

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Афанасьев Никита Александрович

**БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕРМОАКУСТИКИ
И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОВЫХ
ПОТОКОВ С УПРУГИМИ ТЕЛАМИ**

Специальность 1.2.2. —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Головизнин Василий Михайлович

Официальные оппоненты: **Карабасов Сергей Александрович**,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник НИО-9 Центрального
аэрогидродинамического института имени про-
фессора Н.Е. Жуковского

Меньшов Игорь Станиславович,
доктор физико-математических наук, старший на-
учный сотрудник (уч. зв), главный научный со-
трудник отдела № 8 «Прикладные задачи механи-
ки сплошных сред» ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Титарев Владимир Александрович,
доктор физико-математических наук,
руководитель Отделения 2 «Моделирование слож-
ных физических и технических систем» ФИЦ ИУ
РАН, главный научный сотрудник

Защита состоится 15 ноября 2023 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертаци-
онного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени
М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение
52, факультет ВМК, ауд. 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библио-
теки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте
ИАС «ИСТИНА»: <http://istina.msu.ru/dissertations/596441529/>.

Автореферат разослан «____» октября 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.012.1,
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

Ильин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа на протяжении многих десятилетий остается одной из самых важных задач вычислительной гидродинамики. Методы высокой разрешающей способности Flux Corrected Transport (FCT) [1] и Total Variation Diminishing (TVD) [2] долгое время оставались одними из основных способов численного решения задач типа конвекции-диффузии. Разработка схем TVD или FCT была основана на нескольких важных идеях о том, как справляться с дисперсионными и диссипативными ошибками эйлеровых схем. Одной из таких идей, разработанной А. Хартенем, является введение антидиффузионных потоков в схему Годунова первого порядка с целью улучшить ее диссипативные свойства и сохранить ограниченность решения [3]. В качестве другого подхода можно модифицировать менее диссипативную, но дисперсионную схему (например, центральные конечные разности второго порядка) с помощью добавления в нее диффузионных потоков с нелинейными ограничителями (лимитерами) [4].

Для достижения более тонкого баланса между диссипативными и дисперсионными ошибками используются улучшения схем FCT и TVD более высоких порядков. Среди них можно отметить семейство методов WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), которые конструируются из конечных разностей высокого порядка и чей шаблон зависит непосредственно от решения [5]. Также внимания заслуживают разрывные методы Галеркина [6], которые, в отличие от методов конечных разностей, для повышения порядка не увеличивают шаблон схемы, а вводят дополнительные степени свободы внутри расчетной ячейки (например, вводятся новые переменные).

В течение последних двух десятилетий активное развитие получил новый подход к решению уравнений гиперболического типа — балансно-характеристические методы. Такие методы объединяют в себе консервативные методы конечного объема и характеристические методы. Обычно, вводятся два типа переменных: консервативные и потоковые. Для консервативных переменных записываются сеточные законы сохранения, а потоковые переменные вычисляются с помощью линейной экстраполяции инвариантов Римана с учетом направления характеристик. Таким образом, и консервативная, и характеристическая природа гиперболических уравнений передается в рам-

ках одного численного метода. Одной из основных и наиболее широко используемых балансно-характеристических схем является предложенная В.М. Головизниным и А.А. Самарским схема КАБАРЕ [7]. Данная схема имеет ряд важных свойств: она обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и времени, имеет минимальный вычислительный шаблон в одну пространственно-временную ячейку, минимальную численную вязкость, временную обратимость при отключенной монотонизации и относительно легко и идеально масштабируется на системы с распределенной памятью. Эти свойства позволяют эффективно использовать КАБАРЕ для решения нелинейных задач. С помощью нее уже были решены многие задачи для уравнений гиперболического типа, среди которых: линейные и нелинейные уравнения переноса, уравнения мелкой воды, задачи газовой и гидродинамики, аэроакустики [8], океанологии [9]. Высокая точность и широкая сфера применения балансно-характеристических схем позволяет отнести их к классу алгоритмов вычислительной гидродинамики нового поколения [10].

Несмотря на последние успехи балансно-характеристических методов в решении задач вычислительной гидродинамики, все еще остается много направлений CFD (Computational Fluid Dynamics), к которым эти схемы до сих пор не были применены. Кроме того, некоторых улучшений требует и базовый алгоритм схемы (например, обработка звуковых точек, улучшение диссипативных и дисперсионных свойств, обобщение на подвижные сетки). В рамках данной работы схема КАБАРЕ была впервые применена для решения задач вибрационного горения (термоакустической неустойчивости) и задач о взаимодействии поток жидкости и газа с упругими телами (задачи сопряженной гидроупругости или FSI — Fluid-Structure Interaction). Для этого для схемы КАБАРЕ был построен обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек, построено дисперсионное улучшение схемы, а также обобщение на случай подвижных расчетных сеток для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных.

При проектировании газовых турбин нового поколения в первую очередь преследуются две цели — повышение их энергетической эффективности и снижение выбросов NO_x (закиси азота). Большинство газовых турбин, производимых сегодня, имеют камеры сгорания класса DLE (Dry Low Emission) для соответствия нормам выбросов. Такие камеры работают в основном на

предварительно перемешанных бедных смесях, в которых условия для развития термоакустической неустойчивости возникают гораздо чаще, чем в обычных камерах сгорания. Термоакустическая неустойчивость (вибрационное горение) является крайне нежелательным явлением, обусловленным взаимодействием акустического поля с процессом горения. Это взаимодействие может привести к самоподдерживающимся колебаниям большой амплитуды, которые сокращают эксплуатационный ресурс изделия и могут вызвать повреждение газовой турбины. Задача прогнозирования термоакустической неустойчивости на различных режимах работы газовой турбины на проектном уровне является крайне актуальной. Ее важность в будущем будет только возрастать в связи с неизбежным ужесточением норм на выбросы и повышением требований к экономичности. Использование схемы КАБАРЕ для моделирования вибрационного горения возможно благодаря ее бездиссипативности: неустойчивые гармоники не демпфируются схемной вязкостью и могут быть детектированы после их выделения из решения. Кроме того, в отличие от традиционно используемых сетевых моделей, при использовании предлагаемого метода нет необходимости в расчете матриц перехода и функций отклика пламени, автоматически учитываются нелинейные эффекты.

Численное моделирование процессов взаимодействия потоков жидкости и газа с деформируемыми объектами (задачи FSI) начало активно развиваться около 2 десятилетий назад, когда вычислительные мощности выпускаемых процессоров позволили решать такие задачи. Сложность этих задач обусловлена одновременным учетом двух физических процессов: течения сжимаемой или несжимаемой жидкости в областях сложной формы и деформации объектов, погруженных в течение. При этом оба процесса влияют друг на друга: как течение влияет на деформацию объектов, так и сами объекты влияют на течение. Основные методы решения задач сопряженной гидроупругости делятся на 2 класса: монолитные (или бесшовные) методы [11] и слабосвязанные (*loosely coupled*) методы [12]. В монолитных методах для решения систем уравнений, описывающих течение жидкости и деформацию тел, используются схемы одного типа, что позволяет естественным образом моделировать границу раздела между жидкостью и телами. Второй подход предполагает последовательное использование схем разных типов для описания течения жидкости и деформации тел, включающее этап «сшивания»

решения на подвижной границе. При этом для моделирования деформаций практически всегда используется метод конечных элементов (МКЭ), а для моделирования течения жидкости могут использоваться как методы конечного объема [13], так и метод частиц [14]. Распространено также и использование неконсервативных сеточно-характеристических методов [15].

