ФГБОУ ВО «АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

На правах рукописи

Сташ Айдамир Хазретович

ПОКАЗАТЕЛИ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Сергеев Игорь Николаевич

Москва – 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Исследование линейных нестационарных дифференциальных систем имеет не только самостоятельное значение, но и служит базой для изучения нелинейных систем по первому приближению. Линейные системы имеют многочисленные приложения, которые порождают ряд новых теоретических задач, требующих изучения колебательных свойств решений.

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений, важнейшими направлениями которой являются теория устойчивости и теория колебаний.

Теория устойчивости, созданная А.М. Ляпуновым (1892 г.), естественным образом связана, прежде всего, с характеристическими показателями Ляпунова решений дифференциальных систем, а также с введенными позже показателями Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающими за разнообразные асимптотические свойства решений.

Изучением различных свойств самых разных показателей решений систем занимались многие математики. Приведем список (далеко не полный) тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград [52, 53], Б.Ф. Былов [45, 46], В.М. Миллионщиков [132, 133, 134], Н.А. Изобов [81, 82, 84], А.В. Ильин [89, 91, 92], М.И. Рахимбердиев [154, 155], И.Н. Сергеев [162, 163], Е.К. Макаров [130, 131], Е.А. Барабанов [19, 20], С.Н. Попова [151, 152], А.С. Фурсов [200, 201], А.Н. Ветохин [49, 50], В.В. Быков [41, 43] и другие. Здесь упомянуты лишь по 2–3 работы каждого автора, а исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах [83, 87] и монографиях [47, 88].

Однако для полного описания реальных природных процессов важна информация не только о росте исследуемых функций, но и об их колебательных свойствах. В теории колебаний немалая роль отводится вопросам колеблемости решений дифференциальных уравнений, восходящим к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма (1837–41 гг.) и более поздним исследованиям А. Кнезера (1896–98 гг.).

Исследования по тематике колеблемости успешно продвигались усилиями многих математиков, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева [105, 106, 107], И.Т. Кигурадзе [99, 100, 102], Т.А. Чантурия [205, 207], А.Ю. Левина [114, 115, 116], Н.А. Изобова [85, 86], А.Д. Мышкиса [142], В.А. Козлова [223], И.В. Каменева [93, 94, 95], Дж.Д. Мирзова [135, 136], И.В. Асташову [13, 14, 15], С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова и Н.Х. Розова [61, 62, 63], В.В. Рогачева [156] и других (обширные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре [101] и монографии [16]). Заметим, что перечисленных авторов в основном интересовали вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения или системы хотя бы одного колеблющегося решения, а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено на получение коэффициентных признаков наличия или отсутствия колеблющихся решений.

Последнее время интерес к таким свойствам решений линейных нестационарных систем, как ограниченность, устойчивость, колеблемость и т.п., возрос в связи с задачами изучения автоколебаний и хаотических режимов, возникающих в различных электронных и лазерных устройствах. В связи с этим, особенно интересной и актуальной представляется задача об определении аналогов показателей Ляпунова, отвечающих за колеблемость решений дифференциальных уравнений и систем.

Характеристики колеблемости и вращаемости. И.Н. Сергеевым были введены характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений, которые явились весьма эффективным средством для изучения колебательных свойств. Так, в работе [165] он впервые ввел понятие *характеристической частоты* $\nu(y)$ скалярной функции y, позволившей численно измерять колеблемость решений уравнений на полупрямой.

Частоту решения можно интерпретировать как среднее (по всей полупрямой) значение числа нулей решения на полуинтервале длины π. Оказалось, что на решениях линейных однородных уравнений с ограниченными коэффициентами она принимает лишь конечные значения [165] и позволяет естественным образом классифицировать колеблющиеся решения, ставя в соответствие, к примеру, функции $y(t) = \sin \omega t$ ее частоту $\nu(y) = \omega$ (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции x с нормой $|x(t)| = \exp \lambda t$ ее показатель $\chi(x) = \lambda$).

В работах [174, 177] введены и изучены различные модификации характеристических частот, но уже для вектор-функций x, в частности, так называемые *полные* $\sigma(x)$ и *векторные* $\zeta(x)$ частоты. Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей проекции функции x на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается векторная частота $\sigma(x)$, а если после — то полная частота $\zeta(x)$. Таким образом, полная и векторная частоты являются обобщениями понятия характеристической частоты на случай решений систем. Для решения y линейного уравнения n-го порядка эти характеристики определяются как величины $\sigma(x)$ и $\zeta(x)$ соответственно, где $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$. Позже в работе [180] были определены и изучены более сложные характеристики – показатели вращаемости для решений дифференциальных уравнений и систем.

Все показатели колеблемости, называемые в работе [185] *линейными* для решений нелинейных систем, оказались применимы лишь к решениям, определённым гарантированно на всей положительной полуоси времени, тогда как для решений нелинейных систем такой гарантии дать нельзя. В работе [185] были предприняты попытки распространения определения этих показателей на системы, решения которых не обязательно продолжаемы на всю полуось, а именно, им были определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели.

Изучением характеристических частот, показателей колеблемости и вращаемости занимались также В.В. Быков [40], Е.А. Барабанов и А.С. Войделевич [21, 22, 23], А.Ю. Горицкий [65], М.В. Смоленцев [188, 190, 191], Д.С. Бурлаков [34, 36, 37], В.В. Миценко [138, 140], Е.М. Шишлянников [208, 211] и другие. В этих работах изучались спектры (множества значений на всех ненулевых решениях) указанных характеристик для различных типов уравнений и систем, связи между значениями показателей и коэффициентами уравнений и систем, а также связи этих характеристик друг с другом.

Некоторые истоки и библиография. Введенные И.Н. Сергеевым характеристики колеблемости имеют свою предысторию (см. [182]). Для их возникновения потребовалось содержательно развить понятие *колеблемости скалярной функции* на полупрямой, преодолев две трудности:

а) указать для бесконечного набора нулей естественную *численную* характеристику;

б) перейти от скалярной функции к *векторной.*

Предлагаем обзор некоторых работ в указанном направлении.

В 1963 г. в работе [147] В.В. Немыцкий, по всей видимости, впервые изучает колеблемость вектор-функции: он рассматривает ее проекции на две непересекающиеся прямые и требует *колеблемости* каждой из этих проекций. Другими словами, *колеблющаяся по Немыцкому* вектор-функция, проектируясь на специально подобранную плоскость, геометрически либо вращается в ней в каком-то направлении, либо колеблется в некотором ее полном секторе, либо обладает обоими свойствами сразу.

Далее, согласно определению из работы [44] Я.В. Быкова, опубликованной в 1965 г., у *сильно колеблющейся* (*осцилляторной*) вектор-функции оказываются колеблющимися теперь сразу все ее координаты в некотором фиксированном базисе в $\mathbb{R}^n$, а у *слабо колеблющейся* — хотя бы одна координата. Такое определение колеблемости страдало явной зависимостью от выбора базиса.

В 1971 г. Ю.И. Домшлак [73] делает новый шаг в определении колеблемости вектор-функции: у него сильно колеблющаяся функция имеет колеблющуюся проекцию на любую прямую в $\mathbb{R}^n$, а слабо колеблющаяся — хотя бы на одну из прямых. Эти свойства уже не зависят от выбора базиса.

В этом ряду нельзя не упомянуть работу Е.Л. Тонкова [196] (1973 г.), в которой он, для нужд теории регулирования, вводит понятие *неосцилляции* линейной однородной системы *относительно гиперплоскости* с заданной нормалью $c \in \mathbb{R}^n_*$. С помощью функционала $\sigma(x) \equiv \langle c, x \rangle$ он изучает не только обычную колеблемость решений системы относительно этой гиперплоскости, но и такую, при которой на решении $x(t)$ функция $\sigma(x(t))$ регулярно принимает отделенные от нуля значения разных знаков.

Мотивацией к рассмотрению характеристик колеблемости решений дифференциальных уравнений и систем послужило следующее обстоятельство (см. [21]). Как известно, показатели Ляпунова и Перрона линейной дифференциальной системы совпадают в автономном случае с вещественными частями собственных значений матрицы коэффициентов и поэтому могут рассматриваться для систем с переменными коэффициентами как аналоги вещественных частей собственных значений (показатели Перрона после регуляризации по Миллионщикову [134, 165]). Аналогами же мнимых частей собственных значений для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами являются характеристические частоты после регуляризации по Миллионщикову, а для линейных дифференциальных систем — полные и векторные частоты [34, 174, 256]. Поэтому введением (в дополнение к показателям Ляпунова и Перрона) этих показателей колеблемости достигается естественная и необходимая полнота рассмотрения линейных дифференциальных систем, характеризуя в определенном смысле их свойства решений на бесконечности.

Изменение названий асимптотических характеристик. В 2015 г. в статье [180] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к тому моменту характеристики ляпуновского типа (см. также [181, 182]), что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости, а показатели вращаемости и вращения — в сильные и слабые показатели ориентированной вращаемости.

Характеристические частоты (или скалярные частоты) в работах [21, 56] стали называться частотами Сергеева.

Степень разработанности темы исследования. Решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности не имеют вовсе нулей, а значит, все характеристики колеблемости равны нулю.

1. Для систем с постоянными или периодическими коэффициентами (и вообще, для правильных систем [47, глава VII, §22]) спектры показателей Ляпунова и Перрона одинаковы: они в автономном случае совпадают с множеством действительных частей собственных значений ее матрицы, а в периодическом случае естественным образом выражаются через множество мультипликаторов системы [71, глава III, §3, 15]. В работе [258] указаны случаи существования и отсутствия взаимосвязи частоты нулей уравнения Хилла с его мультипликаторами.

Спектры показателей колеблемости *нулей* линейных однородных автономных дифференциальных систем были полностью изучены:

- спектры сильных показателей колеблемости *нулей* (как и набор регуляризованных по Миллионщикову их значений) любой *автономной* системы совпадают с множеством *модулей мнимых частей собственных значений* задающего ее оператора [174];

- сильные и слабые показатели колеблемости *нулей* любого решения автономной системы совпадают между собой [34].

В связи с этим возникает естественный вопрос *об описании соотношений между всеми показателями колеблемости на множестве решений линейных однородных автономных дифференциальных систем, а также об их возможных спектрах и главных значениях для любой автономной системы.*

Полный ответ на этот вопрос дает теорема 3.1 (ниже).

2. Спектры всех характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка были полностью исследованы:

- для любого *уравнения второго порядка* спектры всех характеристических частот и показателей колеблемости состоят из одного числа, причем все верхние (как и все нижние) характеристические частоты и показатели колеблемости совпадают между собой [165, 174];
- существует решение некоторого уравнения второго порядка, все верхние характеристики колеблемости которого не совпадают с нижними [174, 175];
- на множестве решений уравнения Хилла все верхние характеристики колеблемости совпадают с нижними [258].

Для линейных однородных дифференциальных уравнений более второго порядка о строении спектров характеристических частот и показателей колеблемости известно следующее:

- главные значения характеристических частот уравнений с постоянными коэффициентами совпадают с множеством *модулей мнимых частей корней* соответствующего характеристического многочлена [165];
- существует автономное уравнение четвертого порядка [65] и периодическое уравнение третьего порядка [191], спектры верхних характеристических частот которого содержат невырожденный отрезок;
- существует *периодическое* уравнение третьего порядка, спектры характеристических частот и показателей колеблемости которого содержат одно и то же наперед заданное количество различных *существенных* значений (т.е. каждое значение принимается на решениях, множество начальных значений которых имеет положительную меру) [260];
- построено дифференциальное уравнение третьего порядка, спектры всех характеристических частот и показателей колеблемости которого содержат *счетное множество различных существенных значений* [269];
- доказано существование дифференциального уравнения третьего порядка с *континуальными спектрами* показателей колеблемости [270];

- спектры верхних характеристических частот уравнения порядка выше двух являются *суслинскими множествами* неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой [21, 22, 40]; также в предположении, что спектры содержат точку нуль, установлено обращение этого утверждения [21, 22].

Заметим, что *спектр* показателей Ляпунова n-мерной линейной системы состоит ровно из n чисел (с учетом их кратности [47, глава I, §2]). В то же время, спектр показателей Перрона такой системы, вообще говоря, не является конечным и, более того [18], может совпадать с любым наперед заданным ограниченным и замкнутым сверху измеримым (суслинским) подмножеством числовой прямой.

Возникает естественный вопрос: *может ли спектр какого-либо показателя колеблемости дифференциального уравнения порядка выше второго быть произвольным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль*?

Положительный ответ на этот вопрос содержится в теореме 2.7 (ниже).

3. В работе [162] было введено свойство *остаточности* (т. е. инвариантности относительно изменения решения на любом конечном отрезке) для асимптотических характеристик решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем, призванное облегчить их исследование. Первоначально ожидалось, что все асимптотические характеристики окажутся остаточными:

- из определений характеристического, нижнего, экспоненциального, центрального и генерального показателей (см. [47, 88]) следует их остаточность на множестве решений дифференциальных систем;
- на множестве решений дифференциальных уравнений все характеристические частоты являются *остаточными* [165];
- на множестве решений уравнений и систем все слабые показатели колеблемости гиперкорней являются *остаточными*, поскольку они совпадают с соответствующими слабыми показателями блуждаемости [177];
- на множестве решений уравнений второго порядка все сильные показатели колеблемости являются *остаточными*, так как они совпадают с соответствующими характеристическими частотами [171, 174].

В связи с этим возникает естественный вопрос: *будет ли остаточным* *какой-либо из сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных уравнений порядка выше второго*?

Теорема 2.8 (ниже) дает отрицательный ответ на этот вопрос.

4. Спектры показателей колеблемости отдельных классов неавтономных линейных однородных дифференциальных систем совершенно разнообразны:

- существует двумерная система *с не более чем счетными множествами существенных значений* показателей колеблемости [266];
- для любого $n \geqslant 2$ существует n-мерная система с *континуальными спектрами* показателей колеблемости [265];
- существует двумерная система, на каждом решении которой все показатели колеблемости и блуждаемости равны, а их общий спектр заполняет невырожденный отрезок [211];
- спектры показателей колеблемости и ориентированной вращаемости треугольных систем состоят из одного нулевого значения [262].

Любое из *крайних* (т. е. наименьшее и наибольшее) значений спектра какого-либо показателя можно рассматривать как функционал, определенный на линейном топологическом пространстве n-мерных систем с *равномерной* на $\mathbb{R}_+$ топологией.

Сужения крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство уравнений второго порядка непрерывны [171] и, будучи *остаточными* [162], *инвариантны* относительно *бесконечно малых* (т. е. исчезающих на бесконечности) возмущений. Более того, определены [258] необходимое и достаточное условия инвариантности частоты уравнения Хилла относительно равномерно малых возмущений уравнения.

Из результатов работ [34, 174, 256] в силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов следует, что сужение любого из крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство автономных систем есть непрерывная функция.

В работах [184, 271] на множестве двумерных систем были найдены не только точки разрыва, но и точки неинвариантности крайних показателей колеблемости относительно бесконечно малых возмущений.

В 1930 г. Перрон построил [237] пример, показывающий, что при $n \geqslant 2$ каждый из характеристических показателей Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве $\mathcal{M}^n$, разрывен и неинвариантен относительно бесконечно малых возмущений. Из свойства остаточности указанных функционалов следует [162], что ни один из них не является даже полунепрерывным.

Таким образом, оставался открытым естественный вопрос: *можно ли для любого $n > 2$ в пространстве n-мерных систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка указать точки, в которых сразу все крайние показатели колеблемости терпят разрыв и не инвариантны относительно бесконечно малых возмущений*?

В теореме 4.1 (ниже) содержится положительный ответ на этот вопрос.

5. Перрон открыл эффект инверсии знака показателей Ляпунова для решений специальных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений и их первых приближений [238]. Им была построена нелинейная система, первое приближение которой имело отрицательные характеристические показатели, а почти все ее решения обладали положительными характеристическими показателями. Различные модификации контрпримера Перрона изучались многими авторами [25, 89, 90, 91, 117].

В работе [92] доказано существование такой двумерной возмущённой дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели, и возмущением также произвольно заданного высшего порядка малости в окрестности начала координат, что все её нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и всё множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством положительной полуоси.

В [186] перечислены различные реализуемые соотношения между линейными, сферическими, радиальными и шаровыми разновидностями этих показателей, а также их взаимосвязи с аналогичными показателями системы первого приближения, в частности, одноэлементные спектры линейных показателей колеблемости гиперкорней двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения могут быть совершенно произвольными.

В связи с последним результатом возникает естественный вопрос *о возможности различия не только между самими спектрами показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения, но даже и между мощностями этих спектров*.

Яркий положительный ответ на этот вопрос дает теорема 3.8 (ниже).

Формулировки основных результатов. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (не обязательно ограниченными — будем отождествлять их с соответствующими системами). Подмножества множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из *ограниченных* и *автономных* систем, обозначим соответственно через $\mathcal{M}^n$ и $\mathcal{C}^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ (далее звездочкой снизу помечаем любое линейное пространство с выколотым нулем) и положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \equiv \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

В множестве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ естественным образом выделим также подмножество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ систем, имеющих матрицы вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

и отвечающих *линейным однородным дифференциальным уравнениям n-го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

каждое из которых задается своей непрерывной вектор-функцией

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$$

и, преобразуясь в систему A стандартным переходом [198] от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}),$$

отождествляется с этой системой. Множество всех ненулевых решений $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \equiv \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение I [164, 175, 177]. Для заданного момента $t > 0$ и скалярной функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения для количеств специфических точек на промежутке $(0, t]$:

- $\nu^-(y, t)$ — число точек *строгой смены знака* функции y, т. е. таких, что в любой окрестности каждой из них она принимает как положительные, так и отрицательные значения;

- $\nu^{\sim}(y,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции y, т. е. таких, что в любой проколотой окрестности каждой из них она принимает как неположительные, так и неотрицательные значения;

- $\nu^{0}(y,t)$ — число *нулей* функции y;

- $\nu^{+}(y,t)$ — число *корней* функции y, т. е. ее нулей с учетом их *кратности*;

- $\nu^{*}(y,t)$ — число *гиперкорней* функции y: при его подсчете каждый ее некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз,

а для вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ и вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$, взяв в качестве $y(\cdot)$ скалярное произведение $\langle x(\cdot), m\rangle$, обозначим

$$\nu^{\alpha}(x,m,t) \equiv \nu^{\alpha}(y,t), \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

Определение II [164, 175, 180]. *Верхние* (*нижние*) *характеристические частоты строгих знаков, нулей* и *корней* любого решения $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ зададим при $\alpha = -, 0, +$ соответственно формулами

$$\hat{\omega}^{\alpha}(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,t) \quad \left(\check{\omega}^{\alpha}(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,t)\right),$$

а *верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* решения $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ зададим при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно формулами

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\right).$$

Определение III [165, 182]. Для каждого показателя

$$\varkappa : \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

условимся о следующем:

- если его верхнее значение (с крышечкой) для функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ совпадает с аналогичным нижним значением (с галочкой), то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и крышечки;

- если его слабое значение (с пустым кружочком) для функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ совпадает с аналогичным сильным значением (с полным кружочком), то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще;

- назовем его *спектром* для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ множество $\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$;

- назовем его *i-м верхним* $\varkappa_{\bar{i}}(A)$ и *нижним* $\varkappa_{\underline{i}}(A)$ *главными* (или *регуляризованными по Миллионщикову*) значениями для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\varkappa_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{V \in G^i(A)} \sup_{x \in V_*} \varkappa(x), \qquad \varkappa_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{V \in G^{n-i+1}(A)} \inf_{x \in V_*} \varkappa(x),$$

  где $i = 1, 2, \ldots, n$ и $G^i(A)$ — множество i-мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$, а при $i = 1$ и $i = n$ будем называть эти главные значения *крайними*.

Для любой системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ справедливы соотношения

$$0 \leqslant \varkappa_{\bar{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{\bar{n}}(A), \qquad 0 \leqslant \varkappa_{\underline{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{\underline{n}}(A),$$

$$\varkappa_{\underline{i}}(A) \leqslant \varkappa_{\bar{i}}(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\varkappa_{\underline{1}}(A) = \varkappa_{\bar{1}}(A) = \inf_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x), \qquad \varkappa_{\underline{n}}(A) = \varkappa_{\bar{n}}(A) = \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x),$$

поэтому крайние значения будем обозначать просто $\varkappa_1(A)$ и $\varkappa_n(A)$.

Собственные значения $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ будем, по умолчанию, считать упорядоченными по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.

Теорема 3.1. *При любом $n > 1$ для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ каждый показатель колеблемости является точным, абсолютным и удовлетворяет соотношениям*

$$\nu^-(x) \leqslant \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x),$$

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \{|\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|\} \text{ *при* } n = 2,$$

$$0 \in \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) \subset \{0, |\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|\} \text{ *при* } n > 2,$$

$$\nu^-_n(A) = \nu^-_{\overline{n-1}}(A) = \nu^-_{\underline{n-1}}(A) \leqslant |\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|,$$

$$\nu^-_{\bar{j}}(A) = \nu^-_{\underline{j}}(A) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2 \quad (n > 2).$$

Из теоремы 3.1 и ее доказательства следует:

- если хотя бы одно собственное значение матрицы системы действительно или все собственные значения комплексны, но некоторому из них соответствует более одной жордановой клетки, то показатели строгих знаков всех ее решений равны нулю;
- если все собственные значения комплексны и каждому из них соответствует ровно одна жорданова клетка, то спектр показателя строгих знаков автономной системы состоит из нуля и наименьшего из модулей мнимых частей собственных значений;

а с учетом результатов работ [34, 174] вытекают свойства:

- для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ при любом $\varkappa = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ$ выполнены равенства
$$\varkappa_{\bar{j}}(A) = \varkappa_{\underline{j}}(A) = |\operatorname{Im} \lambda_j(A)|, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$
- спектры показателей колеблемости нулей, нестрогих знаков, корней и гиперкорней автономных систем состоят из множества модулей мнимых частей собственных значений ее матрицы.

Определение IV [111]. Множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ называется *суслинским множеством* прямой $\mathbb{R}$, если оно либо пусто, либо является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии, а множество $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ — суслинское множество *расширенной* числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

Теорема 2.7. *Для произвольного содержащего нуль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ и любого $n > 2$ существует дифференциальное уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющее равенствам*
$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^-(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^0(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^+(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}, \quad \alpha = -, \sim, 0, +.$$

Определение V [162]. Назовем функционал $\varkappa : \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *остаточным*, если для любых функций $x, y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $x(t) = y(t)$, $t \geqslant t_0$, имеет место равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

Теорема 2.8. *При любом $n > 2$ ни один из функционалов*
$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet : \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \alpha = \sim, 0, +, *,$$
не является остаточным.

Все крайние показатели системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ будем рассматривать как функционалы на линейном топологическом пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ с естественными для функции линейными операциями и равномерной на $\mathbb{R}_+$ топологией, задаваемой метрикой

$$\rho_U(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \tilde{\mathcal{M}}^n.$$

Определение VI [162]. Для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ через $\mathcal{B}(A)$ обозначим множество систем $B \in \tilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to +\infty} |B(t) - A(t)| = 0,$$

при выполнении которого возмущение $B - A$ назовем *бесконечно малым*, а функционал, определенный на $\tilde{\mathcal{M}}^n$, назовем *инвариантным в точке* $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если его сужение на множество $\mathcal{B}(A)$ есть константа.

Теорема 4.1. *Для любого $n > 2$ в пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ существует система, в которой ни один из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Для заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовой фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

допускающую нулевое решение и обеспечивающую существование и единственность решений задач Коши.

Определение VII. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad x \to 0.$$

Будем рассматривать нелинейные системы вида (1), у которых все ненулевые решения определены на всей числовой полуоси. Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы

(1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$.

Теорема 3.8. *Для любого непустого подмножества* $X \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ *или* $X = [0,1]$ *существуют две системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t,x) \equiv f(t,x), \quad |B(t,x)| \leqslant |x|^2, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2),$$

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = f'_x(t,0), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, обладающие свойствами

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases}$$

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f)) = \begin{cases} X \cup \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ X \cup \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases}$$

причем для каждого значения $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *множества* $\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$ *и* $\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f))$ *равномощны.*

Благодарности. Выражаю искреннюю признательность своему научному консультанту профессору И.Н. Сергееву за внимание, ценные замечания и поддержку в работе.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена описанию ряда характеристик асимптотического поведения решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем. В работе рассматриваются следующие характеристики колеблемости и вращаемости:

– характеристические частоты *строгих знаков*, *нулей* и *корней*;

– *верхние* и *нижние* характеристические частоты (в случае их совпадения — *точные*);

– показатели колеблемости *строгих знаков*, *нестрогих знаков*, *нулей*, *корней* и *гиперкорней*;

– *верхние* и *нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *точные*);

– *сильные* и *слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *абсолютные*);

– *верхние* и *нижние* показатели ориентированной вращаемости (в случае их совпадения — *точные*);

– *сильные* и *слабые* показатели ориентированной вращаемости (в случае их совпадения — *абсолютные*).

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертации является изучение свойств ляпуновских характеристик колеблемости на пространстве линейных систем с равномерной топологией, а также исследование *линейных* показателей колеблемости по первому приближению. В исследовании делается акцент на отказе от требования ограниченности коэффициентов рассматриваемых систем на временно́й полуоси.

В работе решены следующие задачи:

– на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами установить соотношения между всеми показателями колеблемости, найти их спектры и главные значения для каждой автономной системы;

– при каждом $n > 2$ построить линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль;

– исследовать в пространстве решений линейных однородных дифференциальных уравнений выше второго порядка сильные показатели колеблемости на остаточность;

– при каждом $n > 2$ исследовать в пространстве n-мерных линейных однородных дифференциальных систем с равномерной топологией каждый из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней на непрерывность и инвариантность относительно бесконечно малых возмущений;

– выяснить наличие или отсутствие зависимости между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Объектом исследования являются пространства линейных однородных дифференциальных уравнений и систем с непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами, наделённые равномерной топологией, а также нелинейные дифференциальные системы с заданными линейными приближениями.

Предметом исследования являются свойства ляпуновских характеристик колеблемости и вращаемости решений линейных уравнений и систем, их главные значения (регуляризованные по Миллионщикову), которые рассматриваются как функционалы на пространстве уравнений и систем, а также свойства линейных показателей колеблемости решений нелинейных систем.

Методология диссертационного исследования. При доказательстве утверждений в диссертации широко используются методы и результаты теории линейных дифференциальных систем, линейной алгебры, математического анализа, теории возмущений и теории колебаний, а также разработанный автором *метод варьирования системы*, позволяющий преобразовывать исходные линейные однородные дифференциальные системы из различных классов так, чтобы они обладали наперед заданными свойствами.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Даны окончательные ответы на некоторые, долгое время остававшиеся открытыми, вопросы о свойствах показателей колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений и систем. В частности, в работе:

1) на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами установлены соотношения между всеми показателями колеблемости, найдены их спектры и главные значения для каждой автономной системы;

2) для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, при любом $n > 2$ построено уравнение n-го порядка, спектры верхних сильных показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков, нулей и корней которого совпадают с множеством $\mathcal{A}$;

3) при любом $n > 2$ в пространстве решений уравнений n-го порядка установлено отсутствие свойства остаточности у сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;

4) при любом $n > 2$ в пространстве n-мерных линейных систем с равномерной топологией найдены точки, в которых каждый из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений;

5) установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Положения, выносимые на защиту.

1. Полное описание всех значений показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами.

2. Построение линейного дифференциального уравнения порядка выше второго, спектры верхних сильных показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль.

3. Неостаточность сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений порядка выше второго с непрерывными коэффициентами.

4. Разрывность крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней на множестве линейных однородных дифференциальных систем с равномерной на положительной полуоси топологией и их неинвариантность относительно бесконечно малых возмущений.

5. Отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Её результаты и методы могут быть полезны специалистам, занимающимся качественной теорией дифференциальных уравнений, в частности, теорией асимптотических характеристик колеблемости. Каждый из разделов диссертации может составить содержание специального курса для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности «Математика».

Степень достоверности. Достоверность результатов подтверждена строгими математическими доказательствами. Все результаты, выносимые автором на защиту, получены автором лично. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации прошли апробацию и обсуждение на всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете (21 октября 2011 г., 13 апреля 2012 г., 22 марта 2013 г., 20 сентября 2013 г., 25 апреля 2014 г., 17 апреля 2015 г., 23 октября 2015 г., 15 апреля 2016 г., 18 ноября 2016 г., 22 сентября 2017 г., 14 декабря 2018 г., 26 апреля 2019 г., 24 апреля 2020 г., 8 апреля 2022 г., 14 апреля 2023 г., 15 сентября 2023 г., 15 марта 2024 г.);

- на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова (Ярославль, 11 апреля 2024 г.);

- на международном научном семинаре «Теория операторов, дифференциальные уравнения и их приложения» в Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН (Владикавказ, 10 мая 2023 г.);

- на научно-исследовательском семинаре «Динамические системы и теория управления» в Адыгейском государственном университете (17 апреля 2014 г., 20 ноября 2014 г., 9 апреля 2015 г., 15 октября 2015 г., 7 апреля 2016 г., 10 ноября 2016 г., 20 апреля 2017 г., 16 сентября 2017 г., 19 апреля 2018 г., 6 декабря 2018 г., 18 апреля 2019 г., 19 сентября 2019 г., 16 апреля 2020 г., 31 марта 2022 г., 6 апреля 2023 г., 21 декабря 2023 г.);

- на международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвящённой 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.);
- на конференции математических центров России (Сочи, 9–13 августа 2021 г.; Москва, 7–11 ноября 2022 г.; Майкоп, 10–15 октября 2023 г.);
- на международной Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.);
- на международной Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения», посвящённой 115-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина (Воронеж; 3–9 мая 2023 г.);
- на международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-А, Дзинага, 29 июня – 5 июля 2023 г.);
- на международной конференции «XXXII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2021)» (Симферополь, 18–25 сентября 2021 г.);
- на международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2020» (Уфа, 11–14 ноября 2020 г.);
- на III международной конференции «Кавказская математическая конференция» (Third International Conference «Caucasian Mathematics Conference») (Ростов-на-Дону, 26–29 августа 2019 г.);
- на V международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», посвященной 80-летию А. М. Нахушева (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.);
- на школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 4–8 декабря 2013 г., 17–22 октября 2016 г.);
- на II международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г.);

- на международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп; 8–10 октября 2015 г., 20–24 октября 2017 г., 15–20 октября 2019 г., 13–17 октября 2021 г.);
- на международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 9–10 февраля 2012 г., 7–8 февраля 2013 г., 7–8 февраля 2015 г., 8–9 февраля 2016 г., 8–9 февраля 2017 г., 8–9 февраля 2018 г.).

Опубликование результатов диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 77 печатных работах, из них 18 статей в научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» [251]–[268], 19 статей в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, индексируемых только в базе данных РИНЦ [269]–[287] и 40 публикаций с тезисами выступлений на математических конференциях и семинарах [288]–[327].

Личный вклад автора. В диссертацию включены только те результаты, которые получены лично автором. В списке основных публикации автора отсутствуют работы в соавторстве.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, перечня условных обозначений, четырех глав, содержащих 26 разделов, заключения и библиографического списка. Полный объём диссертации составляет 217 страниц текста, из которых 31 страница занимает библиографический список, содержащий 327 наименований (с учётом 77 публикаций соискателя).

В главах диссертации принята двойная нумерация формул, определений, замечаний, лемм, утверждений и теорем.

Перечень сокращений и условных обозначений

Приведем список наиболее часто используемых в работе обозначений:

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел соответственно;
- тройной знак равенства «$\equiv$» обозначает равенство по определению;
- $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая;
- $\mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty)$ — временна́я полуось;
- $\overline{\mathbb{R}}_+$ — неотрицательная полуось расширенной числовой прямой;
- $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;
- $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — множество всех линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$;
- $\operatorname{End}_2\mathbb{R}^n$ — подмножество множества $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2;
- $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная евклидова $n-1$ -мерная сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле;
- $\tilde{\mathcal{M}}^n$ — множество линейных однородных n-мерных дифференциальных систем с непрерывными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами;
- $\mathcal{M}^n$ — подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из систем с ограниченными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами;
- $\mathcal{P}^n$ — подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из систем с периодическими коэффициентами;
- $\mathcal{C}^n$ — подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из автономных систем;
- $\mathcal{T}^n$ — подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из треугольных систем с непрерывными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами;

- $\tilde{\mathcal{E}}^n$ — подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из линейных однородных уравнений n-го порядка с непрерывными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами;
- $\mathcal{E}^n$ — подмножество множества $\tilde{\mathcal{E}}^n$, состоящие из уравнений с ограниченными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами;
- $a \equiv (a_1, \ldots, a_n) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ — набор коэффициентов линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, отождествляемый с самим уравнением;
- ρ_U — метрика, задающая равномерную топологию;
- $|\cdot|$ — евклидова норма вектора;
- e_i — вектор-столбец с 1 на i-ом месте и нулями на остальных местах;
- $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$;
- $\angle$ — знак угла между векторами;
- $\perp$ — знак ортогональности векторов;
- $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ — линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_k$;
- $\dim$ — размерность линейного пространства;
- L_* — множество $L \setminus \{0\}$, т. е. звёздочка справа внизу обозначает выбрасывание нуля из подпространства;
- $\oplus$ — знак прямой суммы подпространств;
- $G^i(L)$ — множество i-мерных подпространств линейного пространства L;
- O_n — нулевая $n \times n$-матрица;
- E_n — единичная $n \times n$-матрица;
- $\operatorname{diag}[A_1, \ldots, A_k]$ — блочно-диагональная матрица, i-ый блок которой равен A_i, $i = 1, \ldots, k$.
- $\mathcal{S}(A)$ — линейное пространство всех решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$;
- $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$;
- $\mathcal{S}^n_{\tilde{\mathcal{M}}}$ — множество всех ненулевых решений всех систем пространства $\tilde{\mathcal{M}}^n$;
- $\mathcal{S}(a)$ — линейное пространство всех решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$;

- $\mathcal{S}_*(a)$ — множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$;
- $\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ — множество всех ненулевых решений всех уравнений пространства $\tilde{\mathcal{E}}^n$;
- $\psi^n y(0)$ — набор начальных значений решения $y \in \mathcal{S}(a)$ какого-либо уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$;
- $\nu^-(y,t)$, $\nu^0(y,t)$, $\nu^+(y,t)$ — числа строгих знаков, нулей и корней соответственно функции y на промежутке $(0;t]$;
- $\nu^-(y,s,t)$, $\nu^0(y,s,t)$, $\nu^+(y,s,t)$ — числа строгих знаков, нулей и корней соответственно функции y на промежутке $(s,t]$;
- $\hat{\omega}^-(y)$, $\hat{\omega}^0(y)$, $\hat{\omega}^+(y)$ — верхние характеристические частоты строгих знаков, нулей и корней соответственно решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$;
- $\check{\omega}^-(y)$, $\check{\omega}^0(y)$, $\check{\omega}^+(y)$ — нижние характеристические частоты строгих знаков, нулей и корней соответственно решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$;
- $\kappa : \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}_+$ показатель, определенный на $\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$;
- $\kappa(\mathcal{S}_*(a))$ — спектр показателя κ уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$;
- $\nu^-(x,m,t)$, $\nu^\sim(x,m,t)$, $\nu^0(x,m,t)$, $\nu^+(x,m,t)$, $\nu^*(x,m,t)$ — числа строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней соответственно функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0;t]$;
- $\nu^-(x,m,s,t)$, $\nu^\sim(x,m,s,t)$, $\nu^0(x,m,s,t)$, $\nu^+(x,m,s,t)$, $\nu^*(x,m,s,t)$ — числа строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней соответственно функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(s;t]$;
- $\hat{\nu}^-_\bullet(x)$, $\hat{\nu}^\sim_\bullet(x)$, $\hat{\nu}^0_\bullet(x)$, $\hat{\nu}^+_\bullet(x)$, $\hat{\nu}^*_\bullet(x)$ — верхние сильный показатель колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней соответственно решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\check{\nu}^-_\bullet(x)$, $\check{\nu}^\sim_\bullet(x)$, $\check{\nu}^0_\bullet(x)$, $\check{\nu}^+_\bullet(x)$, $\check{\nu}^*_\bullet(x)$ — нижние сильный показатель колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней соответственно решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\hat{\nu}^-_\circ(x)$, $\hat{\nu}^\sim_\circ(x)$, $\hat{\nu}^0_\circ(x)$, $\hat{\nu}^+_\circ(x)$, $\hat{\nu}^*_\circ(x)$ — верхние слабый показатель колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней соответственно решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\check{\nu}^-_\circ(x)$, $\check{\nu}^\sim_\circ(x)$, $\check{\nu}^0_\circ(x)$, $\check{\nu}^+_\circ(x)$, $\check{\nu}^*_\circ(x)$ — нижние слабый показатель колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней соответственно решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;

- $\check{\theta}_{\bullet}(x)$ — нижний сильный показатель ориентированной вращаемости решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\hat{\theta}_{\bullet}(x)$ — верхний сильный показатель ориентированной вращаемости решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\check{\theta}_{\circ}(x)$ — нижний слабый показатель ориентированной вращаемости решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\hat{\theta}_{\circ}(x)$ — верхний слабый показатель ориентированной вращаемости решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$;
- $\varkappa : \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}_+$ показатель, определенный на $\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$;
- $\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ — спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$.

Глава 1

Основные понятия и факты

В настоящей главе даются необходимые определения и доказываются вспомогательные утверждения, используемые в последующих главах диссертации.

1.1 Вещественное евклидово пространство

В данной работе будем считать $\mathbb{R}^n$ n-мерным евклидовым вещественным векторным (линейным) пространством с заданным на нём скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, относительно которого ортонормирован базис $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, где e_i — вектор-столбец с 1 на i-ом месте и нулями на остальных местах, $i = \overline{1, n}$.

Под матрицей линейного оператора в $\mathbb{R}^n$ будем понимать его матрицу в базисе $\mathbf{e}$. Всюду ниже O_n и E_n обозначают нулевую и единичную матрицы соответственно. Определим *евклидову* норму вектора равенством $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, а через $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ обозначим нормированное векторное пространство линейных операторов, действующих в $\mathbb{R}^n$.

Множество L в векторном пространстве V называется его *подпространством*, если оно является линейным пространством относительно операций, введенных в пространстве V. Два подпространства одного и того же векторного пространства называются *дизъюнктными*, если их пересечение состоит только из нулевого вектора. *Линейной оболочкой* векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ векторного пространства V называется его векторное подпространство наименьшей размерности, содержащие все эти векторы. Линейную оболочку векторов будем обозначать через $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Пусть S — n-мерное векторное пространство. Всюду далее условимся через $G^i(S)$, $i = \overline{1, n}$ обозначать множество его i-мерных подпространств, а звездочкой внизу обозначать выбрасывание нуля, т. е. через S_* будем обозначать множество $S \setminus \{0\}$.

Говорят, что линейное пространство V разложено в *прямую сумму* его подпространств L_1 и L_2 и пишут $V = L_1 \oplus L_2$, если любой вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Для выполнения равенства $V = L_1 \oplus L_2$ необходимо и достаточно, чтобы подпространства L_1 и L_2 были дизъюнктными и сумма их размерностей равнялась размерности пространства V.

Угол $\angle(x, y)$ *между ненулевыми векторами* $x, y \in \mathbb{R}^n$ определяется с помощью равенства $\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$. Откуда вытекает равенство $\angle(x, y) = \angle(\alpha x, \beta y)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \beta > 0$. Векторы $x, y \in \mathbb{R}^n$ называются *ортогональными* (обозначение $x \perp y$), если $\langle x, y\rangle = 0$, и *коллинеарными* (обозначение $x \parallel y$), если $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$. Другими словами, для ненулевых векторов x и y отношение $x \perp y$ равносильно равенству $\angle(x, y) = \pi/2$, а отношение $x \parallel y$ – равенству $\angle(x, y) = 0$ или $\angle(x, y) = \pi$.

Ортогональным дополнением подпространства L пространства $\mathbb{R}^n$ называется множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$, ортогональных каждому вектору из L. Ортогональное дополнение подпространства L обозначается $L^\perp$. Для любого подпространства L ортогональное дополнение $L^\perp$ существует, является подпространством, а само пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму $L \oplus L^\perp$. Так как $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$, то любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$; вектор x_1 называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L и обозначается $\mathrm{pr}_L x$. Очевидно, что $\left(L^\perp\right)^\perp = L$. Два подпространства L и N называются *ортогональными*, если $N = L^\perp$.

1.2 Суслинские множества

Семейство $\mathbb{B}$ *борелевских множеств* метрического (или, более общо, топологического) пространства $\mathcal{M}$ – это наименьшая система его подмножеств, содержащая все замкнутые и все открытые множества и замкнутая относительно взятия счётных объединений и счётных пересечений. Множество называется *борелевским*, или *B - множеством*, или *B - измеримым множеством*, или множеством, *измеримым по Борелю*, если оно принадлежит семейству $\mathbb{B}$.

Более наглядное представление о семействе $\mathbb{B}$ борелевских множеств можно получить с помощью определения по трансфинитной индукции борелевских классов F_α и G_α, где α – порядковое число первого или второго числовых классов. Обозначим через F_0 совокупность всех замкнутых подмножеств метрического пространства $\mathcal{M}$. Определение класса F_α разнится в зависимости от того, нечётным или чётным является число α (предельные порядковые числа считаются чётными). Если α – нечетно, то класс F_α состоит из множеств, являющихся объединениями счётных последовательностей множеств, принадлежащих классам с меньшими индексами, т. е. классам F_β, где $\beta < \alpha$. Если α – четно, то класс F_α состоит из множеств, являющихся пересечениями счётных последовательностей множеств, принадлежащих классам с меньшими индексами. Тогда имеет место представление $\mathbb{B} = \bigcup\limits_{\alpha<\Omega} F_\alpha$ (здесь и далее Ω – первое порядковое число третьего числового класса) [111, с. 353], [202, с. 192].

Двойственным образом, отправляясь от класса G_0 открытых множеств метрического пространства $\mathcal{M}$ и заменяя в предыдущем определении пересечения объединениями и наоборот, получаем определение классов G_α, $\alpha < \Omega$. Именно, множества класса G_α, в зависимости от того, чётно порядковое число α или нечётно, являются соответственно либо объединениями, либо пересечениями счётных последовательностей множеств, принадлежащих классам с меньшими индексами, т.е. классам G_β, где $\beta < \alpha$. Тогда справедливо разложение $\mathbb{B} = \bigcup\limits_{\alpha<\Omega} G_\alpha$ [111, с. 353], [202, с. 192].

Введем в рассмотрение множество всех конечных последовательностей натуральных чисел

$$E = \{(n_1, \ldots, n_l) : n_i \in \mathbb{N}, \, i \in \{1, \ldots, l\}, \, l \in \mathbb{N}\}$$

и через $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ обозначим совокупность функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которые будем отождествлять с бесконечными последовательностями натуральных чисел. Для $\varphi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и числа $p \in \mathbb{N}$ через $\varphi|_p$ обозначим последовательность из E, составленную из первых p и в том же порядке следования членов последовательности φ (т.е. $\varphi|_p$ – сужение отображения $\varphi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ на множество $\{1, \ldots, p\}$). Пусть $\mathcal{T}$ – топологическое пространство, а $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ – совокупность его замкнутых множеств. Любое отображение $O : E \to \mathcal{F}(\mathcal{T})$ называется определяющей системой, а A - *операцией* на определяющей системе O – множество

$$A(O) = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} O(\varphi|_p).$$

Подчеркнём, что в этом определении объединение является континуальным. Множество называется суслинским множеством, или A - *множеством*, пространства $\mathcal{T}$, если оно может быть получено в результате A -*операции* на некоторой определяющей системе O. Класс суслинских множеств пространства $\mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{T})$.

A -операцию открыл П.С. Александров [216], доказавший с её помощью, что несчётное борелевское множество в $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума. Термин *A - множество* (Александрова множество) введён М.Я. Суслиным [245]; позже по предложению Ф. Хаусдорфа [202] эти множества стали называть суслинскими, а символ "A" перенесли в название операции, с помощью которой они строятся. Суслинские множества называются также [122] *аналитическими множествами.*

Далее рассматриваем только интересующие нас случаи $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ и $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}}$. Из приведённого определения вытекает, что суслинские множества пространства $\overline{\mathbb{R}}$ совпадают с объединением суслинских множеств пространства $\mathbb{R}$ и всевозможных подмножеств (в том числе, и пустого) множества $\{-\infty, +\infty\}$. Действительно, если $F \in \mathcal{F}(\overline{\mathbb{R}})$, то $F \cap \mathbb{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Поэтому если отображение $\overline{O} : E \to \mathcal{F}(\overline{\mathbb{R}})$ является определяющей системой для множества $S \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}})$, то, задав определяющую систему $O : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ равенством $O(\nu) = \overline{O}(\nu) \cap \mathbb{R}$, $\nu \in E$, получим, что результатом *A - операции* на системе O будет множество $S \cap \mathbb{R}$. Обратно, зафиксируем множество $D \subset \{-\infty, +\infty\}$. Если $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, то множества $(F \cap [-k, k]) \cup D$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат классу $\mathcal{F}(\overline{\mathbb{R}})$. Пусть $O : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ определяющая система для множества $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Положим по определению $O(\oslash) = \oslash$ и зададим определяющую систему $\overline{O} : E \to \mathcal{F}(\overline{\mathbb{R}})$ равенством $\overline{O}((k, \nu)) = (O(\nu) \cap [-k, k]) \cup D$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in E$. Тогда результатом *A - операции* на системе $\overline{O}$ яляется, очевидно, множество $S \cup D$. В силу установленного соотношения между классами $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}})$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ для описания свойств этих классов достаточно описать только свойства класса $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Поэтому до конца этого пункта термин «суслинское множество» означает суслинское множество пространства $\mathbb{R}$.

