис. 42) задавалась не в виде математического разреза, а в виде треугольного выреза с малым углом раскрытия (в полной модели такая трещина будет иметь форму ромба) и в виде прямоугольного выреза со скруглением в вершине.

Оба типа рассматриваемых вырезов характеризуются их шириной, которую обозначим $2s$. В случае треугольного выреза задается максимальная ширина, которую он имеет по се-

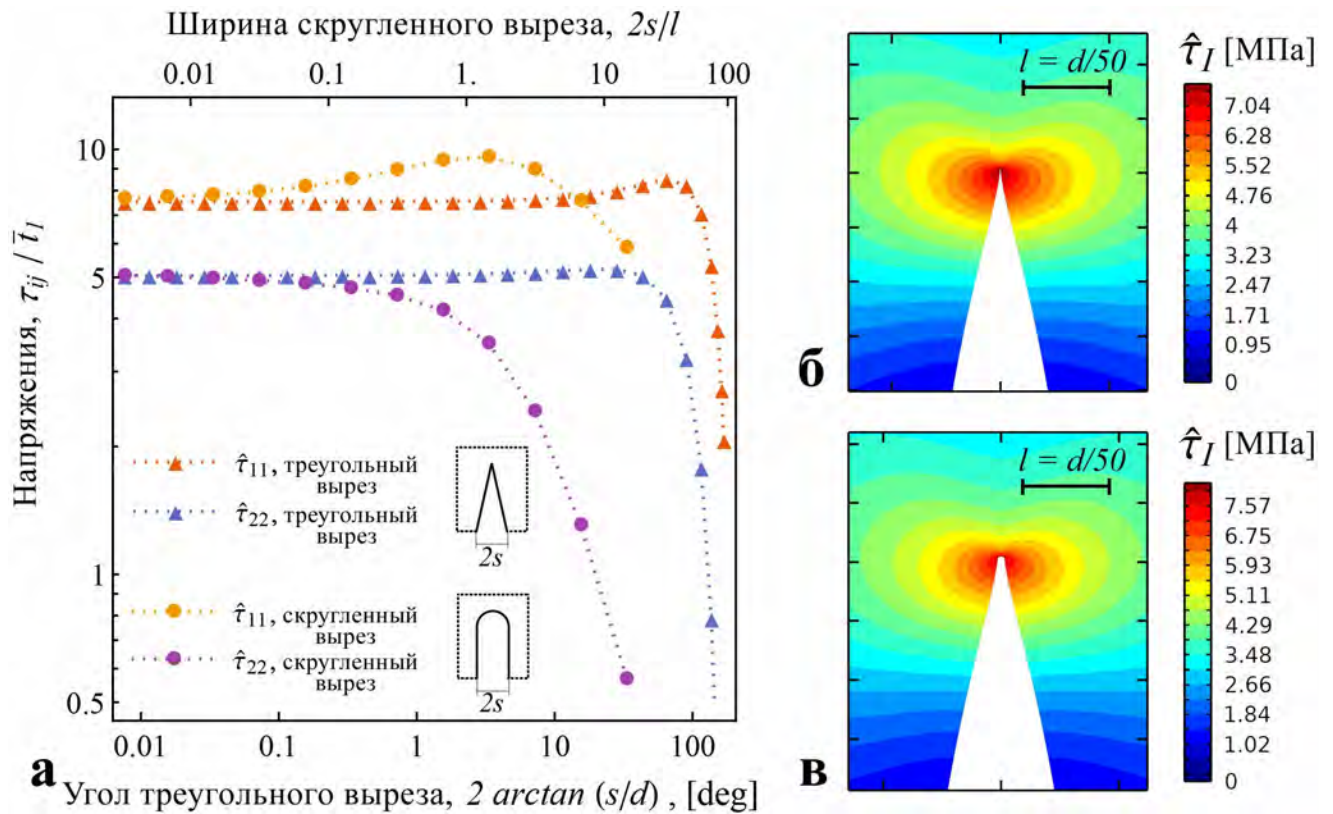


Рис. 49: Влияние микро-геометрии вершины трещины на уровень максимальных напряжений (а) и распределение максимальных главных напряжений в решении ГТУ вблизи трещины с острым треугольным вырезом (б, угол раскрытия 0.1°) и со скругленным вырезом (в, относительная ширина выреза $2s/l = 0.1$). На рисунках б и в деформации увеличены в 20 раз. Величина масштабного параметра $l = d/50$.

редине своей длины, а угол начального раскрытия такого выреза определяется величиной $2 \arctan(s/d)$. Скругленный прямоугольный вырез имеет две параллельные грани, которые в вершинах выреза объединяются полуокружностями с радиусом s . Найденные на основе численного моделирования значения напряжений представлены на рис. 49а. На этом рисунке показана зависимость реализующихся максимальных напряжений в зависимости от угла раскрытия острого треугольного выреза и в зависимости от ширины прямоугольного надреза. Важным является тот факт, что для узких надрезов (острых с углом раскрытия менее 0.1 град. или скругленных с радиусом скругления менее 0.1 масштабного параметра материала) решения ГТУ для напряжений начинают совпадать и не зависят от конкретной микро-геометрии вершины трещины. Более того эти решения совпадают и с решением для трещины, задаваемой в виде математического надреза (сравн. рис. 42б и рис. 49а).

Заметим, что в классической линейной теории упругости замена скругленного надреза на острый вырез будет приводить к бесконечному росту напряжений в его вершине и сеточной расходимости численного решения. Напротив, в ГТУ такая замена допустима и, вообще говоря, для узких надрезов выбор конкретной микро-геометрии трещины является не принципиальным. На рисунках 49 б, в показано, что распределение нормированных значений максимальных главных (классических) напряжений $\hat{\tau}_I = \tau_I / \bar{\tau}_I$ практически не изменяется при замене острого выреза на скругленный уже при угле раскрытия 0.1 градус (острого

надреза) и при ширине 0.1 от масштабного параметра материала (скругленного надреза). Совпадение будет еще лучше, если в расчете уменьшить ширину надрезов, однако при этом картинки станут не информативной – скругленный вырез будет на вид практически идентичен острому. Представленные на рис. 49б, в решения получены с использованием КЭ сетки с размером в вершине выреза $h = l/50$ для значения масштабного параметра $l = d/50$. Вычисление главных напряжений в ГТУ проводилось аналогично классической теории и согласно стандартным соотношениям тензорного анализа. В частности, для рассматриваемого случая плоского деформированного состояния имеем:

$$\tau_I = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(\tau_{11} - \tau_{22})^2}{4} + \tau_{12}^2} \quad (4.159)$$

Таким образом, для обработки экспериментальных данных допустимо использовать приближенную геометрию трещин, например, задавая треугольные вырезы с малым углом раскрытия в вершине $< 1^\circ$. В этом случае некоторое небольшое отклонение реальной геометрии вершины трещины от модельной не будет оказывать существенное влияние на результаты моделирования. Однако в случае использования широких надрезов (шириной более чем $l \dots 2l$) или вырезов с большим углом раскрытия (более $10 \dots 15$ град.) в моделировании будет возникать ошибка, которая может приводить к недостоверной идентификации параметров и нестабильным прогнозам разрушающих нагрузок.

Дополнительным интересным выводом из полученных результатов является тот факт, что уровень концентрации напряжений оказывается максимальным не для самых узких вырезов (см. рис. 49а). Для скругленных вырезов максимум концентрации реализуется в том случае, если полуширина выреза приблизительно равна масштабному параметру $s \approx l$. Для острых вырезов максимум концентрации реализуется для начальных углов раскрытия порядка 30 градусов. Такие эффекты для острых вырезов известны и в классической механике разрушения (см., например, [347]).

4.3.5 Сравнение с экспериментальными данными и идентификация масштабных параметров

В данном разделе диссертации представлены результаты обработки известных экспериментальных данных для некоторых хрупких и квази-хрупких материалов. Обработка результатов испытаний проводилась по следующему алгоритму:

1. Были отобраны литературные источники, в которых авторы проводили эксперименты и определяли зависимость разрушающей нагрузки от геометрии трещины (длины, смещения, угла наклона), нанесенной в экспериментальных образцах.
2. Геометрия образцов и условия нагружения воспроизводилась в конечно-элементной модели. Свойства материала (модуль Юнга, коэффициент Пуассона) задавались на основе приводимых авторами сведений, либо, при их отсутствии, использовались типовые характеристики для данного класса материалов.

3. В расчетах задавался уровень нагрузки, при которой в эксперименте происходило разрушение образца. Строилось численное решение ГТУ и определялось распределение классических напряжений в образце в момент разрушения.
4. Для построения решения в упрощенных моделях ГТУ необходимо было задавать значение масштабного параметра l . Этот параметр подбирался на основе нескольких расчетов таким образом, чтобы значение максимальных главных напряжений (в вершине трещины) при разрушении равнялось пределу прочности материала σ_u .
5. Проводилась проверка, что для различной геометрии трещины уровень максимальной концентрации напряжений в момент разрушения оказывался приблизительно постоянным. Таким образом проверялась возможность описания экспериментальных данных по разрушению образцов с различными трещинами при использовании единственного идентифицированного значения масштабного параметра (найденного при обработке одного из экспериментов) и критерия прочности, формулируемого относительно классических напряжений.

Моделирование испытаний образцов с центральными трещинами на трехточечный изгиб

Трехточечный изгиб образцов с нанесенными центральными трещинами является одним из стандартных экспериментальных методов в механике разрушения, который используется, в частности, для определения критического коэффициента интенсивности напряжений при деформациях по моде I (K_{Ic}). Для моделирования таких экспериментов была использована КЭ модель, представленная на рис. 50. Образцы имеют высоту H , толщину D , расстояние между опорами составляет L , а полная длина образцов составляет $L + 2L_0$. Длина трещины обозначена как d . С учетом симметрии образцов и схемы нагружения, рассматривалась половина модели, а на ее левой грани ($x_1 = 0$) задавались условия симметрии. Воздействие от

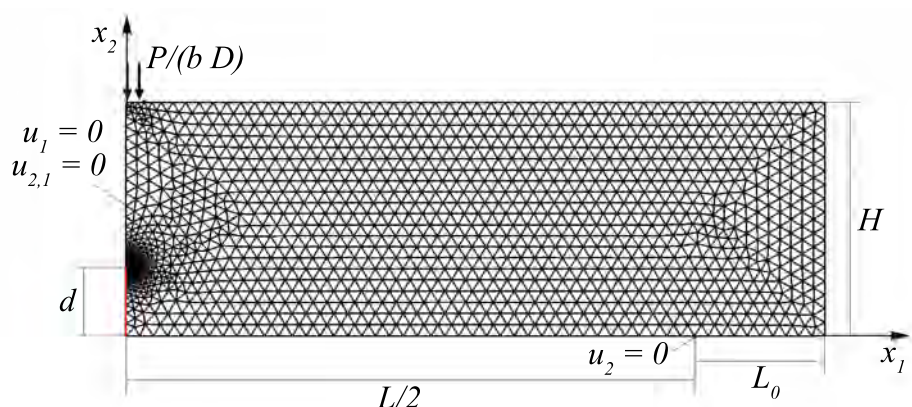


Рис. 50: Конечно-элементная модель и граничные условия, использованные при обработке испытаний по схеме трехточечного изгиба образцов с центральными трещинами. Рассматривается половина образца с учетом симметрии. Длина трещины – d (показана красным цветом).

опоры моделировалось запретом вертикальных перемещений в точке контакта экспериментального образца и опоры ($x_1 = L, x_2 = 0$). Нагрузка прикладывалась на верхней границе образца ($y = H$) в виде равномерно распределенной поверхностной нагрузки $\bar{t}_2 = -P/(bD)$ на площадке протяженностью b и шириной, равной ширине образца D . Величина силы P задавалась равной экспериментальному значению разрушающего усилия для заданных геометрических параметров модели.

Экспериментальные данные по результатам испытаний образцов стекла, керамики и бетона по схеме трехточечного изгиба с центральной трещиной были взяты из работ [348–352]. Результаты расчетов для этих экспериментальных данных представлены на рис. 51-53, на которых показано найденное распределение максимальных главных напряжений в центральном сечении образцов $x_1 = 0$ (вдоль берегов трещины и выше). Во всех представленных экспериментах использовались образцы одинакового размера с разной длиной трещины, за исключением данных для оксида кремния, представленных на рис. 52б, в которых использовались также образцы разного размера. Экспериментальные значения относительно длины трещины и разрушающей нагрузки, использованные в расчетах, указаны на рисунках 51-53. Используемые значения геометрических параметров и свойств материалов представлены в таблице 1. Идентифицированные значения масштабных параметров указаны в таблице 1 и в подписях к рисункам 51-53.

На рис. 51-53 видно, что максимальные главные напряжения в момент разрушения образцов, содержащих трещины различной длины, достигают примерно постоянного значения, близкого к пределу прочности материала. Важным является то, что этот результат получен с использованием единственного значения масштабного параметра l для различной геометрии образцов и соответствующих экспериментальных значений разрушающих нагрузок. Если задавать меньшие (большие) значения масштабного параметра l , то, во-первых, в решении будет возникать более высокий (низкий) уровень концентрации напряжений, а, во-вторых, будет изменяться и характер зависимости максимальной концентрации от размера трещины (см. рис. 48). В предельном случае, для бесконечно малых значений масштабного параметра, будет получено классическое решение с сингулярными напряжениями и деформациями в вершине трещины.

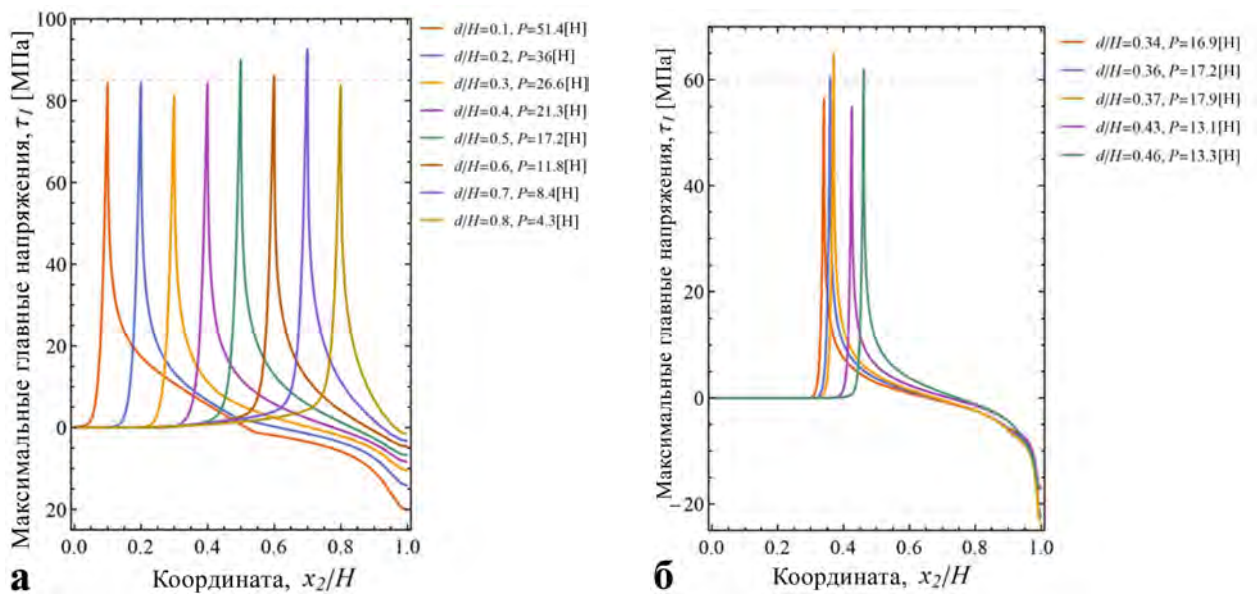


Рис. 51: Распределение максимальных главных напряжений τ_I по высоте образцов стекла, содержащих центральные трещины различной длины. Максимальная концентрация реализуется в вершине трещины. **а**: Сода-известковое стекло. Экспериментальные данные из работы [348]. Идентифицированное значение масштабного параметра: $l = 45$ мкм, **б**: Боросиликатное стекло. Экспериментальные данные из работы [350]. Идентифицированное значение масштабного параметра: $l = 15$ мкм

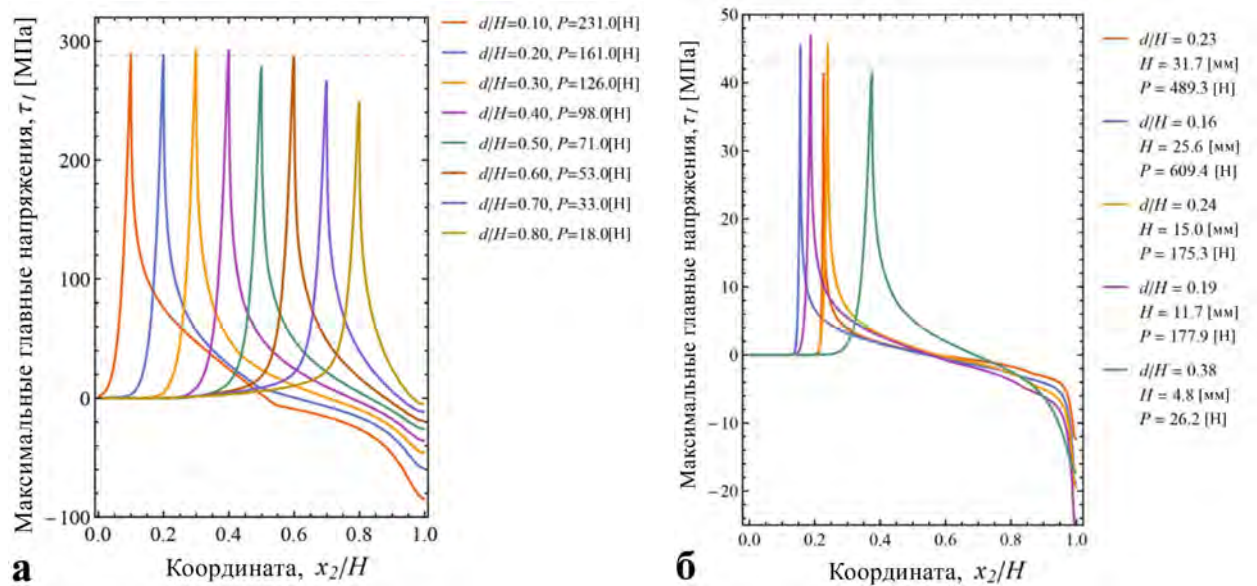


Рис. 52: Распределение максимальных главных напряжений τ_I по высоте керамических образцов, содержащих центральные трещины различной длины. Максимальная концентрация реализуется в вершине трещины. **а**: Оксид кремния (Al_2O_3). Экспериментальные данные из работы [348]. Идентифицированное значение масштабного параметра: $l = 75$ мкм, **б**: Оксид кремния (SiO_2). Экспериментальные данные из работы [349]. Высота образцов H указана на рисунке. Идентифицированное значение масштабного параметра: $l = 63$ мкм

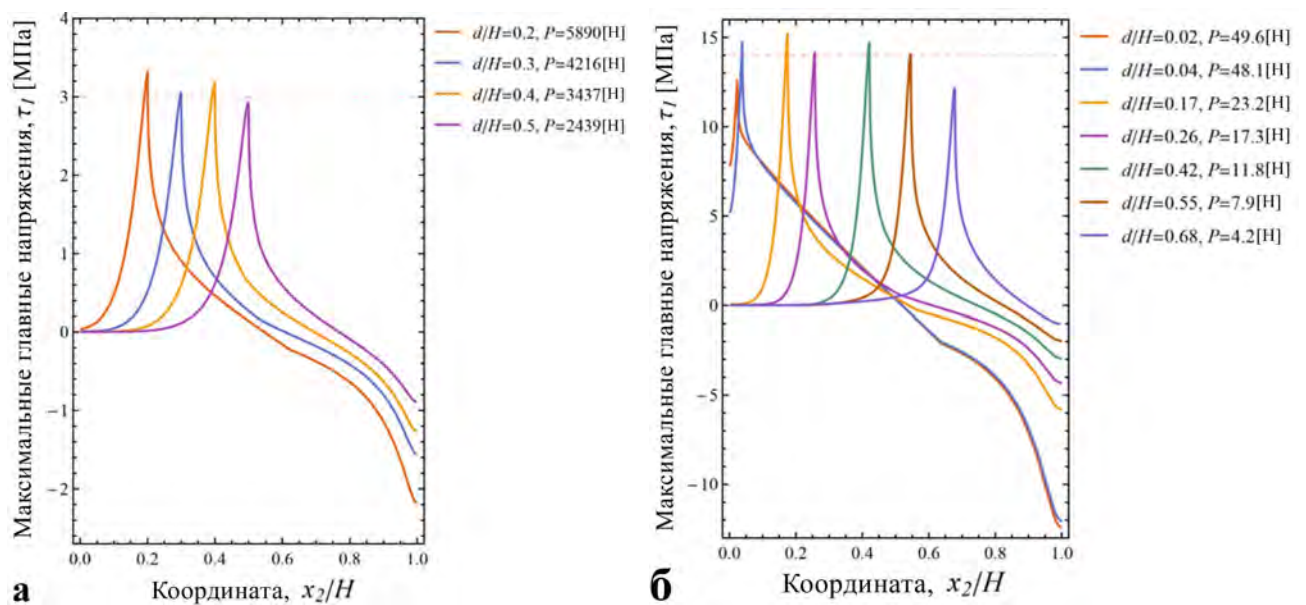


Рис. 53: Распределение максимальных главных напряжений τ_I по высоте образцов бетона, содержащих центральные трещины различной длины. Максимальная концентрация реализуется в вершине трещины. **а**: Бетон С35. Экспериментальные данные из работы [351]. Идентифицированное значение масштабного параметра: $l = 6.5$ мм, **б**: Отвержденный цемент. Экспериментальные данные из работы [352]. Идентифицированное значение масштабного параметра: $l = 250$ мкм

Таблица 2: Свойства материалов и геометрические параметры образцов, использованные при моделировании, и идентифицированные значения масштабных параметров упрощенной ГТУ

Материал	Ссылка	E , ГПа	ν , -	σ_u , МПа	K_{Ic} , МПа·м ^{1/2}	L , мм	L_0 , мм	D , мм	H , мм	b , мм	d_{cr} , мкм	l , мкм
Стекло	[348]	71	0.21	85	1	40	2.5	5	5	0.5	46	45
Стекло	[350]	63	0.22	60	0.75	16	2	4.5	3.8	0.5	50	15
Al ₂ O ₃	[348]	320	0.3	288	4.7	40	2.5	5	5	0.5	85	75
SiO ₂	[349]	58	0.21	45	0.7	4H	2	(0.8...1)H	4.8...31.7	0.5	77	63
Бетон С35	[351]	31.5	0.17	3	0.5	800	100	120	200	10	8.84·10 ³	6.5·10 ³
Отвержденный цемент	[352]	40	0.2	14	0.33	70	10	25	14	2	177	250

Представленные на рис. 51-53 и в таблице 2 результаты получены для упрощенной ГТУ. Идентифицированные значения масштабного параметра l этой теории изменяются от нескольких десятков микрон для стекла и керамики до нескольких миллиметров для крупнозерновых материалов (coarse grain) типа бетона. Значения этого параметра коррелируют с критической длиной трещины d_{cr} (или с размером зоны предразрушения), которая может быть оценена на основе стандартного соотношения, известного в механике разрушения: $d_{cr} = K_{Ic}^2 / (\pi \sigma_u^2)$. Ранее в работах [124, 197] были предложены явные зависимости между критической длиной трещины и масштабным параметром упрощенной ГТУ в виде $l \approx d_{cr} / (2\sqrt{2})$. Эта зависимость была предложена на основе использования операторного метода решения уравнений ГТУ с приближенным выполнением граничных условий. Из полученных результатов численного моделирования следует, что такой прямой строгой зависимости между l и d_{cr} может не существовать. Масштабный параметр может быть больше или меньше, или приблизительно равен d_{cr} (Таблица 1). Тем не менее численное моделирование подтверждает тот факт, что эти l и d_{cr} имеют один порядок. Поэтому, например, зная величину коэффициента критической концентрации напряжений K_{Ic} и предел прочности хрупкого материала σ_u , можно получить оценку масштабного параметра ГТУ, который по своему порядку составляет: $l \approx K_{Ic}^2 / (\pi \sigma_u^2)$.

Для определяющих соотношений градиентной теории межфазного слоя (2.43) решение оказывается аналогичным упрощенной ГТУ, за исключением того факта, что идентифицированные значения масштабного параметра оказываются, примерно, в 12 раз выше. Это объясняется следующим образом. В определяющих соотношениях градиентной теории межфазного слоя используется нормировочная константа, выбранная равной $C = \lambda + 2\mu$. Если выбрать эту константу (а она может быть выбрана произвольным образом) равной $C = 12(\lambda + 2\mu)$, то идентифицированные значения масштабного параметра в этой теории будут совпадать со значениями в упрощенной ГТУ. При этом кривая, определяющая размерный эффект на рис. 48 для градиентной теории межфазного слоя совпадет с кривой для упрощенной ГТУ. Такой произвол в выборе нормировочных констант всегда присутствует в градиентных теориях и приводит к некоторому произволу в абсолютных значениях масштабных параметров, однако, в любом случае, следует говорить о том, что l и d_{cr} оказываются, примерно, пропорциональны друг другу с точностью до некоторого постоянного множителя. Также следует учитывать, что идентифицируемые значения градиентных констант a_{ijkl} (2.30) не зависят от выбора нормировочных множителей и являются константами материала.

Для некоторых из представленных на рис. 51-53 результатах видно, что в вершине трещины происходит некоторое изменение максимальных напряжений, и они могут быть несколько выше или несколько ниже предела прочности. Это объясняется, во-первых, естественным разбросом экспериментальных данных, а, во-вторых, тем, что в образцах с относительно длинными трещинами может происходить снижение предельно допустимой концентрации напряжений. Это снижение хорошо видно для керамики из оксида алюминия на рис. 52а и для отвержденного цемента на рис. 53б для длин относительных трещин $d/H > 0.6$. Такое снижение концентрации может быть объяснено увеличением размера зоны предразрушения вблизи вершины длинной трещины [124]. Кроме этого, для длинных трещин может происхо-

дуть изменение характера разрушения с моментального катастрофического к устойчивому равновесному росту трещины, что было отмечено в работе [348], из которой брались некоторые экспериментальные данные. В последнем случае линейно упругая формулировка как ГТУ, так и классической ЛУМР оказываются недостаточно точны, что и приводит к погрешностям при моделировании длинных трещин.

Таким образом, из представленных результатов следует, что для проанализированных экспериментов, ГТУ может с достаточно высокой точностью прогнозировать разрушающие нагрузки на основе критерия по максимальным главным напряжениям. Более того, можно показать, что другие варианты критериев, в частности, относительно максимальных главных деформаций или относительно классической части энергии деформаций $U_{clas} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}$, относительно максимальных касательных напряжений или критерий Мизеса, не позволяют описать экспериментальные данные с приемлемой точностью. Оказывается, что в вершине трещин различной длины реализуются существенно различные значения таких критериев, что не позволяет применять их для прогноза разрушающих нагрузок.

Прогнозирование разрушающих нагрузок в условиях сложнапряженного состояния

Рассмотрим далее экспериментальные данные, в которых образцы были испытаны в условиях сложнапряженного состояния, а разрушение реализовывалось по смешанным модам I и II. Результаты таких экспериментов были представлены в работах [353, 354], где на трехточечный изгиб использовались образцы со смещенными и с наклонными трещинами. Соответствующие конечно-элементные модели таких образцов представлены на рис. 54.

В работе [353] эксперименты проводились на образцах гранита. Трещины наносились по центру и со смещением от центра на расстояние c (см. рис. 54а). В таких образцах условия симметрии не могут быть использованы, и расчеты проводились для полной геометрии. Трещины при этом моделировались как треугольные вырезы с углом раскрытия в вершине 0.1 градуса. Значения модуля Юнга задавалось равным 30 ГПа, коэффициент Пуассона 0.21, предел прочности при растяжении 25 МПа [355]. Высота образцов составляла $H = 50$ мм, ширина $D = 18$ мм, расстояние между опорами $L = 127$ мм, длина образцов $L + 2L_0 = 145$ мм и длина трещин $d = 10$ мм, что соответствует размерам экспериментальных образцов [353].

Распределение максимальных главных напряжений по высоте образцов из гранита показаны на рис. 55а. Решение построено в рамках упрощенной ГТУ. Каждая приведенная кривая на этом графике построена в сечении, содержащем трещину $x_1 = c$. Значения смещений трещины и соответствующие значения разрушающей нагрузки указаны на рисунке. Видно, что для данного эксперимента в вершине трещин реализуется практически постоянный уровень максимальной концентрации напряжений. Идентифицированное значение масштабного параметра для гранита оказывается достаточно большим $l = 1.6$ мм. Это значение совпадает с критической длиной трещины, которая определяется на основе соотношения $d_{cr} = K_{Ic}^2 / (\pi \sigma_u^2) \approx 1.6$ мм ($K_{Ic} \approx 1$ МПа·м^{1/2} для гранита). Таким образом, для эксперимен-

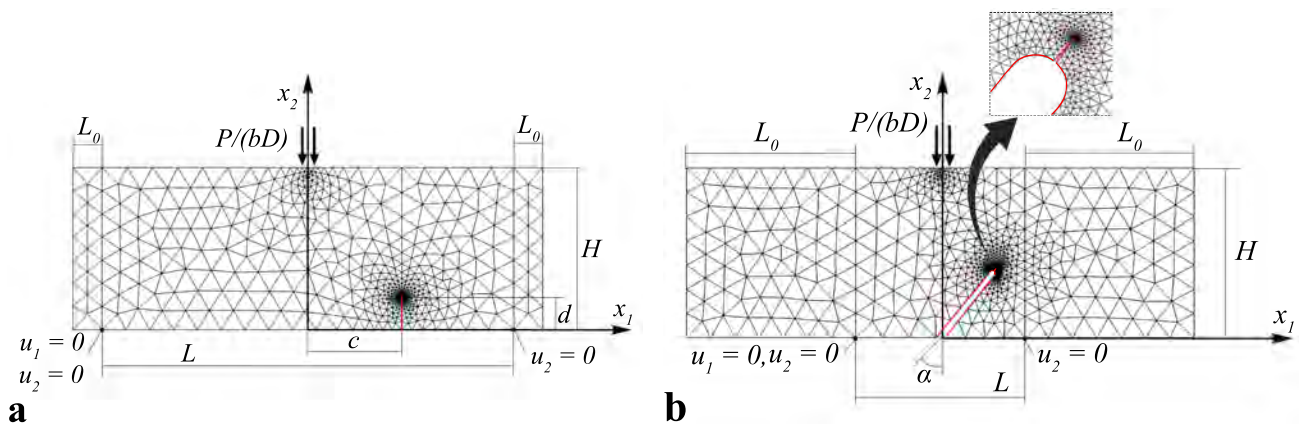


Рис. 54: Конечно-элементные модели образцов со смещенными (а) и с наклонными (б) трещинами, которые использовались для обработки экспериментальных данных из работ [353, 354].

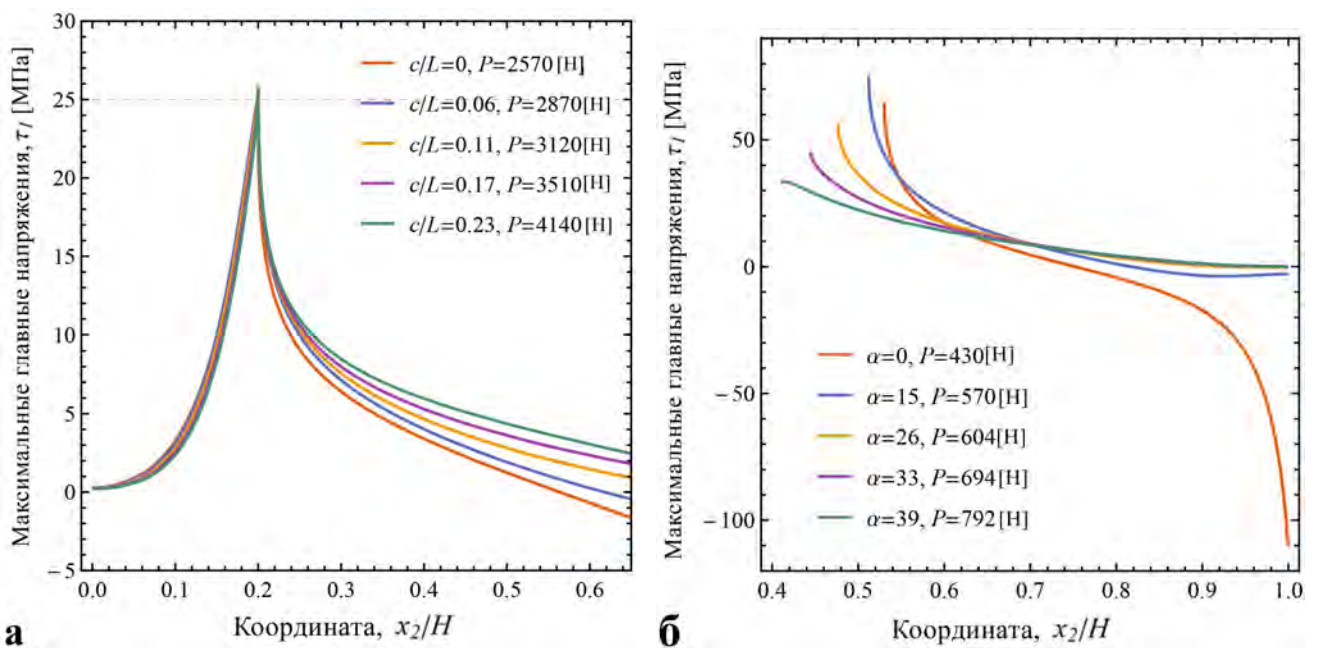


Рис. 55: Распределение максимальных главных напряжений τ_I по высоте образцов, полученное на основе КЭ моделирования для экспериментов со смешанной модой деформаций (I, II), **а**: Образцы гранита с различным смещением трещины относительно центра образца. Экспериментальные данные взяты из работы [353]. Идентифицированное значение масштабного параметра $l = 1.6$ мм, **б**: Образцы оргстекла (ПММА) с различным углом наклона трещины. Экспериментальные данные взяты из работы [354]. Идентифицированное значение масштабного параметра $l = 0.33$ мм.

тов со смещенными трещинами в образцах гранита, ГТУ позволяет с достаточно хорошей точностью прогнозировать разрушающие нагрузки при использовании критерия по максимальным главным напряжениям.

В следующей работе [354] авторы проводили эксперименты с образцами оргстекла (полиметилметакрилат, ПММА, квази-хрупкий материал), которые были изготовлены с использованием лазерной резки. Наклонные надрезы в образцах наносились в процессе резки, а потом заострялись с использованием лезвия. КЭ модель образцов и надрезов с трещинами показана на рис. 54б. Надрезы моделировались скругленным вырезом с радиусом скругления 0.25

мм (ориентировочная ширина разреза, которая может быть получена при лазерной резке). В вершине надрезов задавался дополнительный острый треугольный вырез с углом раскрытия 0.1 градус. Общая длина выреза с таким заострением задавалась равной экспериментальному значению $d = 6.3$ мм. Угол наклона трещины варьировался, как и в экспериментах, в диапазоне $\alpha = 0 \dots 39$ град. Образцы имели ширину $D = 4$ мм, расстояние между опорами и высота образцов составляли $L = H = 12$ мм. Полная длина образцов составляла $L + 2L_0 = 36$ мм. Применение столь коротких образцов с квадратной рабочей областью ($L = H$) позволяло реализовать изменение типа напряженного состояния в широком диапазоне от чистой моды I при $\alpha = 0$ и до состояния, близкого, к чистой моде II для максимальных углов наклона трещины [354].

Результаты расчетов для образцов оргстекла с наклонными трещинами показаны на рис. 55б. Здесь представлено найденное распределение максимальных главных напряжений над трещиной в направлении оси x_2 (от вершины трещины до верхней поверхности образца). В расчете использовались определяющие соотношения упрощенной ГТУ. Видно, что для различных углов наклона трещины и соответствующих заданных экспериментальных значений разрушающей нагрузки, в вершине трещины реализуется различный уровень максимальных главных напряжений. Для больших углов наклона (деформированное состояние в вершине трещины, близкое к моде II) концентрация этих напряжений снижается. Этот результат на рис. 55б получен с использованием значения масштабного параметра $l = 0.33$ мм. Варьирование этого параметра или применение других определяющих соотношений (например, градиентной теории межфазного слоя) не позволяют улучшить получаемые прогнозы. Поэтому в данном случае следует говорить о том, что критерий по максимальным главным напряжениям оказывается несправедлив. При этом, как отмечали авторы работы [354], в экспериментах сохранялся характер хрупкого разрушения во всех образцах, то есть нелинейные эффекты в данном случае не являются причиной расхождения моделирования и эксперимента.

Для объяснения полученных результатов в отношении образцов с наклонными трещинами рассмотрим другие критерии прочности. Дело в том, что может существовать переход от моды разрушения, которая определяется критерием максимальных главных напряжений (мода I), к моде разрушения, которая связана со сдвигами и интенсивными деформациями формоизменения (мода II). Такие переходы хорошо известны как в классическом прочностном анализе [356], так и в механике разрушения [357]. Объяснение этим эффектам обычно дается путем введения коэффициента триаксиальности напряженного состояния. Для высоких значений этого коэффициента разрушение определяется образованием и слиянием микро-пор, а прочностные расчеты в этом случае следует проводить на основе критерия максимальных главных напряжений. В случае низких значений коэффициента триаксиальности, разрушение материала определяется образованием полос сдвига, и прочностной анализ проводится на основе критериев, связанных со вторым инвариантом тензора напряжений [356]. В механике разрушения считается, что при высоком уровне триаксиальности напряженного состояния реализуются хрупкое разрушение материала (раскол), а при низких значениях – вязкое разрушение с развитием интенсивных пластических деформаций.

Таким образом, предлагается перенести указанные представления и на реализуемое численное моделирование в рамках ГТУ. Для этого введем коэффициент триаксиальности для классических напряжений β и дополнительные критерии прочности. Коэффициент β вводим, как обычно, в виде отношения первого инварианта тензора напряжений и квадратного корня от второго инварианта (то есть эквивалентных напряжений по Мизесу):

$$\beta = \frac{(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})/3}{\sqrt{((\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{11} - \tau_{33})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + 6\tau_{12}^2)/2}} \quad (4.160)$$

В качестве дополнительных критериев будем использовать аналог критерия Мизеса:

$$\tau_{J2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{11} - \tau_{33})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + 6\tau_{12}^2} \quad (4.161)$$

а также критерий типа Треска для максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} \quad (4.162)$$

где все записанные величины вычисляются в предположении плоского деформированного состояния.

Обычно критерии Мизеса и Треска используются для прогноза начала образования пластических деформаций. Однако эти критерии могут быть перенесены и на случай оценки прочности, в частности, существуют обобщенные классические критерии, которые включают в себя второй инвариант тензора напряжений (например, критерий Кристенсена, см. [356, 358, 359]). В данном случае будем использовать эти критерии для прогноза начала разрушения при реализации низких значений коэффициента триаксиальности, то есть при интенсивных сдвиговых деформациях. Таким образом, предлагаемый обобщенный критерий прочности сформулируем в следующем виде:

$$\begin{cases} \hat{\tau}_I = \frac{\tau_I}{\sigma_u} \leq 1 & \text{if } \beta > \beta_0 \\ \hat{\tau}_{J2} = \frac{\tau_{J2}}{\bar{\tau}} \leq 1 \quad (\text{or } \hat{\tau}_{max} = \frac{\tau_{max}}{\bar{\tau}/2} \leq 1) & \text{if } \beta < \beta_0 \end{cases} \quad (4.163)$$

где σ_u – это предел прочности при растяжении; $\bar{\tau}$ – это некоторый предельный уровень напряжений при реализации интенсивных деформаций сдвига; β_0 – это некоторое критическое значение коэффициента триаксиальности, при котором происходит изменение механизмов разрушения.

В предложенной форме обобщенного критерия прочности учтено, что в критерии по максимальным касательным напряжениям в качестве предельного значения должна использоваться величина критических напряжений в два раза ниже, чем в критерии Мизеса (то есть $\bar{\tau}/2$). Преимущество использования критерия типа Мизеса τ_{J2} или типа Треска τ_{max} заранее не очевидно, поэтому в выражении (4.163) оставлены оба этих критерия. Выбор сделаем по результатам обработки экспериментальных данных.

Результаты применения критерия (4.163) к экспериментальным данным с образцами орг-

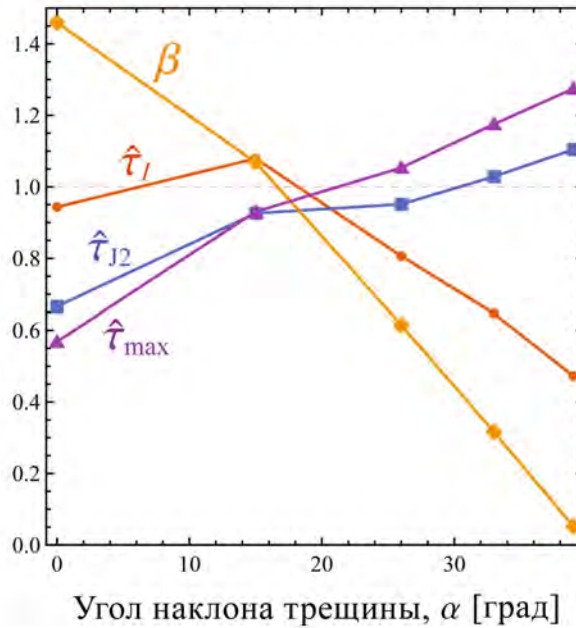


Рис. 56: Зависимость нормированных значений максимальных главных напряжений $\hat{\tau}_I$, максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{max}$, эквивалентных напряжений по Мизесу $\hat{\tau}_{J2}$, и коэффициента триаксиальности β от угла наклона трещин в образцах оргстекла. Экспериментальные данные взяты из работы [354]. Идентифицированное значение масштабного параметра составляет $l = 0.33$ мм.

стекла с наклонными трещинами показаны на рис. 56. Здесь представлена зависимость нормированных значений максимальных главных напряжений $\hat{\tau}_I$, эквивалентных напряжений по Мизесу $\hat{\tau}_{J2}$, максимальных главных напряжений $\hat{\tau}_{max}$ и коэффициента триаксиальности β . Нормировка выполнена относительно соответствующих предельных значений для этих критериев, которые приняты равными $\sigma_u = 70$ МПа и $\bar{\tau} = 48$ МПа (эти значения можно считать пределами прочности при растяжении и при сдвиге). Представленные на рис. 56 значения вычислены в вершине трещин, нанесенных с различным углом наклона α . Видно, что при увеличении угла наклона триаксиальность в вершине трещины снижается. При этом критерий по максимальным напряжениям $\hat{\tau}_I$ принимает значение около 1 при малых углах наклона трещины $\alpha < 15^\circ$. Для больших значений α величина $\hat{\tau}_I$ быстро снижается, так что этот критерий не может быть связан с описанием разрушения материала. Напротив, значения критериев типа Треска $\hat{\tau}_{max}$ и типа Мизеса растут при увеличении угла наклона трещины. Критерий типа Треска $\hat{\tau}_{max}$ растет почти линейно и достаточно быстро и не принимает близких к постоянным значениям ни для каких углов наклона трещины. Критерий типа Мизеса в меньшей степени изменяется для больших углов наклона трещины ($\alpha > 15^\circ$), и он принимает значения близкие к единице для уровня разрушающих нагрузок, которые были найдены в эксперименте.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что для корректного описания механизмов разрушения экспериментальных образцов следует использовать критерий по максимальным главным классическим напряжениям при высоких значениях коэффициента триаксиальности, а критерий относительно второго инварианта от тензора классических напряжений (в

форме эквивалентных напряжений Мизеса) - при низких значениях триаксиальности. Переход от одного механизма разрушения к другому для рассмотренных экспериментов определяется величиной коэффициента триаксиальности, приблизительно равного $\beta \approx 1$.

Для рассмотренных выше образцов гранита со смещенными трещинами (рис. 54а, рис. 55а) можно показать, что уровень триаксиальности напряженного состояния изменяется очень незначительно при смещении трещины в выбранном диапазоне значений. Поэтому для этих экспериментов обобщение критерия по максимальным главным напряжениям не требуется.