Слабосвязанные методы являются более простыми с точки зрения реализации и отладки, но обладают рядом серьезных недостатков, связанных с обработкой границы между жидкостью и телами, которая может приводить к возникновению неустойчивости [16]. Монолитные методы позволяют получить физически более точное решение, так как обработка границы естественным образом входит в единый алгоритм расчета течения жидкости и деформации тела, но используются они редко в силу их сложности с точки зрения программирования. Стоит также отметить, что практически все используемые на данный момент монолитные методы принадлежат к классу МКЭ и являются неявными методами. Разработка робастного явного монолитного (бесшовного) метода и его эффективное масштабирование являются крайне актуальной задачей. Балансно-характеристическая схема КАБАРЕ по всем параметрам подходит для решения данной задачи.

Целью данной работы является математическое моделирование задач взаимодействия потоков жидкости и газа с упругими телами и вибрационного горения с помощью модифицированной балансно-характеристической схемы КАБАРЕ с добавлением нового алгоритма обработки звуковых точек, введением антидисперсионных поправок и обобщением схемы на подвижные сетки для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать проблему обработки звуковых точек в балансно-характеристических методах. Разработать на основе характеристического подхода обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек для систем гиперболических уравнений с аналитическими или приближенными выражениями для инвариантов Римана. Провести вычислительные эксперименты для трансзвуковых течений, описываемых уравнениями мелкой воды.

2. Изучить диссипативные и дисперсионные свойства стандартной схемы КАБАРЕ и схемы КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для одномерного уравнения переноса. Разработать схему КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных и нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Провести вычислительные эксперименты на линейных и нелинейных системах уравнений.
3. Предложить квазиодномерные модели акустических трактов и модели горения, позволяющие воспроизвести эффект термоакустической неустойчивости. Разработать балансно-характеристический метод для моделирования термоакустической неустойчивости в акустических трактах. Провести математическое моделирование задачи о трубе Рийке и провести сравнение с результатами по сетевой модели OSCILOS.
4. Рассмотреть двумерные уравнения газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и уравнения динамической упругости в лагранжевых переменных. Разработать балансно-характеристический метод решения этих уравнений с обратимым по времени алгоритмом передвижения узлов сетки и бесшовной обработкой границы между газом и упругим телом. Провести вычислительные эксперименты на одномерных и двумерных задачах взаимодействия упругих тел, упругих тел и газа, а также на задачах со свободной границей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Локально-неявный обратимый по времени характеристический метод обработки звуковых точек для решения систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, для которых используются аналитические или приближенные выражения для инвариантов Римана.
2. Явный балансно-характеристический метод с улучшенными по сравнению со схемой КАБАРЕ дисперсионными свойствами для решения систем линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа.

3. Квазиодномерная математическая модель для описания процессов развития термоакустической неустойчивости с учетом различных моделей горения, явный балансно-характеристический метод для решения уравнений данной модели и его сравнение с классическими методами термоакустических цепей.
4. Бесшовный явный балансно-характеристический метод в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для уравнений идеального газа и в лагранжевых переменных для уравнений динамической упругости для решения задач сопряженной гидроупругости.
5. Комплекс программ для моделирования задач термоакустики и взаимодействия газовых потоков с упругими телами с использованием модифицированных балансно-характеристических методов. Результаты численных экспериментов, подтверждающие возможность моделирования трансзвуковых течений и наличие улучшенных дисперсионных свойств. Результаты математического моделирования возникновения термоакустической неустойчивости в трубе Рийке. Результаты численных экспериментов, подтверждающие возможность качественного и устойчивого моделирования задач взаимодействия газовых потоков с упругими телами на подвижных четырехугольных сетках.

Научная новизна:

1. Впервые предложен локально-явный алгоритм обработки звуковых точек второго порядка для балансно-характеристических методов для расчета трансзвуковых течений и доказана его обратимость по времени.
2. Впервые предложено дисперсионное улучшение схемы КАБАРЕ для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа, позволяющее повысить точность переноса всех инвариантов Римана системы.
3. Впервые построена балансно-характеристическая схема КАБАРЕ с учетом моделей горения с запаздыванием и использована для моделирования процессов развития термоакустической неустойчивости в акустических трактах с плоскими областями горения.

4. Впервые построена схема КАБАРЕ для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных с обратимым по времени алгоритмом передвижения узлов сетки и применена для моделирования задач сопряженной гидроупругости.

Практическая значимость работы заключается в возможности дальнейшего использования разработанных балансно-характеристических методов для решения различных дозвуковых и сверхзвуковых задач аэроакустики, проектировании газовых турбин нового поколения и задач атомной энергетики, связанных с обтеканием деформируемых элементов атомных реакторов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается достаточным количеством проведенных тестовых и модельных расчетов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2019» (Москва, Россия, 15-25 апреля 2019).
2. IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19) (Москва, Россия, 19-21 июня 2019).
3. Международная конференция «Многомасштабные Методы и Высокопроизводительные Научные Вычисления» (Сочи, Россия, 8-13 сентября 2020).
4. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2020» (Москва, Россия, 21 октября - 2 ноября 2020).
5. Научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, Россия, 26-31 октября 2020).
6. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, Россия, 20-29 апреля 2021).
7. XIX Всероссийская научная конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» (Пос. Дюрсо, Краснодарский край, Россия, 13-18 сентября 2021).

8. VIII Всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (Геленджик, Краснодарский край, Россия, 20-25 сентября 2021).
9. Научная конференция «Тихоновские чтения 2021» (Москва, Россия, 25-30 октября 2021).
10. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2022» (Москва, Россия, 14-22 апреля 2022).
11. V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'22) (Москва, Россия, 27-30 июня 2022).
12. Научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством д.ф.-м.н., проф. В.М. Головизнина. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях, 6 из которых изданы в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 182 страницы с 54 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 124 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Цель первой главы состоит в том, чтобы познакомить читателя с балансно-характеристическими методами для решения уравнений в частных производных гиперболического типа и обозначить их основные проблемные места. В главе вводятся основные определения для одномерных и многомерных гиперболических систем. Приводится схема КАБАРЕ для одномерного линейного уравнения переноса в ее изначальном трехслойном виде (см. шаблон на рис. 1а)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0,$$

и ее основные свойства: второй порядок аппроксимации по времени и пространству, бездиссипативность (обратимость по времени), устойчивость при числе Куранта $CFL \in [0,1]$, аномальность дисперсии при $CFL \in [0,0.5)$. Обсуждаются проблемы ее обобщения на нелинейный случай.