Класс суслинских множеств замкнут относительно счётных объединений и счётных пересечений, но *σ-алгеброй* не является (дополнение до суслинского множества, вообще говоря, суслинским не является). Он содержит как собственный подкласс, класс борелевских множеств (теорема М.Я. Суслина [245]), и любое суслинское множество измеримо по Лебегу, т. е. класс суслинских множеств занимает промежуточное положение между классами борелевских и измеримых множеств вещественной прямой. Связь между борелевскими множествами пространства $\mathbb{R}^2$ и суслинскими множествами в $\mathbb{R}$ устанавливает данное М.Я. Суслиным другое их определение: множество является суслинским множеством прямой $\mathbb{R}$, если оно является ортогональной проекцией на $\mathbb{R}$ борелевского множества в $\mathbb{R}^2$.

Суслинские множества, а значит, в частности, и борелевские множества полного пространства со счетной базой или конечны, или счетны, или имеют мощность континуума (теорема Александрова-Хаусдорфа) [202].

Приведём ещё два подхода Н.Н. Лузина к определению суслинских множеств. Через $\mathbb{I}$ обозначим пространство иррациональных чисел с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$. Как доказано [228], множество является суслинским, если оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой непрерывной функции $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$. Отсюда вытекает следующее определение суслинских множеств: множество является суслинским, если оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой функции первого бэровского класса на $\mathbb{R}$. В последнем определении первый класс можно заменить на любой другой бэровский класс, кроме нулевого, т. е. суслинские множества — множества значений, принимаемых бэровскими функциями.

Вместе с тем, как доказано Е.А. Барабановым в работе [18] (см. также [19]), класс функций, множество значений которых – суслинские множества, можно сузить до класса полунепрерывных функций: множество является суслинским, если оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой полунепрерывной снизу функции на $\mathbb{R}$. Понятно, что в этом определении полунепрерывные снизу можно заменить на полунепрерывные сверху функции.

1.3 Пространство линейных дифференциальных систем

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество *линейных систем*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty), \tag{1.1}$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Обозначим через $\mathcal{M}^n$, $\mathcal{P}^n$, $\mathcal{P}^n(T)$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{T}^n$ подмножества множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из *ограниченных, периодических, T- периодических, автономных* и *треугольных* систем соответственно.

Множество $\tilde{\mathcal{M}}^n$ наделим структурой линейного пространства над $\mathbb{R}$ с естественными для функции линейными операциями и равномерной на $\mathbb{R}_+$ топологией, задаваемой метрикой

$$\rho_U(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \tilde{\mathcal{M}}^n. \tag{1.2}$$

Фиксировав в $\mathbb{R}^n$ базис, естественным образом выделим в множестве $\tilde{\mathcal{M}}^n$

подмножество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ систем, задаваемых матрицами вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

и отвечающих *линейным однородным уравнениям n-го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

каждое из которых, задаваясь своей непрерывной вектор-функцией

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

преобразуется в систему A стандартным переходом от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$$

и отождествляется с этой системой. Через $\mathcal{E}^n$ обозначим подмножество $\tilde{\mathcal{E}}^n$, состоящее из уравнений с ограниченными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами.

Решением системы (1.1) называется любая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и дифференцируемая вектор-функция $x(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая системе (1.1) при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Для каждого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(\cdot)$ системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0$ существует и единственно [176, с. 55].

Совокупность решений системы (1.1) относительно обычных операций сложения вектор-функций и умножения их на вещественное число образует вещественное векторное пространство, которое обозначается через $S(A)$. Пространство $S(A)$ изоморфно $\mathbb{R}^n$ — канонический изоморфизм задаётся биекцией $x(\cdot) \mapsto x(0)$. Любой базис в векторном пространстве $S(A)$ называется *фундаментальной системой решений* системы (1.1). Фундаментальная система решений $x_1(\cdot)$, …, $x_n(\cdot)$ системы (1.1), записанная в виде $(n \times n)$-матрицы $[x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)]$, i-ый столбец ($i = \overline{1, n}$) которой — вектор-функция $x_i(\cdot)$, называется *фундаментальной матрицей* системы (1.1).

Если $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — фундаментальная матрица системы (1.1), то матрица $X_A(t, \tau) \equiv X(t)X^{-1}(\tau)$, где $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, называется *матрицей* или *оператором Коши* системы (1.1).

Положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \equiv \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \equiv \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

1.4 Определение характеристик колеблемости

Для определения характеристик колеблемости нам понадобятся следующие два вспомогательных определения.

Определение 1.1 [164, 165]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 1.2 [164, 175, 177]. Для момента $t > 0$ и функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

- $\nu^-(y,t)$ – число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;
- $\nu^\sim(y,t)$ – число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;
- $\nu^0(y,t)$ – число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;
- $\nu^+(y,t)$ – число ее *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;
- $\nu^*(y,t)$ – число ее *гиперкорней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный - бесконечно много раз.

Далее, для любых $t > s \geqslant 0$, $m \in \mathbb{R}^n_*$, $y \in \mathcal{S}^n_\mathcal{E}$ и $x \in \mathcal{S}^n_\mathcal{M}$ введем обозначения

$$\nu^\alpha(y,s,t) \equiv \nu^\alpha(y,t) - \nu^\alpha(y,s), \quad \alpha \in \{-,0,+\},$$
$$\nu^\alpha(x,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t), \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\},$$
$$\nu^\alpha(x,m,s,t) \equiv \nu^\alpha(x,m,t) - \nu^\alpha(x,m,s), \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}.$$

Определение 1.3 [164, 175]. *Верхней* или *нижней характеристической частотой (частотой Сергеева) знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}^n_\mathcal{E}$ будем называть величины

$$\hat\omega^\alpha(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,t) \quad \text{или} \quad \check\omega^\alpha(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,t),$$

при $\alpha = -,0,+$ соответственно.

Замечание 1.1. Для решения $y \in \mathcal{S}^n_\mathcal{E}$ при любом $\alpha = -,0,+$ обозначим через $\mu^\alpha(y,t)$ его среднее число соответственно знаков, нулей и корней на промежутке длины π за время t. Тогда для каждого значения $\alpha = -,0,+$ и любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших t имеют место оценки

$$\check\omega^\alpha(y) - \varepsilon \leqslant \mu^\alpha(y,t) \leqslant \hat\omega^\alpha(y) + \varepsilon.$$

Замечание 1.2. Для любых функции $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ и момента времени $t > 0$ справедливы неравенства

$$\nu^-(y,t) \leqslant \nu^0(y,t) \leqslant \nu^+(y,t),$$
$$\hat\omega^-(y) \leqslant \hat\omega^0(y) \leqslant \hat\omega^+(y), \quad \check\omega^-(y) \leqslant \check\omega^0(y) \leqslant \check\omega^+(y),$$
$$0 \leqslant \check\omega^\alpha(y) \leqslant \hat\omega^\alpha(y), \quad \alpha \in \{-,0,+\}.$$

Определение 1.4 [166, 167, 180]. *Верхние (нижние) сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ зададим при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно формулами

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check\nu^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$
$$\hat\nu^\alpha_\circ(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check\nu^\alpha_\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из перечисленных в определениях 1.3 и 1.4 характеристик колеблемости $\hat\varkappa(x) = \check\varkappa(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa_\circ(x) = \varkappa_\bullet(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является абсолютным.

Примеры несовпадения сильных и слабых показателей колеблемости приведены в работах [282, 314, 257].

Показатели колеблемости $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ могут быть наглядно представлены следующим образом. Пусть P_m — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ (проходящая через начало координат) с нормалью $m \in \mathbb{R}^n_*$. Случай $m = 0$ интереса не представляет, поскольку

$$\nu^-(x,m,t) = 0, \quad \nu^\alpha(x,m,t) = +\infty, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}.$$

Тогда:

- сильный показатель колеблемости нулей (знаков, корней или гиперкорней) — это частота наименее колеблющейся координаты вектор-функции x (по своему геометрическому смыслу она отвечает за частоту вращения вектора $x(t)$ вокруг нуля: действительно, всякому пересечению этим вектором той гиперплоскости, в которую она попадает реже всего, можно поставить в соответствие по меньшей мере однократное пересечение им всех остальных гиперплоскостей, что несколько напоминает полуоборот);

- если в процессе усреднения величины $\nu^{\alpha}(x,m,t)$ при любом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ специальным образом манипулировать вектором m, выбирая для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ ту гиперплоскость P_m, число попадании в которую за время от 0 до t оказывается наименьшим, то в результате такого усреднения получится слабый показатель колеблемости функции x.

Замечание 1.3. Для любых $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$, $m \in \mathbb{R}^n_*$, $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ и $t > s \geqslant 0$ справедливы следующие неравенства:

$$0 \leqslant \nu^{\alpha}(y,t,s) < +\infty, \quad \alpha \in \{-,0,+\};$$

$$\nu^{\alpha}(x,m,t,s) \geqslant 0, \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}.$$

Замечание 1.4. Для любых $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ и $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ имеют место следующие соотношения

$$0 \leqslant \check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \leqslant \hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \leqslant \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x), \quad \check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x) \leqslant \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) \leqslant \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x),$$

$$\hat{\nu}^{-}_{\circ}(x) \leqslant \hat{\nu}^{\sim}_{\circ}(x) \leqslant \hat{\nu}^{0}_{\circ}(x) \leqslant \hat{\nu}^{+}_{\circ}(x) \leqslant \hat{\nu}^{*}_{\circ}(x),$$

$$\hat{\nu}^{-}_{\bullet}(x) \leqslant \hat{\nu}^{\sim}_{\bullet}(x) \leqslant \hat{\nu}^{0}_{\bullet}(x) \leqslant \hat{\nu}^{+}_{\bullet}(x) \leqslant \hat{\nu}^{*}_{\bullet}(x),$$

$$\check{\nu}^{-}_{\circ}(x) \leqslant \check{\nu}^{\sim}_{\circ}(x) \leqslant \check{\nu}^{0}_{\circ}(x) \leqslant \check{\nu}^{+}_{\circ}(x) \leqslant \check{\nu}^{*}_{\circ}(x),$$

$$\check{\nu}^{-}_{\bullet}(x) \leqslant \check{\nu}^{\sim}_{\bullet}(x) \leqslant \check{\nu}^{0}_{\bullet}(x) \leqslant \check{\nu}^{+}_{\bullet}(x) \leqslant \check{\nu}^{*}_{\bullet}(x).$$

Замечание 1.5. Для любых функции $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ и $\alpha \in \{-,0,+\}$ справедливы оценки

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y) \leqslant \hat{\omega}^{\alpha}(y), \quad \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y) \leqslant \check{\omega}^{\alpha}(y).$$

Замечание 1.6. Минимумы в определениях показателей колеблемости можно брать не по всем ненулевым векторам m, а лишь по единичным, поскольку справедливо

$$\nu^{\alpha}(x,m,t) = \nu^{\alpha}(x,m/|m|,t), \quad x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}, \quad m \in \mathbb{R}^n_*, \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}.$$

Определение 1.5 [177]. Пусть $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$. Тогда вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ назовем:

а) *критической нормалью к функции x на отрезке* $[0;t]$, если для него хотя бы в один момент $\tau_0 \in [0;t]$ выполняются равенства $\langle x(\tau_0),m\rangle = \langle \dot{x}(\tau_0),m\rangle = 0$; множество всех таких векторов обозначим через $C_x(t)$;

б) *критической нормалью к функции x* (на $\mathbb{R}_+$), если для него хотя бы в один момент $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняются равенства $\langle x(\tau_0),m\rangle = \langle \dot{x}(\tau_0),m\rangle = 0$; множество всех таких векторов обозначим через C_x;

в) *концевой ортогональю к функции x на отрезке* $[0;t]$, если вектор m ортогонален хотя бы одному из векторов $x(0)$ или $x(t)$.

Замечание 1.7 [177]. Равенство $\nu^*(x,m,t) = +\infty$ возможно только в случае, когда $m \in C_x(t)$.

Можно рассматривать единичную сферу S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ как самостоятельное топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией и со стандартной мерой mes, являющаяся $(n-1)$-мерной площадью поверхности.

Рассмотрим множество

$$G_x(t) \equiv S^{n-1} \setminus (C_x(t) \cup x^{\perp}(0) \cup x^{\perp}(t))$$

всех векторов $m \in S^{n-1}$, не являющихся для функции x на отрезке $[0;t]$ ни критическими нормалями, ни концевыми ортогоналями.

Утверждение 1.1 (Сергеев И.Н. [177]). Для любой функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ и любого значения $t > 0$ множество $G_x(t)$ имеет на сфере S^{n-1} полную меру, открыто и всюду плотно, а на каждой его компоненте связности величина $\nu^*(x,m,t)$ принимает постоянное конечное значение.

Замечание 1.8 [177]. В утверждении 1.1 говорится, в частности, что для каждого значения $t > 0$ множество $G_x(t) \cap S^{n-1}$ единичных критических нормалей к функции x на отрезке $[0;t]$ имеет на сфере S^{n-1} меру нуль, замкнуто и нигде не плотно. Отсюда следует, что их счетное объединение

$$C_x \cap S^{n-1} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} C_x(t) \cap S^{n-1},$$

т.е. множество единичных критических нормалей к этой функции на всей полупрямой $\mathbb{R}_+$, также имеет на единичной сфере меру нуль и является множеством первой категории Бэра [111, с. 86].

Вычисление характеристик колеблемости упрощает следующая

Лемма 1.1 (см. [165]). *Пусть последовательность положительных чисел $t_1 < t_2 < \ldots$ удовлетворяет условиям*

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1. \tag{1.3}$$

Тогда для любых $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ и $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$:

1) *справедливы равенства*

$$\hat{\omega}^{\alpha}(y) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y,t_k), \quad \alpha \in \{-,0,+\}, \tag{1.4}$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k), \quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}, \tag{1.5}$$

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) = \varlimsup_{k\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k), \quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}; \tag{1.6}$$

2) *если последовательности $T_1,T_2,\ldots \geqslant 0$ и $\nu_1,\nu_2,\ldots \geqslant 0$ удовлетворяют условиям*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{T_k}{t_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\nu_k}{t_k} = 0, \tag{1.7}$$

то после уменьшения в правых частях формул (1.4)–(1.6) каждого из чисел t_k в знаменателе дроби — на T_k, а каждого из чисел $\nu^\alpha(y,t_k)$ или $\nu^\alpha(y,m,t_k)$ — на ν_k значение этих правых частей не изменятся;

3) *утверждения 1)–2) настоящей леммы останутся верными, если в них (конкретно в соотношениях (1.4)–(1.6)) заменить все верхние пределы нижними.*

Доказательство. 1. Фиксируем произвольные $\alpha\in\{-,0,+\}$ и $y\in\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$. Обозначим через Λ верхний передел, стоящий в правой части равенства (1.4). Благодаря условиям (1.3), можно каждое значение $t>t_1$ заключить в свои границы $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ и записать две цепочки оценок

$$\hat{\omega}^\alpha(y) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi\nu^\alpha(y,t)}{t} \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi\nu^\alpha(y,t_k)}{t_{k+1}} =$$
$$= \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi\nu^\alpha(y,t_k)}{t_k}\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{t_k}{t_{k+1}} = \Lambda,$$

$$\hat{\omega}^\alpha(y) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi\nu^\alpha(y,t)}{t} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi\nu^\alpha(y,t_{k+1})}{t_k} =$$
$$= \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi\nu^\alpha(y,t_{k+1})}{t_{k+1}}\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k} = \Lambda,$$

в которых, в итоге, все неравенства обращаются в равенства, откуда

$$\hat{\omega}^\alpha(y) = \Lambda.$$

2. Теперь на основании равенств (1.7), с учетом доказанной ранее формулы (1.4), установим справедливость второго утверждения настоящей леммы для верхних частот Сергеева:

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi\left(\nu^\alpha(y,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k} = \frac{\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(y,t_k) - \pi\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\nu_k}{t_k}}{1-\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{T_k}{t_k}} =$$
$$= \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(y,t_k) = \hat{\omega}^\alpha(y).$$

3. Далее, используя проведенные рассуждения для частот Сергеева (заметим, что в качестве функции $\nu^\alpha(y,t)$ в них могла бы фигурировать любая неотрицательная и нестрого возрастающая по t функция), поэтому для любых $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ и $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$: получаем: во-первых,

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t_k) =$$
$$= \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t_k) =$$
$$= \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(x,m,t_k)$$

и, во-вторых,

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi\left(\nu^\alpha(x,m,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k} = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x),$$
$$\varlimsup_{k\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi\left(\nu^\alpha(x,m,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k} = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi\left(\inf\limits_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(x,m,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k} =$$
$$= \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi \inf\limits_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(x,m,t_k)}{t_k} = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x).$$

4. Для нижних характеристик колеблемости все утверждения настоящей леммы доказываются аналогично.

Лемма 1.1 доказана.

Определение 1.6. Будем называть *подобными*:

- матрицы $A,B \in \mathcal{C}^n$, если для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ выполняется равенство $B = CAC^{-1}$;
- вектор-функции $x,y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$, если для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ имеет место представление $y = Cx$.

Лемма 1.2. *Для каждого функционала*

$$\varkappa = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ, \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$$

и подобных векторов $x,y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ *справедливо равенство*

$$\varkappa(x) = \varkappa(y). \tag{1.8}$$

Доказательство. Пусть вектор-функции $x,y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ подобны. Тогда для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ выполнено равенство $y = Cx$. Далее, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(Cx, m, t) =$$

$$= \inf_{(C^T m) \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, C^T m, t) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x).$$

Для остальных показателей колеблемости равенство (1.8) доказывается аналогично.

Лемма 1.2 доказана.

Теперь перейдем к нелинейным системам. Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \qquad (1.9)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши [176, с. 55]. С системой (1.9) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_{\prime}(t, x), \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1.10)$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_{\prime}(t, x)| = o(x), \quad x \to 0.$$

Все показатели колеблемости, называемые *линейными* (см. [185]) для решений нелинейных систем, оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определенным на всей положительной полуоси времени. Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [185] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели.

Будем рассматривать нелинейные системы вида (1.9), у которых все ненулевые решения определены на всей числовой полуоси. Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1.9), а через $x_f(\cdot, x_0)$ то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$, а через G_*, G_δ или G_{γ_1, γ_2} – множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих соответственно условию $x_0 \neq 0$, $|x_0| = \delta$ или $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$.

Теперь определим *линейные* показатели колеблемости функций из множества $\mathcal{S}_*(f)$. Для этого нам понадобятся следующие обозначения.

Определение 1.7 [185]. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ через $\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0), m, t)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно обозначим:

– число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\cdot, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число точек *нестрогой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\cdot, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *нулей* функции $\langle x_f(\cdot, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) функции $\langle x_f(\cdot, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *гиперкорней* функции $\langle x_f(\cdot, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Определение 1.8 [185]. *Верхние сильный* и *слабый линейные показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0), m, t),$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot, x_0)) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0), m, t).$$

Нижние линейные показатели колеблемости $\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot, x_0))$, $\check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot, x_0))$ *знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x_f(\cdot, x_0)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ определяются соответсвенно теми же формулами, но с заменой верхнего предела на нижний.

В случае совпадения какого-либо нижнего показателя с аналогичным верхним будем называть его *точным*, убирая в его обозначении крышечку и галочку.

В случае совпадения какого-либо слабого показателя с аналогичным сильным будем называть его *абсолютным*, убирая в его обозначении пустой и полный кружки.

1.5 Показатели колеблемости линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим множество Q функций, представимых в виде конечной суммы квазимногочленов:

$$\sum_{j=1}^{l} e^{\alpha_j t}(u_j(t)\cos\beta_j t + v_j(t)\sin\beta_j t), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_l$$

(u_j, v_j - действительные многочлены) с попарно различными показателями $\delta_j = \alpha_j + i\beta_j$. Далее, для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространство $\mathcal{C}^n \times Q$ линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

отождествляемых каждое со своей парой (a, f), где $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ - строка постоянных действительных коэффициентов, а $f \in Q$ - неоднородность.

Показатели колеблемости *нулей* решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами из множества $\mathcal{C}^n \times Q$ были определены и изучены только в работе [168]. Определим аналогично и остальные показатели колеблемости (слабые и сильные, верхние и нижние) знаков, корней и гиперкорней для решений неоднородных уравнений.

Для множества $\mathbb{R}^\infty_*$ всех конечных ненулевых последовательностей, каждой числовой функции $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, последовательности $m \equiv (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{R}^k_* \subset \mathbb{R}^\infty_*$ (k не фиксировано), вектор-функции $\psi^k y \equiv \big(y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}\big)$ и момента времени $t > 0$ введем обозначения:

$\nu^-(y, m, t)$ – число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle\psi^k y, m\rangle$ на $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, m, t)$ – число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle\psi^k y, m\rangle$ на $(0, t]$;

$\nu^0(y, m, t)$ – число *нулей* функции $\langle\psi^k y, m\rangle$ на $(0, t]$;

$\nu^+(y, m, t)$ – число *корней* функции $\langle\psi^k y, m\rangle$ на $(0, t]$, т.е. нулей с учетом их *кратности*;

$\nu^*(y, m, t)$ – число *гиперкорней* функции $\langle\psi^k y, m\rangle$ на $(0, t]$, т.е. при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный - сразу бесконечно много раз.

Определение 1.9 [168]. *Верхний* (*нижний*) *сильный* и *слабый показатель колеблемости* знаков, нулей, корней и гиперкорней функции

$y \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ зададим формулами

$$\hat{\sigma}^\alpha(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^\infty_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t) \quad \left(\check{\sigma}^\alpha(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^\infty_*} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right),$$
$$\hat{\zeta}^\alpha(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^\infty_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t) \quad \left(\check{\zeta}^\alpha(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^\infty_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right)$$

при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно. В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения y с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать $\sigma^\alpha(y)$ или $\zeta^\alpha(y)$.

Определение 1.10 [168]. Для каждого $\varkappa = \check{\zeta}^\alpha, \hat{\zeta}^\alpha, \check{\sigma}^\alpha, \hat{\sigma}^\alpha$ назовем j -ым верхним $\varkappa_{\bar{j}}(a)$ и нижним $\varkappa_{\underline{j}}(a)$ *регуляризованными по Миллионщикову* или главными значениями соответствующего показателя колеблемости неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ величины, задаваемые при каждом $j = 0, 1, \ldots, n$ равенствами

$$\varkappa_{\bar{j}}(a,f) \equiv \inf_{L\in\mathcal{A}_j(a)} \sup_{y\in L} \omega(y), \quad \varkappa_{\underline{j}}(a,f) \equiv \sup_{L\in\mathcal{A}_{n-j}(a)} \inf_{y\in L} \omega(y),$$

где $\mathcal{A}_j(a)$ – множество j - мерных подпространств аффинного пространства $\mathcal{S}(a, f)$ всех решений этого уравнения.

Определение 1.11. *Спектром* $\mathrm{Spec}_\varkappa(a, f)$ показателя $\varkappa$ неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ назовем множество $\mathrm{Spec}_\varkappa(a, f) = \varkappa(\mathcal{S}(a, f))$.

1.6 Показатели ориентированной вращаемости

Для определения показателей ориентированной вращаемости нам понадобится следующий функционал.

Определение 1.12 [178]. Для функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ и конечного момента времени $t > 0$ определим *функционал вращаемости* $\Theta(x, t)$, как такую непрерывную ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x, 0) = 0$; при этом если найдется момент времени $\tau \in [0, t]$, для которого $x(\tau) = 0$, то по определению (в ущерб непрерывности) считаем $\Theta(x, t) = +\infty$.

Определение 1.13 [178]. *Нижние* (*верхние*) *сильный* и *слабый* показатели ориентированной вращаемости вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ зададим соответственно с помощью формул

$$\check{\theta}_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)| \left(\hat{\theta}_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\right),$$
$$\check{\theta}_\circ(x) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)| \left(\hat{\theta}_\circ(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\right),$$

где $\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n$ подмножество множества $\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2.

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из перечисленных показателей $\hat{\varkappa}(x) = \check{\varkappa}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa_\circ(x) = \varkappa_\bullet(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *абсолютным*.

Замечание 1.9. Показатели вращаемости при $n = 1$ теряют смысл. Поэтому в дальнейшем по умолчанию будем считать, что $n \geqslant 2$.

Обозначим через $\mathcal{G}^2$ множество всех двумерных подпространств G пространства $\mathbb{R}^n$, наделенное конечной лебеговой мерой и стандартной топологией, а через P_G будем обозначать ортогональный проектор на подпространство $G \subset \mathbb{R}^n$. Вычисление показателей вращаемости упрощает следующее

Утверждение 1.2 (Сергеев И.Н. [178]). Если в равенствах определения 1.13 вместо взятия точной нижней грани по $L \in \mathrm{End}_2\mathbb{R}^n$ положить $L = P_G$ и брать точную нижнюю грань по всем $G \in \mathcal{G}^2$, то определяемые этими равенствами величины не изменятся.

Набор соотношений между показателями колеблемости гиперкорней и показателями вращаемости предлагает

Утверждение 1.3 (Сергеев И.Н. [182]). Для любого $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ справедливы неравенства

$$\hat{\theta}_\bullet(x) \leqslant \hat{\nu}^*_\bullet(x), \quad \check{\theta}_\bullet(x) \leqslant \check{\nu}^*_\bullet(x), \quad \hat{\theta}_\circ(x) \leqslant \hat{\nu}^*_\circ(x), \quad \check{\theta}_\circ(x) \leqslant \check{\nu}^*_\circ(x).$$

Теперь рассмотрим вспомогательные утверждения, доказанные в кандидатской диссертаций Бурлакова Д.С., позволяющие вычислять показатели ориентированной вращаемости.

Утверждение 1.4 (Бурлаков Д.С. [38]). Пусть вектор-функция

$$x(\tau) = \begin{pmatrix} g_1(\tau) \\ g_2(\tau) \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$$

удовлетворяет условиям $|x(t)| \neq 0$, $g_1(0) = 0$ и все нули g_1 простые. Обозначим через t_k нули g_1, начиная с $t_0 = 0$. Тогда верно тождество

$$|\Theta(x, t_k)| = \left| \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\mathrm{sgn} g_2(t_i) - \mathrm{sgn} g_2(t_{i-1})\right) \right|, \quad k > 0.$$

Утверждение 1.5 (Бурлаков Д.С. [38]). В обозначениях предыдущего утверждения, для произвольного момента времени $t \in \mathbb{R}_+$ верно неравенство

$$\left| |\Theta(x,t)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \mathrm{sgn} g_2(t_i) \right| \right| \leqslant 2\pi,$$

где k – максимальный индекс такой, что $t_k \leqslant t$.

Утверждение 1.6 (Бурлаков Д.С. [38]). Для произвольной вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n_*)$, числа $\gamma > 0$ и функции y, заданной равенством $y(t) = x(\gamma t)$, верно

$$\varkappa(y) = \gamma \varkappa(x),$$

где $\varkappa$ - один из показателей ориентированной вращаемости $\check{\theta}_\bullet, \hat{\theta}_\bullet, \check{\theta}_\circ, \hat{\theta}_\circ$.

Лемма 1.3. Для подобных векторов $x, y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ справедливо равенство

$$\varkappa(x) = \varkappa(y), \tag{1.11}$$

где $\varkappa$ - один из показателей ориентированной вращаемости $\check{\theta}_\bullet, \hat{\theta}_\bullet, \check{\theta}_\circ, \hat{\theta}_\circ$.

Доказательство. Пусть вектор-функции $x, y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ подобны. Тогда для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ выполнено равенство $y = Cx$. Далее, для нижнего слабого показателя ориентированной вращаемости имеем

$$\check{\theta}_\circ(y) = \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(Ly, t)| = \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(LCx, t)| = \check{\theta}_\circ(x).$$

Для остальных показателей ориентированной вращаемости равенство (1.11) доказывается аналогично.

Лемма 1.3 доказана.

1.7 Главные значения показателя системы

Определим главные значения показателей колеблемости и ориентированной вращаемости линейной однородной дифференциальной системы.

Определение 1.14 [165]. Для каждого

$$\varkappa = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ, \check{\theta}_\bullet, \hat{\theta}_\bullet, \check{\theta}_\circ, \hat{\theta}_\circ, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\} \tag{1.12}$$

назовем *i-ым верхним* $\varkappa_{\bar{i}}(A)$ и *нижним* $\varkappa_{\underline{i}}(A)$ *главными* (или *регуляризованными по Миллионщикову*) значениями соответствующего показателя колеблемости или ориентированной вращаемости системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\varkappa_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{V \in G^i(A)} \sup_{x \in V_*} \varkappa(x), \qquad \varkappa_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{V \in G^{n-i+1}(A)} \inf_{x \in V_*} \varkappa(x),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, а через $G^i(A)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$.

Замечание 1.10. Главные значения определенных характеристик колеблемости и вращаемости системы отвечают за наличие у нее подпространства решений заданной размерности, все ненулевые решения которой имеют характеристики, не бо́льшие или не меньшие заданного числа. Например, если для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ и некоторого функционала $\varkappa$ из списка (1.12) имеет место равенство $\varkappa_{\bar{i}}(A) = \gamma$, то найдется такое i-мерное подпространство $V \in G^i(A)$, что при любых $\varepsilon > 0$ и $x \in V_*$ выполнена оценка сверху $\varkappa(x) \leqslant \gamma + \varepsilon$, а для любого i-мерного подпространства решений $V \in G^i(A)$ при любых $\varepsilon > 0$ и $x \in V_*$ выполнена оценка снизу $\varkappa(x) > \gamma - \varepsilon$.

Доказательство результата [165, теорема VI] о главных значениях характеристических частот знаков и нулей переносится на рассматриваемые функционалы (1.12), следовательно, для любой системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ справедливы соотношения

$$0 \leqslant \varkappa_{\bar{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{\bar{n}}(A), \qquad 0 \leqslant \varkappa_{\underline{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{\underline{n}}(A), \tag{1.13}$$

$$\varkappa_{\underline{i}}(A) \leqslant \varkappa_{\bar{i}}(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.14}$$

$$\varkappa_{\underline{1}}(A) = \varkappa_{\bar{1}}(A) = \inf_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x), \qquad \varkappa_{\underline{n}}(A) = \varkappa_{\bar{n}}(A) = \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x).$$

Последние величины обозначим через $\varkappa_1(A)$, $\varkappa_n(A)$ соответственно и назовем младшим и старшим показателем (колеблемости или вращаемости) системы A.

Регуляризованные по Миллионщикову значения показателей колеблемости системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ будем рассматривать как функционалы на линейном топологическом пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ с естественными для функции линейными операциями и равномерной на $\mathbb{R}_+$ топологией, задаваемой метрикой (1.2).

Новые свойства главных значений показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка представлены в работах [280, 281, 297].

1.8 Спектры показателей уравнений и систем

С каждой из асимптотических характеристик $\varkappa$, описанных в определениях 1.3, 1.4 и 1.13, и с каждой системой $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ (а в случае $\varkappa = \hat{\omega}^-, \check{\omega}^-, \hat{\omega}^0, \check{\omega}^0, \hat{\omega}^+, \check{\omega}^+$ только с системой $A \in \tilde{\mathcal{E}}^n$) можно связать функционал

$$\varkappa\colon \mathcal{S}_*(A) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}. \tag{1.15}$$

Определение 1.15. *Спектром* показателя $\varkappa$ (1.15) системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ назовем множество $\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$, а значение показателя $\varkappa$, принадлежащее спектру системы A, назовем:

а) *метрически типичным*, если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество наборов $x(0) \in \mathbb{R}^n$ начальных значений которых имеет полную меру в $\mathbb{R}^n$;

б) *метрически существенным* [172], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество наборов $x(0) \in \mathbb{R}^n$ начальных значений которых содержит множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

в) *топологически типичным*, если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество наборов $x(0) \in \mathbb{R}^n$ начальных значений которых служит дополнением к множеству первой категории Бэра [111], или содержит *всюду плотное множество типа* G_δ (т. е. представимое в виде счетного пересечения открытых и всюду плотных множеств);

г) *топологически существенным* [173], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество наборов $x(0) \in \mathbb{R}^n$ начальных значений которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Лемма 1.4. *Спектр показателя* $\varkappa$ (1.15) *любой системы* $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ *содержит не более чем счетное множество метрически существенных значений и не более одного метрически типичного значения.*

Доказательство (см. [188]). Пусть фиксирована система $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ и показатель $\varkappa$ (1.15).

1. Каждому метрически существенному значению $\gamma \in \mathbb{R}_+$ величины $\varkappa$ поставим в соответствие то множество $V_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ положительной меры, которое, по определению, содержится во множестве начальных значений $x(0)$ всех решений $x \in \mathcal{S}(A)$, имеющих показатель $\varkappa(x) = \gamma$.

2. Заметим, что никакие два множества V_{γ_1} и V_{γ_2}, соответствующие двум разным существенным значениям $\gamma_1 \neq \gamma_2$, не пересекаются: иначе одно

решение

$$x \in V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}$$

имело бы два различных значения частоты

$$\gamma_1 = \varkappa(x) = \gamma_2,$$

что невозможно.

3. Каждому множеству V_γ поставим в соответствие такое большое значение $n \in \mathbb{N}$, чтобы его пересечение

$$V_{\gamma,n} = V_\gamma \cap B(n, 0)$$

с шаром $B(n, 0)$ (радиуса n, с центром в начале координат) имело меру, бóльшую $1/n$. Для нахождения такого значения n достаточно сначала найти какой-нибудь шар, пересекающийся с множеством V_γ по множеству некоторой положительной меры μ (если такого шара нет, то мера множества V_γ просто равна нулю), а затем увеличить его радиус так, чтобы выполнялась оценка $\mu > 1/n$. Полученные множества $V_{\gamma,n}$, соответствующие разным значениям γ, по-прежнему попарно не пересекаются.

4. Прообраз каждого значения $n \in \mathbb{N}$ при полученном сквозном отображении

$$\gamma \mapsto V_\gamma \mapsto V_{\gamma,n} \mapsto n$$

содержит лишь конечное число значений γ (поскольку в шаре радиуса n нельзя разместить бесконечно много непересекающихся множеств $V_{\gamma,n}$ мерой большей $1/n$ каждое). Поэтому множество всех существенных значений γ представляется в виде счетного объединения конечных множеств, а значит, не более чем счетно.

5. Наконец, невозможность сразу двух значений показателя быть метрически типичными обусловлена тем, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ нельзя выбрать два непересекающихся подмножества полной меры.

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Спектр показателя* $\varkappa$ (1.15) *любой системы* $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ *содержит не более чем счетное множество топологически существенных значений и не более одного топологически типичного значения.*

Доказательство (см. [188]). Пусть фиксирована система $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ и показатель $\varkappa$ (1.15).

1. Каждому топологически существенному значению $\gamma \in \mathbb{R}_+$ величины $\varkappa$ поставим в соответствие то открытое множество $U_\gamma \subset \mathbb{R}^n$, которое, по определению, содержит дополнение V_γ к множеству *первой категории*

(счетному объединению нигде не плотных множеств) в U_γ, состоящее из начальных значений $x(0)$ решений $x \in \mathcal{S}(A)$, имеющих частоту $\varkappa(x) = \gamma$.

2. Заметим, что никакие два множества U_{γ_1} и U_{γ_2}, соответствующие двум разным существенным значениям $\gamma_1 \neq \gamma_2$, не пересекаются: иначе в их открытом пересечении $U_{\gamma_1} \cap U_{\gamma_2}$ нашелся бы замкнутый шар U (достаточно малого радиуса), образующий самостоятельное полное метрическое пространство и содержащий сразу два непересекающихся дополнения

$$(V_{\gamma_1} \cap U) \cap (V_{\gamma_2} \cap U) = \varnothing$$

к множествам первой категории (в U), а тогда два дополнения к этим дополнениям, образующие множества первой категории, будучи объединенными, заполнили бы весь шар

$$\big(U \setminus (V_{\gamma_1} \cap U)\big) \cup \big(U \setminus (V_{\gamma_2} \cap U)\big) = U,$$

что невозможно по теореме Бэра [111].

3. Множество попарно непересекающихся открытых множеств U_γ в пространстве $\mathbb{R}^n$ не может оказаться более чем счетным (ведь в каждом множестве U_γ можно указать свою точку с рациональными координатами, а таких точек — лишь счетное множество). Поэтому и множество порождающих их существенных значений γ также не более чем счетно.

4. Наконец, для доказательства невозможности сразу двух значений показателя быть топологически типичными достаточно провести то же рассуждение, что и в пункте 2 выше, взяв в качестве шара U все пространство $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1.5 доказана.

Глава 2

Спектры показателей колеблемости и частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений

В данной главе доказаны утверждения о возможных спектрах показателей колеблемости и частот Сергеева линейного однородного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами. Изучено свойство остаточности (инвариантности относительно изменения решения на любом конечном отрезке) у сильных показателей колеблемости на множестве $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{n}$ при любом $n > 2$, а также возможность выполнения строгих неравенств между слабыми и сильными показателями в некоторой точке указанного множества.

В разделе 2.2 для некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка установлены эффективные формулы, позволяющие вычислять характеристики колеблемости, пользусь только коэффициентами уравнения [317, 324]. Даны вспомогательные определения и факты, необходимые для доказательства основных результатов настоящего раздела. Установлено равенство между нижними и верхними характеристиками колеблемости и вращаемости на множестве решений уравнения Хилла, а также взаимосвязь нецелой частоты уравнения Хилла с мультипликаторами. Основным результатом этого раздела является критерий инвариантности частоты уравнения Хилла относительно равномерно малых возмущений уравнения [258].

В разделе 2.3 доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней которых содержат наборы, состоящие из любого конечного наперед заданного числа метрически и топологически существенных значений

[260, 274]. Отказавшись от периодичности коэффициентов, доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней которых содержат счетные множества метрически и топологически существенных значений [269, 275, 292].

Кроме того, доказано существование дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами показателей колеблемости. При этом спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с заданными положительными несоизмеримыми концами [267, 270]. Оказалось, что для каждого решения построенного уравнения все показатели колеблемости совпадают между собой.

В разделе 2.4 для любого $n > 2$ методом варьирования системы построен пример линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными неограниченными на временной полуоси коэффициентами, спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней которого совпадают с наперед заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль [304, 323, 326].

В разделе 2.5 установлено, что сильные показатели колеблемости, рассматриваемые как функционалы на множестве $\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ при любом $n > 2$, не являются остаточными [268, 254]. Кроме того, при любом $n > 2$ приводится функция из множества $\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$, у которой показатели колеблемости являются точными, но не абсолютными [285, 305]. Для доказательства этих фактов используется метод варьирования системы на конечном участке полуоси.

В разделе 2.6 полностью изучены множества значений характеристик колеблемости решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами [278, 295, 312]. Оказалось, что сильные и слабые показатели колеблемости строгих смен знаков решений неоднородного уравнения принимают лишь нулевые значения, а для любого решения все его сильные и слабые показатели колеблемости нестрогих смен знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают между собой. Установлено, что спектры сильных и слабых показателей колеблемости нестрогих смен знаков, нулей, корней и гиперкорней неоднородного уравнения состоят из набора их главных значений.

2.1 Обзор литературы и формулировка основных результатов

Рассмотрим уравнение Хилла

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

в котором $p: \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ есть непрерывная периодическая функция с периодом T. Не нарушая общности, можно считать, что $T = \pi$.

Запишем уравнение Хилла в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p(t)x. \tag{2.2}$$

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$f(0) = 1, \quad \dot{f}(0) = 0, \quad g(0) = 1, \quad \dot{g}(0) = 0.$$

Тогда

$$U(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix}, \quad U(\pi) = \begin{pmatrix} f(\pi) & g(\pi) \\ \dot{f}(\pi) & \dot{g}(\pi) \end{pmatrix}$$

– фундаментальная матрица и матрица монодромии системы (2.2) соответственно. Напомним, что мультипликаторы уравнения (2.1) - это собственные значения матрицы $U(\pi)$.

В работах [165, 174, 180] установлено, что на множестве решений уравнений второго порядка все верхние (как и нижние) характеристики колеблемости и вращаемости совпадают между собой и их спектры состоят из одного значения. Причем существует решение некоторого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$, все верхние характеристики колеблемости и вращаемости которого не совпадают с нижними [182]. Оказалось, что последнее свойство не имеет место на множестве решений уравнения Хилла (см. [301, 320]).

Теорема 2.1. *Для любого ненулевого решения уравнения (2.1) все частоты Сергеева, показатели колеблемости и ориентированной вращаемости являются точными.*

Частоту $\eta(p)$ уравнения Хилла $(0, p) \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{P}^2(\pi)$ определим как частоту нулей Сергеева какого-либо одного нетривиального решения. Если $\eta(p) \in \mathbb{Z}$, то о его мультипликаторах почти ничего сказать нельзя, кроме того, что они вещественные, а их знак совпадает со знаком $(-1)^{\eta(p)}$. В противном случае по частоте Сергеева однозначно можно восстановить мультипликаторы уравнения Хилла, как показывает следующая

Теорема 2.2. *Если частота уравнения Хилла $(0, p) \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{P}^2(\pi)$ удовлетворяет условию $\eta(p) \notin \mathbb{Z}$, то его мультипликаторы равны $\mu_\pm = e^{\pm i\eta(p)\pi}$.*

Для формулировки следующего результата нам понадобится

Определение 2.1 [148]. Будем называть частоту уравнения Хилла $(0,p) \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{P}^2(\pi)$ *инвариантной относительно равномерно малых возмущений* уравнения, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого уравнения Хилла $(0,q) \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{P}^2(\pi)$, удовлетворяющего оценке $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |q(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$, имеет место равенство $\eta(p) = \eta(q)$.

В работах [165, 174] установлено, что на множестве $\mathcal{E}^2$ каждая из характеристик колеблемости Сергеева является не только непрерывной в смысле равномерной нормы на полупрямой $\mathbb{R}_+$, но и инвариантной относительно бесконечно малых возмущений. В связи с этим возникает естественный вопрос: существует ли подмножество $\mathcal{E}^2$, на котором характеристики колеблемости не будут меняться, несмотря на произвольные, но достаточно малые возмущения?

Ответ на этот вопрос оказался положительным, как показывает следующая

Теорема 2.3. *Для того чтобы частота уравнения Хилла* $(0,p) \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{P}^2(\pi)$ *была инвариантна относительно равномерно малых возмущений, необходимо и достаточно, чтобы она была рациональна* $\eta(p) = \frac{s}{k}\,(k,s \in \mathbb{N})$ *и для некоторых его решений* y, z *выполнялось неравенство*

$$\Theta\left(\psi^2 y, \pi k\right) < \pi s < \Theta\left(\psi^2 z, \pi k\right), \tag{2.3}$$

где $\Theta\left(\psi^2 x, \pi k\right)$ *– ориентированный угол между векторами* $(x(0), \dot{x}(0))$ *и* $(x(\pi k), \dot{x}(\pi k))$*, т.е.*

$$\Theta\left(\psi^2 x, \pi k\right) = \int\limits_0^{\pi k} \frac{x\ddot{x}(t) - \dot{x}^2(t)}{x^2(t) + \dot{x}^2(t)}\, dt.$$

В докладах [172, 173] И. Н. Сергеева было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат одно типичное значение, а спектры частот Сергеева нулей линейного автономного уравнения третьего порядка может содержать максимум два существенных значения, зато в случае уравнения четвертого порядка — любое наперед заданное число существенных значений.

Первые результаты исследований спектров показателей колеблемости нулей линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка представлены в работах [252, 288, 289, 307].

В работе [274] доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры частот Сергеева нулей и показателей колеблемости нулей которого содержат любое наперед заданное конечное число метрически и топологически существенных значений. В следующей теореме эти свойства перенесены и на остальные характеристики колеблемости.

Теорема 2.4. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется уравнение $a \in \mathcal{E}^3$ с периодическими коэффициентами, имеющее набор решений $y_1, y_2, \ldots, y_N$, удовлетворяющий при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ условиям*

$$\nu^{\alpha}(y_i) = \omega^{-}(y_j) = \omega^{0}(y_j) = \omega^{+}(y_j), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\omega^{-}(y_i) \neq \omega^{-}(y_j), \quad i \neq j,$$

причем все эти значения характеристик колеблемости являются метрически и топологически существенными.

В работах [190, 269] доказаны существования дифференциальных уравнений третьего порядка со счетными множествами существенных (и метрически, и топологически) значений частот Сергеева нулей и показателей колеблемости нулей соответственно. Эти результаты следующая теорема обобщает сразу на все характеристики колеблемости.

Теорема 2.5. *Существует уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, имеющее последовательность решений $y_1, y_2, \ldots$, удовлетворяющая при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ условиям*

$$\nu^{\alpha}(y_i) = \omega^{-}(y_i) = \omega^{0}(y_i) = \omega^{+}(y_i) = 2 \cdot 3^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

причем все эти значения характеристик колеблемости являются существенными (и метрически, и топологически).

Для автономного линейного уравнения спектр характеристических частот не совпадает, вообще говоря, с множеством *модулей мнимых частей* всех корней соответствующего характеристического многочлена. С ним совпадает лишь набор специально выделенных (с использованием процедуры регуляризации по Миллионщикову) *главных значений* частот этого уравнения [165].

В [65] доказано, что для произвольных положительных несоизмеримых чисел $\omega_2 > \omega_1$ существует автономное уравнение четвертого порядка, спектр верхней частоты Сергеева корней которого совпадает с отрезком $[\omega_1, \omega_2]$. В [191] установлено существование периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней которого содержат невырожденный отрезок. Этот результат в работе [270] был перенесен и на спектры показателей колеблемости нулей дифференциальных уравнений третьего порядка, правда, с непрерывными неограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Оказалось, что последний результат можно обобщить сразу на все характеристики колеблемости, спектры которых состоят из отрезка с заданными положительными несоизмеримыми концами.

Теорема 2.6. *Для любых несоизмеримых $\omega_2 > \omega_1 > 0$ найдется такое уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, что при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы соотношения*

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(a)) = \omega^-(\mathcal{S}_*(a)) = \omega^0(\mathcal{S}_*(a)) = \omega^+(\mathcal{S}_*(a)) = [\omega_1, \omega_2].$$

В работах [22, 40] доказано, что спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Также в предположении, что спектры содержат точку нуль, получено обращение этого утверждения [23, 56]. Последнее свойство удалось обобщить и на верхние сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней.