Идентифицированные в данном разделе диссертации значения масштабных параметров приведены для упрощенной ГТУ. Для градиентной теории межфазного слоя соответствующие значения масштабных параметров оказываются приблизительно в 12 раз выше.

Таким образом, в данном разделе диссертации показано, что применение ГТУ может быть эффективным для прогноза разрушающих нагрузок в хрупких и квази-хрупких материалах, содержащих трещины и острые вырезы. Прочностной анализ при этом может быть сведен к применению критериев разрушения, формулируемых относительно классических напряжений, которые в ГТУ, наряду с деформациями, принимают конечные значения в вершинах таких концентраторов. Показано, что для различной геометрии дефектов и условий нагружения может быть необходимым применение различных критериев прочности. Показано, что в численных расчетах в рамках ГТУ удастся исключить возникновение сеточной расходимости решений для моделей с концентраторами, а дополнительные параметры ГТУ можно определять, следуя методу Васильева-Лурье, то есть из испытаний на трещиностойкость типовых образцов, содержащих трещины различной длины.

Результаты данного раздела были опубликованы в работе [184].

4.4 Решение задачи о клине с заданной сосредоточенной нагрузкой в вершине

Возможность задания нагрузок на острых кромках трехмерных тел и в угловых точках в плоских задачах является спецификой формулировки градиентной теории упругости. Соответствующие граничные условия являются следствием применения вариационного подхода в ГТУ (см. раздел 2.1). В предыдущих разделах диссертации рассматривались задачи, в которых острые кромки либо отсутствуют (задачи о включениях), либо они присутствуют, но являются свободными от нагрузки, а граничные условия на ребрах рассматривались только при реализации численного моделирования (задачи о балках и острых вырезах). В данном разделе диссертации рассмотрим задачу, которая непосредственно позволяет исследовать характер поведения решения ГТУ вблизи острой кромки, на которой задана нагрузка. Это задача о плоской деформации клина, в вершине которого задана сила или перемещения. В классической теории упругости такая задача известна как обобщенная задача Фламана (при задании сосредоточенного усилия), и ее решение содержит логарифмическую особенность для перемещений, а напряжения имеют асимптотику $\sim r^{-1}$. В ГТУ такие задачи ранее не рассматривались, хотя решения задачи Фламана и Черутти для полуплоскости хорошо известны, и они были получены разными авторами для разных вариантов определяющих соотношений ГТУ [11, 360–362]. Также известны примеры численного КЭ анализа, в которых была показана возможность получения регулярных решений ГТУ для задач, в которых трехмерные призмы нагружались силами, распределенными вдоль острых кромок [18].

Задачей данного раздела является исследование характера поведения решения ГТУ вблизи нагруженной острой кромки упругого тела на основе аналитического представления решения для перемещений в форме Папковича-Нейбера (3.8), (3.9), а также исследование сходимости численных КЭ решений для такого рода задач. Прикладной стороной рассматриваемой задачи является проблема описания НДС объектов, на кромках которых приложены сосредоточенные нагрузки. Такие задачи возникают, например, в случае, если к макроскопическому телу приложена нагрузка, распределенная по малой площадке вблизи вершины его какого-либо ребра. Для моделирования таких условий нагружения удобным является использование концепции сосредоточенной силы. Кроме этого, рассматриваемая задача относится к микро/наноразмерным объектам и соответствует случаю, когда, например, острозаточенное лезвие ("nano-blade") контактирует с жесткой подложкой или выполняется манипуляция фрагментом двумерного материала приложением нагрузки в угловой точке с использованием средств атомно-силовой микроскопии и т.п.

У рассматриваемой задачи есть и теоретическая значимость. Недавно было показано, что для некоторых упрощенных градиентных теорий имеет место неоднозначность вариационной формулировки, которая приводит к двум разным наборам граничных условий [186, 363]. Отличие этих наборов заключается, в первую очередь, в том, что формулировка краевой задачи либо содержит дополнительные граничные условия на кромках, либо они отсутствуют. Такая неоднозначность была показана для моментной теории упругости (couple stress theory) [363] и для дилатационной теории упругости [186]. Рассматриваемые далее примеры

задач о клине могут быть использованы в качестве конкретных примеров валидации различных формулировок упрощенных градиентных теорий. Будет показано, что в отличие от общей ГТУ или упрощенной ГТУ Айфантиса, моментная и далатационная теория упругости не позволяют получать регулярных решений вблизи острой кромки, нагруженной сосредоточенной нагрузкой. Аналитическое решение будет построено и проанализировано в малой области вблизи вершины клина. Численное моделирование будет проводиться для области конечных размеров.

4.4.1 Постановка задачи

Для получения аналитических оценок, рассмотрим бесконечный клин с прямолинейными границами, которые в полярной системе координат определяются угловыми координатами $\theta = \pm\alpha$ ($\alpha \leq \pi/2$). Начало координат находится в вершине клина, а отсчет угловой координаты ведется от плоскости, которая является плоскостью симметрии клина (рис. 57). В качестве внешней нагрузки в вершине клина заданы перемещения \bar{u}_1 в горизонтальном направлении ($\theta = \pi$).

Решение классической теории упругости для аналогичной задачи с заданной силой (обобщенная задача Фламана) может быть построено с использованием функции напряжений Эйри и с выполнением граничных условий на поверхностях $r = const$ в интегральной форме для результирующего усилия [364]. Для симметричного случая нагружения (растяжение) это решение для напряжений имеет вид:

$$\tau_{rr}^{clas} = \frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \tau_{r\theta}^{clas} = \tau_{\theta\theta}^{clas} = 0 \quad (4.164)$$

где F – это заданное усилие в вершине клина.

Классическое решение для перемещений в случае симметричного нагружения может быть

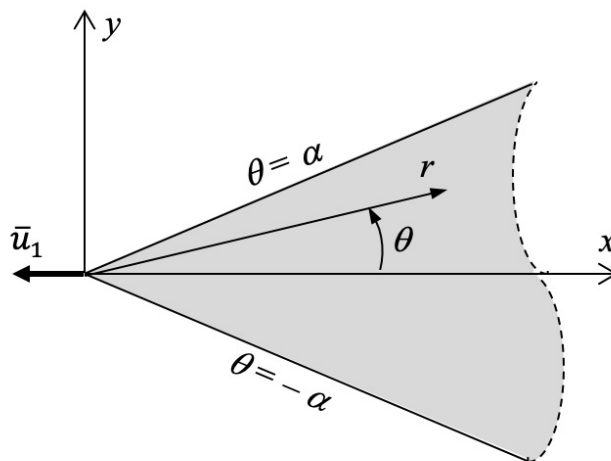


Рис. 57: К задаче об упругом клине, в вершине которого заданы смещения

найден с учетом реализующегося поля напряжений (4.164) в следующем виде [364]:

$$\begin{aligned} u_r^{clas} &= C_1 \theta \sin \theta - C_2 \cos \theta + C_3 \ln r \cos \theta \\ u_\theta^{clas} &= C_1 \theta \cos \theta - C_2 \sin \theta - C_3 \ln r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.165)$$

где $C_1 = \frac{C}{2(\lambda+\mu)}$, $C_2 = \frac{C}{4\mu}$, $C_3 = \frac{C}{4\kappa\mu}$, $C = \frac{F}{2\alpha+\sin 2\alpha}$.

Заметим, что решение (4.165) в классической теории упругости может быть получено и на основе общего решения в форме Папковича-Нейбера, то есть путем построения решения в перемещениях. Для этого в представлении для классического векторного потенциала $\hat{\Phi}$ (3.11) необходимо оставить две ненулевые константы c_{50} и c_{70} , а также добавить к этому представлению дополнительное слагаемое следующего вида:

$$\hat{\Phi} = c_{02} \{\theta \sin \theta, \theta \cos \theta, 0\} \quad (\text{или в декартовых координатах } \hat{\Phi} = c_{02} \{0, \arctan \frac{y}{x}, 0\}) \quad (4.166)$$

где c_{02} – это неизвестная константа.

Дополнительное слагаемое $\hat{\Phi}$ не присутствует в исходном представлении в рядах (3.11), несмотря на то, что это представление является полным. Однако это слагаемое $\hat{\Phi}$ может быть и должно быть добавлено в структуру общего решения рассматриваемой задачи, как дополнительное частное решение, удовлетворяющее векторному уравнению Лапласа. В противном случае, для построения решения необходимо было бы рассматривать весь бесконечный ряд (3.11), что является неудобным и нецелесообразным. В результате, использование представления Папковича-Нейбера в классической теории упругости позволяет получить решение, совпадающее с (4.164), (4.165), причем можно показать, что ненулевые константы этого представления будут иметь следующие значения:

$$c_{02} = \frac{2C_1(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad c_{50} = \frac{2C_3(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad c_{70} = \frac{2(\lambda + 2\mu)(C_3(\lambda + \mu) - C_2(\lambda + 3\mu))}{(\lambda + 3\mu)^2} \quad (4.167)$$

где константы C_i были определены в (4.165).

Далее рассмотрим вариант обобщения этого решения на случай градиентной теории упругости. Будем использовать подход, основанный на представлении решения в форме Папковича-Нейбера, так как функция напряжений Эйри в ГТУ не может использоваться с той же эффективностью, как в классической упругости (из-за более сложной структуры граничных условий), а, например, использование интегральных преобразований не позволяет эффективно решить рассматриваемую задачу. В частности, применяемое обычно в задачах о клине преобразование Меллина, приводит уравнения равновесия ГТУ к форме дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, решение которых является даже более сложной задачей, по сравнению с исходной. В аналитическом решении будем рассматривать случай нагружения, при котором в вершине клина задается смещение, так как такая формулировка допускает замкнутое решение. В численном решении также рассмотрим и случай задания усилия.

4.4.2 Анализ асимптотического решения в перемещениях вблизи вершины клина

Решение будем строить в полярной цилиндрической системе координат в предположении плоского деформированного состояния. Решение задачи ГТУ для перемещений в этом случае может быть записано в следующем виде (3.8):

$$\begin{aligned} u_r &= (1 - \kappa)\Phi_r - r\kappa \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} + \frac{l_2^2}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + l_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{u}_r, \\ u_\theta &= \Phi_\theta - \kappa \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - l_2^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{l_1^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{u}_\theta \end{aligned} \quad (4.168)$$

где учтено, что в решении ГТУ возникнет дополнительная составляющая $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, 0\}$ вследствие присутствия слагаемого $\hat{\Phi}$ (4.166) в классическом решении (4.166).

Все потенциалы, входящие в (4.168), могут быть определены с учетом симметрии рассматриваемой задачи. В частности, используя стандартные тригонометрические соотношения и переобозначения для констант, из представленного в разделе разложения в ряд (3.11) можно получить следующее представление для классического векторного потенциала Φ :

$$\begin{aligned} \Phi_r &= c_{02}\theta \sin \theta + c_{50} \ln r \cos \theta + c_{70} \cos \theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left((r^{-n}c_{2n} + r^n c_{4n}) \cos(n-1)\theta + (r^{-n}c_{5n} + r^n c_{7n}) \cos(n+1)\theta \right), \\ \Phi_\theta &= c_{02}\theta \cos \theta - c_{50} \ln r \sin \theta - c_{70} \sin \theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left((r^{-n}c_{2n} + r^n c_{4n}) \sin(n-1)\theta - (r^{-n}c_{5n} + r^n c_{7n}) \sin(n+1)\theta \right), \end{aligned} \quad (4.169)$$

куда также включены и дополнительные слагаемые, связанные с присутствием в рассматриваемой задаче частного решения $\hat{\Phi}$.

Скалярные потенциалы ϕ и χ (3.14), через которые определяется градиентная часть поля перемещений, могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n \left(\frac{r}{l_1} \right) b_{1n} + I_n \left(\frac{r}{l_1} \right) b_{3n} \right) \cos n\theta, \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n \left(\frac{r}{l_2} \right) d_{1n} + I_n \left(\frac{r}{l_2} \right) d_{3n} \right) \cos n\theta \end{aligned} \quad (4.170)$$

Дополнительную составляющую для градиентного поля перемещений $\hat{\mathbf{u}}$ в (4.168) определим следующим образом. Будем предполагать, что эта составляющая должна обладать таким же поведением в вершине клина, как и классическое частное решение $\hat{\Phi}$ (4.166). То есть это решение должно быть 1) ограниченным в начале координат, 2) оно должно быть связано с функцией $\arctan(y/x)$ в декартовой системе координат, и 3) оно должно обладать одновременно ненулевыми потенциальной и вихревой составляющими. Для получения решения, удовлетворяющего этим требованиям, воспользуемся векторными потенциалами,

которые удовлетворяют векторному уравнению Гельмгольца и имеют следующий вид [365]:

$$\hat{\Psi}_i = b_i \left\{ \theta I_0\left(\frac{r}{l_i}\right) \sin \theta, \theta I_0\left(\frac{r}{l_i}\right) \cos \theta, 0 \right\} : \quad \hat{\Psi}_i - l_i^2 \nabla^2 \Psi_i = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (4.171)$$

где b_i – это неизвестные константы, I_0 – это модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка (эта функция неограниченно растет на бесконечности, однако, далее будем рассматривать структуру решения только вблизи вершины клина).

Так как записанный вид векторных потенциалов (4.171) содержит, как потенциальную, так и вихревую части, то для получения соответствующего решения для перемещений необходимо использовать представление Папковича-Нейбера в форме (3.1), то есть:

$$\hat{\mathbf{u}} = l_1^2 \nabla \nabla \cdot \hat{\Psi}_1 + \hat{\Psi}_2 - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \hat{\Psi}_2 \quad (4.172)$$

В представленной записи потенциал $\hat{\Psi}_1$ используется для задания потенциальной части $\mathbf{u}^{(g)}$, а потенциал $\hat{\Psi}_2$ определяет вращательную часть поля перемещений. При этом эти потенциалы определены с использованием соответствующих масштабных параметров, входящих в уравнения равновесия ГТУ (l_1, l_2 , см. (4.171)). Покомпонентная запись для $\mathbf{u}^{(g)}$ может быть легко получена далее с учетом (4.171), (4.172).

Далее исследуем структуру решения в перемещениях для рассматриваемой задачи. Во-первых, рассмотрим слагаемые, которые имеют 2π -периодичность в решении (4.168)-(4.172), а также частные решения (4.166) и (4.172). К этим слагаемым относятся и классические составляющие решения с логарифмической особенностью. Тогда получим, что соответствующая часть поля перемещений имеет вид:

$$\begin{aligned} (u_r)_{2\pi} &= \left(c_{02}(1 - \kappa) + b_1 \left(I_0\left(\frac{r}{l_1}\right) - \frac{l_1}{r} I_1\left(\frac{r}{l_1}\right) \right) + b_2 \frac{l_2}{r} I_1\left(\frac{r}{l_2}\right) \right) \theta \sin \theta \\ &+ \left(c_{70}(1 - \kappa) - c_{50}\kappa + c_{50}(1 - \kappa) \ln r + (1 + \kappa)r^{-2}c_{22} + (1 - 3\kappa)r^2c_{42} \right. \\ &+ b_1 \left(\frac{l_1}{r} I_1\left(\frac{r}{l_1}\right) - \frac{l_1^2}{r^2} I_0\left(\frac{r}{l_1}\right) \right) - b_2 \left(\frac{l_2}{r} I_1\left(\frac{r}{l_2}\right) - \frac{l_2^2}{r^2} I_0\left(\frac{r}{l_2}\right) \right) \\ &+ \left. \frac{l_2^2}{r} K_1\left(\frac{r}{l_2}\right) d_{11} + \frac{l_2^2}{r} I_1\left(\frac{r}{l_2}\right) d_{31} - \frac{l_1}{2} \left(K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + K_2\left(\frac{r}{l_1}\right) \right) b_{11} + \frac{l_1}{2} \left(I_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + I_2\left(\frac{r}{l_1}\right) \right) b_{31} \right) \cos \theta \\ (u_\theta)_{2\pi} &= \left(c_{02}(1 - \kappa) + b_1 \frac{l_1}{r} I_1\left(\frac{r}{l_1}\right) + b_2 \left(I_0\left(\frac{r}{l_2}\right) - \frac{l_2}{r} I_1\left(\frac{r}{l_2}\right) \right) \right) \theta \cos \theta \\ &+ \left(-c_{02}\kappa - c_{70}(1 - \kappa) - c_{50}(1 - \kappa) \ln r + (1 + \kappa)r^{-2}c_{22} + (1 + \kappa)r^2c_{42} \right. \\ &+ b_1 \left(\frac{l_1}{r} I_1\left(\frac{r}{l_1}\right) - \frac{l_1^2}{r^2} I_0\left(\frac{r}{l_1}\right) \right) - b_2 \left(\frac{l_2}{r} I_1\left(\frac{r}{l_2}\right) - \frac{l_2^2}{r^2} I_0\left(\frac{r}{l_2}\right) \right) \\ &+ \left. \frac{l_2}{2} \left(K_0\left(\frac{r}{l_2}\right) + K_2\left(\frac{r}{l_2}\right) \right) d_{11} - \frac{l_2}{2} \left(I_0\left(\frac{r}{l_2}\right) + I_2\left(\frac{r}{l_2}\right) \right) d_{31} - \frac{l_1^2}{r} K_1\left(\frac{r}{l_1}\right) b_{11} - \frac{l_1^2}{r} I_1\left(\frac{r}{l_1}\right) b_{31} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.173)$$

Заметим, что полученное представление для перемещений автоматически удовлетворяет уравнениям равновесия ГТУ (2.58), что обеспечивается использованием представления

решения в форме Папковича-Нейбера и может быть проверено прямой подстановкой.

В аналитических оценках ограничимся исследованием поведения решения

$$\mathbf{u}_{2\pi} = \{(u_r)_{2\pi}, (u_\theta)_{2\pi}, 0\}$$

вблизи вершины клина. Для этого в представлении (4.173) выполним предельный переход, предполагая что радиальная координата стремится к нулю (точнее к нулю стремятся отношения r/l_1 и r/l_2). Получим:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (u_r)_{2\pi} &= \left((c_{50}(1 - \kappa) + \frac{l_2 d_{11} + l_1 b_{11}}{2}) \ln r \right. \\ &\quad \left. + ((1 + \kappa)c_{22} - l_1^2(b_{11}l_1 + b_1) + l_2^2(d_{11}l_2 + b_2))r^{-2} + O(1) \right) \cos \theta \\ \lim_{r \rightarrow 0} (u_\theta)_{2\pi} &= \left(- (c_{50}(1 - \kappa) + \frac{l_2 d_{11} + l_1 b_{11}}{2}) \ln r \right. \\ &\quad \left. + ((1 + \kappa)c_{22} - l_1^2(b_{11}l_1 + b_1) + l_2^2(d_{11}l_2 + b_2))r^{-2} + O(1) \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.174)$$

Отсюда видно, что записанные пределы для компонент поля перемещения будут иметь конечные значения в начале координат, если решение задачи допускает следующие соотношения между константами, присутствующими в (4.174):

$$c_{50} = -\frac{l_2 d_{11} + l_1 b_{11}}{2(1 - \kappa)}, \quad c_{22} = \frac{l_1^2(b_{11}l_1 + b_1) - l_2^2(d_{11}l_2 + b_2)}{1 + \kappa} \quad (4.175)$$

При выполнении этих условий (4.175) классическая логарифмическая особенность в начале координат, а также дополнительная составляющая с асимптотикой r^{-2} , возникающая в ГТУ, не будут присутствовать в выражении для перемещений (4.174), и таким образом будет обеспечена регулярность решения в вершине клина для поля перемещений.

Далее найдем дилатацию и вектор поворотов, которые реализуются в решении $\mathbf{u}_{2\pi}$. Здесь также рассматриваем предельные значения этих величин вблизи вершины клина. Из соотношений (4.173), учитывая (4.175), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \Theta_{2\pi} &= \frac{1}{2(1 - \kappa)} \left(c_{02}(2 - 6\kappa + 4\kappa^2) + 2b_1(1 - \kappa) + b_{11}l_1 - d_{11}l_2(1 - 2\kappa) \right) r^{-1} \cos \theta + O(r) \\ \lim_{r \rightarrow 0} \boldsymbol{\omega}_{2\pi} &= \left\{ 0, 0, \frac{1}{4(1 - \kappa)} \left(2c_{02}(1 - \kappa) + 2b_2(1 - \kappa) - b_{11}l_1 + d_{11}l_2(1 - 2\kappa) \right) r^{-1} \sin \theta + O(r) \right\} \end{aligned} \quad (4.176)$$

Из записанных соотношений следует, что дилатация и повороты вблизи вершины $r = 0$ будут ограничены, если выполняются следующие соотношения для констант:

$$b_1 = \frac{c_{02}(2 - 6\kappa + 4\kappa^2) + b_{11}l_1 - d_{11}l_2(1 - 2\kappa)}{2(\kappa - 1)}, \quad b_2 = \frac{2c_{02}(1 - \kappa) - b_{11}l_1 + d_{11}l_2(1 - 2\kappa)}{2(\kappa - 1)} \quad (4.177)$$

Далее можно показать, что выполнение условий (4.175) и (4.177) обеспечивает также и регулярность поля деформаций $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ и напряжений τ_{ij} (2.29) в вершине клина. Более того, эти условия позволяют также получить ограниченные решения для компонент

вектора напряжений, входящего в граничные условия на гранях клина $\theta = \pm\alpha$. Покажем это на примере определяющих соотношений упрощенной ГТУ. Для этой теории все представленные выше выкладки (4.173)-(4.177) остаются справедливыми, при этом в них следует предположить равенство двух масштабных параметров $l_1 = l_2 = l$. В упрощенной ГТУ выражение для вектора напряжений (2.13), (2.57) в полярной системе координат на гранях клина $\theta = \pm\alpha$ могут быть представлены в следующем виде:

$$t_r = \tau_{r\theta} - \frac{\partial\mu_{rr\theta}}{\partial r} - \frac{\partial\mu_{r\theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\mu_{rr\theta} + \mu_{r\theta r} - \mu_{\theta\theta\theta} + \frac{\partial\mu_{r\theta\theta}}{\partial\theta} \right) \quad (4.178)$$

$$t_\theta = \tau_{\theta\theta} - \frac{\partial\mu_{\theta r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial\mu_{\theta\theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\mu_{r\theta\theta} + \mu_{\theta r\theta} + \mu_{\theta\theta r} + \frac{\partial\mu_{\theta\theta\theta}}{\partial\theta} \right) \quad (4.179)$$

где учтено, что грани являются плоскими, то есть их средняя кривизна равна нулю, $H = 0$.

Чтобы в явном виде записать выражения для компонент вектора напряжений (4.178) и (4.179) необходимо использовать определяющие соотношения для нахождения напряжений τ_{ij} (2.29) и градиентных напряжений μ_{ijk} (2.35). После преобразований и упрощений можно получить следующие выражения для этих компонент вблизи вершины клина:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (t_r)_{2\pi} &= \frac{1}{4(1-\kappa)} \left(4c_{02}(1-\kappa)\mu + b_{11}l(2(1-\kappa)\lambda + (3-5\kappa)\mu) \right. \\ &\quad \left. + d_{11}l(1-3\kappa)\mu \right) r^{-1} \sin\alpha + O(r) \end{aligned} \quad (4.180)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (t_\theta)_{2\pi} &= \frac{1}{4(1-\kappa)} \left(4c_{02}(1-\kappa)(1-2\kappa)(\lambda+2\mu) \right. \\ &\quad \left. - (b_{11} + d_{11})l(2(1-2\kappa)\lambda + (1-5\kappa)\mu) \right) r^{-1} \cos\alpha + O(r) \end{aligned} \quad (4.181)$$

Из (4.180) и (4.181) получаем два дополнительных условия на константы, которые обеспечивают ограниченность вектора напряжений вблизи вершины (то есть возможность выполнения граничных условий на гранях $\theta = \pm\alpha$):

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{6c_{02}(\kappa-1)\mu((1-2\kappa)\lambda + (1-4\kappa)\mu)}{l(\lambda+\mu)(2(1-2\kappa)\lambda + (1-5\kappa)\mu)}, \\ d_{11} &= \frac{2c_{02}(1-\kappa)((2-4\kappa)\lambda^2 + 9(1-2\kappa)\lambda\mu + (7-20\kappa)\mu^2)}{l(\lambda+\mu)(2(1-2\kappa)\lambda + (1-5\kappa)\mu)} \end{aligned} \quad (4.182)$$

Таким образом, получено 6 условий (4.175), (4.177), (4.182), в которые входят 7 констант: c_{02} , c_{50} , c_{22} , b_1 , b_2 , b_{11} , d_{11} . Выполнение этих условий обеспечивает регулярное решение для перемещений, деформаций, напряжений и вектора напряжений (входящего в граничные условия при $\theta = \pm\alpha$) вблизи вершины клина. Записанные условия являются независимыми, и поэтому они могут быть использованы для нахождения 6 констант. Последняя константа остается неизвестной и должна определяться из условий нагружения. Например, в качестве такой константы выберем c_{02} . В этом случае все остальные константы могут быть найдены в рамках упрощенной ГТУ из соотношений (4.175), (4.177), (4.182) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
c_{22} &= \frac{6l^2(\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)}{(\mu - \lambda)(3\lambda + 5\mu)}c_{02}, & c_{50} &= \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\mu - \lambda}c_{02}, & b_1 &= \frac{3\mu(\lambda + 3\mu)}{(\lambda - \mu)(\lambda + 2\mu)}c_{02}, \\
b_2 &= \frac{\lambda + 3\mu}{\mu - \lambda}c_{02}, & b_{11} &= 0, & d_{11} &= \frac{4(\lambda + 3\mu)}{\lambda - \mu}c_{02}
\end{aligned} \tag{4.183}$$

где учтено, что $\kappa = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}$.

Заметим, что полученный результат (4.183) для упрощенной ГТУ содержит нулевое значение для константы b_{11} , которая содержится в потенциале ψ , и определяет поэтому потенциальную составляющую поля градиентных перемещений $\hat{\mathbf{u}}$ в общем решении (4.173). Тем не менее, потенциальная составляющая в полученном решении для упрощенной ГТУ не будет нулевой, так как в нем присутствует дополнительное частное решение $\hat{\mathbf{u}}$ (4.171), (4.172), которое определяется ненулевым значением константы b_1 и содержит ненулевую дилатацию.

Далее рассмотрим другие упрощенные градиентные теории, а именно, дилатационную теорию упругости и моментную теорию. Особенностью гипотез этих теорий является тот факт, что они приводят к нулевым значениями одного из масштабных параметров и не обеспечивают регуляризацию либо поля дилатации (моментная теория), либо поля малых поворотов (дилатационная ГТУ).

Во-первых, рассмотрим дилатационную теорию. В этой теории второй масштабный параметр равен нулю ($l_2 = 0$, $l_1 = l$), а градиентная часть поля перемещений является безвихревой (3.24). Это означает, что потенциал χ в представлении общего решения (4.170), а также потенциал $\hat{\Psi}_2$ в частном решении (4.172) должны быть исключены, то есть соответствующие константы, входящие в выражение (4.173), должны быть обнулены: $d_{11} = 0$ и $b_2 = 0$. Таким образом, в дилатационной ГТУ имеем пять констант c_{02} , c_{50} , c_{22} , b_1 , b_{11} , относительно которых записываются шесть условий (4.175), (4.177), (4.182), необходимых для получения регулярного решения. С учетом указанных особенностей решения дилатационной теории, вместо (4.175), получим:

$$c_{50} = -\frac{l_1 b_{11}}{2(1 - \kappa)}, \quad c_{22} = \frac{l^2(b_{11}l + b_1)}{1 + \kappa} \tag{4.184}$$

Условия для получения ограниченных значений дилатации и вращений (4.177) преобразуются к виду:

$$b_1 = \frac{c_{02}(2 - 6\kappa + 4\kappa^2) + b_{11}l}{2(\kappa - 1)}, \quad c_{02} = \frac{b_{11}l}{2(1 - \kappa)} \tag{4.185}$$

Условия для регуляризации вектора напряжений (4.178) и (4.179) с учетом гипотез дилатационной теории упругости (2.39) принимают вид:

$$b_{11} = 0, \quad c_{02} = \frac{b_{11}l}{2(1 - \kappa)} \tag{4.186}$$

(второе условие здесь совпадает с соответствующим условием в (4.185)).

Полученные соотношения (4.184)-(4.186) могут быть удовлетворены только в рамках три-

виального решения с нулевыми значениями всех констант. То есть в этом решении не возникнет даже классических составляющих для перемещений, деформаций и напряжений. Отсюда можно сделать вывод, что в рассматриваемой задаче в рамках дилатационной теории упругости всегда будет возникать сингулярность, а какие-либо из условий (4.184)-(4.186) не будут удовлетворены.

Далее рассмотрим моментную теорию упругости, в которой первый масштабный параметр равен нулю ($l_1 = 0, l_2 = l$), а градиентная часть поля перемещений содержит только вихревую составляющую. Следовательно, из решения необходимо исключить слагаемые, связанные с потенциалами ϕ (4.168), (4.170) и $\hat{\Psi}_1$ (4.172), то есть необходимо принять $b_{11} = 0$ и $b_1 = 0$ в решении (4.173). В этом случае будем иметь пять констант ($c_{02}, c_{50}, c_{22}, b_2, d_{11}$) и 6 условий (4.175), (4.177), (4.182), которые приводятся к следующему виду:

Условие (4.175) для ограниченных перемещений в вершине клина приводится к виду:

$$c_{50} = -\frac{ld_{11}}{2(1-\kappa)}, \quad c_{22} = \frac{-l^2(d_{11}l_2 + b_2)}{1+\kappa} \quad (4.187)$$

Условие ограниченной дилатации и поля вращений (4.177):

$$c_{02} = \frac{d_{11}l(1-2\kappa)}{(2-6\kappa+4\kappa^2)}, \quad b_2 = \frac{2c_{02}(1-\kappa) + d_{11}l(1-2\kappa)}{2(\kappa-1)} \quad (4.188)$$

И условие (4.182), необходимое для задания граничных условий, которые вычисляются для вектора напряжений с учетом гипотез моментной теории упругости (2.41):

$$d_{11} = 0, \quad c_{02} = 0 \quad (4.189)$$

Выполнение записанных условий (4.187)-(4.189) возможно только в рамках тривиального решения, что означает, что моментная теория упругости также не допускает регуляризации решения рассматриваемой задачи, и некоторые из записанных условий не будут удовлетворены.

Таким образом, в обобщенной задаче Фламана регулярные решения для перемещений, напряжений и деформаций не могут быть получены в однопараметрических теориях, которые предполагают равенство нулю одного из масштабных параметров в уравнениях равновесия ГТУ. При этом полные (двухпараметрические) теории допускают такую регуляризацию. Полученный результат означает, что условия на острых кромках тел (ребрах) в дилатационной и в моментной ГТУ, вообще говоря, не имеют смысла, так как они не могут быть предписаны без возникновения неограниченных перемещений (то есть неограниченной работы внешних сил). Поэтому постановка обобщенной задачи Фламана в этих теориях должна содержать интегральный вид граничных условий для внешней нагрузки на кромках, как и соответствующая классическая постановка. Либо необходимо рассматривать модели с учетом нелинейных эффектов.

Помимо 2π -периодических и классических слагаемых, учтенных в решении (4.173), возможно рассмотреть все остальные слагаемые, входящие в представление потенциалов Папковича-

Нейбера. Однако оказывается, что все слагаемые, содержащие сингулярность в вершине клина $r = 0$ (содержащие модифицированные функции Бесселя $K_n(\frac{r}{l})$ и радиальные функции r^{-n}), должны быть исключены из решения, так как они не позволяют получать регулярные решения. Этот факт не является тривиальным, так как, например, среди составляющих, включенных в решение (4.173), присутствуют и сингулярные в функции, однако их комбинация обеспечивает асимптотически регулярное решение (с учетом выведенных условий на константы). Присутствующие в представлении Папковича-Нейбера растущие функции (содержащие $I_n(\frac{r}{l})$ и r^n) в общем случае могут быть включены в решение, однако, при получении асимптотических оценок они не играют роли, так как затухают при $r \rightarrow 0$. Эти слагаемые могут учитываться при построении решений для клиновидных областей конечного размера, однако, такие задачи в любом случае потребуют реализации численных методов, так как, в отличие от классической задачи, в ГТУ в граничные условия на гранях клина войдут функции с разной скоростью роста вдоль радиальной координаты ($I_n(\frac{r}{l})$ и r^n). Поэтому далее рассмотрим пример аналитического решения краевой задачи для клина, но в асимптотическом приближении, а для области конечных размеров соответствующее решение исследуем численно, с использованием МКЭ.

4.4.3 Пример асимптотического решения для задачи со смешанными граничными условиями

Пример аналитического решения построим для задачи со "смешанным" типом граничных условий, предписывающих отсутствие напряжений и нулевые нормальные градиенты перемещений на гранях клина (то есть дополнительные граничные условия ГТУ будут кинематическими). Такая формулировка краевой задачи является допустимой в ГТУ, и она позволяет получить наиболее простое решение. Существование и единственность для задачу ГТУ с таким типом граничных условий была доказана в работе [366]. Формулировка рассматриваемой краевой задачи следующая:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \in [-\alpha, \alpha] : \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \theta = \pm\alpha : \quad \mathbf{t} = 0 \quad i.e. \quad t_r = 0, \quad t_\theta = 0, \\ \quad \quad \quad \partial_n \mathbf{u} = 0 \quad i.e. \quad \partial_n u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} = 0, \quad \partial_n u_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \\ r = 0 \text{ (apex)} : \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_e, \quad i.e. \quad u_r = -\bar{u}_1 \cos \theta, \quad u_\theta = \bar{u}_1 \sin \theta \end{array} \right. \quad (4.190)$$

где условия в вершине клина определяются требованием, чтобы в декартовой системе координат смещение происходило в горизонтальном направлении $\bar{\mathbf{u}}_e = \{-\bar{u}_1, 0, 0\}$ (рис. 57).

Вдали от вершины, на некоторой поверхности $r = r_0$, предполагаем, что заданы условия закрепления, которые обеспечивают глобальное равновесие клина и отсутствие его смещений, как жесткого целого. Исследуя асимптотическое решение в вершине, рассматривать эти условия не будем.

Рассматриваем предложенную форму решения для перемещений (4.173) с учетом найден-

ных значений констант (4.183), отвечающих условиям регуляризации (4.175), (4.177), (4.182). Это решение удовлетворяет уравнениям равновесия ГТУ, так как получено на основе представления Папковича-Нейбера. Кроме того, как было указано выше, это решение обеспечивает регулярность компонент вектора напряжений (4.178), (4.179) на гранях клина. Более того, найденные значения констант (4.183) обеспечивают, что компоненты вектора напряжений (4.178), (4.179) вблизи вершины ведут себя как $O(r)$, то есть вблизи вершины граничные условия относительно этих компонент выполняются естественным образом, $r \rightarrow 0$: $t_r \equiv 0$, $t_\theta \equiv 0$. Таким же поведением обладают и нормальные градиенты от перемещений и соответствующие граничные условия также выполняются тождественно вблизи вершины: $\partial_n u_r \equiv 0$, $\partial_n u_\theta \equiv 0$ (это обеспечивается на этапе выполнения условий (4.177), следующих из требования регулярности дилатации и вектора поворотов). Физический смысл того, что градиенты перемещений вблизи нагруженной вершины оказываются равны нулю, определяется общим свойством решений в ГТУ, в которых кажущаяся жесткость малых объемов материала или малоразмерных объектов повышается, по сравнению с классическими представлениями. В данном случае имеем условия, ограничивающие градиенты от перемещений на границах клина, эффект от которых распространяется и на весь (малый) объем материала вблизи его вершины.

Таким образом, для рассматриваемой краевой задачи (4.190) остается только выполнить граничное условие по заданному смещению в вершине клина. Для выполнения этого условия подставим (4.183) в (4.173) и вычислим значения перемещений при $r \rightarrow 0$. Получим:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{u} = \{U \cos \theta, -U \sin \theta, 0\} + O(r) \quad (4.191)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} U &= c_{02}S(l) + \frac{(b_{31}+d_{31})}{2}l + c_{70}(1 - \kappa) \\ S(l) &= \frac{(5+8\gamma)\lambda^2+4(3+10\gamma)\lambda\mu+(7+48\gamma)\mu^2}{4(\lambda-\mu)(\lambda+2\mu)} - \frac{2(\lambda+3\mu)}{(\lambda-\mu)} \log(2l) \end{aligned} \quad (4.192)$$

и $\gamma \approx 0.5772$ – это постоянная Эйлера.

Далее используем граничное условие в вершине в форме $\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_e$ (см. (4.190)) и найдем:

$$U = -\bar{u}_1 \quad \Rightarrow \quad c_{02} = -\frac{2\bar{u}_1 + (b_{31} + d_{31})l + 2c_{70}(1 - \kappa)}{2S(l)} \quad (4.193)$$

Записанное граничное условие в данном случае использовано для определения константы c_{02} . Остальные константы b_{31} , d_{31} , c_{70} , c_{42} , входящие в (4.173), должны определяться на основе граничных условий, предписываемых вдали от вершины клина, что однако выходит за рамки асимптотического анализа. Выполнение этих граничных условий приведет и к зависимости решения от угла раскрытия клина (так же как и в классическом случае, см. (4.165)).

Таким образом для краевой задачи (4.191) в рамках асимптотического решения показана возможность получения конечных значений перемещений, напряжений и деформаций вблизи нагруженной вершины клина. Заметим, что сингулярность будет сохраняться и в решении

задачи ГТУ для вектора напряжений на поверхностях с нормалью вдоль радиальной координаты ($r = const$, $\mathbf{n} = \{1, 0, 0\}$). Можно показать, что компоненты этого вектора будут иметь особенность порядка $\sim r^{-1} \log r$ вблизи вершин. Такая специфика решения отражает тот факт, что в рассматриваемой задаче нагрузка задана в вершине клина (на бесконечно малой площадке). Заметим, что аналогичные эффекты возникают и в задачах ГТУ для трещин. Вектор напряжений в вершине трещины в ГТУ принимает бесконечные значения с особенностью более сильной, чем в классическом случае ($\sim r^{-3/2}$), но тем не менее все граничные условия выполняются, а решение для напряжений и деформаций оказывается регулярным.

4.4.4 Примеры численного моделирования. Анализ сходимости КЭ решений в упрощенных градиентных теориях

Аналитические оценки были ограничены асимптотическим анализом и примером решения для задачи со смешанными граничными условиями на гранях и заданным смещением в вершине клина. Примеры таких аналитических решений необходимы для понимания возникающих эффектов в ГТУ. Численное моделирование является более гибким подходом, и оно может быть легко реализовано для любых вариантов граничных условий, допустимых в ГТУ. Рассмотрим далее примеры таких численных решений в ГТУ, которые были реализованы с использованием смешанного метода конечных элементов в интерфейсе Weak Form PDE Comsol (раздел 3.5.2). Будем рассматривать область треугольной формы (клин), представленную на рис. 58. Длина клина равна L , а его угол раскрытия составляет 2α . Рассматриваем задачу плоской деформации и считаем, что ширина клина в направлении "из плоскости" составляет $D = L$. В вершине клина заданы перемещения \bar{u}_1 (либо приложена сосредоточенная сила \bar{s}_1), а на противоположной грани задаем условия закрепления $u_1 = 0$. На боковых поверхностях клина будем задавать условия по отсутствию нагрузки, то есть нулевые значения вектора напряжений и градиентных напряжений. Постановка задачи имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta \in [-\alpha, \alpha] : & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \theta = \pm\alpha : & \mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{m} = 0 \\ x_1 = 0 \text{ (вершина)} : & \mathbf{u} = \{-\bar{u}_1, 0, 0\}, \quad (\text{или } \mathbf{s} = \{-\bar{s}_1, 0, 0\}) \\ x_1 = L : & u_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad \mathbf{m} = 0 \end{array} \right. \quad (4.194)$$

Из решения будем находить уровень напряжений τ_{ij} при заданном смещении (либо смещении u_1 при заданной силе), которые реализуются в вершине клина для различного размера конечно-элементной сетки h , измельчаемой также вблизи вершины. Таким образом, исследуем возможность получения регулярных (то есть сходящихся и не зависящих от размера КЭ сетки) решений для рассматриваемой задачи ГТУ. Очевидно, что в классической теории упругости соответствующее КЭ решение всегда будет содержать неустранимую сеточную зависимость. В расчетах используются треугольные элементы с аппроксимацией третьего порядка. Размер сетки варьируется от $h = L$ (один треугольный элемент на всю область) до

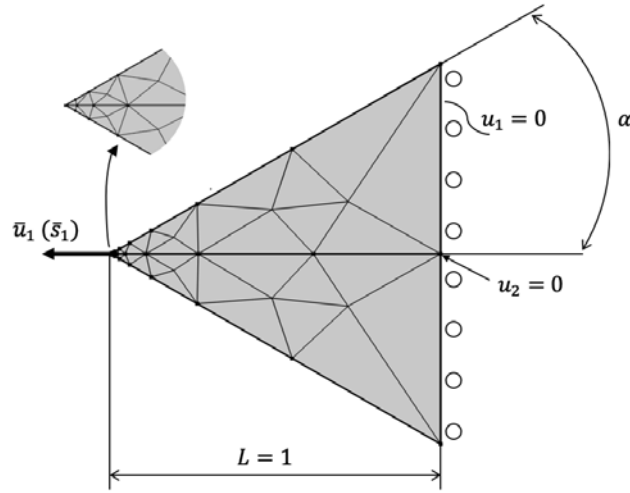


Рис. 58: Пример конечно-элементной модели клина, использованной в численных расчетах

$h = 10^{-4}L$. Пример конечно-элементной сетки показан на рис. 58.

Численные решения строятся в рамках трех упрощенных вариантов определяющих соотношений ГТУ: упрощенной ГТУ, дилатационной ГТУ и моментной теории упругости. Масштабный параметр моделей варьируется в диапазоне $l = [10^{-3}L, L]$. Параметр η в моментной теории (2.40) не оказывает качественного влияния на получаемые результаты для рассматриваемой задачи симметричного нагружения, и для получения приведенных далее результатов расчетов он был принят равным $\eta = 0.5$. Модуль Юнга материала задавался равным $E = 1$ ГПа, а коэффициент Пуассона – $\nu = 0.3$. В вершине клина задавалось смещение $\bar{u}_1 = 0.01L$ или сила $\bar{s}_1 = 0.01EH$, где $H = 2L \tan \alpha$ – это высота грани, лежащей напротив нагружаемой вершины. Такое задание \bar{s}_1 обеспечивает независимость значений напряжений τ_{11} , осредненных по высоте поперечного сечения клина вдали от его вершины, от угла раскрытия. На графиках будем строить зависимости для нормированных значений напряжений, которые определяются по формуле $\hat{\tau}_{ij} = \tau_{ij}L/(\bar{u}_1E)$ (при заданном \bar{u}_1), и для нормированных значений перемещений $\hat{u}_1 = u_1EH/(\bar{s}_1L)$ (при заданном \bar{s}_1).

Примеры решений для напряженно-деформированного состояния клина, найденные для различных вариантов определяющих соотношений ГТУ, показаны на рис. 59. Эти результаты представлены для значения масштабного параметра $l = 0.1L$, угла раскрытия $2\alpha = \pi/3$ и наименьшего рассматриваемого размера сетки ($h = 10^{-4}L$). Из представленных иллюстраций видно, что в упрощенной ГТУ (рис. 59а) возникает гладкое решение вблизи вершины клина с некоторой концентрацией напряжений. При этом неоднородное напряженное состояние распространяется практически на всю рассматриваемую область. Однако в двух других вариантах ГТУ (рис. 59б, в) результат принципиально иной. В этих решениях деформации возникают только в малой локальной области вблизи нагруженной вершины, а концентрация напряжений повышается на 2-3 порядка. Более того, в решении дилатационной ГТУ возникает значительное искажение сетки, и вся энергия деформаций концентрируется вблизи единственного нагруженного узла (Рис. 59б).