Затем приводится трехфазный вариант схемы КАБАРЕ, использующий консервативные переменные в центрах расчетных ячеек и потоковые переменные в узлах (см. шаблон на рис. 1б):

$$\begin{aligned} \frac{u_c^{n+1/2} - u_c^n}{\tau_n/2} + c \frac{u_R^n - u_L^n}{h_c} &= 0, \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad \text{если } c > 0, \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n, \quad \text{если } c < 0, \\ \frac{u_c^{n+1} - u_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + c \frac{u_R^{n+1} - u_L^{n+1}}{h_c} &= 0. \end{aligned}$$

Данный вид схемы эквивалентен трехслойному и обладает теми же свойствами. Кроме того, при $CFL \in [0,0.5)$ схема может быть сделана монотонной при введении нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума. Первое и четвертое уравнение схемы называются первой и третьей консервативной фазой, соответственно, так как эти уравнения аппроксимируют закон сохранения переносимой величины. Второе и третье уравнение называются характеристической фазой, и аппроксимируют перенос инварианта Римана по характеристикам уравнения.

Трехфазная схема последовательно обобщается сначала на системы одномерных нелинейных уравнений гиперболического типа, а затем и на мно-

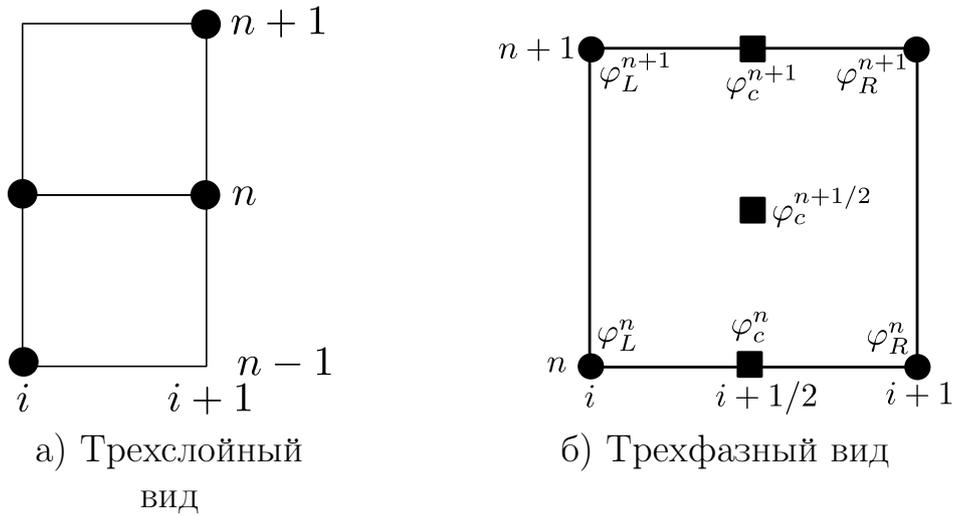


Рис. 1 — Шаблон схемы КАБАРЕ

гомерные нелинейные системы на неортогональных эйлеровых сетках. Обсуждаются основные проблемы, связанные с использованием схемы: необходимость введения отдельного алгоритма обработки звуковых точек для расчетов трансзвуковых течений, плохие дисперсионные свойства схемы при малых числах Куранта, ограниченность применения схемы только к задачам на фиксированных сетках.

Вторая глава посвящена решению проблемы обработки звуковых точек (точек, в которые приходит либо недостаточное, либо избыточное количество характеристик с инвариантами Римана) при моделировании трансзвуковых течений. На примере одномерных уравнений мелкой воды рассматриваются стандартные для схемы КАБАРЕ обратимые и необратимые по времени SP-алгоритмы (Sonic Point), использование которых приводит к возникновению нефизичных ударных волн разрежения на трансзвуковых волнах разрежения. Для решения данной проблемы предлагается локально-неявный обратимый по времени характеристический алгоритм переноса инвариантов Римана в окрестности звуковой точки второго порядка аппроксимации. Алгоритм строится с помощью неявного опускания характеристики из звуковой точки (x_i, t_{n+1}) на полуцелый временной слой и интерполяции инварианта Римана R_k по трем значениям $(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2}$, $(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2}$ и $(R_k)_i^n$. Шаблон этого SP-алгоритма приводится на рис. 2.

Так, для инварианта $R_1 = u + 2c$, где u — скорость вертикального слоя воды, c — скорость звука, получается следующее локальное неявное уравне-

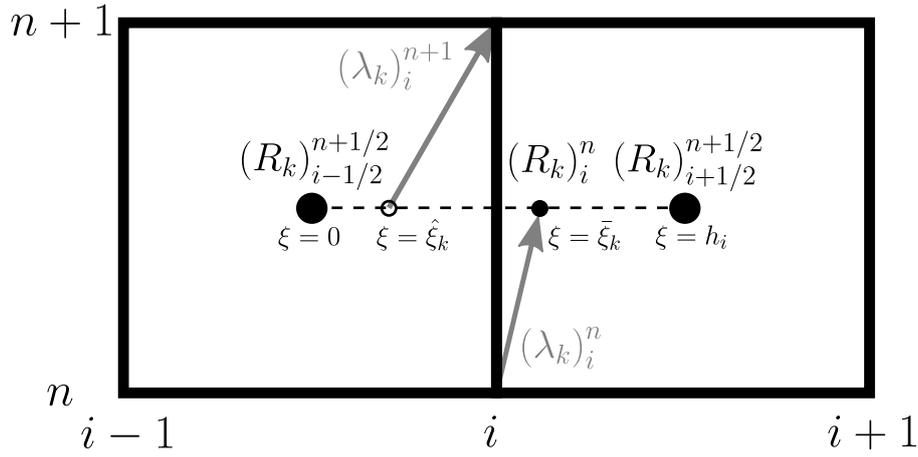


Рис. 2 — Шаблон локально-явного алгоритма обработки звуковых точек

ние относительно u_i^{n+1} и c_i^{n+1} :

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} + 2c_i^{n+1} &= \\
&= \tau_n (R_1)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} + c_i^{n+1} + (\lambda_1)_i^n)}{4h_i \bar{\xi}_1} - \\
&- \tau_n (R_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} + c_i^{n+1} + (\lambda_1)_i^n)}{4h_i (h_i - \bar{\xi}_1)} + \\
&+ (R_1)_i^n \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}])}{4\bar{\xi}_1 (h_i - \bar{\xi}_1)},
\end{aligned}$$

где $\lambda_1 = u + c$ — собственное значение, соответствующее инварианту R_1 , $\bar{\xi}_1 = 0.5h_{i-1/2} - 0.5\tau_n(\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1}$. Данное уравнение замыкается либо с помощью аналогичного нелинейного уравнения для инварианта $R_2 = u - 2c$, либо с помощью явно вычисленного значения $(R_2)_i^{n+1}$ в зависимости от того, является ли данная точка звуковой для второго инварианта или нет. В итоге на каждой звуковой точке с помощью метода Ньютона решается либо одно квадратное уравнение, либо систему из двух уравнений второй степени. Так как количество звуковых точек на сетке достаточно мало по сравнению с количеством ячеек сетки, то вычислительная сложность алгоритма увеличивается незначительно. Временная обратимость предложенного SP-алгоритма доказывается отдельно и сформулирована в работе в виде леммы. Также приводится обобщение алгоритма на случай систем, для которых известны только приближенные выражения для инвариантов Римана.