Теорема 2.7. *Для произвольного содержащего нуль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ и любого $n > 2$ существует дифференциальное уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющее при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +\}$ равенствам*

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^-(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^0(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^+(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}. \qquad (2.4)$$

Важным свойством характеристических частот и показателей колеблемости, призванным облегчить их исследование, является остаточность [162]. Слабые показатели колеблемости гиперкорней на множестве $\mathcal{S}^n_\mathcal{M}$, $n \geqslant 2$, как оказалось [177], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) частоты Сергеева и показатели колеблемости равны между собой [174]. С другой стороны, на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений все частоты Сергеева являются остаточными [165]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех показателей колеблемости. Вопросы отсутствия остаточности на множестве $\mathcal{S}^2_\mathcal{M}$ обсуждались в работах [255, 283, 298], а на множестве решений $\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ многомерных систем — в [257, 286, 299, 300]. В связи с этим возникает естественный вопрос: будет ли остаточным какой либо из сильных показателей колеблемости на $\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$, начиная с некоторого $n > 2$?

Для формулировки основного результата данной главы нам понадобится

Определение 2.2 [162]. Назовем функционал $\varkappa : \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *остаточным*, если для любой пары функций $x, y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$, совпадающих на всей полуоси $t \in \mathbb{R}_+$, кроме некоторого отрезка конечной длины, выполнено равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

Оказалось, что сильные показатели колеблемости не обладают свойством остаточности, как показывает следующая

Теорема 2.8. *При любом $n > 2$ ни один из функционалов*

$$\hat{\nu}^{\sim}_{\bullet}, \check{\nu}^{\sim}_{\bullet}, \hat{\nu}^{0}_{\bullet}, \check{\nu}^{0}_{\bullet}, \hat{\nu}^{+}_{\bullet}, \check{\nu}^{+}_{\bullet}, \hat{\nu}^{*}_{\bullet}, \check{\nu}^{*}_{\bullet} : \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \tag{2.5}$$

не является остаточным.

В связи с заключением теоремы 2.8 и нестрогими неравенствами между одноименными слабыми и сильными показателями колебелемости возникает следующий вопрос: могут ли некоторые показатели колеблемости одновременно быть точными, но не абсолютными? Ответ на этот вопрос оказался положительным, как показывает следующая

Теорема 2.9. *При любом $n > 2$ существует вектор-функция $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\nu^{\sim}_{\circ}(y) = \nu^{0}_{\circ}(y) = \nu^{+}_{\circ}(y) = \nu^{*}_{\circ}(y) < \nu^{\sim}_{\bullet}(y) = \nu^{0}_{\bullet}(y) = \nu^{+}_{\bullet}(y) = \nu^{*}_{\bullet}(y). \tag{2.6}$$

Показатели колеблемости нулей решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами из множества $\mathcal{C}^n \times Q$ были определены и изучены только в работе [168]. В частности, были найдены главные значения показателей колеблемости нулей неоднородного уравнения. В связи с этим возникает естественный вопрос о полном описании всех показателей колеблемости на множестве решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами из пространства $\mathcal{C}^n \times Q$.

Следующие утверждения дают исчерпывающий ответ на этот вопрос.

Теорема 2.10. *Для любого решения $y \in \mathcal{S}(a, f)$ любого неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ справедливы равенства*

$$\sigma^{-}(y) = \zeta^{-}(y) = 0,$$

$$\sigma^{\sim}(y) = \zeta^{\sim}(y) = \sigma^{0}(y) = \zeta^{0}(y) = \sigma^{+}(y) = \zeta^{+}(y) = \sigma^{*}(y) = \zeta^{*}(y).$$

Из второй цепочки равенств с учетом результатов работы [168] имеем

- *для любого неоднородного уравнения* $(a,f)\in\mathcal{C}^n\times Q$ *при любом*

$$\varkappa=\zeta^{\sim},\zeta^{0},\zeta^{+},\zeta^{*},\sigma^{\sim},\sigma^{0},\sigma^{+},\sigma^{*}$$

  выполнены равенства

$$\varkappa_{\bar{j}}(a,f)=\varkappa_{\underline{j}}(a,f)=\min\{|\operatorname{Im}\lambda_j|,\beta_1\},\qquad j=0,1,\ldots,n,$$

  где $|\operatorname{Im}\lambda_0|=+\infty$, а $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ *- корни характеристического многочлена соответствующего однородного уравнения* $(a,0)$, *упорядоченные по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.*

Теорема 2.11. *Спектры сильных и слабых показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней неоднородного уравнения* $(a,f)\in\mathcal{C}^n\times Q$ *состоят из набора их главных значений.*

Ниже приводятся доказательства сформулированных теорем.

2.2 Свойства характеристик колеблемости на множестве решений однородных уравнений второго порядка

Сначала рассмотрим три класса дифференциальных уравнений, для которых показатели колеблемости можно вычислять не находя самих решений.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}+2p(t)\dot{y}+q(t)y=0 \tag{2.7}$$

с непрерывными коэффициентами $p(t)$, $q(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

Утверждение 2.1. Предположим, что существуют постоянные p и q, удовлетворяющие условию "эллиптичности":

$$q-p^2=c^2>0,$$

такие, что

$$\int\limits_0^t|p(t)-p|dt=o(t),\quad \int\limits_0^t|q(t)-q|dt=o(t).$$

Тогда для любого нетривиального решения y уравнения (2.7) выполнено равенство $\omega(y)=c$.

Доказательство. Выберем произвольное ненулевое решение y уравнения (2.7). Из теоремы 1 [192] следует эквивалентность функций $\nu^0(y,t)$, $\frac{ct}{\pi}$ при $t \to +\infty$. Откуда получаем

$$\omega(y) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \cdot \frac{ct}{\pi} = c.$$

Утверждение 2.1 доказано.

Утверждение 2.2. Пусть задано уравнение

$$\ddot{y} + q^2(t)y = 0, \tag{2.8}$$

где непрерывные при $t \geqslant 0$ функций $q(t) > 0$, $\dot{q}(t)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\dot{q}(t)}{2q^2(t)} = \gamma, \quad 0 \leqslant |\gamma| < 1. \tag{2.9}$$

Тогда для любого ненулевого решения y уравнения (2.8) выполнено равенство

$$\omega(y) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{t} \int_0^t q(\tau)d\tau. \tag{2.10}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное решение уравнения (2.8). Заметим, что помимо некоторой гладкости функции $q(t)$ условие (2.9) означает, что $q(t)$ не может убывать быстрее, чем $\frac{1}{t}$, но может как угодно быстро возрастать. Поэтому несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} q(\tau)d\tau$ расходится. Замена независимой переменной

$$\xi = \int_0^t q(\tau)d\tau \tag{2.11}$$

преобразует (2.8) в уравнение типа (2.7):

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\left(\frac{\dot{q}(t)}{2q^2(t)}\right)\frac{dy}{d\xi} + y = 0. \tag{2.12}$$

Очевидно, что полуось $[0,+\infty)$ переходит в себя при преобразовании (2.11). Следовательно, к уравнению (2.12) применимо утверждение 1, поэтому (см. теорема 3 [192]) функции $\nu^0(y,t)$ и $\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\pi}\int_0^t q(\tau)d\tau$ эквивалентны при $t \to +\infty$, а значит, выполнено равенство (2.10).

Утверждение 2.2 доказано.

Утверждение 2.3. Пусть задано уравнение

$$\ddot{y} + q(t)y = 0, \tag{2.13}$$

где, непрерывная на $\mathbb{R}_+$, функция $q(t)$ удовлетворяет при $s \to +\infty$ условию

$$\sup_{s\leqslant t<+\infty} \frac{|\ln q(t)/q(s)|}{1+\int_s^t \sqrt{q(\tau)}d\tau} \to 0. \tag{2.14}$$

Тогда для любого ненулевого решения y уравнения (2.13) выполнено равенство

$$\omega(y) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sqrt{q(\tau)}d\tau.$$

Доказательство. Выберем произвольное ненулевое решение y уравнения (2.13). Из работы [203] следует эквивалентность функций $\nu^0(y,t)$, $\frac{1}{\pi}\int_0^t \sqrt{q(\tau)}d\tau$ при $t \to +\infty$. Откуда получаем

$$\omega(y) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^t \sqrt{q(\tau)}d\tau = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sqrt{q(\tau)}d\tau.$$

Утверждение 2.3 доказано.

Замечание 2.1. Для того чтобы выполнялось условие (2.14), необходимо и достаточно следующее:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{p(t)}dt = +\infty, \quad \frac{p\left(t + c/\sqrt{p(t)}\right)}{p(t)} \to 1$$

при $t \to +\infty$ равномерно на каждом фиксированном ограниченном c-интервале прямой $-\infty < c < +\infty$.

Теперь рассмотрим свойства частот Сергеева уравнения Хилла. Для этого нам понадобятся вспомогательные определения и факты.

В системе (2.2) перейдем от декартовых координат (x,y) к полярным координатам (r,φ) с помощью равенств $x = r\sin\varphi, \quad y = r\cos\varphi$. При этом для полярного угла получим дифференциальное уравнение

$$\dot\varphi = \cos^2\varphi + p(t)\sin^2\varphi \equiv f(t,\varphi). \tag{2.15}$$

Если в квадрате $0 \leqslant t < \pi$, $0 \leqslant \varphi < \pi$ задано поле направлений, определяемое уравнением (2.15), то во всей плоскости оно известно из-за периодичности правой части уравнения по обеим переменным

$$f(t+\pi,\varphi) = f(t,\varphi), \quad f(t,\varphi+\pi) = f(t,\varphi).$$

Поэтому естественно переменные t и φ интерпретировать как углы и тогда следует отождествить между собой точки вида $(t + k\pi, \varphi + \pi n)$ с целыми k и n. Геометрически такое отождествление можно осуществить путем склеивания противоположных сторон основного квадрата $0 \leqslant t \leqslant \pi$,

$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. В результате такого склеивания мы получим поверхность тора T^2 как произведение двух окружностей S^1 и S^2 длин π; с помощью первой определяются параллели, а с помощью второй - меридианы. Согласно теории Пуанкаре-Данжуа дифференциальных уравнений на торе, поведение решений полностью характеризуется числом вращения ρ и некоторым сохраняющим ориентацию гомеоморфным отображением H окружности на себя (см., например [148]).

Нетрудно заметить, что функция f ограничена

$$|f(t,\varphi)| \leqslant \max\{1, |p(t)|\} \tag{2.16}$$

и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t,\varphi) - f(t,\phi)| \leqslant (1 + |p(t)|)|\varphi - \phi|. \tag{2.17}$$

Оценка (2.16) гарантирует существование при всех t решения уравнения (2.15), удовлетворяющего любому начальному условию, а условие Липшица (2.17) обеспечивает единственность этого решения и его непрерывную зависимость от начальных условий.

Обозначим через $\varphi(t,\varphi_0)$ решение уравнения (2.15), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = \varphi_0$. В силу периодичности функции f найдется такое целое k, что выполняется

$$\varphi(t, \varphi_0 + k\pi) = \varphi(t,\varphi_0) + k\pi.$$

Определение 2.3 [148]. Число вращения ρ дифференциального уравнения (2.15) определяется следующим образом:

$$\rho = \lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t,\varphi_0)}{t}, \tag{2.18}$$

причем написанный предел существует равномерно по φ_0.

Замечание 2.2. Число вращения ρ уравнения (2.15) неотрицательно.

В самом деле. Так как $f(t,0) \geqslant 0$ при всех t, то $\varphi(t,\varphi_0) \geqslant 0$ при $\varphi_0 \geqslant 0$ и $0 \leqslant t < +\infty$. Поэтому согласно (2.18) выполнено неравенство $\rho \geqslant 0$.

Сформулируем и докажем основную

Лемма 2.1. Верхняя $\hat{\omega}$ и нижняя $\check{\omega}$ частоты Сергеева для уравнения Хилла $(0,p) \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{P}^2(\pi)$ совпадают с числом вращения ρ соответствующего уравнения (2.15):

$$\hat{\omega}(p) = \check{\omega}(p) = \rho.$$

Доказательство. Так как $p(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t < +\infty$, то при любом $\varphi_0 \geqslant 0$ функция $\varphi(t,\varphi_0)$ возрастает.

Обозначим через (t_n) последовательность нулей какого-либо решения $x(t)$ уравнения (2.1), расположенных в порядке возрастания. При обращении $x(t)$ в нуль функция $\varphi(t,\varphi_0)$ проходит все значения πn. Поэтому при $n \to +\infty$ имеем $\pi n \sim t_n$, а значит, $\nu^0(x,t) \sim \left[\frac{\varphi(t,\varphi_0)}{\pi}\right]$ при $t \to +\infty$, где $[a]$– целая часть числа a.

Следовательно, для выбранного решения x будем иметь

$$\hat{\omega}(p) = \check{\omega}(p) = \omega(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^0(x,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\left[\frac{\varphi(t,\varphi_0)}{\pi}\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t,\varphi_0)}{t} = \rho.$$

Лемма 2.1 доказана.

Теперь докажем теоремы 2.1–2.3.

Доказательство теоремы 2.1 автоматически вытекает из леммы 2.1.

Доказательство теоремы 2.2 вытекает из леммы 2.1 и теоремы 3 [77].

Доказательство теоремы 2.3. Сначала докажем необходимость. Пусть частота уравнения Хилла инвариантна относительно равномерно малых возмущений. В силу леммы 2.1 последнее равносильно тому, что число вращения уравнения (2.15) инвариантна относительно равномерно малых возмущений. Отсюда, с одной стороны, из леммы 11.1 [148, с. 176] вытекает рациональность числа вращения уравнения (2.15). С другой стороны, на основании леммы 11.2 [148, с. 178] функция $\Delta(\varphi_0) = \varphi(\pi k,\varphi_0) - \varphi_0 - \pi s$ принимает значения разных знаков на полуинтервале $[0,\,\pi)$. Последнее условие равносильно существованию решений y, z уравнения Хилла, удовлетворяющих неравенству (2.3). Действительно, для функции y ориентированный угол между векторами $\psi^2 y(0) \equiv (y(0), \dot{y}(0))$ и $\psi^2 y(\pi k) \equiv (y(\pi k), \dot{y}(\pi k))$ вычисляется по формуле

$$\Theta\left(\psi^2 y, \pi k\right) = \int\limits_0^{\pi k} \frac{d}{dt}\mathrm{arctg}\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\,dt = \int\limits_0^{\pi k} \frac{y\ddot{y}(t) - \dot{y}^2(t)}{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt.$$

Необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. Пусть частота уравнения Хилла рациональна $\frac{s}{k}\,(k, s \in \mathbb{N})$ и для некоторых решений y, z уравнения Хилла выполнено неравенство (2.3), гарантирующее существование точек строгих знаков у функции $\Delta(\varphi_0)$ на полуинтервале $[0,\,\pi)$. Откуда на основании леммы 11.3 [148, с. 178] и леммы 2.1 получаем инвариантность частоты уравнения Хилла относительно равномерно малых возмущений.

Теорема 2.3 доказана.

2.3 Спектры характеристик колеблемости однородных уравнений третьего порядка

В этом разделе доказаны существования дифференциальных уравнений, спектры характеристик колеблемости которых достигают мощность континуума или содержат не более чем счетные множества их существенных значений.

Для управления фундаментальной системой решений дифференциального уравнения третьего порядка нам понадобится следующая

Лемма 2.2. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R}$ найдутся уравнения $a_k, b_k \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, фундаментальные системы решений $x_1, y_1, z_1 \in \mathcal{S}_*(a_k)$ и $x_2, y_2, z_2 \in \mathcal{S}_*(b_k)$ которых при каждом $\alpha \in \{-, 0, +\}$ удовлетворяют следующим условиям

$$(x_1, y_1, z_1)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + c,\ 1,\ \sin t), & 0 \leqslant t \leqslant (2k+1)\pi, \\ (\exp(-\cos t) + c + 3,\ 1,\ \sin t), & t \geqslant (2k+4)\pi, \end{cases}$$

$$(x_2, y_2, z_2)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + c + 3,\ 1,\ \sin t), & 0 \leqslant t \leqslant 2k\pi, \\ (\exp(-\cos t) + c,\ 1,\ \sin t), & t \geqslant (2k+3)\pi, \end{cases}$$

$$\begin{gathered} \nu^\alpha\left(x_1(t) - c - 1,\ (2k+1)\pi,\ (2k+4)\pi\right) = \\ = \nu^\alpha\left(x_1(t) - c - 4,\ (2k+1)\pi,\ (2k+4)\pi\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\nu^\alpha\left(x_2(t) - c - 1,\ 2k\pi,\ (2k+3)\pi\right) = \nu^\alpha\left(x_2(t) - c - 4,\ 2k\pi,\ (2k+3)\pi\right) = 0.$$

Доказательство леммы 2.2.

1. Для набора функций

$$f_1(t) = \exp(-\cos t) + c, \quad f_2(t) = 1, \quad f_3(t) = \sin t,$$

определитель Вронского

$$W_{f_1,f_2,f_3}(t) = \exp(-\cos t)\left(1 + \sin^2 t \cos t\right)$$

при любом $t \geqslant 0$ положителен, а линейное однородное уравнение, решениями которого они являются, имеет вид (см. [198]):

$$\frac{1}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \begin{vmatrix} \exp(-\cos t) + c & 1 & \sin t & y \\ \sin t \exp(-\cos t) & 0 & \cos t & \dot{y} \\ (\cos t + \sin^2 t)\exp(-\cos t) & 0 & -\sin t & \ddot{y} \\ (\sin^3 t + 3\sin t\cos t - \sin t)\exp(-\cos t) & 0 & -\cos t & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\dddot{y} - \frac{\Delta_1(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \cdot \ddot{y} + \frac{\Delta_2(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \cdot \dot{y} = 0, \tag{2.20}$$

где

$$\Delta_1(t) = \exp(-\cos t)(\cos t \sin^3 t + 3 \sin t \cos^2 t),$$
$$\Delta_2(t) = \exp(-\cos t)(1 - 2\cos t \sin^2 t - \sin^4 t).$$

2. Пусть заданы $k \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R}$. Введем обозначения

$$T_1^k \equiv (2k+1)\pi, \quad T_2^k \equiv T_1^k + \pi, \quad T_3^k \equiv T_1^k + 2\pi, \quad T_4^k \equiv T_1^k + 3\pi.$$

Теперь на отрезке $[T_1^k,\, T_4^k]$ выберем непрерывно трижды дифференцируемую функцию $\theta_1(t)$, убывающую на интервалах $(T_1^k,\, T_2^k)$, $(T_3^k,\, T_4^k)$, возрастающую на $(T_2^k,\, T_3^k)$, имеющую перегибы в точках $s_1^k \equiv T_1^k + \pi/2$, $s_2^k \equiv T_2^k + \pi/2$, $s_3^k \equiv T_3^k + \pi/2$ и обладающую свойствами

$$\theta(T_1^k) = f_1(T_1^k), \quad \theta(T_2^k) = c + 2, \quad \theta(T_3^k) = c + 3,5, \quad \theta(T_4^k) = f_1(T_4^k) + 3,$$
$$\theta'(T_1^k) = f_1'(T_1^k), \quad \theta''(T_1^k) = f_1''(T_1^k), \quad \theta'''(T_1^k) = f_1'''(T_1^k),$$
$$\theta'(T_4^k) = f_1'(T_4^k), \quad \theta''(T_4^k) = f_1''(T_4^k), \quad \theta'''(T_4^k) = f_1'''(T_4^k).$$

Определитель Вронского

$$W_{\theta_1,f_2,f_3}(t) = \theta_1'(t)\sin t + \theta_1''(t)\cos t$$

системы функций $\theta_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ на отрезке $[T_1^k,\, T_4^k]$ положителен, так как неотрицательные функции $g_1(t) = \theta_1'(t)\sin t$ и $g_2(t) = \theta_1''(t)\cos t$ на отрезке $[T_1^k,\, T_4^k]$ одновременно в нуль не обращаются.

3. Таким образом, положительность определителя Вронского системы трижды непрерывно дифференцируемых функций

$$x_1(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \leqslant T_1^k, \\ \theta_1(t), & t \in [T_1^k,\, T_4^k], \\ f_1(t) + 3, & t \geqslant T_4^k, \end{cases} \quad y_1(t) = f_2(t), \quad z_1(t) = f_3(t)$$

позволяет восстановить уравнение третьего порядка, решением которого они являются, совпадающим на $[0,\, T_1^k] \cup [T_4^k,\, +\infty)$ с уравнением (2.20).

4. Так как функция $\theta_1(t)$ на отрезке $[T_1^k,\, T_4^k]$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения соответственно в точках T_2^k, T_3^k, то справедливы оценки

$$c + 2 = \theta_1(T_2^k) \leqslant x_1(t) \leqslant \theta_1(T_3^k) = c + 3,5, \quad t \in [T_1^k,\, T_2^k],$$

на оснований которых на отрезке $[T_1^k,\, T_4^k]$ имеем

$$x_1(t) - c - 1 = \theta_1(t) - c - 1 \geqslant 1, \quad x_1(t) - c - 4 = \theta_1(t) - c - 4 \leqslant -0,5.$$

Последние две оценки устанавливают справедливость равенств (2.19).

5. На отрезке $[T_0^k, T_3^k]$ зададим функцию $\theta_2 \in C^3\left([T_0^k, T_3^k]\right)$, возрастающую на интервалах $(T_0^k,\, T_1^k)$, $(T_2^k,\, T_3^k)$, убывающую на $(T_1^k,\, T_2^k)$, имеющую перегибы в точках s_0^k, s_1^k, s_2^k, и обладающую свойствами

$$\theta_2(T_0^k) = f_1(T_0^k), \quad \theta_2(T_1^k) = c + 0,5 + e^{-1},$$

$$\theta_2(T_2^k) = c - 1,5, \quad \theta_2(T_3^k) = f_1(T_3^k) - 3,$$

$$\theta_2'(T_0^k) = f_1'(T_0^k), \quad \theta_2''(T_0^k) = f_1''(T_0^k), \quad \theta_2'''(T_0^k) = f_1'''(T_0^k),$$

$$\theta_2'(T_3^k) = f_1'(T_3^k), \quad \theta_2''(T_3^k) = f_1''(T_3^k), \quad \theta_2'''(T_3^k) = f_1'''(T_3^k),$$

где $s_0^k = s_1^k - \pi$, $T_0^k = T_1^k - \pi$.

Система функций

$$x_2(t) = \begin{cases} f_1(t) + 3, & t \leqslant T_0^k, \\ \theta_2(t), & t \in [T_0^k,\, T_3^k], \\ f_1(t), & t \geqslant T_3^k, \end{cases} \quad y_2(t) = f_2(t), \quad z_2(t) = f_3(t)$$

с положительным определителем Вронского является фундаментальной для некоторого уравнения $b_k \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

Заметим, что из оценки

$$x_2(t) \leqslant \theta_2(T_1^k) = c + 0,5 + e^{-1}, \quad t \in [T_0^k,\, T_3^k],$$

вытекает неравенство

$$x_2(t) - c - 1 = \theta_2(t) - c - 1 \leqslant e^{-1} - 0,5 < 0, \quad t \in [T_0^k,\, T_3^k],$$

завершающее доказательство леммы 2.2.

Лемма 2.2 полностью доказана.

Сначала докажем утверждение о возможности конечного существенного спектра характеристик колеблемости периодического уравнения.

Доказательство теоремы 2.4.

1. Пусть задано $N \in \mathbb{N}$. Определим множество точек на числовой оси:

$$t_0 \equiv 0, \quad T \equiv 3\pi, \quad t_1 \equiv 3\pi, \quad t_2 \equiv t_1 + T + 5\pi, \quad t_3 \equiv t_2 + T + 7\pi, \ldots,$$

$$t_{N-2} \equiv t_{N-3} + T + (2N-3)\pi, \quad t_{N-1} \equiv t_{N-2} + T + (2N-1)\pi,$$

$$t_N \equiv t_{N-1} + T + 2(2N+1)\pi, \quad t_{N+1} \equiv t_N + T + (2N-1)\pi,$$

$$t_{N+2} \equiv t_{N+1} + T + (2N-3)\pi, \quad t_{N+3} \equiv t_{N+2} + T + (2N-5)\pi, \ldots,$$

$$t_{2N-2} \equiv t_{2N-3} + T + 5\pi, \quad t_{2N-1} \equiv t_{2N-2} + T + 3\pi.$$

Откуда находим

$$t_{2N-1} = 2(3\pi + 5\pi + 7\pi + \dots + (2N+1)\pi) + 2(N-1)T =$$

$$= (4+2N)N\pi + 6\pi(N-1) = 2\pi(N^2 + 5N - 3).$$

2. На каждом из промежутков

$$[0,\, t_1], \quad [t_1 + T,\, t_2], \quad [t_2 + T,\, t_3], \dots, [t_{2N-2} + T,\, t_{2N-1}]$$

зададим фундаментальные системы решений уравнения (2.20) с положительными определителями Вронского. На отрезке $[0, t_{2N-1}]$ построим уравнение a^1 в соответствии с леммой 2.2 следующим образом:

– прежде всего, на участке $[t_1,\, t_1 + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t) + 2,\ 1,\ \sin t) \tag{2.21}$$

решений, заданных слева от точки t_1, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 5,\ 1,\ \sin t) \tag{2.22}$$

решений, заданных справа от точки $t_1 + T$ (здесь и далее первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, а третье — в третье);

– теперь на участке $[t_2,\, t_2 + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (2.22) решений, заданных слева от точки t_2, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 8,\ 1,\ \sin t) \tag{2.23}$$

решений, заданных справа от точки $t_2 + T$; – и т. д.;

– на участке $[t_{N-1},\, t_{N-1} + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t) + 3N - 4,\ 1,\ \sin t) \tag{2.24}$$

решений, заданных слева от точки t_{N-1}, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 3N - 1,\ 1,\ \sin t) \tag{2.25}$$

решений, заданных справа от точки $t_{N-1} + T$;

– после этого на участке $[t_N,\, t_N + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (2.25) решений, заданных слева от точки t_N, в набор (2.24) решений, заданных справа от точки $t_N + T$;

– на участке $[t_{N+1},\, t_{N+1} + T]$ возьмем уравнение, переводящее последний набор (2.24) решений, заданных слева от точки t_{N+1}, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 3N - 7,\ 1,\ \sin t)$$

решений, заданных справа от точки $t_{N+1}+T$;

– и т.д.;

– далее, на участке $[t_{2N-3},\ t_{2N-3}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (2.23) решений, заданных слева от точки t_{2N-3}, в набор (2.22) решений, заданных справа от точки $t_{2N-3}+T$.

– наконец, на участке $[t_{2N-2},\ t_{2N-2}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (2.22) решений, заданных слева от точки t_{2N-2}, в набор (2.21) решений, заданных справа от точки $t_{2N-2}+T$.

Таким образом, фундаментальная система решений, построенного на отрезке $[0,\ t_{2N-1}]$ уравнения $a^1 \in \mathcal{E}^3$, удовлетворяет условиям

$$(x_1, x_2, x_3)(t) =$$

$$= \begin{cases} (\exp(-\cos t)+2,\ 1,\ \sin t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ (\exp(-\cos t)+5,\ 1,\ \sin t), & t_1+T \leqslant t \leqslant t_2, \\ (\exp(-\cos t)+8,\ 1,\ \sin t), & t_2+T \leqslant t \leqslant t_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ (\exp(-\cos t)+3N-4,\ 1,\ \sin t), & t_{N-2}+T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ (\exp(-\cos t)+3N-1,\ 1,\ \sin t), & t_{N-1}+T \leqslant t \leqslant t_N, \\ (\exp(-\cos t)+3N-4,\ 1,\ \sin t), & t_N+T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ (\exp(-\cos t)+8,\ 1,\ \sin t), & t_{2N-4}+T \leqslant t \leqslant t_{2N-3}, \\ (\exp(-\cos t)+5,\ 1,\ \sin t), & t_{2N-3}+T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ (\exp(-\cos t)+2,\ 1,\ \sin t), & t_{2N-2}+T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}, \end{cases}$$

3. Зададим последовательность

$$s_0 \equiv 0, \quad s_i = s_{i-1} + t_{2N-1}, \quad i \in \mathbb{N},$$

обладающую свойством

$$\lim_{i\to+\infty} s_i = +\infty, \quad \lim_{i\to+\infty} \frac{s_i}{s_{i-1}} = \lim_{i\to+\infty}\left(1+\frac{t_{2N}}{s_{i-1}}\right) = 1.$$

Благодаря тому, что s_1 кратно 2π, а функций $f(t) = \exp(-\cos t)+2$ и $g(t) = \sin t$ являются 2π периодическими, можно определить на $\mathbb{R}_+$ следующую фундаментальную систему

$$(z_1, z_2, z_3)(t) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3)(t), & 0 \leqslant t \leqslant s_1, \\ (x_1, x_2, x_3)(t - s_1), & s_1 \leqslant t \leqslant s_2, \\ (x_1, x_2, x_3)(t - s_2), & s_2 \leqslant t \leqslant s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

являющуюся решением уравнения

$$a(t) = \begin{cases} a^1(t), & 0 \leqslant t \leqslant s_1, \\ a^1(t - s_1), & s_1 \leqslant t \leqslant s_2, \\ a^1(t - s_2), & s_2 \leqslant t \leqslant s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

с непрерывными ограниченными s_1-периодическими коэффициентами.

4. Для вычисления нижних характеристик колеблемости произвольного периодического решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$, у которого на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ нет кратных нулей, определим числа при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$:

$$L(y) \equiv \nu^-(y, s_1) = \nu^0(y, s_1) = \nu^+(y, s_1), \quad l(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y, m, s_1), \quad (2.26)$$

тогда по лемме 1.1 имеем равенство

$$\check{\omega}^-(y) = \check{\omega}^0(y) = \check{\omega}^+(y) = \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi}{s_p} \nu^-(y, s_p) = \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^-(y, s_{i-1}, s_i)}{s_1 p} =$$
$$= \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi p \nu^-(y, s_1)}{s_1 p} = \frac{\pi \nu^-(y, s_1)}{s_1} = \frac{\pi}{s_1} \cdot L(y),$$

а также равенства

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi}{s_p} \nu^\alpha(y, m, s_p) = \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^\alpha(y, m, s_{i-1}, s_i)}{s_1 p} =$$
$$= \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p \to +\infty} \frac{\pi p \nu^\alpha(y, m, s_1)}{p s_1} = \frac{\pi}{s_1} \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y, m, s_1) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y),$$

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(y) = \varliminf_{p \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \frac{\pi}{s_p} \nu^\alpha(y, m, s_p) = \varliminf_{p \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^\alpha(y, m, s_{i-1}, s_i)}{s_1 p} =$$
$$= \varliminf_{p \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \frac{\pi p \nu^\alpha(y, m, s_1)}{p s_1} = \frac{\pi}{s_1} \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y, m, s_1) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y).$$

Аналогичные равенства справедливы и для верхних характеристик колеблемости, поэтому имеем

$$\omega^-(y) = \omega^0(y) = \omega^+(y) = \frac{\pi}{s_1} \cdot L(y), \quad \nu^\alpha_\bullet(y) = \nu^\alpha_\circ(y) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y). \tag{2.27}$$

5. В силу равенств (2.27) вычисление частот решений, построенного уравнения, сводится к подсчету величин (2.26), а для этого достаточно знать поведение решений на промежутке $(0,\, s_1]$. Из множества $\mathcal{S}_*(a)$ выделим N следующих решений

$$y_1(t) \equiv (z_1 - 3z_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 1, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_1 + T \leqslant t \leqslant t_2, \\ \exp(-\cos t) + 5, & t_2 + T \leqslant t \leqslant t_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_{N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 4, & t_{N-1} + T \leqslant t \leqslant t_N, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_N + T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 5, & t_{2N-4} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-3}, \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_{2N-3} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{2N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}, \end{cases}$$

$$y_2(t) \equiv (z_1 - 6z_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 4, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_1 + T \leqslant t \leqslant t_2, \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_2 + T \leqslant t \leqslant t_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 3N - 10, & t_{N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_{N-1} + T \leqslant t \leqslant t_N, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 10, & t_N + T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_{2N-4} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-3}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{2N-3} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_{2N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}, \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$y_N(t) \equiv (z_1 - 3Nz_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) + 2 - 3N, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3N, & t_1 + T \leqslant t \leqslant t_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_{N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{N-1} + T \leqslant t \leqslant t_N, \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_N + T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3N, & t_{2N-3} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) + 2 - 3N, & t_{2N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}. \end{cases}$$

6. Если для каждого $i = 1, \dots, N$ определить величины

$$\varkappa(y_i) \equiv \nu^0(y_i, t_1) + \nu^0(y_i, t_1 + T, t_2) + \dots + \nu^0(y_i, t_{2N-1} + T, t_{2N}),$$
$$\varkappa(y_i, m) \equiv \nu^0(y_i, m, t_1) + \dots + \nu^0(y_i, m, t_{2N-1} + T, t_{2N}),$$
$$\varkappa^*(y_i) \equiv \nu^0(y_i, t_1, t_1 + T) + \dots + \nu^0(y_i, t_{2N-1}, t_{2N-1} + T),$$
$$\varkappa^*(y_i, m) \equiv \nu^0(y_i, m, t_1, t_1 + T) + \dots + \nu^0(y_i, m, t_{2N-1}, t_{2N-1} + T),$$

то, в силу леммы 2.2 получим равенства

$$L(y_i) = \varkappa(y_i) + \varkappa^*(y_i) = \varkappa(y_i), \quad l(y_i) = \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} (\varkappa(y_i, m) + \varkappa^*(y_i, m)).$$

7. Определим функцию $u(t) = \exp(-\cos t) - 1$ и установим, что число нулей функции

$$\langle \psi u(t),\, m \rangle = m_1(\exp(-\cos t) - 1) +$$
$$+ m_2 \sin t \exp(-\cos t) + m_3 \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t)$$

на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m = (m_1, m_2, m_3)$ не меньше двух. Для этого проследим за значениями функции $\langle \psi u,\, m \rangle$ в точках $0, \pi/2,\, \pi,\, 3\pi/2,\, 2\pi$:

$$\langle \psi u(0),\, m \rangle = \langle \psi u(2\pi),\, m \rangle = \frac{m_1}{e} - m_1 + \frac{m_3}{e}, \tag{2.28}$$

$$\langle \psi u(\pi),\, m \rangle = m_1 e - m_1 - m_3 e, \tag{2.29}$$

$$\langle \psi u\,(\pi/2)\,,\, m \rangle = m_2 + m_3, \tag{2.30}$$

$$\langle \psi u\,(3\pi/2)\,,\, m \rangle = -m_2 + m_3. \tag{2.31}$$

Если $m_2 = m_3 = 0$ $(m_1 \neq 0)$, то функция $\langle \psi u,\, m \rangle$ совпадает с $m_1 u$, а значит, имеет два нуля.

Предположим, что имеет место следующая система

$$\begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 = 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0. \end{cases}$$

Выражая m_2 из равенства и подставляя в первое неравенство системы, получим $2m_3 > 0$. Далее, умножая последнее неравенство на e и складывая со вторым неравенством данной системы, получим $(2e - 1 - e^2)m_3 > 0$, из которого следует $m_3 < 0$. Полученное противоречие означает невыполнимость системы.

Аналогичными рассуждениями, можно показать, что следующие системы

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 = 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e = 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e = 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 = 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 = 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases}$$

не имеют места, тем самым для значений (2.28)–(2.31) исключили десять критических случаев, а все оставшиеся случаи обеспечивают существование по крайней мере двух нулей функции $\langle \psi u(t),\, m\rangle$ на промежутке $(0,\, 2\pi]$.

Следовательно, установили равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u, m, 2\pi) = \nu^-(u, 2\pi) = \nu^0(u, 2\pi) = \nu^+(u, 2\pi) = 2,$$

из которого при любых $i = 1, 2, \ldots, N$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ следует

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y_i, m, t_{i-1} + T, t_i) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y_i, m, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) =$$

$$= \nu^-(y_i, t_{i-1} + T, t_i) = \nu^0(y_i, t_{i-1} + T, t_i) = \nu^+(y_i, t_{i-1} + T, t_i) =$$
$$= \nu^-(y_i, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) = \nu^+(y_i, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) = 2i + 1.$$

На остальных частях полуинтервала $(0,\, t_{2N-1}]$ все решения y_i отделены от нуля, поэтому при любом $i = 1, 2, \ldots, N$ имеем

$$\varkappa(y_i) = \nu^\gamma(y_i, t_{i-1} + T, t_i) + \nu^\gamma(y_i, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) = 4i + 2,$$

а значит, выполнены

$$l(y_i) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} (\varkappa(y_i, m) + \varkappa^*(y_i, m)) = \varkappa(y_i) = L(y_i) = 4i + 2,$$

(т.е. инфимум в последнем равенстве достигается на векторе $m = (1, 0, 0)$).

Далее, вспоминая равенства (2.27) и

$$s_1 = t_{2N-1} = 2\pi(N^2 + 5N - 3),$$

получаем, что для построенных решений $y_1, \ldots, y_N$ при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы соотношения

$$\omega^-(y_i) = \omega^0(y_i) = \omega^+(y_i) = \nu^\alpha_\bullet(y_i) = \nu^\alpha_\circ(y_i) = \frac{2i+1}{N^2 + 5N - 3}. \tag{2.32}$$

8. Докажем, что каждое из значений (2.32) характеристик колеблемости построенного уравнения $a \in \mathcal{E}^3$ является существенным и метрически, и топологически.

С одной стороны, согласно теореме об изоморфизме [176], линейное пространство решений $y \in \mathcal{S}(a)$ изоморфно линейному пространству их начальных значений

$$\psi y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

С другой стороны, функции z_1, z_2, z_3 образуют фундаментальную систему решений уравнения a. Поэтому каждому решению $y \in \mathcal{S}(a)$ можно поставить в соответствие единственную тройку коэффициентов его линейного разложения

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

получив, тем самым, еще один изоморфизм линейных пространств $\mathcal{S}(a)$ и $\mathbb{R}^3$. В итоге мы имеем отображение множества начальных значений $\psi y(0) \in \mathbb{R}^3$ в множество троек коэффициентов

$$c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3,$$

которое также осуществляет изоморфизм линейных пространств. Учитывая, что естественная топология в $\mathbb{R}^3$ задается нормой и не зависит от ее выбора, без ограничения общности можно считать, что эта норма задается формулой

$$|c| = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}.$$

Теперь остается доказать, что для каждого исходного решения y_i уравнения a возмущенное решение

$$\overline{y}_i = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \tag{2.33}$$

$$c_1 \in (1,\, 1+\varepsilon), \quad c_2 \in (1-3i,\, 1-3i+\varepsilon), \quad c_3 \in (0,\, \varepsilon),$$

того же уравнения при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет равенствам

$$\nu^\alpha_\bullet(\overline{y}_i) = \nu^\alpha_\circ(\overline{y}_i) = \omega^-(\overline{y}_i) = \omega^0(\overline{y}_i) = \omega^+(\overline{y}_i) = \nu^\alpha_\bullet(y_i). \tag{2.34}$$

Отсюда будет следовать совпадение характеристик колеблемости исходного и возмущенного решений уравнения, соответствующих точкам из некоторой окрестности точки $(1, 1-3i, 0)$ в пространстве троек коэффициентов или, что то же, из некоторой окрестности U_i точки $\psi y_i(0)$ в пространстве начальных значений. Это сразу повлечет за собой и метрическую, и топологическую существенность значений (2.32) частот уравнения a, поскольку мера окрестности U_i положительна, а дополнение к ней в U_i вообще пусто.

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений решение (2.33) на любом отрезке будет мало отличаться от y_i. Поэтому решение $\overline{y}_i$ ни разу не будет обращаться в нуль на тех участках, где функция y_i отделена от нуля. На остальных участках вида

$$[t_{i-1}+T,\, t_i], \quad [t_{2N-i-1}+T,\, t_{2N-i}],$$

где функция y_i имеет вид $\exp(-\cos t)-1$, решение $\overline{y}_i$ представимо в виде

$$\overline{y}_i \equiv c_1(\exp(-\cos t)-1)+c_2^*+c_3\sin t,$$

где c_2^* - положительное, достаточно малое число.

Покажем, что функция

$$\begin{gathered}\langle\psi\overline{y}_i(t),\, m\rangle \equiv m_1(c_1(\exp(-\cos t)-1)+c_2^*+c_3\sin t)+\\ +m_2\exp(-\cos t)(c_1\sin t+c_3\cos t)+\\ +m_3\exp(-\cos t)(c_1(\cos t+\sin^2 t)-c_3\sin t)\end{gathered}$$

на промежутке $(0,\, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m\in\mathbb{R}^3$ имеет не менее двух нулей. Для этого проследим за следующими значениями функции

$$\langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle = (c_2^*+c_3)m_1+c_1m_2+(c_1-c_3)m_3, \tag{2.35}$$

$$\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle = (c_2^*-c_3)m_1-c_1m_2+(c_1+c_3)m_3, \tag{2.36}$$

$$\langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle = m_1(c_1e+c_2^*-c_1)-ec_3m_2-ec_1m_3, \tag{2.37}$$

$$e\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle = m_1(c_1+ec_2^*-ec_1)+c_3m_2+c_1m_3. \tag{2.38}$$

Нетрудно проверить, что следующие системы

$$\begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle = 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle > 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle > 0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle > 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle = 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle < 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle < 0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle < 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle > 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle = 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle > 0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle > 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle < 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle = 0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle < 0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle < 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle > 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle > 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle = 0, \\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle < 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle < 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle = 0, \\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle > 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle > 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle > 0, \\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle < 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle < 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle < 0, \\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle > 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle > 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle > 0, \\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle < 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle < 0, \\ \langle\psi\overline{y}_i\left(\pi/2\right),\, m\rangle < 0, \\ e\langle\psi\overline{y}_i\left(3\pi/2\right),\, m\rangle < 0, \end{cases}$$

не имеют места. В самом деле, пусть имеет место последняя система (для остальных систем проводятся аналогичные рассуждения)

$$\begin{cases} (c_2^* + c_3)m_1 + c_1 m_2 + (c_1 - c_3)m_3 < 0, \\ (c_2^* - c_3)m_1 - c_1 m_2 + (c_1 + c_3)m_3 < 0, \\ (c_1 e + c_2^* - c_1)m_1 - ec_3 m_2 - ec_1 m_3 < 0, \\ (c_1 + ec_2^* - ec_1)m_1 + c_3 m_2 + c_1 m_3 < 0. \end{cases}$$

Умножая последнее неравенство системы на e и складывая его с третьим, получим неравенство

$$(2c_1 e + e^2 c_2^* + c_2^* - c_1 - e^2 c_1)m_1 < 0,$$

из которого следует $m_1 > 0$.

Складывая первые два неравенства системы, будем иметь

$$c_2^* m_1 + c_1 m_3 < 0,$$

откуда, на основании положительности m_1, вытекает отрицательность m_3.

Далее, умножим первое неравенство на ec_3, а третье - на c_1 и сложим их:

$$(ec_2^* c_3 + ec_3^2 + c_1^2 e + c_1 c_2^* - c_1)m_1 + (ec_1 c_3 - ec_3^2 - ec_1^2)m_3 < 0.$$

С другой стороны, в последнем неравенстве коэффициент при m_1 положительный, а коэффициент при m_3 отрицательный, поэтому (учитывая положительность m_1 и отрицательность m_3) имеет место неравенство

$$(ec_2^*c_3 + ec_3^2 + c_1^2 e + c_1 c_2^* - c_1)m_1 + (ec_1c_3 - ec_3^2 - ec_1^2)m_3 > 0,$$

которое не согласуется с предыдущим неравенством, а значит, рассматриваемой системе не удовлетворяет никакой вектор $m \in \mathbb{R}^3_*$.

Следовательно, рассмотренные десять различных комбинаций знаков значений (2.35)–(2.38) не имеют места, а любая другая комбинация гарантирует существование хотя бы двух нулей функции $\langle \psi \overline{y}_i,\, m\rangle$ на промежутке $(0,\, 2\pi]$ и тем самым при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ установлено равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(\overline{y}_i, m, 2\pi) = \nu^-(\overline{y}_i, 2\pi) = \nu^0(\overline{y}_i, 2\pi) = \nu^+(\overline{y}_i, 2\pi) = 2. \tag{2.39}$$

Таким образом, при каждом $i \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ решение $\overline{y}_i$ обладает свойством (2.34). Последнее означает, что значения, задаваемые равенствами (2.32), являются метрически и топологически существенными.

Теорема 2.4 полностью доказана.

Теперь докажем утверждение о возможности счетного существенного спектра характеристик колеблемости уравнения третьего порядка.

Доказательство теоремы 2.5.

1. При любом $k \in \mathbb{N}$ обозначим через

$$\Delta_k \equiv 6\pi k + 3(3^k - 1)\pi \tag{2.40}$$

и возьмем любую последовательность (ε_k) положительных чисел, стремящуюся к нулю.

Зададим последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_1, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Начиная с некоторого номера k_1, всегда можно добиться, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\Delta_1}{t_k} < \varepsilon_1$. Меняем элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера k_2 так

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_2, \quad k \geqslant k_2,$$

чтобы выполнялось

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_2}{t_k} < 1 + \varepsilon_2, \quad k \geqslant k_2.$$

Далее, по индукции продолжаем менять полученную последовательность. Если для любого $i \in \mathbb{N}$ построена последовательность

$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$, удовлетворяющая условиям

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_i}{t_k} < 1 + \varepsilon_i, \quad k \geqslant k_i,$$

то выбираем k_{i+1}, так чтобы при любом $k \geqslant k_{i+1}$ были выполнены условия

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i+1}, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_{i+1}}{t_k} < 1 + \varepsilon_{i+1}.$$

В результате получим последовательность (t_k), заданную рекуррентной формулой

$$t_k \equiv t_{k-1} + \Delta_{i(k-1)}, \quad t_0 \equiv 0, \quad i(0) = 1,$$

обладающую свойствами

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_k}{t_{k-1}} = 1.$$

2. Первые два элемента построенной в п. 1 последовательности соответственно равны

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta_1 = 12\pi.$$

Разобьем промежуток $(0, t_1]$ на части

$$(0; t_0^1], \quad (t_0^1; t_0^1 + T_0], \quad (t_0^1 + T_0; t_0^1 + 2T_0], \quad (t_0^1 + 2T_0; t_1],$$

где $t_0^1 = T_0 = 3\pi$.