Исследование сходимости численных решений представлено на рис. 60-62. Для упро-

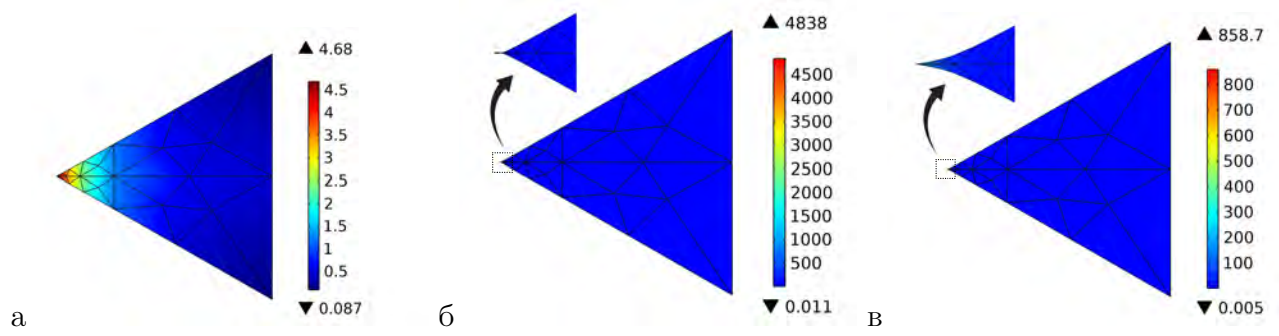


Рис. 59: Примеры напряженно-деформированного состояния клина, найденные на основе численного моделирования с заданием смещения в вершине. Показано распределение нормированных напряжений $\hat{\tau}_{11}$. а – упрощенная ГТУ, б – дилатационная ГТУ, в – моментная теория упругости.

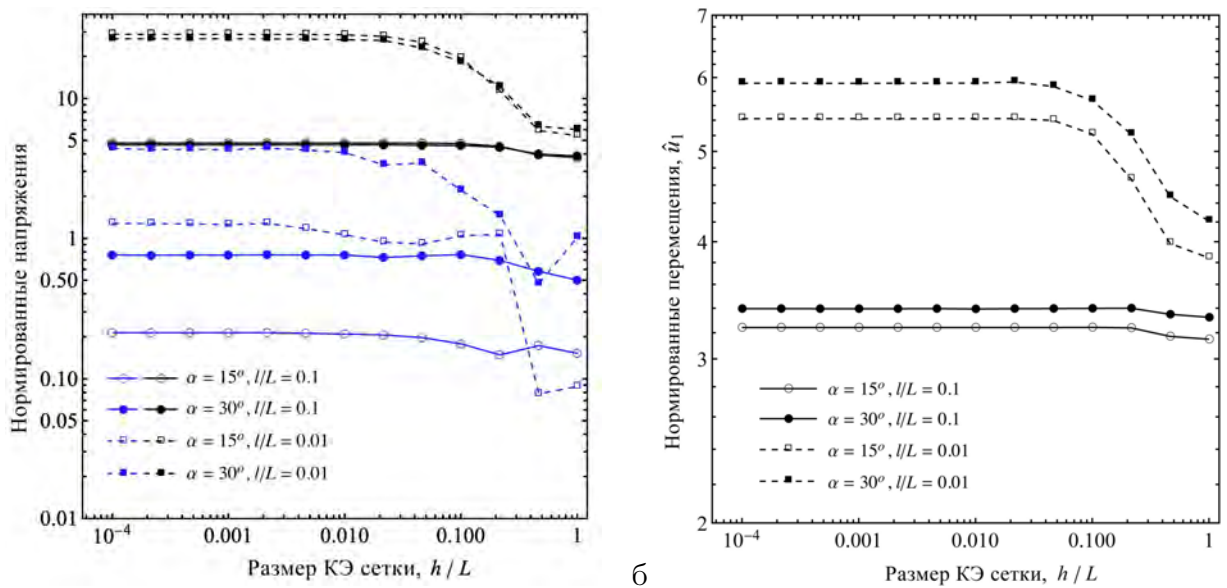
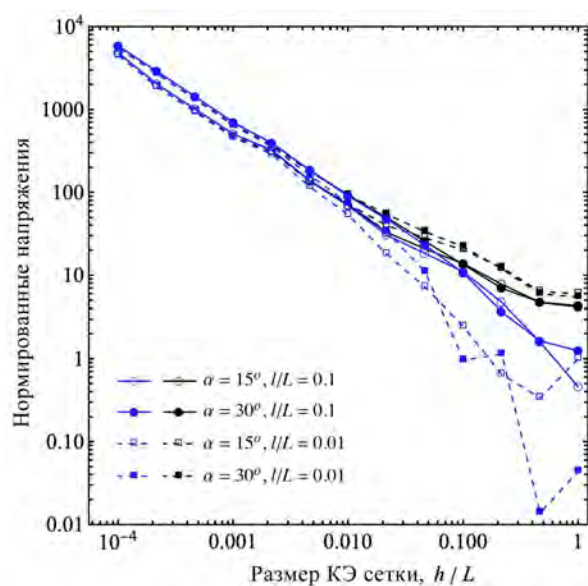


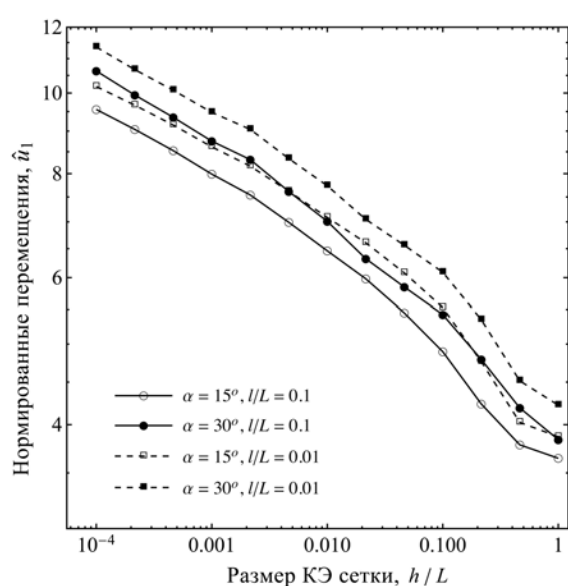
Рис. 60: Влияние размера сетки на численное решение, построенное в **упрощенной ГТУ**, а: нормированные напряжения $\hat{\tau}_{11}$ (черный цвет) и $|\hat{\tau}_{22}|$ (синий цвет), вычисленные в вершине клина при заданном смещении, б: нормированные значения перемещений при заданной силе в вершине клина.

ценной ГТУ (рис. 60) показано, что при уменьшении размера сетки может быть получено сходящееся, стабильное решение для напряжений и перемещений, не зависящее от размера сетки. Сходимость может быть достигнута при использовании размера сетки, порядка, $h/L = 0.001 \dots 0.01$. При уменьшении масштабного параметра происходит рост уровня напряжений и решение позже выходит на асимптотические значения, что объясняется тем, что поведение материала оказывается более классическим (в пределе при $l = 0$ возникает расходимость). При уменьшении угла раскрытия происходит повышение продольных напряжений τ_{11} и снижение поперечных τ_{22} , что объясняется сближением свободных от нагрузки боковых граней клина и тем, что напряженное состояние становится ближе к одноосному растяжению.

Исследование влияния размера КЭ сетки на численные решения в дилатационной и моментной теориях представлено на рис. 61, 62. Для этих теорий реализуются расходящиеся решения, существенно зависящие от размера конечных элементов, при любых значениях

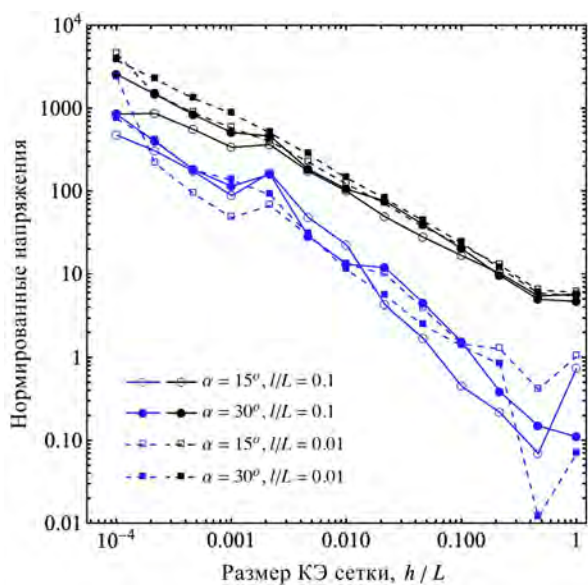


а

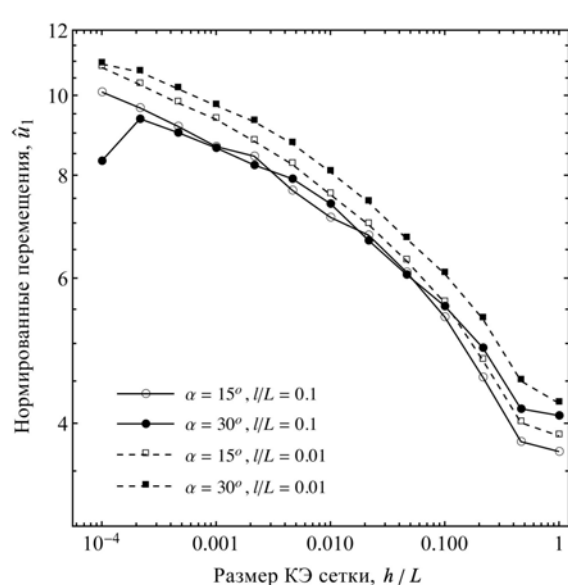


б

Рис. 61: Влияние размера сетки на численное решение, построенное в **дилатационной** ГТУ, а: нормированные напряжения $\hat{\tau}_{11}$ (черный цвет) и $|\hat{\tau}_{22}|$ (синий цвет), вычисленные в вершине клина при заданном смещении, б: нормированные значения перемещений при заданной силе в вершине клина.



а



б

Рис. 62: Влияние размера сетки на численное решение, построенное в **моментной** ГТУ, а: нормированные напряжения $\hat{\tau}_{11}$ (черный цвет) и $|\hat{\tau}_{22}|$ (синий цвет), вычисленные в вершине клина при заданном смещении, б: нормированные значения перемещений при заданной силе в вершине клина.

масштабного параметра и угла раскрытия. Реализуется экспоненциальный рост напряжений (рис. 61а, 62а) и близкий к экспоненциальному рост перемещений (рис. 61б, 62б).

Таким образом, показано, что задание сосредоточенных нагрузок на острых кромках в некоторых упрощенных вариантах ГТУ приводит к возникновению сингулярных аналитических и расходящихся численных решений. Получение имеющих физический смысл решений для таких задач возможно только в "полных" градиентных теориях, содержащих два ненулевых масштабных параметра в уравнениях равновесия и обеспечивающих регуляризацию как потенциальной, так и вихревой составляющей поля перемещений. Примером такой теории является упрощенная ГТУ. В моментной и дилатационной теории упругости регулярных решений для задач с нагрузками на кромках получить не удастся. В этих теориях для решения таких задач необходимо учитывать, например, нелинейные эффекты и т.п.

Зависимость уровня концентрации напряжений от масштабного параметра и угла раскрытия клина, найденная на основе численного моделирования в упрощенной ГТУ, представлена на рис. 63, 64. Уменьшение угла раскрытия приводит к некоторому росту продольных нормальных напряжений $\hat{\tau}_{11}$ и снижению поперечных напряжений $\hat{\tau}_{22}$. Для больших относительных значений масштабного параметра l/L (малый размер клина) продольные напряжения $\hat{\tau}_{11}$, в отличие от поперечных $\hat{\tau}_{22}$ практически перестают зависеть от угла. Это означает, что вблизи вершины нагруженных острых кромок (например, лезвий), ГТУ прогнозирует, что уровень разрушающей нагрузки, связанной с максимальными напряжениями $\hat{\tau}_{11}$, перестает зависеть от угла раскрытия. Для малых соотношений l/L независимость напряжений $\hat{\tau}_{11}$ от угла раскрытия реализуется в некотором ограниченном диапазоне острых углов. При стремлении отношения l/L к нулю в модели реализуется классическое решение, и напряжения стремятся в бесконечность (рис. 64).

Результаты, представленные в данном разделе диссертации, опубликованы в работе [187].

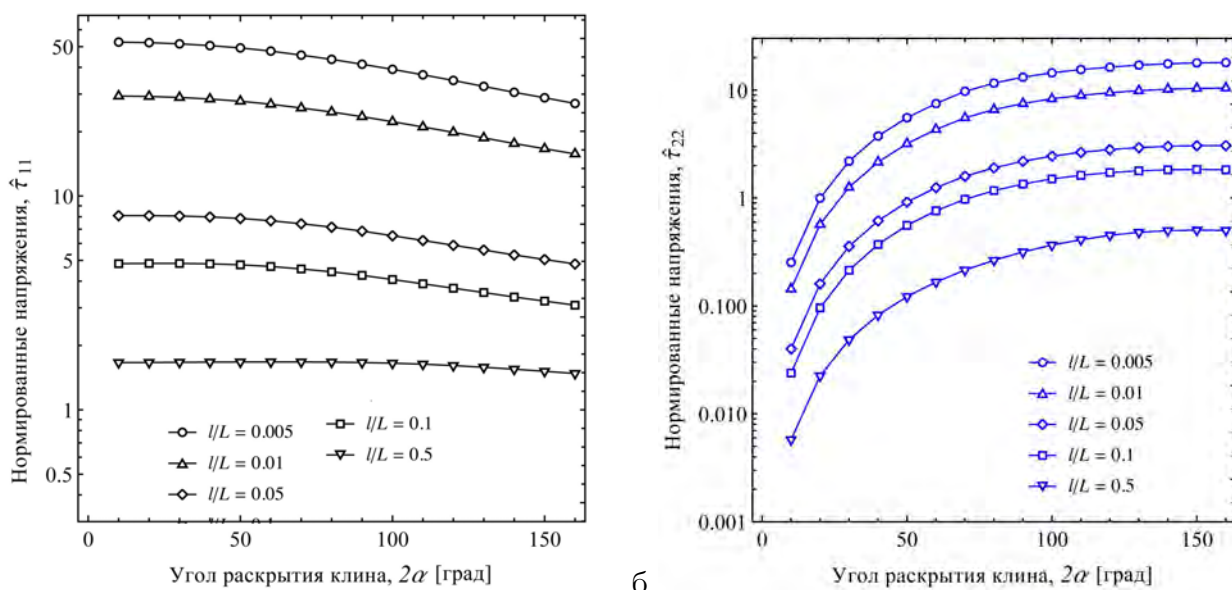


Рис. 63: Зависимость уровня концентрации напряжений от угла раскрытия клина в численном решении упрощенной ГТУ, а: $\hat{\tau}_{11}$, б: $\hat{\tau}_{22}$.

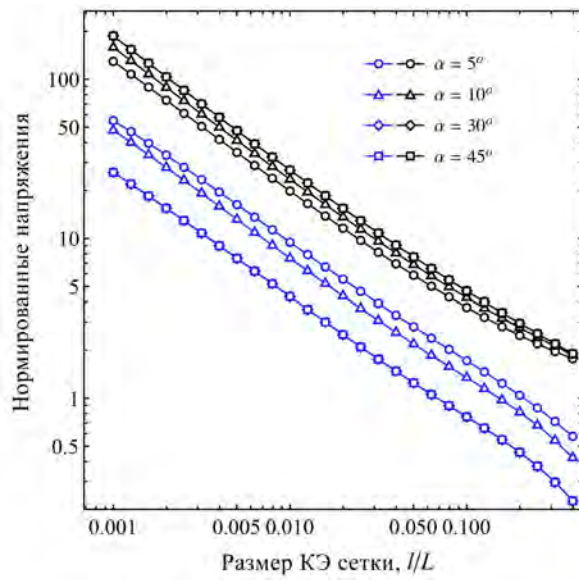


Рис. 64: Зависимость уровня концентрации напряжений от масштабного параметра в численном решении упрощенной ГТУ ($\hat{\tau}_{11}$ – черный цвет, $\hat{\tau}_{22}$ – синий цвет).

Глава 5. Масштабные эффекты в градиентных моделях пьезоэлектрических материалов

В данной главе диссертации рассматриваются проблемы построения корректных прикладных моделей и решений в рамках градиентной теории электроупругости (ГТЭ). Представленные результаты по сути являются обобщением аналогичных решений, полученных в предыдущем разделе диссертации, на случай связанных электроупругих эффектов, возникающих в трансверсально изотропных пьезоэлектрических материалах. Как было указано во введении, основной акцент делается на исследовании градиентных эффектов, связанных с присутствием в структуре внутренней энергии квадратичных членов от вторых пространственных производных от перемещений и потенциала электрического поля. Соответствующий вариант теории электроупругости был построен в работе [86] и рассматривался в недавних работах [93, 104, 155, 156]. Формулировка рассматриваемого варианта ГТЭ была представлена в разделе 2.2. Эффекты флексоупругости не рассматриваются, во-первых, для упрощения получаемых выкладок в аналитических решениях, а, во-вторых, это связано с тем, что модели флексоупругости достаточно хорошо исследованы в настоящее время, и им посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассмотрены аналогичные проблемы.

Примеры численных расчетов в данном разделе выполнены для пьезоэлектрической керамики на основе цирконат-титаната свинца PZT-7A (если не указано иного). Характеристики этого материала, относящегося к классу симметрии 6mm [266]: $C_{11} = 148$ ГПа, $C_{12} = 76$ ГПа, $C_{13} = 74$ ГПа, $C_{33} = 131$ ГПа, $C_{44} = 25.5$ ГПа, $e_{31} = -2.1$ Кл/м², $e_{33} = 9.5$ Кл/м², $e_{15} = 9.2$ Кл/м², $\kappa_{11} = 460\kappa_0$, $\kappa_{33} = 235\kappa_0$, где $\kappa_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м диэлектрическая проницаемость вакуума. При рассмотрении композитов, в качестве материала матрицы предполагается использование изотропной полимерной эпоксидной смолы с характеристиками $C_{11} = 8$ ГПа, $C_{12} = 4.4$ ГПа, $C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2 = 1.8$ ГПа, $\kappa_{11} = 4.2\kappa_0$.

Новые результаты, представленные в данной главе, были опубликованы в работах [16, 174, 176–178, 183, 185].

5.1 Проблема построения балочных теорий в ГТЭ

5.1.1 Модель градиентной балки Бернулли-Эйлера в ГТЭ

Рассмотрим формулировку модели балки типа Бернулли-Эйлера в ГТЭ. Будем использовать аналогичный вариационный подход, предложенный в разделе 3.1.1 для упругих материалов в ГТУ. Модель балки будем строить, используя классические гипотезы Бернулли-Эйлера, вводя дополнительные предположения о распределении потенциала электрического поля по толщине балки. Такое обобщение является необходимым для пьезоэлектрических балок, и аналогичные классические модели были построены в работах Миндлина, Тирстена и других известных авторов [159, 164, 165, 169, 367–369].

Рассматриваем балку из пьезоэлектрического материала. Ось балки ориентирована вдоль оси x , прогибы балки при прямом изгибе возникают в плоскости xz , трансверсальное направ-

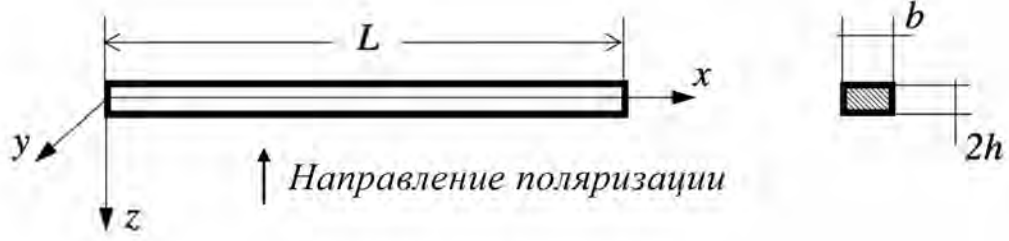


Рис. 65: К построению модели балки Бернулли-Эйлера в ГТЭ

ление (из плоскости) - это направление вдоль оси y (см. рис. 65). Материал балки поляризован в направлении ее толщины, так что в ней реализуется симметрия гексагонального кристалла класса $6mm$ (трансверсальная изотропия относительно оси z). Плотность электрической энтальпии h_e в материале балки зависит от деформаций, напряженности электрического поля и их градиентов (см. раздел 2.2). В компонентной записи для структуры h_e (2.16) получаем [86, 93, 104, 156]:

$$h_e(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, E_i, E_{i,j}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} - \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} E_{i,j} E_{k,l} \quad (5.1)$$

где e_{ijk} - тензор пьезоэлектрических констант; ε_{ij} - тензор диэлектрических проницаемостей, α_{ijkl} - это тензор градиентных диэлектрических коэффициентов; $E_i = -\phi_{,i}$ - это компоненты вектора напряженности электрического поля, ϕ - потенциал электрического поля.

Определяющие соотношения теории (2.17)-(2.20) в компонентной записи:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial h_e}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad \mu_{ijk} = \frac{\partial h_e}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n} \quad (5.2)$$

$$D_i = -\frac{\partial h_e}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ij} E_j, \quad Q_{ij} = -\frac{\partial h_e}{\partial E_{i,j}} = \alpha_{ijkl} E_{k,l} \quad (5.3)$$

Уравнения равновесия, обобщенный закон Гаусса и граничные условия на поверхности и на ребрах тела в ГТЭ (2.23)-(2.24) в компонентной записи могут быть представлены в следующем виде [177]:

$$\sigma_{ij,j} - \tau_{ijk,jk} = 0, \quad x_i \in \Omega \quad (5.4)$$

$$D_{i,i} - Q_{ij,ij} = 0, \quad x_i \in \Omega \quad (5.5)$$

$$(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}) n_j - (\tau_{ijk} n_k)_{,j} + (\tau_{ijk} n_k n_l)_{,l} n_j = \bar{t}_i \quad \text{или} \quad u_i = \bar{u}_i, \quad x_i \in \partial\Omega \quad (5.6)$$

$$(D_j - Q_{jk,k}) n_j - (Q_{jk} n_k)_{,j} + (Q_{jk} n_k n_l)_{,l} n_j = \bar{q} \quad \text{или} \quad \phi = \bar{\phi}, \quad x_i \in \partial\Omega \quad (5.7)$$

$$\tau_{ijk} n_j n_k = 0 \quad \text{или} \quad u_{i,j} n_j = 0, \quad x_i \in \partial\Omega \quad (5.8)$$

$$Q_{ij} n_i n_j = 0 \quad \text{или} \quad E_i n_i = 0, \quad x_i \in \partial\Omega \quad (5.9)$$

$$[\tau_{ijk} m_j n_k] = 0, \quad [Q_{jk} m_j n_k] = 0, \quad x_i \in \partial\partial\Omega \quad (5.10)$$

где $m_i = \epsilon_{iml}s_m n_l$ – это вектор ко-нормали к ребру, s_i – это касательный единичный вектор к ребру, ϵ_{jml} – это символ Леви-Чивиты.

Для построения балочной теории вводим гипотезы Бернулли-Эйлера для перемещений и дополнительную гипотезу о распределении потенциала электрического поля по толщине балки. Эта дополнительная гипотеза представляет собой параболический закон, и она необходима для построения связанной теории тонких электроупругих балок. Такие же гипотезы используются и в классических моделях [164, 165, 367, 368, 370, 371]:

$$u_1 = -z w'(x), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x), \quad \phi = z^2 \varphi(x) \quad (5.11)$$

где штрих обозначает производную в направлении оси балки, то есть в направлении оси x .

Деформации, напряженность электрического поля и их градиенты определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -z w'', & \varepsilon_{11,1} &= -z w''', & \varepsilon_{11,3} &= -w'' \\ E_1 &= -z^2 \varphi', & E_3 &= -2z \varphi, \\ E_{1,1} &= -z^2 \varphi'', & E_{1,3} &= E_{3,1} = -2z \varphi', & E_{3,3} &= -2\varphi \end{aligned} \quad (5.12)$$

Обычно, градиентами электрического поля в направлении длины балки пренебрегают [372, 373], считая, что они много меньше градиентов в направлении толщины. Однако, в данном случае рассмотрим полную формулировку модели, так как в случае ГТЭ оказывается, что градиенты в направлении длины балки могут также оказываться существенными.

Классические напряжения, градиентные напряжения, вектор электрической индукции и тензор электрических квадруполей (5.12), (5.2), (5.3) принимают вид:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= C_{11111}\varepsilon_{11} - e_{311}E_3 = -Ezw'' + 2e_{31}z\varphi, \\ \mu_{111} &= A_{1111111}\varepsilon_{11,1} = -\ell^2 Ezw''', \\ \mu_{113} &= A_{113113}\varepsilon_{11,3} = -\ell^2 Ew'' \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_{11}E_1 = -\epsilon_1 z^2 \varphi' \\ D_3 &= e_{311}\varepsilon_{11} + \epsilon_{33}E_3 = -e_{31}zw'' - 2\epsilon_3 z\varphi \\ Q_{11} &= \alpha_{11111}E_{1,1} = -\ell^2 \epsilon_1 z^2 \varphi'' \\ Q_{13} &= Q_{31} = \alpha_{1313}E_{1,3} = -2\ell^2 \epsilon_1 z \varphi' \\ Q_{33} &= \alpha_{3333}E_{3,3} = -2\ell^2 \epsilon_3 \varphi \end{aligned} \quad (5.14)$$

где использована нотация Фойгта $e_{311} = e_{31}$, $\epsilon_{11} = \epsilon_1$, $\epsilon_{33} = \epsilon_3$, а также учтено, что для рассматриваемой модели трансверсально изотропной балки выполняется $C_{1111} = E$, $A_{111113} = A_{113111} = 0$, $\alpha_{1113} = \alpha_{1131} = \alpha_{1311} = \alpha_{3111} = 0$; и введены масштабные параметры $A_{1111111} = A_{113113} = \ell^2 E$, $\alpha_{1111} = \alpha_{1313} = \alpha_{3131} = \ell^2 \epsilon_1$ и $\alpha_{3333} = \ell^2 \epsilon_3$ (см. раздел 2.3).

На основе соотношений (5.1), (5.12), (5.13), (5.14) полная электрическая энтальпия балки длиной L с прямоугольным поперечным с размерами $b \times 2h$ может быть записана в следующем

виде:

$$H = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11}\varepsilon_{11} + \mu_{111}\varepsilon_{11,1} + \mu_{113}\varepsilon_{11,3} + D_1E_1 + D_3E_3 + Q_{11}E_{1,1} + 2Q_{13}E_{1,3} + Q_{33}E_{3,3}) dz dx \quad (5.15)$$

Формулировка краевой задачи может быть получена на основе вариационного подхода из условия минимума полной потенциальной энергии балки:

$$\delta L = \delta W - \delta H = 0, \quad L = W - H \quad (5.16)$$

где W – это работа внешних сил.

Далее рассмотрим возможные варианты построения балочных теорий. Так же как и в ГТУ, для градиентных моделей пьезоэлектрических балок возможна реализация двух подходов, которые приводят к существенно различным результатам. Во-первых, возможен подход, при котором в выражении для электрической энтальпии (5.15) выполняется непосредственная подстановка определяющих соотношений (5.12), (5.13), (5.14). В этом случае получаем:

$$\delta H = \int_0^L (-M\delta w'' - M_h\delta w''' - P_1\delta\varphi' - P_3\delta\varphi - P_h\delta\varphi'') dx \quad (5.17)$$

где введены следующие обозначения для механических и электрических результирующих, возникающих в сечениях балки:

$$\begin{aligned} M &= b \int_{-h}^h (z\tau_{11} + \mu_{113}) dz = -E(I + \ell^2 A)w'' + 2e_{31}I\varphi \\ M_h &= b \int_{-h}^h z\mu_{111} dz = -\ell^2 EIw''' \\ P_1 &= b \int_{-h}^h (z^2 D_1 + 4zQ_{13}) dz = -\epsilon_1(J + 8\ell^2 I)\varphi' \\ P_3 &= 2b \int_{-h}^h (zD_3 + Q_{33}) dz = -2Ie_{31}w'' - 4\epsilon_3(I + A\ell^2)\varphi \\ P_h &= b \int_{-h}^h z^2 Q_{11} dz = -\ell^2 \epsilon_1 J\varphi'' \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $J = 2bh^5/5$ – это аналог момента инерции поперечного сечения балки, который возникает в рассматриваемой задаче электроупругости наряду с классическим моментом инерции $I = 2bh^3/3$; A – это площадь поперечного сечения балки.

Получаемая модель (5.17) является обобщением аналогичной балочной теории в ГТУ, в которой возникают масштабозависимые значения коэффициента изгибной жесткости или модуля упругости при изгибе (см. раздел 4.1, (4.23), (4.24)), которые стремятся к бесконечности в случае очень тонких балок. Аналогичные масштабозависимые коэффициенты возникают и в представленной формулировке. В выражении (5.18) можно видеть, что модуль упругости в выражении для изгибающего момента входит в комбинации с масштабозависимым коэффициентом $E(I + \ell^2 A)$, как и диэлектрическая проницаемость в выражении для

результатирующей от вектора индукции $\epsilon_3(I + A\ell^2)$. Таким образом, в рассматриваемой градиентной модели кажущаяся изгибная жесткость очень тонких балок, в пределе, оказывается бесконечно больше классической жесткости, которая могла бы быть вычислена на основе соотношения EI (это выражение домножается на величину $(1 + \ell^2 A/I)$, которое растет в бесконечность при уменьшении толщины балки). Более того, модель прогнозирует и бесконечный рост диэлектрической проницаемости, то есть, в некотором смысле, материал очень тонкой балки становится идеальным проводником. Такая модель градиентных балок, по-видимому, впервые была предложена в работе [104].

Другой вариант градиентной пьезоэлектрической балочной теории может быть построен на основе вариационного подхода, в котором выполняется дополнительная процедура интегрирования по частям в направлении толщины балки и проводится анализ граничных условий на ее верхней и нижней поверхностях. Такой подход в ГТУ был описан в разделе 4.1.4. Обобщая этот подход на случай градиентной электроупругости, в выражении полной электрической энтальпии (5.15) необходимо применить интегрирование по частям к членам, содержащим производные в направлении оси 3, то есть в направлении толщины балки. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \delta H = & b \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11} \delta \varepsilon_{11} + \mu_{111} \delta \varepsilon_{11,1} - \mu_{113,3} \delta \varepsilon_{11} + D_1 \delta E_1 \\ & + D_3 \delta E_3 + Q_{11} \delta E_{1,1} - 2Q_{13,3} \delta E_1 - Q_{33,3} \delta E_3) dz dx \\ & + b \int_0^L (\mu_{113} \delta \varepsilon_{11} + 2Q_{13} \delta E_1 + Q_{33} \delta E_3) \Big|_{z=-h}^{z=h} dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

Далее, используя рассуждения, полностью аналогичные случаю упругой балки (4.87)-(4.93), но учитывая наличие в общей трехмерной формулировке ГТЭ естественных граничных условий и для напряжений, и для поверхностного заряда (см. (2.23), (2.24)), получим, что в отсутствии внешних нагрузок, на верхней и нижней поверхности балки должны выполняться условия:

$$z = \pm h : \quad \mu_{113} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad Q_{33} = 0 \quad (5.20)$$

Используя эти соотношения (5.20), а также учитывая, что для введенных кинематических гипотез должно выполняться $\mu_{113,3} = 0$, $Q_{33,3} = 0$ (см. (5.13), (5.14)), получим, что полная электрическая энтальпия балки (5.19) может быть записана в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \delta H = & b \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11} \delta \varepsilon_{11} + \mu_{111} \delta \varepsilon_{11,1} + (D_1 - 2Q_{13,3}) \delta E_1 \\ & + D_3 \delta E_3 + Q_{11} \delta E_{1,1}) dz dx \end{aligned} \quad (5.21)$$

Подставляя далее выражения (5.12), (5.13), (5.14) в (5.21), получаем:

$$\delta H = \int_0^L (-M \delta w'' - M_h \delta w''' - P_1 \delta \varphi' - P_3 \delta \varphi - P_h \delta \varphi'') dx \quad (5.22)$$

где определения для результирующих имеют вид:

$$\begin{aligned}
M &= b \int_{-h}^h z \tau_{11} dz = -EIw'' + 2e_{31}I\varphi \\
M_h &= b \int_{-h}^h z \mu_{111} dz = -\ell^2 EIw''' \\
P_1 &= b \int_{-h}^h z^2 (D_1 - 2Q_{13,3}) dz = -\epsilon_1(J + 4\ell^2 I)\varphi' \\
P_3 &= 2b \int_{-h}^h z D_3 dz = -2e_{31}Iw'' - 4\epsilon_3 I\varphi \\
P_h &= b \int_{-h}^h z^2 Q_{11} dz = -\ell^2 \epsilon_1 J \varphi''
\end{aligned} \tag{5.23}$$

В полученном выражении для полной электрической энтальпии балки (5.22), (5.23) уже нет масштабозависимых значений для классических характеристик жесткости при изгибе и диэлектрической проницаемости ϵ_3 (в выражениях для M и P_3). Таким образом мы получили обобщение балочной градиентной теории с "одноосным" напряженным состоянием (см. раздел 2.1) на случай связанных электроупругих эффектов.

Интересно отметить, что в случае рассматриваемой связанной формулировки размерные эффекты всегда возникают в выражении для продольной компоненты результирующей от электрической индукции P_1 . В классических теориях эта компонента всегда мала и пропорциональна пятой степени от толщины балки (так как $J = 2bh^5/5$), в то время как поперечная компонента P_3 пропорциональна только третьей степени толщины (так как $I = 2bh^3/3$). Поэтому в классических теориях тонких балок считается $P_1 \ll P_3$. В представленных же градиентных моделях оказывается, что величина P_1 может иметь один порядок с P_3 в случае, если отношение масштабного параметра теории ℓ к толщине балки достаточно велико, то есть в случае тонких балок.

Обе представленные теории (5.16), (5.22) приводят к одинаковой форме уравнений равновесия и закона Гаусса для балки:

$$\begin{cases} M'' - M_h''' + q = 0, \\ P_1' - P_h'' - P_3 = 0 \end{cases} \quad x \in (0, L) \tag{5.24}$$

Граничные условия на концах балки $x = 0, L$ могут быть записаны относительно следующих величин:

$$\begin{cases} M_h \text{ or } w'' \\ M - M_h' \text{ or } w' \\ M' - M_h'' \text{ or } w \\ P_h \text{ or } \varphi' \\ P_1 - P_h' \text{ or } \varphi \end{cases} \tag{5.25}$$

Как и в ГТУ, отличие формулировок краевых задач (5.24), (5.25) в рассмотренных гради-

ентных балочных теориях возникает только в определении результирующих (5.18) и (5.23). В данном случае это определения для изгибающего момента M и для электрической индукции P_3 .

Чистый изгиб балки Бернулли-Эйлера в ГТЭ

В качестве первого примера рассмотрим задачу о чистом изгибе электроупругой балки. В соответствии с соотношениями (5.24), (5.25) для случая заданных на концах балки изгибающих моментов M_0 , получим следующую формулировку краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0, L) : \quad M'' - M_h''' = 0, \\ \quad \quad \quad P_1' - P_h'' - P_3 = 0 \\ x = 0 : \quad w = 0, \quad w' = 0, \quad M_h = 0, \\ \quad \quad \quad P_1 - P_h' = 0, \quad P_h = 0 \\ x = L : \quad M' - M_h'' = 0, \quad M - M_h' = M_0, \quad M_h = 0, \\ \quad \quad \quad P_1 - P_h' = 0, \quad P_h = 0 \end{array} \right. \quad (5.26)$$

При использовании определений для результирующих моментов и электрической индукции вида (5.18) решение задачи (5.26) оказывается зависящим от толщины балки и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M &\equiv M_0, & M_h &\equiv 0, & P_1 &\equiv 0, & P_3 &\equiv 0, & P_h &\equiv 0 \\ w &= -\frac{M_0}{2E_1(1 + \frac{e_{31}^2 I}{\epsilon_3 E_1(I + \ell^2 A)})} \frac{x^2}{(I + \ell^2 A)}, \\ \phi &= \frac{M_0}{2E_1(1 + \frac{e_{31}^2 I}{\epsilon_3 E_1(I + \ell^2 A)})} \frac{e_{31}}{\epsilon_3} \frac{I z^2}{(I + \ell^2 A)^2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Применение определений (5.23) приводит к классическому решению:

$$\begin{aligned} M &\equiv M_0, & M_h &\equiv 0, & P_1 &\equiv 0, & P_3 &\equiv 0, & P_h &\equiv 0 \\ w &= -\frac{M_0}{2E_1 I (1 + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_3 E_1})} x^2, & \phi &= \frac{M_0}{2E_1 I (1 + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_3 E_1})} \frac{e_{31}}{\epsilon_3} z^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

В отсутствии электроупругих эффектов ($e_{31} = 0$) решение (5.27) сводится к аналогичному масштабозависимому решению в ГТУ (4.26), а решение (5.28), соответственно, сводится к решению (4.25).

В разделе 5.1.2 диссертации для задачи чистого изгиба в формулировке плоской деформации в ГТЭ будет получено замкнутое аналитическое решение (см. также работу [177]). На основе этого решения будет показано, что для цилиндрического изгиба тонких пластин ($h \ll l$) распределение прогибов вдоль длины и соответствующее распределение потенциала

электрического поля по толщине имеет следующий классический вид в ГТЭ:

$$u_3 = -\frac{M}{2E_1I}x^2, \quad \phi = \frac{M}{2E_1I} \frac{C_{33}e_{31} - C_{13}e_{33}}{e_{33}^2 + C_{33}\epsilon_3} z^2 \quad (5.29)$$

Таким образом, это аналитическое решение (5.29), полученное в плоской постановке, подтверждает справедливость решения (5.28) и, следовательно, варианта модели электроупругих балок теории с "одноосным" напряженным состоянием. Для корректного сопоставления этих решений в (5.29) необходимо учесть стандартные предположения балочной теории: несжимаемость в направлении толщины балки ($C_{33} \rightarrow \infty$), отсутствие эффектов Пуассона в балке ($C_{11} = E_1$) и плоское напряженное состояние (определяется множителем $(1 + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_3 C_{11}})$).

Консольный изгиб балки Бернулли-Эйлера в ГТЭ

Рассмотрим еще один пример – задачу о деформациях консольно закрепленной пьезоэлектрической балки, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной на ее конце. Решение будем находить в рамках предложенной балочной теории с "одноосным" напряженным состоянием. Решение аналогичной задачи в модели с "обобщенным" напряженным состоянием было построено в работе [104].

Рассматриваемая задача является достаточно стандартной. Классические решения такой задачи [159, 372, 374] используются для описания деформаций, например, пьезоэлектрических элементов (кантилеверов), которые применяются в различной сенсорной технике, в медицине, в микроскопии и т.д. Решение, построенное в ГТЭ, может быть использовано для уточнения влияния размерных эффектов на электромеханический отклик кантилевера. С учетом характерных значений масштабных параметров для зернистых материалов типа керамики, ожидаемые эффекты относятся к области размеров (толщин балки) порядка десятков и единиц микрон. Как видно из формулировки модели, в ней присутствует расширенный набор граничных условий (5.25), которые могут быть использованы для уточнения условий закрепления и нагружения кантилевера [22]. В частности, на границах балки могут быть предписаны не только прогибы или углы поворота, но и кривизна балки ($\partial^2 w / \partial x^2$), а также величина напряженности электрического поля в направлении оси балки ($-\partial \phi / \partial x$).

В рассматриваемой теории уравнения равновесия и закон Гаусса определяются в терминах результирующих выражениями (5.24). Подставляя в эти соотношения определения для результирующих (5.23), получим:

$$\begin{cases} \ell^2 E I w^{VI} - E I w^{IV} + 2e_{31} I \varphi'' = 0, \\ \ell^2 \epsilon_1 J \varphi^{IV} - \epsilon_1 (J + 4\ell^2 I) \varphi'' + 4\epsilon_3 I \varphi + 2e_{31} I w'' = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Из второго уравнения полученной системы (5.30) найдем выражение для кривизны балки:

$$w'' = -\ell^2 \frac{\epsilon_1 J}{2e_{31} I} \varphi^{IV} + \frac{\epsilon_1 (J + 4\ell^2 I)}{2e_{31} I} \varphi'' - \frac{2\epsilon_3}{e_{31}} \varphi \quad (5.31)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (5.30), получим дифференциаль-

ное уравнение, которое определяет распределение потенциала электрического поля по длине балки:

$$\ell^4 \varphi^{VIII} - 2\ell^2 \left(1 + \frac{10}{3} \frac{\ell^2}{h^2}\right) \varphi^{VI} + \left(1 + \frac{20}{3} \frac{\ell^2}{h^2} (1 + \bar{\epsilon})\right) \varphi^{IV} - \frac{20}{3h^2} (\bar{\epsilon} + K^2) \varphi'' = 0 \quad (5.32)$$

где $K = e_{31}^2 / (\epsilon_1 E)$ – это коэффициент электромеханической связи балки, и использовано обозначение $\bar{\epsilon} = \epsilon_3 / \epsilon_1$.

Общее решение этого уравнения для потенциала электрического поля имеет следующий вид:

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 C_i e^{x\sqrt{\lambda_i}} + \sum_{i=4}^6 C_i e^{-x\sqrt{\lambda_i}} + C_7 + C_8 x \quad (5.33)$$

где C_i ($i = 1...8$) – это неизвестные константы, которые должны определяться из граничных условий, а λ_i – это корни полинома третьей степени следующего вида:

$$\frac{20}{h^2 \ell^4} (\bar{\epsilon} + K^2) - \left(\frac{3}{\ell^4} + \frac{20}{h^2 \ell^2} (\bar{\epsilon} + 1)\right) \lambda + \left(\frac{10}{h^2} + \frac{3}{\ell^2}\right) \lambda^2 - 3\lambda^3 = 0$$

Общее решение для перемещений может быть найдено подстановкой (5.33) в (5.31). При этом за счет интегрирования в решении для перемещений возникнут две дополнительные константы, которых всего в рассматриваемой модели поэтому будет 10, что определяет количество граничных условий, которые должны быть предписаны на концах балки. Для задачи о консольном изгибе будем задавать на левом конце балки ($x = 0$) нулевые значения прогибов w и углов поворота w' , а на правом конце ($x = L$) зададим сосредоточенное усилие и нулевое значение изгибающего момента, которые в рассматриваемой градиентной теории определяется комбинациями вида $M' - M''_h$ и $M - M'_h$, соответственно. Электростатические и неклассические дополнительные граничные условия, присутствующие в ГТЭ, будем рассматривать в нескольких комбинациях:

Вариант 1. Нулевая кривизина и напряженность электрического поля на левом конце балки и нулевая поляризация (отсутствие поверхностного заряда, отсутствие заземления) на правом конце:

$$\begin{cases} x = 0 : & w'' = 0, & w' = 0, & w = 0, \\ & \varphi' = 0, & \varphi = 0 \\ x = L : & M_h = 0, & M - M'_h = 0, & M' - M''_h = F, \\ & P_h = 0, & P_1 - P'_h = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Такой вариант граничных условий на левом конце балки можно трактовать, как наличие жестких металлических заземленных захватов, которые ограничивают не только смещения и повороты балки, но и за счет некоторой собственной протяженности обеспечивают нулевое значение кривизны и продольной компоненты электрического поля в материале балки. В классической модели граничные условия на кривизну балки и на напряженность поля не могут быть учтены, и они являются спецификой ГТЭ. Условия в виде нулевых значений градиентных результирующих P_h определяют отсутствие квадрупольных взаимодействий на концах балки.

Вариант 2. Нулевая поляризация на левом конце балки и условие заземления на правом конце:

$$\begin{cases} x = 0 : & M_h = 0, & w' = 0, & w = 0, \\ & P_h = 0, & P_1 - P'_h = 0 \\ x = L : & M_h = 0, & M - M'_h = 0, & M' - M''_h = F, \\ & P_h = 0, & \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Такой тип граничных условий соответствует закреплению кантилевера в непроводящих захватах, которые не ограничивают изменения кривизны балки (то есть стесненная зона балки достаточно мала). На правом конце балки реализуется, например, контакт с заземленной подложкой.

Вариант 3. Нулевая поляризация и жесткое закрепление с нулевой кривизной балки на левом конце и заземление на правом конце:

$$\begin{cases} x = 0 : & w'' = 0, & w' = 0, & w = 0, \\ & P_h = 0, & P_1 - P'_h = 0 \\ x = L : & M_h = 0, & M - M'_h = 0, & M' - M''_h = F, \\ & P_h = 0, & \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

Такой тип граничных условий является промежуточным вариантом между двумя предыдущими. В отличие от второго варианта, здесь захваты на левом конце балки имеют достаточную жесткость и протяженность и ограничивают кривизну балки.