Результаты по построенному SP-алгоритму сравниваются с результатами по предложенному ранее явному SP-алгоритму [17] и аналитическими

решениями на различных задачах Римана, включая трансзвуковые тесты Торо [18]. Проведенные расчеты показывают, что предложенный алгоритм позволяет получить качественные результаты для различных трансзвуковых задач, включая задачи с образованием сухого дна. Например, на рис. 3 приводятся результаты расчетов для задачи о распаде разрыва со следующими начальными условиями: $H_L = H_R = 1$, $u_L = -3$, $u_R = 3$ (тест Торо 5 [18, с. 120], образование сухого дна). Использование схемы КАБАРЕ с локально-неявным обратимым по времени SP-алгоритмом второго порядка аппроксимации позволяет сохранить в численном решении разрывы производных, имеющиеся в аналитическом решении.

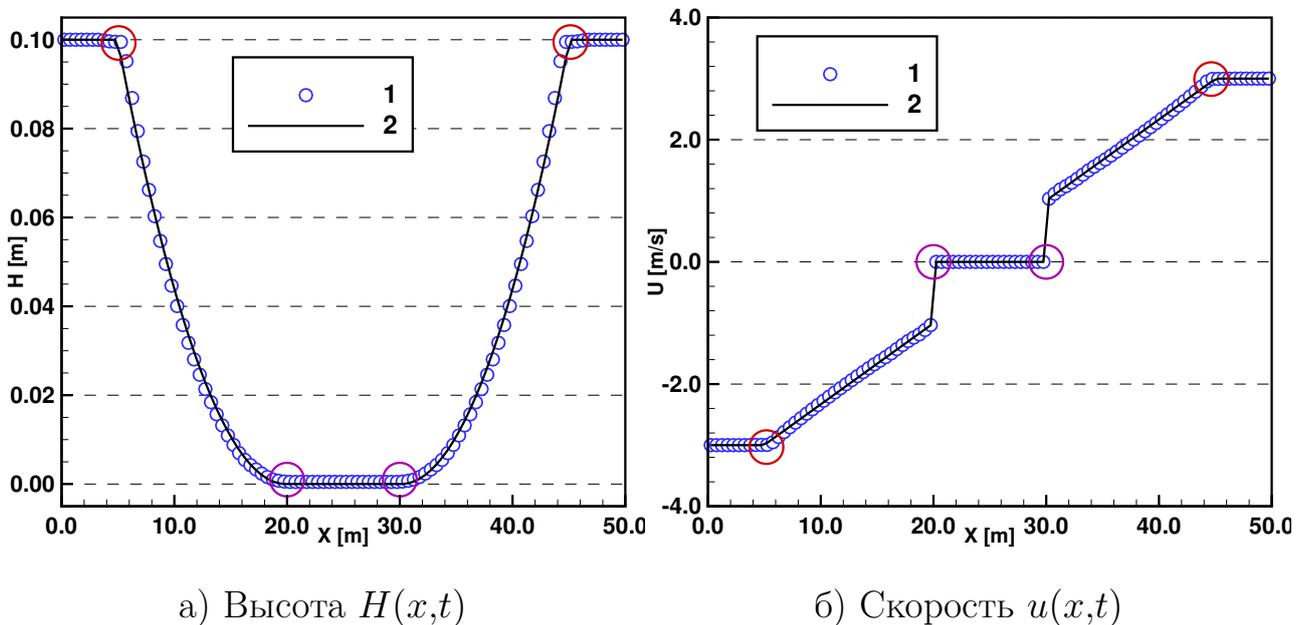


Рис. 3 — Результаты расчетов теста Торо 5

В третьей главе рассматривается задача улучшения дисперсионных свойств численного метода на примере схемы КАБАРЕ для систем линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа. Такое улучшение необходимо для решения различных акустических задач, на которых второго порядка аппроксимации схемы КАБАРЕ может быть недостаточно. Для трехслойной схемы для линейного уравнения переноса дисперсионное улучшение уже было построено В.М. Головизниным и А.А. Самарским с помощью дифференциального приближения исходной схемы, но не получило практического применения из-за невозможности обобщить метод на нелинейный случай. Построенная ими схема обладает четвертым порядком аппроксимации (на равномерных сетках) и расширенным вычислительным шаблоном в три про-

странственно-временные ячейки. Как и исходная трехслойная схема, она бездиссипативна и устойчива при $CFL \in [0,1]$, но при этом обладает меньшей численной дисперсией. Повышенный порядок достигается за счет добавления в уравнение схемы аппроксимации третьей производной переносимой величины с малым коэффициентом порядка $O(h^2, \tau^2)$. Для неравномерных сеток модифицированное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} + c \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\mu(c, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \right\rangle_{i+1/2}^n = 0, \\ & \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\mu(c, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \right\rangle_{i+1/2}^n = \frac{1}{h_{i+1/2}} \left[\frac{\mu_{i+1}(c, \tau)}{\bar{h}_{i+1}} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h_{i+3/2}} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_i(c, \tau)}{\bar{h}_i} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

где $\bar{h}_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$, $\mu_i(c, \tau) = ([h_{i+1/2}]^2 - 3c\tau\bar{h}_i + 2c^2\tau^2)/12$.

Для обобщения на нелинейный случай трехслойная улучшенная схема записывается в трехфазном виде. В итоге получается схема, эквивалентная трехслойной, в которой в первую и третью фазы добавляются аналогичные антидисперсионные поправки в виде аппроксимации третьей производной. Характеристическая фаза при этом остается неизменной. Переход к трехфазному виду в первую очередь позволяет построить схему с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных уравнений $\partial \mathbf{u} / \partial t + A \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{f}$. Если разбить линейную систему на несколько независимых уравнений переноса для инвариантов Римана, записать для каждой из них улучшенную схему в трехфазном виде и вернуться от инвариантов Римана к исходным неизвестным, то получается улучшенная схема для систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}_c^{n+1/2} - \mathbf{u}_c^n}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_R^n - \mathbf{u}_L^n}{h_c} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}) \right\rangle_c^n = \mathbf{f}_c^n, \\ & (R_k)_{i+1}^{n+1} = 2(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_k)_i^n, \text{ если } \lambda_m > 0, \\ & (R_k)_{i+1}^{n+1} = 2(R_k)_{i+3/2}^{n+1/2} - (R_k)_{i+2}^n, \text{ если } \lambda_m < 0, \\ & \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_R^{n+1} - \mathbf{u}_L^{n+1}}{h_c} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}) \right\rangle_c^{n+1} = \mathbf{f}_c^{n+1}, \end{aligned}$$