Остальные промежутки $(t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами этой последовательности с шагом Δ_1, также разбиваем на промежутки

$$(t_k; t_k+t_k^1], \quad (t_k+t_k^1; t_k+t_k^1+T_0], \quad (t_k+t_k^1+T_0; t_k+t_k^1+2T_0], \quad (t_k+t_k^1+2T_0; t_{k+1}],$$

где $t_k^1 = 3\pi$.

Промежутки $(t_k, t_{k+1}]$, образованные соседними элементами с шагом Δ_2 построенной последовательности, начиная с номера k_2 до $k_3 - 1$, разбиваем на части

$$(t_k; t_k + t_k^1], \quad (t_k + t_k^1 + T_0; t_k^2], \quad (t_k^2 + 2T_0; t_k^3], \quad (t_k^3 + T_0; t_{k+1}],$$

$$(t_k + t_k^1, t_k + t_k^1 + T_0], \quad (t_k^2; t_k^2 + T_0], \quad (t_k^2 + T_0; t_k^2 + 2T_0], \quad (t_k^3; t_k^3 + T_0],$$

где

$$t_k^1 = t_k+3^2\pi, \quad t_k^2 = t_k+t_k^1+T_0+3\pi, \quad t_k^3 = t_k^2+2T_0+3\pi, \quad t_{k+1} = t_k^3+T_0+3^2\pi.$$

Любые два соседних элемента построенной последовательности связаны соотношением

$$t_{k+1} = t_k + \Delta_i, \quad k_i \leqslant k \leqslant k_{i+1} - 1.$$

Промежуток $(t_k, t_{k+1}]$ разбиваем на три группы:

$$(t_k^i+T_0;t_k^i+2T_0],$$

$$(t_k+t_k^1, t_k+t_k^1+T_0],\ (t_k^2;t_k^2+T_0],\dots,(t_k^i;t_k^i+T_0],\dots,(t_k^{2i-1};t_k^{2i-1}+T_0], \quad (2.41)$$

$$(t_k;t_k+t_k^1],\ (t_k+t_k^1+T_0;t_k^2],\dots,(t_k^i+2T_0;t_k^{i+1}],\dots,(t_k^{2i-1}+T_0;t_{k+1}], \quad (2.42)$$

где

$$t_k^1=t_k+3^i\pi,\quad t_k^2=t_k+t_k^1+T_0+3^{i-1}\pi,\quad t_k^3=t_k^2+T_0+3^{i-2}\pi,\dots,$$
$$t_k^i=t_k^{i-1}+T_0+3\pi,\quad t_k^{i+1}=t_k^i+2T_0+3\pi,\quad t_k^{i+2}=t_k^{i+1}+T_0+3^2\pi,\dots,$$
$$t_k^{2i-1}=t_k^{2i-2}+T_0+3^{i-1}\pi,\quad t_{k+1}=t_k^{2i-1}+T_0+3^i\pi.$$

3. Построим уравнение третьего порядка, фундаментальная система решений которого на каждом из промежутков (2.42) при некотором фиксированном значении k будет совпадать с наперед выбранными фундаментальными системами решений. На основании леммы 2.2 строим уравнение следующим образом:

— на участке $(t_k+t_k^1;t_k+t_k^1+T_0]$ — найдем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t)+1,\ 1,\ \sin t) \quad (2.43)$$

решений, заданных на $[t_k, t_k+t_k^1]$, в набор

$$(\exp(-\cos t)+4,\ 1,\ \sin t) \quad (2.44)$$

решений, заданных на $[t_k+t_k^1+T_0;t_k^2]$ (здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, и третье — в третье);

– на участке $(t_k^2;t_k^2+T_0]$ — найдем уравнение, переводящее набор (2.44) решений, заданных слева от точки t_k^2, в набор

$$(\exp(-\cos t)+7,\ 1,\ \sin t)$$

решений, заданных на $[t_k^2+T_0;t_k^3]$;

— ... и т.д.;

— на участке $(t_k^i;t_k^i+T_0]$ — выберем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t)+3i-2,\ 1,\ \sin t) \quad (2.45)$$

решений, заданных на $[t_k^{i-1}+T_0, t_k^i]$, в набор

$$(\exp(-\cos t)+3i+1,\ 1,\ \sin t); \quad (2.46)$$

— на участке $(t_k^i+T_0;t_k^i+2T_0]$ — выберем уравнение, переводящее набор (2.46) в набор (2.45) решений, заданных на $[t_k^i+2T_0;t_k^{i+1}]$;

— на участке $(t_k^{i+1}; t_k^{i+1}+T_0]$ — выберем уравнение, переводящее набор (2.45) решений, заданных слева от точки t_k^{i+1}, в набор

$$(\exp(-\cos t)+3i-5,\ 1,\ \sin t)$$

решений, заданных справа от точки $t_k^{i+1}+T_0$;

— ... и т.д.;

— на участке $[t_k^{2i-1}; t_k^{2i-1}+T_0]$ — совпадающим с уравнением, переводящим набор (2.44) решений, заданных слева от точки t_k^{2i-1}, в набор (2.43) решений, заданных справа от точки $t_k^{2i-1}+T_0$;

— во всех остальных точках полуинтервала $(t_k; t_{k+1}]$ — имеющим вид (2.20).

В итоге построили уравнение на промежутке $(t_k; t_{k+1}]$, фундаментальная система решений y_1, y_2, y_3 которого удовлетворяет условиям:

$$(y_1,y_2,y_3)(t)=\begin{cases}(\exp(-\cos t)+1,\ 1,\ \sin t), & t_k<t\leqslant t_k+t_k^1,\\ (\exp(-\cos t)+4,\ 1,\ \sin t), & t_k+t_k^1+T_0<t\leqslant t_k^2,\\ \ldots, & \\ (\exp(-\cos t)+3i-2,\ 1,\ \sin t), & t_k^{i-1}+T_0<t\leqslant t_k^i,\\ (\exp(-\cos t)+3i-2,\ 1,\ \sin t), & t_k^i+2T_0<t\leqslant t_k^{i+1},\\ \ldots, & \\ (\exp(-\cos t)+4,\ 1,\ \sin t), & t_k^{2i-2}+T_0<t\leqslant t_k^{2i-1},\\ (\exp(-\cos t)+1,\ 1,\ \sin t), & t_k^{2i-1}+T_0<t\leqslant t_{k+1}.\end{cases}$$

Повторяя эту процедуру построения для всех $k\in\mathbb{N}$, получим на $\mathbb{R}_+$ уравнение $a\in\tilde{\mathcal{E}}^3$.

4. В п. 7 доказательства теоремы 2.4 для функции $u(t)=\exp(-\cos t)-1$ при каждом $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ было установлено

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}\nu^\alpha(u,m,2\pi)=\nu^-(u,2\pi)=\nu^0(u,2\pi)=\nu^+(u,2\pi)=2. \qquad (2.47)$$

Для произвольного решения $y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3\in\mathcal{S}_*(a)$ определим величины

$$\begin{gathered}\kappa_k(y)=\frac{1}{3^{i(k)+1}}(\nu^-(y,t_k,t_k+t_k^1)+\nu^-(y,t_k+t_k^1+T_0,t_k^2)+\\ +\nu^-(y,t_k^2+T_0,t_k^3)+\cdots+\nu^-(y,t_k^i+T_0,t_k^i+2T_0)+\\ +\cdots+\nu^-(y,t_k^{2i(k)-2}+T_0,t_k^{2i(k)-1})+\nu^-(y,t_k^{2i(k)-1}+T_0,t_{k+1})),\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}\kappa_k(y,m)=\frac{1}{3^{i(k)+1}}\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}(\nu^-(y,m,t_k,t_k+t_k^1)+\\
+\nu^-(y,m,t_k+t_k^1+T_0,t_k^2)+\dots+\\
+\nu^-(y,m,t_k^i+T_0,t_k^i+2T_0)+\nu^-(y,m,t_k^i+2T_0,t_k^{i+1})+\dots+\\
\nu^-(y,m,t_k^{2i(k)-2}+T_0,t_k^{2i(k)-1})+\nu^-(y,m,t_k^{2i(k)-1}+T_0,t_{k+1})),
\end{gathered}
$$

где $i(k)$ совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}.

Из множества $\mathcal{S}_*(a)$ выделим последовательность решений

$$
z_q=(y_1-(3q-1)y_2)\colon[0;+\infty)\to\mathbb{R},\quad q\in\mathbb{N}. \tag{2.48}
$$

Решение z_1 при любом $k\in\mathbb{N}$ представимо в виде

$$
z_1(t)=\begin{cases}
\exp(-\cos t)-1, & t_k<t\leqslant t_k+t_k^1,\\
\exp(-\cos t)+2, & t_k+t_k^1+T_0<t\leqslant t_k^2,\\
\dots,\\
\exp(-\cos t)+3i(k)-4, & t_k^{i(k)-1}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)},\\
\exp(-\cos t)+3i(k)-4, & t_k^{i(k)}+2T_0<t\leqslant t_k^{i(k)+1},\\
\dots,\\
\exp(-\cos t)+2, & t_k^{2i(k)-2}+T_0<t\leqslant t_k^{2i(k)-1},\\
\exp(-\cos t)-1, & t_k^{2i(k)-1}+T_0<t\leqslant t_{k+1},
\end{cases}
$$

и оно на каждом из промежутков

$$
(t_k;t_k+t_k^1],\quad (t_k^{2i(k)-1}+T_0;t_{k+1}]
$$

имеет $3^{i(k)}$ строгих знаков, тогда как любая функция $\langle z_1,m\rangle$ не может иметь менее $3^{i(k)}$ знаков в силу предыдущего пункта, а на любом другом промежутке вида (2.42) решение z_1 отделено от нуля, а значит, выполнена цепочка равенств

$$
\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}\kappa_k(z_1,m)=\kappa_k(z_1)=\frac{2\cdot 3^i}{3^{i+1}}=\frac{2}{3},\quad k\in\mathbb{N}.
$$

Решение z_2 при любом $k \geqslant k_2$ представимо в виде

$$z_2(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 4, & t_k < t \leqslant t_k + t_k^1, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k + t_k^1 + T_0 < t \leqslant t_k^2, \\ \ldots, & \\ \exp(-\cos t) + 3i(k) - 7, & t_k^{i(k)-1} + T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)}, \\ \exp(-\cos t) + 3i(k) - 7, & t_k^{i(k)} + 2T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)+1}, \\ \ldots, & \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_k^{2i(k)-2} + T_0 < t \leqslant t_k^{2i(k)-1} \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{2i(k)-1} + T_0 < t \leqslant t_{k+1} \end{cases}$$

и на каждом из промежутков

$$(t_k + t_k^1 + T_0; t_k^2], \quad (t_k^{2i(k)-2} + T_0; t_k^{2i(k)-1}]$$

имеет $3^{i(k)-1}$ строгих знаков, поэтому в силу (2.47) получим

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3_*} \varkappa_k(z_2, m) = \varkappa_k(z_2) = \frac{2 \cdot 3^{i-1}}{3^{i+1}} = \frac{2}{3^2}.$$

При любом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ решение z_q (начиная с первого момента k_q появления Δ_q – го шага) при любом $k \geqslant k_q$ представимо в виде

$$z_q(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) + 2 - 3q, & t_k < t \leqslant t_k + t_k^1, \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3q, & t_k + t_k^1 + T_0 < t \leqslant t_k^2, \\ \ldots, & \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{q-1} + T_0 < t \leqslant t_k^q, \\ \ldots, & \\ \exp(-\cos t) - 1 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)-1} + T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)}, \\ \exp(-\cos t) - 1 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)} + 2T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)+1}, \\ \ldots, & \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{2i(k)-q+1} + T_0 < t \leqslant t_k^{2i(k)-q+2}, \\ \ldots, & \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3q, & t_k^{2i(k)-2} + T_0 < t \leqslant t_k^{2i(k)-1}, \\ \exp(-\cos t) + 2 - 3q, & t_k^{2i(k)-1} + T_0 < t \leqslant t_{k+1}, \end{cases}$$

и любая функция $\langle z_q, m\rangle$ на каждом из промежутков

$$(t_k^{q-1}+T_0; t_k^q], \quad (t_k^{2i(k)-q+1}+T_0; t_k^{2i(k)-q+2}] \tag{2.49}$$

в силу (2.47) имеет не менее $3^{i(k)-q+1}$ строгих знаков, а на любом другом промежутке вида (2.42) решение z_q отделено от нуля, следовательно

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \kappa_k(z_q, m) = \kappa_k^\alpha(z_q) = \frac{2}{3^q}. \tag{2.50}$$

5. Сначала последовательность (2.40) представим в виде

$$\Delta_k = (2k-1)T_0 + 3^{k+1}\pi,$$

далее последовательность (T_l) сумм длин всех промежутков из списка (2.41), попавших в промежуток $(0, t_{l+1}]$, зададим формулой

$$T_{l+1} \equiv (P_1 + 3P_2 + \dots + (2j(l)-1)P_{j(l)})T_0,$$

где P_1 — число всех элементов последовательности (t_k) с шагом Δ_1, P_2 — число всех элементов последовательности (t_k) с шагом Δ_2 и т.д., $P_{j(l)}$ — число всех элементов последовательности (t_k) с шагом $\Delta_{j(l)}$, не превышающих $t_{l+1} \equiv t_l + \Delta_{j(l)}$. Ясно, что

$$t_{l+1} \equiv (3^2P_1 + 3^3P_2 + \dots + 3^{j(l)+1}P_{j(l)})\pi + T_{l+1}$$

и из $l \to +\infty$ следует $j \to +\infty$.

На основании леммы 2.2 последовательность (ν_l) сумм строгих знаков любой функции (2.48) на каждом из всех промежутков (2.41), попавших в $(0, t_{l+1}]$, равна нулю.

В силу неубывания последовательности (P_j), имеем

$$\frac{P_k}{P_j} \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \dots, j-1,$$

поэтому справедливы оценки

$$\frac{T_{l+1}}{t_{l+1}} \leqslant \frac{T_0(P_1 + 3P_2 + \dots + (2j(l)-1)P_{j(l)})}{\pi 3^{j(l)+1}P_{j(l)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T_0(1 + 3 + \dots + (2j(l)-1))}{\pi 3^{j(l)+1}} = \frac{j^2(l)}{3^{j(l)}},$$

на основании которых выполнены равенства

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{T_l}{t_l} = \lim_{l\to+\infty} \frac{\nu_l}{t_l} = 0.$$

6. На основании п. 5 настоящего доказательства при вычислении частот Сергеева любой функции из последовательности (2.48) будем пользоваться леммой 1.1, согласно которой можно не учитывать как полуинтервал $(0,\, t_{k_q}]$, так и все полуинтервалы (2.41) (т. е. не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число знаков, ни в само это число). Учитывая, что все нули любой функции z_q из (2.48) являются точками строгой смены знака, будем иметь

$$\check{\omega}^-(z_q) = \check{\omega}^0(z_q) = \check{\omega}^+(z_q) = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^-(z_q, t_p) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi\nu^-(z_q, t_{k_q}) + \pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} \nu^-(z_q, t_i, t_{i+1})}{t_{p+1}} = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} \nu^-(z_q, t_i, t_{i+1})}{t_{p+1} - t_{k_q}} =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} \left(\nu^-(z_q, t_i + T_0, t_i^1) + \dots + \nu^-(z_q, t_i^{2j(i)-1} + T_0, t_{i+1})\right)}{(3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1})\pi} =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{3^{j(k_q)+1}\varkappa_{k_q}(z_q) + 3^{j(k_q+1)+1}\varkappa_{k_q+1}(z_q) + \dots + 3^{j(p)+1}\varkappa_p(z_q)}{3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1}} =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{2\left(3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1}\right)}{3^q(3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1})} = \frac{2}{3^q},$$

где $j(i)$ совпадает с номером шага между t_i, t_{i+1}.

Из равенств (2.50) следует, что минимум в определении слабых показателей колеблемости каждого выбранного решения реализуется на векторе $m = (1, 0, 0)$. Следовательно, при любых $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ и $q \in \mathbb{N}$ получим

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z_q) = \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(z_q, m, t_p) = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(z_q, m_q, t_p) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^-(z_q, t_p) = \frac{2}{3^q}.$$

Кроме того, для каждого выбранного решения имеет место следующая двусторонняя оценка

$$\frac{2}{3^q} = \check{\nu}_\circ^\alpha(z_q) \leqslant \check{\nu}_\bullet^\alpha(z_q) =$$

$$= \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(z_q, m, t_p) \leqslant \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(z_q, m_q, t_p) = \frac{2}{3^q}.$$

Аналогичные соотношения справедливы соответственно и для верхних характеристик колеблемости, поэтому имеем

$$\omega^-(z_q) = \omega^0(z_q) = \omega^+(z_q) = \nu_\bullet^\alpha(z_q) = \nu_\circ^\alpha(z_q) = 2 \cdot 3^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \qquad (2.51)$$

Повторяя рассуждения, приводимые в п.8 доказательства теоремы 2.4, получим существенность (и метрическую, и топологическую) каждого значения (2.51).

Теорема 2.5 полностью доказана.

Замечание 2.3. В силу лемм 1.4 и 1.5, в формулировке теоремы 2.5 нельзя обеспечить типичность ни одного из существенных значений спектров частот Сергеева фигурирующего в них уравнения $a \in \mathcal{E}^3$, причем ни в метрическом, ни в топологическом смысле.

Наконец, в этом разделе докажем утверждение о возможности континуальных спектров характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с неограниченными коэффициентами.

Доказательство теоремы 2.6.

1. По заданным несоизмеримым $\omega_2 > \omega_1 > 0$ найдется такое $\varepsilon \in (0, 1)$, что выполнено неравенство

$$\omega_2 < \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\varepsilon}},$$

из которого вытекает

$$0 < \omega_2^2 - \omega_1^2 < \varepsilon\omega_2^2. \qquad (2.52)$$

Выберем на $\mathbb{R}_+$ систему из трех функций

$$y_1(t) = e^{t^2}(\cos\omega_1 t + \varepsilon), \quad y_2(t) = e^{t^2}\cos\omega_2 t, \quad y_3(t) = e^{t^2}\sin\omega_2 t$$

и вычислим их производные до третьего порядка включительно

$$\dot y_1(t) = e^{t^2}(2t\cos\omega_1 t + 2t\varepsilon - \omega_1\sin\omega_1 t),$$

$$\ddot y_1(t) = e^{t^2}(4t^2\cos\omega_1 t + 4t^2\varepsilon - 4\omega_1 t\sin\omega_1 t + (2-\omega_1^2)\cos\omega_1 t + 2\varepsilon),$$

$$\dddot y_1(t) = e^{t^2}(8t^3\cos\omega_1 t - 12\omega_1 t^2\sin\omega_1 t + (12t - 6\omega_1^2 t)\cos\omega_1 t +$$

$$+(\omega_1^3 - 6\omega_1)\sin\omega_1 t + 8\varepsilon t^3 + 12\varepsilon t),$$

$$\dot y_2(t) = e^{t^2}(2t\cos\omega_2 t - \omega_2\sin\omega_2 t),$$

$$\ddot y_2(t) = e^{t^2}(4t^2\cos\omega_2 t - 4\omega_2 t\sin\omega_2 t + (2-\omega_2^2)\cos\omega_2 t),$$

$$\dddot y_2(t) = e^{t^2}((12t - 6\omega_2^2 t)\cos\omega_2 t - 12\omega_2 t^2\sin\omega_2 t + 8t^3\cos\omega_2 t + (\omega_2^3 - 6\omega_2)\sin\omega_2 t),$$

$$\dot y_3(t) = e^{t^2}(2t\sin\omega_2 t + \omega_2\cos\omega_2 t),$$

$$\ddot y_3(t) = e^{t^2}(4t^2\sin\omega_2 t + 4\omega_2 t\cos\omega_2 t + (2-\omega_2^2)\sin\omega_2 t),$$

$$\dddot y_3(t) = e^{t^2}((12t - 6\omega_2^2 t)\sin\omega_2 t + 12\omega_2 t^2\cos\omega_2 t + 8t^3\sin\omega_2 t - (\omega_2^3 - 6\omega_2)\cos\omega_2 t).$$

Вычислим определитель матрицы

$$X \equiv \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \dot y_1 & \dot y_2 & \dot y_3 \\ \ddot y_1 & \ddot y_2 & \ddot y_3 \end{pmatrix}$$

и на основании (2.52) оценим снизу:

$$\det X(t) = \omega_2((\omega_2^2 - \omega_1^2)\cos t + \varepsilon\omega_2^2)e^{-3t^2} >$$

$$> e^{3t^2}\omega_2((\omega_2^2-\omega_1^2)\cos t + (\omega_2^2-\omega_1^2)) = e^{3t^2}\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)(\cos t + 1) \geqslant 0, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Следовательно, выбранная система функций $y_1, y_2, y_3 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ является (см. [198]) фундаментальной для уравнения

$$\frac{1}{\det X(t)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \dot y_1 & \dot y_2 & \dot y_3 & \dot y \\ \ddot y_1 & \ddot y_2 & \ddot y_3 & \ddot y \\ \dddot y_1 & \dddot y_2 & \dddot y_3 & \dddot y \end{vmatrix} = 0$$

из множества $\tilde{\mathcal{E}}^3$. Обозначим это уравнение через $a\in\tilde{\mathcal{E}}^3$.

2. Зафиксируем ненулевой набор $c = (c_1,\, c_2,\, c_3)$ так, чтобы решение

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \in \mathcal{S}_*(a)$$

или функция

$$f_c(t) \equiv e^{-t^2}y_c(t) = c_1(\cos\omega_1 t + \varepsilon) + c_2\cos\omega_2 t + c_3\sin\omega_2 t$$

не имела кратных нулей.

Докажем, что число нулей функции $f_c(t)$ на любом интервале $(t_0,\, T)$ при достаточно большом t_0 совпадает с числом нулей функции

$$e^{-t^2}\langle\psi y_c(t),\, m\rangle \equiv m_1(c_1(\cos\omega_1 t + \varepsilon) + c_2\cos\omega_2 t + c_3\sin\omega_2 t) +$$

$$+ m_2(c_1(2t\cos\omega_1 t + 2t\varepsilon - \omega_1\sin\omega_1 t) + c_2(2t\cos\omega_2 t - \omega_2\sin\omega_2 t) +$$

$$+ c_3(2t\sin\omega_2 t + \omega_2\cos\omega_2 t)) +$$

$$+ m_3(c_1(4t^2\cos\omega_1 t + 4t^2\varepsilon - 4\omega_1 t\sin\omega_1 t + (2-\omega_1^2)\cos\omega_1 t + 2\varepsilon) + c_2(4t^2\cos\omega_2 t -$$

$$- 4\omega_2 t\sin\omega_2 t + (2-\omega_2^2)\cos\omega_2 t) + c_3(4t^2\sin\omega_2 t + 4\omega_2 t\cos\omega_2 t + (2-\omega_2^2)\sin\omega_2 t))$$

на этом же интервале при любом векторе $m \in \mathbb{R}^3_*$.

Если $m_3 \neq 0$, то при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнена цепочка равенств

$$\nu^\alpha(y_c(t), m, t_0, T) = \nu^-(f_c(t), t_0, T) = \nu^+(f_c(t), t_0, T), \tag{2.53}$$

так как имеет место представление

$$\frac{\langle \psi y_c(t),\, m\rangle}{4m_3 t^2 e^{t^2}} = c_1(\cos\omega_1 t + \varepsilon) + c_2\cos\omega_2 t + c_3 \sin\omega_2 t + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если $m_3 = 0$, $m_2 \neq 0$, то при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнена цепочка равенств (2.53), поскольку функция $\langle \psi y_c(t),\, m\rangle$ удовлетворяет условию

$$\frac{\langle \psi y_c(t),\, m\rangle}{2m_2 t e^{t^2}} = c_1(\cos\omega_1 t + \varepsilon) + c_2\cos\omega_2 t + c_3 \sin\omega_2 t + \varphi_2(t),$$

где $\varphi_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Справедливость цепочки равенств (2.53) очевидна и в случае $m_2 = m_3 = 0$, так как

$$\langle \psi y_c(t),\, m\rangle = m_1(c_1(\cos\omega_1 t + \varepsilon) + c_2\cos\omega_2 t + c_3 \sin\omega_2 t).$$

Рассмотренные случаи показывают, что минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на любом векторе $m \in \mathbb{R}^3_*$, в частности, на векторе $m = (1, 0, 0)$.

3. Выделим из множества $\mathcal{S}_*(a)$ однопараметрическое множество

$$f_A(t) = (1 - A)(\cos\omega_1 t + \varepsilon) - A\cos(\omega_2 t + \varphi), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad A \in [0,\, 1].$$

Очевидно, что множество всех различных значений вспомогательного аргумента $\varphi = \varphi(A)$ имеет мощность континуума.

В работе [191] доказано, что для каждого значения $A \in [0,\, 1]$:

– множество всех значений φ, в которых функция $f_A(t)$ имеет кратные нули, не более чем счетно;

– для каждого $A \in [0,\, 1]$ найдется такое значение $\varphi = \varphi(A)$, при котором ни в одном из нулей функции $f_A(t)$ не обнуляется ее производная;

– частота нулей функции $f_A(t)$ не зависит от φ и является точной.

Следовательно, на основании п.2 настоящего доказательства, при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ и любом фиксированном значении $A \in [0,\, 1]$ имеет место равенства

$$\nu^\alpha_\bullet(y_A) = \nu^\alpha_\circ(y_A) = \omega^-(y_A) = \omega^0(y_A) = \omega^+(y_A) = \omega^0(f_A),$$

где

$$y_A(t) = (1-A)e^{t^2}(\cos\omega_1 t + \varepsilon) - Ae^{t^2}\cos(\omega_2 t + \varphi) \in \mathcal{S}_*(a).$$

Так как характеристические частоты нулей однопараметрического семейства f_A при изменении параметра A от 0 до 1 принимают все значения из отрезка $[\omega_1, \omega_2]$ (см. [65, 191]), то характеристики колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней однопараметрического семейства y_A также будут принимать все значения из отрезка $[\omega_1, \omega_2]$.

5. Теперь убедимся в том, что спектры характеристик колеблемости не содержат других значений. Заметим, что нижний слабый показатель строгих смен знаков любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ не может быть меньше ω_1 в силу рассуждений, проведенных в п. 2 настоящего доказательства.

На основании теоремы IV [165] и следствия 2 [256], верхние частота Сергеева корней и показатель колеблемости гиперкорней любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ не могут быть больше ω_2 в силу того, что при каждом $m \in \mathbb{R}^3_*$ функция $e^{-t^2}\langle \psi y_c(t),\, m\rangle$ является решением некоторого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Таким образом, спектры всех характеристик колеблемости (см. замечания 1.2–1.5) состоят из всех чисел отрезка $[\omega_1, \omega_2]$.

Теорема 2.6 доказана.

Замечание 2.4. В теореме 2.6 ничего не говорится о существенности значений характеристик колеблемости выводимого в ней уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, причем ни в метрическом, ни в топологическом смысле. Это обусловлено тем, что в случае континуального спектра принципиально невозможно надеяться на то, что сразу все его значения окажутся существенными в каком-либо из указанных смыслов, поскольку из доказательства лемм 1.4 и 1.5 следует, что ни для какого уравнения с непрерывными коэффициентами существенные значения его показателей колеблемости не могут образовать более чем счетное множество.

2.4 Управление суслинскими спектрами верхних сильных показателей колеблемости однородных уравнений

В этом разделе приведём доказательство теоремы 2.7, но для этого нам понадобится ряд вспомогательных определений и утверждений.

Лемма 2.3. Если набор функций $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, то при любом

$\lambda > 0$ набор функций

$$z_i(t) = y_i(t)\exp(\exp(\lambda t)), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.54}$$

также является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $b \in \tilde{\mathcal{E}}^n$.

Доказательство. Обозначим через $W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(t)$ и $W_{z_1,z_2,\ldots,z_n}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, определители Вронского систем функций $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{S}_*(a)$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответственно.

Имеем

$$z_i^{(j)}(t) = \exp(\exp(\lambda t))(H_j(e^{\lambda t})y_i(t) + H_{j-1}(e^{\lambda t})\dot{y}_i(t) + \cdots + y_i^{(j)}(t)),$$

где $H_l(t)$ – алгебраический многочлен l-ой степени, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Тогда

$$W_{z_1,z_2,\ldots,z_n}(t) \equiv \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_n(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \ldots & \dot{z}_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)}(t) & z_2^{(n-1)}(t) & \ldots & z_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp(\exp(\lambda t))\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \ldots & \dot{z}_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)}(t) & z_2^{(n-1)}(t) & \ldots & z_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp(2\exp(\lambda t))\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)}(t) & z_2^{(n-1)}(t) & \ldots & z_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp(n\exp(\lambda t))\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp(n\exp(\lambda t))W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда следует, что набор функций (2.54) является [198, с. 86] фундаментальной системой решений следующего уравнения $b \in \tilde{\mathcal{E}}^n$:

$$\frac{1}{W_{z_1,z_2,\ldots,z_n}(t)} \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_n(t) & y \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \ldots & \dot{z}_n(t) & \dot{y} \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ldots & \ddot{z}_n(t) & \ddot{y} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n)}(t) & z_2^{(n)}(t) & \ldots & z_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Лемма 2.3 доказана.

Определение 2.4 [22]. Назовём функцию $y \in C^3([\alpha,\beta])$ *правильно колеблющейся порядка* $p \in \mathbb{N}$ *на отрезке* $[\alpha,\beta]$, если существует последовательность $\alpha = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{4p+2} = \beta$ вещественных чисел, такая, что

1) на отрезках $[\tau_{2i-1},\tau_{2i}]$, $\quad i = \overline{1,2p+1}$, функция y имеет постоянную производную r_i, при этом справедливы неравенства $r_1 > 0$ и $r_i r_{i+1} < 0$;

2) на интервалах (τ_{2i},τ_{2i+1}), $\quad i = \overline{1,2p}$, её вторая производная $\ddot{y}$ отлична от нуля.

Класс функций, введённых в определении 2.4, обозначим через $R_p[\alpha,\beta]$. Из определения 2.4 вытекает, что для функции $y \in R_p[\alpha,\beta]$ справедливы неравенства $\ddot{y} < 0$ при $t \in (\tau_{4i-2},\tau_{4i-1})$ и $\ddot{y} > 0$ при $t \in (\tau_{4i},\tau_{4i+1})$, $\quad i = \overline{1,p}$.

Нетрудно убедиться в том, что для функции $y \in R_p[\alpha,\beta]$ при каждом $c \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$\nu^\gamma\,(y(t) - c;\alpha,\beta) \leqslant 2p+1, \quad \gamma \in \{-,\sim,0,+\}.$$

Определение 2.5 [22]. Назовём функцию $y \in C^3(\mathbb{R}_+)$ *правильно колеблющейся на положительной полуоси* $\mathbb{R}_+$, если существует такая строго возрастающая последовательность $\{\delta_i\}$ неотрицательных чисел с первым членом $\delta_1 = 0$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ сужение $y|_{[\delta_i,\delta_{i+1}]}$ является правильно колеблющейся на отрезке $[\delta_i,\delta_{i+1}]$ функцией некоторого порядка $p_i \in \mathbb{N}$, т.е. $y|_{[\delta_i,\delta_{i+1}]} \in R_{p_i}[\delta_i,\delta_{i+1}]$.

Класс функций, введённых в определении 2.5, обозначим через $R(\mathbb{R}_+)$.

В работе [22] установлено следующее утверждение.

Лемма 2.4. Для любых натурального числа $p \in \mathbb{N}$ и действительных чисел $\alpha < \beta$ и $b < d$ существует функция $f(\cdot) \equiv f(\cdot;\alpha,\beta;b,d;p) : [\alpha,\beta] \to [b,d]$, правильно колеблющаяся порядка p на отрезке $[\alpha,\beta]$, обладающая свойствами:

1) для любых $\tau \in (\alpha,\beta]$, символа $\gamma \in \{-,\sim,0,+\}$ и чисел $c_1 \in [b,d]$, $c_2 \in (b,d)$, $c_3 \in \{b,d\}$ и $c_4 \notin [b,d]$ справедливы соотношения:

$$\nu^\gamma(f(\cdot) - c_1;\alpha,\tau) \leqslant (2p+1)(\tau-\alpha)/(\beta-\alpha) + 1, \quad \nu^0(f(\cdot) - c_3;\alpha,\beta) = p+1,$$

$$\nu^-(f(\cdot)-c_3;\alpha,\beta)=\nu^\sim(f(\cdot)-c_3;\alpha,\beta)=\nu^\gamma(f(\cdot)-c_4;\alpha,\beta)=0,$$
$$\nu^\gamma(f(\cdot)-c_2;\alpha,\beta)=\nu^+(f(\cdot)-c_3;\alpha,\beta)=2p+1.$$

2) Уравнение $f(t)=b$ имеет ровно $p+1$ решение $\mu_1<\ldots<\mu_{p+1}$, уравнение $f(t)=d$ имеет ровно $p+1$ решение $\nu_1<\ldots<\nu_{p+1}$, причём $\alpha=\mu_1<\nu_1<\mu_2<\nu_2<\ldots<\nu_{p+1}=\beta$.

3) Для некоторой константы $M>0$ при $t\in[\alpha,\beta]$ выполнены неравенства

$$|\dot f(t)|\leqslant M(2p+1)(d-b)(\beta-\alpha)^{-1},\quad |\ddot f(t)|\leqslant M(2p+1)^2(d-b)^2(\beta-\alpha)^{-2}.$$

Следующая лемма уточняет следствие 4 [22] и использует рассуждения леммы 14 [22].

Лемма 2.5. Для произвольного суслинского множества $\mathcal{A}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, существует ограниченная функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot)\in R(\mathbb{R}_+)$, обладающая свойством: для любых функций $a_i:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $i=\overline{0,2}$, удовлетворяющих для некоторых положительных постоянных C и λ условию $|a_0(t)|+|a_1(t)|+|a_2(t)|\leqslant Ce^{-\lambda t}$, $t\in\mathbb{R}_+$, при каждом $c\in\mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\{\hat\omega^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)\colon c\in\mathbb{R}\}=\mathcal{A}, \tag{2.55}$$

$$\hat\omega^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)\geqslant\hat\omega^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)=\hat\omega^+(y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c). \tag{2.56}$$

Доказательство. Через $\mathcal{K}$ обозначим канторово множество [6, с. 138]:

$$\mathcal{K}=\bigcap_{j=0}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^j}\Delta_i^j,$$

где отрезки Δ_i^j, $\quad i=\overline{1,2^j}$ определяются индукцией по $j\in\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\sqcup\{0\}$: $\Delta_1^0=[0,1]$, а при $j\in\mathbb{N}$ для каждого $i=\overline{1,2^j}$ отрезки Δ_{2i-1}^j и Δ_{2i}^j по определению – левая и правая трети отрезка Δ_i^{j-1} соответственно. Для любых $j\in\mathbb{N}_0$, $i=\overline{1,2^j}$ обозначим $\Delta_i^j=[\alpha_i^j,\beta_i^j]$, т.е.

$$[\alpha_{2i-1}^{j+1},\beta_{2i-1}^{j+1}]=[\alpha_i^j,\alpha_i^j+3^{-(j+1)}],\quad [\alpha_{2i}^{j+1},\beta_{2i}^{j+1}]=[\beta_i^j-3^{-(j+1)},\beta_i^j].$$

Множество точек второго рода [6, с. 141] канторова множества $\mathcal{K}$ обозначим через $\mathcal{K}_2$:

$$\mathcal{K}_2=\bigcap_{j=0}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^j}(\alpha_i^j,\beta_i^j).$$

Далее, для каждого $j \in \mathbb{N}_0$ определим 2^j отрезков $\tilde{\Delta}_i^j = [\tilde{\alpha}_i^j, \tilde{\beta}_i^j]$, где $\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j + 6^{-(j+2)}$ и $\tilde{\beta}_i^j = \beta_i^j - 6^{-(j+2)}$, $i = \overline{1, 2^j}$.

Занумеруем отрезки $\tilde{\Delta}_i^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1, 2^j}$, натуральными числами и обозначим их в указанной нумерации $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, полагая $\Delta(2^j + i - 1) = \tilde{\Delta}_i^j$. Пусть $\Delta(k) = [b_k, d_k]$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $b_k = \tilde{\alpha}_i^j$, $d_k = \tilde{\beta}_i^j$, где $j = [\log_2 k]$ и $i = k + 1 - 2^j$ (здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть числа).

Выберем строго возрастающую последовательность (t_k) с первым членом $t_1 = 0$, удовлетворяющую при $k \to +\infty$ условию $(t_{k+1} - t_k)/t_{k+1} \to 1$.

Согласно [6, с. 146–147] существует гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{K}_2 \to \mathbb{I}$ между пространством $\mathcal{K}_2$ и пространством $\mathbb{I}$ иррациональных чисел. Для суслинского множества $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}$ существует [111, с. 489] непрерывное отображение $\psi : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, такое, что $\psi(\mathbb{I}) = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$. Положим $g = \psi \circ \varphi$. Тогда $g(\mathcal{K}_2) = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$.

Функцию $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ определим сначала на отрезках $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ и $[t_{4k-1}, t_{4k}]$ для всех $k \in \mathbb{N}$. На каждом отрезке $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{N}$, выберем число $\xi_k \in \Delta(k)$ второго рода и зададим последовательность $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел равенством $p_k = \big[(2\pi)^{-1}(t_{4k-2} - t_{4k-3}) g(\xi_k)\big] + 1$. Последовательность $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел зададим равенством $n_k = [(t_{4k} - t_{4k-1})k] + 1$, если $+\infty \in \mathcal{A}$, иначе $n_k = 1$. Положим

$$y_{\mathcal{A}}(t) = \begin{cases} f(t; t_{4k-3}, t_{4k-2}; b_k, d_k; p_k) & \text{при} \quad t \in [t_{4k-3}, t_{4k-2}], \\ f(t; t_{4k-1}, t_{4k}; 2, 3; n_k) & \text{при} \quad t \in [t_{4k-1}, t_{4k}], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$. На полуось $\mathbb{R}_+$ функцию $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ продолжим согласно [22, следствие 2] так, чтобы $y_{\mathcal{A}}(\cdot) \in R(\mathbb{R}_+)$ и

$$y_{\mathcal{A}}\big|_{[t_{4k-2}, t_{4k-1}]}(\cdot) \in R_2[t_{4k-2}, t_{4k-1}], \quad y_{\mathcal{A}}\big|_{[t_{4k}, t_{4k+1}]}(\cdot) \in R_2[t_{4k}, t_{4k+1}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Построенная функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ является ограниченной на полуоси, как это вытекает из указанного следствия и определения функции $f(\cdot; \alpha, \beta; b, d; p)$.

В доказательстве леммы 14 [22] и следствия 4 [22] установлено равенство

$$\hat{\omega}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) = \hat{\omega}^+(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) = \begin{cases} g(c), & \text{если} \quad c \in \mathcal{K}_2, \\ +\infty, & \text{если} \quad c \in (2,3) \text{ и } +\infty \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, установлены все равенства в (2.55) и (2.56). Установим теперь оставшееся неравенство.

Пусть $c \in \mathcal{K}_2$. Тогда в его троичном представлении $c = 0{,}c_1c_2\ldots$ (где цифры $c_i \in \{0, 2\}$, $i \in \mathbb{N}$) существует бесконечно много таких $m \in \mathbb{N}$, что

$c_m = 0$ и $c_{m+1} = 2$. Обозначим множество таких m через $\mathcal{N}(c)$. Пусть

$$\underline{c}^{(m)} = 0, c_1c_2\dots c_{m-1} \quad \text{и} \quad \overline{c}^{(m)} = 0, c_1c_2\dots c_{m-1}(2), \quad m \in \mathcal{N}(c).$$

Поскольку троичная запись числа $\underline{c}^{(m)}$ содержит после запятой не более чем $m-1$ цифр 0 и 2, то $\underline{c}^{(m)}$ – левый конец некоторого отрезка $(m-1)$-го ранга $\Delta^{m-1}_{j(m)}$, $j(m) \in \{1, \dots, 2^{m-1}\}$, а так как $\overline{c}^{(m)} - \underline{c}^{(m)} = 3^{-(m-1)}$, то $[\underline{c}^{(m)}, \overline{c}^{(m)}] = \Delta^{m-1}_{j(m)}$.

Докажем неравенство

$$\underline{c}^{(m)} + 2\cdot 6^{-(m+1)} < c < \overline{c}^{(m)} - 2\cdot 6^{-(m+1)}, \quad m \in \mathcal{N}(c). \tag{2.57}$$

Действительно, вычитая из всех частей этого неравенства число $\underline{c}^{(m)}$ и затем умножая их на 3^{m+1}, получим очевидное неравенство

$$2^{-m} < 2 + 0, c_{m+2}\dots < 9 - 2^{-m}.$$

Положим $N^0(c) = \{2^{m-1} + j(m) - 1 : m \in \mathcal{N}(c)\}$. Другими словами, множество $N^0(c)$ состоит из номеров отрезков $\tilde{\Delta}^{m-1}_{j(m)}$, $m \in \mathcal{N}(c)$. Как отмечено выше, множество $N^0(c)$ бесконечно.

Из построения функции $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ и леммы 2.4 вытекает справедливость неравенств

$$|\dot{y}_{\mathcal{A}}(t)| \leqslant M(|g(\xi_k)| + 1), \quad |\ddot{y}_{\mathcal{A}}(t)| \leqslant M(g^2(\xi_k) + 1), \quad t \in [t_{4k-3}, t_{4k-2}],$$

для некоторой постоянной $M > 0$.

Заметим, что $\lim_{N^0(c)\ni k\to\infty} \xi_k = c$, поскольку $|\Delta(k)| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\lim_{N^0(c)\ni k\to\infty} g(\xi_k) = g(c)$, поскольку g непрерывна. Значит, множество $\{|g(\xi_k)| : k \in N^0(c)\}$, а с ним и сужения функций $\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ и $\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на объединение отрезков $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$, $k \in N^0(c)$, ограничены некоторой константой $\tilde{M} > 1$.

Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $36C\tilde{M}k^3e^{-\lambda(4k-3)} < 1$ при всех $k \geqslant k_0$. Тогда для любого $k \in N^0(c) \cap [k_0, +\infty)$ на отрезке $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) - c$ имеет не менее $2p_k + 1$ точек строгой смены знака. Действительно, в силу (2.57) справедлива цепочка

$$\min\{d_k - c, c - b_k\} > 6^{-(m+1)} > 1/(36k^3), \quad \text{где } m = [\log_2 k] + 1,$$

поэтому по построению функции $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на отрезке $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ найдутся точки

$$t_{4k-3} = \mu_1^k < \nu_1^k < \ldots < \mu^k_{p_k+1} < \nu^k_{p_k+1} = t_{4k-2},$$

в которых функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) - c$ принимает поочерёдно отрицательные и положительные значения.

Таким образом, в силу определения числа p_k справедливо неравенство

$$\nu^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c;t_{4k-3},t_{4k-2})\geqslant\frac{g(\xi_k)}{\pi}(t_{4k-2}-t_{4k-3}),$$

откуда по лемме 13 [22] получаем, что

$$\hat\omega^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)\geqslant\varlimsup_{N^0(c)\ni k\to\infty}g(\xi_k)=g(c).$$

С другой стороны, в лемме 14 [22] установлено, что $\hat\omega^-[y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c]=g(c)$.

Пусть теперь $c\in(2,3)$ и $+\infty\in\mathcal{A}$. Тогда по построению для некоторой постоянной $\tilde M>0$ на каждом из отрезков $[t_{4k-1},t_{4k}]$, $k\in\mathbb{N}$, выполнены оценки $|\dot y_{\mathcal{A}}(t)|\leqslant\tilde Mk$, $|\ddot y_{\mathcal{A}}(t)|\leqslant\tilde Mk$, а значит, сужение функции $a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на объединение указанных отрезков является бесконечно малым при $t\to+\infty$. Следовательно, для всех достаточно больших k на отрезке $[t_{4k-1},t_{4k}]$ найдутся точки

$$t_{4k-1}=\mu_1^k<\nu_1^k<\ldots<\mu_{n_k+1}^k<\nu_{n_k+1}^k=t_{4k},$$

в которых функция $y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c$ принимает поочерёдно отрицательные и положительные значения. Таким образом, в силу определения числа n_k справедливо неравенство

$$\nu^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c;t_{4k-1},t_{4k})\geqslant 2k(t_{4k}-t_{4k-1}),$$

откуда по лемме 13 [22] получаем, что

$$\hat\omega^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_0(\cdot)+a_1(\cdot)\dot y_{\mathcal{A}}(\cdot)+a_2(\cdot)\ddot y_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)=+\infty.$$

Лемма 2.5 доказана.

Доказательство теоремы 2.7. 1. Сначала докажем справедливость теоремы 2.7 при $n=3$.

Пусть $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$ – функция, построенная в лемме 2.5 по заданному суслинскому множеству $\mathcal{A}$. Согласно лемме 12 [22] существует функция $u_0(\cdot)\in C^3(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\lim_{t\to+\infty}u_0(t)=+\infty$ и набор функций $\{1,y_{\mathcal{A}}(\cdot),u_0(\cdot)\}$ является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $a\in\tilde{\mathcal{E}}^3$.

Выберем произвольно и зафиксируем $\lambda>0$. По лемме 2.3 набор функций $\exp(\exp(\lambda t))$, $\exp(\exp(\lambda t))y_{\mathcal{A}}(t)$, $\exp(\exp(\lambda t))u_0(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, является фундаментальной системой решений некоторого уравнения $\overline{a}\in\tilde{\mathcal{E}}^3$.

Положим $c=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3_*$. Каждому ненулевому решению

$$y_c(t)=c_1+c_2y_{\mathcal{A}}(t)+c_3u_0(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ поставим в соответствие решение

$$z_c(t) = \exp(\exp(\lambda t)) y_c(t) \in \mathcal{S}_*(\overline{a}).$$

Очевидно, что для любого набора $c \neq 0$ нули и точки строгой смены знака двух функций y_c и z_c совпадают между собой. Более того, если в некоторой точке функция y_c имеет кратный нуль, то это же верно и для функции z_c и наоборот. Следовательно, справедливы равенства

$$\hat{\omega}^-(y_c) = \hat{\omega}^-(z_c), \quad \hat{\omega}^0(y_c) = \hat{\omega}^0(z_c), \quad \hat{\omega}^+(y_c) = \hat{\omega}^+(z_c). \tag{2.58}$$

Покажем, что верхний сильный показатель колеблемости знаков $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c)$ всякого ненулевого решения $z_c \in \mathcal{S}_*(\overline{a})$ совпадает с верхней частотой Сергеева знаков $\hat{\omega}^-(y_c)$ соответствующего решения $y_c \in \mathcal{S}_*(a)$. Из очевидного неравенства $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leqslant \hat{\omega}^-(z_c)$ и (2.58) вытекает неравенство $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leqslant \hat{\omega}^-(y_c)$. Установим обратное неравенство.