Все три варианта граничных условий позволяют определить 10 неизвестных констант, присутствующих в общем решении для перемещений (5.31) и электрического потенциала (5.33). Подстановка (5.33), (5.31) в (5.34), (5.35) или (5.36) приводит к линейной системе алгебраических уравнений, решение которой легко находится аналитически, но оказывается достаточно громоздким. Не приводя это решение для констант, рассмотрим далее результаты, которые могут быть получены в рамках рассматриваемой модели. В качестве примера рассмотрим балку, выполненную из пьезокерамики PZT-7A с характеристиками $E = 140$ ГПа, $e_{31} = -2.1$ Кл/м², $\epsilon_1 = 460\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 235\epsilon_0$, где $\epsilon_0 = 8.885 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Значение задаваемой сосредоточенной нагрузки составляет $F = 0.1$ мН. Длина балки $L = 20$ мкм, ширина и толщина $b = h =$ мкм. Примеры результатов расчетов представлены на рис. 6б. Здесь можно видеть, что варианты граничных условий (5.34) и (5.35) с заданными нулевыми значениями продольной компоненты электрического поля и кривизны балки приводят к возникновению достаточно сложных локальных эффектов вблизи заделки (рис. 6ба,в). Учет градиентных эффектов приводит к уточнению размеров области, в которой происходит изменение характера поляризации балки, и к некоторому уточнению прогибов балки. Такие уточнения могут быть важны, например, для снижения погрешностей при обработке

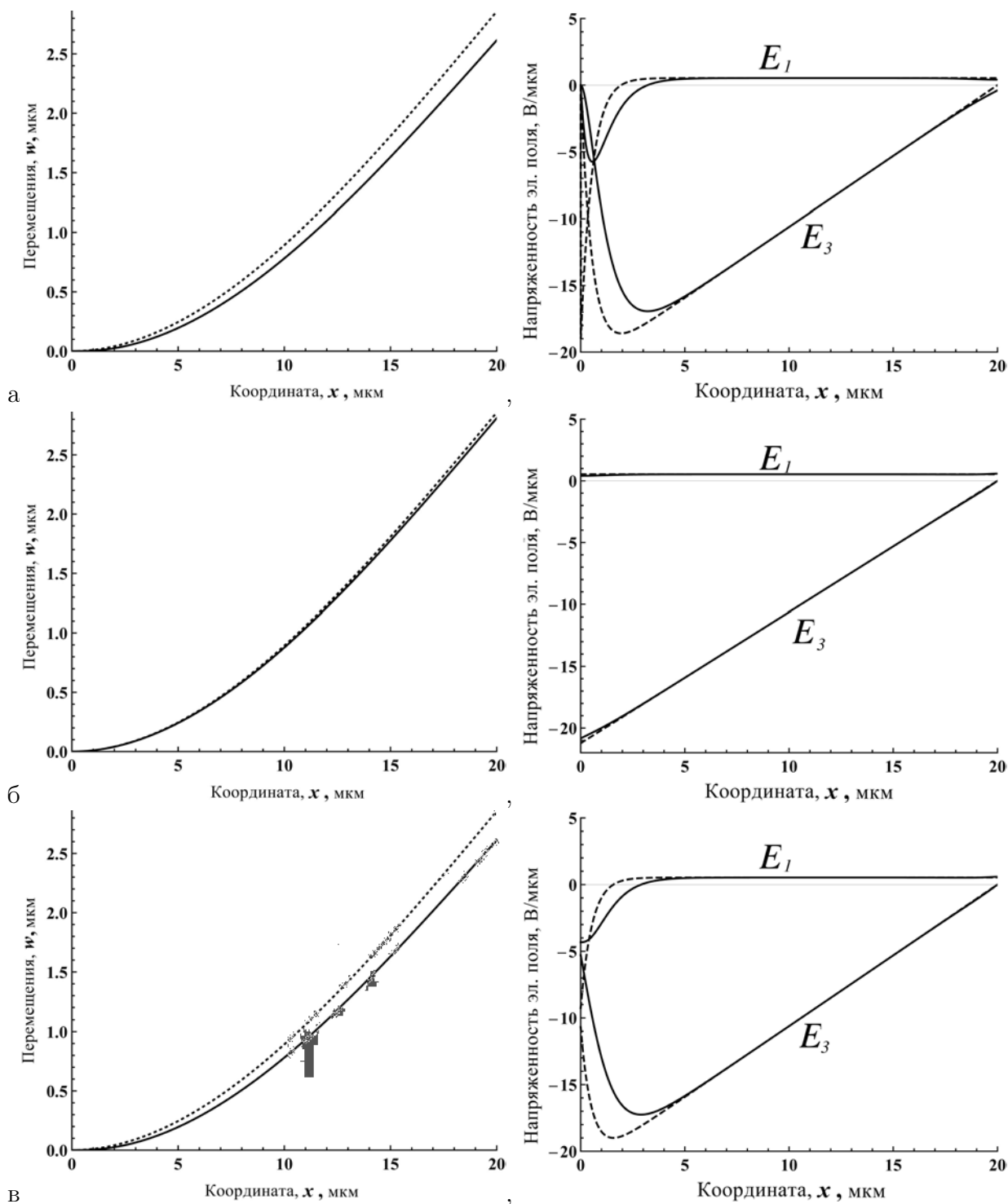


Рис. 66: Прогибы и компоненты напряженности электрического поля в пьезокантивере при различных вариантах граничных условий: а – Вариант 1 (5.34), б – Вариант 2(5.35), в – Вариант 3 (5.36). Сплошные линии – решение в балочной модели ГТЭ ($\ell/h = 0.5$), пунктирные линии – классическое решение ($\ell = 0$)

экспериментальных данных при проведении высокоточных измерений. Решения с "мягкими" условиями закрепления (5.35) практически не изменяет классического решения даже для достаточно малых отношений между толщиной балки и масштабным параметром материала. Основная особенность представленных решений заключается в том, что в них не возникает значительного влияния масштабного параметра (точнее, отношения толщины к масштабному параметру) на прогибы и напряженность электрического поля вдоль всей длины балки. Между тем такие эффекты возникают в моделях "обобщенным" напряженным состоянием, в которых реализуются аномальные масштабозависимые значения изгибной жесткости. Соответствующее решение и результаты моделирования для пьезоэлектрических кантилеверов были приведены в работе [104].

5.1.2 Полуобратное решение задачи о чистом изгибе слоя в ГТЭ

Рассматриваем задачу о чистом изгибе слоя (пластины). Длина слоя в плоскости изгиба составляет L , а ее толщина $2h$, таким образом, область построения решения $\Omega = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0, L], x_3 \in [-h, h]\}$ (Рис. 67). В направлении x_2 , перпендикулярном к плоскости изгиба, пластина имеет бесконечные размеры. При построении решения будем использовать гипотезы о плоском деформированном состоянии, то есть считаем, что перемещения в направлении x_2 отсутствуют ($u_2 = 0$), все переменные модели не зависят от координаты x_2 , а граничные условия на удаленных поверхностях пластины с нормальными $\mathbf{n} = \{0, \pm 1, 0\}$ не учитываются. Материал пластины относится к классу гексагональных кристаллов класса 6mm, то есть является трансверсально изотропным с выделенным направлением (направлением поляризации) вдоль толщины слоя (оси x_3).

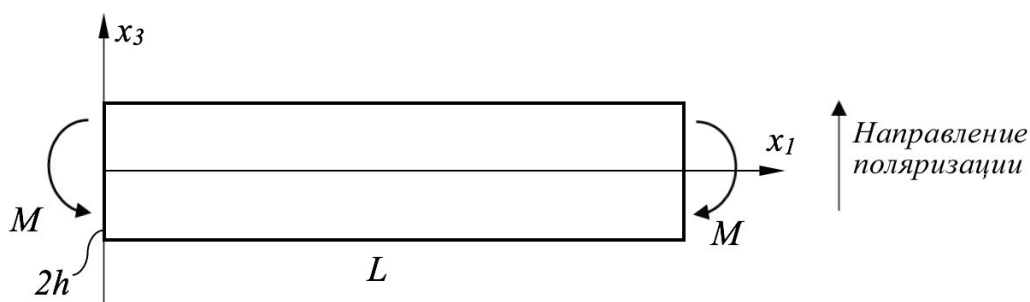


Рис. 67: К задаче чистого изгиба слоя в ГТЭ

Граничные условия следующие. На торцах слоя $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ задана распределенная нагрузка $\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_1(x_3), 0, 0\}$, которая создает ненулевой (погонный) изгибающий момент M и нулевые результирующие относительно продольного и перерезывающего усилий. Реализуется прямой изгиб в плоскости x_1x_3 вокруг оси x_2 . Верхняя и нижняя поверхности слоя свободны от внешней нагрузки. Поверхностная плотность заряда \bar{q} предполагается нулевой на всей поверхности слоя. Значение диэлектрической проницаемости окружающей среды (например, воздуха) значительно ниже соответствующей характеристики материала слоя. Предполагаем, что в начале координат заданы условия закрепления (нулевые смещения) и нулевое значение электрического потенциала.

Постановка рассматриваемой задачи с учетом граничных условий (5.7)-(5.9) может быть представлена в следующем виде [177]:

$$\underline{x_1 = 0, L} :$$

$$\tau_{11} - \mu_{111,1} - \mu_{113,3} - \mu_{131,3} = \bar{t}_1(x_3) \quad (5.37)$$

$$\tau_{21} - \mu_{211,1} - \mu_{213,3} - \mu_{231,3} = 0 \quad (5.38)$$

$$\tau_{31} - \mu_{311,1} - \mu_{313,3} - \mu_{331,3} = 0 \quad (5.39)$$

$$\mu_{111} = 0, \quad \mu_{211} = 0, \quad \mu_{311} = 0 \quad (5.40)$$

$$D_1 - Q_{11,1} - Q_{13,3} - Q_{31,3} = 0 \quad (5.41)$$

$$Q_{11} = 0 \quad (5.42)$$

$$\underline{x_3 = \pm h} :$$

$$\tau_{13} - \mu_{113,1} - \mu_{131,1} - \mu_{133,3} = 0 \quad (5.43)$$

$$\tau_{23} - \mu_{213,1} - \mu_{231,1} - \mu_{233,3} = 0 \quad (5.44)$$

$$\tau_{33} - \mu_{313,1} - \mu_{331,1} - \mu_{333,3} = 0 \quad (5.45)$$

$$\mu_{133} = 0, \quad \mu_{233} = 0, \quad \mu_{333} = 0 \quad (5.46)$$

$$D_3 - Q_{13,1} - Q_{31,1} - Q_{33,3} = 0 \quad (5.47)$$

$$Q_{33} = 0 \quad (5.48)$$

Следуя классическому подходу, применяемому в задачах Сен-Венана, будем задавать граничные условия на торцах балки в интегральной форме относительно результирующих. Для классической электроупругости такие задачи рассматривались, например, в работе [375]. Для ГТУ такой подход обсуждался в предыдущей главе диссертации. Таким образом, вместо условий (5.37) в задаче ГТЭ используем следующие условия относительно изгибающего момента и продольного усилия:

$$\int_{-h}^h (\tau_{11} - \mu_{111,1} - \mu_{113,3} - \mu_{131,3}) dx_3 = 0 \quad (5.49)$$

$$\int_{-h}^h x_3 (\tau_{11} - \mu_{111,1} - \mu_{113,3} - \mu_{131,3}) dx_3 = M \quad (5.50)$$

В формулировке задачи присутствуют условия на ребрах (5.10), которые в задаче плоской деформации сводятся к условиям в угловых точках:

$$\underline{x_1 = 0, L, x_3 = \pm h} : \quad (5.51)$$

$$\mu_{113} = -\mu_{131}, \quad \mu_{213} = -\mu_{231}, \quad \mu_{313} = -\mu_{331}, \quad Q_{13} = -Q_{31}$$

Для построения решения будем использовать полуобратный метод и предположим, что компоненты вектора перемещений и электрический потенциал могут быть представлены в следующем виде:

$$u_1 = K x_1 x_3, \quad u_3 = -\frac{1}{2} K x_1^2 + w(x_3), \quad \phi = \varphi(x_3) \quad (5.52)$$

где K – это неизвестная константа, а $w(x_3)$ и $\varphi(x_3)$ – это неизвестные функции, которые определяют распределение градиентов деформаций и электрического потенциала по толщине слоя; эти величины должны быть определены из уравнений равновесия и граничных условий задачи.

Из предположения (5.52) следует, что в слое могут возникать следующие ненулевые ком-

поненты тензора деформаций, вектора напряженности электрического поля их градиентов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= Kx_3, & \varepsilon_{33} &= w', \\ \varepsilon_{11,3} &= K, & \varepsilon_{33,3} &= w'', \\ E_3 &= -\varphi', & E_{3,3} &= -\varphi'' \end{aligned} \quad (5.53)$$

где для производной в направлении толщины слоя принято обозначение: $f' = \partial f / \partial x_3$.

Как видно из (5.53), константа K определяет градиент продольных деформаций ε_{11} в направлении толщины балки. Этот градиент в предлагаемом решении имеет постоянное значение, также как и в классической теории упругости. При этом в слое не возникает деформаций сдвига, а его поперечные сечения остаются плоскими. Аналогичное предположение использовалось нами в ГТУ в предыдущем разделе. В случае рассматриваемого трансверсально изотропного материала это предположение остается справедливым, так как в материале не возникает связности между линейными и сдвиговыми модами деформаций.

Подставляя (5.53) в определяющие соотношения ГТЭ (5.2)-(5.3), находим, что ненулевые значения имеют следующие компоненты тензоров напряжений и градиентных напряжений, вектора электрической индукции и тензора электрических квадрупольей:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= C_{11}Kx_3 + C_{13}w' + e_{31}\varphi', \\ \tau_{22} &= C_{12}Kx_3 + C_{13}w' + e_{31}\varphi', \\ \tau_{33} &= C_{13}Kx_3 + C_{33}w' + e_{33}\varphi' \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \mu_{113} &= \ell^2(C_{11}K + C_{13}w'') \\ \mu_{223} &= \ell^2(C_{12}K + C_{13}w'') \\ \mu_{333} &= \ell^2(C_{13}K + C_{33}w'') \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$D_3 = e_{31}Kz + e_{33}w' - \kappa_{33}\varphi' \quad (5.56)$$

$$Q_{33} = -\ell^2\kappa_{33}\varphi'' \quad (5.57)$$

где для материальных констант используется нотация Фойгта.

Можно видеть, что предлагаемое решение (5.52)-(5.57) позволяет удовлетворить граничным условиям задачи (5.38)-(5.44), (5.46₁), (5.46₂), (5.51₂), (5.51₃). Также предложенная форма решения удовлетворяет уравнениям равновесия (5.4) и обобщенному закону Гаусса (5.5) в направлении поперечной оси x_2 и продольной оси x_1 . Граничные условия в угловых точках (5.51₁) не могут быть удовлетворены в рамках рассматриваемого решения, так как, например, компонента градиентных напряжений μ_{113} в нем оказывается ненулевой, в то время, как компонента μ_{131} тождественно равна нулю. Поэтому одно из условий в угловых точках (5.55) оказывается невыполнимым. Тем не менее, используя принцип Сен-Венана, будем игнорировать в аналитическом решении это граничное условие, предполагая, что оно приводит только в локальному "возмущению" напряженно деформированного состояния вблизи угловых точек и не должно влиять, например, на изгибную жесткость слоя. Полное решение с

учетом условий в точках будет построено численно.

Далее необходимо удовлетворить уравнениям равновесия и закону Гаусса в направлении толщины слоя (5.4), (5.5), а также учесть граничные условия на верхней и нижней поверхностях слоя (5.45), (5.46₃), (5.47), (5.48). Подставляя предложенный вид решения в эти соотношения, получим следующую постановку краевой задачи, формулируемую относительно неизвестных функций $w(x_3)$ и $\varphi(x_3)$:

$$\begin{aligned} x_3 \in [-h, h] : \\ \ell^2 C_{33} w^{IV} - C_{33} w'' - e_{33} \varphi'' - K C_{13} = 0, \\ \ell^2 \kappa_{33} \varphi^{IV} - \kappa_{33} \varphi'' + e_{33} w'' + K e_{31} = 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} x_3 = \pm h : \\ \ell^2 C_{33} w''' - C_{33} w' - e_{33} \varphi' - K C_{13} x_3 = 0, \\ \ell^2 \kappa_{33} \varphi''' - \kappa_{33} \varphi' + e_{33} w' + K e_{31} x_3 = 0, \\ C_{33} w'' + K C_{13} = 0 \\ \varphi'' = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

Общее решение системы (5.58) может быть представлено в следующем виде с учетом симметрии граничных условий (5.59):

$$\begin{aligned} \varphi(x_3) &= K \frac{(C_{33} e_{31} - C_{13} e_{33})}{2(C_{33} \kappa_{33} + e_{33}^2)} x_3^2 + A_{01} + \sum_{i=1}^2 A_i \cosh \frac{\lambda_i x_3}{\ell}, \\ w(x_3) &= -K \frac{(e_{33} e_{31} + C_{13} \kappa_{33})}{2(C_{33} \kappa_{33} + e_{33}^2)} x_3^2 + A_{02} + \frac{\kappa_{33}}{e_{33}} \sum_{i=1}^2 A_i (1 - \lambda_i^2) \cosh \frac{\lambda_i x_3}{\ell}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

где $\lambda_{1,2} = \sqrt{1 \pm i k_{33}}$ – это корни характеристического уравнения для системы (5.58); $k_{33} = e_{33} / \sqrt{C_{33} \kappa_{33}}$ – это так называемый коэффициент электромеханической связи; константы A_{01} , A_{02} , A_1 , A_2 необходимо определять из граничных условий на верхней и нижней поверхностях слоя (5.59), учитывая, что в начале координат заданы условия по отсутствию перемещений и нулевое значение электрического потенциала, то есть $w(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$. Окончательное решение для этих констант может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{01} &= -S \left(\frac{(k_{33} - i)^2}{\cosh \bar{h}_1} + \frac{(k_{33} + i)^2}{\cosh \bar{h}_2} \right) \\ A_{02} &= -S \sqrt{\frac{\kappa_{33}}{C_{33}}} \left(\frac{i(k_{33} - i)^2}{\cosh \bar{h}_1} - \frac{i(k_{33} + i)^2}{\cosh \bar{h}_2} \right) \\ A_1 &= S \frac{(k_{33} + i)^2}{\cosh \bar{h}_2}, \quad A_2 = S \frac{(k_{33} - i)^2}{\cosh \bar{h}_1} \end{aligned} \quad (5.61)$$

где использованы обозначения:

$$S = K\ell^2 \frac{C_{33}e_{31} - C_{13}e_{33}}{(1 + k_{33}^2)^2 C_{33}\kappa_{33}},$$

$$k_{33} = e_{33}/\sqrt{C_{33}\kappa_{33}}, \quad \bar{h}_1 = \frac{\lambda_2 h}{\ell}, \quad \bar{h}_2 = \frac{\lambda_1 h}{\ell}$$

Заметим, что корни λ_i являются комплексными в представленном решении (5.60), тем не менее можно показать, что искомые функции $w(x_3)$ и $\varphi(x_3)$ всегда будут принимать действительные значения для физически допустимых значений материальных констант и геометрических параметров модели. Эти функции определены сейчас с точностью до константы K . Эту константу необходимо определять из интегральных граничных условий на торцах балки. Для этого подставим выражения (5.60), (A.1) в (5.53) и затем в (5.54), (5.55) и найдем напряжения и градиентные напряжения, определенные с точностью до искомой константы K . Подставляя найденные напряжения в интегральные граничные условия найдем, что условие на результирующее усилие (5.49) будет выполнено тривиальным образом, а условие относительно заданного изгибающего момента (5.50) позволит определить K в следующем виде:

$$K = \frac{M}{DJ} \quad (5.62)$$

где $D = E^*I$ это классическое выражение для изгибной жесткости пьезоэлектрической пластины (с учетом пьезоэлектрического эффекта), которая реализуется в условиях чистого изгиба; $I = 2h^3/3$ это погонный момент инерции, а E^* это классический кажущийся модуль Юнга пьезоэлектрической пластины, который определяется соотношением:

$$E^* = \frac{C_{33}e_{31}^2 - 2C_{13}e_{31}e_{33} + C_{11}e_{33}^2 - C_{13}^2\kappa_{33} + C_{11}C_{33}\kappa_{33}}{e_{33}^2 + C_{33}\kappa_{33}}$$

Все неклассические масштабные и градиентные эффекты в выражении (5.62) определяются безразмерным параметром J , который может быть представлен в следующем виде:

$$J = 1 + Z \frac{\ell^2}{h^2} \sum_{i=1}^2 (1 + k_{33}^2 - 2\lambda_i^2) \left(1 - \frac{\tanh \bar{h}_i}{\bar{h}_i}\right)$$

$$Z = \frac{3\kappa_{33}(C_{33}e_{31} - C_{13}e_{33})^2}{2E^*(e_{33}^2 + C_{33}\kappa_{33})^2} \quad (5.63)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{\lambda_2 h}{\ell}, \quad \bar{h}_2 = \frac{\lambda_1 h}{\ell}$$

Итак, для рассматриваемой задачи в рамках предложенного полуобратного подхода построено замкнутое аналитическое решение (5.60)-(5.63), (A.1). Это решение учитывает влияние градиентов электрического поля и деформаций на электромеханический отклик пластины при чистом изгибе. Построенное решение может быть сведено к классическому [376], если предположить, что масштабный параметр модели равен нулю $\ell = 0$. В отсутствии пьезоэлектрического эффекта ($e_{33} = e_{31} = 0$) представленное решение сводится к аналогичному решению ГТУ (в предыдущей главе диссертации оно было построено в трехмерной форму-

лировке). В отсутствие и градиентных, и пьезоэлектрических эффектов представленное решение сводится к стандартному решению задачи чистого изгиба в теории упругости, которое определяет линейное изменение деформаций по толщине слоя с градиентом $K = M/(E_1 I)$, где $E_1 = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}$ – это модуль упругости материала в направлении оси x_1 .

Сопоставление с численным моделированием

Представленное аналитическое полуобратное решение справедливо вдали от торцевых поверхностей слоя при достаточно большой длине слоя L . Вблизи торцов существенное влияние оказывают граничные условия в угловых точках и, например, предположение об отсутствии сдвигов может оказаться несправедливым. Поэтому представленное далее численное моделирование направлено, в первую очередь, на исследование этих торцевых зон. В частности, необходимо исследовать насколько существенное влияние на изгибную жесткость слоя, его НДС и электромеханический отклик вдали от торцевых поверхностей оказывают условия в угловых точках (5.51.1), не выполненные в полуобратном решении. В дальнейших численных расчетах использовалась модель ГТЭ, реализованная в системе COMSOL через интерфейс General Form PDE. Описание применяемого подхода к численному моделированию было представлено в разделе 2.9. Конечно-элементная модель, условия нагружения и закрепления представлены на рис. 68. Рассматривалась половина слоя с учетом симметрии задачи. На правой границе задавалась нагрузка, распределенная по линейному закону: $\bar{t}_1 = z t_0/h$, где для тестовых вычислений предполагалось, что $t_0 = 100$ МПа. Результирующий изгибающий момент вычислялся как $M = t_0 I/h$. Толщина слоя составляет $2h = 0.1$ мм, а его длина – $L = 0.8$ мм (если не указаны иные значения). Материал слоя – это пьезоэлектрическая керамика на основе цирконат-титаната свинца PZT-7A. Значения масштабного параметра материала рассматриваются в диапазоне $\ell = 1 \dots 20$ мкм (порядка размера зерна керамики).

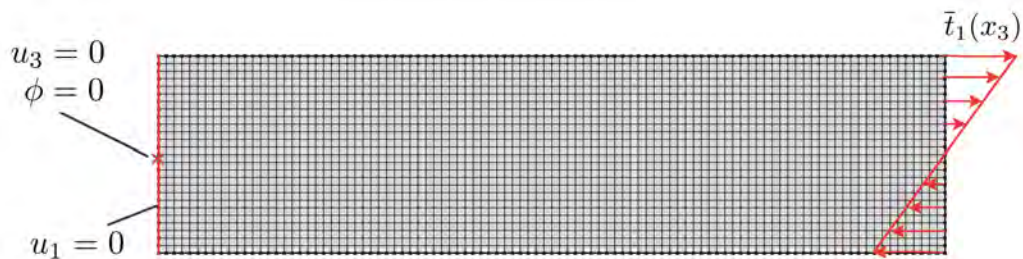


Рис. 68: Конечно-элементная модель пьезоэлектрического слоя в условиях чистого изгиба. Показаны условия нагружения и закрепления.

Сопоставление аналитического полуобратного решения и численного моделирования представлено на рис. 69. Показано распределение механических и электрических переменных задачи в направлении толщины слоя в его центральном поперечном сечении ($x_1 = L/2$ на рис. 67) для различных нормированных значений толщины слоя h/ℓ . Видно, что получено совпадение численного и аналитического решений. В случае относительно большой толщины слоя $h/\ell = 50$ реализуется решение, близкое к классическому, а значительные градиентные эффекты возникают для толщин $h/\ell \leq 5$.

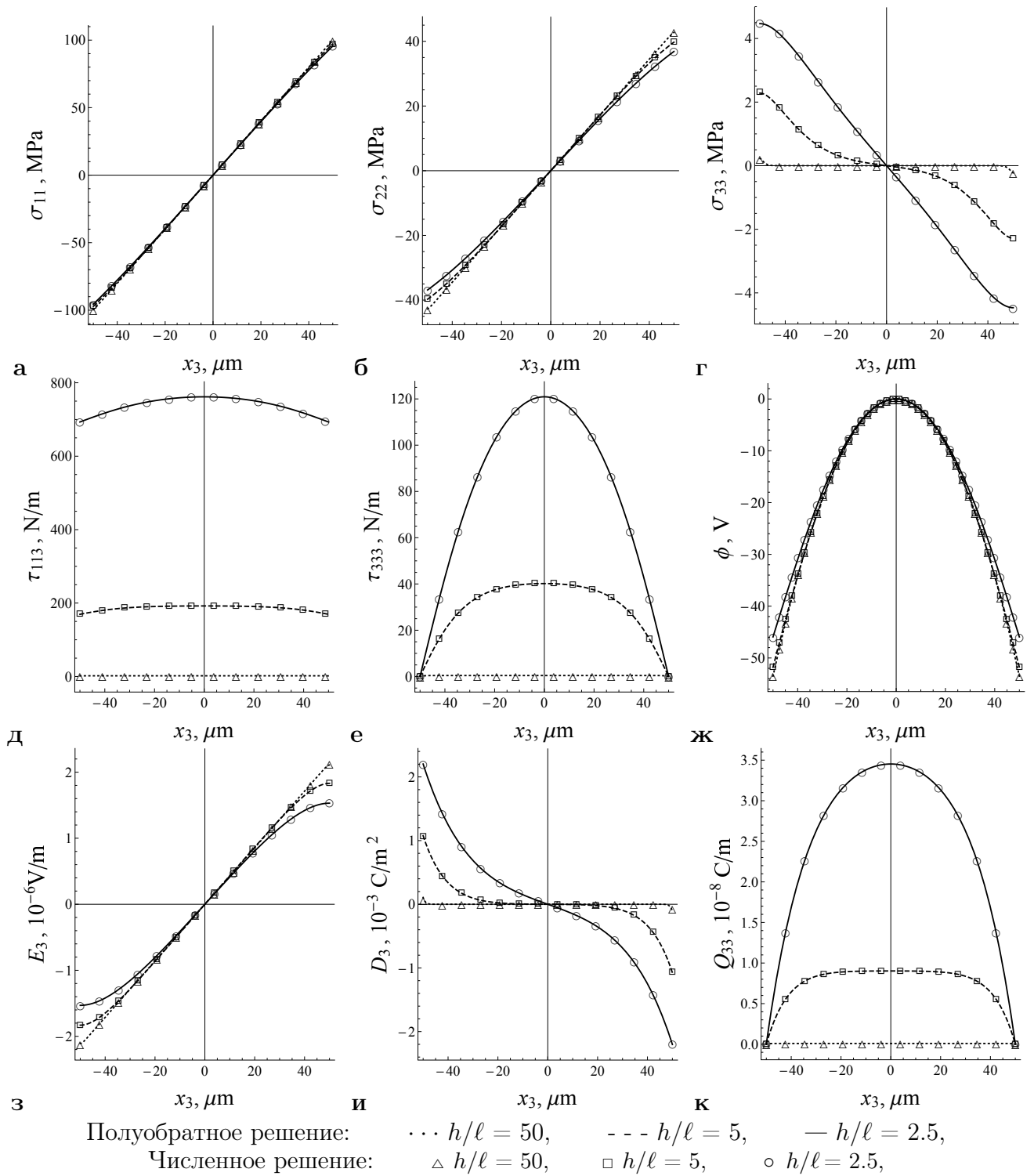


Рис. 69: Сопоставление аналитического полуобратного решения (линии) и численного моделирования (точки) в центральном поперечном сечении слоя для различных нормированных значений толщины h/l

Иллюстрация результатов конечно-элементного моделирования представлена также на рис. 70. Здесь видно, что некоторые локальные краевые эффекты возникают только вблизи правой (нагруженной) границы и угловых точек слоя. Эти эффекты затухают при удалении от границы. В частности, деформации сдвига возникают только вблизи нагруженной границы слоя, а в центральной части они отсутствуют, что соответствует гипотезам предло-

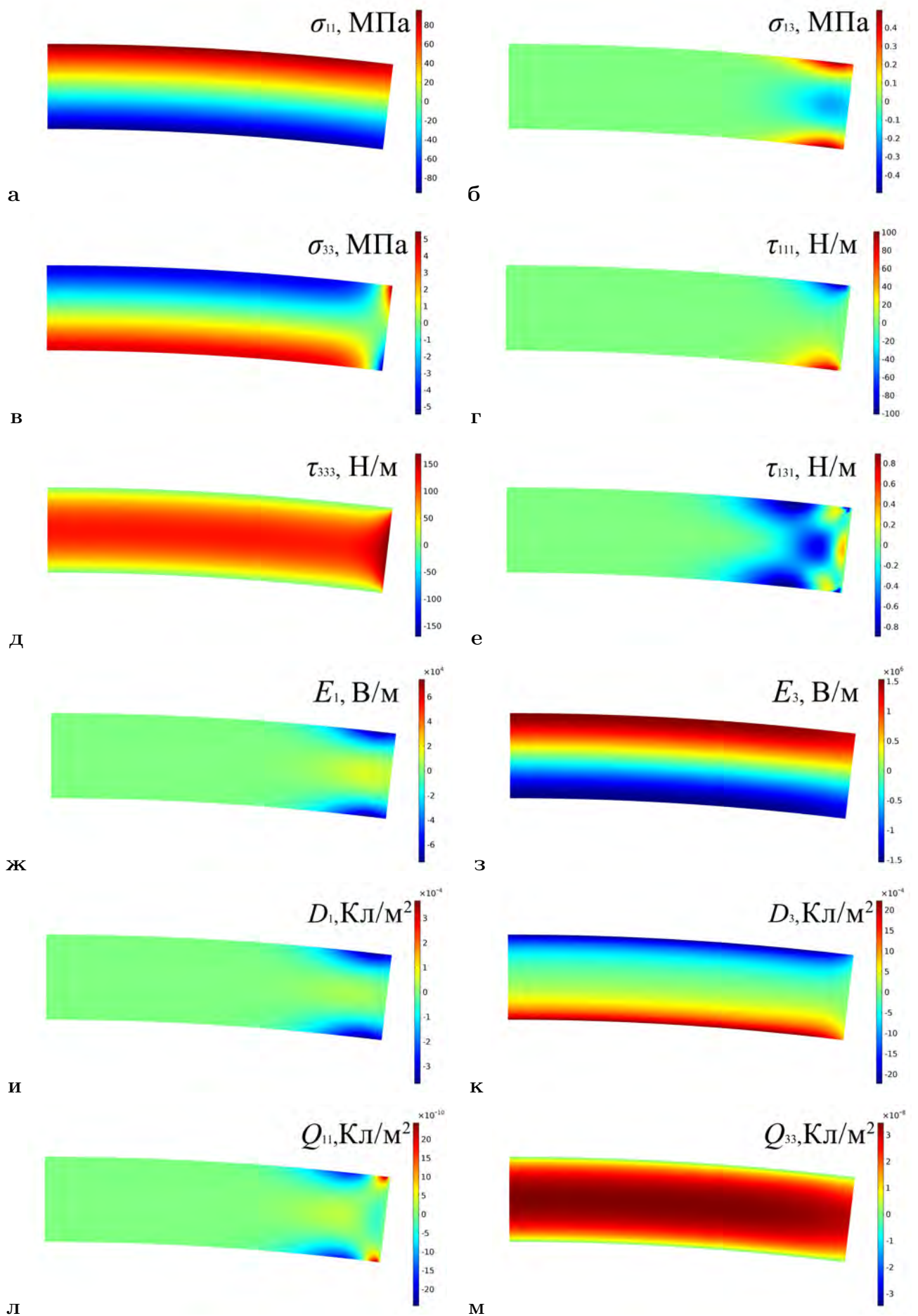


Рис. 70: Численное конечно-элементное решение для задачи о чистом изгибе слоя: затухание градиентных краевых эффектов вдали от торцевых поверхностей слоя. Деформации увеличены в 20 раз.

женного полуобратного решения. Еще одной особенностью решения является тот факт, что в слое возникают ненулевые напряжения обжатия – нормальные напряжения τ_{33} (рис. 69в, 70в). В аналогичном решении в упрощенной ГТУ такие напряжения не возникают, а возникают только продольные напряжения τ_{11} (см. предыдущий раздел). Поэтому в решении ГТЭ возникновение ненулевой компоненты τ_{33} , а также неклассическая зависимость поперечных деформаций слоя от его толщины (см. рис. 71). Такие эффекты, которые в большей степени проявляются для тонких образцов материала, могут быть использованы для валидации модели.

Заметим, что напряжения τ_{33} не обнуляются на свободных верхней и нижней границах слоя, так как в естественные граничные условия они входят в комбинации с градиентными напряжениями (см. (5.45)). Непосредственное выполнение граничных условий на рис. 69, 70 можно видеть в отношении компонент тензоров градиентных напряжений μ_{333} и электрических квадрупольей Q_{33} . Эти величины должны быть равны нулю на верхней и нижней поверхностях слоя ($\mu_{333} = 0, Q_{33} = 0$), что и выполняется в представленных решениях.

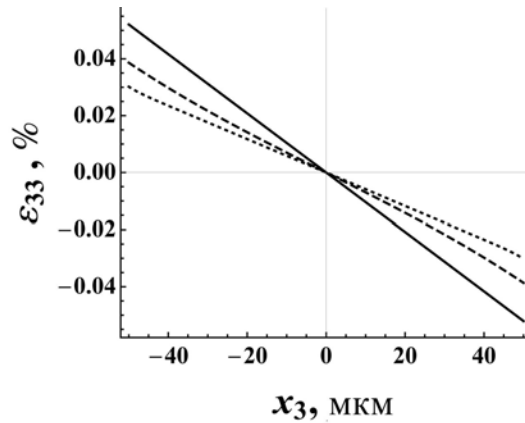


Рис. 71: Зависимость поперечных деформаций слоя от нормированного значения его толщины (аналитическое решение); пунктирная линия – $h/\ell = 50$ (близкое к классическому решению), штриховая линия – $h/\ell = 5$, сплошная линия – $h/\ell = 2.5$

Асимптотическое аналитическое решение для тонкого слоя

После численной проверки полуобратного решения для задачи чистого изгиба (с точки зрения его справедливости вдали от торцевых поверхностей слоя) построим асимптотическое решение для слоя очень малой толщины, то есть для случая, когда отношение толщины к масштабному параметру материала h/ℓ стремится к нулю. Такое решение является важным для проверки моделей тонких балок и пластин. На основе соотношений (5.52), (5.62) найдем значения прогибов, которые возникают в слое на его нейтральной плоскости ($x_3 = 0$):

$$u_3(x_1, x_3) = -\frac{M}{2D_0J}x_1^2 + w(x_3), \quad (5.64)$$

где $w(x_3)$ и J определены соотношениями (5.60) и (5.63), соответственно.

Заметим далее, что на нейтральной поверхности слоя имеем $w(0) = 0$ (это условие использовано при построении решения для исключения смещения слоя, как жесткого целого в направлении оси x_3). Следовательно, прогибы слоя на нейтральной поверхности определены

соотношением $u_3(x_1, 0) = -Mx_1^2/(2D_0J)$. Рассматривая слой очень малой толщины, получим следующее асимптотическое значение параметра J (5.63):

$$\lim_{h/l \rightarrow 0} J = 1 + \frac{Z}{3} \sum_{i=1}^2 (1 + k_{33}^2 - 2\lambda_i^2) \lambda_i^2 \quad (5.65)$$

где мы учли, что выполняется $\lim_{h/l \rightarrow 0} \frac{\ell^2}{h^2} \left(1 - \frac{\tanh(\lambda_i h/l)}{\lambda_i h/l}\right) = \lambda_i^2/3$.

Далее на основе (5.64) и (5.65), с учетом определений для k_{33} , λ_i (5.60) и Z (5.63), находим:

$$\lim_{h/l \rightarrow 0} u_3(x_1, 0) = -\frac{M}{2E_1 I} x_1^2, \quad (5.66)$$

где $E_1 = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}$ это модуль упругости слоя в направлении оси x_1 .

Таким образом, прогибы тонкого слоя (то есть его жесткость) в ГТЭ определяется классическим соотношением (5.66). Все неклассические эффекты в ГТЭ проявляются в характере распределения деформаций по толщине слоя $w(x_3)$ (5.64). При этом эти эффекты не могут быть учтены в модели балок Бернулли-Эйлера, в которой предполагается линейное распределение деформаций по толщине слоя. Более общие балочные теории с усложненными кинематическими гипотезами, потенциально, указанные градиентные эффекты могут учитывать.

Далее найдем распределение электрического потенциала (5.52), (5.60.2) по толщине тонкого слоя. Для этого используем разложение в ряд Тейлора гиперболических функций в выражении (5.60.2), сохраняя два первых значащих слагаемых. Тогда, вводя нормированную координату $\bar{x}_3 = x_3/h$, ($\bar{x}_3 \in [-1, 1]$), получим следующее решение для распределения потенциала:

$$\phi(\bar{x}_3) \approx K \frac{(C_{33}e_{31} - C_{13}e_{33})}{2(C_{33}\kappa_{33} + e_{33}^2)} h^2 \bar{x}_3^2 + A_{01} + \sum_{i=1}^2 A_i \left(1 + \frac{\lambda_i^2 h^2}{2 \ell^2} \bar{x}_3^2\right) \quad (5.67)$$

Используя решение (A.1) для констант A_{01} , A_1 , A_2 , получим:

$$\lim_{h/l \rightarrow 0} \left(A_{01} + \sum_{i=1}^2 A_i \left(1 + \frac{\lambda_i^2 h^2}{2 \ell^2} \bar{x}_3^2\right) \right) = \lim_{h/l \rightarrow 0} (A_{01} + A_1 + A_2) = 0 \quad (5.68)$$

Окончательно, на основании (5.67), (5.68), (5.62) и (5.65) находим следующее распределение потенциала по толщине тонкого слоя:

$$\lim_{h/l \rightarrow 0} \phi(x_3) = \frac{M}{2E_1 I} \frac{C_{33}e_{31} - C_{13}e_{33}}{e_{33}^2 + C_{33}\kappa_{33}} x_3^2 \quad (5.69)$$

Решение (5.69) является классическим, и оно не зависит от масштабного параметра материала l . Вследствие прямого пьезоэлектрического эффекта в слое при действии чистого изгиба возникает параболическое распределение электрического потенциала.

Таким образом, показано, что в ГТЭ прогнозируется классический электромеханический отклик тонкого пьезоэлектрического слоя при действии статического чистого изгиба. Поэто-

му представленное полуобратное решение подтверждает справедливость балочной модели с "одноосным" напряженным состоянием, рассмотренной в предыдущем разделе диссертации (5.22), (5.23), (5.28). Неклассические размерные эффекты, связанные с изменением распределения деформаций по толщине, не должны оказывать существенного влияния на кажущуюся изгибную жесткость тонких пьезоэлектрических пластин и балок в условиях статического нагружения. Эти эффекты тем не менее могут быть достаточно существенны, например, в задачах высокочастотных вибраций, в которых определяющую роль могут играть нормальные деформации слоя в направлении его толщины.

Результаты, представленные в данном разделе диссертации, были опубликованы в работе [177].

5.2 Размерные эффекты в композитах с пьезоактивными фазами

В данном разделе рассмотрены задачи определения эффективных характеристик пьезоэлектрических композиционных материалов. Представленные решения построены на основе моделей ГТЭ и обобщают аналогичные решения, представленные в разделе 4.2, на случай связанных электромеханических эффектов.

5.2.1 Антиплоский сдвиг композита с цилиндрическими включениями

Рассматриваем задачу антиплоского нагружения композита, содержащего прямолинейные цилиндрические включения (волокна) с круглым поперечным сечением. Волокна ориентированы в направлении оси x_3 и имеют радиус R . Решение такой задачи в ГТУ было представлено в разделе 4.2.2. Волокна и матрица в общем случае являются трансверсально изотропными пьезоэлектрическими материалами, поляризованными в направлении ориентации волокон. Таким образом, выделенная ось анизотропии материала ориентирована в направлении оси x_3 .

Решение рассматриваемой задачи позволяет определить эффективный модуль сдвига вдоль волокон $C_{44}^* = C_{1313}^* = C_{2323}^*$, эффективную диэлектрическую константу в направлении поперек волокон $\kappa_{11}^* = \kappa_{22}^*$ и пьезоэлектрический коэффициент $e_{15}^* = e_{113}^* = e_{123}^*$ ([377]). Для антиплоского нагружения предполагаем, что в каждой фазе выполняется $u_1^{(r)} = u_2^{(r)} = 0$, $u_3^{(r)} = w^{(r)}(x_1, x_2)$ и $\phi^{(r)} = \phi^{(r)}(x_1, x_2)$, где индексы $r = 1, 2$ определяют фазу волокон и матрицы, соответственно. Ненулевые компоненты тензора деформаций и электрического поля в рассматриваемой задаче следующие:

$$\begin{cases} \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{cases}^{(r)} = \nabla w^{(r)}, \quad \begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}^{(r)} = -\nabla \phi^{(r)} \quad (5.70)$$

где ∇ это двумерный оператор набла (градиент) в плоскости x_1x_2 .

Соответственно, ненулевые напряжения и компоненты вектора электрической индукции:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{(r)} &= \begin{cases} \tau_{31} \\ \tau_{32} \end{cases}^{(r)} = C_{44}^{(r)} \nabla w^{(r)} + e_{15}^{(r)} \nabla \phi^{(r)}, \\ \mathbf{D}^{(r)} &= \begin{cases} D_1 \\ D_2 \end{cases}^{(r)} = e_{15}^{(r)} \nabla w^{(r)} - \kappa_{11}^{(r)} \nabla \phi^{(r)} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Ненулевые градиентные напряжения и квадрупольные моменты:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^{(r)} &= \begin{cases} \mu_{311} & \mu_{312} \\ \mu_{321} & \mu_{322} \end{cases}^{(r)} = \ell^2 \nabla \boldsymbol{\tau}^{(r)}, \\ \mathbf{Q}^{(r)} &= \begin{cases} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{cases}^{(r)} = \ell^2 \nabla \mathbf{D}^{(r)} \end{aligned} \quad (5.72)$$

где сделано предположение, что масштабные параметры материалов матрицы и волокон равны $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ и имеют одинаковые значения в определяющих соотношениях для градиентных напряжений и квадрупольных моментов (сделанные предположения являются упрощающими, и они позволяют построить аналитическое решение в замкнутом виде).