где L — матрица из левых собственных векторов матрицы A , Λ — диагональная матрица из собственных значений λ_k матрицы A , D — диагональная матрица из антидисперсионных коэффициентов $D_{ij} = \delta_{ij}\mu(|\lambda_j|, \tau_n)$. В таком виде антидисперсионные поправки естественным путем распространяются на нелинейный случай: матрицы L , Λ и D теперь переменные, и для схемы необходимо знать их потоковые значения на слоях по времени n и $n + 1$. Добавление антидисперсионных поправок в третью фазу не приводит к неясности схемы, так как в аппроксимации третьей производной участвуют только потоковые значения неизвестных и матриц, уже известные после характеристической фазы алгоритма. Формулы для матриц при этом диктуются выбором приближенных инвариантов Римана. Так, для уравнений мелкой воды при использовании линейных приближенных инвариантов получаются следующие выражения для матриц:

$$L = \begin{pmatrix} -g/c & 1 \\ g/c & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} c/2g & -c/2g \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u + c & 0 \\ 0 & u - c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \mu(|u + c|, \tau_n) & 0 \\ 0 & \mu(|u - c|, \tau_n) \end{pmatrix}.$$

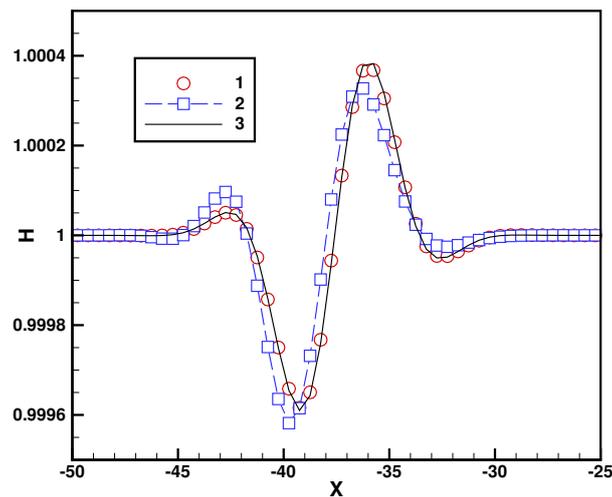


Рис. 4 — Перенос акустической модулированной волны: 1 — решение по стандартной схеме, 2 — решение по улучшенной схеме, 3 — аналитическое решение

Построенный улучшенный метод обладает четвертым порядком аппроксимации (на равномерных сетках) на линейных задачах, и вторым —

на нелинейных (из-за использования приближенных локальных инвариантов Римана). При этом его улучшенные дисперсионные свойства позволяют более точно моделировать распространение акустических колебаний, что показывается на серии расчетов для линейных систем и уравнений мелкой воды. Например, на рис. 4 приводятся результаты расчетов задачи о распространении модулированной акустической волны для уравнений мелкой воды. Дополнительно на последовательности сгущающихся сеток экспериментальным образом доказываемся сходимость метода с порядком, соответствующим порядку аппроксимации. Сравнение с альтернативной схемой КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами [19] показывает, что предложенный ранее метод улучшает дисперсионные характеристики только для наиболее быстро переносимого инварианта Римана системы, а новый метод — сразу для всех инвариантов.

Четвертая глава посвящена вопросам прямого математического моделирования процессов термоакустической неустойчивости (вибрационного горения). На основе уравнений динамики идеального газа вводится квазиодномерная модель акустического тракта с плоской областью горения (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 S + P S)}{\partial x} - P \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u S + P u S)}{\partial x} &= S(x, t) q, \end{aligned}$$

где ρ — плотность газа, u — продольная составляющая скорости, E — полная удельная энергия, S — площадь поперечного сечения канала, q — мощность теплового источника. Рассматриваются различные модели горения с запаздыванием $q = q(u, \tau_{del})$, включая классическую линейную $n - \tau$ модель и зависимость мощности тепла от квадратного корня из числа Рейнольдса.

Для рассматриваемой модели строится явный консервативный обратимый по времени балансно-характеристический метод с улучшенными дисперсионными свойствами. Учет запаздывания проводится с помощью интерполяции значения скорости в плоской области горения по предыдущим слоям по времени, что позволяет сохранить явность метода. Основная задача заключа-

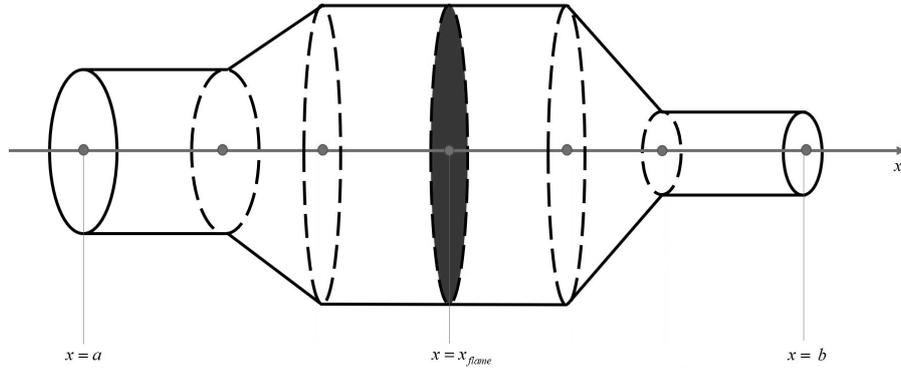


Рис. 5 — Осесимметричный канал с плоской областью горения

ется в том, чтобы по заданному профилю акустического тракта и средним параметрам входящего газового потока и выделения тепла определить частоту и инкремент роста нижней гармоники генерируемых в тракте акустических возмущений (которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми). Для этого подробно рассматриваются три аспекта прямой модели: задание начальных условий, граничных условий и выделение нижней гармоники возмущений.

Задание начальных условий по средним параметрам потока на входе в трубу осуществляется с помощью решения задачи Коши для стационарных уравнений модели. При этом в области горения решается система нелинейных уравнений для условий Гюгонио с учетом выделения тепла. Таким образом, для каждого узла сетки приближенно находятся начальные условия в виде стационарного течения, а для ячеек сетки берется полусумма значений в соседних узлах. Так как стационарные уравнения решаются приближенно, то такие начальные условия уже содержат в себе малые возмущения вообще говоря всех гармоник, поддерживаемых расчетной сеткой, что позволяет развиваться возможной термоакустической неустойчивости.