Пусть $c_3 \neq 0$. Тогда для любого решения y_c найдется момент времени $t(c)$, начиная с которого функция y_c будет отлична от нуля. Поэтому выполняется цепочка равенств

$$0 = \hat{\nu}_\bullet^-(z_c) = \hat{\omega}^-(z_c) = \hat{\omega}^-(y_c) = 0. \tag{2.59}$$

При $c_3 = 0$ для скалярного произведения $\langle \psi z_c(t),\, m \rangle$ имеем представление

$$\frac{\langle \psi z_c(t),\, m \rangle}{\exp(\exp(\lambda t))} = m_1(c_1 + c_2 y_{\mathcal{A}}(t)) + m_2(\lambda e^{\lambda t}(c_1 + c_2 y_{\mathcal{A}}(t)) + c_2 \dot{y}_{\mathcal{A}}(t)) +$$

$$+ m_3((\lambda^2 e^{2\lambda t} + \lambda^2 e^{\lambda t})(c_1 + c_2 y_{\mathcal{A}}(t)) + 2\lambda e^{\lambda t} c_2 \dot{y}_{\mathcal{A}}(t) + c_2 \ddot{y}_{\mathcal{A}}(t)).$$

а) Если $m_3 \neq 0$, то указанное скалярное произведение принимает вид

$$\frac{\langle \psi z_c(t),\, m \rangle}{m_3(\lambda e^{2\lambda t} + \lambda^2 e^{\lambda t}) \exp(\exp(\lambda t))} = c_1 + c_2 y_{\mathcal{A}}(t) + a_0(t) + a_1(t) \dot{y}_{\mathcal{A}}(t) + a_2(t) \ddot{y}_{\mathcal{A}}(t),$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{0,2}$, экспоненциально стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

б) Если $m_2 \neq 0$, $m_3 = 0$, то скалярное произведение представимо в виде

$$\frac{\langle \psi z_c(t),\, m \rangle}{m_2 \lambda e^{\lambda t} \exp(\exp(\lambda t))} = c_1 + c_2 y_{\mathcal{A}}(t) + a_0(t) + a_1(t) \dot{y}_{\mathcal{A}}(t),$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{0,1}$, экспоненциально стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

в) Если $m_2 = m_3 = 0$, то скалярное произведение примет вид

$$\frac{\langle \psi z_c(t),\, m \rangle}{m_1 \exp(\exp(\lambda t))} = c_1 + c_2 y_{\mathcal{A}}(t).$$

Во всех случаях а)–в) выше, если $c_2 = 0$, то, начиная с некоторого момента $t(c)$, функция y_c будет отлична от нуля, поэтому справедлива цепочка (2.59). Если $c_2 \neq 0$, то в силу леммы 2.3 имеем $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \geqslant \hat{\omega}^-(y_c)$. Таким образом, равенство $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) = \hat{\omega}^-(y_c)$ установлено для всех $c \in \mathbb{R}_*^3$.

Из этого равенства, леммы 2.5 и определений характеристик колеблемости для любого $c \in \mathbb{R}_*^3$ получаем цепочку

$$\hat{\omega}^-(y_c) = \hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leqslant \hat{\nu}_\bullet^+(z_c) \leqslant \hat{\omega}^+(z_c) = \hat{\omega}^+(y_c) = \hat{\omega}^-(y_c),$$

в которой все неравенства являются равенствами.

Следовательно, спектры верхних сильных показателей колеблемости и верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней уравнения $\overline{a}$ совпадают со спектром верхней частоты Сергеева знаков уравнения a. Последний в силу леммы 2.5 есть в точности множество $\mathcal{A}$.

2. Теперь методом математической индукции по n — порядку дифференциального уравнения — докажем (более сильное утверждение), то для любых натуральных чисел $p \geqslant n \geqslant 3$ найдется уравнение $\overline{a} \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ с множеством ненулевых решений $\mathcal{S}_*(\overline{a}) \subset C^p(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющее условиям теоремы 2.7.

База индукции при $n = 3$ установлена в п. 1 настоящего доказательства.

Предположим справедливость нашего утверждения для некоторого n и произвольного $p \geqslant n$. Пусть $p \geqslant n+1$. Выберем произвольную фундаментальную систему решений $\{x_1(\cdot), x_2(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)\} \subset C^p(\mathbb{R}_+)$ уравнения $\overline{a}$. На основании леммы работы [56], дополним выбранную систему функцией $x_{n+1}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ так, что $W_{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}}(t) \neq 0$ при $t \geqslant 0$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x_i(t)}{x_{n+1}(t)} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.60}$$

Следовательно, найдется уравнение $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{E}}^{n+1}$ с фундаментальной системой решений $\{x_1(\cdot), x_2(\cdot), \ldots, x_{n+1}(\cdot)\}$. Так как каждое решение уравнения $\overline{a}$ является решением уравнения $\tilde{a}$, то при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +\}$ выполнены включения

$$\mathcal{A} \subset \hat{\omega}^\alpha(\mathcal{S}_*(\tilde{a})), \quad \mathcal{A} \subset \hat{\nu}^\alpha(\mathcal{S}_*(\tilde{a})), \quad \mathcal{A} \subset \check{\omega}^\alpha(\mathcal{S}_*(\tilde{a})), \quad \mathcal{A} \subset \check{\nu}^\alpha(\mathcal{S}_*(\tilde{a})).$$

Пусть произвольное решение $x \in \mathcal{S}_*(\tilde{a})$ не является решением уравнения $\overline{a}$. Тогда существуют такие постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, для которых справедливо представление $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n+1}x_{n+1}$ и $c_{n+1} \neq 0$. Из условий (2.60) при достаточно больших $t > 0$ решение x отделено от нуля, а значит, все характеристики колеблемости знаков, нулей и корней решения

x равны нулю. Поэтому из принадлежности $0 \in \mathcal{A}$ следует справедливость заключения теоремы.

Теорема 2.7 полностью доказана.

2.5 Неостаточность сильных показателей колеблемости на множестве решений однородных уравнений

В данном разделе установлено отсутствие свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных дифференциальных уравнений выше второго порядка.

Для доказательства теоремы 2.8 нам понадобится следующее утверждение, истинность которого вытекает из результатов работы [21].

Лемма 2.6. Для любой функции $f \in C^1[a,b]$, имеющей только простые нули $a < x_1 < \ldots < x_k < b$ или вовсе не имеющей нулей (тогда считаем $k = 0$), существует такое $\delta > 0$, что для всякой функции $g \in C^1[a,b]$, удовлетворяющей условию

$$\max_{t\in[a,b]} (|g(t)| + |g'(t)|) < \delta,$$

функция $f + g$ имеет ровно k нулей, причем все они простые.

Доказательство теоремы 2.8.

1. Сначала зафиксируем нечетный порядок уравнения $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим такое уравнение $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{C}^n$, для которого характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda+1)(\lambda^2+1)^k = 0$, т.е. имеет простой корень $\lambda = -1$ и k-кратные корни $\lambda = \pm i$. Ясно, что его упорядоченные фундаментальные системы решений

$$x_1 = e^{-t}, \quad x_2 = \cos t, \quad x_3 = \sin t, \ldots, x_{n-1} = t^{k-1}\cos t, \quad x_n = t^{k-1}\sin t,$$

$$y_1 = -\cos t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = \sin t, \ldots, y_{n-1} = t^{k-1}\cos t, \quad y_n = t^{k-1}\sin t$$

имеют один и тот же определитель Вронского.

Выберем такие числа t_1 и t_2, что $t_1 < t_2$. В соответствии с теоремой 3 [169] построим на участке $[t_1, t_2]$ уравнение $b \in \mathcal{E}^n$ (с гладкими коэффициентами), переводящее набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ решений, заданных на отрезке $[0, t_1]$, в набор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ решений, заданных на луче $[t_2, +\infty)$: вне отрезка $[t_1, t_2]$ уравнение b совпадает с уравнением a. Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, и т. д. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответственно, т. е.

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [0, t_1], \\ y_i(t), & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

Теперь рассмотрим уравнение $d \equiv (0, d_2, 0, d_4, \ldots, 0, d_{n-1}) \in \mathcal{C}^{n-1}$ с характеристическим уравнением $(\lambda^2 + 1)^k = 0$. Тогда для вектора $m_1 = (d_{n-1}, 0, d_{n-3}, \ldots, d_2, 0, 1)$ и произвольного решения $x = c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \in \mathcal{S}_*(a)$ выполняется $\langle \psi^n x(t), m_1 \rangle \equiv 0$, так как $x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathcal{S}_*(d)$.

2. Для совпадающих друг с другом на луче $[t_2, +\infty)$ двух решений

$$y = y_2 + y_3 + \cdots + y_n \in \mathcal{S}_*(a), \quad z = z_2 + z_3 + \cdots + z_n \in \mathcal{S}_*(b)$$

и вектора m_1 имеем представления

$$\langle \psi^n y(t), m_1 \rangle = Ae^{-t} > 0, \quad A = 1 + d_2 + \cdots + d_{n-3} + d_{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.61}$$

$$\langle \psi^n z(t), m_1 \rangle = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ \langle \psi^n y(t), m_1 \rangle, & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

Отсюда в силу неравенства (2.61) имеем

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y) = \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y) = 0, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}. \tag{2.62}$$

3. Из доказательства теоремы 3 [251] следует, что для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ найдется такой вектор $m^j \in \mathbb{R}^n_*$, неколлинеарный m_1, что при $t \geqslant t_2$ справедливо представление

$$t^{-j+1} \langle \psi^n z(t), m^j \rangle = q_1 \cos t + q_2 \sin t + \varphi_j(t),$$

где $q_1 \cdot q_2 \neq 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_j(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi'_j(t) = 0$. При этом для некоторых векторов m, согласно теореме 2 [177], выполнено неравенство $\nu^*(z, m, t_2) < +\infty$. Следовательно, на основании леммы 2.6 при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ справедливо

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(z, m, t) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \left[\frac{t}{\pi} \right] = 1,$$

где $[s]$ — целая часть числа s.

Для нижних сильных показателей колеблемости решения z имеют место аналогичные равенства, поэтому справедлива цепочка равенств

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(z) = \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(z) = 1, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}. \tag{2.63}$$

Несовпадение друг с другом величин (2.62) и (2.63) означает неостаточность рассматриваемых показателей (2.5).

4. Для фиксированного четного порядка $n = 2k+2$, $k \in \mathbb{N}$ уравнений проводятся аналогичные рассуждения. В самом деле, для выбранных чисел τ_1 и τ_2 в соответствии с теоремой 3 [169] построим $\overline{b} \in \mathcal{E}^n$ с фундаментальной системой решений $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n$:

$$\overline{z}_i(t) = \begin{cases} \overline{x}_i(t), & t \in [0, \tau_1], \\ \overline{y}_i(t), & t \in [\tau_2, +\infty), \end{cases}$$

где системы функций

$$\overline{x}_1 = e^{-t}\cos t,\ \overline{x}_2 = e^{-t}\sin t,\ \overline{x}_3 = \cos 2t,\ \overline{x}_4 = \sin 2t, \ldots, \overline{x}_n = t^{k-1}\sin 2t,$$

$$\overline{y}_1 = e^{-t}\cos t,\ \overline{y}_2 = -\cos 2t,\ \overline{y}_3 = e^{-t}\sin t,\ \overline{y}_4 = \sin 2t, \ldots, \overline{y}_n = t^{k-1}\sin 2t$$

(с одним и тем же определителем Вронского) являются фундаментальными для уравнения $\overline{a} \in \mathcal{C}^n$ с характеристическим уравнением $(\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda^2+4)^k = 0$.

В дальнейшем нам понадобится еще уравнение $\overline{d} \equiv (0, \overline{d}_2, 0, \overline{d}_4, \ldots, 0, \overline{d}_{n-2}) \in \mathcal{C}^{n-2}$ с характеристическим уравнением $(\lambda^2+4)^k = 0$ и соответственно фундаментальной системой решений $\overline{x}_3, \overline{x}_4, \ldots, \overline{x}_n \in \mathcal{S}_*(\overline{d})$.

Для двух решений

$$\overline{y} = \overline{y}_3 + \overline{y}_4 + \cdots + \overline{y}_n \in \mathcal{S}_*(\overline{a}), \quad \overline{z} = \overline{z}_3 + \overline{z}_4 + \cdots + \overline{z}_n \in \mathcal{S}_*(\overline{b}),$$

совпадающих на луче $[\tau_2, +\infty)$, и вектора $\overline{m}_1 = (\overline{d}_{n-2}, 0, \overline{d}_{n-4}, \ldots, \overline{d}_2, 0, 1, 0)$ справедливы представления

$$\langle \psi^n \overline{z}(t), \overline{m}_1 \rangle \equiv 0, \quad t \in [0, \tau_1],$$

$$\langle \psi^n \overline{y}(t), \overline{m}_1 \rangle = Be^{-t}\sin(t+t_0), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где t_0 – вспомогательный угол, а $B \neq 0$ поскольку $\overline{y}_3 \notin \mathcal{S}_*(\overline{d})$.

Очевидно, что при любом $m \in \mathbb{R}^n_*$ имеет место включение $\langle \psi^n \overline{y}(t), \overline{m} \rangle \in \mathcal{S}_*(\overline{a})$. Из доказательства теоремы IV работы [165] вытекает, что для любого уравнения с постоянными коэффициентами характеристическая частота строгих знаков у любого ненулевого его решения не меньше, чем наименьший из модулей мнимых частей корней его характеристического многочлена. Поэтому при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ для решения $\overline{y}$ имеем

$$1 \leqslant \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(\overline{y}) \leqslant \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(\overline{y}) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(\overline{y}, m, t) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(\overline{y},\overline{m}_1,t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\left[\frac{t+t_0}{\pi}\right] = 1,$$

а для решения $\overline{z}$ и любого вектора $m \nparallel \overline{m}_1$ при $t \geqslant \tau_2$ имеем представление

$$\langle\psi^n\overline{z}(t),m\rangle = r_1e^{-t}\cos t + r_2e^{-t}\sin t + \dots + r_{n-1}t^{k-1}\cos 2t + r_nt^{k-1}\sin 2t,$$

в котором все коэффициенты $r_3, r_4, \dots, r_n$ одновременно не равны нулю. Из доказательства теоремы 3 [251] следует, что для любого $j \in \{1,\dots,k\}$ найдется такой вектор $\overline{m}^j \nparallel \overline{m}_1$, что функция $\langle\psi^n\overline{z}(t),\overline{m}^j\rangle$ при $t \geqslant \tau_2$ удовлетворяет условию

$$t^{-j+1}\langle\psi^n\overline{z}(t),\overline{m}^j\rangle = \overline{r}_1\cos 2t + \overline{r}_2\sin 2t + \psi_j(t),$$

где $\overline{r}_1\cdot\overline{r}_2 \neq 0, \quad \lim\limits_{t\to+\infty}\psi_j(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\psi_j'(t) = 0.$

Следовательно, на основании теоремы 2 [177] и леммы 2.6 найдется такой вектор $m_2 \nparallel \overline{m}_1$, что справедливо

$$\nu_\bullet^\alpha(\overline{z}) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n}\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(\overline{z},m,t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(\overline{z},m_2,t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\left[\frac{2t}{\pi}\right] = 2.$$

Таким образом, полученные неравенства

$$\nu_\bullet^\alpha(\overline{y}) = 1 < 2 = \nu_\bullet^\alpha(\overline{z}), \quad \alpha\in\{\sim,0,+,*\},$$

завершают доказательство теоремы.

Теорема 2.8 доказана.

Доказательство теоремы 2.9. Обратимся к доказательству теоремы 2.8.

1. В случае нечетности порядка уравнений при любом $\alpha\in\{\sim,0,+,*\}$ выполнено равенство $\nu^\alpha(z,m_1,t_1) = +\infty$. Для любого вектора $m\in\mathbb{R}^n_*$ при $t\geqslant t_2$ имеем представление

$$\langle\psi^nz(t),m\rangle = A_1e^{-t} + A_2\cos t + A_3\sin t + \dots + A_{n-1}t^{k-1}\cos t + A_nt^{k-1}\sin t.$$

Из условия $m\to m_1$ следует $A_1\to A\neq 0$, $A_2\to 0,\dots,A_n\to 0$, а значит, при любом $t>t_2$ справедливо равенство

$$\lim_{m\to m_1}\nu^\alpha(z,m,t_2,t) = 0, \quad \alpha\in\{\sim,0,+,*\},$$

откуда с учетом оценки (см. теорему 2 [177])

$$\lim_{m\to m_1}\nu^*(z,m,t_2) < +\infty,$$

получим при любом $\alpha\in\{\sim,0,+,*\}$

$$\nu_\circ^\alpha(z) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(z,m,t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\lim_{m\to m_1}\nu^\alpha(z,m,t) = 0. \qquad (2.64)$$

Несовпадение друг с другом величин (2.63) и (2.64) гарантирует справедливость неравенства (2.6).

2. В случае четных порядков уравнений при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ выполнено равенство $\nu^\alpha(\overline{z}, \overline{m}_1, \tau_1) = +\infty$. Для любого ненулевого вектора $m \nparallel \overline{m}_1$ при $t \geqslant \tau_2$ имеем представление

$$\langle \psi^n \overline{z}(t), m\rangle = B_0 e^{-t}\sin(t+t_1) + B_1\sin(2t+t_2) + \cdots + B_k t^{k-1}\sin(2t+t_{k+1}),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}$ – вспомогательные аргументы.

Если $m \to \overline{m}_1$, то $B_0 \to B \neq 0$, $B_1 \to 0, \ldots, B_k \to 0$ и при любом $t \geqslant \tau_2$ верно

$$\lim_{m\to\overline{m}_1} \nu^\alpha(\overline{z}, m, \tau_2, t) = \left[\frac{t-\tau_2}{\pi}\right], \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}.$$

Следовательно, при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ получаем цепочку равенств

$$\nu^\alpha_\circ(\overline{z}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(\overline{z}, m, t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} \lim_{m\to\overline{m}_1} \nu^\alpha(\overline{z}, m, t) = 1,$$

а значит, $\nu^\alpha_\circ(\overline{z})$ меньше чем $\nu^\alpha_\bullet(\overline{z})$.

Теорема 2.9 доказана.

2.6 Спектры показателей колеблемости неоднородных автономных уравнений

В данном разделе полностью описаны показатели колеблемости на множестве решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Доказательство теорем 2.10 и 2.11.

1. Из общего вида множества решений неоднородного уравнения (a, f) следует, что найдется такое уравнение $b \equiv (b_1, \ldots, b_n, \ldots, b_{n+r_1}) \in \mathcal{C}^{n+r_1}$, множество решений $\mathcal{S}(b, 0)$ которого содержит $\mathcal{S}(a, f)$. Поэтому для любого решения $y \in \mathcal{S}(a, f)$ и вектора

$$m_1 = (b_{n+r_1}, \ldots, b_n, \ldots, b_1, 1) \in \mathbb{R}^{n+r_1+1}$$

функция $\langle \psi y(\tau), m_1\rangle$ тождественно равна нулю. Следовательно, выполняются равенства

$$\sigma^-(y) = \zeta^-(y) = 0.$$

2. В соответствии с упорядоченным набором $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выпишем фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения

$(a,0)$: каждому действительному корню λ, встречающемуся в списке ровно s раз, поставим в соответствие набор функции

$$t^{s-1}e^{\lambda t}, \ldots, te^{\lambda t},\, e^{\lambda t},$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней $\mu \pm i\gamma$, встречающейся в списке корней ровно s раз, поставим в соответствие набор функций

$$t^{s-1}e^{\mu t}\cos\gamma t, \quad t^{s-1}e^{\mu t}\sin\gamma t, \ldots, te^{\mu t}\sin\gamma t, \quad e^{\mu t}\cos\gamma t, \quad e^{\mu t}\sin\gamma t.$$

В итоге получим упорядоченный список $S = \{f_1,\, f_2, \ldots, f_n\}$, состоящий ровно из n функций.

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем частное решение

$$z = \sum_{j=1}^{l} t^{h_j} e^{\alpha_j t}(P_j(t)\cos\beta_j t + Q_j(t)\sin\beta_j t), \quad h_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $P_j,\, Q_j$ - действительные многочлены, рассматриваемого уравнения (a, f). Тогда общее решение этого неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) + z(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - произвольные постоянные.

Возьмем произвольное решение $y \in \mathcal{S}(a, f)$ неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$:

$$y = c_q f_q(t) + c_{q+1} f_{q+1}(t) + \cdots + c_p f_p(t) + z(t), \quad c_q \neq 0, \quad 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant n. \tag{2.65}$$

3. Пусть $\lambda_q = \delta_1 \in \mathbb{R}$. Тогда для выбранного решения $y \in \mathcal{S}(a, f)$ и некоторого уравнения $d = (d_1, d_2, \ldots, d_{r_2}) \in \mathcal{C}^{r_2}$ справедливо представление

$$y = u(t) + v(t), \quad u \in \mathcal{S}(d), \quad v = ct^{l-1}e^{\lambda_q t} \notin \mathcal{S}(d), \quad l > 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Тогда для вектора $m_2 = (d_{r_2}, \ldots, d_2, d_1, 1) \in \mathbb{R}^{r_2+1}$ и некотором $q \in \mathbb{R}_*$ справедливо

$$\langle \psi y(\tau), m_2 \rangle = \langle \psi u(\tau), m_2 \rangle + \langle \psi v(\tau), m_2 \rangle = \langle \psi v(\tau), m_2 \rangle = qe^{\lambda_q t}. \tag{2.66}$$

Убедимся в справедливости этого разложения. На линейном пространстве Φ^∞ скалярных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}_+$ определим оператор дифференцирования $\frac{d}{dt} \equiv D : \Phi^\infty \to \Phi^\infty$. Тогда характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^{r_2} + d_{r_2}\lambda^{r_2-1} + \cdots + d_2\lambda + d_1,$$

взятый от оператора D и имеющий вид

$$L(D) = D^{r_2} + d_{r_2} D^{r_2-1} + \dots + d_2 D + d_1 I : \Phi^\infty \to \Phi^\infty,$$

для любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ дает представление

$$\langle \psi y, m_2 \rangle = L(D)y.$$

Для вычисления последней функции будем пользоваться формулой сдвига [1] :

$$L(D)\left(f(t)e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t} L(D + \lambda I) f(t), \quad f \in \Phi^\infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.67}$$

Число λ_q является $(l-1)$-кратным корнем многочлена L, т.е.

$$L(\lambda_q) = L'(\lambda_q) = \dots = L^{(l-2)}(\lambda_q) = 0, \quad L^{(l-1)}(\lambda_q) \neq 0.$$

Рассмотрим многочлен

$$L(\lambda + \lambda_q) = \lambda^{r_2} + \sum_{j=0}^{r_2-1} q_j \lambda^j$$

с неопределенными коэффициентами $q_0, q_1, \dots, q_{r_2}$. При $\lambda = 0$, получим $q_0 = L(\lambda_q) = 0$. Последовательно дифференцируя многочлен $L(\lambda + \lambda_q)$ по λ, находим

$$q_1 = L'(\lambda + \lambda_q)|_{\lambda=0} = L'(\lambda_q) = 0,$$

$$q_s = \frac{1}{s!} L^{(s)}(\lambda + \lambda_q)\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{s!} L^{(s)}(\lambda_q) = 0, \quad s = 2, 3, \dots, l-2.$$

Теперь запишем

$$L(\lambda + \lambda_q) = \lambda^{r_2} + \sum_{j=l-1}^{r_2-1} q_j \lambda^j. \tag{2.68}$$

На основании равенств (2.67),(2.68), имеем

$$L(D)\left(t^{l-1} e^{\lambda_q t}\right) = e^{\lambda_q t} L(D + \lambda_q I) t^{l-1} =$$

$$= e^{\lambda_q t} \left(D^{r_2} + \sum_{j=l-1}^{r_2-1} q_j D^j \right) t^{l-1} = (l-1)! q_{l-1} e^{\lambda_q t}$$

(здесь $q_{l-1} \neq 0$, так как $t^{l-1} e^{\lambda_q t} \notin \mathcal{S}_*(d)$). Следовательно, для выбранного решения (2.65) справедливо (2.66) при любом $l > 1$, а значит, при любом $\varepsilon \in \{\sim, 0, +, *\}$ выполнены равенства

$$\zeta^\varepsilon(y) = \sigma^\varepsilon(y) = 0. \tag{2.69}$$

4. Пусть $0 = \operatorname{Im}\lambda_q < \beta_1$. Тогда найдется такое уравнение $d^1 = (d_1^1, d_2^1, \ldots, d_{r_3}^1) \in \mathcal{C}^{r_3}$, что решение (2.65) представимо в виде

$$y = c_q f_q(t) + u_1(t), \quad u_1 \in \mathcal{S}(d^1, 0), \quad f_q \notin \mathcal{S}(d^1, 0).$$

Поэтому для вектора $m_3 = (d_{r_3}^1, \ldots, d_2^1, d_1^1, 1) \in \mathbb{R}^{r_3+1}$ и некоторой ненулевой константы H справедливо равенство

$$\langle \psi y(\tau), m_3 \rangle = c_q \langle \psi f_q(\tau), m_3 \rangle + \langle \psi u_1(\tau), m_3 \rangle = c_q \langle \psi f_q(\tau), m_3 \rangle = He^{\lambda_q \tau},$$

из которого следует справедливость (2.69).

5. Случай $0 = \beta_1 < |\operatorname{Im}\lambda_q|$ разбирается аналогично предыдущему пункту настоящего доказательства и приводит к такому же заключению.

6. Пусть теперь $\lambda_q = \delta_1 \notin \mathbb{R}$. Тогда для выбранного решения

$$y = u_2(t) + u_3(t),$$

где

$$u_2 \in \mathcal{S}(d^2), \quad u_3 = t^{l-1} e^{\alpha_1 t}(P\cos\beta_1 t + Q\sin\beta_1 t) \notin \mathcal{S}(d^2), \quad l > 1, \quad P, Q \in \mathbb{R},$$

и вектора $m_4 = (d_{r_4}^2, \ldots, d_2^2, d_1^2, 1) \in \mathbb{R}^{r_4+1}$ получим

$$\langle \psi y(\tau), m_4 \rangle = Ae^{\alpha_1 \tau} \sin(\beta_1 \tau + \tau_0), \tag{2.70}$$

где τ_0 — вспомогательный угол и $A \neq 0$. Убедимся в справедливости этого равенства.

В самом деле, все рассуждения, проводимые в предыдущем пункте настоящего доказательства, справедливы и при комплексном $\lambda_q = \alpha_1 + i\beta_1$. Поэтому для линейного оператора

$$L(D) = D^{r_4} + d_{r_4}^2 D^{r_4-1} + \cdots + d_2^2 D + d_1^2 I$$

соблюдаются равенства

$$L(D)\left(t^{l-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t\right) = L(D)\left(t^{l-1}\mathrm{Re}\,\left(e^{\lambda_q t}\right)\right) = \mathrm{Re}\,\left(L(D)\left(t^{l-1}e^{\lambda_q t}\right)\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\,\left(e^{\lambda_q t}L(D+\lambda_q I)t^{l-1}\right) = \mathrm{Re}\,\left(e^{\lambda_q t}\left(D^{r_4} + \sum_{j=l-1}^{r_4-1}(p_j + ih_j)D^j\right)t^{l-1}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\,\left((l-1)!(p_{l-1} + ih_{l-1})e^{\lambda_q t}\right) = (l-1)!e^{\alpha_1 t}\left(p_{l-1}\cos\beta_1 t - h_{l-1}\sin\beta_1 t\right),$$

$$L(D)\left(t^{l-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t\right) = L(D)\left(t^{l-1}\mathrm{Im}\,\left(e^{\lambda_q t}\right)\right) = \mathrm{Im}\,\left(L(D)\left(t^{l-1}e^{\lambda_q t}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_q t} L(D+\lambda_q I) t^{l-1}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_q t}\left(D^{r_4} + \sum_{j=l-1}^{r_4-1} (p_j + ih_j) D^j\right) t^{l-1}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left((l-1)!(p_{l-1} + ih_{l-1}) e^{\lambda_q t}\right) = (l-1)! e^{\alpha_1 t}\left(p_{l-1}\sin\beta_1 t + h_{l-1}\cos\beta_1 t\right),$$

где $p_{l-1}, \ldots, p_{r_4-1}, h_{l-1}, \ldots, h_{r_4-1} \in \mathbb{R}$. Понятно, что числа p_{l-1}, h_{l-1} одновременно не равны нулю, так как $t^{l-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t$, $t^{l-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t \notin \mathcal{S}_*(d^2)$. Следовательно, из (2.70) следует $\zeta^\varepsilon(y) = \beta_1$ при любом $\varepsilon \in \{\sim, 0, +, *\}$.

Действительно, это так. Заметим, что для каждого решения $y \in \mathcal{S}_*(a, f)$ при любом векторе $m \in \mathbb{R}^k_*$ функция $\langle \psi y, m\rangle$ является также решением некоторого автономного уравнения $\overline{d}$ более высокого порядка, чем n. Поэтому предположение о существовании вектора m_5 при котором функция $\langle \psi y, m_5\rangle$ имеет меньшую чем β_1 характеристическую частоту нулей приводит к противоречию с тем, что наименьшая характристическая частота нулей уравнения $\overline{d} \in \mathcal{C}^k$ совпадает именно с β_1 [165].

Из определений показателей колеблемости следует, что для рассматриваемого решения $y \in \mathcal{S}_*(a, f)$ при любом $\varepsilon \in \{\sim, 0, +, *\}$ соблюдаются неравенства как с одной стороны

$$\hat{\sigma}^\varepsilon(y) \geqslant \check{\sigma}^\varepsilon(y) \geqslant \check{\zeta}^\varepsilon(y) = \beta_1,$$

так и с другой

$$\hat{\sigma}^\varepsilon(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^k} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\varepsilon(y, m, t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\varepsilon(y, m_4, t) = \hat{\zeta}^\varepsilon(y) = \beta_1,$$

дающие равенства $\hat{\sigma}^\varepsilon(y) = \check{\sigma}^\varepsilon(y) = \beta_1$.

7. Пусть теперь $0 \neq \gamma_q \equiv |\operatorname{Im}\lambda_q| < \beta_1$ и $n-q$ четное. Тогда для решения (2.65) и вектора $m_6 = (d^1_{r_3}, \ldots, d^1_2, d^1_1, 1) \in \mathbb{R}^{r_3+1}$ получим

$$\langle \psi y(\tau), m_6\rangle = c_q\langle \psi f_q(\tau), m_6\rangle = Be^{\mu_q\tau}\sin(\gamma_q\tau + \tau_1),$$

где $\lambda_q = \mu_q + i\gamma_q$, τ_1 — вспомогательный угол и $B \neq 0$.

Следовательно, (см. п.6) получим

$$\sigma^\sim(y) = \sigma^0(y) = \sigma^+(y) = \sigma^*(y) = \zeta^\sim(y) = \zeta^0(y) = \zeta^+(y) = \zeta^*(y) = \gamma_q.$$

Если же $n-q$ нечетное, то вместо уравнения $d^1 \in \mathcal{C}^{r_3}$ и вектора m_6 выбираются, соответственно, уравнение $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r_3-1}) \in \mathcal{C}^{r_3-1}$ с фундаментальной системой решений

$$f_{q+2}, \ldots, f_n,\ t^{h_1}e^{\alpha_1 t}P_1(t)\cos\beta_1 t, \quad t^{h_1}e^{\alpha_1 t}Q_1(t)\sin\beta_1 t, \ldots, t^{h_l}e^{\alpha_l t}Q_l(t)\sin\beta_l t$$

и вектор $m_7 = (\rho_{r_3-1}, \ldots, \rho_2, \rho_1, 1) \in \mathbb{R}^{r_3}$. Далее, все рассуждения повторяются.

8. Рассуждения, проводимые в п. 7 настоящего доказательства в случае $0 \neq \beta_1 < |\operatorname{Im}\lambda_q|$, приводят к равенствам

$$\hat{\zeta}^{\varepsilon}(y) = \check{\zeta}^{\varepsilon}(y) = \hat{\sigma}^{\varepsilon}(y) = \check{\sigma}^{\varepsilon}(y) = \beta_1, \quad \varepsilon \in \{\sim, 0, +, *\}.$$

Теоремы 2.10 и 2.11 полностью доказаны.

Глава 3

Спектры показателей колеблемости и ориентированной вращаемости дифференциальных систем

В данной главе на множестве решений линейных однородных автономных дифференциальных систем полностью описаны показатели колеблемости и ориентированной вращаемости, а также найдены спектры этих показателей линейных однородных треугольных дифференциальных систем и установлена взаимосвязь спектров показателей колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных двумерных систем. Кроме того, доказаны утверждения о возможных спектрах показателей колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней линейных однородных дифференциальных систем. Проведено исследование показателей колеблемости по первому приближению.

В разделе 3.2 установлено, что на множестве решений автономных дифференциальных систем показателей колеблемости и ориентированной вращаемости являются точными и абсолютными [256, 259]. Оказалось, что они напрямую зависят от собственных значений матрицы системы. Как следствие, найдены спектры всех показателей колеблемости и вращаемости автономных систем с симметричной матрицей. Доказано, что они состоят из одного нулевого значения. Кроме того, дано полное описание главных значений показателей колеблемости и ориентированной вращаемости таких систем. Эти значения для показателей колеблемости нестрогих знаков, корней и гиперкорней совпали с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, а показатели колеблемости строгих смен знаков могут состоять из нуля и наименьшего по модулю мнимых частей комплексных корней соответствующего характеристического многочлена [296, 316, 319]. Спектры показателей ориентированной вращемости естественным образом определяется теоретико-числовыми свойствами набора мнимых частей собственных значений матрицы системы. Это множество может содержать (в отличие от показателей колеблемости и блуждаемости) значения, отличные от нуля, и от мнимых частей собственных значений матрицы системы, причем мощность этого спектра может быть экспоненциально велика по сравнению с размерностью пространства [302, 322].

В разделе 3.3 установлено, что спектры всех показателей колеблемости и вращаемости линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными коэффициентами состоят из одного нулевого значения [262, 303, 310].

В разделе 3.4 установлено совпадение спектров каждого показателя колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных двумерных систем дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами [262, 318].

В разделе 3.5 доказано существование линейной однородной двумерной дифференциальной системы, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней которых содержат не более чем счетные множества метрически и топологически существенных значений [266, 276, 290, 291, 309]. При этом в случае конечного спектра удается построить систему с периодическими коэффициентами [272], а в случае счетного спектра - систему с непрерывными ограниченными на положительной полуоси коэффициентами [273].

В разделе 3.6 для любого $n \geqslant 2$ установлено существование n-мерной дифференциальной системы с континуальными спектрами показателей колеблемости [265]. При четных n спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с наперед заданными положительными несоизмеримыми концами, а при нечетных n к указанным спектрам еще дополнительно добавляется нуль. Оказалось, что для каждого решения построенной дифференциальной системы все показатели колеблемости совпадают между собой. При доказательстве этих результатов в данном разделе отдельно рассмотрены случаи четности и нечетности n.

В разделе 3.7 установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы ее первого приближения [264, 327]. А именно, методом варьирования системы построена двумерная нелинейная система, все нетривиальные решения которой бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей колеблемости заполняет отрезок $[0,1]$ или совпадает с наперед заданным непустым подмножеством рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а спектры линейной системы ее первого приближения состоят только из одного элемента. Более того, спектры показателей колеблемости сужения построенной нелинейной двумерной системы на прямое произведение любой открытой окрестности нуля фазовой плоскости и временной полуоси могут состоять из заданного количества элементов, или быть счётными, или даже достигать мощности континуума. Кроме того, доказано существование нелинейной системы, спектры всех показателей колеблемости которой совпадают с произвольным заранее заданным интервалом отрезка $[0,1]$, а соответствующие спектры линейной системы её первого приближения также состоят из одного неотрицательного числа.

3.1 Обзор литературы и формулировка основных результатов

Фиксируем произвольную систему $A \in \mathcal{C}^n$ и упорядочим ее собственные значения $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ по неубыванию модулей их мнимых частей. В работе [174] установлено, что для любого решения системы $A \in \mathcal{C}^n$ сильный показатель колеблемости нулей является точным, а его спектр совпадает с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы $A \in \mathcal{C}^n$. Регуляризованные же по Миллионщикову i-ые верхний и нижний сильный показатель колеблемости нулей автономной системы совпадают между собой и равны $|\mathrm{Im}\, \lambda_i(A)|$, $i = \overline{1,n}$. В работе [34] доказано, что сильный показатель колеблемости нулей любого решения автономной системы совпадает со слабым, а значит, все приведенные выше результаты работы [174] справедливы и для слабого показателя колеблемости нулей. Более простое доказательство точности и абсолютности показателя колеблемости нулей на множестве решений автономных систем приводится в [284].

Показатели колеблемости (строгих и нестрогих) знаков и корней эти вопросы были исследованы только для линейных однородных автономных уравнений [251, 277, 293, 311, 313]. Показатели колеблемости нестрогих знаков и корней решений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами обладали всеми выше перечисленными свойствами [277], но эти свойства лишь частично имели место для показателей колеблемости строгих знаков [251]. Показатели колеблемости гиперкорней вовсе не были исследованы на множестве $\mathcal{S}_*(\mathcal{C})$. В связи с этим возникают следующие естественные вопросы. Сохраняются ли все эти свойства, справедливые для показателей колеблемости знаков и корней решений автономных уравнений, и для решений автономных систем? Будут ли отличаться показатели колеблемости гиперкорней на множестве решений всех линейных автономных систем от показателей знаков или корней?

Ответы на эти вопросы содержатся в следующей

Теорема 3.1. *Для любого решения* $x \in \mathcal{S}_*(A)$ *любой системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *каждый показатель колеблемости является точным, абсолютным и удовлетворяет соотношениям*

$$\nu^-(x) \leqslant \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \tag{3.1}$$

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \{|\operatorname{Im}\lambda_1(A)|\} \text{ при } n = 2,$$

$$0 \in \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) \subset \{0, |\operatorname{Im}\lambda_1(A)|\} \text{ при } n > 2,$$

$$\nu^-_{\bar{j}}(A) = \nu^-_{\underline{j}}(A) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2 \quad (n > 2).$$

Из этой теоремы и ее доказательства следует:

- если хотя бы одно собственное значение матрицы системы действительно или все собственные значения комплексны, но некоторому из них соответствует более одной жордановой клетки, то показатели строгих знаков всех ее решений равны нулю;
- если все собственные значения комплексны и каждому из них соответствует ровно одна жорданова клетка, то спектр показателя строгих знаков автономной системы состоит из нуля и наименьшего из модулей мнимых частей собственных значений;

а с учетом результатов работ [34, 174] вытекают свойства:

- для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ при любом $\varkappa = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ$ выполнены равенства

$$\varkappa_{\bar{j}}(A) = \varkappa_{\underline{j}}(A) = |\operatorname{Im}\lambda_j(A)|, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

- спектры показателей колеблемости нулей, нестрогих знаков, корней и гиперкорней автономных систем состоят из множества модулей мнимых частей собственных значений ее матрицы.

Известно [179], что спектры показателей ориентированной вращаемости автономных систем содержат множество модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, но не совпадает с ним в общем случае. В этом же докладе [179] был поставлен вопрос о типичных значениях показателя ориентированной вращаемости и о стурктуре его возможного спектра.

Бурлакову Д.С. удалось показать, что для широкого класса систем с постояными коэффициентами (у которых есть действительные собственные значения или два комплексных с несоизмеримыми мнимыми частями) нуль является типичным значением данного показателя, а в случае систем с простыми чисто мнимыми собственными значениями – определить его спектр [35]. Тем самым задача определения спектров показателей ориентированной вращаемости автономных систем была решена частично. Полное описание показателей вращаемости на множестве автономных систем дается в следующей теореме. Для ее формулировки нам понадобится вспомогательное

Определение 3.1 [35]. Введем наибольший нечетно-общий делитель $\mathrm{gcd}^*(Q)$ множества неотрицательных чисел $Q = \{q_1, \dots, q_r\}$: если существует такое q, что множество $Q/q = \{q_1/q, \dots, q_r/q\}$ состоит из нечетных целых чисел, то в качестве $\mathrm{gcd}^*(Q)$ возьмем наибольшее из таких q, а в противном случае положим $\mathrm{gcd}^*(Q) = 0$.

Теорема 3.2. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ показатель θ является точным, абсолютным, его спектр имеет вид*

$$\theta(\mathcal{S}_*(A)) = \{\mathrm{gcd}^*(S) \mid \varnothing \neq S \subset \{|\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|, \dots |\mathrm{Im}\,\lambda_n(A)|\}\}, \tag{3.2}$$

а главные значения удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}\theta_1(A) = \theta_{\underline{2}}(A) = \theta_{\overline{2}}(A) = \dots = \theta_{\underline{n-1}}(A) = \theta_{\overline{n-1}}(A) \leqslant \\ \leqslant \theta_n(A) = |\mathrm{Im}\,\lambda_n(A)|.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Отсюда вытекают следующие два свойства:

- для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ спектр показателя θ дискретный, причем его мощность не может превышать $2^{\frac{n}{2}} - 1$;
- спектры всех показателей колеблемости и ориентированной вращаемости автономных систем с симметричной матрицей состоят из одного нулевого значения.

В докладах [306, 308] была анонсирована теорема о нулевом спектре показателей колеблемости нулей решений линейных однородных треугольных дифференциальных систем с *непрерывными ограниченными* коэффициентами. Подобный результат для всех слабых и нижних сильных показателей блуждаемости двумерных треугольных систем с ограниченными коэффициентами был установлен в [137]. Там же была анонсирована теорема о существовании решения некоторой двумерной треугольной системы с положительным значением верхнего сильного показателя блуждаемости.

А спектры показателей вращаемости треугольных систем не были исследованы вовсе.

Ниже полностью описаны спектры всех показателей колеблемости и вращаемости треугольных систем с *непрерывными* (необязательно ограниченными) коэффициентами.

Теорема 3.3. *Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой треугольной системы $A \in \mathcal{T}^n$ имеет место следующая цепочка равенств*

$$\theta(x) = \nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x) = 0.$$

Отсюда вытекает следующее свойство:

- *спектры всех показателей ориентированной вращаемости и показателей колеблемости треугольных дифференциальных систем состоят из одного нулевого значения.*

Известно, что спектры показателей Ляпунова взаимно-сопряженных правильных дифференциальных систем симметричны относительно нуля (см., например, [71]). Учитывая неотрицательность показателей колеблемости и вращаемости на множестве всех решений дифференциальных систем, было бы любопытно ответить на следующий естественный вопрос. Можно ли, по спектру какого-либо показателя колеблемости или вращаемости некоторой линейной однородной дифференциальной системы, восстановить спектр этого показателя сопряженной системы?

Для всех показателей колеблемости и вращаемости в двумерной случае ответ оказался положительным, как показывает следующая

Теорема 3.4. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^2$ и любого показателя*

$$\varkappa = \check{\theta}_\bullet, \hat{\theta}_\bullet, \check{\theta}_\circ, \hat{\theta}_\circ, \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\circ^\alpha, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\} \tag{3.4}$$

справедливо равенство $\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \varkappa(\mathcal{S}_*\left(-A^T\right))$.

Известно, что [174] спектры показателей колеблемости двумерной системы, отвечающей линейному однородному уравнению второго порядка, состоит ровно из одного элемента. Для двумерных линейных систем с периодическими коэффициентами спектры показателей колеблемости нулей могут содержать наборы, состоящие из сколь угодно большего количества существенных значений [272]. Если отказаться от периодичности коэффициентов двумерной системы, то спектры могут содержать счетные множества существенных значений [273]. Возможность обобщения этих утверждений и на остальные показатели колеблемости гарантируют следующие две теоремы.

Теорема 3.5. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует система $A \in \mathcal{P}^2$, имеющая такие N решений $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{S}_*(A)$, удовлетворяющие условиям*

$$\nu^\alpha(x_i) = \frac{i}{N}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

причем все эти значения показателей колеблемости являются существенными (и метрически, и топологически).

Теорема 3.6. *Существует система $A \in \mathcal{M}^2$, имеющая такую последовательность решений $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{S}_*(A)$, что выполнено*

$$\nu^\alpha(x_i) = 1 - 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

причем все эти значения являются существенными (и метрически, и топологически).

В работах [253, 315] установлено существование двумерной системы, спектры показателей колеблемости строгих знаков, нулей и корней которой заполняют один и тот же отрезок числовой оси. Оказалось, что эти свойства для всех показателей колеблемости можно перенести на отрезки с произвольными несоизмеримыми концами и обобщить на n-мерные системы.

Теорема 3.7. *Для любого $n \geqslant 2$ и любых несоизмеримых $\omega_2 > \omega_1 > 0$ найдется такая система $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$, что справедливы соотношения*

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = [\omega_1, \omega_2], \quad \text{\textit{если} } n = 2;$$

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) = \begin{cases} [\omega_1, \omega_2], & \text{\textit{если} } n \text{ \textit{четное}}; \\ [\omega_1, \omega_2] \cup \{0\}, & \text{\textit{если} } n \text{ \textit{нечетное}}; \end{cases} \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

В работе [186] для указанных показателей нелинейной системы рассматриваются самые разнообразные (как фиксированные, так и вариативные) их взаимосвязи не только друг с другом, но и с аналогичными показателями соответствующей системы линейного приближения. В частности, имеет место

Утверждение 3.1 (Сергеев И.Н. [186]). При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ для любых $0 \leqslant \beta < +\infty$ и $0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$ существует система (1.9) с системой первого приближения (1.10) при поточечном условии на нелинейную добавку

$$f(t, x) - f_l(t, x) = o(x), \quad x \to 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

удовлетворяющие условиям

$$\nu^*(\mathcal{S}_*(A)) = \{\beta\}, \quad \nu^*(\mathcal{S}_*(f)) = \{\gamma\}.$$

Полученный результат показывает отсутствие связи в общем случае между спектрами показателей колеблемости гиперкорней нелинейной системы и системы ее первого приближения. В связи с этим возникает вопрос о совпадении мощностей спектров какого-либо показателя колеблемости системы и ее первого приближения в случае равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ нелинейной добавки. Отрицательный ответ на этот вопрос содержится в следующей

Теорема 3.8. *Для любого непустого подмножества $X \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ или $X = [0,1]$ существуют две системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t,x) \equiv f(t,x), \quad |B(t,x)| \leqslant |x|^2, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \tag{3.5}$$

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_\prime(t,x), \quad A(t) = f'_x(t,0), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.6}$$

с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, обладающие свойствами

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f)) = \begin{cases} X \cup \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ X \cup \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \tag{3.8}$$

причем для каждого значения $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ при любом $\varepsilon > 0$ множества $\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$ и $\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f))$ равномощны.