Для удобства дальнейших преобразований представим соотношения (5.71), (5.72) в следующем виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{D} \end{cases}^{(r)} = \mathbf{L}_r \begin{cases} \nabla w \\ \nabla \phi \end{cases}^{(r)}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{Q} \end{cases}^{(r)} = \ell^2 \mathbf{L}_r \nabla \begin{cases} \nabla w \\ \nabla \phi \end{cases}^{(r)}, \quad (5.73)$$

где $\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} C_{44}^{(r)} & e_{15}^{(r)} \\ e_{15}^{(r)} & -\kappa_{11}^{(r)} \end{bmatrix}$

Подставляя (5.71), (5.72) в уравнения равновесия и закон Гаусса (2.23), найдем следующий вид этих уравнений для антиплоской задачи:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}^{(r)} - \ell^2 \nabla \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}) &= 0, \\ \nabla \cdot (\mathbf{D}^{(r)} - \ell^2 \nabla \Delta \mathbf{D}^{(r)}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

или

$$\mathbf{L}_r \begin{cases} \Delta(1 - \ell^2 \Delta)w \\ \Delta(1 - \ell^2 \Delta)\phi \end{cases}^{(r)} = 0 \quad (5.75)$$

Далее будем следовать подходу, который, по-видимому впервые был предложен Бенвенистом в классических моделях пьезоэлектрических композитов [377]. В соответствии с этим подходом введем преобразование переменных модели таким образом, чтобы обеспечить разделение уравнений в системе (5.75). Для этого будем использовать известный в линейной алгебре факт, что две симметричные действительные матрицы \mathbf{L}_r могут быть одновременно диагонализированы на основе следующего преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_r &= \mathbf{W} \mathbf{L}_r \mathbf{W}^T, \quad r = 1, 2 \\ \tilde{\mathbf{L}}_r &= \begin{Bmatrix} \tilde{C}_{44}^{(r)} & 0 \\ 0 & -\tilde{\kappa}_{11}^{(r)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.76)$$

где $\tilde{\mathbf{L}}_r$ это диагонализированные матрицы материальных констант фаз в пространстве новых переменных, а \mathbf{W} это матрица преобразования, которая определяется следующим образом: $\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 = \mathbf{W} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{W}^T$, причем в этом выражении $\boldsymbol{\Lambda}$ – это диагональная матрица, что означает, что матрица преобразования \mathbf{W} образована собственными векторами матрицы вида $(\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2)$.

Тогда, учитывая преобразование (5.76) и вид определяющих соотношений (5.73), новые переменные модели вводятся следующим образом (обозначаются с волной):

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{cases}^{(r)} = \mathbf{W} \begin{cases} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{D} \end{cases}^{(r)}, \quad \begin{cases} \nabla \tilde{w} \\ \nabla \tilde{\phi} \end{cases}^{(r)} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \begin{cases} \nabla w \\ \nabla \phi \end{cases}^{(r)} \quad (5.77)$$

Определяющие соотношения (5.73), записываемые в терминах новых переменных, принимают вид:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\boldsymbol{D}} \end{Bmatrix}^{(r)} = \tilde{\boldsymbol{L}}_r \begin{Bmatrix} \nabla \tilde{w} \\ \nabla \tilde{\phi} \end{Bmatrix}^{(r)}, \quad \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}} \\ \tilde{\boldsymbol{Q}} \end{Bmatrix}^{(r)} = \ell^2 \tilde{\boldsymbol{L}}_r \nabla \begin{Bmatrix} \nabla \tilde{w} \\ \nabla \tilde{\phi} \end{Bmatrix}^{(r)} \quad (5.78)$$

Заметим, что после выполненного преобразования, определяющие соотношения (5.78) оказываются несвязанными (не содержат перекрестных членов), так как матрицы материальных констант $\tilde{\boldsymbol{L}}_1$ и $\tilde{\boldsymbol{L}}_2$ имеют диагональный вид (5.76). Поэтому в терминах новых переменных исходная связанная задача распадается на две отдельные задачи – механическую и электростатическую. Математические формулировки обеих этих задач в рамках антиплоской модели и в рамках рассматриваемого варианта ГТЭ оказываются эквивалентными с точностью до обозначений, в частности уравнения равновесия и закон Гаусса (5.75) принимают вид:

$$\begin{cases} \Delta(1 - \ell^2 \Delta) \tilde{w}^{(r)} = 0, \\ \Delta(1 - \ell^2 \Delta) \tilde{\phi}^{(r)} = 0 \end{cases} \quad (5.79)$$

Вследствие реализуемой структуры определяющих соотношений для материалов фаз, матрица эффективных характеристик композита также должна иметь диагональный вид при использовании формулировки модели в новом пространстве переменных. Это означает, что эффективные характеристики $\tilde{\boldsymbol{L}}^*$ могут быть найдены далее из решения двух несвязанных задач, а исходные искомые эффективные свойства пьезоэлектрического композита \boldsymbol{L}^* (как и решение для перемещений, потенциала и т.д.) могут быть найдены путем применения обратного преобразования (5.76), то есть на основе соотношений вида:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{L}}^* &= \boldsymbol{W} \boldsymbol{L}^* \boldsymbol{W}^T, & \boldsymbol{L}^* &= (\boldsymbol{W}^{-1}) \tilde{\boldsymbol{L}}^* (\boldsymbol{W}^{-1})^T, \\ \tilde{\boldsymbol{L}}^* &= \begin{Bmatrix} \tilde{C}_{44}^* & 0 \\ 0 & -\tilde{\kappa}_{11}^* \end{Bmatrix}, & \boldsymbol{L}^* &= \begin{Bmatrix} C_{44}^* & e_{15}^* \\ e_{15}^* & -\kappa_{11}^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи электроупругости сведено к решению двух несвязанных задач механики и электростатики и к применению стандартных матричных операций для нахождения решения исходной задачи. Механическая задача соответствует той, которая была рассмотрена в разделе 3.2.2.1. в рамках градиентной теории упругости. Для этой задачи были построены решения для эффективного модуля сдвига \tilde{C}_{44}^* как на основе метода Мори-Танака, так и на основе обобщенного самосогласованного метода. Эти же решения полностью (с точностью до обозначений) могут быть использованы для расчета эффективной диэлектрической константы $\tilde{\kappa}_{11}^*$ в задаче электростатики. Соответствующие эффективные константы в исходной задаче \boldsymbol{L}^* находятся путем применения обратного преобразования \boldsymbol{W}^{-1} к диагональной матрице $\tilde{\boldsymbol{L}}^*$, содержащей \tilde{C}_{44}^* и $\tilde{\kappa}_{11}^*$.

Остановимся далее на представлении решений для эффективных констант в пространстве преобразованных переменных. Обобщая решение ГТУ для эффективного модуля сдвига

(4.118), имеем в рамках метода Мори-Танака следующие решения:

$$\tilde{C}_{44}^* = \frac{\tilde{C}_{44}^{(2)}(1-c) + \tilde{C}_{44}^{(1)}cT_\varepsilon}{1-c+cT_\varepsilon}, \quad \tilde{\kappa}_{11}^* = \frac{\tilde{\kappa}_{11}^{(2)}(1-c) + \tilde{\kappa}_{11}^{(1)}cT_E}{1-c+cT_E} \quad (5.81)$$

где c – это объемное содержание волокон, $\tilde{C}_{44}^{(r)}$, $\tilde{\kappa}_{11}^{(r)}$ это компоненты трансформированных матриц материальных констант $\tilde{\mathbf{L}}_r$ (5.76) и T_ε , T_E – это средние значения коэффициента концентрации деформаций и электрического поля внутри включения, соответственно. Величина T_ε для задачи упругости определяется выражением:

$$T_\varepsilon = \frac{g_1 I_1(\bar{R}) K_0(\bar{R}) + (g_2 + g_3 I_1(\bar{R})) K_1(\bar{R}) + I_0(\bar{R})(g_4 K_0(\bar{R}) + g_5 K_1(\bar{R}))}{I_1(\bar{R})(g_6 K_0(\bar{R}) + g_7 K_1(\bar{R})) + I_0(\bar{R})(g_8 K_0(\bar{R}) + g_9 K_1(\bar{R}))}, \quad (5.82)$$

где $\bar{R} = R/\ell$

$$\begin{aligned} g_1 &= 8C_{44}^{(2)}(2(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})\ell^2 + C_{44}^{(1)}R^2)R \\ g_2 &= 16C_{44}^{(2)}(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})\ell^2 R, \quad g_3 = 8C_{44}^{(2)}(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})(2\ell^2 + 3R^2)\ell \\ g_4 &= -8C_{44}^{(2)}(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})\ell R^2 \quad g_5 = -8C_{44}^{(2)}(3(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})\ell^2 - C_{44}^{(2)}R^2)R \\ g_6 &= 4(C_{44}^{(1)} + C_{44}^{(2)})(2(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})\ell^2 + C_{44}^{(1)}R^2)R \\ g_7 &= 8C_{44}^{(2)}(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})(2\ell^2 + R^2)\ell \quad g_8 = -4(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})(C_{44}^{(1)} + C_{44}^{(2)})\ell R^2 \\ g_9 &= -4C_{44}^{(2)}(2(C_{44}^{(1)} - C_{44}^{(2)})\ell^2 - (C_{44}^{(1)} + C_{44}^{(2)})R^2)R \end{aligned} \quad (5.83)$$

Для задачи электростатики, то есть для вычисления T_E , в этом представлении следует заменить константы жесткости $C_{44}^{(r)}$ на диэлектрическую константу $\kappa_{11}^{(r)}$.

Заметим, что так же, как и в задаче ГТУ, в задаче с электроупругими фазами в рамках решения ГТЭ во включении будет возникать неоднородное поле деформаций и неоднородное распределение напряженности электрического поля. Поэтому применение метода Мори-Танака требует проведения процедуры осреднения функций концентрации T_ε , T_E по объему включения, которая приводит к выражениям вида (5.82). Особенности применения такого осреднения и, в целом, прямых методов осреднения в задачах упругости, обсуждалось в разделах 3.3, 4.2.

Применение обобщенного самосогласованного метода осреднения (модели трех фаз) не требует вычисления осредненных параметров концентрации. Напротив, этот метод является энергетическим, и его применение предполагает использование в качестве замыкающего уравнения энергетического критерия в виде интегральной формулы Эшелби. Для ГТЭ эта формула была получена в разделе 3.3 (соотношения (3.48), (3.49)). В отличие от прямых методов осреднения, энергетические методы не всегда позволяют получать замкнутые аналитические решения для задач осреднения, однако, при этом в градиентных теориях они оказываются более точными (см. раздел 4.2). Обобщая результаты, полученные в ГТУ (4.128), решение для рассматриваемой задачи может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{C}_{44}^* = \tilde{C}_{44}^{(2)} \frac{a_1 - a_2/(\bar{R}\ell)^2}{1 + a_3 J_1 + a_4 J_2}, \quad \tilde{\kappa}_{11}^* = \tilde{\kappa}_{11}^{(2)} \frac{b_1 - b_2/(\bar{R}\ell)^2}{1 + b_3 J_1 + b_4 J_2} \quad (5.84)$$

где $\bar{R} = \frac{R}{\ell\sqrt{c}}$ – это нормированное значение радиуса представительного фрагмента (включение со слоем матрицы), $J_1 = (I_1(\bar{R}) - \bar{R}I_0(\bar{R})) / (\bar{R}\ell)$, $J_2 = (K_1(\bar{R}) + \bar{R}K_0(\bar{R})) / (\bar{R}\ell)$; I_n, K_n – это модифицированные функции Бесселя, a_i, b_i ($i=1\dots 4$) – это константы, которые должны определяться из решения системы граничных и контактных условий в трехфазном фрагменте следующего вида (на примере задачи упругости для фрагмента, состоящего из 1 - включения, 2 - матрицы, 3 - эффективной среды):

$$\begin{aligned} r = R : \quad w_1 = w_2, \quad \partial w_1 / \partial r = \partial w_2 / \partial r, \quad \sigma_{zr}^{(1)} = \sigma_{zr}^{(2)}, \quad \mu_{zrr}^{(1)} = \mu_{zrr}^{(2)}, \\ r = R/\sqrt{c} : \quad w_2 = w_3, \quad \mu_{zrr}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

где $\sigma_{zr}^{(i)} = C_{44}^{(i)}(\nabla w - \ell^2 \Delta \nabla w) \cdot \mathbf{n}_r$ – это полные напряжения, входящие в уравнения равновесия; $\mu_{zrr}^{(i)} = \ell^2 C_{44}^{(i)}(\mathbf{n}_r \cdot \nabla(\nabla w)^T \cdot \mathbf{n}_r)$ – это градиентные напряжения, \mathbf{n}_r – это единичный вектор нормали на границе контакта фаз, и общий вид функций перемещений в фазах определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} w_1 &= (s_1 r + s_2 I_1(r/\ell)) \cos \theta, \\ w_2 &= (a_1 r + a_2/r + a_3 I_1(r/\ell) + a_4 K_1(r/\ell)) \cos \theta, \\ w_3 &= 2\gamma_0 r \cos \theta \end{aligned} \quad (5.86)$$

Коэффициенты a_i , необходимые для вычисления эффективного модуля сдвига \tilde{C}_{44}^* в (5.84₁) определяются из решения системы уравнений (5.85) одновременно с коэффициентами s_i , которые определяют поле перемещений внутри включения. Коэффициенты b_i , необходимые для вычисления эффективной диэлектрической константы $\tilde{\kappa}_{11}^*$ в (5.84₂), определяются из аналогичной системы уравнений (5.85), в которой все механические величины заменяются на их аналоги в математической формулировке задачи электростатики (смещение - потенциал, деформации - напряженность электрического поля и т.д., см. раздел 2.2).

Таким образом, имеем два аналитических решения – по методу Мори-Танака (5.81) и по методу трех фаз (5.84). Применяя преобразование (5.80), на основе этих решений можно определить эффективные свойства композита с пьезоактивными фазами в ГТЭ. Классическое решение для рассматриваемой задачи было построено в работе [377]. Это решение может быть получено как частный случай из решений ГТЭ в предположении, что масштабный параметр материалов стремится к нулю ($\ell \rightarrow 0$). Для классической задачи оба рассматриваемых метода осреднения дают одинаковое решение (4.119). Окончательное классическое решение для эффективных характеристик композитов с пьезоэлектрическими фазами может быть представлено в следующем виде [377]:

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}_2 [(1+c)\mathbf{L}_2 + (1-c)\mathbf{L}_1]^{-1} [(1-c)\mathbf{L}_2 + (1+c)\mathbf{L}_1] \quad (5.87)$$

Примеры вычислений

Рассматриваем вариант композиционного материала с изотропной диэлектрической матрицей из эпоксидной смолы, армированной трансверсально изотропными волокнами из пье-

зокерамики PZT-7A. Эффективные свойства для рассматриваемого композиты были рассчитаны на основе предложенного подхода с преобразованием переменных и использованием метода Мори-Танака и метода трех фаз. Найденная зависимость констант C_{44}^* , e_{15}^* и κ_{11}^* от объемного содержания включений при различных соотношениях масштабного параметра материалов и радиуса волокон R/ℓ представлена на рис. 72. Классическое решение (5.87) и границы Фойгта-Рейсса также на этом рисунке, при этом нижняя оценка Рейсса для константы e_{15}^* тождественно равна нулю, так как материал матрицы не обладает пьезоэлектрическими свойствами. Видно, что решения ГТЭ для всех эффективных характеристик всегда прогнозируют повышение значений по сравнению с классическим решением. При этом получаемые прогнозы остаются в пределах вилки Фойгта-Рейсса и не выходят за верхнюю оценку, которая, по сути, представляет собой линейную зависимость (правило смеси). Эти результаты согласуются с аналогичными прогнозами для упругих композитов в ГТУ (раздел 4.2.2). Запись функции электрической энтальпии в терминах компонент тензора деформаций и вектора напряженности электрического поля с учетом вклада градиентных составляющих в ГТЭ (5.1) приводит к тому, что вычисляемые эффективные классические константы неоднородного материала повышаются (учитывается, что часть работы внешних сил расходуется на накопление энергии, связанной с вкладом градиентов полевых переменных).

Выбор методов осреднения, также как и в ГТУ, оказывает влияние на прогнозируемые эффективные свойства. Применение метода трех фаз приводит к более высоким значениям эффективных свойств, по сравнению с методом Мори-Танака. Наиболее существенное расхождение решений реализуется для больших объемных содержаний волокон малого диаметра (рис. 72, а). Также как и в ГТУ, это является следствием использования осредненных значений коэффициентов концентрации по объему включения. В случае ГТЭ это коэффициенты концентрации деформаций T_ε и напряженности электрического поля T_E в выражении (5.81). Важным является тот факт, что в отличие от упругих композитов, где свойства фаз отличаются обычно не более чем в 100 раз, в пьезоэлектрических материалах диэлектрические константы и пьезоэлектрические коэффициенты могут отличаться более чем в 1000 раз, и, следовательно, вилка Фойгта-Рейсса оказывается очень широкой, а изменение эффективных свойств вследствие влияния размерных эффектов может происходить в широком диапазоне.

На рисунке 73 показано влияние нормированного значения радиуса волокон на эффективные электромеханические свойства композитов. Такого рода масштабные эффекты в классическом решении не учитываются (без введения дополнительных предположений, например, об изменении свойств или наличии межфазных зон). Классическое решение на рис. 73 показано горизонтальным пунктиром. Существенный положительный масштабный эффект, связанный с уменьшением толщины волокон, прогнозируется для соотношения между радиусом волокон и масштабного параметра материала $R < 20\ell$. Расхождение между рассматриваемыми методами осреднения увеличивается для относительно тонких волокон, а для волокон большой толщины оба метода согласуются друг с другом и выходят на классическое решение.

Примеры моделируемого НДС и электрического поля в представительных фрагментах показаны на рис. 74, 75. Эти решения используются при реализации обобщенного са-

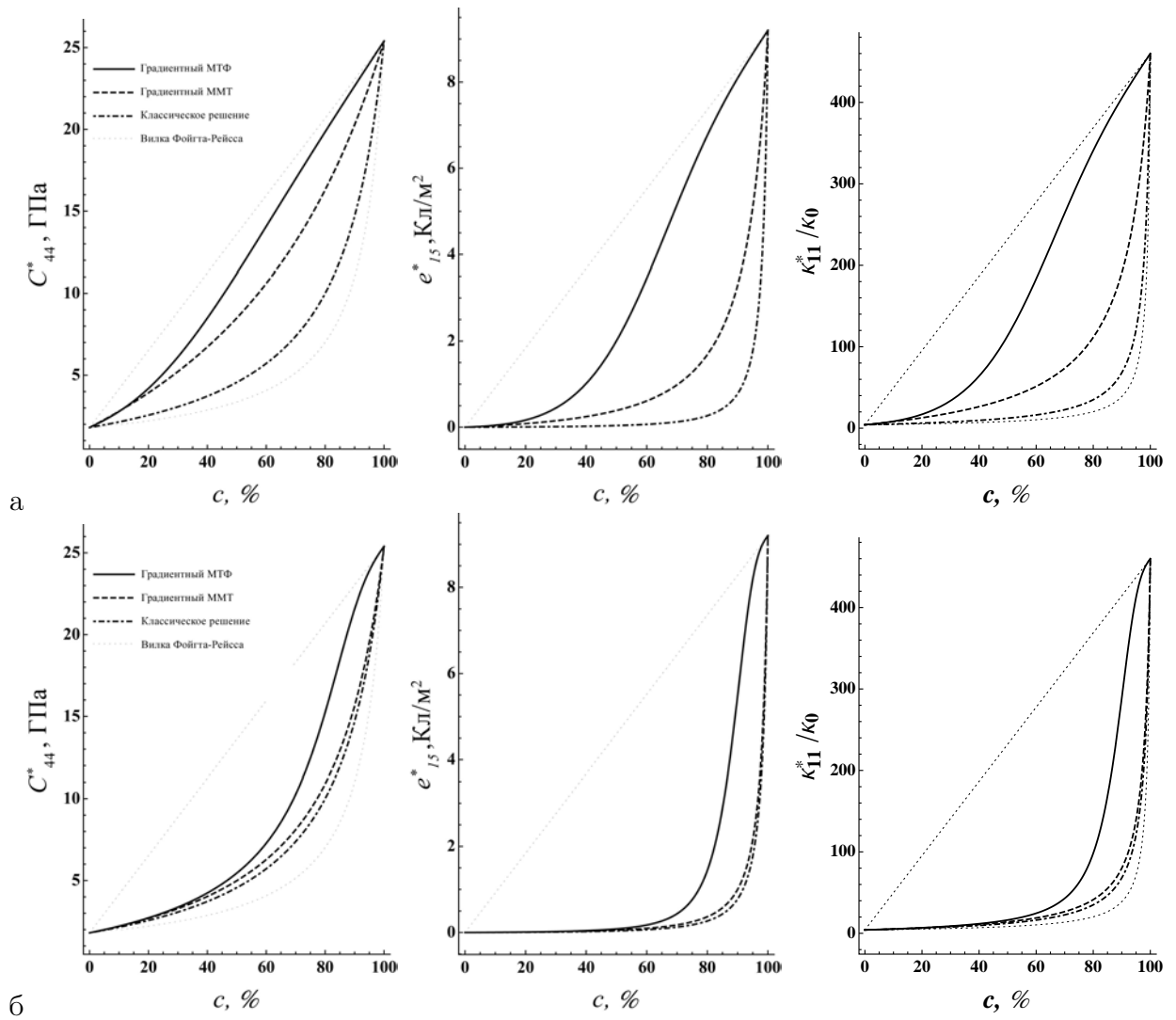


Рис. 72: Зависимость эффективных электромеханических характеристик композита от объемного содержания волокон. Радиус волокон $R/l = 1$ (а) и $R/l = 10$ (б)

мосогласованного метода. Представлено распределения перемещений $w(x_1, x_2)$ (рис. 74) и компоненты вектора электрического поля $E_1(x_1, x_2)$ (рис. 75), возникающие при приложении внешней антиплоской сдвиговой нагрузки. Центральная область на этих рисунках является поперечным сечением волокна (фаза 1), окружающий слой – это матрица (фаза 2), толщина которой определяется с учетом заданного объемного содержания включений. Третья бесконечная фаза, окружающая слой матрицы – это внешняя бесконечная среда с эффективными свойствами композита. В соответствии с построенным решением, во внешней среде реализуется однородное состояние (см. (5.86)), в частности – постоянное значение электрического поля на рис. 75. Почти однородное поле внутри волокон реализуется в случае достаточно больших соотношений радиуса к масштабному параметру R/l (рис. 75а). Однако, в тонких волокнах модель ГТЭ прогнозирует возникновение неоднородного состояния. Для электрического поля это хорошо видно на рис. 75б. Межфазные (пограничные) слои возникают на границах волокон и матрицы вследствие реализации градиентных эффектов. Максимальные значения напряженности электрического поля реализуются на границе контакта фаз в слу-

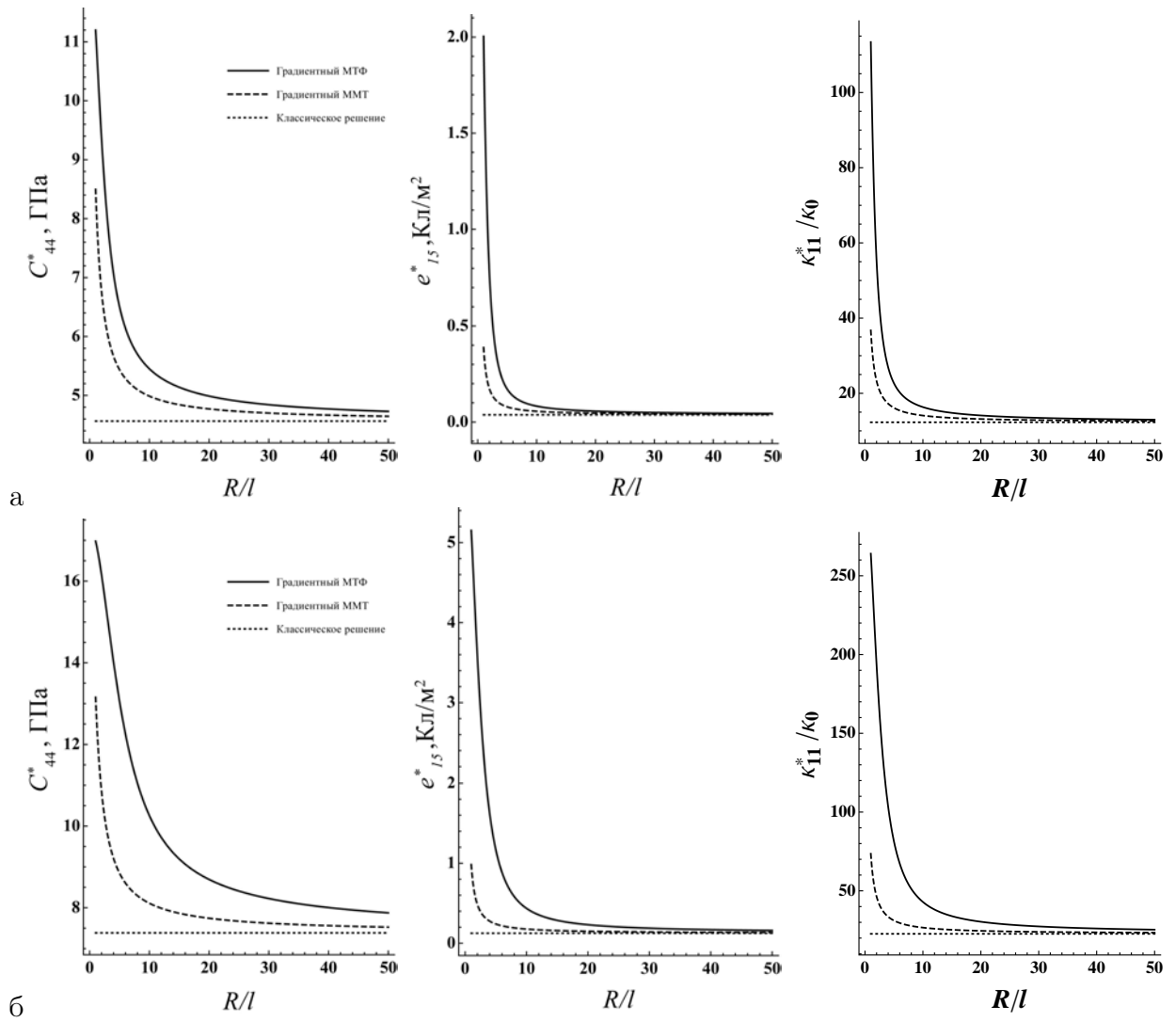


Рис. 73: Зависимость эффективных электромеханических свойств композитов от радиуса волокон. Объемное содержание волокон $c = 50\%$ (а) и $c = 70\%$ (б)

чае решений, близких к классическому (рис. 75а), и сдвигаются от границы внутрь фазы матрицы и далее – ближе к границе между матрицей и эффективной средой в решении ГТЭ (рис. 75 б).

В отношении распределения перемещений в представительных фрагментах с большими и малыми соотношениями R/l заметим, что в случае волокон большого диаметра (рис. 74а), в более жесткой фазе включений реализуются практически нулевые перемещения, и деформации материала в основном связаны с податливостью матрицы. Такое решение соответствует классическому случаю. Однако в случае очень тонких волокон (рис. 74б) прогнозируемое деформированное состояние оказывается близким к однородному сдвигу во всех трех фазах с линейным изменением функции перемещений в направлении оси x_1 , вдоль которой реализуется сдвиг. При этом уровень перемещений значительно снижается (то есть происходит повышение жесткости материала) вследствие влияния градиентных эффектов, благодаря которым уровень деформаций в матрице приближается к уровню деформаций в волокнах. Как и в случае задач ГТУ, этот эффект в ГТЭ определяется требованием непрерывности

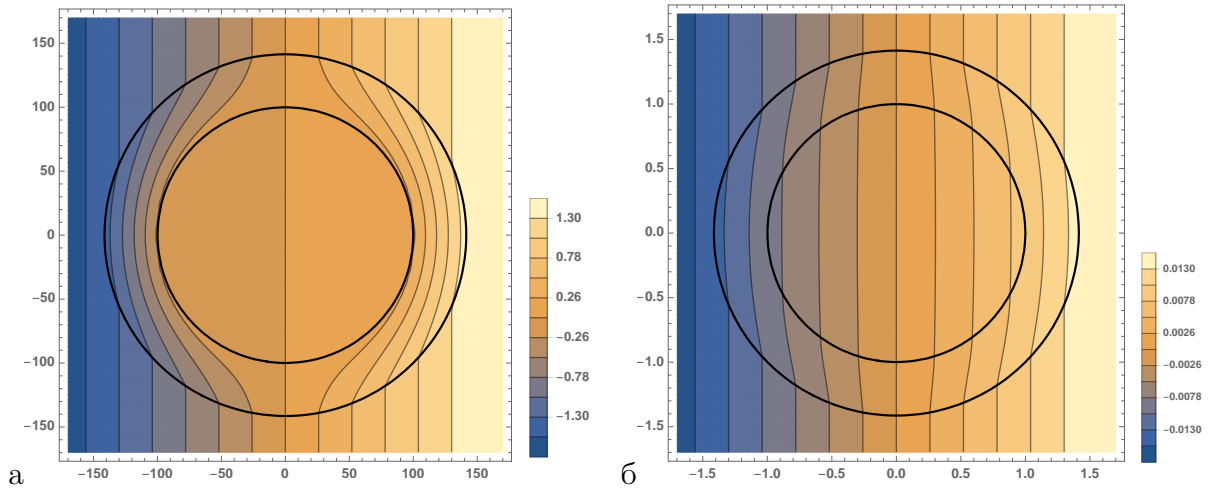


Рис. 74: Характерное распределение нормированных значений перемещений $w(x, y)/l$ в трехфазных представительных фрагментах, используемых в обобщенном самосогласованном методе. Объемное содержание волокон составляет 50%, радиус волокон $R/l = 100$ (а) и $R/l = 1$ (б)

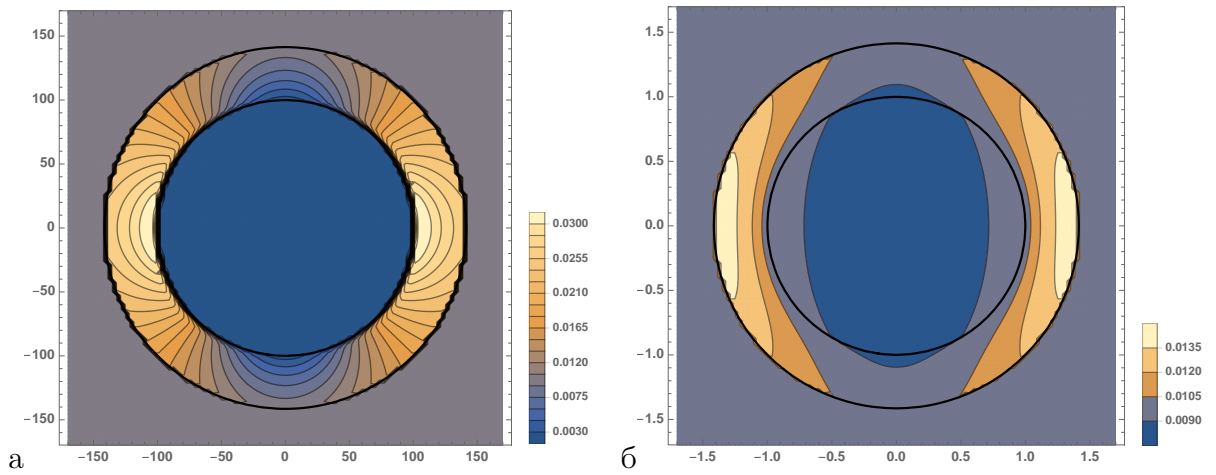


Рис. 75: Распределение компоненты электрического поля $E_1(x, y)$ в трехфазных представительных фрагментах, используемых в обобщенном самосогласованном методе. Объемное содержание волокон составляет 50%, радиус волокон $R/l = 100$ (а) и $R/l = 1$ (б)

деформаций (ε_{zr}) на границе волокон и матрицы. Аналогичный эффект реализуется и в электростатической части задачи, в которой возникает дополнительное граничное условие непрерывности нормальной компоненты электрического поля на границе раздела фаз.

5.2.2 Эффективные свойства наполненных композитов

Построение аналитических решений для трехмерных задач о включениях в градиентной теории электроупругости представляет собой значительно более сложную проблему по сравнению с аналогичными задачами классической электроупругости и задачами изотропной ГТУ. Основная сложность связана со всегда присутствующей анизотропией фаз, которая приводит к специфической структуре определяющих соотношений, разделение которых в общем случае, по-видимому, невозможно даже в рамках упрощенных или вырожденных теорий. Поэтому применение метода преобразования переменных (как в предыдущем разделе для наиболее простой анти-плоской задачи) может быть неэффективным в случае трехмерных задач. В данном разделе диссертации рассматривается задача о сферическом включении в ГТЭ, решение которой строится численно методом конечных элементов в Comsol. Рассматривается формулировка ГТЭ, представленная в разделе 2.2. Описание методики численных расчетов в ГТЭ было дано в разделе 3.5.1.

Рассматриваем задачу определения эффективных свойств композита с изотропной полимерной матрицей на основе эпоксидной смолы и пьезоэлектрическим дисперсным наполнителем PZT-7A в виде частиц сферической формы. Трансверсально изотропные частицы поляризованы в направлении оси z . Решение задачи будем строить на основе моделирования НДС и поляризации представительных фрагментов композита, содержащих одно или восемь включений (рис. 76). Фрагменты с единственным включением является упрощенной моделью материала, которая может быть использована для структур с регулярным распределением наполнителя (рис. 76а). Фрагменты с восемью включениями позволяют дополнительно проанализировать влияние эффектов кластеризации (агломерации) включений. В таких фрагментах включения могут быть распределены, как с равномерным шагом по всем трем пространственным направлениям, так и в виде кластера (рис. 76б, в). Область, занимаемая представительным фрагментом, представляет собой куб с размером стороны d , то есть $x \in [0, d]$, $y \in [0, d]$, $z \in [0, d]$.

В расчетах задаются периодические граничные условия. Описание типа периодических граничных условий, необходимых для вычисления эффективных свойств пьезокомпозитов в

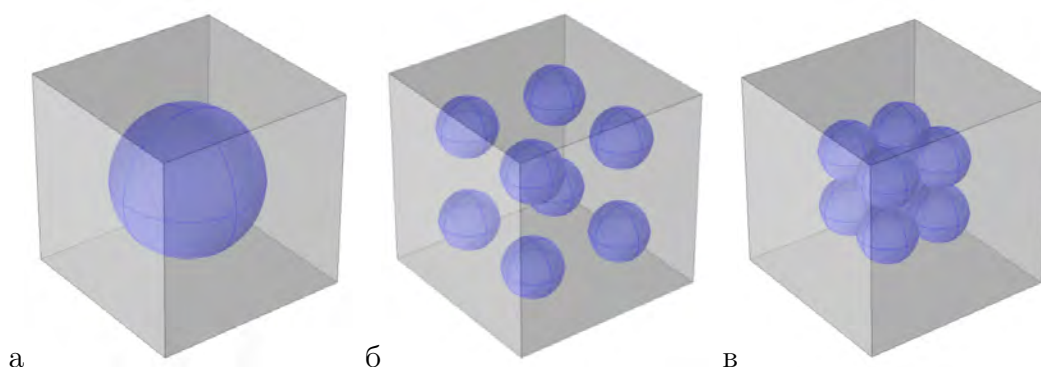


Рис. 76: Представительные фрагменты дисперсно армированного пьезоэлектрического композита с единственным включением (а) и с восемью включениями, которые равномерно распределены в объеме фрагмента (б) или образуют кластер (в).

классической теории электроупругости, было представлено в работе [378]. В ГТЭ необходимо использовать расширенный набор условий, которые предполагает непрерывность вектора напряжений и вектора градиентных напряжений, электрического потенциала, напряженности электрического поля, вектора поляризации и квадрупольной поляризации, за исключением задаваемых в качестве внешней нагрузки ненулевых значений компонент вектора перемещений или электрического потенциала (будут указаны далее). В представленных ниже расчетах вычисляются эффективные коэффициенты жесткости материала c_{11}^* , c_{12}^* , c_{13}^* , c_{33}^* , пьезоэлектрические коэффициенты e_{31}^* , e_{33}^* и диэлектрическая константа κ_{33}^* . Для определения констант c_{13}^* и c_{33}^* рассматривается задача одноосного деформированного состояния в направлении оси z с заданными деформациями растяжения ε . При этом используются следующие граничные условия:

$$x = 0, d : u_1 = 0, \quad y = 0, d : u_2 = 0, \quad z = 0, d : u_3 = \pm \varepsilon d / 2 \quad (5.88)$$

Все остальные граничные условия, используемые в расчете, предписывают непрерывность механических и электростатических переменных модели, как это было указано выше. На основе численного моделирования определяются реализующиеся в представительном фрагменте средние значения напряжений $\langle \tau_{11} \rangle$, $\langle \tau_{33} \rangle$ (угловые скобки обозначают осреднение по объему всего фрагмента). Эффективные константы вычисляются на основе соотношений $c_{33}^* = \langle \tau_{33} \rangle / \varepsilon$, $c_{13}^* = \langle \tau_{11} \rangle / \varepsilon$.

Для определения констант c_{11}^* и c_{12}^* рассматривается задача аналогичная предыдущей (5.88), однако растяжение задается в направлении оси x , а сами константы определяются по формулам $c_{11}^* = \langle \tau_{11} \rangle / \varepsilon$, $c_{12}^* = \langle \tau_{22} \rangle / \varepsilon$.

Далее рассматривается задача с заданным средним уровнем напряженности электрического поля E_0 и с запретом нормальных смещений на границах представительного фрагмента (исследуется обратный пьезоэффект [378]):

$$x = 0, d : u_1 = 0, \quad y = 0, d : u_2 = 0, \quad z = 0, d : u_3 = 0, \quad \phi = \pm E_0 d / 2 \quad (5.89)$$

Для остальных переменных модели, не указанных в (5.89), задаются условия периодичности. По результатам численного решения такой задачи эффективные константы находятся на основе следующих соотношений: $e_{31}^* = -\langle \tau_{11} \rangle / E_0$, $e_{33}^* = -\langle \tau_{33} \rangle / E_0$ и $\kappa_{33}^* = -\langle D_3 \rangle / E_0$.

Пример КЭ сетки, использованной в расчетах, представлен на рис. 77. Использовались тетраэдральные элементы в основном объеме матрицы и включения, а на их границе в зонах образования межфазных слоев использовались гексаэдрические элементы (это позволяет улучшить качество численного решения в зонах концентрации напряжений). Общее количество элементов составляло до $\sim 3 \cdot 10^3$, количество степеней свободы до $\sim 1.5 \cdot 10^5$.

Иллюстрации к полученным численным решениям представлены на рис. 78-81. На рисунке 78 показан пример распределения деформаций и напряженности электрического поля, которые возникают в поперечном сечении представительного фрагмента с единственным включением в ГТЭ и в классической модели электроупругости. Решение представлено для размера включений $R/l = 10$ и для случая заданной одноосной деформации $\varepsilon = 0.01$, на-

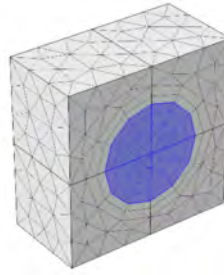


Рис. 77: Пример конечно-элементной сетки, использованной в задаче о сферическом включении в ГТЭ

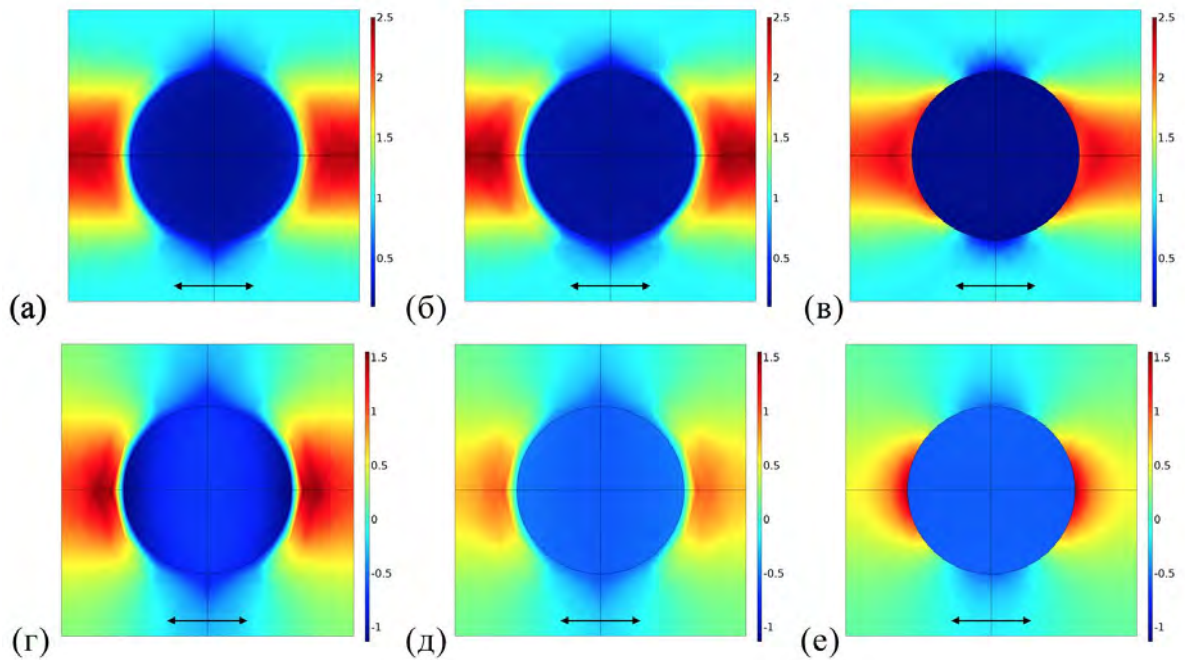


Рис. 78: Распределение деформаций ε_{33} (%) и напряженности электрического поля E_3 (10^{-4} В/м) в поперечном сечении представительного фрагмента, найденные на основе КЭ моделирования при заданных условиях одноосной деформации. Размер включений $R/l = 10$. а: ε_{33} , ГТЭ, б: ε_{33} , классическое решение; г: E_3 , ГТЭ, д: E_3 , классическое решение

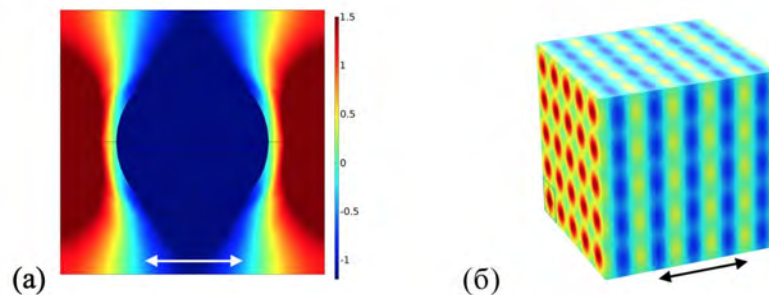


Рис. 79: Распределение напряженности электрического поля E_3 (10^{-4} В/м) в представительном фрагменте с малоразмерными включениями ($R/l = 1$). а – поперечное сечение фрагмента, б – характер распределения электрического поля во фрагменте с регулярным расположением включений.

правление которой указано на рисунках. Это направление совпадает и с направлением поляризации материала включения. Из представленного решения можно видеть, что в ГТЭ реализуется непрерывное изменение деформаций и напряженности электрического поля от включения к матрице с образованием тонкого межфазного слоя (рис. 78а, в). Классическое решение, напротив, содержит разрывы на границе включения и матрицы (рис. 78б, г). При очень малых размерах включений, порядка масштабного параметра материала, в матрице композита возникают области, в которых уровень напряженности электрического поля оказывается сопоставим с напряженностью поля внутри частиц (рис. 79а), а структура электрического поля оказывается близкой к периодической (как в слоистом материале, рис. 79). Такой эффект в решении ГТУ возникает для случая хорошо распределенных по объему композита включений малого размера, и он является следствием возникающих эффектов пограничного слоя, которые распространяются практически на весь представительный фрагмент и ориентируются в соответствии с направлением приложенной нагрузки. Заметим, что измерение потенциала и напряженности электрического поля на поверхности пьезоэлектрика представляет собой более простую задачу по сравнению с измерением поля деформаций. Такие измерения могут выполняться с использованием атомно-силовой микроскопии, и они могут быть использованы для валидации представленного решения ГТЭ (рис. 78, 79) и идентификации масштабных параметров.

По сравнению с классическим решением в ГТЭ происходит повышение уровня механических напряжений и электрической индукции в объеме включения (рис. 80), а также возникают ненулевые значения квадрупольной поляризации частиц (рис. 81). Такой вид поляризации в ГТЭ является откликом материала на присутствие градиентов электрического поля. Для относительно крупных частиц ($R/l \gg 1$) квадрупольная поляризация является несущественной, однако для малоразмерных частиц такой вид поляризации является определяющим с точки зрения описания всех неклассических эффектов, реализующихся в ГТЭ.