Граничные условия рассматриваются в виде заданных коэффициентов отражения акустических волн \hat{R}_{up} и \hat{R}_{down} :

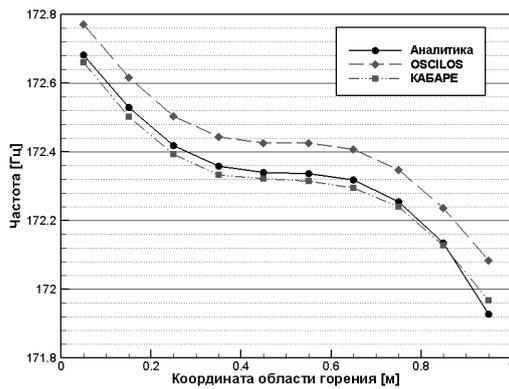
$$\hat{R}_{up} = \frac{Z_{up} + \bar{\rho}_{up}\bar{c}_{up}}{Z_{up} - \bar{\rho}_{up}\bar{c}_{up}}, \quad \hat{R}_{down} = \frac{Z_{down} - \bar{\rho}_{down}\bar{c}_{down}}{Z_{down} + \bar{\rho}_{down}\bar{c}_{down}}, \quad Z = \frac{p - \bar{p}}{u - \bar{u}},$$

где Z — акустический импеданс, c — скорость звука. Такие условия отличаются от классических граничных условий уравнений Эйлера и аналогичны условиям, использующимся в сетевых моделях. Эти уравнения аппроксимируются в самой левой и правой расчетных ячейках. Так, для левой ячейки

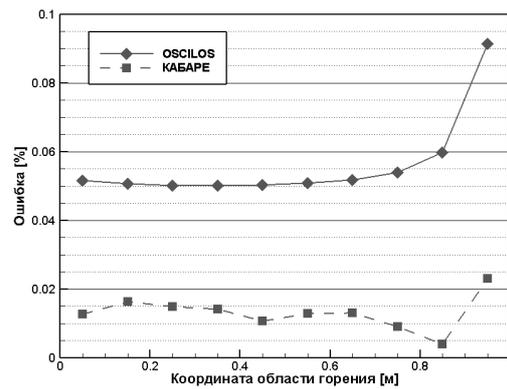
получается:

$$\bar{\rho}_{1/2} \bar{c}_{1/2} (\hat{R}_{up} + 1) (u_0^n - \bar{u}_{1/2}) - (\hat{R}_{up} - 1) (p_0^n - \bar{p}_{1/2}) = 0,$$

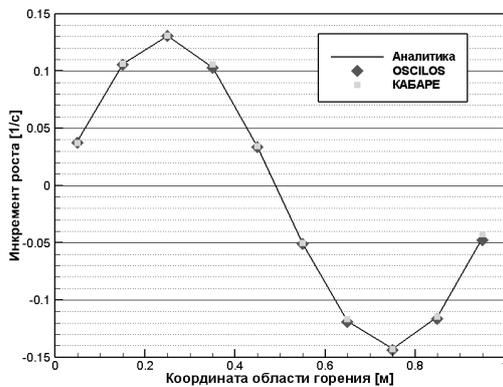
где $\bar{\rho}_{1/2}$, $\bar{u}_{1/2}$, $\bar{c}_{1/2}$ — средние значения плотности, скорости и скорости звука в ячейке, граничащей с входом в трубу. Дополнительно рассматриваются такие частные случаи граничных условий как: открытый вход/выход, жесткая стенка, резко сужающийся вход/выход.



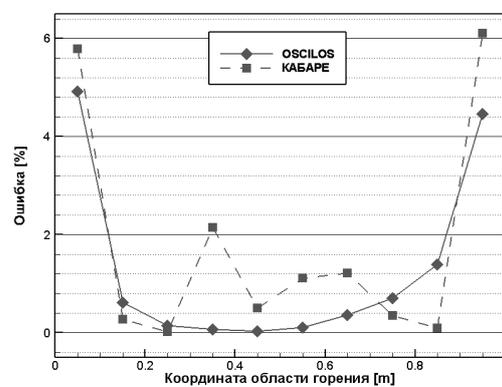
а) Нижние частоты колебаний



б) Относительные ошибки для нижних частот



в) Инкременты роста



г) Относительные ошибки для инкрементов роста

Рис. 6 — Нижние частоты трубы Рийке для различных положений источника тепла

Для выделения нижней гармонике возмущений для каждого шага по времени запоминаются значения приращения скорости в некоторой точке тракта, и затем полученная функция от времени представляется в виде:

$$u_{iv}(t) \approx B e^{i\tilde{\omega}t}, \quad \tilde{\omega} \in \mathbb{C},$$

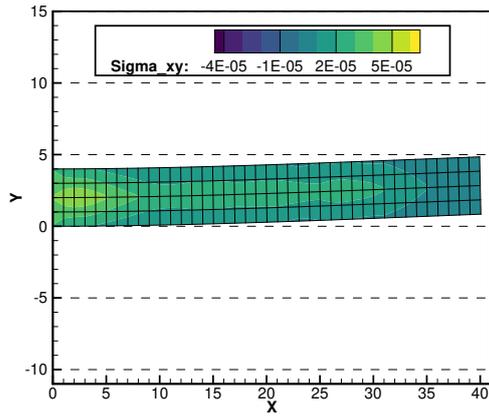
где комплексная частота $\tilde{\omega}$ определяется по методу наименьших квадратов. Искомые частота \tilde{f}_1 и инкремент роста $\tilde{\lambda}_1$ неустойчивой моды вычисляются следующим образом:

$$\tilde{f}_1 = \frac{\operatorname{Re}(\tilde{\omega})}{2\pi}, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\operatorname{Im}(\tilde{\omega})}{2\pi}.$$

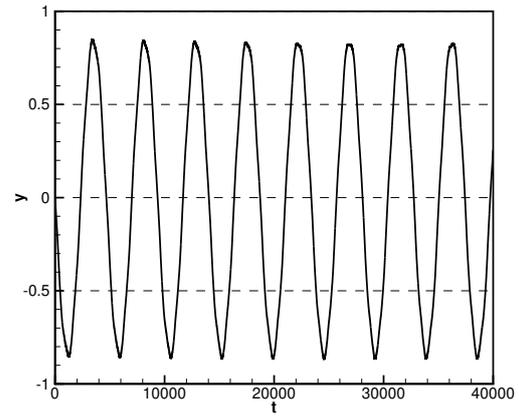
Предложенный метод применяется для моделирования процессов термоакустической неустойчивости в трубе Рийке. Его результаты сравниваются с результатами, полученными по открытому коду сетевой модели OSCILOS [20] на ряде задач с разными положениями области горения и разными перепадами температуры. Частота нижней гармоники определяется балансно-характеристическим методом на порядок точнее, чем пакетом OSCILOS (рис. 6), а инкремент роста — с тем же порядком. При этом вычислительная сложность всего алгоритма не больше, чем у OSCILOS.