Теорема 3.9. *Для любого интервала $X = (a,b) \subset [0,1]$ существуют две системы вида* (3.5) *и* (3.6) *с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, спектры показателей колеблемости которых обладают соответственно свойствами* (3.7) *и* (3.8).

Ниже приводятся доказательства этих утверждений.

3.2 Свойства показателей колеблемости и вращаемости решений линейных однородных автономных систем

В данном разделе проводятся исследования всех показателей колеблемости и вращаемости автономных однородных систем.

Сначала рассмотрим вспомогательное

Определение 3.2 [197]. Под *вещественным аналогом жордановой матрицы* будем понимать клеточно-диагональную матрицу с клетками вида

$$J_{\lambda,s}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\in\mathcal{C}^s,$$

$$J_{\alpha,\beta,p}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}\in\mathcal{C}^p,$$

где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $s,j\in\mathbb{N}$, $p=2j$; при этом клетки первого вида будем называть *одиночными*, а второго — *парными*.

Доказательство теоремы 3.1 разобьем на пункты.

1. Как известно [197], матрица $A\in\mathcal{C}^n$ подобна некоторому вещественному аналогу жордановой матрицы, при переходе к которому каждое решение системы A заменяется подобной вектор-функцией, отчего значения рассматриваемых показателей колеблемости не изменится (лемма 1.2). Поэтому матрицу A изначально будем считать вещественным аналогом жордановой матрицы.

2. При $n=1$ сформулированные теоремы, очевидно, верны, поскольку любое решение $x\in\mathcal{S}_*(A)$ любого одномерного уравнения $A\in\mathcal{C}^1$ в нуль не обращается на $\mathbb{R}_+$.

3. Пусть теперь $n\geqslant 2$. Упорядочим собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ матрицы A по нестрогому убыванию модулей их мнимых частей (заметим, что в формулировке теоремы 3.1 собственные значения упорядочены в обратном порядке) и построим действительную фундаментальную систему решений

$$x^1=\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix},\quad x^2=\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix},\quad \dots,\quad x^n=\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

системы $A \in \mathcal{C}^n$ по нескольким подсистемам, каждая из которых соответствует своей клетке матрицы A:

а) каждой одиночной клетке $J_{\lambda_k,s}$ порядка s, отвечающей собственному значению $\lambda_k \in \mathbb{R}$, поставим в соответствие подсистему из s решений

$$x^k(t) = e^{\lambda_k t} h_k, \quad \ldots,$$

$$x^{k+s-1}(t) = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\lambda_k t} h_k + \cdots + t e^{\lambda_k t} h_{k+s-2} + e^{\lambda_k t} h_{k+s-1},$$

где j-ая компонента каждого вектора h_j из этой подсистемы равна единице, а все остальные равны нулю;

б) каждой парной клетке $J_{\alpha,\beta,p}$ порядка $p = 2s$, отвечающей собственному значению $\lambda_k = \alpha + i\beta$, соответствует подсистема решений $x^k, x^{k+1}, \ldots, x^{k+2s-1}$

$$\begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{k-1k} \\ x_{kk} \\ x_{k+1k} \\ x_{k+2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{1k+1} \\ \vdots \\ x_{k-1k+1} \\ x_{kk+1} \\ x_{k+1k+1} \\ x_{k+2k+1} \\ \vdots \\ x_{nk+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1k+2} \\ \vdots \\ x_{kk+2} \\ x_{k+1k+2} \\ x_{k+2k+2} \\ x_{k+3k+2} \\ \vdots \\ x_{nk+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ -te^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{1k+3} \\ \vdots \\ x_{kk+3} \\ x_{k+1k+3} \\ x_{k+2k+3} \\ x_{k+3k+3} \\ \vdots \\ x_{nk+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\sin\beta t \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\ldots,$$

$$\begin{pmatrix} x_{1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{kk+2s-2} \\ x_{k+1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{k+2s-4k+2s-2} \\ x_{k+2s-3k+2s-2} \\ x_{k+2s-2k+2s-2} \\ x_{k+2s-1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{nk+2s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ -te^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{kk+2s-1} \\ x_{k+1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{k+2s-4k+2s-1} \\ x_{k+2s-3k+2s-1} \\ x_{k+2s-2k+2s-1} \\ x_{k+2s-1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{nk+2s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\sin\beta t \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

в) собрав решения всех таких подсистем, получим общую упорядоченную фундаментальную систему решений A.

Следовательно, общее решение системы A принимает вид

$$x = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \cdots + c_nx^n(t), \tag{3.10}$$

где c_1, $c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

4. При $n = 2$ в зависимости от собственных значений матрицы A для вида фундаментальной системы решений могут представиться четыре случая:

г)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

д)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2;$$

е)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2;$$

ж)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

В первых трех случаях для решения вида $x = c_1x^1(t) + c_2x^2(t)$ выбираем вектор $m_1 = (0,1)$, если $c_2 \neq 0$, и вектор $m_2 = (1,0)$, если $c_2 = 0$. Каждый из этих случаев при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ приводит к равенству

$$\nu^{\alpha}_{\bullet}(x) = \nu^{\alpha}_{\circ}(x) = 0,$$

из которого получим $\nu^-_1(A) = \nu^-_2(A) = 0$.

В случае ж) для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и вектора $m \in \mathbb{R}^2_*$ имеет место представление

$$\langle x(\tau), m\rangle = ae^{\alpha t}\sin(\beta\tau + \tau_0), \quad a \neq 0,$$

где τ_0 — вспомогательный угол. Следовательно, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеет место

$$\nu^{\alpha}_{\bullet}(x) = \nu^{\alpha}_{\circ}(x) = \beta,$$

откуда находим $\nu^-_1(A) = \nu^-_2(A) = \beta$.

В случае $n = 2$ справедливость теоремы 3.1 установлена.

5. Далее, рассмотрим случай $n > 2$. Возьмем произвольное решение

$$x = c_qx^q(t) + c_{q+1}x^{q+1}(t) + \ldots + c_rx^r(t), \quad c_r \neq 0, \quad 1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n, \tag{3.11}$$

системы $A \in \mathcal{C}^n$.

з) Пусть $\lambda_r \in \mathbb{R}$. Тогда для вектора $m_3 = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ с нулевыми компонентами кроме r-го и выбранного решения x имеем $\langle x(\tau), m_3\rangle = c_re^{\lambda_r\tau}$, откуда получим цепочку равенств

$$\nu^{\sim}_{\bullet}(x) = \nu^{\sim}_{\circ}(x) = \nu^{0}_{\bullet}(x) = \nu^{0}_{\circ}(x) = \nu^{+}_{\bullet}(x) = \nu^{+}_{\circ}(x) = \nu^{*}_{\bullet}(x) = \nu^{*}_{\circ}(x) = 0.$$

и) Пусть $\lambda_r \notin \mathbb{R}$. Тогда для вектора m_3 и решения (3.11) будем иметь

$$\langle x(\tau), m_3\rangle = be^{\alpha_r\tau}\sin(\beta_r\tau + \tau_1), \quad b \neq 0, \tag{3.12}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_r = \alpha_r$, $|\operatorname{Im}\lambda_r| = \beta_r$, τ_1 — вспомогательный угол.

Из равенства (3.12) следует, что

$$\nu_\circ^\sim(y) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\circ^+(x) = \nu_\circ^*(x) = \beta_r.$$

Справедливость последней цепочки следует из того, что наименьшая характеристическая частота нулей функций вида $\langle x, m\rangle$ при любом ненулевом $m \in \mathbb{R}^n_*$ совпадает с β_r (см. доказательство теоремы IV в работе [165]).

Из определений показателей колеблемости следует, что для рассматриваемого решения (3.11) при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ выполняются неравенства как с одной стороны

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) \geqslant \check{\nu}_\bullet^\alpha(x) \geqslant \check{\nu}_\circ^\alpha(x) = \beta_r,$$

так и с другой

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m, t) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m_3, t) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \beta_r,$$

которые приводят к равенствам

$$\nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\bullet^+(x) = \nu_\bullet^*(x) = \beta_r.$$

6. к) Если матрица A имеет хотя бы одно действительное собственное значение, то для вектора $m_4 = (0, \ldots, 0, 1)$ и решения (3.11) будем иметь представление $\langle x(\tau), m_4\rangle = c_n e^{\lambda_n t}$. Откуда при любом c_n следует справедливость равенств $\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = 0$, влекущие за собой равенства

$$\nu_{\bar{j}}^-(A) = \nu_{\underline{j}}^-(A) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

л) Если все собственные значения комплексны и некоторому $\alpha + \beta i$ из них соответствует $s > 1$ жордановых клеток, то клеточно-диагональная матрица A содержит s парных клеток $J_{\alpha,\beta,p_1}, \ldots, J_{\alpha,\beta,p_s}$. Тогда для каждого решения $x_c \in \mathcal{S}_*(A)$ найдется такой вектор $m_c \in \mathbb{R}^n_*$, что $\langle x_c(\tau), m_c\rangle \equiv 0$. Следовательно, и в этом случае все показатели колеблемости строгих знаков, как и их главные значения, равны нулю.

7. Пусть теперь матрица A не имеет действительных собственных значений и каждой паре $\alpha \pm \beta i$ соответсвует ровна одна парная клетка $J_{\alpha,\beta,p}$. Представим множество всех решений системы $A \in \mathcal{C}^n$ в виде

$$\mathcal{S}(A) = L^{n-2}(A) \oplus L^2(A),$$

где $L^{n-2}(A) \equiv \operatorname{span}\{x^1, x^2, \ldots, x^{n-2}\}, \quad L^2(A) \equiv \operatorname{span}\{x^{n-1}, x^n\}$.

Для каждого решения $x \in L^{n-2}(A)$ скалярное произведение $\langle x(\tau), m_4\rangle$ тождественно равно нулю. Следовательно, выполнены равенства

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = 0, \tag{3.13}$$

из которых, так как $\dim L^{n-2}(A) = n-2$, вытекает

$$\nu_1^-(A) = \nu_{\overline{2}}^-(A) = \nu_{\underline{2}}^-(A) = \ldots = \nu_{\overline{n-2}}^-(A) = \nu_{\underline{n-2}}^-(A) = 0.$$

м) Если в решении (3.10) все коэффициенты отличны от нуля или ровно один из коэффициентов равен нулю, то тождество $\langle x(\tau), m\rangle \equiv 0$ возможно лишь при нулевом векторе $m = 0$. Поэтому для указанных решений $x \in \mathcal{S}_*(A)$ соблюдаются равенства (см. пункт 5. и) настоящего доказательства)

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = \beta_n, \tag{3.14}$$

поскольку для них справедливо представление

$$\langle x(\tau), m_4\rangle = ce^{\alpha_n\tau}\sin(\beta_n\tau + \tau_2), \quad c \neq 0 \tag{3.15}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_n = \operatorname{Re}\lambda_{n-1} = \alpha_n$, $|\operatorname{Im}\lambda_n| = |\operatorname{Im}\lambda_{n-1}| = \beta_n$, τ_2 — вспомогательный угол. Следовательно, согласно определению главных значений показателей колеблемости строгих знаков, имеем

$$\nu_{\overline{n-1}}^-(A) = \nu_n^-(A) = \beta_n.$$

н) Введем следующие обозначения

$$y^1 = x^1 + x^3 + \cdots + x^{n-1}, \quad y^2 = x^2 + x^4 + \cdots + x^n.$$

Очевидно, что решения $y^1, y^2 \in \mathcal{S}_*(A)$ линейно независимы. Через V обозначим элемент $\operatorname{span}\{y^1, y^2\}$ множества $G^2(A)$. Для вектора m_4 и любого решения $x \in V_*$ выполняется равенство (3.15). Далее, повторяя рассуждения, проведенные в пункте 7. м) настоящего доказательства, будем иметь равенство (3.14) для любого $x \in V_*$, откуда получим

$$\nu_{\underline{n-1}}^-(A) = \sup_{L\in G_*^2(A)} \inf_{x\in L_*} \nu^-(x) = \beta_n.$$

8. В пунктах 6 и 7 найдены два возможных значения показателей колеблемости строгих знаков. Поэтому для завершения доказательства теоремы 3.1 остается убедиться, что для любого $x \in \mathcal{S}_*(A)$ значения $\nu_\bullet^-(x)$, $\nu_\circ^-(x)$ равны между собой и, в зависимости от решения, равны либо 0, либо β_n.

В самом деле, если у решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ все компоненты отличны от нуля, то повторяются рассуждения проведенные в пункте 7. м) настоящего доказательства, а значит, выполняются равенства (3.14)

Если же у решения x имеется нулевая компонента на r-ом месте, то скалярное произведение $\langle x(\tau), m_3\rangle$ тождественно равно нулю и, следовательно, имеет место равенства (3.13).

Теорема 3.1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3.2.

1. Как известно [197], матрица $A \in \mathcal{C}^n$ подобна некоторому вещественному аналогу жордановой матрицы, при переходе к которому каждое решение системы A заменяется подобной вектор-функцией, отчего значения рассматриваемых показателей вращаемости не изменится (лемма 1.3). Поэтому матрицу A изначально будем считать вещественным аналогом жордановой матрицы.

2. Упорядочим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей и построим упорядоченную действительную фундаментальную систему решений $x^1, \ldots, x^n \in \mathcal{S}_*(A)$ (см. п.3 доказательство теоремы 3.1) и запишем общее решение

$$x = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \cdots + c_n x^n(t), \tag{3.16}$$

где c_1, $c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

В работе [182] доказано, что

$$\check{\theta}_\circ(x^j) = \hat{\theta}_\circ(x^j) = \check{\theta}_\bullet(x^j) = \hat{\theta}_\bullet(x^j) = |\mathrm{Im}\lambda_j(A)|, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Возьмем произвольное решение

$$x = c_q x^q(t) + c_{q+1} x^{q+1}(t) + \ldots + c_r x^r(t), \quad c_q \neq 0, \quad 1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n \tag{3.18}$$

системы $A \in \mathcal{C}^n$.

3. Пусть $\lambda_q \in \mathbb{R}$. Тогда из работы [256] следует цепочка равенств

$$\hat{\nu}^*_\bullet(x) = \check{\nu}^*_\bullet(x) = \hat{\nu}^*_\circ(x) = \check{\nu}^*_\circ(x) = 0,$$

откуда на основании утверждения 1.3 вытекает

$$\check{\theta}_\circ(x) = \hat{\theta}_\circ(x) = \check{\theta}_\bullet(x) = \hat{\theta}_\bullet(x) = 0. \tag{3.19}$$

4. Пусть $\beta \equiv |\mathrm{Im}\lambda_q(A)| = \cdots = |\mathrm{Im}\lambda_r(A)| \neq 0$. Тогда при любых допустимых значениях L вектор-функция Lx имеет вид:

$$Lx = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 t}\sqrt{P_1^2(t) + P_2^2(t)}\,\sin(\beta t + \varphi(t)) \\ e^{\gamma_2 t}\sqrt{P_3^2(t) + P_4^2(t)}\,\cos(\beta t + \phi(t)) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(t), \phi(t)$ – вспомогательные аргументы при каждом $t \geqslant 0$, а $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_4(t)$ – многочлены степени не выше $n/2$. Откуда вытекает оценка

$$|\Theta(Lx, t) - \Theta(z, t)| \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где
$$z = \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$
Поэтому справедливы равенства
$$\check{\theta}_\circ(x) = \hat{\theta}_\circ(x) = \check{\theta}_\bullet(x) = \hat{\theta}_\bullet(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}|\Theta(z,t)| = \beta.$$

5. Пусть $\lambda_q \notin \mathbb{R}$ и среди модулей мнимых частей $|\mathrm{Im}\lambda_q(A)|, \ldots, |\mathrm{Im}\lambda_r(A)|$ собственных значений матрицы A, фигурирующих в решении (3.18), есть рационально несоизмеримая пара. Обозначим их β_1, β_2. Тогда найдется такое преобразование L_1, что вектор-функция L_1x будет иметь вид
$$L_1x = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t \\ e^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t \end{pmatrix}.$$
Для последовательности моментов $t_k = \pi k/\beta_1$ выполнено неравенство
$$|\Theta(L_1x,t) - \Theta(L_1x,t_k)| \leqslant \pi.$$

На основании утверждения 1.5 будем иметь
$$\left| |\Theta(L_1x,t)| - \left|\pi\sum_{i=1}^{k}(-1)^i \mathrm{sgn} e^{\alpha_2 t_i}\cos\beta_2 t_i\right|\right| =$$
$$= \left| |\Theta(L_1x,t)| - \left|\pi\sum_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}\cos\left(\frac{\beta_2\pi i}{\beta_1} + \pi i\right)\right|\right| \leqslant 2\pi,$$
где k – максимальный индекс такой, что $t_k \leqslant t$. Из последних двух неравенств переходя к пределу по t, получим цепочку равенств
$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}|\Theta(L_1x,t)| = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{t_k}|\Theta(L_1x,t_k)| = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_k}\left|\sum_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}\cos\omega i\right|, \quad (3.20)$$
где $\omega = \pi(1+\beta_2/\beta_1)$.

Из того, что β_1 и β_2 рационально несоизмеримы, следует, что ω рационально несоизмеримо с π. Возьмем интегрируемую по Риману функцию $f(s) = \beta_1\,\mathrm{sgn}\cos s$ и отображение $T(\tau) = \tau + \omega \mod 2\pi$, являющееся поворотом окружности на иррациональный угол. Из равенства
$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(T^i 0) = \frac{\beta_1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}\cos\omega i = \frac{\pi}{t_k}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}\cos\omega i, \quad k \geqslant 0,$$

на основании теоремы Вейля [103] к последовательности $f(T^k 0)$, получим

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(T^i 0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)ds=\frac{\beta_1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos s ds=0,$$

откуда вытекает требуемые соотношения

$$0\leqslant\hat\theta_\bullet(x)\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}|\Theta(L_1x,t)|=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\pi}{t_k}\left|\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\cos\omega i\right|=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k} f(T^i 0)\right|=0.$$

И в этом случае для рассматриваемого решения x имеем равенство (3.19).

6. Пусть $\lambda_q\notin\mathbb{R}$ и среди модулей мнимых частей $|\mathrm{Im}\lambda_q(A)|,\ldots,|\mathrm{Im}\lambda_r(A)|$ собственных значений матрицы A, фигурирующих в решении (3.18), есть пара β_3,β_4 такая, что $\beta_4/\beta_3=2p/l$, где p/l – несократимая дробь, причем q – нечетное. Тогда найдется такой гомоморфизм L_2, что вектор-функция L_2x будет иметь вид

$$L_2x=\begin{pmatrix} e^{\alpha_3 t}\sin\beta_3 t\\ e^{\alpha_4 t}\cos\beta_4 t\end{pmatrix}.$$

Покажем, что и этот случай приводит к цепочке равенств (3.19).

Заметим, что функции $\sin\beta_3 t,\cos\beta_4 t$ являются периодическими с периодом $T=\frac{2\pi l}{\beta_3}=\frac{4\pi p}{\beta_4}$. Возьмем последовательность моментов времени $t_k=\pi k/\beta_3$. Из утверждения 1.4 вытекает равенство

$$|\Theta(L_2x,kT)|=\left|\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\frac{\beta_3Tk}{\pi}}(-1)^i\left(\operatorname{sgn}\left(e^{\alpha_4t_i}\cos\beta_4t_i\right)-\operatorname{sgn}\left(e^{\alpha_4t_{i-1}}\cos\beta_4t_{i-1}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\frac{\beta_3Tk}{\pi}}(-1)^i\left(\operatorname{sgn}\cos\beta_4t_i-\operatorname{sgn}\cos\beta_4t_{i-1}\right)\right|=\left|\pi\sum_{i=1}^{2lk}(-1)^i\operatorname{sgn}\cos\beta_4t_i\right|=$$

$$=\left|\pi\sum_{i=1}^{2lk}\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{2p\pi i}{l}+\pi i\right)\right|=\left|\pi\sum_{i=1}^{2lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\pi i\right|=$$

$$=\left|\pi\sum_{i=1}^{lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\pi i+\pi\sum_{i=lk+1}^{2lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\pi i\right|=$$

$$= \left| \pi \sum_{i=1}^{lk} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+l}{l} \pi i + \pi \sum_{i=1}^{lk} \operatorname{sgn} \cos \left(\frac{2p+l}{l} \pi i + (2p+l)\pi \right) \right| =$$

$$= \left| \pi \sum_{i=1}^{lk} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+l}{l} \pi i - \pi \sum_{i=1}^{lk} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+l}{l} \pi i \right| = 0.$$

Откуда получаем требуемое неравенство

$$0 \leqslant \hat{\theta}_{\bullet}(x) \leqslant \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{1}{kT} |\Theta(L_2 x, kT)| = 0.$$

7. Пусть $\lambda_r \notin \mathbb{R}$ и среди модулей мнимых частей $\beta_q, \ldots, \beta_r$ собственных значений матрицы A, фигурирующих в решении (3.18), любая пара является рационально соизмеримой. Далее, выбираем наибольшее число b, что множество $\left\{ \frac{\beta_q}{b}, \ldots, \frac{\beta_r}{b} \right\}$ состоит из нечетных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен единице. Обозначим произвольные два числа из этого множества через ω_1 и ω_2. Из утверждения 1.6 вытекает, что функция

$$y(t) = x\left(\frac{t}{b}\right) = c_q x^q \left(\frac{t}{b}\right) + c_{q+1} x^{q+1} \left(\frac{t}{b}\right) + \ldots + c_r x^r \left(\frac{t}{b}\right), \qquad (3.21)$$

где $c_q \cdot c_r \neq 0$, $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n$, удовлетворяет равенствам

$$\varkappa(x) = b\varkappa(y), \quad \varkappa \in \left\{ \check{\theta}_{\circ}, \hat{\theta}_{\circ}, \check{\theta}_{\bullet}, \hat{\theta}_{\bullet} \right\}.$$

г) Выбираем такое линейное преобразование L_3, чтобы вектор-функция $L_3 y$ имела вид

$$L_3 y = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 t} \sin \omega_1 t \\ e^{\gamma_2 t} \cos \omega_2 t \end{pmatrix}, \quad \omega_1 < \omega_2$$

и докажем для последовательности $t_k = \frac{\pi k}{\omega_1}$ равенство $\Theta(L_3 y, t_{\omega_1 k}) = \pi k$.

В самом деле, воспользовавшись утверждением 1.4 и учитывая периодичность тригонометрических функций $\sin \omega_1 t, \cos \omega_2 t$, при любом натуральном k будем иметь

$$|\Theta(L_3 y, t_{\omega_1 k})| = \left| \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\omega_1 k} (-1)^i \left(\operatorname{sgn}\left(e^{\gamma_2 t_i} \cos \omega_2 t_i\right) - \operatorname{sgn}\left(e^{\gamma_2 t_{i-1}} \cos \omega_2 t_{i-1}\right) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\omega_1 k} (-1)^i \left(\operatorname{sgn} \cos\left(\frac{\omega_2 \pi i}{\omega_1}\right) - \operatorname{sgn} \cos\left(\frac{\omega_2 \pi (i-1)}{\omega_1}\right) \right) \right| =$$

$$= \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i \mathrm{sgn}\cos\left(\frac{\omega_2\pi i}{\omega_1}\right)\right| = \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i \mathrm{sgn}\cos\left(\frac{(\omega_1+2q)\pi i}{\omega_1}\right)\right| =$$

$$= \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i \mathrm{sgn}\cos\left(\pi i+\frac{2q\pi i}{\omega_1}\right)\right| = \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k} \mathrm{sgn}\cos\left(\frac{2q\pi i}{\omega_1}\right)\right| = \pi k.$$

Справедливость последнего равенства следует из того, что значения $\frac{2q\pi i}{\omega_1}$ на единичной окружности с центром в начале координат при $i = 1, 2, \ldots, \omega_1$ лежат на вершинах правильного ω_1-угольника с фиксированной вершиной $(1, 0)$, а при $i = \omega_1 + 1, \ldots, 2\omega_1$ предыдущие значения $\frac{2q\pi i}{\omega_1}$ последовательно повторяюся. Аналогично и с оставшимися значениями i. В результате количества вершин многоугольника, распределенных по разные стороны от оси oy, будут отличаться ровно на единицу.

д) При любых допустимых значениях L на основании утверждения 1.2 вектор-функция Ly имеет вид:

$$Ly = \begin{pmatrix} e^{\gamma_3 t}\sqrt{P_5^2(t)+P_6^2(t)}\,\sin(\omega_3 t+\psi_1(t)) \\ e^{\gamma_4 t}\sqrt{P_7^2(t)+P_8^2(t)}\,\cos(\omega_4 t+\psi_2(t)) \end{pmatrix},$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – вспомогательные углы при каждом $t \geqslant 0$, а $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $P_8(t)$ – многочлены степени не выше $n/2$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\Theta(Ly, t) - \Theta(u, t)| \leqslant 2\pi \quad t \geqslant 0,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \sin\omega_3 t \\ \cos\omega_4 t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при некоторых L значения ω_3 и ω_4 могут совпадать. Тогда инфимум в определении слабых показателелй ориентированной вращаемости не будет реализован.

е) Из последних двух подпунктов следует, что

$$\theta_\circ(y) = \lim_{t\to+\infty}\inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}|\Theta(Ly,t)| = \lim_{k\to+\infty}\inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n}\frac{1}{t_{\omega_1 k}}|\Theta(Ly,t_{\omega_1 k})| =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{\omega_1 k}}|\Theta(L_3 y,t_{\omega_1 k})| = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi k}|\Theta(L_3 y,\pi k)| = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi k}\cdot\pi k = 1.$$

Откуда, с учетом определений сильных показателей ориентированной вращаемости, получим

$$1 = \theta_\circ(y) \leqslant \theta_\bullet(y) \leqslant \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{\omega_1 k}}|\Theta(L_3 y,t_{\omega_1 k})| = 1.$$

Следовательно, для выбранного решения (3.18) установили справедливость равенств

$$\check{\theta}_\circ(x) = \hat{\theta}_\circ(x) = \check{\theta}_\bullet(x) = \hat{\theta}_\bullet(x) = b.$$

8. Теперь установим справедливость соотношений (3.3).

а) Последнее равенство в цепочке (3.3) автоматически следует из (3.2).

б) Пусть равны модули всех собственных значений матрицы A. Тогда из пунктов 3 и 4 настоящего доказательства следует равенство всех главных значений показателей ориентированной вращаемости.

в) Если хотя бы одно из собственных значений матрицы A является действительным, то для любого $x \in \operatorname{span}\{x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ выполнены равенства (3.19), а с ними и $\theta_{\overline{n-1}}(A) = 0$. Откуда на основании соотношений (1.13) и (1.14) следует

$$\theta_1(A) = \theta_{\underline{2}}(A) = \theta_{\overline{2}}(A) = \cdots = \theta_{\underline{n-1}}(A) = \theta_{\overline{n-1}}(A) = 0. \tag{3.22}$$

г) Условия пунктов 5 и 6 настоящего доказательства для всех собственных значений матрицы A так же приводят к равенству (3.22). Поскольку в каждом из этих случаев найдется $n-1$ -мерное подпространство пространтсва $\mathcal{S}(A)$, все решения которого обладают свойством (3.19).

д) Пусть среди модулей всех мнимых частей $\beta_1, \ldots, \beta_r$ (расположенных в порядке возрастания) собственных значений матрицы A любая пара является рационально соизмеримой и множество $\left\{\frac{\beta_1}{b}, \ldots, \frac{\beta_r}{b}\right\}$ состоит из нечетных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен единице. При этом значение b – наибольшее. Тогда из определения функции $\gcd^*$ следуют соотношения

$$\gcd^*\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_r\} = b,$$

$$\beta_1 \geqslant b \leqslant \gcd^*\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_r\}.$$

Откуда, с одной стороны, вытекает $\theta_1(A) = b$, а с другой стороны –

$$\theta_{\overline{n-1}}(A) = b.$$

Действительно, последнее равенство реализуется на подпространстве

$$V = \operatorname{span}\{x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\},$$

так как для любого решения $x = c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$ с ненулевыми коэффициентами $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{n-1} \neq 0$ выполнено

$$\check{\theta}_\circ(x) = \hat{\theta}_\circ(x) = \check{\theta}_\bullet(x) = \hat{\theta}_\bullet(x) = b.$$

Таким образом, на основании соотношений (1.13) и (1.14) будем иметь

$$b = \theta_1(A) = \theta_{\underline{2}}(A) = \theta_{\overline{2}}(A) = \dots = \theta_{\underline{n-1}}(A) = \theta_{\overline{n-1}}(A) < \theta_n(A) = \beta_r.$$

Теорема 3.2 доказана.

3.3 Спектры показателей колеблемости и вращаемости линейных однородных треугольных систем

В этом разделе полностью изучены спектры показателей колеблемости и ориентированной вращаемости линейных однородных треугольных нестационарных дифференциальных систем.

Доказательство теоремы 3.3.

Не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением системы вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn-1}(t) & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Последовательно интегрируя уравнения этой системы, получим фундаментальную систему

$$X(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) = [x_{jk}(t)]$$

вида

$$x_{jk}(t) = 0, \quad j < k;$$
$$x_{kk}(t) = A_k(t);$$
$$x_{jk}(t) = A_j(t) \int\limits_0^t A_j^{-1}(\tau) \sum_{s=k}^{j-1} a_{js}(\tau) x_{sk}(\tau) d\tau, \quad j > k;$$

где

$$A_k(t) \equiv \exp \int\limits_0^t a_{kk}(\tau) d\tau;$$
$$j, k = 1, \dots, n.$$

Скалярное произведение ненулевого вектора $m \equiv (m_1, \dots, m_n)$ и решения

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \dots + c_n x^n(t) \in \mathcal{S}_*(A),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные, имеет вид:

$$\langle x, m\rangle = m_1 c_1 A_1(t) + m_2(c_1 x_{21}(t) + c_2 A_2(t)) + \cdots +$$

$$+ m_n(c_1 x_{n1}(t) + \cdots + c_{n-1} x_{nn-1}(t) + c_n A_n(t)).$$

Теперь в зависимости от значений $c_i, \quad i = 1, \ldots, n$ выбираем вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$, для которого функция $\langle x, m\rangle$ не обращается в нуль при любом $t > 0$. Если $c_1 \neq 0$, то берем вектор $m = (1, 0, \ldots, 0)$. Если же $c_1 = 0$, то ищем первый ближайший к единице номер r коэффициента $c_i, \quad i = 2, \ldots, n$ отличного от нуля. При этом выбираем вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ с нулевыми компонентами за исключением r-го. Таким образом, перебирая все значения c_i, получим, что для любого ненулевого решения x_c найдется такой вектор m_c, что выполнено

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(m, x_c, t) = \nu^\alpha(m_c, x_c, t) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}, \tag{3.23}$$

а с ним и цепочка равенств

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x) = 0, \quad x \in \mathcal{S}_*(A).$$

На основании (3.23), с учетом $\nu^\alpha(x_c, m, t) \geqslant 0$ при любых $m \in \mathbb{R}^n_*$ и $t > 0$, имеем

$$0 \leqslant \check{\nu}^\alpha_\bullet(x_c) \leqslant \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_c) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_c, m, t) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_c, m_c, t) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_c) = 0.$$

Откуда, на основании утверждения 1.3, имеем

$$\check{\theta}_\bullet(x) = \hat{\theta}_\bullet(x) = \check{\theta}_\circ(x) = \hat{\theta}_\circ(x) = 0.$$

Теорема 3.3 доказана.

3.4 Спектры показателей колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных линейных однородных двумерных систем

В этом разделе установлено совпадение спектров каждого из показателей колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных двумерных дифференциальных систем.

Сначала дадим необходимые определение и факты.

Определение 3.3 [71]. Система $-A^T \in \mathcal{M}^n$ называется сопряженной для системы $A \in \mathcal{M}^n$.

Замечание 3.1. Очевидно, систему $A \in \mathcal{M}^n$ можно рассматривать как сопряженную для системы $-A^T \in \mathcal{M}^n$, т.е. системы A, $-A^T \in \mathcal{M}^n$ взаимно-сопряженные.

Лемма 3.1 [71]. Пусть задана система $A \in \mathcal{M}^n$ с непрерывными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Тогда для любых решений $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и $y \in \mathcal{S}_*(-A^T)$ взаимно–сопряженных систем скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ постоянно.

Лемма 3.2 [215]. Для произвольной вектор-функции $y \in \mathcal{S}_*^2$ и невырожденной матрицы второго порядка L положим $z(t) = Ly(t)$.

а) Пусть $\det L > 0$. Если при некоторых $k \in \mathbb{Z}$ и $T > 0$ выполнено равенство $\Theta(y,T) = \pi k$, то $\Theta(z,T) = \pi k$; если же $\pi k \leqslant \Theta(y,T) \leqslant \pi(k+1)$, то и $\pi k \leqslant \Theta(z,T) \leqslant \pi(k+1)$.

б) Пусть $\det L < 0$. Если при некоторых $k \in \mathbb{Z}$ и $T > 0$ выполнено $\Theta(y,T) = \pi k$, то $\Theta(z,T) = -\pi k$; если же $\pi k \leqslant \Theta(y,T) \leqslant \pi(k+1)$, то и $\pi k \leqslant -\Theta(z,T) \leqslant \pi(k+1)$.

Доказательство теоремы 3.4.

1. Сначала установим биекцию пространства $\mathbb{R}^2$ в себя. Для этого каждому вектору $c \equiv (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ поставим в соответствие вектор $c^* \equiv (-c_2, c_1) \in \mathbb{R}^2$. Установленный изоморфизм порождает и изоморфизм пространств $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}(-A^T)$. В самом деле, каждому решению $x \in \mathcal{S}(A)$ системы A с начальным условием $x(0) = c$ поставим в соответствие решение $y \in \mathcal{S}\left(-A^T\right)$ системы $-A^T$ с начальным условием $y(0) = c^*$. Заметим, что векторы c, c^* ортогональны, поэтому ортогональными будут не только векторы $x(0), y(0)$, но, в силу леммы 3.1, и вектор функции $x(t), y(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

2. Отсюда, с одной стороны, при любых $t > 0$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t).$$

Беря последовательно верхние и нижние пределы от обеих частей, соответственно получим

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(y), \quad \check{\nu}^\alpha_\circ(x) = \check{\nu}^\alpha_\circ(y).$$

С другой стороны, при любых фиксированных $t > 0$, $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ и перпендикулярных векторов $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^2$ справедливо

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m_1,t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m_2,t).$$

Следовательно, если инфимум в $\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x)$ реализуется на некотором векторе $m^1 \in \mathbb{R}^2_*$, то инфимум в $\hat{\nu}^\alpha_\bullet(y)$ будет реализован на векторе $m^2 \perp m^1$

и $\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) = \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y)$. Аналогичные рассуждения приводят к равенствам $\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x) = \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(y)$.

3. Из леммы 3.2 следует, что для любых $L \in \mathrm{End}_2\mathbb{R}^2$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] = \left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right],$$

где $[q]$ – целая часть числа q.

Следовательно, выполняются две цепочки равенств

$$\inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right],$$

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi} = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] =$$

$$= \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right] = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi},$$

из которых следуют совпадение соответствующих нижних показателей ориентированной вращаемости решений $x \in \mathcal{S}(A)$ и $y \in \mathcal{S}\left(-A^T\right)$:

$$\frac{\check{\theta}_{\circ}(x)}{\pi} = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi t}|\Theta(Lx,t)| = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] =$$

$$= \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right] = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi} = \frac{\check{\theta}_{\circ}(x)}{\pi},$$

$$\check{\theta}_{\bullet}(x) = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{|\Theta(Lx,t)|}{t} = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{|\Theta(Ly,t)|}{t} = \check{\theta}_{\bullet}(y).$$

Аналогично доказываются совпадения и верхних показателей ориентированной вращаемости.

Таким образом, для любого показателя $\varkappa$ из списка (3.4) справедливо равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

Теорема 3.4 доказана.

3.5 Линейные двумерные системы с не более чем счетными существенными спектрами показателей колеблемости

Сначала докажем утверждение о существовании двумерной системы с существенными спектрами показателей колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней, содержащими конечные множества произвольной мощности.

Доказательство теоремы 3.5.

1. По заданному $N \in \mathbb{N}$ выберем ε и последовательности $\{r_i\}_{i=1}^N$, $\{s_{i-1}\}_{i=1}^N$, $\{\delta_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{6} > \varepsilon > \delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_N > 0,$$

$$\frac{1}{4} < \varepsilon + \delta_i < \frac{1}{3}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.24}$$

$$r_0 = 0, \quad r_i = 2\pi i, \quad s_{i-1} = 2\pi i - \pi, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3.25}$$

Зададим 2π периодическую непрерывно-дифференцируемую функцию $\psi(\cdot)$, возрастающую на отрезке $[0,\, \pi]$, убывающую на участке $[\pi,\, 2\pi]$ и принимающую на концах отрезков значения

$$\psi(0) = \psi(2\pi) = 0, \quad \psi(\pi) = \pi, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(\pi) = \dot{\psi}(2\pi) = 0.$$

Сначала на промежутке

$$[0,\, 2\pi N] = [r_0,\, r_1] \cup [r_1,\, r_2] \cup \cdots \cup [r_{N-1},\, r_N]$$

построим двумерную систему

$$\dot{x} = A^1(t)x, \quad A^1 \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}.

Для этого на промежутках

$$[r_{i-1},\, r_i], \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.26}$$

определим соответственно фундаментальные системы

$$X(t, \delta_i) = \left(x^1(t), x^2(t, \delta_i)\right), \quad i = 1, \ldots, N :$$

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos((1-\varepsilon)\psi(t)) \\ \sin((1-\varepsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad x^2(t, \delta_i) = \begin{pmatrix} -\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ \cos((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

Производные по t определенных фундаментальных систем имеют вид:

$$\dot{X}(t, \delta_i) =$$

$$= \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} -(1-\varepsilon)\sin((1-\varepsilon)\psi(t)) & -(1+\delta_i)\cos((1+\delta_i)\psi(t)) \\ (1-\varepsilon)\cos((1-\varepsilon)\psi(t)) & -(1+\delta_i)\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

Так как на каждом промежутке (3.26) выполнена оценка снизу

$$\det X(t,\delta_i) = \cos((1-\varepsilon)\psi(t))\cos((1+\delta_i)\psi(t)) +$$
$$+\sin((1-\varepsilon)\psi(t))\sin((1+\delta_i)\psi(t)) = \cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t)) \geqslant 1/2,$$

то, на основании условий (3.24), матрица

$$X^{-1}(t,\delta_i) =$$
$$= \frac{1}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))}\begin{pmatrix} \cos((1+\delta_i)\psi(t)) & \sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ -\sin((1-\varepsilon)\psi(t)) & \cos((1-\varepsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}$$

является непрерывной и ограниченной.

Известно, что фундаментальная матрица удовлетворяет исходной матричной системе

$$\dot{X}(t,\delta_i) = A_i(t)X(t,\delta_i), \quad t\in[r_{i-1},\, r_i], \quad i=1,\ldots,N,$$

а значит, на участках (3.26), без труда, восстанавливаются системы

$$A_i(t) = \dot{X}(t,\delta_i)X^{-1}(t,\delta_i), \quad i=1,\ldots,N: \tag{3.27}$$
$$a_{11}(t) = (-(1-\varepsilon)\sin((1-\varepsilon)\psi(t))\cos((1+\delta_i)\psi(t)) +$$
$$+(1+\delta_i)\sin((1-\varepsilon)\psi(t))\cos((1+\delta_i)\psi(t)))\frac{\dot{\psi}(t)}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))},$$
$$a_{12}(t) = (-(1-\varepsilon)\sin((1-\varepsilon)\psi(t))\sin((1+\delta_i)\psi(t)) -$$
$$-(1+\delta_i)\cos((1-\varepsilon)\psi(t))\cos((1+\delta_i)\psi(t)))\frac{\dot{\psi}(t)}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))},$$
$$a_{21}(t) = ((1-\varepsilon)\cos((1-\varepsilon)\psi(t))\cos((1+\delta_i)\psi(t)) +$$
$$+(1+\delta_i)\sin((1-\varepsilon)\psi(t))\sin((1+\delta_i)\psi(t)))\frac{\dot{\psi}(t)}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))},$$
$$a_{22}(t) = ((1-\varepsilon)\cos((1-\varepsilon)\psi(t))\sin((1+\delta_i)\psi(t)) -$$
$$-(1+\delta_i)\cos((1-\varepsilon)\psi(t))\sin((1+\delta_i)\psi(t)))\frac{\dot{\psi}(t)}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))}.$$

Через E_2 и O_2 обозначим соответственно единичную и нулевую матрицы второго порядка. Построенные фундаментальные матрицы в точках стыка удовлетворяют равенствам

$$X(r_i,\delta_i) = X(r_i,\delta_{i+1}) = E_2, \quad \dot{X}(r_i,\delta_i) = \dot{X}(r_i,\delta_{i+1}) = O_2, \quad i=\overline{1,N-1},$$

благодаря которым фундаментальная матрица

$$X^1(t) = \begin{cases} X(t,\delta_1), & t \in [r_0,\, r_1], \\ X(t,\delta_2), & t \in [r_1,\, r_2], \\ \ldots, \\ X(t,\delta_N), & t \in [r_{N-1},\, r_N] \end{cases}$$

является непрерывно дифференцируемой на $[0,\, 2\pi N]$, а значит, коэффициенты системы

$$A^1(t) = \begin{cases} A_1(t), & t \in [r_0,\, r_1], \\ A_2(t), & t \in [r_1,\, r_2], \\ \ldots, \\ A_N(t), & t \in [r_{N-1},\, r_N] \end{cases}$$

являются непрерывными на указанном отрезке.

2. Теперь построим систему $A \in \mathcal{P}^2$. В силу равенств

$$X^1(0) = X^1(2\pi N) = E_2, \quad \dot{X}^1(0) = \dot{X}^1(2\pi N) = O_2,$$

фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{cases} X^1(t), & t \in [0,\, 2\pi N], \\ X^1(t - 2\pi N), & t \in [2\pi N,\, 4\pi N], \\ X^1(t - 4\pi N), & t \in [4\pi,\, 6\pi], \\ \ldots \end{cases}$$

является непрерывно–дифференцируемой на $\mathbb{R}_+$, следовательно, система

$$A(t) = \begin{cases} A^1(t), & t \in [0,\, 2\pi N], \\ A^1(t - 2\pi N), & t \in [2\pi N,\, 4\pi N], \\ A^1(t - 4\pi N), & t \in [4\pi N,\, 6\pi N], \\ \ldots \end{cases}$$

является непрерывной $2\pi N$ периодической, а значит, ограниченной на $\mathbb{R}_+$.

3. Из множества $\mathcal{S}_*(A)$ при каждом $i = 1, \ldots, N$ выберем решение

$$y^i = c_1^i x^1 + c_2^i x^2, \quad c_1^i, c_2^i > 0,$$

удовлетворяющее при некотором $k^i > 0$ условию

$$-k^i y^i(r_{i-1}) = y^i(s_{i-1}). \tag{3.28}$$

Последнее означало бы коллинеарность векторов

$$y^i(r_{i-1}), \quad y^i(s_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, N,$$

а точнее, что угол между ними составляет π радиан.

Докажем,что такая возможность имеется. В самом деле, расписывая покоординатно последнее равенство и учитывая

$$y^i(r_{i-1}) = (c_1^i, c_2^i), \quad i = 1, \ldots, N,$$

получим систему с параметром k^i относительно неизвестных c_1^i, c_2^i

$$\begin{cases} -k^i c_1^i = c_1^i \cos((1-\varepsilon)\psi(s_{i-1})) - c_2^i \sin((1+\delta_i)\psi(s_{i-1})), \\ -k^i c_2^i = c_1^i \sin((1-\varepsilon)\psi(s_{i-1})) + c_2^i \cos((1+\delta_i)\psi(s_{i-1})). \end{cases} \tag{3.29}$$

После несложных преобразований систему (3.29) запишем в виде

$$\begin{cases} c_1^i(k^i - \cos(\varepsilon\pi)) + c_2^i \sin(\delta_i\pi) = 0, \\ c_1^i \sin(\varepsilon\pi) + c_2^i(k^i - \cos(\delta_i\pi)) = 0. \end{cases}$$

Если главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} k^i - \cos(\varepsilon\pi) & \sin(\delta_i\pi) \\ \sin(\varepsilon\pi) & k^i - \cos(\delta_i\pi) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(k^i\right)^2 - k^i(\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\delta_i\pi)) + \cos(\varepsilon\pi)\cos(\delta_i\pi) - \sin(\varepsilon\pi)\sin(\delta_i\pi) =$$
$$= \left(k^i\right)^2 - k^i(\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\delta_i\pi)) + \cos((\varepsilon + \delta_i)\pi)$$

равен нулю, то последняя система имеет ненулевые решения. В силу выбора ε, δ_i имеем следующие неравенства

$$D = (\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\delta_i\pi))^2 - 4\cos((\varepsilon + \delta_i)\pi) >$$
$$> \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 - 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 - 2\sqrt{2} > 0,$$

а значит, корни квадратного уравнения $\Delta = 0$ относительно неизвестной k^i равны

$$k_1^i = \frac{\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\delta_i\pi) + \sqrt{D}}{2} > 0,$$
$$k_2^i = \frac{\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\delta_i\pi) - \sqrt{D}}{2} > 0.$$

При $k^i = k_2^i$ покажем существование коэффициентов c_1^i, c_2^i, удовлетворяющих условиям

$$c_1^i c_2^i > 0, \; i = 1, \ldots, N.$$

Для этого достаточно доказать

$$k_2^i - \cos(\varepsilon\pi) < 0. \tag{3.30}$$

В силу выбора ε, δ_i, $i = 1, \dots, N$ имеем

$$0 < \cos((\varepsilon + \delta_i)\pi) < \cos(\varepsilon\pi) < \cos(\delta_i\pi).$$

Тогда из очевидного неравенства

$$\cos(\varepsilon\pi)\cos(\delta_i\pi) > \cos(\varepsilon\pi)\cos(\delta_i\pi) - \sin(\varepsilon\pi)\sin(\delta_i\pi)$$

следует

$$-4\cos(\varepsilon\pi)\cos(\delta_i\pi) < -4\cos((\varepsilon + \delta_i)\pi).$$

Прибавляя к обеим частям последнего неравенства выражение

$$(\cos(\delta_i\pi) + \cos(\varepsilon\pi))^2,$$

получим

$$0 < (\cos(\delta_i\pi) - \cos(\varepsilon\pi))^2 < (\cos(\delta_i\pi) + \cos(\varepsilon\pi))^2 - 4\cos((\varepsilon + \delta_i)\pi),$$

из которого следует

$$\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\delta_i\pi) - \sqrt{D} < 2\cos(\varepsilon\pi).$$

Следовательно, выполнено неравенство (3.30).