Результаты расчета эффективных свойств для различных объемных содержаний и размеров включений представлены на рис. 82, 83. Здесь видно, что ГТЭ прогнозирует рост всех эффективных характеристик композита в пределах вилки Фойгта-Рейсса для рассматриваемых материалов (рис. 82). Значительное влияние размера включений возникает при соотношении их радиуса и масштабного параметра $R/l < 10$ (рис. 83). Повышение эффективных упругих констант при уменьшении размера наполнителя может достигать 300% (рис. 82а, 83а). Эффективная диэлектрическая константа может повышаться в 7 раз по сравнению с классическим решением (рис. 82б, 83б). Наиболее сильные размерные эффекты реализуются для пьезоэлектрических констант, которые в отсутствие включений равны нулю в ненаполненной изотропной матрице, а при использовании малоразмерных включений ($R/l = 1$) могут достигать значений, порядка 30% от соответствующих характеристик материала наполнителя. Влияние агломерации приводит к снижению эффективных характеристик, причем наиболее чувствительными к агломерации оказываются эффективные пьезоэлектрические свойства композитов с малоразмерными включениями, которые могут снижаться на 20-30% (рис. 83). Влияние агломерации в решении ГТЭ определяется тем фактом, что при сближе-

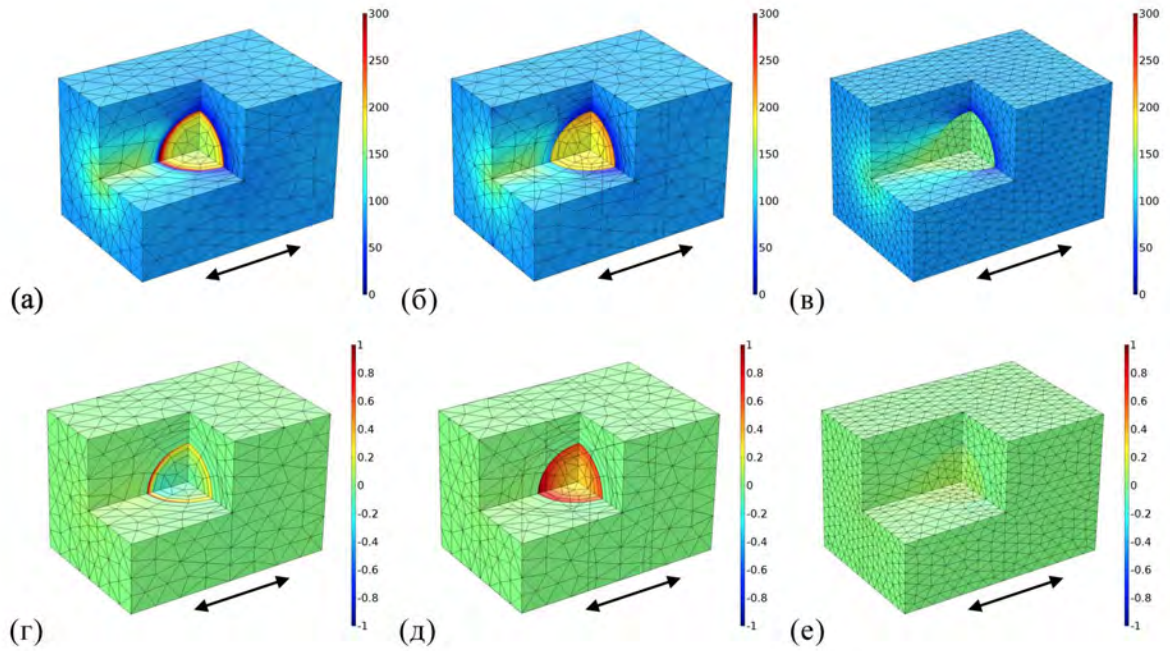


Рис. 80: Распределение напряжений τ_{33} (МПа) и электрической индукции D_3 (10^{-2} Кл/м²) в представительном фрагменте в условиях одноосной деформации, а: τ_{33} , ГТЭ, б: τ_{33} , классическое решение, в: D_3 , ГТЭ, г: D_3 , классическое решение. Деформации увеличены в 50 раз.

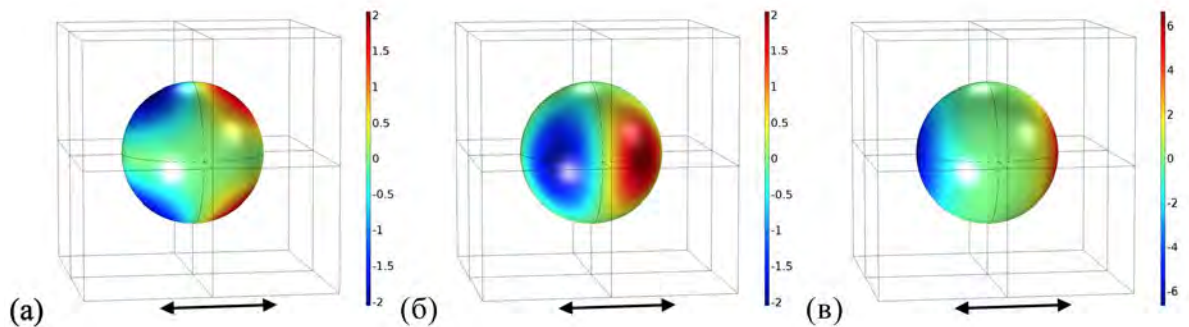


Рис. 81: Распределение компонент тензора квадрупольной поляризации в сферических включениях в условиях одноосной деформации, а: π_{11} , б: π_{22} , в: π_{33} (10^{-6} Кл/м)

нии включений окружающие их "межфазные" зоны начинают накладываться друг на друга, и поэтому суммарный объем упрочненной матрицы во фрагменте уменьшается.

Пример описания экспериментальных данных и идентификации масштабного параметра ГТЭ представлен на рис. 84 для композитов, образованных матрицей на основе портландцемента, с наполнителями в виде микро- и наноразмерных частиц пьезоэлектрической керамики PZT. Такие композиты используются при разработке встроенных систем мониторинга и неразрушающего контроля в строительных конструкциях [379]. Экспериментальные данные по влиянию размера и объемного содержания включений на свойства композита взяты из работ [379, 380]. В качестве характеристик изотропной матрицы использованы значения упругих констант $c_{11} = 33$ ГПа, $c_{12} = 12$ ГПа, $c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2 = 10.5$ ГПа и диэлектрическая константа $\kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{33} = 2.2$. На рис. 84 представлены экспериментальные и теоретические значения эффективного пьезомодуля композита, который вычис-

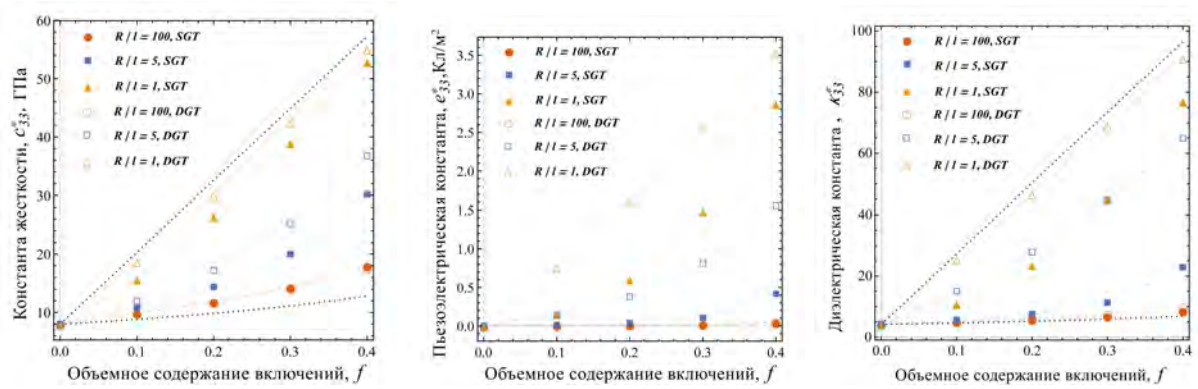


Рис. 82: Зависимость эффективных электромеханических свойств композита на основе эпоксидной матрицы с включениями PZT-7а от объемного содержания включений. Пунктиром показана вилка Фойгта-Рейсса.

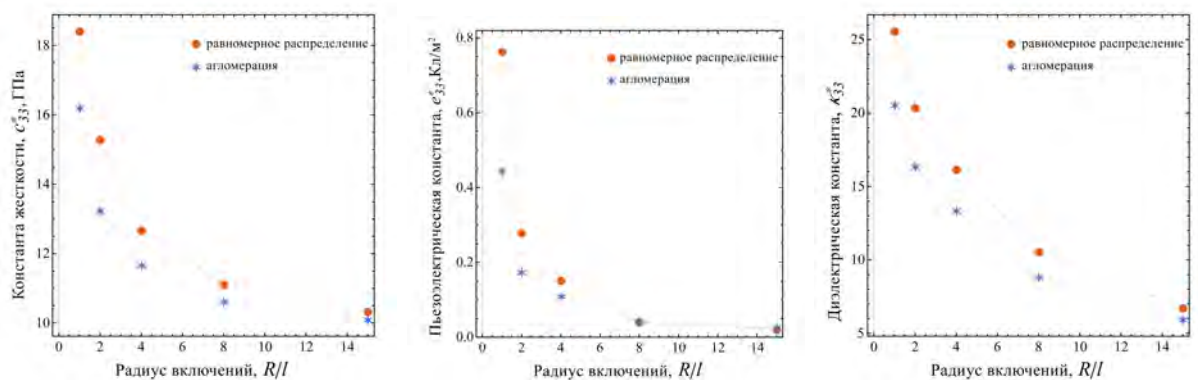


Рис. 83: Влияние относительного размера включений на эффективные электромеханические свойства композита на основе эпоксидной матрицы с включениями PZT-7а в случае хорошей дисперсии и в случае агломерации включений

ляется на основе стандартного соотношения через пьезоэлектрические и упругие константы: $d_{33}^* = ((c_{11}^* + c_{12}^*)e_{33}^* - c_{13}^*e_{13}^*) / ((c_{11}^* + c_{12}^*)c_{33}^* - 2(c_{13}^*)^2)$. Для описания экспериментальных данных использовалась модель представительного фрагмента с 8 включениями и численное моделирование в Comsol, описанное выше. Подобранный значение масштабного параметра ГТЭ, которое позволяет описать реализующиеся зависимости для пьезомодуля, составило $l = 90$ нм. При этом эффективные свойства в случае микроразмерных включений (средний радиус $R = 3.2$ мкм) незначительно зависят от эффектов агломерации в представительном фрагменте, в то время, как в случае наноразмерных включений (средний радиус $R = 0.1$ мкм) экспериментальные данные удается описать только с учетом агломерации, наличие которой отмечалось и в работах [379, 380]. Как показывает расчет, в случае равномерного распределения включений в материале нано-композита, значения эффективного пьезомодуля могут быть дополнительно повышены на 80-100%.

Результаты представленные в данном разделе диссертации, были опубликованы в работе [16].

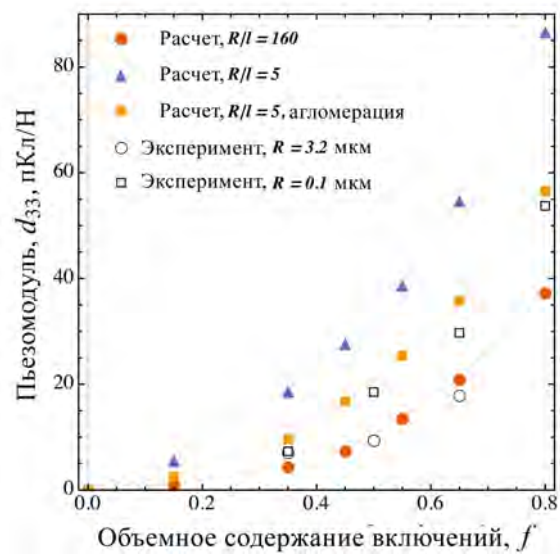


Рис. 84: Пример описания экспериментальных данных на основе решения ГТЭ для эффективного пьезомодуля d_{33} композита с цементной матрицей и наполнителем из керамики PZT. Масштабный параметр ГТЭ $l = 90$ нм. Экспериментальные данные взяты из работ [379, 380].

5.3 Пространственная дисперсия поверхностных и объемных электроупругих волн

В данном разделе диссертации рассматривается проблема описания волновых процессов в градиентной электроупругости. Первоначально подобные задачи рассматривались в ГТЭ Миндлиным, Янгом и др. [159, 381]. В этих работах был сделан вывод, что формулировка модели, учитывающая вклад в плотность электрической энтальпии градиентов деформаций и электрического поля, не является корректной, так как в динамических задачах в этой модели возникает аномальная пространственная дисперсия. Было предложено рассматривать модели учитывающие градиентные эффекты только в отношении электрического поля, либо учитывающие вторые градиенты деформаций [159, 381]. В начале 2000-х годов в градиентной теории упругости было показано, что для корректного описания волновых процессов в динамической формулировке ГТУ необходимо учитывать слагаемые, связанные с градиентами инерционных сил [1]. В данном разделе диссертации этот результат обобщен на ГТЭ на примере антиплоских волн сдвига. Предложена корректная формулировка ГТЭ, учитывающая влияние градиентов инерции. Для этой формулировки приведены примеры решения задач о распространении объемных и поверхностных поперечных электроупругих волн с учетом пространственной дисперсии.

5.3.1 Динамическая формулировка ГТЭ

Рассматриваем пьезоэлектрическую среду, занимающую объем Ω с гладкой поверхностью $\partial\Omega$. Плотность электрической энтальпии имеет такую же форму записи как и в статических задачах (раздел 2.2). В компонентной записи имеем:

$$H(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, E_i, E_{i,j}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} - \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} E_{i,j} E_{k,l}, \quad (5.90)$$

Плотность кинетической энергии с учетом градиентов от инерционных слагаемых записывается в следующем виде [25]:

$$T(\dot{u}_i, \dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} \kappa_{ijkl} \dot{u}_{i,j} \dot{u}_{k,l}, \quad (5.91)$$

где ρ – это плотность среды, κ_{ijkl} – тензор коэффициентов микро-инерции (micro-inertia), определяющих вклад градиентов инерционных сил (эти коэффициенты предполагались равными нулю в работах [159, 381]); точкой обозначена производная по времени.

Динамическая формулировка ГТЭ может быть получена на основе принципа наименьшего действия $\delta S = 0$, в котором функционал действия записывается следующим образом:

$$S = \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{L} \, dv \, dt, \quad \mathcal{L} = T - H \quad (5.92)$$

В предположении отсутствия объемных сил и зарядов, могут быть получены следующие уравнения движения и обобщенный закон Гаусса для ГТЭ:

$$\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,jk} = \rho \ddot{u}_i - \kappa_{ijkl} \ddot{u}_{k,l,j}, \quad D_{i,i} - Q_{ij,ij} = 0, \quad (5.93)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – это полные напряжения, $\mu_{ijk} = \mu_{jik}$ – градиентные напряжения, D_i – вектор электрической индукции, Q_{ij} – тензор электрических квадрупольей, определяющие соотношения для которых имеют вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (5.94)$$

$$\mu_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}, \quad (5.95)$$

$$D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \epsilon_{ij} E_j, \quad (5.96)$$

$$Q_{ij} = \alpha_{ijkl} E_{k,l} \quad (5.97)$$

Форма записи естественных и кинематических (главных) граничных условий на поверхности $\partial\Omega$ следует из вариационного принципа и может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} t_i &= \bar{t}_i \quad \text{or} \quad u_i = \bar{u}_i, \\ m_i &= \bar{m}_i \quad \text{or} \quad \partial_n u_i = \bar{\varepsilon}_i, \\ q &= \bar{q} \quad \text{or} \quad \phi = \bar{\phi}, \\ Q &= \bar{Q} \quad \text{or} \quad E_n = \bar{E}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

где с чертой обозначены заданные на границе тела $\partial\Omega$; $\partial_n u_i = u_{i,j} n_j$ – это нормальные градиенты от перемещений, $E_n = E_i n_i = -\partial_n \phi$ компоненты электрического поля по нормали к поверхности среды; n_i – компоненты единичной внешней нормали на $\partial\Omega$; вектор напряжений t_i , вектор градиентных напряжений m_i , поверхностный заряд q , и поверхностный квадрупольный момент Q определяются следующим образом [156, 382]:

$$\begin{aligned} t_i &= (\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k} + \kappa_{ijkl} \ddot{u}_{k,l}) n_j - \mu_{ijk,l} (\delta_{jl} - n_j n_l) n_k - 2H m_i, \\ q &= (D_j - Q_{jk,k}) n_j - Q_{jk,l} (\delta_{jl} - n_j n_l) n_k - 2H Q, \\ m_i &= \mu_{ijk} n_j n_k, \\ Q &= Q_{ij} n_i n_j, \end{aligned} \quad (5.99)$$

где $H = -\partial_i^{(S)} n_i / 2$ – это средняя кривизна поверхности $\partial\Omega$; $\partial_j^{(S)} = (\delta_{ij} - n_i n_j) \partial_j$ – это поверхностный градиент.

В общем случае в модели будут возникать также дополнительные граничные условия на кромках (раздел 2.2). На границе контакта двух материалов должны выполняться условия непрерывности для величин, входящих в граничные условия (5.98), то есть:

$$[t_i] = [u_i] = [m_i] = [\partial_n u_i] = [q] = [\phi] = [Q] = [E_n] = 0, \quad (5.100)$$

где квадратными скобками обозначена разность соответствующих величин, вычисляемых с обеих сторон от рассматриваемой границы контакта.

5.3.2 Динамическая антиплоская задача

Рассматриваем пьезоэлектрический материал с симметрией $6mm$, трансверсально изотропный, поляризованный вдоль оси x_3 и с плоскостью изотропии x_1x_2 . Используем стандартные гипотезы антиплоской задачи:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t), \quad \phi = \phi(x_1, x_2, t) \quad (5.101)$$

Аналогично статической формулировке (раздел 4.2.1) записываем постановку задачи в матричной форме. Ненулевые компоненты деформаций и электрического поля:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{Bmatrix} = \nabla w, \quad \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = -\nabla \phi, \quad (5.102)$$

где $\nabla w = \{w_{,1}, w_{,2}\}$ – это двумерный оператор градиента.

Подставляя (5.102) в (5.94)–(5.97), найдем выражения для ненулевых компонент напряжений, индукции, градиентных напряжений и квадрупольных моментов:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} = c\nabla w + e\nabla \phi, \quad \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = e\nabla w - \epsilon\nabla \phi, \quad (5.103)$$

$$\begin{Bmatrix} \mu_{311} & \mu_{321} \\ \mu_{312} & \mu_{322} \end{Bmatrix} = \ell_1^2 c \nabla (\nabla w)^T, \quad \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{21} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{Bmatrix} = \ell_2^2 \epsilon \nabla (\nabla \phi)^T, \quad (5.104)$$

где для констант введены обозначения:

$$\begin{aligned} C_{1313} = C_{2323} = c_{44} = c, \quad e_{113} = e_{123} = e_{15} = e, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon, \\ A_{131131} = A_{231231} = A_{132132} = A_{232232} = \ell_1^2 c, \\ \alpha_{1111} = \alpha_{2121} = \alpha_{1212} = \alpha_{2222} = \ell_2^2 \epsilon, \end{aligned} \quad (5.105)$$

и где масштабные параметры в задаче упругости и электроупругости, обозначенные здесь как ℓ_1 и ℓ_2 , соответственно.

Уравнения движения и обобщенный закон Гаусса (5.93) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} c(1 - \ell_1^2 \Delta) \Delta w + e \Delta \phi = \rho(1 - \ell_0^2 \Delta) \ddot{w}, \\ e \Delta w - \epsilon(1 - \ell_2^2 \Delta) \Delta \phi = 0, \end{aligned} \quad (5.106)$$

где $\Delta w = w_{,11} + w_{,22}$ – это двумерный оператор Лапласа; и введен масштабный параметр ℓ_0 , который характеризует эффекты микро-инерции и определяется на основе соотношения: $\kappa_{3131} = \kappa_{3232} = \ell_0^2 \rho$.

Если масштабные параметры модели равны нулю $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = 0$, то рассматриваемая

формулировка сводится к классической динамической электроупругости. Если предположить равенство нулю параметров $l_0 = l_1 = 0$, то получим модель, которая рассматривалась в работах Янга и др. [159, 264], и в которой градиентные эффекты учитываются только для электрических полей. Предполагая равенство нулю пьезоэлектрического коэффициента $e = 0$, получим две несвязанные задачи классической теории упругости и обобщенной модели электростатики, которая является частным случаем модели диэлектриков с оптической активностью [159]. Задача для градиентной теории упругости возникает в рассматриваемой формулировке, если предположить равенство нулю $l_2 = 0$ и $e = 0$. Антиплоские волны в такой формулировке ГТУ рассматривались в работе [382]. Если предполагать, что в среде отсутствуют эффекты микро-инерции, то необходимо задать $l_0 = 0$. В этом случае реализуется модель с аномальной пространственной дисперсией [2, 382]. Для ГТЭ это будет показано ниже на примере решения задач о распространении антиплоских объемных и поверхностных волн.

5.3.3 Объемные волны сдвига

Рассматриваем распространение гармонической объемной поперечной волны в направлении оси x_1 в бесконечной пьезоэлектрической среде. Решение для перемещений и электрического потенциала ищем в следующем виде:

$$w = W_0 e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \phi = \Phi_0 e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (5.107)$$

где W_0 и Φ_0 – это неизвестные константы (амплитуды), k – волновое число, ω – круговая частота и $i = \sqrt{-1}$.

Подставляя (5.107) в уравнения модели (5.106), получим систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{Bmatrix} -c(1 + \ell_1^2 k^2)k^2 + \rho(1 + \ell_0^2 k^2)\omega^2 & -e k^2 \\ -e k^2 & \epsilon(1 + \ell_2^2 k^2)k^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W_0 \\ \Phi_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.108)$$

Нетривиальное решение этой системы будет существовать, если ее определитель равен нулю. Из этого условия получим дисперсионные соотношения для объемной волны сдвига в ГТЭ следующего вида:

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2 + \epsilon c(1 + \ell_1^2 k^2)(1 + \ell_2^2 k^2)}{\epsilon \rho(1 + \ell_0^2 k^2)(1 + \ell_2^2 k^2)}} k \quad (5.109)$$

Заметим, что решение (5.109) сводится к классическим дисперсионным соотношением для волн сдвига в пьезоэлектрике $\omega = \sqrt{\frac{e^2 + \epsilon c}{\epsilon \rho}} k$, если масштабные параметры ГТЭ равны нулю, то есть $l_0 = l_1 = l_2 = 0$.

5.3.4 Волны Блюстейна-Гуляева

Рассматриваем распространение антиплоской волны на поверхности полупространства из пьезоэлектрического материала (рис. 85а). Такой тип поверхностных волн в классической

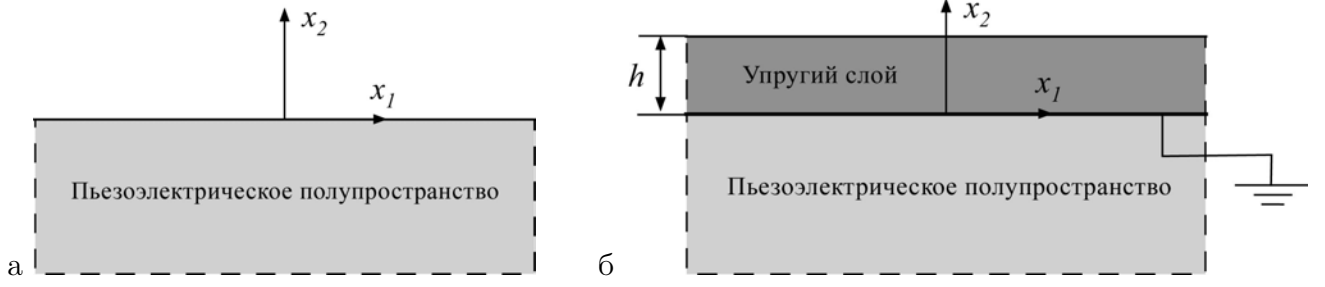


Рис. 85: К задаче о распространении поверхностных волн Блюстейна-Гуляева (а) и Лява (б)

теории пьезоэлектричества был открыт Дж.Л. Блюстейном и Ю.В. Гуляевым [383, 384]. Внешняя нормаль к поверхности полупространства направлена вдоль оси x_2 . Для построения решения предполагаем, что волна затухает в направлении от поверхности полупространства ($x_2 \rightarrow -\infty$):

$$w = W e^{\beta k x_2} e^{i(k x_1 - \omega t)}, \quad \phi = \Phi e^{\beta k x_2} e^{i(k x_1 - \omega t)}, \quad (5.110)$$

где $\beta > 0$ – это коэффициент затухания, W и Φ – это неизвестные константы.

Подставляя (5.110) в уравнения модели в объеме (5.106), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{Bmatrix} z k^2 c (1 - l_1^2 z k^2) + \rho (1 - l_0^2 z k^2) \omega^2 & e z k^2 \\ -e z k^2 & \epsilon (1 - l_2^2 z k^2) z k^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \Phi \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.111)$$

где $z = \beta^2 - 1$.

Приравнявая к нулю определитель матрицы системы (5.111), находим 8 корней для коэффициента затухания β , среди которых только четыре отвечают требованию затухания решения на бесконечности (то есть обладают положительной действительной частью):

$$\beta_n = \sqrt{1 + z_n} \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad (5.112)$$

где $z_1 = 0$, и функции z_2, z_3, z_4 зависят от характеристик материала, частоты ω и волнового числа k и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= -\frac{a_2}{3a_1} + \frac{\sqrt[3]{2}D_1}{3a_1 S} + \frac{S}{3\sqrt[3]{2}a_1}, \\ z_{3,4} &= -\frac{a_2}{3a_1} - \frac{(1 \pm i\sqrt{3})D_1}{3\sqrt[3]{4}a_1 S} - \frac{(1 \mp i\sqrt{3})S}{6\sqrt[3]{2}a_1}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \sqrt[3]{-D_2 + \sqrt{-4D_1^3 + D_2^2}}, \quad D_1 = a_2^2 - 3a_1 a_3, \quad D_2 = 2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3 + 27a_1^2 a_4, \\ a_1 &= ck^6 l_1^2 l_2^2 \epsilon, \quad a_2 = -k^4 \epsilon (c(l_1^2 + l_2^2) - l_0^2 l_2^2 \rho \omega^2) \\ a_3 &= k^2 (e^2 + \epsilon (c - (l_0^2 + l_2^2) \rho \omega^2)), \quad a_4 = \epsilon \rho \omega^2 \end{aligned} \quad (5.114)$$

Можно также выделить еще один кратный корень для коэффициента затухания. Этот корень может быть получен в случае $D_1 \rightarrow 0$, при котором в соотношениях (5.114) будет выполняться $S \rightarrow 0$ и $D_1/S \rightarrow 0$. В этом случае получим $z_2 = z_3 = z_4 = 3a_2/a_1$, а коэффициент затухания будет равен $\beta = \sqrt{1 - \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_0^2 l_2^2 \omega^2 \rho^{-1} c}{3l_1^2 l_2^2 k^2}}$. Требование $D_1 = 0$ может быть выполнено в том случае, если $a_2^2 \equiv 2a_1 a_3$ (см. определение D_1 в (5.114)). Однако, как показывает дальнейший анализ, получаемое решение будет отвечать либо очень специальному виду граничных условий, либо единственному значению волнового числа и может трактоваться как "изолированная" точка дисперсионных соотношений. Такие решения обычно исключаются из рассмотрения [261] и далее они рассматриваться не будут.

Используя соотношения (5.110)–(5.112) для нахождения собственных векторов, отвечающих собственным значениям (5.112), найдем общее решение для рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$w = \sum_{n=2}^4 W_n e^{\beta_n k x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \phi = \sum_{n=1}^4 \frac{e}{\bar{\epsilon}_n} W_n e^{\beta_n k x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (5.115)$$

где $\bar{\epsilon}_n = \epsilon(1 - k^2 l_2^2 z_n)$ и учтено, что первый собственный вектор задачи, отвечающий $\beta_1 = 1$, определяет нулевую амплитуду механических смещений.

Далее необходимо рассмотреть граничные условия на поверхности полупространства. Как и в аналогичной классической задаче электроупругости, будем рассматривать два варианта граничных условий: с заземлением и с контактом с внешней средой.

Заземленная поверхность полупространства

Рассматриваем пьезоэлектрическое полу-пространство, на поверхности которого находится тонкий проводящий слой, через который осуществляется заземление. В этом случае граничные условия ГТЭ (5.98) могут быть записаны в следующем виде:

$$x_2 = 0 : \quad t_3 = 0, \quad m_{322} = 0, \quad \phi = 0, \quad E_2 = 0, \quad (5.116)$$

где вектор механических напряжений в случае плоской границы с нормалью вдоль оси x_2 определяется следующим образом:

$$t_3 = \sigma_{32} - \mu_{321,1} - \mu_{312,1} - 2\mu_{322,2} - l_0^2 \rho \ddot{v}_{,2} \quad (5.117)$$

На свободной поверхности в (5.116) в качестве дополнительных граничных условий ГТЭ задаем нулевое значение для нормальной компоненты электрического поля. Такое условие отвечает рассматриваемому варианту поверхности, на которой нанесен тонкий проводящий слой, внутри которого электрическое поле равно нулю.

Подставляя общее решение (5.115) в (5.116) и учитывая определяющие соотношения (5.103), (5.104), получаем следующую систему уравнений:

$$\mathbf{A} \cdot \{W_1, W_2, W_3, W_4\}^T = 0, \quad (5.118)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \frac{e^2}{\epsilon} & \beta_2 \bar{c}_2 & \beta_3 \bar{c}_3 & \beta_4 \bar{c}_4 \\ 0 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_4^2 \\ \frac{e}{\epsilon} & \frac{e}{\bar{\epsilon}_2} & \frac{e}{\bar{\epsilon}_3} & \frac{e}{\bar{\epsilon}_4} \\ \frac{e}{\epsilon} & \beta_2^2 \frac{e}{\bar{\epsilon}_2} & \beta_3^2 \frac{e}{\bar{\epsilon}_3} & \beta_4^2 \frac{e}{\bar{\epsilon}_4} \end{Bmatrix}, \quad (5.119)$$

$$\bar{c}_n = c + \frac{e^2}{\bar{\epsilon}_n} - 2ck^2 l_1^2 z_n - l_0^2 \rho \omega^2$$

Дисперсионные соотношения $\omega(k)$ находятся из условия равенства нулю определителя матрицы \mathbf{A} :

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (5.120)$$

В результате получаем нелинейное трансцендентное уравнение, определяющее связь частоты и волнового числа. Примеры численного решения этого уравнения будут приведены далее.

Свободная поверхность полупространства

Также рассмотрим случай контакта поверхности полупространства с внешней средой с низким коэффициентом диэлектрической проницаемости, то есть, например, с воздухом или вакуумом. Соответствующая система контактных условий (5.100) записывается следующим образом:

$$x_2 = 0 : \quad t_3 = 0, \quad m_{322} = 0, \quad \phi = \phi_0, \quad q = D_0, \quad Q_{22} = 0, \quad (5.121)$$

где электрический потенциал во внешней среде ϕ_0 является гармонической функцией, затухающей в направлении $x_2 \rightarrow \infty$, то есть:

$$\Delta \phi_0 = 0 \implies \phi_0 = \Phi_0 e^{-kx_2} e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (5.122)$$

Плотность заряда на поверхности полупространства q в условиях (5.121) для пьезоэлектрического полупространства определяется выражением (5.99.4), которое для антиплоской задачи принимает вид $q = D_2 - Q_{21,1} - Q_{12,1} - 2Q_{22,2}$. Электрическая индукция со стороны свободного пространства определяется классическим выражением $D_0 = -\epsilon_0 q \partial \phi_0 / \partial x_2$, где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Подставляя (5.115) в (5.103) и затем в (5.121), получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{B} \cdot \left\{ W_1, W_2, W_3, W_4, \Phi_0 \right\}^T = 0, \quad (5.123)$$

где матрицы системы имеет вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{e^2}{\epsilon} & \beta_2 \bar{c}_2 & \beta_3 \bar{c}_3 & \beta_4 \bar{c}_4 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_4^2 & 0 \\ \frac{e}{\epsilon} & \frac{e}{\bar{\epsilon}_2} & \frac{e}{\bar{\epsilon}_3} & \frac{e}{\bar{\epsilon}_4} & -1 \\ -e & \beta_2 \bar{e}_2 & \beta_3 \bar{e}_3 & \beta_4 \bar{e}_4 & -\epsilon_0 \\ e & \beta_2^2 e \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}_2} & \beta_3^2 e \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}_3} & \beta_4^2 e \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}_4} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.124)$$

$$\bar{e}_n = e - e \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}_n} (1 + 2k^2 l_2^2 z_n), (n = 1...4)$$

Аналогично предыдущей задаче дисперсионные соотношения $\omega(k)$ находятся из условия равенства нулю определителя матрицы системы \mathbb{B} :

$$\det \mathbf{B} = 0 \quad (5.125)$$

Примеры дисперсионных соотношений, определяемых на основе численного решения получаемого нелинейного уравнения (5.125), будут приведены далее.

5.3.5 Волны Лява

Рассматриваем пьезоэлектрическое полупространство, на поверхности которого располагается слой из изотропного линейно упругого проводящего материала толщиной h (Рис. 85б). В рассматриваемой структуре внешний слой может играть роль волновода или защитного покрытия. Внешняя нормаль к поверхности слоя ориентирована в направлении оси x_2 . Слой занимает область $x_2 \in [0, h]$, пьезоэлектрическое полупространство занимает область $x_2 < 0$. Полупространство поляризовано в направлении оси x_3 . Горизонтальные волны сдвига распространяются в направлении оси x_1 . Внешний слой заземлен, поэтому электрическое поле возникает только в полупространстве. В слое распространяются только упругие волны, описание которых в предположении отсутствия пьезоэффекта и электрического поля сводится к решению уравнения движения динамической антиплоской задачи ГТУ, и которое имеет вид [382]:

$$c_l(1 - g_1^2 \Delta) \Delta w_l = \rho_l(1 - g_0^2 \Delta) \ddot{w}_l, \quad (5.126)$$

где нижний индекс l обозначает величины и характеристики, относящиеся к материалу слоя, масштабные параметры которого обозначены как g_0 (микро-инерция) и g_1 (градиентные эффекты в упругих деформациях). При $g_0 = g_1 = 0$ модель сводится к классической.

Решение для антиплоских упругих волн в ГТУ рассматривалось в работе [382]. Это решение имеет вид:

$$w_l = \sum_{n=1}^4 V_n e^{\eta_n k x_2} e^{i(k x_1 - \omega t)}, \quad (5.127)$$

где коэффициенты затухания определяются следующим выражением:

$$\eta_{1...4} = \pm \sqrt{1 + \frac{c_l - g_0^2 \rho_l \omega^2 \pm \sqrt{(c_l - g_0^2 \rho_l \omega^2)^2 - 4c_l g_1^2 \rho_l \omega^2}}{2c_l k^2 g_1^2}} \quad (5.128)$$

Общее решение для потенциала и перемещений в полупространстве в рассматриваемой задаче такое же, как и в предыдущей для волн Блюстейна-Гуляева (Eq. (5.115)). Это решение затухает в направлении $x_2 \rightarrow -\infty$ и содержит четыре собственных вектора с различными коэффициентами затухания β_i , которые определены в выражении (5.112).

Далее рассматриваем контактные и граничные условия задачи. Условия непрерывности (5.100) на контакте полупространства и слоя имеют следующий вид:

$$x_2 = 0 : \quad [t_3] = [w] = [m_{322}] = [\partial w / \partial x_2] = 0, \quad \phi = 0, \quad Q_{22} = 0, \quad (5.129)$$

где учтено, что в слое электрическое поле отсутствует.

На внешней поверхности слоя задаются условия свободной поверхности, то есть равенство нулю вектора напряжений и градиентных напряжений (5.98):

$$x_2 = h : \quad t_3 = 0, \quad m_{322} = 0 \quad (5.130)$$

Заметим, что в условиях (5.129) и (5.130), величины, относящиеся к слою, должны вычисляться с использованием определяющих соотношений, аналогичных (5.103) и (5.104), с использованием соответствующих значений материальных констант слоя c_l , ρ_l , g_0 , g_1 , и g_2 , и в предположении отсутствия пьезоэффекта, то есть $e_l = 0$. Вектор механических напряжений на поверхности слоя t_3 определяется выражением (5.117).

Таким образом, для определения 8 неизвестных коэффициентов, входящих в решение (5.115), (5.127) имеем восемь граничных и контактных условий (5.129) и (5.130). Подставляя (5.115), (5.127) в (5.103), (5.104), а затем в (5.129), (5.130), получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{C} \cdot \{W_1, W_2, W_3, W_4, V_1, V_2, V_3, V_4\}^T = 0, \quad (5.131)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{e^2}{\epsilon} & \beta_2 \bar{c}_2 & \beta_3 \bar{c}_3 & \beta_4 \bar{c}_4 & -\eta_1 \bar{c}_{11} & -\eta_2 \bar{c}_{12} & -\eta_3 \bar{c}_{13} & -\eta_4 \bar{c}_{14} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & c_l^2 \beta_2^2 & c_l^2 \beta_3^2 & c_l^2 \beta_4^2 & -c_l g_1^2 \eta_1^2 & -c_l g_1^2 \eta_2^2 & -c_l g_1^2 \eta_3^2 & -c_l g_1^2 \eta_4^2 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 & -\eta_4 \\ \frac{e}{\epsilon} & \frac{e}{\epsilon_2} & \frac{e}{\epsilon_3} & \frac{e}{\epsilon_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & \beta_2^2 e \frac{e}{\epsilon_2} & \beta_3^2 e \frac{e}{\epsilon_3} & \beta_4^2 e \frac{e}{\epsilon_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_1 \eta_1 \bar{c}_{11} & \chi_2 \eta_2 \bar{c}_{12} & \chi_3 \eta_3 \bar{c}_{13} & \chi_4 \eta_4 \bar{c}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_1 \eta_1^2 & \chi_2 \eta_2^2 & \chi_3 \eta_3^2 & \chi_4 \eta_4^2 \end{pmatrix}, \quad (5.132)$$

$$\bar{c}_{ln} = c_l - g_0^2 \rho_l \omega^2 - 2g_1^2 k^2 (\eta_n^2 - 1), \quad \chi_n = e^{hk\eta_n}, \quad (n = 1...4).$$

Дисперсионные соотношения модели определяются из условия равенства нулю определителя матрицы системы \mathbf{C} :

$$\det \mathbf{C} = 0 \quad (5.133)$$

5.3.6 Примеры численных расчетов

Примеры результатов расчетов будут представлены для пьезокерамики PZT-4. Характеристики керамики: плотность $\rho = 7500$ кг/м³, модуль сдвига $c_{44} = 26$ ГПа, пьезоэлектрическая константа $e_{15} = 10.5$ К/м², диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{11} = 860\epsilon_0$. Примеры расчетов для волн Лява будут реализованы в предположении, что упругий слой на поверхности полупространства выполнен из полимерного материала с плотностью $\rho_l = 1500$ кг/м³ и модулем сдвига $c_l = 2.5$ ГПа. Эти значения характеристик обеспечивают то, что в упругом слое фазовая скорость волн сдвига оказывается меньше, чем в полупространстве (в противном случае, в решении будут возникать чисто мнимые значения коэффициентов затухания). Порядок значений масштабных параметров материалов выбирается равным порядку параметров решетки кристаллических материалов. В частности, масштабный параметр для электростатической части задачи задается равным $l_2 = 0.2$ нм. Остальные параметры варьируются и задаются в безразмерном виде $\bar{l}_1 = l_1/l_2$, $\bar{l}_0 = l_0/l_2$ и т.д. Заметим, что задание больших (меньших) абсолютных значений масштабных параметров сдвигает все неклассические эффекты в диапазон более низких (высоких) частот.

Дисперсионные соотношения для объемных волн сдвига (5.109) представлены на рис. 86. Здесь показана найденная зависимость частоты от волнового числа (рис. 86а) и зависимость безразмерной фазовой скорости от нормированного значения волнового числа (рис. 86б). Волновое число нормируется относительно масштабного параметра $l_2 = 0.2$ нм. Фазовая скорость волн сдвига в ГТЭ определяется решением вида:

$$c_{sg} = \omega/k = \sqrt{\frac{e_{15}^2 + \epsilon_{11}c_{44}(1 + \ell_1^2k^2)(1 + \ell_2^2k^2)}{\epsilon_{11}\rho(1 + \ell_0^2k^2)(1 + \ell_2^2k^2)}} \quad (5.134)$$

и нормируется относительно классической величины фазовой скорости волн сдвига в пьезоэлектрике:

$$c_s = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}(1 + K_s^2)}, \quad K_s^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\epsilon_{11}} \quad (5.135)$$

На рис. 86 показано, что рассматриваемый вариант динамической ГТЭ позволяет описать нормальную пространственную дисперсию, при которой происходит снижение фазовой скорости при увеличении частоты волн. Этот эффект возникает при ненулевых значениях масштабного параметра l_0 , связанного с градиентными инерционными эффектами (микрoинерцией). В случае $l_0 = 0$ модель прогнозирует аномальную дисперсию (штриховая линия на рис. 86), которая обсуждалась в работах Миндлина и Янга [159]. Возникновение нормальной дисперсии позволяет говорить о, по крайней мере, качественной согласованности решений ГТЭ с моделями динамики кристаллической решетки [381] и возможности применения ГТЭ для уточненного описания высокочастотных процессов в пьезоэлектрических средах.

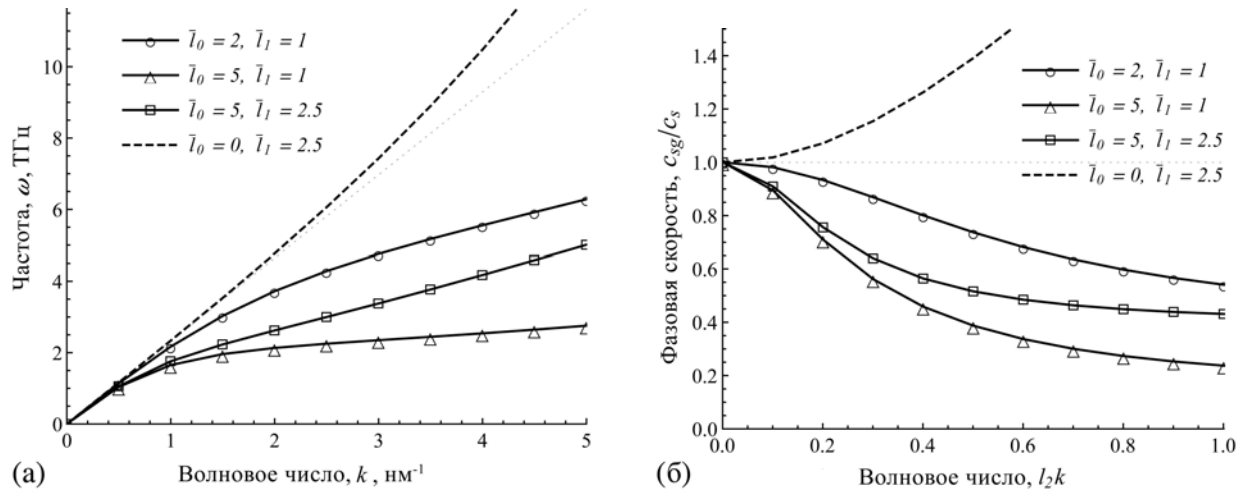


Рис. 86: Дисперсионные кривые для объемных волн сдвига **а**: зависимость частоты от волнового числа **б**: зависимость безразмерной фазовой скорости от нормированного волнового числа. Классическое решение с постоянной фазовой скоростью показано пунктирной линией.