В **пятой главе** рассматривается применение явных балансно-характеристических схем к решению задач сопряженной гидроупругости (Fluid-Structure Interaction). Для этого схема КАБАРЕ для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости обобщается на случай подвижных четырехугольных сеток в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. При этом уравнения упругости аппроксимируются в чисто лагранжевых переменных, в которых сетка передвигается вместе со всем упругим телом, а уравнения газовой динамики — в СЭЛ переменных, подстраивающихся под погруженное в газовый поток упругое тело или подвижную границу. Общий алгоритм схемы теперь состоит из нескольких последовательных пунктов:

1. вычисление шага по времени,
2. передвижение сетки на половину шага с помощью потоковых переменных на слое n ,
3. первая (консервативная) фаза для вычисления консервативных переменных на слое $n + 1/2$,
4. вторая (характеристическая) фаза для вычисления потоковых переменных на слое $n + 1$,
5. передвижение сетки на половину шага с помощью потоковых переменных на слое $n + 1$,
6. третья (консервативная) фаза для вычисления консервативных переменных на слое $n + 1$.



а) Крайнее верхнее положение балки



б) Зависимость y -координаты правого нижнего угла балки от времени t .

Рис. 7 — Поперечные колебания двумерной алюминиевой балки в безвоздушном пространстве

При этом перемещение узлов сетки, относящихся к упругому телу и газу, осуществляется по разным алгоритмам. Так, для узлов упругого тела скорости перемещения определяются с помощью интерполяции потоковых скоростей с окружающих узел ребер:

$$\mathbf{u}_{ij}^n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \mathbf{u}_{f_k,ij}^n, \quad \mathbf{u} = (u, v).$$

Так как сами потоковые скорости вычисляются с помощью обратимого по времени переноса инвариантов Римана по характеристикам, то и алгоритм передвижения узлов по интерполированным скоростям получается обратимым.

Узлы сетки, относящиеся к газу, подстраиваются под узлы на границе газ-тело таким образом, чтобы сетка в газе была относительно равномерной.

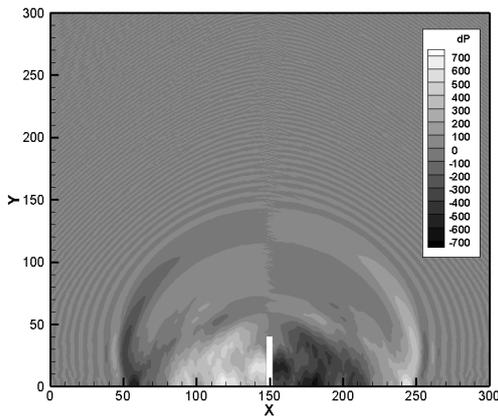
Для моделирования задач о неустойчивом передвижении границы дополнительно вводится искусственная сила поверхностного натяжения, добав-

ляющаяся в консервативные фазы для приграничного слоя ячеек:

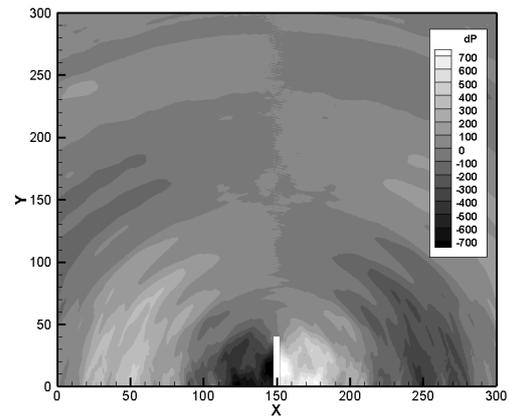
$$F_{i+1/2}^x = -\chi \left(\frac{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}}{l_{i+1}} - \frac{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}{l_i} \right),$$

$$F_{i+1/2}^y = -\chi \left(\frac{y_{i+3/2,0} - y_{i+1/2,0}}{l_{i+1}} - \frac{y_{i+1/2,0} - y_{i-1/2,0}}{l_i} \right),$$

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})^2 + (y_{i+1/2,0} - y_{i-1/2,0})^2}.$$



а) $t = 0.285$ с



б) $t = 0.95$ с

Рис. 8 — Профиль приращения давления в газе вокруг колеблющейся балки

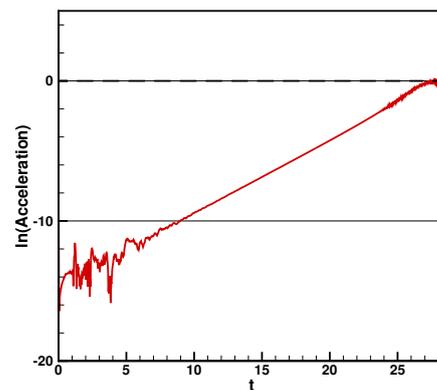
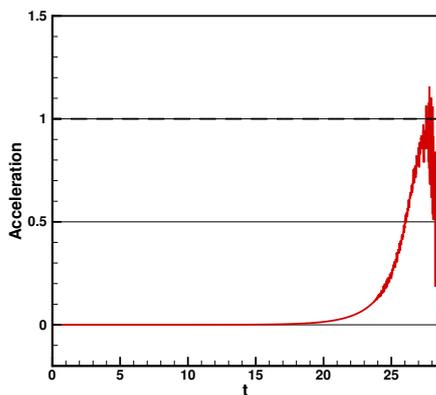


Рис. 9 — Ускорения узлов свободной поверхности при развитии неустойчивости Рэля-Тейлора

Приводятся результаты численных экспериментов для различных одномерных и двумерных задач, включающих: соударение упругих тел, распространение акустических колебаний из газа в упругое тело, воздушный удар об упругое тело, колебания упругой балки в безвоздушном (рис. 7) и воздушном пространстве (рис. 8), развитие неустойчивости Рэля-Тейлора на свободной

границе газа в поле сил тяжести (рис. 9). Предложенный метод дает качественно хорошие результаты, согласующиеся с теорией.

В **заклучении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построен локально-неявный обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек второго порядка для балансно-характеристических методов для расчета трансзвуковых течений. Численные исследования для уравнений мелкой воды показали, что предложенный алгоритм позволяет получить качественные результаты для различных трансзвуковых задач, включая задачи с образованием сухого дна.
2. Построено дисперсионное улучшение схемы КАБАРЕ для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа. Численные исследования показали, что в линейном случае улучшенная схема обладает четвертым порядком сходимости, а в нелинейном — вторым, и позволяет улучшить дисперсионные характеристики переноса сразу всех инвариантов Римана системы.
3. Построена балансно-характеристическая схема КАБАРЕ с учетом моделей горения с запаздыванием для задач вибрационного горения. Математическое моделирование показало, что предложенный метод позволяет находить частоту и инкременты роста неустойчивых гармоник акустических трактов с плоскими областями горения более точно, чем классические сетевые модели, и при этом обладает сравнимой вычислительной сложностью.
4. Построена схема КАБАРЕ для уравнений идеальной газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и для уравнений динамической упругости в лагранжевых переменных с обратимым по времени алгоритмом передвижения узлов сетки и бесшовным способом обработки границы между газом и телом для задач сопряженной гидроупругости. Численные исследования показали, что предложенный метод дает качественно хорошие результаты, согласующиеся с теорией как для устойчивого, так и неустойчивого передвижения свободных границ и интерфейсов.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- A.1 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М., Соловьев А. В.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — т. 22, № 1. — с. 67–76. [RSCI, impact factor 0.488]
- A.2 *Афанасьев Н. А., Майоров П. А.* Схема КАБАРЕ на подвижных сетках для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — т. 22, № 4. — с. 306–321. [RSCI, impact factor 0.488]
- A.3 Прямое моделирование термоакустической неустойчивости в газогенераторах по схеме КАБАРЕ / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, В. Н. Семенов и др. // Математическое моделирование. — 2021. — т. 33, № 2. — с. 3–19.
Direct simulation of thermoacoustic instability in gas generators using “CABARET” scheme / Afanasiev N. A., Goloviznin V. M., Semenov V. N. et al. // Math. Models Comput. Simul. — 2021. — Vol. 13, no. 5. — P. 820–830. [Scopus, impact factor 0.365]
- A.4 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Бесшовный балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия жидкости и газа с деформируемыми объектами // Математическое моделирование. — 2021. — т. 33, № 10. — с. 65–82.
Goloviznin V. M., Afanasiev N. A. Monolithic balance-characteristic method for solving problems of interaction of liquid and gas with deformable objects // Math. Models Comput. Simul. — 2022. — Vol. 14, no. 3. — P. 398–410. [Scopus, impact factor 0.365]
- A.5 *Afanasiev N., Goloviznin V.* A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations

// Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 434. — P. 110220.
[WoS, Q1, impact factor 4.1]

- А.6 Моделирование динамики жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле схемой КАБАРЕ / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Математические заметки СВФУ. — 2022. — т. 29, № 4. — с. 77–94. [Scopus, impact factor 0.17]

Иные публикации

- В.1 *Afanasiev N. A., Goloviznin V. M.* The time reversibility property in analysis of sound points in balance-characteristic difference methods // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1392. — P. 012028. [Scopus]
- В.2 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Схема КАБАРЕ для уравнений мелкой воды в случае трансзвуковых течений // Ломоносовские Чтения 2019. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2019. — с. 42–43.
- В.3 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А., Сипатов А. М.* Моделирование процессов термоакустической неустойчивости балансно-характеристическими методами // Тихоновские Чтения 2020. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — с. 63–63.
- В.4 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Двудомные разностные схемы и их применение для уравнений мелкой воды // Тихоновские Чтения 2020. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — с. 62–62.
- В.5 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Балансно-характеристический метод расчета трансзвуковых течений с учетом переноса локальных римановых инвариантов // Ломоносовские Чтения 2020. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — с. 52–53.
- В.6 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа // Ломоносовские Чтения 2021. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 60–61.

- В.7 *Афанасьев Н. А., Горбунова О. К.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для одномерных уравнений мелкой воды // Тихоновские Чтения 2021. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 34–34.
- В.8 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М.* Схема КАБАРЕ в лагранжевых переменных // Современные проблемы математического моделирования: сборник трудов XIX Всероссийской конференции-школы молодых исследователей. — Издательство Южного федерального университета, г. Таганрог, Россия, 2021. — с. 4–4.
- В.9 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Беспровные балансно-характеристические алгоритмы для одномерных задач взаимодействия упругих тел с жидкостью и газом // Ломоносовские Чтения 2021. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 59–60.
- В.10 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Балансно-характеристические схемы в лагранжевых переменных для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости // Тихоновские Чтения 2021. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 35–35.
- В.11 Балансно-характеристические разностные схемы в анализе термоакустической неустойчивости в камерах сгорания газовых турбин / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, С. С. Нестеров и др. // Труды ЦАГИ. — 2021. — т. 2807. — с. 148–149.
- В.12 *Афанасьев Н. А.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. — Издательский дом СВФУ, г. Якутск, Россия, 2022. — с. 48–48.
- В.13 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М.* Беспровный балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия жидкости и газа с деформируемыми объектами // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. — Издательский дом СВФУ, г. Якутск, Россия, 2022. — с. 18–19.
- В.14 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М.* Схема КАБАРЕ в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Ломоносовские Чтения 2022.

Список литературы

1. *Boris J. P., Book D. L., Hain K.* Flux-corrected transport: generalization of the method // *J. Comput. Phys.* — 1975. — Vol. 31. — P. 335–350.
2. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III / *A. Harten [et al.]* // *J. Comput. Phys.* — 1987. — Vol. 71. — P. 231–303.
3. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ.* — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68–77.
4. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, second ed. — Oxford : John Wiley & Sons, Ltd., 2007. — P. 696.
5. *Liu X.-D., Osher S., Chan T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // *J. Comput. Phys.* — 1994. — Vol. 115. — P. 200–212.
6. *Cockburn B., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2001. — Vol. 16. — P. 173–261.
7. *Головизнин В. М., Самарский А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // *Матем. моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 2. — С. 86–100.
8. *Karabasov S. A., Goloviznin V. M.* New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // *AIAA Journal.* — 2007. — Vol. 45, no. 12. — P. 2886–2871.
9. Validation of the Low Dissipation Computational Algorithm CABARET-MFSH for Multilayer Hydrostatic Flows with a Free Surface on the lock-release experiments / *V. Goloviznin [et al.]* // *Journal of Computational Physics.* — 2022. — Vol. 463. — P. 111239.

10. Головизнин В. М., Четверушкин Б. Н. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Журнал вычислительной математики и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 8. — С. 20–29.
11. A monolithic approach to fluid–structure interaction / C. Michler [et al.] // Computers and Fluids. — 2004. — Vol. 33. — P. 839–848.
12. Dettmer W. G., Peric D. On the coupling between fluid flow and mesh motion in the modeling of fluid–structure interaction // Comput. Mech. — 2008. — Vol. 43. — P. 81–90.
13. Lee H. M., Kwon O. J. Performance improvement of horizontal axis wind turbines by aerodynamic shape optimization including aeroelastic deformation // Renewable Energy. — 2020. — Vol. 147. — P. 2128–2140.
14. Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid-structure interactions / A. Zhang [и др.] // Journal of Hydrodynamics, Ser. B. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 187–216.
15. Petrov I. B. Application of the grid-characteristic method for mathematical modeling in dynamical problems of deformable solid mechanics // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, no. 6. — P. 1041–1048.
16. Bendiksen O. O. Nonunique solutions in transonic aeroelasticity // Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics. — Rome, Italy, 1997. — P. 425–435.
17. Головизнин В. М., Соловьев А. В., Исаков В. А. Аппроксимационный алгоритм обработки звуковых точек в схеме “кабаре” // Выч. мет. программирование. — 2016. — Т. 17, № 2. — С. 166–176.
18. Toro E. F. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. — John Wiley, Sons, 2001. — P. 326.
19. CABARET on rotating meshes / I. Solntsev [et al.] // Applied Math. and Computation. — 2023. — Vol. 446. — P. 127871.
20. Open Source Combustion Instability Low Order Simulator (OSCILOS) : tech. rep. / J. Li [et al.]. — 2017.