4. Введем в рассмотрение функцию φ, которое каждому ненулевому двумерному вектору ставит в соответствие угол между этим вектором и положительным направлением оси $0x_1$, отсчитываемый против часовой стрелки.

Заметим, что при любом $i = 1, \dots, N$ решения x^1 и x^2 удовлетворяют следующим равенствам

$$\varphi(x^1(s_{i-1})) - \varphi(x^1(r_{i-1})) = \angle\left(x^1(s_{i-1}),\, x^1(r_{i-1})\right) = (1 - \varepsilon)\pi,$$
$$\varphi(x^2(s_{i-1})) - \varphi(x^2(r_{i-1})) = \angle\left(x^2(s_{i-1}),\, x^2(r_{i-1})\right) = (1 + \delta_i)\pi,$$

из которых (с учетом $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_N$) следует, что

$$\varphi_0(y^j) > \varphi_1(y^j) > \dots > \varphi_{N-1}(y^j), \quad j = 1, \dots, N$$

где

$$\varphi_{i-1}(y^j) = \varphi(y^j(s_{i-1})) - \varphi(y^j(r_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N.$$

Поэтому будут справедливы неравенства

$$\varphi(y^1(0)) < \varphi(y^2(0)) < \dots < \varphi(y^N(0)) < \varphi(x^2(0)).$$

Проследим за поведением любого фиксированного решения $y^i \in \mathcal{S}_*(A)$ на промежутке

$$(0,\, 2N\pi] = (r_0,\, s_0] \cup (s_0,\, r_1] \cup \cdots \cup (s_{N-1},\, r_N].$$

На участке $(r_{i-1},\, s_{i-1}]$ решение y^i в силу (3.28) поворачивается против часовой стрелки ровно на

$$\varphi(y^i(s_{i-1})) - \varphi(y^i(r_{i-1})) = \angle\left(y^i(s_{i-1}),\, y^i(r_{i-1})\right) = \pi,$$

а на участке $(s_{i-1},\, r_i]$ решение y^i, поворачиваясь по часовой стрелке, занимает исходное положение

$$y^i(r_{i-1}) = (c_1^i,\, c_2^i). \tag{3.31}$$

На каждом из промежутков

$$(r_j,\, s_j], \quad j = 0, \ldots, i-2 \tag{3.32}$$

решение y^i поворачивается против часовой стрелки более чем на π, т.е.

$$\varphi(y^i(s_{j-1})) - \varphi(y^i(r_{j-1})) > \pi, \quad j = 1, \ldots, i-1,$$

а на промежутках

$$(s_{j-1},\, r_j], \quad j = 1, \ldots, i-1 \tag{3.33}$$

совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное положение (3.31).

На каждом из промежутков

$$(r_j,\, s_j], \quad j = i, \ldots, N-1 \tag{3.34}$$

решение y^i поворачивается против часовой стрелки менее чем на π, т.е.

$$\varphi(y^i(s_{j-1})) - \varphi(y^i(r_{j-1})) < \pi, \quad j = i+1, \ldots, N,$$

а на промежутках

$$(s_j,\, r_{j+1}], \quad j = i, \ldots, N-1 \tag{3.35}$$

совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное направление (3.31).

Решение, совершающее поворот не менее чем на π, будет ортогонально в одной или двух точках наперед заданному ненулевому вектору. Если же решение совершает поворот менее чем на π, то скалярное произведение этого решения и некоторого ненулевого вектора может быть отлично от нуля. Следовательно, можно указать такой вектор $m^i \in \mathbb{R}^2$, что на каждом из промежутков (3.32), (3.33), $(r_{i-1},\, s_{i-1}]$, $(s_{i-1},\, r_i]$ решение y^i будет ортогонально этому вектору в одной точке, а на каждом из промежутков (3.34), (3.35) ни разу не будет ортогонально. При этом все нули каждой функции $\langle y^i, m^i\rangle$ являются строгими сменами знака.

Следовательно, при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(y^i, m, r_N) = \nu^\alpha(y^i, m^i, r_N) = 2i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.36}$$

5. Для вычисления нижних показателей колеблемости произвольного периодического решения $y^i \in \mathcal{S}_*(A)$ зададим последовательность

$$t_k = t_{k-1} + 2\pi N, \quad t_0 \equiv 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

обладающую свойствами

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_k}{t_{k-1}} = \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{2\pi N}{t_{k-1}}\right) = 1.$$

Тогда по лемме 1.1, с учетом равенств (3.36), при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(y^i) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{l=1}^{j} \nu^\alpha(y^i, m, t_{l-1}, t_l)}{t_j} = \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{\pi j \nu^\alpha(y^i, m, t_1)}{2\pi N j} =$$

$$= \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\nu^\alpha(y^i, m, t_1)}{2N} = \frac{2i}{2N} = \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(y^i) = \varliminf_{j\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi \sum\limits_{l=1}^{j} \nu^\alpha(y^i, m, t_{l-1}, t_l)}{t_j} = \varliminf_{j\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi j \nu^\alpha(y^i, m, t_1)}{2\pi N j} =$$

$$= \varliminf_{j\to+\infty} \frac{2i}{2N} = \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Аналогичные равенства справедливы и для верхних частот, поэтому при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\nu^\alpha_\bullet(y^i) = \nu^\alpha_\circ(y^i) = \frac{i}{N} \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.37}$$

6. Положим $y^{N+1}(0) \equiv x^2(0)$. Для фиксированного $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ произвольное решение z с начальными условиями

$$\varphi(z(0)) \in \big[\varphi(y^i(0)),\, \varphi(y^{i+1}(0))\big)$$

обладает свойствами:

– на каждом из промежутков

$$(r_j,\, s_j], \quad j = 0, \ldots, i-1$$

поворачивается против часовой стрелки более чем на π;

– на промежутках

$$(s_{j-1},\, r_j], \quad j = 1, \ldots, i$$

совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное направление;

– на каждом из промежутков (3.34) поворачивается против часовой стрелки менее чем на π;

– на промежутках (3.35) совершает такие же, что и в предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное направление.

Следовательно, на основании п.5 настоящего доказательства, для решения z при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнены

$$\nu_{\bullet}^{\alpha}(z) = \nu_{\circ}^{\alpha}(z) = \frac{i}{N}.$$

Таким образом, значения, задаваемые равенствами (3.37), являются метрически и топологически существенными.

Теорема 3.5 доказана.

Замечание 3.2. Заметим, что, в силу лемм 1.4 и 1.5, в формулировке теоремы 3.5 нельзя обеспечить типичность ни одного из существенных значений показателей колеблемости выводимой в ней системы $A \in \mathcal{M}^2$, причем ни в метрическом, ни в топологическом смысле.

Теперь докажем утверждение о существовании двумерной системы со счетными спектрами показателей колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней.

Доказательство теоремы 3.6. 1. Выберем $\varepsilon > 0$ и положительную строго убывающую последовательность $\{\delta_k\}$ так, чтобы

$$1/6 > \varepsilon > \delta_k, \quad 1/4 < \varepsilon + \delta_k < 1/3, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.38}$$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ существуют линейные однородные двумерные дифференциальные системы с фундаментальными матрицами

$$X(t, \delta_i) = \left(x^1(t),\, x^2(t, \delta_i)\right),$$

где

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos((1-\varepsilon)\psi(t)) \\ \sin((1-\varepsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad x^2(t, \delta_i) = \begin{pmatrix} -\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ \cos((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix},$$

$\psi(\cdot)$ — функция, определенная в п.1 доказательства теоремы 3.5.

Производные по t имеют вид:

$$\dot{X}(t,\delta_i) = \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} -(1-\varepsilon)\sin((1-\varepsilon)\psi(t)) & -(1+\delta_i)\cos((1+\delta_i)\psi(t)) \\ (1-\varepsilon)\cos((1-\varepsilon)\psi(t)) & -(1+\delta_i)\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

В силу (3.38) выполнена оценка снизу

$$\det X(t,\delta_i) = \cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t)) \geqslant 1/2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{N},$$

откуда следует непрерывность и ограниченность матрицы

$$X^{-1}(t,\delta_i) = \frac{1}{\cos((\varepsilon+\delta_i)\psi(t))} \begin{pmatrix} \cos((1+\delta_i)\psi(t)) & \sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ -\sin((1-\varepsilon)\psi(t)) & \cos((1-\varepsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

Известно [198, с. 75], что фундаментальная матрица удовлетворяет исходной матричной системе

$$\dot{X}(t,\delta_i) = A_i(t)X(t,\delta_i), \quad t \geqslant 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

а значит, без труда, восстанавливаются системы

$$A_i(t) = \dot{X}(t,\delta_i)X^{-1}(t,\delta_i) \in \mathcal{M}^2, \quad i \in \mathbb{N}.$$

2. При каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $\Delta_k \equiv 2^{k+1}\pi$ и возьмем любую строго убывающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, стремящуюся к нулю. Зададим последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_1 \equiv \Delta_1, \quad t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Начиная с некоторого k_1, выполняются неравенства

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_1}{t_k} < 1 + \varepsilon_1, \quad k \geqslant k_1.$$

Меняем элементы этой последовательности начиная с некоторого $k_2 > k_1$

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_2, \quad k \geqslant k_2,$$

так чтобы

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_2}{t_k} < 1 + \varepsilon_2, \quad k \geqslant k_2.$$

Далее, по индукции продолжаем менять полученную последовательность. Если для некоторого $i \in \mathbb{N}$ построена последовательность, элементы которой начиная с номера k_i удовлетворяют условиям

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_i}{t_k} < 1 + \varepsilon_i, \quad k \geqslant k_i,$$

то выбираем $k_{i+1} > k_i$ так, чтобы при любом $k \geqslant k_{i+1}$ были выполнены условия

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i+1}, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_{i+1}}{t_k} < 1 + \varepsilon_{i+1}.$$

В результате получим последовательность $t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i(k)}$, обладающую свойствами

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

Разобьем промежуток $[0, t_1]$, образованный первыми двумя элементами построенной последовательности, точкой $t_0^1 \equiv 2\pi$ на части $[0; t_0^1]$, $[t_0^1; t_1]$.

Остальные промежутки $[t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами этой последовательности с шагом Δ_1, также разбиваем на части $[t_k; t_k^1]$, $[t_k^1; t_{k+1}]$, где $t_k^1 \equiv t_k + 2\pi$. Заметим, что $t_{k+1} = t_k^1 + 2\pi$.

Промежутки вида $[t_k, t_{k+1}]$, образованные соседними элементами построенной последовательности с шагом Δ_2, разбиваем точками $t_k^1 \equiv t_k + 2^2\pi$, $t_k^2 \equiv t_k^1 + 2\pi$, на промежутки $[t_k; t_k^1]$, $[t_k^1; t_k^2]$, $[t_k^2; t_{k+1}]$. Здесь $t_{k+1} = t_k^2 + 2\pi$.

Любые два соседних элемента построенной последовательности связаны соотношением

$$t_{k+1} = t_k + \Delta_i, \quad k_i \leqslant k < k_{i+1}.$$

Промежутки вида $[t_k, t_{k+1}]$(заметим, что $t_{k+1} = t_k^i + 2\pi$), образованные соседними элементами построенной последовательности с шагом Δ_i, с помощью точек

$$t_k^1 \equiv t_k + 2^i\pi, \quad t_k^2 \equiv t_k^1 + 2^{i-1}\pi, \quad t_k^3 \equiv t_k^2 + 2^{i-2}\pi, \ldots,$$
$$t_k^{i-1} \equiv t_k^{i-2} + 2^2\pi, \quad t_k^i \equiv t_k^{i-1} + 2\pi, \quad t_{k+1} \equiv t_k^i + 2\pi$$

разбиваем на $i+1$ частей:

$$[t_k; t_k^1],\ [t_k^1; t_k^2],\ [t_k^2; t_k^3], \ldots, [t_k^i; t_{k+1}]. \tag{3.39}$$

3. Построим двумерную линейную систему дифференциальных уравнений с непрерывными ограниченными коэффициентами, фундаментальная система решений которого на каждом из промежутков (3.39) при любом фиксированном значении k будет совпадать с наперед выбранными вектор-функциями с положительным определителем Вронского, подобно тому, как это делалось в п. 1 доказательства теоремы 3.5:

— на участке $[t_k; t_k^1]$ — найдем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k, t_k^1)$ которой совпадает с

$$X(t, \delta_1), \quad t \in [t_k,\ t_k^1];$$

— на участке $[t_k^1; t_k^2]$ — найдем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^1, t_k^2)$ которой совпадает с матрицей

$$X(t, \delta_2), \quad t \in [t_k^1,\, t_k^2];$$

— ... и т.д.;

— на участке $[t_k^{i-2}; t_k^{i-1}]$ — найдем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^{i-2}, t_k^{i-1})$ которой совпадает с матрицей

$$X(t, \delta_{i-1}), \quad t \in [t_k^{i-2},\, t_k^{i-1}];$$

— на участке $[t_k^{i-1}; t_k^i]$ — найдем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^{i-1}, t_k^i)$ которой совпадает с матрицей

$$X(t, \delta_i), \quad t \in [t_k^{i-1}; t_k^i];$$

— на участке $[t_k^i; t_{k+1}]$ — найдем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^i; t_{k+1})$ которой совпадает с матрицей

$$X(t, \delta_{i+1}), \quad t \in [t_k^i; t_{k+1}].$$

Теперь на участке $[t_k; t_{k+1}]$ найдем систему с фундаментальной матрицей

$$X(t, t_k, t_{k+1}) = \begin{cases} X(t, t_k, t_k^1), & t \in [t_k,\, t_k^1], \\ X(t, t_k^1, t_k^2), & t \in [t_k^1,\, t_k^2], \\ X(t, t_k^2, t_k^3), & t \in [t_k^2,\, t_k^3], \\ \ldots, \ldots, \\ X(t, t_k^{i-1}, t_k^i), & t \in [t_k^{i-1},\, t_k^i], \\ X(t, t_k^i, t_{k+1}), & t \in [t_k^i,\, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Заметим, что в точках стыка выполняются равенства

$$X(t_k^{j-1}, t_k^{j-2}, t_k^{j-1}) = X(t_k^{j-1}, t_k^{j-1}, t_k^j) = E_2,$$
$$\dot{X}(t_k^{j-1}, t_k^{j-2}, t_k^{j-1}) = \dot{X}(t_k^{j-1}, t_k^{j-1}, t_k^j) = O_2,$$

где $j = 2, 3, \ldots, i+1$, $t_k^0 \equiv t_k$, $t_k^{i+1} \equiv t_{k+1}$.

Повторяя эту процедуру построения на каждом промежутке вида $[t_k; t_{k+1}]$ при любом $k \in \mathbb{N}$, получим непрерывно дифференцируемую на

$\mathbb{R}_+$ фундаментальную матрицу

$$X(t)=\begin{cases} X(t,0,t_1), & t\in[0,\,t_1],\\ X(t,t_1,t_2), & t\in[t_1,\,t_2],\\ X(t,t_2,t_3), & t\in[t_2,\,t_3],\\ \ldots\ldots, & \\ X(t,t_k,t_{k+1}), & t\in[t_k,\,t_{k+1}],\\ \ldots\ldots, & \end{cases}$$

так как выполняются равенства

$$X(t_k,t_{k-1},t_k)=X(t_k,t_k,t_{k+1})=E_2,$$
$$\dot X(t_k,t_{k-1},t_k)=\dot X(t_k,t_k,t_{k+1})=O_2,$$

а значит, коэффициенты восстановленной двумерной системы A дифференциальных уравнений являются непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}_+$.

4. Выберем из множества $\mathcal{S}_*(A)$ решения

$$y^j=c_1^jx_1+c_2^jx_2,\quad c_1^j,\,c_2^j>0,\quad j\in\mathbb{N},$$

обладающие при любом $j\in\mathbb{N}$ свойствами

$$y^j(t_{k_j}^{j-1})=-w\cdot y^j(t_{k_j}^{j-1}+\pi),\quad w>0, \tag{3.40}$$

где t_{k_j} - элемент построенной последовательности с которого начинается шаг Δ_j, а $t_{k_j}^{j-1}$- левый конец j го промежутка в разбиении отрезка $[t_{k_j},\,t_{k_j+1}]$ на составляющие. Существование решений y^j с указанным свойством доказывается также как и в п. 3 доказательства теоремы 3.5.

Для выбранных решений определим величины

$$\kappa_k(y^j)\equiv$$
$$\equiv\frac{\nu^\alpha(y^j,m^j,t_k,t_k^1)+\nu^\alpha(y^j,m^j,t_k^1,t_k^2)+\cdots+\nu^\alpha(y^j,m^j,t_k^{i(k)},t_{k+1})}{2^{i(k)+1}}=$$
$$=\inf_{m\in\mathbb{R}^2}\frac{\nu^\alpha(y^j,m,t_k,t_k^1)+\nu^\alpha(y^j,m,t_k^1,t_k^2)+\cdots+\nu^\alpha(y^j,m,t_k^{i(k),t_{k+1}})}{2^{i(k)+1}},$$

где $i(k)$ совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}.

Любое решение $y\in\mathcal{S}_*(A)$ на любом участке длины π не может совершать поворот более чем на $(1+\delta_1)\pi<3\pi/2$, поэтому это решение может быть ортогонально любому вектору $m\in\mathbb{R}_*^2$ не более чем 2 раза. Следовательно, функция $\langle y,m\rangle$ на любом конечном участке $(0,\,t]$ может иметь только конечное число нулей.

Введем в рассмотрение функцию φ, определенную в п.4 доказательства теоремы 3.5.

Зафиксируем произвольные значения $j,\, k \in \mathbb{N}$. Решение $y^j \in \mathcal{S}_*(A)$ на участке $(t_k,\, t_k+2\pi]$ за промежуток времени π совершает поворот на определенный угол

$$\varphi_0(y^j) = \varphi(y^j(t_k+\pi)) - \varphi(y^j(t_k)) = \angle\left(y^j(t_k+\pi),\, y^j(t_k)\right)$$

против часовой стрелки, и за такое же время успевает занять исходное положение

$$y(t_k+2\pi) = (c_1^j,\, c_2^j). \tag{3.41}$$

На промежутках

$$(t_k+2\pi,\, t_k+4\pi],\, (t_k+4\pi,\, t_k+6\pi], \ldots, (t_k^1-2\pi,\, t_k^1]$$

решение y^j ведет себя точно так же.

На промежутке $(t_k^1,\, t_k^1+2\pi]$ решение y^j за время π поворачивается на угол

$$\varphi_1(y^j) = \varphi(y^j(t_k^1+\pi)) - \varphi(y^j(t_k^1)) = \angle\left(y^j(t_k^1+\pi),\, y^j(t_k^1)\right),$$

а затем, возвращаясь по часовой стрелке, занимает исходное положение (3.42). На промежутках

$$(t_k^1+2\pi,\, t_k^1+4\pi],\, (t_k^1+4\pi,\, t_k^1+6\pi], \ldots (t_k^2-2\pi,\, t_k^2]$$

все полностью повторяется.

На следующих промежутках

$$\begin{gathered}
(t_k^2,\, t_k^3] = (t_k^2,\, t_k^2+2\pi] \cup (t_k^2+2\pi,\, t_k^2+4\pi] \cup \cdots \cup (t_k^3-2\pi,\, t_k^3],\\
(t_k^3,\, t_k^4] = (t_k^3,\, t_k^3+2\pi] \cup (t_k^3+2\pi,\, t_k^3+4\pi] \cup \cdots \cup (t_k^4-2\pi,\, t_k^4],\\
\ldots,\\
(t_k^i,\, t_{k+1}] = (t_k^i,\, t_k^i+2\pi] \cup (t_k^i+2\pi,\, t_k^i+4\pi] \cup \cdots \cup (t_{k+1}-2\pi,\, t_{k+1}]
\end{gathered}$$

все повторяется, но с каждым разом, при переходе с одного промежутка на другой, угол поворота решения y^j за время π уменьшается, т.е. выполнены неравенства

$$\varphi_0(y^j) > \varphi_1(y^j) > \cdots > \varphi_{i-1}(y^j) > \varphi_i(y^j), \tag{3.42}$$

где

$$\varphi_2(y^j) = \varphi(y^j(t_k^2+\pi)) - \varphi(y^j(t_k^2)), \ldots, \varphi_i(y^j) = \varphi(y^j(t_k^i+\pi)) - \varphi(y^j(t_k^i))$$

(i — совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}), откуда следует справедливость неравенств

$$\varphi(y^1(0)) < \varphi(y^2(0)) < \cdots < \varphi(y^j(0)) < \cdots < \varphi(x^2(0)).$$

Получается, что при подсчете числа нулей функции $\langle y^j,\, m\rangle$, $m\in\mathbb{R}^2_*$ на промежутке $(t_k,\, t_{k+1}]$ достаточно знать поведение решения y^j на участках

$$(t_k,\, t_k+\pi],\, (t_k^1,\, t_k^1+\pi], \ldots, (t_k^i,\, t_k^i+\pi]. \tag{3.43}$$

5. В силу (3.40), (3.42) решение $y^1\in\mathcal{S}_*(A)$ при любом фиксированном значении $k\in\mathbb{N}$ на участках (3.43) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}\varphi(y^1(t_k+\pi))-\varphi(y^1(t_k))=\pi,\\ \varphi(y^1(t_k^1+\pi))-\varphi(y^1(t_k^1))<\pi,\\ \ldots,\\ \varphi(y^1(t_k^i+\pi))-\varphi(y^1(t_k^i))<\pi.\end{gathered}$$

Если решение y^1 на промежутке $(t_k^1,\, t_k^1+\pi]$ ни разу не будет ортогонально некоторому вектору m^1, то

$$\nu^\alpha(y^1,m^1,t_k,t_k+\pi)=1,\quad \nu^\alpha(y^1,m^1,t_k^1,t_{k+1})=0,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\},$$

поэтому выполнено

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\nu^\alpha(y^1,m,t_k,t_{k+1})=\nu^\alpha(y^1,m^1,t_k,t_{k+1})=2^{i(k)}.$$

Откуда получаем равенство $\kappa_k(y^1)=2^{-1},\quad k\in\mathbb{N}$. Откуда получаем равенство

$$\kappa_k(y^1)=\frac{2^{i(k)}}{2^{i(k)+1}}=2^{-1},\quad k\in\mathbb{N}.$$

При любом фиксированном $k\geqslant k_2$ на промежутках (3.43) (любая функция $\langle y^2,\, m\rangle$, $m\in\mathbb{R}^2_*$ на промежутке $(0,\, t_k]$ имеет конечное число нулей) решение $y^2\in\mathcal{S}_*(A)$ в силу (3.40), (3.42) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}270^0>\varphi(y^2(t_k+\pi))-\varphi(y^2(t_k))>\pi,\\ \varphi(y^2(t_k^1+\pi))-\varphi(y^2(t_k^1))=\pi,\\ \varphi(y^2(t_k^2+\pi))-\varphi(y^2(t_k^2))<\pi,\\ \ldots,\\ \varphi(y^2(t_k^i+\pi))-\varphi(y^2(t_k^i))<\pi.\end{gathered}$$

Поэтому для решения y^2 выбираем такой вектор m^2, чтобы при любом $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ выполнялись

$$\nu^\alpha(y^2,m^2,t_k,t_k+\pi)=\nu^\alpha(y^2,m^2,t_k^1,t_k^1+\pi)=1,\quad \nu^\alpha(y^2,m^2,t_k^2,t_{k+1})=0,$$

а значит,

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\nu^\alpha(y^2,m,t_k,t_{k+1})=\nu^\alpha(y^2,m^2,t_k,t_{k+1})=3\cdot 2^{i(k)-1},$$

поэтому $\varkappa_k(y^2) = 3/4$ при всех $k \geqslant k_2$.

Начиная с первого момента k_q появления шага Δ_q (решение y^q на промежутке $(0,\, t_{k_q}]$ имеет конечное число нулей) при любом фиксированном $k \geqslant k_q$ на участках (3.43) решение $y^q \in \mathcal{S}_*(A)$ в силу (3.40), (3.42) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}
270^0 > \varphi(y^q(t_k+\pi)) - \varphi(y^q(t_k)) > \pi,\\
\varphi(y^q(t_k^1+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^1)) > \pi,\\
\ldots,\\
\varphi(y^q(t_k^{q-2}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{q-2})) > \pi,\\
\varphi(y^q(t_k^{q-1}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{q-1})) = \pi,\\
\varphi(y^q(t_k^{q}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{q})) < \pi,\\
\ldots,\\
\varphi(y^q(t_k^{i}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{i})) < \pi.
\end{gathered}$$

Поэтому для решения y^q выбираем такой вектор m^q, чтобы функция $\langle y^q,\, m^q\rangle$ не имела гиперкорней на промежутке $(t_k^q,\, t_{k+1}]$. При этом для каждого $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ будут выполняться равенства

$$\nu^\alpha(y^q, m^q, t_k, t_k{+}\pi) = \nu^\alpha(y^q, m^q, t_k^1, t_k^1{+}\pi) = \cdots = \nu^\alpha(y^q, m^q, t_k^{q-1}, t_k^{q-1}{+}\pi) = 1,$$

откуда следует

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(y^q, m, t_k, t_{k+1}) = \nu^\alpha(y^q, m^q, t_k, t_{k+1}) = 2^{i(k)-q+1}(2^q-1), \quad k \geqslant k_q,$$

следовательно,

$$\varkappa_k(y^q) = 1 - 2^{-q}, \quad k \geqslant k_q. \tag{3.44}$$

6. При вычислении нижних слабых показателей колеблемости любого выбранного решения y^q будем пользоваться леммой 1.1, согласно которой можно не учитывать полуинтервал $(0,\, t_{k_q}]$ (т. е. не учитывать его вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число нулей решения, ни в само это число). Следовательно, при любом $q \in \mathbb{N}$ для решения y_q, с учетом равенств (3.44), при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ получим

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(y^q) = \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(y^q, m, t_p) = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(y^q, m^q, t_p) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi\nu^\alpha(y^q, m^q, t_{k_q}) + \pi\sum\limits_{i=k_q}^{p} (\nu^\alpha(y^q, m^q, t_i, t_{i+1}))}{t_{p+1}} =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} \left(\nu^\alpha(y^q, m^q, t_i, t_{i+1})\right)}{t_{p+1} - t_{k_q}} =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1})\pi} \sum_{i=k_q}^{p} (\nu^\alpha(y^q, m^q, t_i, t_i^1) +$$

$$+ \nu^\alpha(y^q, m^q, t_i^1, t_i^2) + \dots + \nu^\alpha(y^q, m^q, t_i^{j(i)}, t_{i+1})) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{1}{2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1}} (2^{j(k_q)+1} \varkappa_{k_q}(y^q) +$$

$$+ 2^{j(k_q+1)+1} \varkappa_{k_q+1}(y^q) + \dots + 2^{j(p)+1} \varkappa_p(y^q)) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{(1 - 2^{-q})(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1})}{2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1}} = 1 - 2^{-q},$$

где $j(i)$ совпадает с номером шага между t_i, t_{i+1}.

Аналогичные равенства справедливы и для верхних слабых показателей, поэтому при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\nu_\circ^\alpha(y^q) = 1 - 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{3.45}$$

Для сильных показателей колеблемости решения y^q имеем двустороннюю оценку

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(y^q) \leqslant \check{\nu}_\bullet^\alpha(y^q) \leqslant \hat{\nu}_\bullet^\alpha(y^q) = \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^\alpha(y^q, m, t_p) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^\alpha(y^q, m^q, t_p) = 1 - 2^{-q},$$

из которой следует

$$\nu_\bullet^\alpha(y^q) = 1 - 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

7. Для каждого $q \in \mathbb{N}$ произвольное решение $z \in \mathcal{S}_*(A)$ с начальными условиями

$$\varphi(z(0)) \in \left[\varphi(y^q(0)),\, \varphi(y^{q+1}(0))\right)$$

при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет соотношениям

$$5\pi/4 > \varphi(z(t_k + \pi)) - \varphi(z(t_k)) > \pi, \quad \varphi(z(t_k^1 + \pi)) - \varphi(z(t_k^1)) > \pi, \dots,$$
$$\varphi(z(t_k^{q-2} + \pi)) - \varphi(z(t_k^{q-2})) > \pi, \quad \varphi(z(t_k^{q-1} + \pi)) - \varphi(z(t_k^{q-1})) > \pi,$$
$$\varphi(z(t_k^q + \pi)) - \varphi(z(t_k^q)) < \pi, \dots, \varphi(z(t_k^i + \pi)) - \varphi(z(t_k^i)) < \pi,$$

а значит, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнены равенства

$$\nu_\circ^\alpha(z) = \nu_\bullet^\alpha(z) = 1 - 2^{-q}.$$

Таким образом, значения, задаваемые равенствами (3.45), (3.46), являются метрически и топологически существенными.

Теорема 3.6 полностью доказана.

3.6 Линейные однородные системы с континуальными спектрами показателей колеблемости

В этом разделе доказывается утверждение о существовании двумерной системы с континуальными спектрами показателей колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней.

Доказательство теоремы 3.7.

1. Пусть $n = 2$. Фиксируем произвольные несоизмеримые $\omega_2 > \omega_1 > 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что вектор-функции

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t \\ -e^{-t}\cos\omega_1 t \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t \\ e^{-t}\cos\omega_2 t \end{pmatrix}$$

являются решениями двумерной системы

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{-\omega_2\sin\omega_2 t\cos\omega_2 t-\omega_1\sin\omega_1 t\cos\omega_1 t}{\cos^2\omega_2 t+\cos^2\omega_1 t} & \frac{\omega_2\sin\omega_2 t\cos\omega_1 t-\omega_1\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t}{e^{-t}(\cos^2\omega_2 t+\cos^2\omega_1 t)} \\ \frac{e^{-t}(\omega_1\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t-\omega_2\sin\omega_2 t\cos\omega_1 t)}{\cos^2\omega_2 t+\cos^2\omega_1 t} & \frac{-\omega_1\sin\omega_1 t\cos\omega_1 t-\omega_2\sin\omega_2 t\cos\omega_2 t}{\cos^2\omega_2 t+\cos^2\omega_1 t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициенты системы A непрерывны, а вектор-функции x^1, x^2 линейно независимы на $\mathbb{R}_+$, так как на $\mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\cos^2\omega_2 t + \cos^2\omega_1 t > 0,$$

$$\det X(t) \equiv \det\big(x^1(t), x^2(t)\big) = e^{-t}\left(\cos^2\omega_2 t + \cos^2\omega_1 t\right) > 0.$$

2. Для произвольного решения

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) \in \mathcal{S}_*(A)$$

и ненулевого вектора $m = (m_1,\, m_2)$ скалярное произведение $\langle x, m\rangle$ представимо в виде

$$m_1\left(c_1\cos\omega_2 t + c_2\cos\omega_1 t\right) + m_2 e^{-t}\left(-c_1\cos\omega_1 t + c_2\cos\omega_2 t\right). \qquad (3.47)$$

а. Если $c_1 = 0$, то минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на векторе $m = (m_1,\, m_2)$ при $m_2 = 0$ (см. [256]) и

$$\nu_\circ^\alpha(x) = \nu_\bullet^\alpha(x) = \omega_1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \qquad (3.48)$$

б. При $c_2 = 0$ также справедливы равенства (3.48), но минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на векторе $m = (m_1,\, m_2)$ при $m_1 = 0$.

в. Выделим из множества $\mathcal{S}_*(A)$ однопараметрическое семейство решений

$$x_c(t) = cx^1(t) + x^2(t), \quad c > 0$$

и введем в рассмотрение функции

$$f_c(t) = \cos\omega_1 t + c\cos\omega_2 t, \quad g_c(t) = \cos\omega_1 t + \frac{1}{c}\cos(\omega_2 t + \pi).$$

Тогда из вида

$$\langle x_c(t), m\rangle = m_1 f_c(t) - m_2 c e^{-t} g_c(t),$$

в силу остаточности частоты Сергеева строгих знаков $\hat{\omega}^-$ [165], следует

$$\hat{\omega}^-(\langle x_c, m\rangle) = \begin{cases} \hat{\omega}^-(f_c), & m_1 \neq 0 \\ \hat{\omega}^-(g_c), & m_1 = 0. \end{cases}$$

По теореме 1 из работы [65] функция $\hat{\omega}^+(f_c)$ при $c > 0$ непрерывна: при $0 < c < \omega_1/\omega_2$ она принимает значение ω_1, при $c \geqslant 1$ – значение ω_2, а при $\omega_1/\omega_2 < c < 1$ функция $\hat{\omega}^+(f_c)$ строго возрастает.

Очевидно, что при $c \in (0,\, 1]$ имеем $\frac{1}{c} \geqslant 1$, поэтому $\hat{\omega}^+(g_c) = \omega_2$. Следовательно, на полуинтервале $c \in (0,\, 1]$ выполнено неравенство $\hat{\omega}^+(f_c) \leqslant \hat{\omega}^+(g_c)$.

Частота Сергеева корней $\hat{\omega}^+(h_{c,\phi})$ функции

$$h_{c,\phi}(t) = \cos\omega_1 t + c\cos(\omega_2 t + \phi)$$

по теореме 1 [65] не зависит от значения ϕ, и для каждого $c \in (0,\, 1]$ найдется такое ϕ (см. [189]), что все нули функции $h_{c,\phi}$ однократны и являются точками строгих смен знаков, поэтому

$$\hat{\omega}^-(h_{c,\phi}) = \hat{\omega}^-(f_c) = \hat{\omega}^0(f_c) = \hat{\omega}^+(f_c), \quad \hat{\omega}^-(g_c) = \hat{\omega}^0(g_c) = \hat{\omega}^+(g_c).$$

Заметим, что последние две цепочки справедливы и для нижних частот Сергеева. Следовательно, для любого решения x_c точные нижние грани в определениях показателей колеблемости знаков, нулей и корней достигаются на любом векторе $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ при $m_1 \neq 0$, поэтому при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +\}$ будем иметь

$$\nu_\circ^\alpha(x) = \nu_\bullet^\alpha(x) = \omega^+(\langle x, m\rangle) = \omega^+(f_c).$$

Если функция f_c имеет кратные нули, то по теореме 2 из [177] ненулевые m_1 и m_2 можно подобрать так, чтобы при любом $t > 0$ выполнялось неравенство $\nu^*(x_c, m, t) < +\infty$. Тогда $\nu^*_\circ(x) = \nu^*_\bullet(x) = \omega^+(\langle x, m\rangle) = \omega^+(f_c)$.

г. Для рассмотренного подмножества решений множества $\mathcal{S}_*(A)$ показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней заполняют отрезок $[\omega_1; \omega_2]$, а для остальных решений системы $A \in \mathcal{M}^2$ значения показателей колеблемости повторяются. Действительно, для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и любого вектора $m \in \mathbb{R}^2_*$ скалярное произведение $\langle x(t), m\rangle$ является нетривиальным решением некоторого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Поэтому, на основании следствия 2 [256], верхний сильный показатель колеблемости гиперкорней решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ не может быть больше ω_2, а нижний слабый показатель колеблемости строгих знаков не может быть меньше ω_1.

3. Пусть $n > 2$ – четное. Тогда выбираем систему $A \in \mathcal{M}^n$ с фундаментальной системой решений

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t \\ -e^{-t}\cos\omega_1 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t \\ e^{-t}\cos\omega_2 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^{n-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos\omega_2 t \\ -e^{-t}\cos\omega_1 t \end{pmatrix}, \quad x^n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos\omega_1 t \\ e^{-t}\cos\omega_2 t \end{pmatrix}.$$

Важно заметить, что скалярное произведение любого нетривиального решения $x \in \operatorname{span}\{x^1, x^2\}$ и ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ будет (в том числе и тривиальным) решением некоторого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а значит, при каждом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ справедливы равенства

$$\nu^\alpha_\bullet\left(\operatorname{span}_*\left\{x^1, x^2\right\}\right) = \nu^\alpha_\circ\left(\operatorname{span}_*\left\{x^1, x^2\right\}\right) = [\omega_1, \omega_2].$$

Для остальных решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ получаются значения показателей колеблемости из отрезка $[\omega_1, \omega_2]$.

4. Пусть $n > 2$ – нечетное. Тогда выбираем систему $A \in \mathcal{M}^n$ с фундаментальной системой решений

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t \\ -e^{-t}\cos\omega_1 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t \\ e^{-t}\cos\omega_2 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$x^{n-2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos\omega_2 t \\ -e^{-t}\cos\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}, x^{n-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos\omega_1 t \\ e^{-t}\cos\omega_2 t \\ 0 \end{pmatrix}, x^n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение системы

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_{n-1} x^{n-1}(t) + c_n x^n(t).$$

Если $c_n = 0$, то повторяются все рассуждения из пункта 3 настоящего доказательства.

Если $c_n \neq 0$, то для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ все показатели колеблемости равны нулю, поскольку инфимум реализуется на векторе $m = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n_*$.

Таким образом, в рассматриваемом случае спектры показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с множеством $[\omega_1; \omega_2] \cup \{0\}$.

Теорема 3.7 полностью доказана.

Замечание 3.3. Из доказательства лемм 1.4 и 1.5 следует, что в теореме 3.7 принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все его значения оказались существенными в каком-либо из указанных смыслов.

3.7 Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения

В данном разделе проведем исследование показателей колеблемости по первому приближению. Для этого нам понадобится следующие вспомогательные определения и факты.

Для произвольной вектор-функции $z \in C^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*\right)$ однозначно определим функцию $\phi_z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos\phi_z(t), \sin\phi_z(t))^\top = z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \phi_z \in C^1(\mathbb{R}_+).$$

Для любого угла $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ обозначим через $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ множества, состоящие из вектор-функций $u \in C^1\left([0, 2\pi], \mathbb{R}^2_*\right)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\phi(0) = \varphi_0$, где $\phi = \phi_u$;

2) функция ϕ *нестрого возрастает* на отрезке $[0, \pi]$ (при возрастании функции ϕ вектор-функция u движется против часовой стрелки относительно начала координат);

3) при каждом $t \in (0, \pi]$ верно равенство $\phi(\pi + t) = \phi(\pi - t)$;

4) для $u \in \mathcal{A}_0$ при некотором $\delta \in (0, \pi/2)$ выполнено равенство $\phi(\pi) - \varphi_0 = \pi - \delta$;

5) для $u \in \mathcal{A}_1$ выполнено двойное неравенство $\pi < \phi(\pi) - \varphi_0 < 3\pi/2$.

Определение 3.4 [176]. Последовательность дробных долей (θ_i) называется равномерно распределенной по модулю 1, если для каждого полуинтервала $[a, b) \subset [0, 1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{[a,b)}(\theta_i) = b - a,$$

где $\chi_{[a,b)}$ – характеристическая функция промежутка $[a, b)$.

Замечание 3.4. Последовательность $\theta_i = \{i\pi\}$, $i \in \mathbb{N}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, является равномерно распределенной по модулю 1 (см. [176]), причем на месте числа π может стоять любое иррациональное число.

Для любой функции $z \in C^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*\right)$ и любого номера $i \in \mathbb{N}$ определим функцию $z^i \in C^1\left([0, 2\pi], \mathbb{R}^2_*\right)$ с помощью равенства

$$z^i(t) \equiv z(2\pi(i-1) + t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Лемма 3.3. *Для некоторой линейной системы* (3.6) *с условиями* (3.7) *при любых* $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *и* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant 1$ *найдется возмущенная система вида* (3.5)*, обладающая свойствами*

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \mid x_0 \in G_{\gamma_1} \cup G_{\gamma_2}\} = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \tag{3.49}$$

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \mid x_0 \in G_{\gamma_1, \gamma_2}\} = \{q\}, \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *. \tag{3.50}$$

Доказательство леммы 3.3. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (3.6), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2$ в виде

$$\dot{x} = \zeta(t) I x \equiv f_\prime(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \sin t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной угловой скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$ за время t равен

$$\Theta(x_{f_\prime}(\cdot, x_0), t) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos t) \in [0, \pi]\,,$$

а значит, справедливы равенства

$$x_{f_\prime}(t_k, x_0) = (-1)^{k-1} x_{f_\prime}(t_1, x_0), \quad t_k \equiv \pi(k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$ решение $x_{f_\prime}(\cdot, x_0)$, совершая поворот на угол π, будет ортогонально в одной точке заданному ненулевому вектору. Беря во внимание, что угол между векторами $x_{f_\prime}(\cdot, x_0)$ и $m_0 = x_{f_\prime}(\pi/2, x_0)$ заключен в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и функция $\dot{x}_{f_\prime}(\cdot, x_0)$ обнуляется только в точках t_k, приходим к отсутствию нестрогих смен знака у скалярной функции $\langle x_{f_\prime}(\cdot, x_0), m_0 \rangle$. Следовательно, при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено

$$\nu^-(x_{f_\prime}(\cdot, x_0), m_0, t) = \nu^\sim(x_{f_\prime}(\cdot, x_0), m_0, t) = 0,$$

откуда следует свойство

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \nu^\sim(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \{0\}.$$

Для любого вектора $m \nparallel m_0$ функция $\langle x_{f_\prime}(\cdot, x_0), m \rangle$ не имеет кратных нулей и на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$ длины π имеет один нуль, а значит, выполняется свойство

$$\nu^0(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \nu^+(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \nu^*(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \{1\}.$$

2. На отрезке $r \in [0, 3]$ при любых значениях параметров $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant 3$ зададим функции

$$\delta(r, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{r^2(r-\gamma_1)^2(r-\gamma_2)^2}{(r+\gamma_1)^2(r^2+100)^2}, \quad \psi_\pm(r, \gamma_1, \gamma_2) \equiv 1 \pm \frac{\delta(r, \gamma_1, \gamma_2)}{\pi} \in \left(0, \frac{3}{2}\right).$$

Для нелинейной периодической системы

$$\dot{x} = \psi_-(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_\prime(t, x) \equiv g(t, x)$$

при любых $t \in \mathbb{R}_+$ и $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$ имеем

$$\Theta(x_g(\cdot, x_0), t) = \psi_-(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)\frac{\pi}{2}(1 - \cos t) \in [0, \pi - \delta(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)] \subset [0, \pi)\,.$$

Скалярное произведение решения $x_g(t, x_0) = |x_0|(\cos\varphi_g(t), \sin\varphi_g(t))^\top$, совершающего поворот менее чем на π, и вектора $m_g = (\cos\psi_g, \sin\psi_g)^\top$, где

$\psi_g = \varphi_g(0) + \pi/2 - \delta(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)/2$, отлично от нуля. Поэтому для значения $q = 0$ выберем нелинейную систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \gamma_1 \vee |x| \geqslant \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_-(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_\prime(t,x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

3. Для нелинейной периодической системы $\dot{x} = \psi_+(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_\prime(t,x) \equiv h(t,x)$ будем иметь

$$\{\Theta(x_h(\cdot, x_0), t) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset [0, \pi + \delta(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)] \supset [0, \pi], \quad \gamma_1 < |x_0| < \gamma_2.$$

На каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_h(t, x_0) = |x_0|(\cos\varphi_h(t), \sin\varphi_h(t))^\top$, совершая поворот не менее чем на π (но менее чем на $3\pi/2$), будет ортогонально в одной или двух точках наперед заданному ненулевому вектору. Следовательно, для вектора $m_h = (\cos\psi_h, \sin\psi_h)^\top$, где $\psi_h = \varphi_h(0) + \pi/2 - \delta(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)/2$, и любых $k \in \mathbb{N}$, $\alpha = -, \sim, 0, +, *$, выполнены соотношения

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m, t_k, t_{k+1}) = \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m_h, t_k, t_{k+1}) = 1,$$

на основании которых будем иметь

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(x_h(\cdot, x_0)) = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m, t) =$$

$$= \varliminf_{k \to +\infty} \frac{\pi}{t_k} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \sum_{i=2}^{k} \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m, t_{i-1}, t_i) =$$

$$= \varliminf_{k \to +\infty} \frac{\pi}{t_k} \sum_{i=2}^{k} \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m_h, t_{i-1}, t_i) = \varliminf_{k \to +\infty} \frac{\pi(k-1)}{\pi(k-1)} = 1,$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_h(\cdot, x_0)) = \inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m, t_k) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^\alpha(x_h(\cdot, x_0), m_h, t_k) = 1.$$

Таким образом, с учетом замечания 1.4 для значения $q = 1$ выберем систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \gamma_1 \vee |x| \geqslant \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_\prime(t,x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

4. Теперь убедимся в том, что значению $q = l_1/(l_1 + l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, соответствует система

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \gamma_1 \vee |x| \geqslant \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_\prime(t,x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in [0, 2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_\prime(t,x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in [2\pi l_1, 2\pi(l_1 + l_2)], \end{cases}$$

где в кольце $\gamma_1 < |x| < \gamma_2$ функция $f(t,x)$ периодически (с периодом $T = 2\pi(l_1+l_2)$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Действительно, при любом $x_0 \in G_{\gamma_1,\gamma_2}$ для решения $x_f(t,x_0) = |x_0|(\cos\varphi_f(t), \sin\varphi_f(t))^\top$ найдется такой вектор $m_f = (\cos\psi_f, \sin\psi_f)^\top$, где $\psi_f = \varphi_f(0)+\pi/2-\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)/2$, что при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ выполнены соотношения

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m, (k-1)T, kT) = \nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m_f, (k-1)T, kT) = 2l_1.$$

Справедливость равенств (3.50) гарантируют следующие соотношения (см. замечание 1.4):

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot,x_0)) = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m, t) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \frac{\pi}{pT}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m, pT) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m, (i-1)T, iT) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m_f, (i-1)T, iT) =$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{2p\pi(l_1+l_2)}\sum_{i=1}^{p} 2l_1 = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{2p\pi l_1}{2p\pi(l_1+l_2)} = \frac{l_1}{l_1+l_2},$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot,x_0)) = \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m, t) \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m_f, t) =$$

$$= \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\pi}{pT}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m_f, pT) =$$

$$= \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0), m_f, (i-1)T, iT) = \frac{l_1}{l_1+l_2}.$$

Лемма 3.3 доказана.