Дисперсионные соотношения для волн Блюстейна-Гуляева в ГТЭ представлены на рис. 87. Зависимость фазовой скорости от волнового числа для двух рассмотренных вариантов граничных условий на поверхности полупространства показана на рис. 87а. Эти зависимости найдены на основе численного решения уравнений (5.120) и (5.125) в системе Wolfram Mathematica. Решение строилось методом Ньютона с начальным приближением – классическим решением Блюстейна-Гуляева, относительно которого на представленных рисунках также выполнялось нормирование фазовых скоростей [383]:

$$c_{BG} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{44}}{\rho} (1 - K_{BG}^4)}, \quad K_{BG}^2 = \frac{e_{15}^2}{\bar{c}_{44}\epsilon_{11}}, \quad \bar{c}_{44} = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11} \quad (5.136)$$

На рис. 87а можно видеть, что в решении ГТЭ возникают эффекты пространственной дисперсии для поверхностных волн в обоих рассмотренных случаях граничных условий. Нормальная дисперсия возникает при соотношении масштабных параметров $l_0 > l_1$ и $l_0 > l_2$, что накладывает соответствующие ограничения на эти параметры. В противном случае ($l_0 < l_1$, $l_0 < l_2$, или $l_0 = 0$) возникает аномальная пространственная дисперсия. Фазовая скорость волн в задаче со свободной поверхностью c_u оказывается всегда выше, чем фазовая скорость в задаче с заземленной поверхностью c_e . Относительное изменение фазовых скоростей в этих задачах определяет значение коэффициента электромеханической связи, который вычисляется по формуле:

$$K^2 = 2 \frac{c_u - c_e}{c_u}, \quad (5.137)$$

Зависимость коэффициента электромеханической связи от волнового числа, найденная на основе решения ГТЭ, представлена на рис. 87б. Можно видеть, что расчет с параметрами модели, которые обеспечивают нормальную дисперсию (сплошные линии на рис. 87б) приводят к характерной зависимости K , содержащей максимум. Для малых значений масштабного параметра \bar{l}_0 этот пик не является явно выраженным, однако он всегда присутствует на графиках. В случае $l_0 = 0$ (отсутствие эффектов микро-инерции) модель прогнозирует

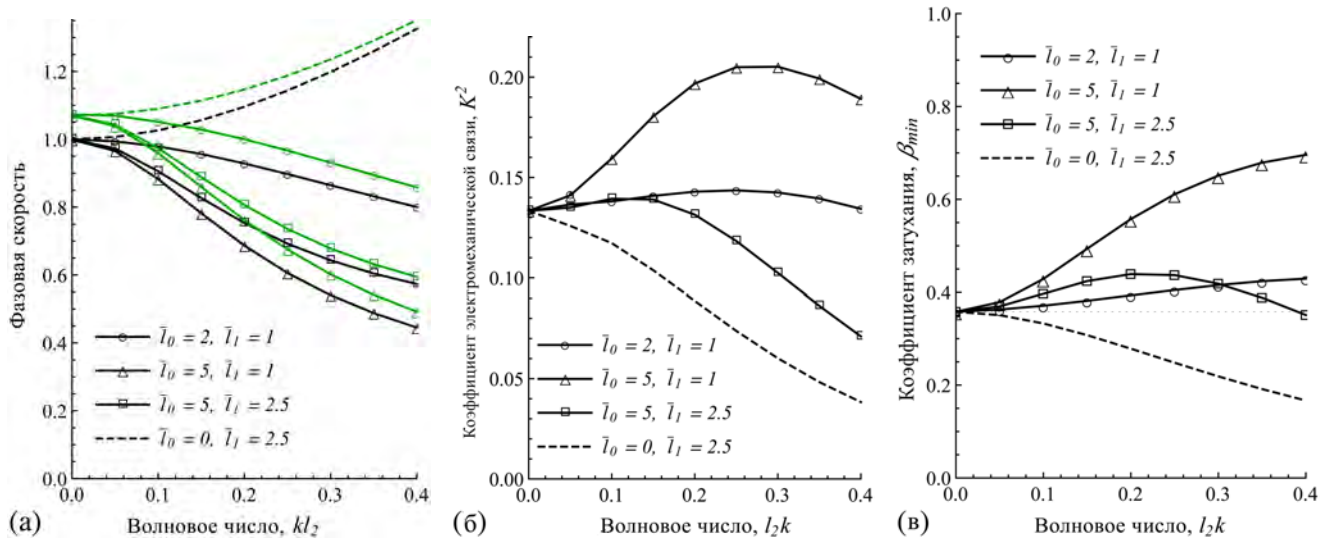


Рис. 87: Дисперсионные кривые для поверхностных волн сдвига (волн Блюстейна-Гуляева), распространяющихся по поверхности пьезоэлектрического полупространства, а: зависимость безразмерной фазовой скорости от волнового числа для случая заземленной поверхности (c_e/c_{BG} , черный цвет) и для случая контакта со свободным пространством (c_u/c_{BG} , зеленый цвет), б: зависимость коэффициента электромеханической связи от волнового числа, в: зависимость коэффициента затухания от волнового числа.

снижение коэффициента электромеханической связи в решении ГТЭ по сравнению с классическим решением для всего диапазона длин волн (штриховая линия на рис. 87б).

Зависимость коэффициента затухания поверхностных волн от волнового числа представлена на рис. 87в. Здесь приведено решение для заземленной поверхности. Это решение содержит четыре моды (собственных вектора), которые связаны с четырьмя коэффициентами затухания β_n (5.112), среди которых есть корень $\beta_1 = 1$, еще один действительный корень β_2 и два комплексно сопряженных корня β_3 и β_4 . На рис. 87в представлены значения минимального коэффициента затухания, определяемого по формуле:

$$\beta_{min} = \min_{n=1...4} (\text{Re}(\beta_n)) \quad (5.138)$$

На рис. 87в можно видеть, что в модели с учетом всех градиентных эффектов (деформаций, электрического поля и инерции) коэффициент затухания оказывается больше классического, по крайней мере, в некотором ограниченном диапазоне малых значений волнового числа. Напротив, в решении без градиентных инерционных эффектов, модель ГТЭ прогнозирует большую глубину проникновения поверхностных волн и меньшие значения коэффициента затухания во всем диапазоне частот (штриховая линия на рис. 87в).

Заметим, что в решении задачи о распространении волн Блюстейна-Гуляева в ГТЭ для каждого заданного значения волнового числа всегда возникает два решения для круговой частоты. Это можно видеть на рис. 88, где представлена характерная зависимость определителей $|\det \mathbf{A}|$, $|\det \mathbf{B}|$, корни которых используются для построения дисперсионных соотношений (5.125), (5.120). На этом рисунке каждый график имеет ноль в области низких частот, а также второй корень (почти неизменный для всех параметров) в области высоких частот.

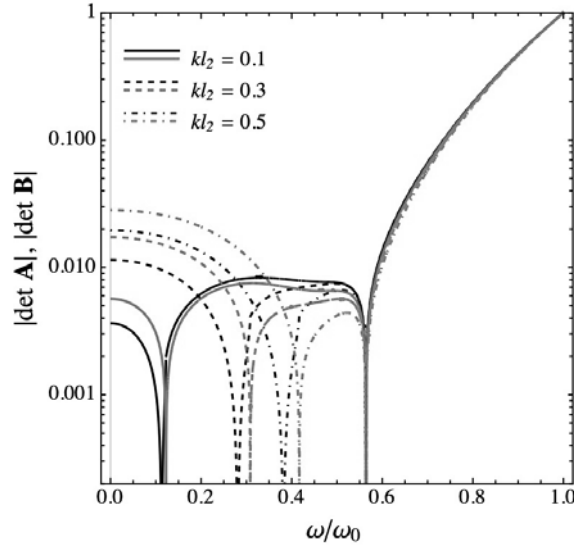


Рис. 88: Зависимость нормированных значений определителей (5.120) ($|\det \mathbf{A}|$, черный цвет) и (5.125) ($|\det \mathbf{B}|$, серый цвет) от нормированной круговой частоты

Таким образом, формально, дисперсионные соотношения в ГТЭ могут содержать вторую ("оптическую") ветвь, проходящую выше представленных кривых на рис. 87а. Однако, как было нами показано [185], этому второму решению в ГТЭ всегда отвечают незатухающие моды колебаний, у которых коэффициенты затухания принимают чисто мнимые значения (с точностью до численной погрешности). Поэтому такие решения здесь не рассматриваются. Заметим, что в работе [185] было показано, что такого рода решения возникают и в более общей формулировке ГТЭ, в которой учитываются связанные пьезоэлектрические эффекты повышенного порядка относительно градиентов деформаций и электрического поля.

Дисперсионные соотношения для задачи о распространении волн Лява представлены на рис. 89. Результаты представлены для различных соотношений между значениями масштабных параметров полупространства и упругого слоя. Значения волнового числа нормированы на рис. 89 по отношению к толщине слоя, которая принята равной $h = 10l_2 = 2$ нм. Вычисленные фазовые скорости нормированы по отношению к классическому решению для фазовых скоростей Блюстейна-Гуляева c_{BG} (5.136). Решение представлено для фундаментальной моды деформаций, то есть для минимального значения круговой частоты, которое является корнем уравнения (5.133). Горизонтальным пунктиром на рис. 89 показаны классические решения для фазовой скорости объемных волн в полупространстве $c_{substrate} = c_s$ (5.135) и в слое $c_{layer} = \sqrt{c_l/\rho_l}$. Причем для выбранных параметров выполняется $c_{substrate} > c_{layer}$, что необходимо для реализации затухающих в объеме решений.

Особенностью представленных дисперсионных соотношений для волн Лява является то, что фазовая скорость c_L немонотонно зависит от волнового числа k (рис. 89). В области относительно низких частот реализуется максимум фазовой скорости, которая затем снижается с повышением волнового числа. В высокочастотном диапазоне c_L становится меньше, чем скорость объемных волн сдвига в материале упругого слоя c_{layer} , причем эти эффекты проявляются сильнее при реализации более интенсивных градиентных эффектов в материале

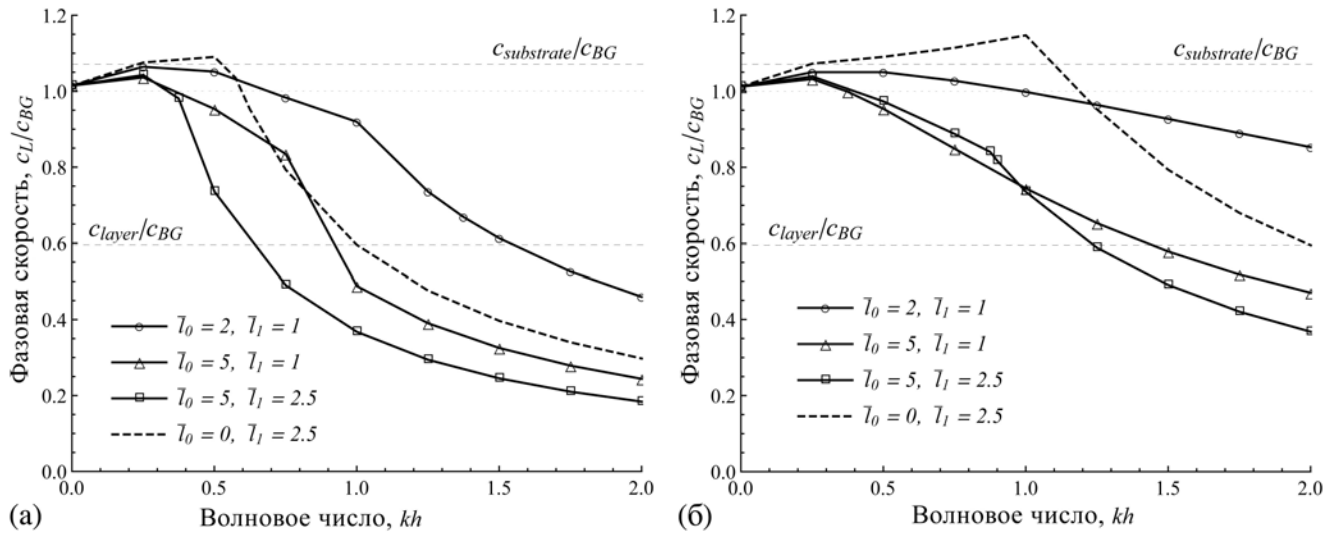


Рис. 89: Дисперсионные кривые для волн Лява при различных значениях масштабных параметров подложки и слоя, **а**: $l_0 = g_0$, $l_1 = g_1$ и **б**: $l_0 = 2g_0$, $l_1 = 2g_1$. Пунктиром показаны нормированные значения классической скорости объемных волн сдвига в материалах подложки и слоя.

слоя (при больших значениях масштабных параметров g_0 и g_1 , см. рис. 89а). При отсутствии инерционных градиентных эффектов в модели ($l_0 = 0$), фазовая скорость волн Лява начинает превышать скорость объемных волн сдвига в подложке $c_{substrate}$ (штриховая линия на рис. 89).

Указанные эффекты, которые возникают в решении ГТЭ, запрещены в классической электроупругости [158]. Фазовая скорость волн Лява в классическом решении изменяется в пределах, определяемых объемными фазовыми скоростями в подложке и в слое. Поэтому для ГТЭ можно предложить уточненные оценки для границ изменения фазовой скорости волн Лява при повышении волнового числа. В частности, в качестве этих границ предлагается использовать решения для скоростей объемных волн сдвига, получаемые в рамках градиентных теорий. Для фазовой скорости объемных волн сдвига c_{sg} в пьезоэлектрическом полупространстве имеем решение (5.134). Для упругого изотропного слоя это решение в отсутствии электромеханических связанных эффектов сводится к следующему:

$$c_g = \sqrt{\frac{c_{44}(1 + g_1^2 k^2)}{\rho(1 + g_0^2 k^2)}} \quad (5.139)$$

На рис. 90 сопоставлены найденные дисперсионные кривые для волн Лява в структуре слой/подложка и для объемных волн сдвига в материалах подложки (5.134) и слоя (5.139). Можно видеть, что в ГТЭ, также как и в классической электроупругости, решение для объемных волн в подложке c_{sg} (5.134) оказывается верхней границей для фазовой скорости волн Лява (аналогичный результат можно получить и для других значений параметров, задаваемых в физически-допустимых диапазонах). Однако эти решения для фазовых скоростей в ГТЭ определяются с учетом неклассических масштабных эффектов, и, в частности, существенным является присутствие нормальной пространственной дисперсии в решении для

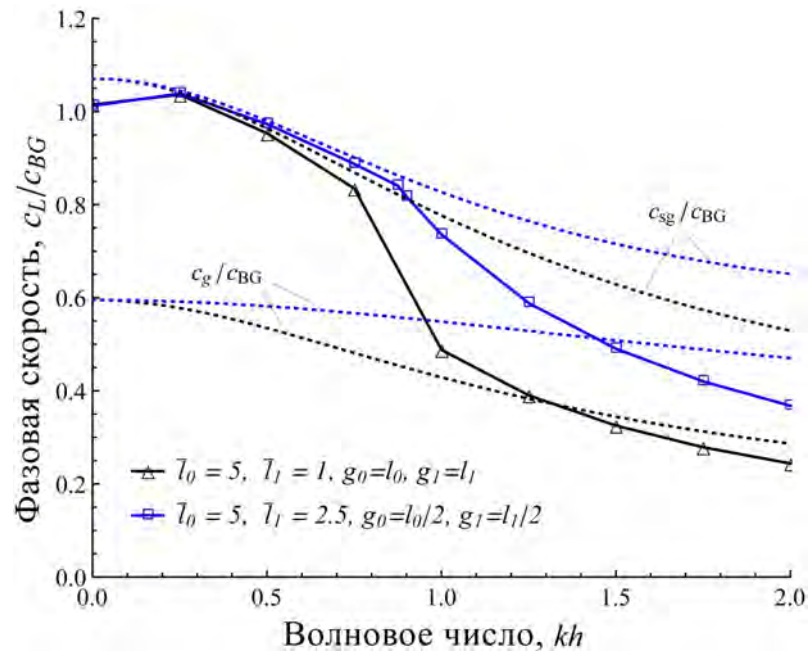


Рис. 90: Дисперсионные кривые для волн Лява в структуре пьезоэлектрическая подложка / упругий слой (сплошные линии) и для объемных волн сдвига в пьезоэлектрической подложке c_{sg} (5.134) и в изотропном слое c_g (5.139) (пунктирные линии)

объемных волн (5.134). Нижняя оценка в виде решения для фазовой скорости объемных волн в упругом слое оказывается несправедливой, и в высокочастотном диапазоне скорость волн Лява оказывается ниже, чем скорость объемных волн в упругом слое даже с учетом пространственной дисперсии. По всей видимости, это объясняется тем, что в рассматриваемой структуре внешний слой считается проводящим и заземленным. Кроме этого, для получения корректных решений в высокочастотных диапазонах в континуальных моделях может потребоваться рассмотрение более сложных эффектов, связанных с учетом дополнительных внутренних степеней свободы или градиентных эффектов более высокого порядка [385]. Представленные здесь решения ограничиваются рассмотренным вариантом упругого заземленного слоя, так как это упрощает численные вычисления. Дело в том, что решение существенно нелинейного уравнения (5.131) требует аналитической записи определителя матрицы порядка $\mathbf{C}_{8 \times 8}$, содержащей трансцендентные функции относительно переменных модели (частоты и волнового числа). Решение этого уравнения стандартными алгоритмами в системах символьных вычислений на данный момент не является возможным. Для построения решения использовалась техника перенормировки матрицы системы \mathbf{C} и метод последовательных приближений для поиска корней ее определителя. Рассмотрение более общей формулировки задачи, например, для структуры с пьезоэлектрическим внешним слоем, потребует записи определителей для матриц большей размерности, и поэтому на данном этапе не рассматривается, а является задачей для будущей работы.

Таким образом, в данном разделе диссертации предложен вариант динамической формулировки градиентной электроупругости, в которой плотность лагранжиана зависит не только от классических переменных модели (деформаций, электрического поля и скоростей), но и от их градиентов. На основе представленных аналитических и численно-аналитических

решений для антиплоских волн показана возможность описания эффектов нормальной пространственной дисперсии волн сдвига в рамках рассматриваемой формулировки ГТЭ, что ранее некоторыми авторами считалось невозможным при учете градиентных эффектов для поля деформаций [159]. Помимо этого показано, что:

1. Эффекты нормально пространственной дисперсии возникают в задачах о распространении как объемных, так и поверхностных волн в ГТЭ, при этом для высокочастотных поверхностных волн прогнозируется повышение коэффициента электромеханической связи и коэффициента затухания.
2. При пренебрежении градиентными инерционными эффектами, в решениях возникает аномальная пространственная дисперсия волн, происходит снижение коэффициента затухания коротких поверхностных волн и фазовая скорость волн Лява в структуре покрытие/подложка может превышать объемную скорость волн в подложке, что представляется нефизичным.
3. Верхняя оценка для фазовой скорости волн Лява в ГТЭ определяется фазовой скоростью объемных волн в подложке, вычисляемой с учетом эффектов пространственной дисперсии.
4. Прогнозируемые неклассические эффекты реализуются в высокочастотных диапазонах. Для заданных значений масштабных параметров ГТЭ, по порядку равных межатомному расстоянию, это терагерцовый частотный диапазон. Получаемые решения, таким образом, соответствуют процессам в идеальных кристаллических решетках, для которых характерные значения масштабных параметров, обычно имеют порядок межатомных расстояний [114]. В поликристаллических материалах и в неоднородных средах значения масштабных параметров могут быть сопоставимы с характерным размером структуры материала и поэтому для таких сред возникающие неклассические эффекты будут прогнозироваться для более низких частот. Представленные решения могут быть использованы для идентификации масштабных параметров ГТЭ по аналогии с подходом, который был ранее реализован для градиентной теории упругости путем наложения дисперсионных соотношений континуальной теории и атомистического моделирования [114].

Результаты, представленные в данном разделе диссертации, были опубликованы в работах [178, 185].

Заключение

В диссертации представлен анализ неклассических масштабных эффектов, которые реализуются в градиентных моделях упругих и пьезоэлектрических материалов. Предложены новые решения и новые методы построения аналитических и численных решений в ГТУ и в ГТЭ. В частности, предложен полу-обратный метод построения решений задач изгиба в ГТУ и в ГТЭ и построены соответствующие решения для задач чистого изгиба, которые использованы для проверки корректности формулировки балочных теорий в градиентных теориях. Предложен вариационный подход к построению балочных моделей в ГТУ и в ГТЭ, который обеспечивает учет специфической структуры граничных условий на поверхностях балки. Показана возможность уточненного описания эффектов концентрации напряжений в моделях ГТУ и ГТЭ в зонах приложения сосредоточенных нагрузок и в зонах закрепления балки. Дальнейшее развитие данного направления должно быть связано с обобщением представленных подходов к построению полу-обратных решений на более широкий класс неклассических теорий, а также с применением сформулированных моделей для уточненного описания НДС малоразмерных и неоднородных балок. В частности, применение градиентных теорий может позволить получить уточненные оценки характера распределения и концентрации касательных напряжений в композитных балках, которые принципиально невозможно получить в классических балочных моделях (см., например, [386, 387]).

В диссертации доказана эквивалентность прямых и энергетических подходов к определению эффективных характеристик неоднородных сред в градиентных теориях. При этом показано, что возникающие размерные эффекты в задачах прогноза эффективных характеристик в ГТУ и в ГТЭ существенным образом зависят от применяемых методов осреднения и типа представительных фрагментов. Показано, что использование в расчетах осредненных по объему включений тензора концентрации или тензора Эшелби допустимо только для малых объемных содержаний включений, а более точные оценки позволяет получать обобщенный самосогласованный метод, который не требует проведения такого осреднения. Построены новые аналитические решения для задач о сферическом и цилиндрическом включении в общей теории Миндлина-Тупина, которые позволяют учитывать влияние размера включений. Предложен вариант обобщенных масштабо-зависимых решений для прогноза вязкости суспензий, как несжимаемых сред с жесткими включениями. На основе численных решений показана возможность описания влияния не только размера включений, но и эффектов агломерации включений на эффективные свойства композитов в ГТУ и ГТЭ. Дальнейшее развитие данного направления исследований должно быть связано с рассмотрением наиболее общего случая эллипсоидального включения в рамках аналитического обобщенного само-согласованного метода осреднения в ГТУ. Как представляется, получаемые решения могут применяться не только для описания свойств композитов, но и для поликристаллических зернистых материалов для уточненной оценки влияния размера зерна на их упругие, пластические и прочностные свойства.

В работе предложен новый вариант представления решения уравнений равновесия ГТУ

Миндлина-Тупина, основанный на использовании представления Папковича-Нейбера для классической части поля перемещений и на разложении Гельмгольца для градиентной части. На основе этого представления предложен вариант реализации метода Треффца в плоских задачах ГТУ, построены решения для задач о включениях, а также получено асимптотическое решение для обобщенной задачи Фламана в ГТУ. Последнее использовано для определения класса упрощенных градиентных теорий, которые допускают получение регулярных решений для задач с сосредоточенными нагрузками. Дальнейшее развитие этого направления должно быть связано с разработкой упрощенных градиентных теорий, обеспечивающих регуляризацию классических сингулярных задач и допускающих упрощенную запись граничных условий. Такие градиентные теории могут быть использованы для реализации эффективных гибридных численных методов, свободных от проблемы сеточной расходимости решений в задачах с концентраторами и основанных на сращивании решения ГТУ, вычисляемого вблизи концентратора, с классическим решением, вычисляемым в остальной модели.

Предложен вариант реализации метода смешанных конечных элементов для градиентных теорий, который протестирован в сопоставлении с точными аналитическими решениями. На основе реализованного численного моделирования показано, что применение ГТУ может быть эффективным для прогноза разрушающих нагрузок в хрупких и квази-хрупких материалах, содержащих трещины и концентраторы. Предложенный подход является обобщением метода Васильева-Лурье для оценки прочности тел с трещинами в рамках регуляризованных решений ГТУ. Обобщение связано с использованием формулировки ГТУ Миндлина-Тупина, учетом в численном моделировании специфических граничных условий этой теории и рассмотрением задач с комбинированным нагружением по I/II моде. Показано, что моделирование образцов и элементов конструкций с трещинами и концентраторами в рамках ГТУ, потенциально, может проводиться без привлечения аппарата механики разрушения. Реализующиеся в ГТУ регулярные решения для напряжений и деформаций могут напрямую использоваться для проведения прочностного анализа на основе критериев прочности. Показано, что численные решения ГТУ позволяют описать размерные эффекты для трещин различной длины, включающие классический размерный эффект для длинных трещин, и выход номинальной прочности образца с малоразмерным дефектом на предел прочности материала без дефекта. Реализованный подход, таким образом, является альтернативой к ЛУМР, наряду с различными когезионными моделями, теорией критических расстояний и т.п. Предложен вариант комбинированного критерия прочности для ГТУ, включающего критерий по максимальным напряжениям и критерий относительно второго инварианта тензора напряжений, позволяющий прогнозировать разрушающие нагрузки в образцах, нагружаемых по смешанной I/II моде. Показано, что переход между механизмами разрушения, связанными с различными критериями прочности может определяться именно значением коэффициента триаксиальности. Дальнейшее направления работ в этой области может быть связано с развитием методов прогноза направления и скорости роста трещины в рамках рассматриваемого подхода, его обобщение на случай нелинейных эффектов, моделирование процессов роста усталостных трещин.

Представлено решение важного класса задач, связанного с идентификацией масштабных параметров градиентных теорий. Варианты такой идентификации проведены на основе известных экспериментальных данных по влиянию размера включений на эффективные свойства композиционных материалов, а также на основе обработки экспериментальных данных о зависимости разрушающих нагрузок от геометрии различных типов концентраторов. Показано, что идентифицированные значения масштабных параметров ГТУ по своему порядку согласуются со значениями критической длины трещины (или зоны предразрушения), вычисляемой на основе стандартных соотношения механики разрушения. Дальнейшим направлением работ в данной области должно быть исследование стабильности идентифицируемых значений масштабных параметров градиентных теорий на основе различных типов испытаний, например, на основе исследования размерных эффектов, реализующихся в эффективных свойствах материала при наличии включений или при наличии концентраторов-дефектов различной формы. Кроме этого на основе современных методов испытаний представляется возможной дополнительная проверка значений масштабных параметров путем непосредственного сопоставления экспериментального и прогнозируемого в ГТУ распределения поля деформаций или электрического потенциала вблизи различных типов концентраторов. Построенные новые решения для задач о распространении поперечных волн в ГТЭ могут быть также использованы для идентификации масштабных параметров этой теории путем наложения дисперсионных соотношений континуальной теории и соответствующих результатов, следующих из моделирования методами динамики кристаллической решетки (по аналогии с подходом, предложенным ранее для упругих сред [388]).

Список литературы

- [1] H. Askes, E.C. Aifantis. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, 48(13):1962–1990, 2011.
- [2] H. Askes, E.C. Aifantis. Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes. *Physical Review B*, 80(19):195412, 2009.
- [3] S.A. Lurie, P.A. Belov. Cohesion field: Barenblatt’s hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations. *International journal of fracture*, 150(1-2):181–194, 2008.
- [4] P.A. Gourgiotis, H.G. Georgiadis. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(11):1898–1920, 2009.
- [5] G. Sciarra, S. Vidoli. Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials. *Journal of Elasticity*, 113(1):27–53, 2013.
- [6] В.В. Васильев, С.А. Лурье. Новое решение плоской задачи о равновесной трещине. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (5):61–67, 2016.
- [7] P.A. Gourgiotis, M.D. Sifnaiou, H.G. Georgiadis. The problem of sharp notch in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *International journal of fracture*, 166(1-2):179–201, 2010.
- [8] M.Y. Gutkin, E.C. Aifantis. Dislocations in the theory of gradient elasticity. *Scripta Materialia*, 40(5):559–566, 1999.
- [9] M. Lazar, G.A. Maugin. Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity. *International journal of engineering science*, 43(13-14):1157–1184, 2005.
- [10] M. Lazar. The fundamentals of non-singular dislocations in the theory of gradient elasticity: Dislocation loops and straight dislocations. *International Journal of Solids and Structures*, 50(2):352–362, 2013.
- [11] M. Lazar, G.A. Maugin. A note on line forces in gradient elasticity. *Mechanics Research Communications*, 33(5):674–680, 2006.
- [12] В.В. Васильев, С.А. Лурье. Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (3):115–118, 2016.
- [13] S. Lurie, P. Belov, D. Volkov-Bogorodsky, N. Tuchkova. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials. *Journal of materials science*, 41(20):6693–6707, 2006.
- [14] S. Lurie, D. Volkov-Bogorodsky, A. Leontiev, E. Aifantis. Eshelby’s inclusion problem in the gradient theory of elasticity: applications to composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 49(12):1517–1525, 2011.

- [15] H.M. Ma, X.L. Gao. A new homogenization method based on a simplified strain gradient elasticity theory. *Acta Mechanica*, 225(4-5):1075–1091, 2014.
- [16] Y. Solyaev, S. Lurie. Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions. *Composite Structures*, 202:1099–1108, 2018.
- [17] U. Andreaus, F. Dell’Isola, I. Giorgio, L. Placidi, T. Lekszycki, N.L. Rizzi. Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non) linear second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 108:34–50, 2016.
- [18] J.C. Reiher, I. Giorgio, A. Bertram. Finite-element analysis of polyhedra under point and line forces in second-strain gradient elasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(2):04016112, 2017.
- [19] A. Berezovski, J. Engelbrecht, M. Berezovski. Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modeling. *Acta mechanica*, 220(1-4):349–363, 2011.
- [20] J. Engelbrecht, A. Berezovski, F. Pastrone, M. Braun. Waves in microstructured materials and dispersion. *Philosophical Magazine*, 85(33-35):4127–4141, 2005.
- [21] F. Dell’Isola, P. Seppacher, J.J. Alibert, T. Lekszycki, R. Grygoruk, M. Pawlikowski, D. Steigmann, I. Giorgio, U. Andreaus, E. Turco, et al. Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(4):851–884, 2019.
- [22] Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, Ю.О. Соляев. Об уточнении напряжённого состояния в прикладных задачах упругости за счёт градиентных эффектов. *Доклады Академии наук. Физика, технические науки*, 489(6):585–591, 2019.
- [23] F. Froio, A. Zervos. Second-grade elasticity revisited. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24(3):748–777, 2019.
- [24] R.A. Toupin. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11:385–414, 1962.
- [25] R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1):51–78, 1964.
- [26] A.L. Cauchy. Note sur l’équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. *CR Acad. Sci. Paris*, 32:323–326, 1851.
- [27] F. Dell’Isola, A.D. Corte, I. Giorgio. Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(4):852–872, 2017.
- [28] F. Dell’Isola, U. Andreaus, L. Placidi. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: an underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20(8):887–928, 2015.
- [29] Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. *Физика твердого тела*, 2(7):1399–1409, 1960.

- [30] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11:415–447, 1962.
- [31] Л.И. Седов. *Механика сплошной среды: в 2 томах*. М.:Наука, 1973.
- [32] P. Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25(3):556–575, 1973.
- [33] N.N. Eshel, G. Rosenfeld. Effects of strain-gradient on the stress-concentration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension. *Journal of Engineering Mathematics*, 4(2):97–111, 1970.
- [34] И.А. Кунин. *Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости*. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.
- [35] G.A. Maugin. Nonlocal theories or gradient-type theories: a matter of convenience. *Arch. Mech.*, 31(1):15–26, 1979.
- [36] C.Q. Ru, E.C. Aifantis. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica*, 101(1-4):59–68, 1993.
- [37] J.W. Hutchinson, N. Fleck. Strain gradient plasticity. *Advances in applied mechanics*, 33:295–361, 1997.
- [38] M.Y. Gutkin, E.C. Aifantis. Edge dislocation in gradient elasticity. *Scripta Materialia*, 36(1), 1997.
- [39] D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chong, J. Wang, P. Tong. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8):1477–1508, 2003.
- [40] D.C.C. Lam, A.C.M. Chong. Characterization and modeling of specific strain gradient modulus of epoxy. *Journal of Materials Research*, 16(2):558–563, 2001.
- [41] С.А. Лурье, П.А. Белов. Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, (14), 2006.
- [42] И.Ф. Образцов, С.А. Лурье, П.А. Белов, Д.Б. Волков-Богородский, Е.И. Кочемасова, А.А. Дудченко, Е.М. Потупчик, Н.П. Шумова. Основы теории межфазного слоя. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 10(4):596–612, 2004.
- [43] С.А. Лурье, П.А. Белов, Л.Н. Рабинский, С.И. Жаворонок. Масштабные эффекты в механике сплошных сред. материалы с микроструктурой и наноструктурой. 2011.
- [44] С.А. Лурье, П.А. Белов. О масштабных эффектах в механике хрупкого разрушения. *Деформация и разрушение материалов*, (5):10–17, 2013.
- [45] В.В. Васильев, С.А. Лурье, В.А. Салов. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости. *Физическая мезомеханика*, 21(4), 2018.
- [46] В.В. Васильев, С.А. Лурье. Новый метод исследования прочности хрупких тел с трещинами. *Деформация и разрушение материалов*, (9):12–19, 2019.

- [47] Д.Б. Волков-Богородский, Ю.Г. Евтушенко, В.И. Зубов, С.А. Лурье. Численно-аналитический учет масштабных эффектов при расчете деформаций нанокompозитов с использованием блочного метода мультиполей. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 46(7):1302–1321, 2006.
- [48] Д.Б. Волков-Богородский, С.А. Лурье, Ю.О. Соляев, А.В. Нужных. Моделирование эффективных модулей композиционных материалов с цилиндрическими включениями с учетом влияния масштабных эффектов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 22(1):128–152, 2016.
- [49] Д.Б. Волков-Богородский, С.А. Лурье. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (4):182–192, 2010.
- [50] Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, Ю.О. Соляев. Полуобратное решение задачи чистого изгиба балки в градиентной теории упругости: отсутствие масштабных эффектов. 479(4):390–394, 2018.
- [51] В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина. Волны в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией. *Прикладная математика и механика*, 69(1):61–74, 2005.
- [52] В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина. Нелинейные продольные и сдвиговые стационарные волны деформации в градиентно-упругой среде. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, (15), 2007.
- [53] А.М. Антонов, В.И. Ерофеев. Волна Рэлея на границе градиентно-упругого полупространства. *Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Естественные науки»*, (4 (79)), 2018.
- [54] В.И. Ерофеев, А.И. Землянухин, В.М. Катсон, С.Ф. Шешенин. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2(4):67–75, 2009.
- [55] М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера. *Прикладная механика и техническая физика*, 42(4):145–154, 2001.
- [56] Т.Л. Тхань, Д.В. Тарлаковский. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*, 5(1), 2013.
- [57] Л.Т. Туан, Д.В. Тарлаковский. Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 17(2):184–195, 2011.
- [58] П.В. Трусов, П.С. Волегов, Н.С. Кондратьев. Физические теории пластичности. *Пермь: Изд-во ПНИПУ*, 2013, 244 с.
- [59] S.A. Lurie, A.L. Kalamkarov. General theory of continuous media with conserved dislocations. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22-23):7468–7485, 2007.

- [60] П.А. Жилин. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: учебное пособие. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2003, 339 с.
- [61] V.I. Erofeev, A.V. Leontieva, A.O. Malkhanov. Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the non-linear micropolar medium. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97(9):1064–1071, 2017.
- [62] М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости. *Известия Академии наук. Механика твердого тела*, (5):69–82, 2002.
- [63] М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера. *Акустический журнал*, 52(2):227–235, 2006.
- [64] Е.Ф. Грекова. Линейная редуцированная среда Коссера с шаровым тензором инерции, вращения в которой не наблюдаются в эксперименте. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (5):58–64, 2012.
- [65] V.A. Eremeyev, L.P. Lebedev, H. Altenbach. *Foundations of micropolar mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [66] Е.А. Ивановой, А.М. Кривцов, Н.Ф. Морозов. Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур. In *Доклады Академии наук*, volume 391, pages 764–768, 2003.
- [67] Е.А. Иванова, А.М. Кривцов, Н.Ф. Морозов. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне. *Прикладная математика и механика*, 71(4):595–615, 2007.
- [68] Е.А. Ivanova. Description of mechanism of thermal conduction and internal damping by means of two-component Cosserat continuum. *Acta Mechanica*, 225(3):757–795, 2014.
- [69] М.У. Никабадзе. К условиям совместности и уравнениям движения в микрополяриной линейной теории упругости. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, (1), 2012.
- [70] Д.В. Тарлаковский, Н.В. Лам. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СРЕДЕ КОССЕРА. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, (4), 2020.
- [71] Г.Л. Бровко, О.А. Иванова. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (1):22–36, 2008.
- [72] E. Vilchevskaya. On micropolar theory with inertia production. In *State of the Art and Future Trends in Material Modeling*, pages 421–442. Springer, 2019.

- [73] В.И. Горбачев, А.Н. Емельянов. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (1):95–107, 2014.
- [74] П.А. Белов, С.А. Лурье. Теория идеальных адгезионных взаимодействий. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 13(3):23–29, 2007.
- [75] В.А. Еремеев, Е.А. Иванова, Н.Ф. Морозов. Некоторые задачи наномеханики. *Физическая мезомеханика*, 16(4), 2013.
- [76] Р.В. Гольдштейн, В.А. Городцов, К.Б. Устинов. О построении теории поверхностной упругости для плоской границы. *Физическая мезомеханика*, 16(4), 2013.
- [77] F. Vopp. Eine lineare theorie des elektrons. *Annalen der Physik*, 430(5):345–384, 1940.
- [78] В. Podolsky. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. *Physical Review*, 62(1-2):68, 1942.
- [79] M. Lazar, J. Leck. Second gradient electrodynamics: a non-singular relativistic field theory. *Annals of Physics*, 423:168330, 2020.
- [80] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. 1982.
- [81] S. Forest, E.C. Aifantis. Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermomechanics of generalized continua. *International Journal of Solids and Structures*, 47(25-26):3367–3376, 2010.
- [82] E.C. Aifantis. Internal length gradient (ilg) material mechanics across scales and disciplines. In *Advances in Applied Mechanics*, volume 49, pages 1–110. Elsevier, 2016.
- [83] G. Sciarra, F. Dell’Isola, O. Coussy. Second gradient poromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44(20):6607–6629, 2007.
- [84] E. Fried, M.E. Gurtin. Traction, balances, and boundary conditions for nonsimple materials with application to liquid flow at small-length scales. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 182(3):513–554, 2006.
- [85] E. Fried, M.E. Gurtin. A continuum mechanical theory for turbulence: a generalized navier–stokes- α equation with boundary conditions. *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, 22(6):433–470, 2008.
- [86] V.K. Kalpakides, E.K. Agiasofitou. On material equations in second gradient electroelasticity. *Journal of Elasticity*, 67(3):205–227, 2002.
- [87] M. Xu, I.M. Gitman, H. Askes. A gradient-enriched continuum model for magneto-elastic coupling: Formulation, finite element implementation and in-plane problems. *Computers & Structures*, 212:275–288, 2019.
- [88] R.D. Mindlin. Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films. *International Journal of Solids and Structures*, 5(11):1197–1208, 1969.

- [89] J. Yang, J. Wang. Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics—a review. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 21(3):207–220, 2008.
- [90] G. Pillai, S.S. Li. Piezoelectric mems resonators: A review. *IEEE Sensors Journal*, 2020.
- [91] P. Delsing, A.N. Cleland, M.J.A. Schuetz, J. Knorz, G. Giedke, J.I. Cirac, K. Srinivasan, M. Wu, K.C. Balram, C. Bauerle, et al. The 2019 surface acoustic waves roadmap. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 52(35):353001, 2019.
- [92] P. Sharma, A. Dasgupta. Average elastic fields and scale-dependent overall properties of heterogeneous micropolar materials containing spherical and cylindrical inhomogeneities. *Physical Review B*, 66(22):224110, 2002.
- [93] Y.M. Yue, K.Y. Xu, E.C. Aifantis. Microscale size effects on the electromechanical coupling in piezoelectric material for anti-plane problem. *Smart materials and structures*, 23(12):125043, 2014.
- [94] H. Ma, G. Hu, Y. Wei, L. Liang. Inclusion problem in second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 132:60–78, 2018.
- [95] X.L. Gao, H.M. Ma. Strain gradient solution for Eshelby’s ellipsoidal inclusion problem. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2120):2425–2446, 2010.
- [96] M.R. Delfani, M. Latifi Shahandashti. Elastic field of a spherical inclusion with non-uniform eigenfields in second strain gradient elasticity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 473(2205):20170254, 2017.
- [97] S. Lurie, Y. Solyaev, K. Shramko. Comparison between the Mori-Tanaka and generalized self-consistent methods in the framework of anti-plane strain inclusion problem in strain gradient elasticity. *Mechanics of Materials*, 122:133–144, 2018.
- [98] J. Aboudi. *Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach*. Elsevier, 2013.
- [99] P. Кристенсен. *Введение в механику композитов*. М., Мир, 1982.
- [100] J.D. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. In *Solid state physics*, volume 3, pages 79–144. Elsevier, 1956.
- [101] Y. Solyaev, S.A. Lurie. Eshelby integral formulas in second gradient elasticity. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 11(2):99–107, 2020.
- [102] S. Papargyri-Beskou, K.G. Tsepoura, D. Polyzos, D.E. Beskos. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *International Journal of Solids and Structures*, 40(2):385–400, 2003.
- [103] K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos. Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 29(5):837–843, 2010.
- [104] Y. Yue, K. Xu, E.C. Aifantis. Strain gradient and electric field gradient effects in piezoelectric cantilever beams. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 24(3-4):121–127, 2015.

- [105] K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos. Nonlinear strain gradient elastic thin shallow shells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 30(3):286–292, 2011.
- [106] A. Jafari, S.S. Shah-enayati, A.A. Atai. Size dependency in vibration analysis of nano plates; one problem, different answers. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 59:124–139, 2016.
- [107] S. Lurie, Y. Solyaev. Revisiting bending theories of elastic gradient beams. *International Journal of Engineering Science*, 126:1–21, 2018.
- [108] J. Niiranen, V. Balobanov, J. Kiendl, S.B. Hosseini. Variational formulations, model comparisons and numerical methods for Euler-Bernoulli micro-and nano-beam models. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24(1):312–335, 2019.
- [109] C. Liebold, W.H. Muller. Comparison of gradient elasticity models for the bending of micromaterials. *Comp. Mater. Sci.*, 116:52–61, 2016.
- [110] R.E. Miller, V.B. Shenoy. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 11(3):139, 2000.
- [111] S.C. Cowin, J.W. Nunziato. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, 13(2):125–147, 1983.
- [112] S.A. Lurie, D.B. Volkov-Bogorodsky, P.A. Belov, E.D. Lykosova. Do nanosized rods have abnormal mechanical properties? on some fallacious ideas and direct errors related to the use of the gradient theories for simulation of scale-dependent rods. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 7(4), 2016.
- [113] A.E. Giannakopoulos, E. Amanatidou, N. Aravas. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle. *International journal of solids and structures*, 43(13):3875–3894, 2006.
- [114] R. Maranganti, P. Sharma. A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (Ir) relevance for nanotechnologies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9):1823–1852, 2007.
- [115] A.A. Gusev, S.A. Lurie. Strain-gradient elasticity for bridging continuum and atomistic estimates of stiffness of binary Lennard-Jones crystals. *Advanced engineering materials*, 12(6):529–533, 2010.
- [116] H.M. Shodja, A. Zaheri, A. Tehranchi. Ab initio calculations of characteristic lengths of crystalline materials in first strain gradient elasticity. *Mechanics of Materials*, 61:73–78, 2013.
- [117] H.M. Shodja, H. Moosavian, F. Ojaghnezhad. Toupin-Mindlin first strain gradient theory revisited for cubic crystals of hexoctahedral class: Analytical expression of the material parameters in terms of the atomic force constants and evaluation via ab initio dft. *Mechanics of Materials*, 123:19–29, 2018.
- [118] S.A. Lurie, Y.O. Solyaev. Identification of gradient elasticity parameters based on interatomic interaction potentials accounting for modified Lorentz-Berthelot rules. *Physical Mesomechanics*, 20(4):392–398, 2017.

- [119] V. Monchiet, N. Auffray, J. Yvonnet. Strain-gradient homogenization: a bridge between the asymptotic expansion and quadratic boundary condition methods. *Mechanics of Materials*, 143:103309, 2020.
- [120] J. Yvonnet, N. Auffray, V. Monchiet. Computational second-order homogenization of materials with effective anisotropic strain-gradient behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 191:434–448, 2020.
- [121] V.P. Smyshlyaev, K.D. Cherednichenko. On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6-7):1325–1357, 2000.
- [122] N.S. Bakhvalov, G. Panasenko. *Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2012.
- [123] S.A. Lurie, P.A. Belov, N.P. Tuchkova. The application of the multiscale models for description of the dispersed composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 36(2):145–152, 2005.
- [124] H. Askes, L. Susmel. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 38(2):154–160, 2015.
- [125] J.Y. Shu, W.E. King, N.A. Fleck. Finite elements for materials with strain gradient effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(3):373–391, 1999.
- [126] E. Amanatidou, N. Aravas. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(15-16):1723–1751, 2002.
- [127] S. Imatani, K. Hatada, G.A. Maugin. Finite element analysis of crack problems for strain gradient material model. *Philosophical Magazine*, 85(33-35):4245–4256, 2005.
- [128] H. Askes, I. Morata, E.C. Aifantis. Finite element analysis with staggered gradient elasticity. *Computers and Structures*, 86(11-12):1266–1279, 2008.
- [129] L. Zybell, U. Muhlich, M. Kuna, Z.L. Zhang. A three-dimensional finite element for gradient elasticity based on a mixed-type formulation. *Computational Materials Science*, 52(1):268–273, 2012.
- [130] V. Phunpeng, P.M. Baiz. Mixed finite element formulations for strain-gradient elasticity problems using the FEniCS environment. *Finite Elements in Analysis and Design*, 96:23–40, 2015.
- [131] C. Bagni, H. Askes, L. Susmel. Gradient-enriched linear-elastic tip stresses to perform the high-cycle fatigue assessment of notched plain concrete. *Frattura ed Integrità Strutturale*, (33):105–110, 2015.
- [132] B.E. Abali, W.H. Muller, F. Dell’Isola. Theory and computation of higher gradient elasticity theories based on action principles. *Archive of Applied Mechanics*, 87(9):1495–1510, 2017.
- [133] S.A. Papanicolopoulos, F. Gulib, A. Marinelli. A novel efficient mixed formulation for strain-gradient models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page nme.5985, 2018.

- [134] S. Markolefas, T.K. Papathanasiou, S.K. Georgantzinou. p-extension of c_0 continuous mixed finite elements for plane strain gradient elasticity. *Archives of Mechanics*, 71(6):567–593, 2019.
- [135] K.Y. Sze, Z.H. Wu. Twenty-four-DOF four-node quadrilateral elements for gradient elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 119(2):128–149, 2019.
- [136] Y. Wei. A new finite element method for strain gradient theories and applications to fracture analyses. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 25(6):897–913, 2006.
- [137] S.A. Papanicolopoulos, A. Zervos, I. Vardoulakis. A three-dimensional C_1 finite element for gradient elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng 2009*; 77:1396–1415, 2009.
- [138] A. Beheshti. Finite element analysis of plane strain solids in strain-gradient elasticity. *Acta Mechanica*, 2017.
- [139] S.A. Rudraraju, A. Van der Ven, K. Garikipati. Three-dimensional isogeometric solutions to general boundary value problems of Toupin’s gradient elasticity theory at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 278:705–728, 2014.
- [140] J. Niiranen, S. Khakalo, V. Balabanov, A.H. Niemi. Variational formulation and isogeometric analysis for fourth-order boundary value problems of gradient-elastic bar and plane strain/stress problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 308:182–211, 2016.
- [141] I. Kolo, H. Askes, R. De Borst. Convergence analysis of laplacian-based gradient elasticity in an isogeometric framework. *Finite Elements in Analysis and Design*, 135:56–67, 2017.
- [142] S. Khakalo, J. Niiranen. Isogeometric analysis of higher-order gradient elasticity by user elements of a commercial finite element software. *CAD Computer Aided Design*, 82:154–169, 2017.
- [143] R. Makvandi, J.C. Reiher, A. Bertram, D. Juhre. Isogeometric analysis of first and second strain gradient elasticity. *Computational Mechanics*, 61(3):351–363, 2018.
- [144] I. Kolo, L. Chen, R. de Borst. Strain-gradient elasticity and gradient-dependent plasticity with hierarchical refinement of NURBS. *Finite Elements in Analysis and Design*, 163(April):31–43, 2019.
- [145] G.F. Karlis, S.V. Tsinopoulos, D. Polyzos, D.E. Beskos. Boundary element analysis of mode I and mixed mode (I and II) crack problems of 2-D gradient elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49-52):5092–5103, 2007.
- [146] G.F. Karlis, A. Charalambopoulos, D. Polyzos. An advanced boundary element method for solving 2D and 3D static problems in Mindlin’s strain-gradient theory of elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83:1407–1427, 2010.
- [147] H. Askes, E.C. Alfantis. Numerical modeling of size effects with gradient elasticity - Formulation, meshless discretization and examples. *International Journal of Fracture*, 117(4):347–358, 2002.
- [148] Z. Tang, S. Shen, S.N. Atluri. Analysis of materials with strain-gradient effects: A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 4(1):177–196, 2003.

- [149] B.B. Wang, C.G. Lu, C.Y. Fan, M.H. Zhao. Consistent integration schemes for meshfree analysis of strain gradient elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357:112601, 2019.
- [150] S. Lurie, P. Belov, D. Volkov-Bogorodsky, N. Tuchkova. Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites. *Computational Materials Science*, 28(3-4):529–539, 2003.
- [151] Y.O. Solyaev, S.A. Lurie. Trefftz collocation method for two-dimensional strain gradient elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(3):823–839, 2021.
- [152] H. Ren, X. Zhuang, T. Rabczuk. Nonlocal operator method with numerical integration for gradient solid. *Computers and Structures*, 233:106235, 2020.
- [153] K.Y. Sze, W.C. Yuan, Y.X. Zhou. Four-node tetrahedral elements for gradient-elasticity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(16):3660–3679, 2020.
- [154] X.L. Gao, S.K. Park. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22-23):7486–7499, 2007.
- [155] S. Hu, S. Shen. Electric field gradient theory with surface effect for nano-dielectrics. *Computers, Materials & Continua (CMC)*, 13(1):63, 2009.
- [156] D. Iesan. A theory of thermopiezoelectricity with strain gradient and electric field gradient effects. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 67:280–290, 2018.
- [157] E. Sahin, S. Dost. A strain-gradients theory of elastic dielectrics with spatial dispersion. *International journal of engineering science*, 26(12):1231–1245, 1988.
- [158] Ж. Можен. Механика электромагнитных сплошных сред, М.: Мир, 1991, 560 с.
- [159] J. Yang. A Review of a Few Topics in Piezoelectricity. *Applied Mechanics Reviews*, 59(6):335, 2006.
- [160] D.M. Barnett, J.I. Lothe. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators. *Physica Status Solidi (b)*, 67(1):105–111, 1975.
- [161] G.A. Maugin. The method of virtual power in continuum mechanics: application to coupled fields. *Acta Mechanica*, 35:1–70, 1980.
- [162] А.А. Паньков. Краевые задачи для пьезоактивных сред с нерегулярными структурами. PhD thesis, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2003.
- [163] C.P. Jiang, Z.H. Tong, Y.K. Cheung. A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear. *Mechanics of Materials*, 33(5):295–308, 2001.
- [164] M. Krommer, H. Irschik. An electromechanically coupled theory for piezoelectric beams taking into account the charge equation of electrostatics. *Acta Mechanica*, 154(1-4):141–158, 2002.
- [165] J.S. Yang. Equations for the extension and flexure of a piezoelectric beam with rectangular cross section and applications. *Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 9:409–420, 1998.
- [166] J. Yang. *The Mechanics of Piezoelectric Structures*. World Scientific Pbl., 2006, 328 p.

- [167] R.D. Mindlin. Polarization gradient in elastic dielectrics. *International Journal of Solids and Structures*, 4(6):637–642, 1968.
- [168] A.V. Metrikine, H. Askes. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21(4):555–572, 2002.
- [169] R.D. Mindlin. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 8(7):895–906, 1972.
- [170] А.М. Самсонов. О существовании солитонов продольной деформации в бесконечном нелинейно-упругом стержне. *Доклады Академии наук*, 299(5):1083–1086, 1988.
- [171] A.V. Porubov, A.E. Osokina. Double dispersion equation for nonlinear waves in a graphene-type hexagonal lattice. *Wave Motion*, 89:185–192, 2019.
- [172] N. Shawagfeh, D. Kaya. Series solution to the Pochhammer-Chree equation and comparison with exact solutions. *Computers & Mathematics with Applications*, 47(12):1915–1920, 2004.
- [173] Y. Lurie, S. and Solyaev, A. Volkov, D. Volkov-Bogorodskiy. Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 23(5):787–804, 2018.
- [174] S. Lurie, Y. Solyaev. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 144:103129, 2019.
- [175] Y. Solyaev, S. Lurie, V. Korolenko. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 78:103853, 2019.
- [176] S. Lurie, Y. Solyaev. On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(6):1601–1613, 2019.
- [177] Y. Solyaev, S. Lurie. Pure bending of a piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory. *Acta Mechanica*, 230(12):4197–4211, 2019.
- [178] Y. Solyaev, Lurie S. Electric field, strain and inertia gradient effects on the anti-plane waves propagation in piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*, 494:115898, 2021.
- [179] Y. Solyaev, S. Lurie, A. Ustenko. On the relations between direct and energy based homogenization approaches in second gradient elasticity. In *Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials*, pages 443–457. Springer, 2020.
- [180] Y. Solyaev, S. Lurie, E. Barchiesi, L. Placidi. On the dependence of standard and gradient elastic material constants on a field of defects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 25(1):35–45, 2020.
- [181] Y.O. Solyaev, S.A. Lurie, N.A. Semenov. Generalized Einstein’s and Brinkman’s solutions for the effective viscosity of nanofluids. *Journal of Applied Physics*, 2020.
- [182] Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, Ю.О. Соляев. Концентрация напряжений вблизи жестких цилиндрических включений в условиях анти-плоского сдвига. *Доклады Академии наук. Физика, технические науки*, 495(1):50–56, 2020.

- [183] Y. Solyaev, A. Ustenko, E. Lykosova. Refined analysis of piezoelectric microcantilevers in gradient electroelasticity theory. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 40(7):1010–1015, 2019.
- [184] Valeriy Vasiliev, Sergey Lurie, Yury Solyaev. New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, 258:108080, 2021.
- [185] Y. Solyaev, A. Ustenko. On the dispersion relations for the anti-plane surface wave in the second gradient electroelasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(8):1935–1943, 2021.
- [186] Sergey A Lurie, Alexander L Kalamkarov, Yury O Solyaev, Alexander V Volkov. Dilatation gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 88:104258, 2021.
- [187] Yury Solyaev, Sergey Lurie, Holm Altenbach, Francesco dell’Isola. On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories. *International Journal of Solids and Structures*, 239:111433, 2022.
- [188] V.V. Vasiliev, S.A. Lurie. New method for studying the strength of brittle bodies with cracks. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2020:291–297, 2020.
- [189] Z. P. Bazzant. Size effect. *International Journal of Solids and Structures*, 37(1-2):69–80, 2000.
- [190] H. Askes, L. Susmel. Gradient enriched linear-elastic crack tip stresses to estimate the static strength of cracked engineering ceramics. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 7(25):87–93, 2013.
- [191] M. Kotoul, P. Skalka, T. Profant, M. Friak, P. Řehák, P. Sestak, M. Cerny, J. Pokluda. Ab initio aided strain gradient elasticity theory in prediction of nanocomponent fracture. *Mechanics of Materials*, 136:103074, 2019.
- [192] P. Kotoul, M. and Skalka, T. Profant, P. Rehak, P. Sestak, M. Cerny, J. Pokluda. A novel multiscale approach to brittle fracture of nano/micro-sized components. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 43(8):1630–1645, 2020.
- [193] Z.P. Bazzant, Q. Yu. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength. *Journal of engineering mechanics*, 135(2):78–84, 2009.
- [194] G. Sciarra, S. Vidoli. Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials. *Journal of Elasticity*, 113(1):27–53, 2013.
- [195] S. Lurie, P. Belov. Gradient effects in fracture mechanics for nano-structured materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 130:3–11, 2014.
- [196] D. Taylor. The theory of critical distances. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(7):1696–1705, 2008.
- [197] H. Askes, P. Livieri, L. Susmel, D. Taylor, R. Tovo. Intrinsic material length, theory of critical distances and gradient mechanics: Analogies and differences in processing linear-elastic crack tip stress fields. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 36(1):39–55, 2013.
- [198] L. Susmel, H. Askes, T. Bennett, D. Taylor. Theory of Critical Distances versus Gradient Mechanics in modelling the transition from the short to long crack regime at the fatigue limit. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 36(9):861–869, 2013.

- [199] A.J. Crosby, J.Y. Lee. Polymer nanocomposites: the “nano” effect on mechanical properties. *Polymer reviews*, 47(2):217–229, 2007.
- [200] S.Y. Fu, X.Q. Feng, B. Lauke, Y.W. Mai. Effects of particle size, particle/matrix interface adhesion and particle loading on mechanical properties of particulate–polymer composites. *Composites Part B: Engineering*, 39(6):933–961, 2008.
- [201] B. Le, J. Khaliq, D. Huo, X. Teng, I. Shyha. A review on nanocomposites. part 1: Mechanical properties. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 142(10), 2020.
- [202] Y.R. Uhm, J. Kim, K.J. Son, C.S. Kim. Effect of particle size, dispersion, and particle–matrix adhesion on w reinforced polymer composites. *Research on Chemical Intermediates*, 40(5):2145–2153, 2014.
- [203] F. Kundie, C.H. Azhari, A. Muchtar, Z.A. Ahmad. Effects of filler size on the mechanical properties of polymer-filled dental composites: A review of recent developments. *Journal of Physical Science*, 29(1):141–165, 2018.
- [204] D. Pinto, L. Bernardo, A. Amaro, S. Lopes. Mechanical properties of epoxy nanocomposites using titanium dioxide as reinforcement—a review. *Construction and Building Materials*, 95:506–524, 2015.
- [205] S. Fu, Z. Sun, P. Huang, Y. Li, N. Hu. Some basic aspects of polymer nanocomposites: A critical review. *Nano Materials Science*, 1(1):2–30, 2019.
- [206] M. Krutyeva, A. Wischnewski, M. Monkenbusch, L. Willner, J. Maiz, C. Mijangos, A. Arbe, J. Colmenero, A. Radulescu, O. Holderer, et al. Effect of nanoconfinement on polymer dynamics: surface layers and interphases. *Physical review letters*, 110(10):108303, 2013.
- [207] V.P. Tran, S.B. Brisard, J. Guilleminot, K. Sab. Mori–Tanaka estimates of the effective elastic properties of stress-gradient composites. *International Journal of Solids and Structures*, 146:55–68, 2018.
- [208] Z.Q. Yu, S.L. You, Z.G. Yang, H. Baier. Effect of surface functional modification of nano-alumina particles on thermal and mechanical properties of epoxy nanocomposites. *Advanced composite materials*, 20(5):487–502, 2011.
- [209] S. Lurie, D. Volkov-Bogorodskiy, Y. Solyaev, R. Rizahanov, L. Agureev. Multiscale modelling of aluminium-based metal–matrix composites with oxide nano-inclusions. *Computational Materials Science*, 116:62–73, 2016.
- [210] J.K. Chen, Z.P. Huang, J. Zhu. Size effect of particles on the damage dissipation in nanocomposites. *Composites Science and Technology*, 67(14):2990–2996, 2007.
- [211] K. Tohgo, Y. Itoh, Y. Shimamura. A constitutive model of particulate-reinforced composites taking account of particle size effects and damage evolution. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 41(2):313–321, 2010.
- [212] J. Pan, L. Bian. Influence of agglomeration parameters on carbon nanotube composites. *Acta Mechanica*, 228(6):2207–2217, 2017.

- [213] Y. Zare. Study of nanoparticles aggregation/agglomeration in polymer particulate nanocomposites by mechanical properties. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 84:158–164, 2016.
- [214] I. Sevostianov, M. Kachanov. Effect of interphase layers on the overall elastic and conductive properties of matrix composites. applications to nanosize inclusion. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3-4):1304–1315, 2007.
- [215] W. Cao, X. Yang, X. Tian. Anti-plane problems of piezoelectric material with a micro-void or micro-inclusion based on micromorphic electroelastic theory. *International Journal of Solids and Structures*, 49(22):3185–3200, 2012.
- [216] H.L. Duan, J. Wang, B.L. Karihaloo, Z.P. Huang. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification. *Acta Materialia*, 54(11):2983–2990, 2006.
- [217] H.L. Duan, J.X. Wang, Z.P. Huang, B.L. Karihaloo. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(7):1574–1596, 2005.
- [218] A.A. Filippov, V.M. Fomin, E.V. Karpov. Experimental determination of the elastic characteristics of filled polymers using mechanical tests for constrained compression. *AIP Conference Proceedings*, 2125(1):020014, 2019.
- [219] L.L. Vignoli, M.A. Savi, P.M.C.L. Pacheco, A.L. Kalamkarov. Micromechanical analysis of transversal strength of composite laminae. *Composite Structures*, 250:112546, 2020.
- [220] L.L. Vignoli, M.A. Savi, P.M.C.L. Pacheco, A.L. Kalamkarov. Micromechanical analysis of longitudinal and shear strength of composite laminae. *Journal of Composite Materials*, 54(30):4853–4873, 2020.
- [221] Z. Hashin. The spherical inclusion with imperfect interface. *Journal of Applied Mechanics*, 58(2):444–449, 1991.
- [222] A.V. Utkin, V.M. Fomin. Molecular dynamic calculation of the bulk modulus for silicon and silicon carbide. *Doklady Physics*, 65(5):174–177, 2020.
- [223] A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, A.N. Rybyanets. Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces. *Materials Physics & Mechanics*, 40(1), 2018.
- [224] А.В. Наседкин, А.А. Наседкина, М.Э. Нассар. Гомогенизация пористых пьезокомпози́тов с экстремальными свойствами на границах пор методом эффективных модулей. *Известия российской академии наук. Механика твёрдого тела*, 6:82–92, 2020.
- [225] S.T. Gu, J.T. Liu, Q.C. He. Piezoelectric composites: Imperfect interface models, weak formulations and benchmark problems. *Computational materials science*, 94:182–190, 2014.
- [226] S. Lurie, D. Volkov-Bogorodskii, N. Tuchkova. Exact solution of Eshelby–Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions. *Acta Mechanica*, 227(1):127–138, 2016.

- [227] E.J.A.M. Arzt. Size effects in materials due to microstructural and dimensional constraints: a comparative review. *Acta materialia*, 46(16):5611–5626, 1998.
- [228] Z.C. Cordero, B.E. Knight, C.A. Schuh. Six decades of the Hall–Petch effect—a survey of grain-size strengthening studies on pure metals. *International Materials Reviews*, 61(8):495–512, 2016.
- [229] W.D. Nix, H. Gao. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(3):411–425, 1998.
- [230] A.G. Evans, J.W. Hutchinson. A critical assessment of theories of strain gradient plasticity. *Acta Materialia*, 57(5):1675–1688, 2009.
- [231] С.А. Лурье, Ю.О. Соляев. Моделирование механических свойств наноструктурированных пористых керамик. *Деформация и разрушение материалов*, (1):6–16, 2012.
- [232] R. Casati, M. Vedani. Metal matrix composites reinforced by nano-particles—a review. *Metals*, 4(1):65–83, 2014.
- [233] J. Lei, Y. He, S. Guo, Z. Li, D. Liu. Size-dependent vibration of nickel cantilever microbeams: experiment and gradient elasticity. *AIP Advances*, 6(10):105202, 2016.
- [234] M. Nasr Esfahani, B.E. Alaca. A Review on Size-Dependent Mechanical Properties of Nanowires. *Advanced Engineering Materials*, 1900192:1–23, 2019.
- [235] G.Y. Jing, H.L. Duan, X.M. Sun, Z.S. Zhang, J. Xu, Y.D. Li, J.X. Wang, D.P. Yu. Surface effects on elastic properties of silver nanowires: contact atomic-force microscopy. *Physical review B*, 73(23):235409, 2006.
- [236] R. Dingreville, J. Qu, M. Cherkaoui. Surface free energy and its effect on the elastic behavior of nano-sized particles, wires and films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(8):1827–1854, 2005.
- [237] V. Schmidt, J.V. Wittemann, S. Senz, U. Gosele. Silicon nanowires: a review on aspects of their growth and their electrical properties. *Advanced Materials*, 21(25-26):2681–2702, 2009.
- [238] H.J. Joyce, J.L. Boland, C.L. Davies, S.A. Baig, M.B. Johnston. A review of the electrical properties of semiconductor nanowires: insights gained from terahertz conductivity spectroscopy. *Semiconductor Science and Technology*, 31(10):103003, 2016.
- [239] H.D. Espinosa, R.A. Bernal, M. Minary-Jolandan. A review of mechanical and electromechanical properties of piezoelectric nanowires. *Advanced Materials*, 24(34):4656–4675, 2012.
- [240] Fernandez S.J., R. Zaera, J.A. Loya, J.N. Reddy. Bending of Euler-Bernoulli beams using eringen’s integral formulation: a paradox resolved. *International Journal of Engineering Science*, 99:107–116, 2016.
- [241] C. Polizzotto. Stress gradient versus strain gradient constitutive models within elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 51(9):1809–1818, 2014.

- [242] H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.P. Lebedev. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*, 90(3):231–240, 2010.
- [243] M.S. Majdoub, P. Sharma, T. Cagin. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect. *Physical Review B*, 77(12):125424, 2008.
- [244] Z. Rueger, R.S. Lakes. Cosserat elasticity of negative Poisson’s ratio foam: experiment. *Smart Materials and Structures*, 25(5):054004, 2016.
- [245] Z. Rueger, R.S. Lakes. Experimental study of elastic constants of a dense foam with weak Cosserat coupling. *Journal of Elasticity*, 137(1):101–115, 2019.
- [246] T. Frenzel, M. Kadic, M. Wegener. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science*, 358(6366):1072–1074, 2017.
- [247] S.A. Lurie, A.L. Kalamkarov, Y.O. Solyaev, A.D. Ustenko, A.V. Volkov. Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials. *International Journal of Solids and Structures*, 132:188–200, 2018.
- [248] A.T. Karttunen, J.N. Reddy, J. Romanoff. Two-scale micropolar plate model for web-core sandwich panels. *International Journal of Solids and Structures*, 170:82–94, 2019.
- [249] B.R. Goncalves, A. Karttunen, J. Romanoff, J.N. Reddy. Buckling and free vibration of shear-flexible sandwich beams using a couple-stress-based finite element. *Composite Structures*, 165:233–241, 2017.
- [250] S. Khakalo, V. Balobanov, J. Niiranen. Modelling size-dependent bending, buckling and vibrations of 2d triangular lattices by strain gradient elasticity models: applications to sandwich beams and auxetics. *International Journal of Engineering Science*, 127:33–52, 2018.
- [251] Y. Solyaev, S. Lurie, A. Ustenko. Apparent bending and tensile stiffness of lattice beams with triangular and diamond structure. *in Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials*, pages 431–442, 2020.
- [252] Mark E Siemens, Qing Li, Margaret M Murnane, Henry C Kapteyn, Ronggui Yang, Erik H Anderson, Keith A Nelson. High-frequency surface acoustic wave propagation in nanostructures characterized by coherent extreme ultraviolet beams. *applied physics letters*, 94(9):093103, 2009.
- [253] R.D. Mindlin, N.N. Eshel. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4(1):109–124, 1968.
- [254] R. Maranganti, P. Sharma. A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (ir) relevance for nanotechnologies. *J. Mech. Phys. Solids*, 55(9):1823–1852, 2007.
- [255] R. Hikata, K. Tsuruta, A. Ishikawa, K. Fujimori. Terahertz acoustic wave on piezoelectric semiconductor film via large-scale molecular dynamics simulation. *Japanese Journal of Applied Physics*, 54(7S1):07HB07, 2015.

- [256] C. Polizzotto. A note on the higher order strain and stress tensors within deformation gradient elasticity theories: Physical interpretations and comparisons. *International Journal of Solids and Structures*, 90:116–121, 2016.
- [257] C. Polizzotto. A unifying variational framework for stress gradient and strain gradient elasticity theories. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 49:430–440, 2015.
- [258] V.Z. Parton, B.A. Kudryavtsev. Electromagnetoelasticity. *Gordon and Breach Science Publishers, New York*, 2:90059–0, 1988.
- [259] Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов, П.В. Лещенко. *Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов*. Наукова думка, 1989.
- [260] A.K. Tagantsev, P.V. Yudin. *Flexoelectricity in solids: from theory to applications*. World Scientific, 2016.
- [261] E.A. Eliseev, A.N. Morozovska, M.D. Glinchuk, S.V. Kalinin. Lost surface waves in nonpiezoelectric solids. *Physical Review B*, 96(4):045411, 2017.
- [262] L. Nazarenko, R. Gluge, H. Altenbach. Positive definiteness in coupled strain gradient elasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, pages 1–13, 2020.
- [263] C.B. Kafadar. The theory of multipoles in classical electromagnetism. *International Journal of Engineering Science*, 9(9):831–853, 1971.
- [264] X.M. Yang, Y.T. Hu, J.S. Yang. Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics. 41:6801–6811, 2004.
- [265] J. Yang. *Special topics in the theory of piezoelectricity*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [266] M.L. Dunn, M.I. Taya. Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites. *International Journal of Solids and Structures*, 30(2):161–175, 1993.
- [267] N. Auffray, J. Dirrenberger, G. Rosi. A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 69:195–206, 2015.
- [268] C. Polizzotto. Anisotropy in strain gradient elasticity: Simplified models with different forms of internal length and moduli tensors. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 71:51–63, 2018.
- [269] F. Dell’Isola, G. Sciarra, S. Vidoli. Generalized Hooke’s law for isotropic second gradient materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2107):2177–2196, 2009.
- [270] A.A. Gusev, S.A. Lurie. Symmetry conditions in strain gradient elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(4):683–691, 2017.
- [271] C. Polizzotto. A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 61:92–109, 2017.
- [272] F. Yang, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International journal of solids and structures*, 39(10):2731–2743, 2002.

- [273] M. Lazar, G. Po. The non-singular green tensor of Mindlin's anisotropic gradient elasticity with separable weak non-locality. *Physics Letters A*, 379(24-25):1538–1543, 2015.
- [274] D. Liu, Y. He, B. Zhang, L. Shen. Formulation of Toupin-Mindlin strain gradient theory in prolate and oblate spheroidal coordinates. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 49:227–241, 2015.
- [275] A.C. Eringen. *Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, 1967.
- [276] А.И. Лурье. *Теория упругости*. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.
- [277] P.M. Morse, H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Part 2*. New York : McGraw-Hill, 1953.
- [278] M.E. Gurtin. On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovitch-Neuber stress functions for infinite domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 9:225–233, 1962.
- [279] A.P. Zielinski, I. Herrera. Trefftz method: fitting boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(5):871–891, 1987.
- [280] A.P. Zielinski. On trial functions applied in the generalized Trefftz method. *Advances in Engineering Software*, 24(1-3):147–155, 1995.
- [281] Z. Hashin. Analysis of composite materials? a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3):481–505, 1983.
- [282] M. Bacca, D. Bigoni, F. Dal Corso, D. Veber. Mindlin second-gradient elastic properties from dilute two-phase Cauchy-elastic composites. part i: Closed form expression for the effective higher-order constitutive tensor. *International Journal of Solids and Structures*, 50(24):4010–4019, 2013.
- [283] S. Forest, D.K. Trinh. Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(2):90–109, 2011.
- [284] E. Kita, N. Kamiya. Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering software*, 24(1-3):3–12, 1995.
- [285] I. Herrera. Trefftz method. *Topics in Boundary Element Research*, pages 225–253, 1984.
- [286] G. Wang, L. Dong, S.N. Atluri. A Trefftz collocation method (TCM) for three-dimensional linear elasticity by using the Papkovitch-Neuber solutions with cylindrical harmonics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 88:93–103, 2018.
- [287] A. Bersani, F. Dell'Isola, P. Seppecher. Lagrange multipliers in infinite dimensional spaces, examples of application. *preprint*, 2019.
- [288] I. Herrera. Boundary methods: a criterion for completeness. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 77(8):4395–4398, 1980.
- [289] S.A. Lurie, D.B. Volkov-Bogorodsky, V.V Vasiliev. A new approach to non-singular plane cracks theory in gradient elasticity. *Mathematical and Computational Applications*, 24(4):93, 2019.

- [290] A.P. Zielinski, O.C. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(3):509–528, 1985.
- [291] K.A. Lazopoulos. Post-buckling problems for long elastic beams. *Acta Mechanica*, 164(3):189–198, 2003.
- [292] C. Polizzotto. A gradient elasticity theory for second-grade materials and higher order inertia. *International Journal of Solids and Structures*, 49(15-16):2121–2137, 2012.
- [293] K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos. On a strain gradient elastic Timoshenko beam model. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(11):875–882, 2011.
- [294] S. Papargyri-Beskou, D.E. Beskos. Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural kirchhoff plates. *Archive of Applied Mechanics*, 78(8):625–635, 2008.
- [295] K.A. Lazopoulos. On bending of strain gradient elastic micro-plates. *Mechanics Research Communications*, 36(7):777–783, 2009.
- [296] S. Papargyri-Beskou, D.E. Beskos. Stability analysis of gradient elastic circular cylindrical thin shells. *International journal of engineering science*, 47(11-12):1379–1385, 2009.
- [297] M. Canadjiija, R. Barretta, F.M. de Sciarra. A gradient elasticity model of Bernoulli-Euler nanobeams in non-isothermal environments. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 55:243–255, 2016.
- [298] X. Liang, S. Shen. Size-Dependent Piezoelectricity and Elasticity Due To the Electric Field-Strain Gradient Coupling and Strain Gradient Elasticity. *International Journal of Applied Mechanics*, 05(02):1350015, 2013.
- [299] X.J. Xu, Z.C. Deng. Closed-form frequency solutions for simplified strain gradient beams with higher-order inertia. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 56:59–72, 2016.
- [300] A.K. Lazopoulos. Dynamic response of thin strain gradient elastic beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 58(1):27–33, 2012.
- [301] R. Barretta, M. Brcic, M. Canadjiija, R. Luciano, F.M. De Sciarra. Application of gradient elasticity to armchair carbon nanotubes: size effects and constitutive parameters assessment. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 65:1–13, 2017.
- [302] J. Altenbach, H. Altenbach, V.A. Eremeyev. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*, 80(1):73–92, 2010.
- [303] М.М. Кантор, М.У. Никабадзе, А.Р. Улуханян. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, (3):96–110, 2013.
- [304] М.У. Никабадзе, Д.В. Георгиевским. Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек. *Прикладная математика и математическая физика*, 1(1):101–118, 2015.

- [305] С.П. Тимошенко, Д. Гере. Механика материалов. Изд.: Мир, 1976, 662 с.
- [306] F. Dell’Isola, R.C. Batra. Saint-Venant’s problem for porous linear elastic materials. *Journal of elasticity*, 47(1):73–81, 1997.
- [307] R.P. Singh, M. Zhang, D. Chan. Toughening of a brittle thermosetting polymer: effects of reinforcement particle size and volume fraction. *Journal of materials science*, 37(4):781–788, 2002.
- [308] P.H.T. Vollenberg, D. Heikens. Particle size dependence of the Young’s modulus of filled polymers: 1. preliminary experiments. *Polymer*, 30(9):1656–1662, 1989.
- [309] P.H.T. Vollenberg, J.W. De Haan, L.J.M. Van de Ven, D. Heikens. Particle size dependence of the Young’s modulus of filled polymers: 2. annealing and solid-state nuclear magnetic resonance experiments. *Polymer*, 30(9):1663–1668, 1989.
- [310] Q. Zhang, S. Liang, G. Sui, X. Yang. Influence of matrix modulus on the mechanical and interfacial properties of carbon fiber filament wound composites. *Rsc Advances*, 5(32):25208–25214, 2015.
- [311] М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М. Абрамовица и И. Стиган.–М.: Наука.–1979, 1979.
- [312] G.K. Batchelor, J.T. Green. The bulk stress in a suspension of spheres to orderc. *Rheol. Acta*, 13(4-5):890, 1974.
- [313] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика. М: Наука, 1986.
- [314] С.Е. Abisset, J. Frec, G. Ausias, E. Cueto, F. Chinesta, R. Keunings. *Arch. Comp. Meth. Eng.*, 22(3):511–527, 2015.
- [315] S. Forest, N.M. Cordero, E.P. Busso. First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales. *Comp. Mater. Sci.*, 50(4):1299–1304, 2011.
- [316] Н.Д. Коса, S. Doganay, A. Turgut, I.H. Tavman, R. Saidur, I.M. Mahbubul. Effect of particle size on the viscosity of nanofluids: a review. *Renew. Sust. Energy Rev.*, 82(February 2017):1664–1674, 2018.
- [317] S. Murshed, M. Sohel, P. Estell. A critical review of traditional and emerging techniques and fluids for electronics cooling. *Renew. Sust. Energy Rev.*, 76(August 2016):1134–1152, 2017.
- [318] D.K. Devendiran, V.A. Amirtham. A review on preparation, characterization, properties and applications of nanofluids. *Renew. Sust. Energy Rev.*, 60:21–40, 2016.
- [319] R. Taylor, et al. Small particles, big impacts: A review of the diverse applications of nanofluids. *J. of Appl. Phys.*, 113(1):1, 2013.
- [320] O. Mahian, et al. *Phys. Rep.*, 790:1–48, 2019.
- [321] J.P. Meyer, S.A. Adio, M. Sharifpur, P.N. Nwosu. The viscosity of nanofluids: a review of the theoretical, empirical, and numerical models. *Heat Transfer Eng.*, 37(5):387–421, 2016.
- [322] H.C. Brinkman. *J. Chem. Phys.*, 20(4):571, 1952.

- [323] N. Masoumi, N. Sohrabi, A. Behzadmehr. A new model for calculating the effective viscosity of nanofluids. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 94:055501, 2009.
- [324] K.H. Krishna, S. Neti, A. Oztekin, S. Mohapatra. Modeling of particle agglomeration in nanofluids. *J. of Appl. Phys.*, 117(9):094304, 2015.
- [325] S. Ganguly, S. Chakraborty. *J. of Appl. Phys.*, 106(12), 2009.
- [326] S.P. Jang, J.H. Lee, K.S. Hwang, S.U.S. Choi. *Appl. Phys. Lett.*, 91(24):1–4, 2007.
- [327] S.M. Hosseini, A.R. Moghadassi, D.E. Henneke. *J. Therm. Anal. Calorim.*, 100(3):873–877, 2010.
- [328] M. Corcione. *Int. J. Therm. Sci.*, 49(9):1536–1546, 2010.
- [329] A. Einstein. Zur theorie der brownschen bewegung. *Annalen der Physik*, 19:289–306, 1906.
- [330] C.T. Nguyen, F. Desgranges, N. Galanis, G. Roy, T. Mare, S. Boucher, H.A. Mintsa. Viscosity data for al₂o₃–water nanofluid—hysteresis: is heat transfer enhancement using nanofluids reliable? *Int. J. Therm. Sci.*, 47(2):103–111, 2008.
- [331] W. Williams, J. Buongiorno, L.W. Hu. Experimental investigation of turbulent convective heat transfer and pressure loss of alumina/water and zirconia/water nanoparticle colloids (nanofluids) in horizontal tubes. *J. Heat Transf.*, 130(4), 2008.
- [332] P.K. Namburu, D.P. Kulkarni, D. Misra, D.K. Das. Viscosity of copper oxide nanoparticles dispersed in ethylene glycol and water mixture. *Exp Therm Fluid Sci*, 32(2):397–402, 2007.
- [333] H. Chen, Y. Ding, A. Lapkin, X. Fan. Rheological behaviour of ethylene glycol-titanate nanotube nanofluids. *J. Nanoparticle Res.*, 11(6):1513, 2009.
- [334] N. Semenov, A. Danilin, Y. Karnet, E. Kelbysheva. Electrorheological behavior of suspensions of polyimide-based on the sodium salt of 2, 5-diaminobenzenesulfonic acid. *Polymers*, 12(5):1015, 2020.
- [335] E.V. Timofeeva, D.S. Smith, W. Yu, D.M. France, D. Singh, J.L. Routbort. Particle size and interfacial effects on thermo-physical and heat transfer characteristics of water-based a-sic nanofluids. *Nanotechnology*, 21(21):215703, 2010.
- [336] Z. Jia-Fei, L. Zhong-Yang, N.I. Ming-Jiang, C. Ke-Fa. *Chin. Phys. Lett.*, 26(6):066202, 2009.
- [337] J. Chevalier, O. Tillement, F. Ayela. *Appl. Phys. Lett.*, 91(23):233103, 2007.
- [338] M.H. Esfe, S. Saedodin, O. Mahian, S. Wongwises. *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, 58:138–146, 2014.
- [339] V.V. Vasiliev, S.A. Lurie, V.A. Salov. Estimation of the strength of plates with cracks based on the maximum stress criterion in a scale-dependent generalized theory of elasticity. *Physical Mesomechanics*, 22(6):456–462, 2019.
- [340] V.V. Vasiliev, S.A. Lurie, V.A. Salov. Determination of a load causing the appearance of plastic deformation in a tensile plate with a crack. *Mechanics of Solids*, 55(4):490–495, 2020.

- [341] S. Morel, N. Dourado. Size effect in quasibrittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10):1403–1412, 2011.
- [342] N. Aravas, A.E. Giannakopoulos. Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46(25-26):4478–4503, 2009.
- [343] L. Morini, A. Piccolroaz, G. Mishuris, E. Radi. On fracture criteria for dynamic crack propagation in elastic materials with couple stresses. *International Journal of Engineering Science*, 71:45–61, 2013.
- [344] M. Kotoul, T. Profant. Asymptotic solution for interface crack between two materials governed by dipolar gradient elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, 201:80–106, 2018.
- [345] R.P. Joseph, B.L. Wang, B. Samali. Strain gradient fracture in an anti-plane cracked material layer. *International Journal of Solids and Structures*, 146:214–223, 2018.
- [346] P. Isaksson, R. Hagglund. Crack-tip fields in gradient enhanced elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, 97:186–192, 2013.
- [347] A. Carpinteri, P. Cornetti, N. Pugno, A. Sapora, D. Taylor. A finite fracture mechanics approach to structures with sharp v-notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(7):1736–1752, 2008.
- [348] R.W. Davidge, G. Tappin. The effective surface energy of brittle materials. *Journal of Materials Science*, 3(2):165–173, 1968.
- [349] K.R. McKinney, R.W. Rice. Specimen size effects in fracture toughness testing of heterogeneous ceramics by the notch beam method. In *Fracture Mechanics for Ceramics, Rocks, and Concrete*. ASTM International, 1981.
- [350] A.R. Boccaccini, R.D. Rawlings, I. Dlouhy. Reliability of the chevron-notch technique for fracture toughness determination in glass. *Materials Science and Engineering A*, 347(1-2):102–108, 2003.
- [351] W.Y. Lu, S.W. Hu. Effect of large crack-depth ratio on threepoint bending concrete beam with single edge notch. *Materials Research Innovations*, 19(March):312–317, 2015.
- [352] D.D. Higgins, J.E. Bailey. Fracture measurements on cement paste. *Journal of Materials Science*, 11(11):1995–2003, 1976.
- [353] Q. Guo, X. Wu, M. Cai, S. Miao. Experimental Study on the Effect of Offset Notch on Fracture Properties of Rock under Three-Point Bending Beam. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2020, 2020.
- [354] S.S. Mousavi, M.R.M. Aliha, D.M. Imani. On the use of edge cracked short bend beam specimen for PMMA fracture toughness testing under mixed-mode I/II. *Polymer Testing*, 81(September 2019):106199, 2020.
- [355] T.C. Chen, Y.J. Chen, M.H. Hung, J.P. Hung. Design analysis of machine tool structure with artificial granite material. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(7):1687814016656533, 2016.

- [356] R. Christensen, Z. Li, H. Gao. An evaluation of the failure modes transition and the christensen ductile/brittle failure theory using molecular dynamics. *Proceedings of the Royal Society A*, 474(2219):20180361, 2018.
- [357] T.L. Anderson. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press, 2017.
- [358] R. Christensen, Z. Li, H. Gao. An evaluation of the failure modes transition and the christensen ductile/brittle failure theory using molecular dynamics. *Proceedings of the Royal Society A*, 474(2219):20180361, 2018.
- [359] R.M. Christensen. Exploration of ductile, brittle failure characteristics through a two-parameter yield/failure criterion. *Materials Science and Engineering: A*, 394(1-2):417–424, 2005.
- [360] H.G. Georgiadis, D.S. Anagnostou. Problems of the Flamant–Boussinesq and Kelvin type in dipolar gradient elasticity. *Journal of Elasticity*, 90(1):71–98, 2008.
- [361] P.A. Gourgiotis, T. Zisis, H.G. Georgiadis. On concentrated surface loads and green’s functions in the Toupin-Mindlin theory of strain-gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 130:153–171, 2018.
- [362] V.V. Vasiliev, S.A. Lurie, V.A. Salov. On the Flamant problem for a half-plane loaded with a concentrated force. *Acta Mechanica*, 232(5):1761–1771, 2021.
- [363] A. Madeo, I.D. Ghiba, P. Neff, I. Munch. A new view on boundary conditions in the Grioli-Koiter-Mindlin-Toupin indeterminate couple stress model. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 59:294–322, 2016.
- [364] J.R. Barber. *Elasticity*. Springer, 2002.
- [365] В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными*. Международная программа образования, 1996.
- [366] L. Nazarenko, R. Gluge, H. Altenbach. Uniqueness theorem in coupled strain gradient elasticity with mixed boundary conditions. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, pages 1–14, 2021.
- [367] R.D. Mindlin. Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates. *Journal of Applied Physics*, 23(1):83–88, 1952.
- [368] M.C. Dokmeci. A theory of high frequency vibrations of piezoelectric crystal bars. *International Journal of Solids and Structures*, 10(4):401–409, 1974.
- [369] H.F. Tiersten. *Linear piezoelectric plate vibrations*, 1969.
- [370] J. Yang. *The mechanics of piezoelectric structures*. World Scientific, 2006.
- [371] P. Li, F. Jin, J. Ma. Mechanical analysis on extensional and flexural deformations of a thermopiezoelectric crystal beam with rectangular cross section. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 55:35–44, 2016.
- [372] M. Krommer. On the correction of the Bernoulli-Euler beam theory for smart piezoelectric beams. *Smart Materials and Structures*, 10(4):668–680, 2001.

- [373] C. Maurini, F. Dell'Isola, D. Del Vescovo. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5):1243–1271, 2004.
- [374] M.A. Elshafei, F. Alraies. Modeling and analysis of smart piezoelectric beams using simple higher order shear deformation theory. *Smart Materials and Structures*, 22(3):035006, 2013.
- [375] F. Davi. Saint-Venant's problem for linear piezoelectric bodies. *Journal of Elasticity*, 43(3):227–245, 1996.
- [376] C.W. Lim, L.H. He. Exact solution of a compositionally graded piezoelectric layer under uniform stretch, bending and twisting. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(11):2479–2492, 2001.
- [377] Y. Benveniste. On the micromechanics of fibrous piezoelectric composites. *Mechanics of Materials*, 18(3):183–193, 1994.
- [378] H. Berger, S. Kari, U. Gabbert, R. Rodriguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Diaz, F.J. Sabina, G.A. Maugin. Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties. *Smart Materials and Structures*, 15(2):451, 2006.
- [379] Z. Li, D. Zhang, K. Wu. Cement-based 0-3 piezoelectric composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 85(2):305–313, 2002.
- [380] Z. Li, H. Gong, Y. Zhang. Fabrication and piezoelectricity of 0–3 cement based composite with nano-pzt powder. *Current Applied Physics*, 9(3):588–591, 2009.
- [381] R.D. Mindlin. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics. *Journal of Elasticity*, 2(4):217–282, 1972.
- [382] V.A. Eremeyev, G. Rosi, S. Naili. Comparison of anti-plane surface waves in strain-gradient materials and materials with surface stresses. *Math. Mech. Sol.*, 24(8):2526–2535, 2019.
- [383] J.L. Bleustein. A new surface wave in piezoelectric materials. *Applied Physics Letters*, 13(12):412–413, 1968.
- [384] Ю.В. Гуляев. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах. *Письма в ЖЭТФ*, 9(1):63–65, 1969.
- [385] A.V. Metrikine. On causality of the gradient elasticity models. *Journal of Sound and Vibration*, 297(3-5):727–742, 2006.
- [386] А.В. Бабайцев, А.Ю. Бурцев, Л.Н. Рабинский, Ю.О. Соляев. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции. *Труды МАИ*, (107):4–4, 2019.
- [387] В.В. Антипов, О.А. Прокудин, С.А. Лурье, Н. Ю. Серебренникова, Ю.О. Соляев, А.Н. Коновалов. Оценка межслоевой прочности алюмоплексостеклопластика по результатам испытаний образцов на трехточечный изгиб. *Вестник Московского авиационного института*, 26(2):229–237, 2019.
- [388] N.D. Sharma, R. Maranganti, P.A Sharma. On the possibility of piezoelectric nanocomposites without using piezoelectric materials. 55:2328–2350, 2007.