Теперь перейдем к доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 3.8. I. Пусть задано бесконечное подмножество $X \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Занумеровав все рациональные числа из множества X натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем следующую последовательность

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \ldots; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k; \ldots,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Множество $0<|x|<1$ разобьем на счетное число колец вида

$$\gamma_{k+1}<|x|<\gamma_k, \quad \gamma_k=2^{1-k}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.52}$$

Далее, выберем линейную систему (3.51) и, на основании леммы, модифицируем в каждом кольце (3.52) так, чтобы при любом $k\in\mathbb{N}$ выполнялись равенства

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0)) \mid x_0\in G_{\gamma_{k+1},\gamma_k}\}=\{q_k\}, \quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}.$$

В кольце $1\leqslant|x|<+\infty$ и на каждой окружности $|x|=\gamma_k$, $k\in\mathbb{N}$, линейную систему (3.51) оставляем без изменения, поэтому

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0)) \mid x_0\in G_{\gamma_k}\cup G_{1,+\infty}\}=\{0\}, \quad \alpha\in\{-,\sim\},$$

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0)) \mid x_0\in G_{\gamma_k}\cup G_{1,+\infty}\}=\{1\}, \quad \alpha\in\{0,+,*\}.$$

Таким образом, установили справедливость (3.8) и из условия $\gamma_k\to 0$ при $k\to+\infty$ следует равенство

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0)) \mid 0<|x_0|<\varepsilon\}=\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f))$$

при любых $\varepsilon>0$ и $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$.

II. Пусть задано непустое конечное подмножество $X=\{s_1,s_2,\ldots,s_N\}\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

Сначала определим первые $T=\frac{N^2+N}{2}$ членов последовательности $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$

$$q_1=s_1, \quad q_2=s_1, \quad q_3=s_2, \quad q_4=s_1, \quad q_5=s_2, \quad q_6=s_3,\ldots,$$

$$q_{T-N+1}=s_1, \quad q_{T-N+2}=s_2, \quad q_{T-N+3}=s_3,\ldots,q_T=s_N,$$

а последующие члены – с помощью условия периодичности $q_{i+T}=q_i$, $i\in\mathbb{N}$. Далее повторяются рассуждения из п. I настоящего доказательства.

III. Теперь рассмотрим случай $X=[0,1]$.

1. Определим вектор функцию с помощью равенств

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}\psi_-(|x|,0,\theta_i)\cdot f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i, \quad t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,1)\cdot f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant 1, \quad t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,1,2)\cdot f_\prime(t,x), & 1<|x|\leqslant 2, \quad t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_+(|x|,2,3)\cdot f_\prime(t,x), & 2<|x|<3, \quad t\in\mathbb{R}_+,\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant 3, \quad t\in\mathbb{R}_+,\end{cases} \tag{3.53}$$

где $\theta_i=\{ie\}$, $\quad \tau_i=2\pi(i-1)$, $\quad i\in\mathbb{N}$.

Каждому начальному значению $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$ поставим в соответствие единственное $\theta > 0$ по правилу $|x_0| = \theta$. Тогда из (3.53) при $0 < |x_0| < 1$ следует, что для каждого $\theta \in (0,1)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0,\theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta,1), \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{3.54}$$

2. Для каждого значения $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$, лежащего в кольце $2 < |x_0| < 3$, выполнено (см. (3.53)) включение $x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_1$, $i \in \mathbb{N}$, а значит, для любого символа $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ справедлива цепочка равенств

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot,x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot,x_0)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot,x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot,x_0)) = 1.$$

Для каждого значения $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$, лежащего в кольце $1 < |x_0| < 2$, выполнено (см. (3.53)) включение $x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_0$, $i \in \mathbb{N}$, а значит, при любом значении $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ справедлива цепочка равенств

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot,x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot,x_0)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot,x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot,x_0)) = 0.$$

3. Покажем, что при любом $\theta \in (0,1)$ для всех соответствующих решений $x_f = x_f(\cdot, x_0)$ выполняется

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x_f) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f) = \theta, \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}. \tag{3.55}$$

а). Для всех $u \in \mathcal{A}_1$ и любого $m \in \mathbb{R}^2_*$ при каждом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ верна (см. п.3 доказательства леммы 3.3) оценка $\nu^\alpha(u,m,2\pi) \geqslant 2$. Поэтому для любого момента времени $t > 0$ на основании соотношений (3.54) будем иметь

$$\nu^\alpha(x_f,m,t) \geqslant \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \nu^\alpha(x_f^i,m,2\pi) \geqslant 2\sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i),$$

откуда, используя замечание 3.4, выведем оценку снизу

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(x_f) = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f,m,t) \geqslant \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \frac{2\pi}{t}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) =$$

$$= \varliminf_{t\to+\infty} \frac{2\pi}{t}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\pi[t/2\pi]}{t} \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{[t/2\pi]}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \theta.$$

б). Для всех функций x_f^i, $i \in \mathbb{N}$, найдется (см. пп. 2 и 3 доказательства леммы 3.3) такой вектор $m' \in \mathbb{R}^2_*$, что при любом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ верно соответствующее равенство

$$\nu^\alpha(x_f^i,m',2\pi) = \begin{cases} 0, & x_f^i \in \mathcal{A}_0, \\ 2, & x_f^i \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$$

Опираясь на соотношения (3.54), для любого $t > 0$ получим представление

$$\nu^{\alpha}(x_f, m', t) = 2\sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) + \nu^{\alpha}\left(x_f^{[t/2\pi]+1}, m', \left\{\frac{t}{2\pi}\right\}2\pi\right),$$

а затем, снова используя замечание 3.4, вычислим предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x_f, m', t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi}{t}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \theta, \quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}.$$

Из оценки снизу для нижних показателей колеблемости и последнего равенства получим цепочку соотношений

$$\theta \leqslant \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x_f) \leqslant \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x_f) = \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x_f, m, t) \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x_f, m', t) = \theta,$$

в которой все нестрогие неравенства являются равенствами (см. замечание 1.4) и тем самым справедливость цепочки равенств (3.55) установлена, а значит, равенства (3.8) также выполняются, и при любых $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ и $\varepsilon > 0$ множество $\{\nu^{\alpha}(x_f(\cdot,x_0)) \mid x_0 \in G_{0,\varepsilon}\}$ имеет мощность континуума.

Теорема 3.8 доказана.

Доказательство теоремы 3.9. Фиксируем прозвольный интервал $(a,b) \subset [0,1]$ и обратимся к п. III доказательства теоремы 3.8.

1. Если $0 = a < b < 1$, то выбираем систему $\dot{x} = f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} \psi_-(|x|,0,\theta_i)\cdot f_{\prime}(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i<b, & t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,b)\cdot f_{\prime}(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant b, & t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,0,b)\cdot f_{\prime}(t,x), & 0\leqslant|x|<b\leqslant\theta_i, & t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,b,\theta_i)\cdot f_{\prime}(t,x), & b<|x|\leqslant\theta_i, & t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,\theta_i,1)\cdot f_{\prime}(t,x), & b<\theta_i<|x|<1, & t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,b,1)\cdot f_{\prime}(t,x), & \theta_i<b<|x|<1, & t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_{\prime}(t,x), & |x|\geqslant 1, & t\in\mathbb{R}_+, \end{cases} \qquad i\in\mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot,x_0)$ этой системы при каждом $\theta\in(0,b)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot,x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i\in(0,\theta),\\ \mathcal{A}_0, & \theta_i\in(\theta,b)\cup(b,1), \end{cases} \qquad i\in\mathbb{N}.$$

2. Если $0 < a < b = 1$, то выбираем систему $\dot{x} = f(t, x)$ с правой частью

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} \psi_+(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_\prime(t,x), & 0 \leqslant |x| \leqslant \theta_i < a, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, a) \cdot f_\prime(t,x), & \theta_i < |x| \leqslant a, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, 0, a) \cdot f_\prime(t,x), & 0 \leqslant |x| < a \leqslant \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, a, \theta_i) \cdot f_\prime(t,x), & a < |x| \leqslant \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_\prime(t,x), & a < \theta_i < |x| < 1, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, a, 1) \cdot f_\prime(t,x), & \theta_i < a < |x| < 1, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_\prime(t,x), & |x| \geqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot, x_0)$ этой системы при каждом $\theta \in (a, 1)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0, a) \cup (a, \theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, 1), \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

3. Если $0 < a < b < 1$, то выбираем систему $\dot{x} = f(t, x)$ с правой частью

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} \psi_+(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_\prime(t,x), & 0 \leqslant |x| \leqslant \theta_i < a, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, a) \cdot f_\prime(t,x), & \theta_i < |x| \leqslant a, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, 0, a) \cdot f_\prime(t,x), & 0 \leqslant |x| < a \leqslant \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, a, \theta_i) \cdot f_\prime(t,x), & a < |x| \leqslant \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, b) \cdot f_\prime(t,x), & a < \theta_i < |x| \leqslant b, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, a, b) \cdot f_\prime(t,x), & \theta_i < a < |x| < b, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, a, b) \cdot f_\prime(t,x), & a < |x| < b < \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, b, \theta_i) \cdot f_\prime(t,x), & b < |x| \leqslant \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_\prime(t,x), & b < \theta_i < |x| < 1, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, b, 1) \cdot f_\prime(t,x), & \theta_i < b < |x| < 1, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_\prime(t,x), & |x| \geqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot, x_0)$ этой системы при каждом $\theta \in (a, b)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0, a) \cup (a, \theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, b) \cup (b, 1), \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

4. Если $a = 0, \quad b = 1$, то выбираем систему $\dot{x} = f(t, x)$ с правой частью

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} \psi_-(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \theta_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_\prime(t,x), & \theta_i < |x| < 1, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_\prime(t,x), & |x| \geqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot, x_0)$ этой системы при каждом $\theta \in (0, 1)$ выполнено включение (3.54).

Таким образом, каждый из рассмотренных четырех случаев на основании рассуждений, проведенных в п. III доказательства теоремы 3.8, приводит к равенствам (3.7) и (3.8).

Теорема 3.9 доказана.

Глава 4

Разрывность крайних показателей колеблемости на множестве дифференциальных систем

В данной главе изучены вопросы разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. Установлено существование точек на множестве дифференциальных систем, в которых все старшие и младшие показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней не только не являются непрерывными, но и не являются непрерывными ни сверху и ни снизу. Более того, доказана неинвариантность крайних показателей колеблемости относительно бесконечно малых возмущений [261, 321, 325], для чего также использован метод варьирования системы. При доказательстве результатов настоящей главы, отдельно рассмотрены случаи четности и нечетности порядка матрицы системы.

4.1 Обзор литературы и формулировка основных результатов

Как известно [34, 167, 256], показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней линейной дифференциальной системы совпадают в автономном случае с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы. В силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов следует, что сужение любой из крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство $\mathcal{C}^n \subset \tilde{\mathcal{M}}^n$ есть непрерывная функция.

Кроме того, непрерывность крайних показателей колеблемости наблюдается и на топологичеком подпространстве $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{M}^2$ (см. [171, 174]).

В работе [271] на множестве $\mathcal{M}^2$ были найдены не только точки разрыва, но и точки неинвариантности крайних показателей колеблемости нулей относительно возмущений, исчезающих на бесконечности. Утверждения и рассуждения, проводимые в этой работе, справедливы и для крайних показателей колеблемости корней. Аналогичное свойство для показателей колеблемости гиперконей было установлено И.Н. Сергеевым в [184].

Поиски точек разрыва и неинвариантности относительно бесконечно малых возмущей при $n > 2$ на множестве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ для некоторых отдельных крайних частот продолжались в работах [279, 287, 294].

В связи с этим возникает естественный вопрос: можно ли для любого $n > 2$ в пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ указать точки разрыва или неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для крайних показателей колеблемости. Ответ на этот вопрос оказался положительным, как показывает следующая

Теорема 4.1. Для любого $n > 2$ в пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ существует система, в которой ни один из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.

4.2 Выбор вспомогательных функций

В этом разделе выбираются функций, которые будем использовать в данной главе.

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Возьмем 2π периодические непрерывно-дифференцируемые функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$, возрастающие на отрезках $[0,\, \pi/2]$, $[3\pi/2,\, 2\pi]$, убывающие на $[\pi/2,\, 3\pi/2]$, а на концах указанных промежутков принимающие значения

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = \psi(2\pi) = 0,$$

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(2\pi) = \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(2\pi) = 0,$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = \varphi_1(2\pi) = \psi_1(0) = \psi_1(\pi) = \psi_1(2\pi) = 0,$$

$$\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_1(2\pi) = \dot{\psi}_1(0) = \dot{\psi}_1(2\pi) = 0,$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \psi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad \varphi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\psi_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=\psi_1\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2},\quad \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-\varepsilon,\quad \psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,$$
$$\dot\varphi(t)\cdot\dot\psi(t)\cdot\dot\varphi_1(t)\cdot\dot\psi_1(t)\neq 0,\quad \forall\, t\in(0,\,\pi/2)\cup(\pi/2,\,3\pi/2)\cup(3\pi/2,\,2\pi),$$
$$\ddot\varphi(2\pi(k-1))\cdot\ddot\psi(2\pi(k-1))\cdot\ddot\varphi_1(2\pi(k-1))\cdot\ddot\psi_1(2\pi(k-1))\neq 0.$$

Далее, на $\mathbb{R}_+$ выбираем непрерывно-дифференцируемые функций $\phi(t),\phi_1(t)$, возрастающие при каждом $k\in\mathbb{N}$ на промежутках

$$I_{k-1}\equiv(2\pi(k-1),\,2\pi(k-1)+\pi/2),\quad I_{k+1}\equiv(2\pi(k-1)+3\pi/2,\,2\pi(k-1)+2\pi),$$

убывающие на

$$I_k\equiv(2\pi(k-1)+\pi/2,\,2\pi(k-1)+3\pi/2),$$

а на концах указанных промежутков принимающие значения

$$\phi(\pi k)=\dot\phi(2\pi(k-1))=\phi_1(\pi k)=\dot\phi_1(2\pi(k-1))=0,$$
$$\ddot\phi(2\pi(k-1))\cdot\ddot\phi_1(2\pi(k-1))\neq 0,$$
$$\dot\phi(t)\cdot\dot\phi_1(t)\neq 0,\quad \forall\, t\in I_{k-1}\cup I_k\cup I_{k+1},$$
$$\phi(2\pi(k-1)+\pi/2)=\pi/2-\varepsilon_k,\quad \phi(2\pi(k-1)+3\pi/2)=-\pi/2+\varepsilon_k,$$
$$\phi_1(2\pi(k-1)+\pi/2)=\pi-\varepsilon_k,\quad \phi_1(2\pi(k-1)+3\pi/2)=-\pi/2+\varepsilon_k,$$
$$\phi_1(2\pi(k-1)+\pi/4)=\phi_1(2\pi(k-1)+3\pi/4)=\pi/2,$$

где (ε_k) - последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю.

Эти функций подберем так, чтобы для некоторых $l_1,l_2,l_3,l_4\in\mathbb{R}_+$ выполнялись условия

$$|\dot\psi(t)-\dot\varphi(t)|\leqslant l_1\varepsilon,\quad t\in[0,\,2\pi],\tag{4.1}$$
$$|\dot\psi_1(t)-\dot\varphi_1(t)|\leqslant l_2\varepsilon,\quad t\in[0,\,2\pi],\tag{4.2}$$
$$|\dot\phi(t)-\dot\varphi(t)|\leqslant l_3\varepsilon_k,\quad t\in[2\pi(k-1),\,2\pi k],\quad k\in\mathbb{N},\tag{4.3}$$
$$|\dot\phi_1(t)-\dot\varphi_1(t)|\leqslant l_4\varepsilon_k,\quad t\in[2\pi(k-1),\,2\pi k],\quad k\in\mathbb{N}.\tag{4.4}$$

Теперь определим последовательность промежутков

$$\Delta_k\equiv(2(k-1)\pi,\,2k\pi],\quad k\in\mathbb{N}$$

и зададим следующие функции

$$\gamma(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in\Delta_1,\\ \psi(t), & t\in\Delta_2,\\ \varphi(t), & t\in\Delta_3,\\ \psi(t), & t\in\Delta_4,\\ \quad\dots, & \end{cases}\qquad \gamma_1(t)=\begin{cases}\varphi_1(t), & t\in\Delta_1,\\ \psi_1(t), & t\in\Delta_2,\\ \varphi_1(t), & t\in\Delta_3,\\ \psi_1(t), & t\in\Delta_4,\\ \quad\dots & \end{cases}$$

4.3 Разрывность показателей колеблемости четномерных систем

В этом разделе доказывается утверждение о разрывности крайних показателей колеблемости на множестве $\mathcal{M}^n$ при любом четном $n \geqslant 2$.

Утверждение 4.1. *Для любого четного $n \geqslant 2$ в пространстве $\mathcal{M}^n$ существует точка, в которой ни один из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Доказательство. 1. Возьмем произвольное, но фиксированное четное $n \geqslant 2$. Нетрудно проверить, что матрица

$$X_n = \left(x_n^1, \ldots, x_n^n\right) = \begin{pmatrix} \cos\psi(t) & -\sin\psi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\psi(t) & \cos\psi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \cos\psi(t) & -\sin\psi(t) \\ 0 & 0 & \ldots & \sin\psi(t) & \cos\psi(t) \end{pmatrix}$$

является фундаментальной для системы

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\psi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \dot\psi(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & -\dot\psi(t) \\ 0 & 0 & \ldots & \dot\psi(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

Пусть в общем решении $x_c = c_1 x_n^1(t) + c_2 x_n^2(t) + \cdots + c_n x_n^n(t) \in \mathcal{S}_*(A_n)$ ненулевой коэффициент имеет вид: c_{2k-1} или c_{2k}. Тогда для вектора

$$m^c = (0, \ldots, 0, c_{2k-1}, c_{2k}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_*$$

скалярное произведение $\langle x_c(t), m^c \rangle \neq 0$ при любом $t > 0$, поэтому

$$\nu_\circ^0(x_c) = \nu_\circ^+(x_c) = \nu_\circ^*(x_c) = \nu_\bullet^0(x_c) = \nu_\bullet^+(x_c) = \nu_\bullet^*(x_c) = 0.$$

Следовательно, все старшие и младшие показатели колеблемости равны нулю.

2. Все рассуждения предыдущего пункта повторяются и для фундамен-

тальной матрицы

$$Y_n = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \sin\phi(t) & \cos\phi(t) \end{pmatrix}$$

системы

$$B_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\phi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dot\phi(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\dot\phi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \dot\phi(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

3. Возьмем фундаментальную матрицу

$$Z_n = \left(z_n^1, \dots, z_n^n\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$

системы

$$C_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\varphi(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dot\varphi(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\dot\varphi(t) \\ 0 & 0 & \dots & \dot\varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

Для любых $z_c = c_1 z_n^1(t) + c_2 z_n^2(t) + \dots + c_n z_n^n(t) \in \mathcal{S}_*(C_n)$ и $m \in \mathbb{R}^n_*$ скалярное произведение $\langle z_c(t), m\rangle = h\sin(\varphi(t) + \varphi_0)$ тождественно равно нулю или имеет на каждом промежутке вида $(2\pi(k-1), 2\pi k]$ два нуля. Поэтому в последнем случае остается следить за тем, чтобы эти нули не были кратными. Если один из коэффициентов c_{2k-1} или c_{2k} отличен от нуля, то выбираем вектор вида $m^1 = (0, \dots, 0, m_{2k-1}, m_{2k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n_*$. Понятно, что решение z_c является 2π периодическим и

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(z_c, m, 2\pi) = \nu^\alpha(z_c, m^1, 2\pi) = 2, \quad \alpha \in \{0, +, *\},$$

где векторы m^1 и m^c не являются пропорциональными, так как $\nu^*(z_c, m^c, 2\pi) = +\infty$.

Следовательно, для выбранного решения при любом $\alpha \in \{0, +, *\}$ справедливы равенства

$$\nu_\circ^\alpha(z_c) = \lim_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m, t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m^1, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2\pi k}\nu^\alpha(z_c, m^1, 2\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{2\pi k} = 1,$$

$$\nu_\bullet^\alpha(z_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m, t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(z_c, m^1, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2\pi k}\nu^\alpha(z_c, m^1, 2\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{2\pi k} = 1.$$

4. Система

$$D_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\gamma(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dot\gamma(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & -\dot\gamma(t) \\ 0 & 0 & \dots & \dot\gamma(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n$$

вместе с фундаментальной матрицей

$$U_n = \left(u_n^1, \dots, u_n^n\right) = \begin{pmatrix} \cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t) & 0 & \dots & 0 \\ \sin\gamma(t) & \cos\gamma(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t) \\ 0 & 0 & \dots & \sin\gamma(t) & \cos\gamma(t) \end{pmatrix}$$

является 4π периодической.

Для любых $u_c = c_1 u_n^1(t) + c_2 u_n^2(t) + \dots + c_n u_n^n(t) \in \mathcal{S}_*(D_n)$ и $m \in \mathbb{R}^n_*$ скалярное произведение $\langle u_c(t), m\rangle = h\sin(\gamma(t) + \gamma_0)$ также является 4π периодическим и на промежутке $(2\pi, 4\pi]$ тождественно равно нулю или не имеет вовсе нулей или имеет два нуля. Тогда если один из коэффициентов c_{2k-1} или c_{2k} отличен от нуля, то выбираем вектор вида $m^2 = (0, \dots, 0, m_{2k-1}, m_{2k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n_*$, чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(u_c, m, 2\pi, 4\pi) = \nu^\alpha(u_c, m^2, 2\pi, 4\pi) = 0, \quad \alpha \in \{0, +, *\},$$

при этом вектор m^2 можно выбрать непропорциональным вектору m^c. Поэтому

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(u_c, m, 4\pi) = \nu^\alpha(u_c, m^2, 4\pi) = 2, \quad \alpha \in \{0, +, *\}.$$

Следовательно, для выбранного решения при любом $\alpha \in \{0, +, *\}$ справедливы равенства

$$\nu^{\alpha}_{\bullet}(u_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(u_c, m, t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(u_c, m^2, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{4\pi k}\nu^{\alpha}(u_c, m^2, 4\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{4\pi k} = 1/2,$$

$$\nu^{\alpha}_{\circ}(u_c) = \lim_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(u_c, m, t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(u_c, m^2, t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{4\pi k}\nu^{\alpha}(u_c, m^2, 4\pi k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi k}{4\pi k} = 1/2.$$

5. Из условия (4.1) и оценок

$$\|D - A\| = \max_{t\in\mathbb{R}_+} |D(t) - A(t)| =$$

$$= \max_{t\in\mathbb{R}_+} \sqrt{(\dot\gamma(t) - \dot\psi(t))^2 + (-\dot\gamma(t) + \dot\psi(t))^2} = \sqrt{2} \max_{t\in\mathbb{R}_+} |\dot\gamma(t) - \dot\psi(t)| \leqslant 2\sqrt{2}\varepsilon,$$

$$\|D - C\| = \max_{t\in\mathbb{R}_+} |D(t) - C(t)| = \sqrt{2} \max_{t\in\mathbb{R}_+} |\dot\gamma(t) - \dot\varphi(t)| \leqslant 2\sqrt{2}\varepsilon$$

следует, что возмущения $D - A$, $D - C$ являются равномерно малыми. Поэтому в любой достаточно малой окрестности системы D, все крайние показатели колеблемости которого равны $1/2$, найдутся системы вида A, C с нулевыми и единичными крайними показателями колеблемости соответственно. Последнее означает не только разрывность всех крайних показателей колеблемости в точке D но и то, что все они в этой же точке D не являются ни полунепрерывными снизу, ни полунепрерывными сверху.

6. Возмущение $D - B$ является бесконечно малым при $t \to +\infty$ поскольку на основании оценки (4.3) имеем

$$\lim_{t\to+\infty} |D(t) - B(t)| = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{(\dot\phi(t) - \dot\gamma(t))^2 + (-\dot\phi(t) + \dot\gamma(t))^2} =$$

$$= \sqrt{2} \lim_{t\to+\infty} |\dot\phi(t) - \dot\gamma(t)| = 0,$$

но соответствующие крайние показатели колеблемости систем B и D не совпадают. Последнее означает, что все крайние показатели колеблемости не являются инвариантными в точке D.

Утверждение 4.1 доказано.

4.4 Разрывность старших показателей колеблемости на множестве систем

В этом разделе докажем утверждение о разрывности старших показателей колеблемости на множестве $\mathcal{M}^n$ при любом $n \geqslant 3$.

Утверждение 4.2. *Для любого $n \geqslant 3$ в пространстве $\mathcal{M}^n$ существует точка, в которой ни один из старших показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Доказательство. 1. Для заданного $k \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R}_+$ выберем n-мерные $(n = k+2)$ вектор-функций

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, x^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, x^k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^{k+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\psi(t) \\ \sin\psi(t) \end{pmatrix}, \quad x^{k+2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\psi(t) \\ \cos\psi(t) \end{pmatrix},$$

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\phi(t) \\ \sin\phi(t) \end{pmatrix}, \quad y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\phi(t) \\ \cos\phi(t) \end{pmatrix},$$

$$z^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}, \quad z^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix},$$

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\gamma(t) \\ \sin\gamma(t) \end{pmatrix}, \quad u^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\gamma(t) \\ \cos\gamma(t) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрицы

$$X(t) = \left(x^1(t), \dots, x^{k+2}(t)\right), \quad Y(t) = \left(x^1(t), \dots, x^k(t), y^1(t), y^2(t)\right),$$

$$Z(t) = \left(x^1(t), \dots, x^k(t), z^1(t), z^2(t)\right), \quad U(t) = \left(x^1(t), \dots, x^k(t), u^1(t), u^2(t)\right)$$

являются фундаментальными для следующих систем

$$A(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\psi}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\psi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n,$$

$$B(t) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\phi}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\phi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n,$$

$$C(t) = \dot{Z}(t)Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\varphi}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\varphi}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n,$$

$$D(t) = \dot{U}(t)U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & -\dot{\gamma}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \dot{\gamma}(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n$$

соответственно.

2. Пусть выполняется условие $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 > 0$ и номер первого отличного от нуля коэффициента равен r. Тогда для произвольного решения

$$x_c = c_1 x^1(t) + \dots + c_k x^k(t) + c_{k+1} x^{k+1}(t) + c_{k+2} x^{k+2}(t) \in \mathcal{S}_*(A)$$

и вектора m^r с ненулевыми компонентами, за исключением r-го, выполняются равенства

$$\nu^0(x_c, m^r, t) = \nu^+(x_c, m^r, t) = \nu^*(x_c, m^r, t) = 0$$

при любом $t > 0$.

Если $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, $c_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 \neq 0$, то для решения $x_c = c_{k+1}x^{k+1}(t) + c_{k+2}x^{k+2}(t)$ справедлива цепочка равенств (см. п.1 доказательства утверждения 4.1)

$$\nu_\bullet^0(x_c) = \nu_\bullet^+(x_c) = \nu_\bullet^*(x_c) = \nu_\circ^0(x_c) = \nu_\circ^+(x_c) = \nu_\circ^*(x_c) = 0.$$

из которой при любом $\varkappa = \nu_\bullet^0, \nu_\bullet^+, \nu_\bullet^*, \nu_\circ^0, \nu_\circ^+, \nu_\circ^*$ вытекает $\varkappa_n(A) = 0$.

3. Аналогичные рассуждения приводят к равенствам

$$\varkappa_n(B) = 0, \quad \varkappa_n(C) = 1, \quad \varkappa_n(D) = 1/2$$

при каждом $\varkappa = \nu_\bullet^0, \nu_\bullet^+, \nu_\bullet^*, \nu_\circ^0, \nu_\circ^+, \nu_\circ^*$.

4. Далее, повторяя рассуждения из пп. 5 и 6 доказательства утверждения 4.1, завершаем доказательство настоящего утверждения.

Утверждение 4.2 доказано.

Замечание 4.1. Все младшие показатели колеблемости построенных систем $C, D \in \mathcal{M}^n$ равны нулю.

4.5 Разрывность младших показателей колеблемости нечетномерных систем

В этом разделе докажем разрывность младших показателей колеблемости при любом нечетном порядке матрицы дифференциальной системы.

Утверждение 4.3. *При любом нечетном $n \geqslant 3$ каждый из младших показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней хотя бы в одной точке пространства $\tilde{\mathcal{M}}^n$ не является ни непрерывной, ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу, ни инвариантной относительно бесконечно малых возмущений.*

Доказательство. Сначала установим справедливость утверждения при $n = 3$.

1. Выбираем фундаментальную матрицу

$$X_3(t) = \bigl(x_3^1(t), x_3^2(t), x_3^3(t)\bigr) = \begin{pmatrix} e^t\cos^2\psi_1(t) & e^{3t}\sin\psi_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t}\cos\psi_1(t) & e^{2t}\sin^2\psi_1(t) \\ e^t\sin\psi_1(t) & 0 & e^{2t}\cos\psi_1(t) \end{pmatrix}$$

некоторой системы $A_3 \in \tilde{\mathcal{M}}^3$ и для каждого решения

$$x_c(t) = c_1 x_3^1(t) + c_2 x_3^2(t) + c_3 x_3^3(t) \in \mathcal{S}_*(A_3)$$

подберем соответствующий вектор, которому оно реже всего будет ортогонально.

а). Для решения $x_3^1 \in \mathcal{S}_*(A_3)$ и произвольного вектора $m = (m_1, m_2, m_2) \in \mathbb{R}^3_*$ справедливо разложение

$$\langle x_3^1, m\rangle = e^t(m_1 \cos^2\psi_1(t) + m_3 \sin\psi_1(t)) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad m_1 = m_3 = 0, \\ e^t(-m_1 \sin^2\psi_1(t) + m_3 \sin\psi_1(t) + m_1). \end{cases}$$

Если $m_1 = 0$ и $m_3 \neq 0$, то при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\nu^0(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 2, \quad \nu^+(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 3,$$

$$\nu^*(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = +\infty.$$

Если $m_3 = 0$ и $m_1 \neq 0$, то при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\nu^0(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 2, \quad \nu^+(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 4,$$

$$\nu^*(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = +\infty.$$

Если $m_1 \cdot m_3 \neq 0$, то равенство $\langle x_3^1, m\rangle = 0$ равносильно квадратному уравнению относительно $\sin\psi_1(t)$:

$$\sin^2\psi_1(t) - \frac{m_3}{m_1}\sin\psi_1(t) - 1 = 0.$$

Заметим, что оно имеет два корня, причем один из них по модулю больше 1, а другой меньше 1. С другой стороны, из условия $\varepsilon - \pi/2 \leqslant \psi_1(t) \leqslant \pi - \varepsilon$ следует двусторонняя оценка

$$-\cos\varepsilon \leqslant \sin\psi_1(t) \leqslant 1, \quad -\cos\varepsilon \leqslant \cos\psi_1(t) \leqslant 1.$$

Число δ_1 выберем так, чтобы выполнялось равенство $\cos\varepsilon = 1 - \delta_1$. Через $S_1(\delta)$ и $S_2(\delta)$ обозначим множество векторов $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3_*$ единичной сферы, удовлетворяющих соответственно условию $m_3 = \delta m_1$ и $m_3 = \delta m_2$ при $\delta \in (0, \delta_1)$.

Для решения x_3^1 и любого вектора $m \in S_1(\delta)$ меньший по модулю 1 корень квадратного уравнения (получаемого из условия $\langle x_3^1, m\rangle = 0$) $\sin^2\psi_1(t) - \delta\sin\psi_1(t) - 1 = 0$ относительно $\sin\psi_1(t)$ удовлетворяет соотношению

$$-1 < \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + 4}}{2} < \delta - 1 < \delta_1 - 1 = -\cos\varepsilon.$$

Поэтому скалярное произведение $\langle x_3^1, m\rangle$ не будет иметь нулей на $\mathbb{R}_+$.

Для решения x_3^3 и вектора $m \in S_2(\delta)$ проводятся аналогичные рассуждения. Следовательно, при каждом $\alpha \in \{0,+,*\}$ выполняются соотношения

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = \nu^\alpha(x_3^1, m_3^1(\delta), 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 0,$$

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_3^3, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = \nu^\alpha(x_3^3, m_3^3(\delta), 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 0,$$

из которых следует цепочка равенств

$$\nu_\circ^0(x_3^1) = \nu_\circ^+(x_3^1) = \nu_\circ^*(x_3^1) = \nu_\bullet^0(x_3^1) = \nu_\bullet^+(x_3^1) = \nu_\bullet^*(x_3^1) =$$
$$= \nu_\circ^0(x_3^3) = \nu_\circ^+(x_3^3) = \nu_\circ^*(x_3^3) = \nu_\bullet^0(x_3^3) = \nu_\bullet^+(x_3^3) = \nu_\bullet^*(x_3^3) = 0.$$

б). Решение x_3^2 вращается по часовой стрелке на угол $\pi-\varepsilon$, затем против часовой стрелки вращается на угол $1,5\pi - 2\varepsilon$, далее, возвращаясь назад, занимает исходное положение. За это время решение бывает ортогонольно не менее двух раз любому наперед заданному направлению. Поэтому при каждом $\alpha \in \{0,+,*\}$ и $m_3^2 = (0,1,0)$ имеет место

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_3^2, m, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = \nu^\alpha(x_3^2, m_3^2, 2(k-1)\pi, 2k\pi) = 2,$$

а значит, справедливы равенства

$$\nu_\circ^0(x_3^2) = \nu_\circ^+(x_3^2) = \nu_\circ^*(x_3^2) = \nu_\bullet^0(x_3^2) = \nu_\bullet^+(x_3^2) = \nu_\bullet^*(x_3^2) = 1.$$

в). Для остальных решений $x_c \in \mathcal{S}_*(A_3)$ при $c_2 \neq 0$ в силу теоремы 2 работы [177] найдутся такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in [0,\ \varepsilon]$, что при любом $t > 0$ для вектора $m_3^2(\varepsilon) = (\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ справедливо неравенство $\nu^*(x_c, m_3^2(\varepsilon), t) < +\infty$ и

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(x_c, m, t) = \nu^\alpha(x_c, m_3^2(\varepsilon), t), \quad \alpha \in \{0,+,*\}.$$

При этом функция $\nu^\alpha(x_c, m_3^2(\varepsilon), t)$ при $t \to +\infty$ эквивалентна $\nu^\alpha(x_3^2, m_3^2, t)$.

Если же $c_2 = 0$, то найдется вектор $m_3^3(\delta,\varepsilon) \in \mathbb{R}^3_*$ при котором функция $\nu^\alpha(x_c, m_3^3(\delta,\varepsilon), t)$ при $t \to +\infty$ будет эквивалентна функции $\nu^\alpha(x_3^3, m_3^3(\delta), t)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A_3)) = \{0; 1\}, \quad \varkappa = \nu_\circ^0, \nu_\bullet^0, \nu_\circ^+, \nu_\bullet^+, \nu_\circ^*, \nu_\bullet^*.$$

2. Все рассуждения предыдущего пункта полностью повторяются для слабых показателей колеблемости решений некоторой системы $B_3 \in \tilde{\mathcal{M}}^3$ с фундаментальной матрицей

$$Y_3(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos^2\phi_1(t) & e^{3t}\sin\phi_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t}\cos\phi_1(t) & e^{2t}\sin^2\phi_1(t) \\ e^t\sin\phi_1(t) & 0 & e^{2t}\cos\phi_1(t) \end{pmatrix}$$

за исключением тех случаев, когда векторы (на которых реализуется минимум) не зависят от δ. В остальных случаях к рассуждениям из предыдущего пункта добавляем условие $\delta \to 0$, поэтому

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(B_3)) = \{0; 1\}, \quad \varkappa = \nu^0_\circ, \nu^+_\circ, \nu^*_\circ.$$

3. Рассмотрим систему $C_3 \in \tilde{\mathcal{M}}^3$ с фундаментальной матрицей

$$Z_3(t) = \big(z^1_3(t), z^2_3(t), z^3_3(t)\big) = \begin{pmatrix} e^t \cos^2 \varphi_1(t) & e^{3t} \sin \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t} \cos \varphi_1(t) & e^{2t} \sin^2 \varphi_1(t) \\ e^t \sin \varphi_1(t) & 0 & e^{2t} \cos \varphi_1(t) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при изменении $\varphi_1(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ функции $\sin \varphi_1(t)$ и $\cos \varphi_1(t)$ принимают все значения из отрезка $[-1, 1]$.

Докажем, что для любого вектора $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3_*$ и произвольного решения

$$z_c(t) = c_1 z^1_3(t) + c_2 z^2_3(t) + c_3 z^3_3(t) \in \mathcal{S}_*(C_3)$$

скалярное произведение $\langle z_c, m\rangle$ либо тождественно равно нулю, либо имеет на каждом полуинтервале длины 2π не менее двух нулей, быть может начиная с некоторого достаточно большого момента времени.

а). В самом деле, для решения $z^3_3 \in \mathcal{S}_*(C_3)$ и произвольного вектора $m = (m_1, m_2, m_2) \in \mathbb{R}^3_*$ справедливо разложение

$$\langle z^3_3, m\rangle = e^{2t}(m_2 \sin^2 \varphi_1(t) + m_3 \cos \varphi_1(t)) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad m_2 = m_3 = 0, \\ e^{2t}(-m_2 \cos^2 \varphi_1(t) + m_3 \cos \varphi_1(t) + m_2). \end{cases}$$

Если $m_2 = 0$ и $m_3 \neq 0$, то функция $\langle z^3_3, m\rangle = m_3 e^{2t} \cos \varphi_1(t)$ на каждом полуинтервале длины 2π имеет 3 нуля, 4 корня и бесконечно много гиперкорней.

Если $m_2 \neq 0$ и $m_3 = 0$, то функция $\langle z^3_3, m\rangle$ на каждом полуинтервале длины 2π имеет 3 нуля, 10 корней и бесконечно много гиперкорней.

Если $m_2 \cdot m_3 \neq 0$, то равенство $\langle z^3_3, m\rangle = 0$ равносильно квадратному уравнению относительно $\cos \varphi_1(t)$

$$\cos^2 \varphi_1(t) - \frac{m_3}{m_2} \cos \varphi_1(t) - 1 = 0.$$

Заметим, что оно имеет два корня, причем один из них по модулю больше 1, а другой меньше 1, обозначим его через l.

Если вектор $m \in \mathbb{R}^3_*$ подобран так, что $0 < l < 1$, то справедливы равенства

$$\nu^0(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^+(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^*(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = 4.$$

Если вектор $m \in \mathbb{R}^3_*$ подобран так, что $-1 < l < 0$, то справедливы равенства

$$\nu^0(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^+(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = \nu^*(\cos\varphi_1(t) - l, m, 2\pi) = 2.$$

Для решения z_3^1 проводятся аналогичные рассуждения, а для решения z_3^2 повторяются рассуждения из пункта 1.б) настоящего доказательства. Следовательно, выполнены равенства

$$\nu_\circ^\alpha(z_3^1) = \nu_\bullet^\alpha(z_3^1) = \nu_\circ^\alpha(z_3^2) = \nu_\bullet^\alpha(z_3^2) = \nu_\circ^\alpha(z_3^3) = \nu_\bullet^\alpha(z_3^3) = 1.$$

Значения показателей колеблемости на остальных решениях $z_c \in \mathcal{S}_*(C_3)$ не меняются (см. пункт 1.в)). Таким образом, имеем

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(C_3)) = \{1\}, \quad \varkappa = \nu_\circ^0, \nu_\bullet^0, \nu_\circ^+, \nu_\bullet^+, \nu_\circ^*, \nu_\bullet^*.$$

4. Возьмем общее решение

$$u_c(t) = c_1 u_3^1(t) + c_2 u_3^2(t) + c_3 u_3^3(t)$$

некоторой системы $D_3 \in \tilde{\mathcal{M}}^3$ с фундаментальной матрицей

$$U_3(t) = \big(u_3^1(t), u_3^2(t), u_3^3(t)\big) = \begin{pmatrix} e^t\cos^2\gamma_1(t) & e^{3t}\sin\gamma_1(t) & 0 \\ 0 & e^{3t}\cos\gamma_1(t) & e^{2t}\sin^2\gamma_1(t) \\ e^t\sin\gamma_1(t) & 0 & e^{2t}\cos\gamma_1(t) \end{pmatrix}.$$

С помощью рассуждений, проводимых в пункте 1 настоящего доказательства, для решений $u_3^1(t), u_3^2(t), u_3^3(t)$ подберем векторы $m \in \mathbb{R}^3_*$, на которых реализуются минимумы в определениях показателей колеблемости:

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u_3^1, m, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = \nu^\alpha(u_3^1, m_3^1, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = 2,$$

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u_3^2, m, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = \nu^\alpha(u_3^2, m_3^2, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = 4,$$

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u_3^3, m, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = \nu^\alpha(u_3^3, m_3^3, 2(k-1)\pi, 2(k+1)\pi) = 2,$$

где $m_3^2 = (0,1,0)$. Откуда при любом $\alpha \in \{0,+,*\}$ следуют равенства

$$\nu_\circ^\alpha(u_3^1) = \nu_\bullet^\alpha(u_3^1) = \nu_\circ^\alpha(u_3^3) = \nu_\bullet^\alpha(u_3^3) = 0,5, \quad \nu_\circ^\alpha(u_3^2) = \nu_\bullet^\alpha(u_3^2) = 1.$$

Понятно, что новых значений показателей колеблемости на других решениях u_c, отличных от 0,5 и 1, не будет, поэтому

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(D_3)) = \{0,5;1\}, \quad \varkappa = \nu_\circ^0, \nu_\bullet^0, \nu_\circ^+, \nu_\bullet^+, \nu_\circ^*, \nu_\bullet^*.$$

5. Рассуждения из пп. 5 и 6 доказательства утверждения 4.1 завершают доказательство настоящего утверждения для младших слабых показателей колеблемости и частично для младших сильных показателей колеблемости. А именно, остается доказать существование точек неинвариантности для младших сильных показателей колеблемости при $n=3$.

6. Выберем вспомогательные монотонные функции $\vartheta, \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \leqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad t \geqslant 1, \end{cases} \qquad \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Для множества $\mathrm{M} \equiv \left[\sqrt{1,125}-\varepsilon,\, \sqrt{1,125}+\varepsilon\right]$ зададим семейство систем $A_{\overline{\mu}} \in \tilde{\mathcal{M}}^3$, зависящее от последовательности параметров $\overline{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots) \in \mathrm{M}^\infty$, фундаментальная матрица $X_{\overline{\mu}}(t)$ которой при любом фиксированном значении p имеет соответственно представление:

$$\begin{pmatrix} \mu_p & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [t_{p-1}+2\pi,\, r_p]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \mu_p + \vartheta(2/\pi(t-r_p))(1-\mu_p) & 1+\vartheta(2/\pi(t-r_p))(\mu_p-1) & \sin t \\ \vartheta(2/\pi(t-r_p)) & -\sin t & 1 \\ \vartheta(2/\pi(t-r_p)) & -1+\vartheta(2/\pi(t-r_p)) & -\sin t \end{pmatrix}$$

при $t \in [r_p,\, r_p+\pi/2]\,,$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & 1 \\ 1 & -1+\vartheta(2/\pi(t-r_p)) & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p+\pi/2,\, r_p+\pi]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p+\pi,\, r_p+3\pi/2]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & 1 \\ 1 & 0 & -\sin t \\ -\sin t & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p+3\pi/2,\, r_p+2\pi]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p & \cos t \\ \cos t & 0 & -\sin t \\ -\sin t & 0 & -\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [r_p+2\pi,\, s_p]\,,$$

$$\begin{pmatrix} \sin t & \mu_p + \vartheta(2/\pi(t-s_p))(1-\mu_p) & 1+\vartheta(2/\pi(t-s_p))(\mu_p-1) \\ 1 & \vartheta(2/\pi(t-s_p)) & -\sin t \\ -\sin t & \vartheta(2/\pi(t-s_p)) & -1+\vartheta(2/\pi(t-s_p)) \end{pmatrix}$$

при $t \in [s_p,\, s_p+\pi/2]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p \\ 1 & 1 & -1+\vartheta(2/\pi(t-s_p)) \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p+\pi/2,\, s_p+\pi],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p+\pi,\, s_p+3\pi/2],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p \\ -\sin t & 1 & 0 \\ -1 & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p+3\pi/2,\, s_p+2\pi],$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \mu_p \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [s_p+2\pi,\, \tau_p],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \mu_p+\vartheta(2/\pi(t-\tau_p))(1-\mu_p) \\ -\sin t & 1 & 0 \\ -\eta(2/\pi(t-\tau_p)) & -\sin t & 0 \end{pmatrix}$$

при $t \in [\tau_p,\, \tau_p+\pi/2]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1+\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\frac{\pi}{2}\right)) & 2\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\frac{\pi}{2}\right)) \\ 0 & -1 & 4\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\frac{\pi}{2}\right)) \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[\tau_p+\frac{\pi}{2},\, \tau_p+\frac{3\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} \eta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\frac{3\pi}{4}\right)) & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p+\frac{3\pi}{4},\, \tau_p+\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 1 & 1 \\ -1+\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\pi\right)) & 2 & 2 \\ -e^{-t}(\cos t+\eta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\pi\right))) & -1-3\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-\tau_p-\pi\right)) & 4 \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[\tau_p+\pi,\, \tau_p+\frac{5\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & 2 & 2 \\ -e^{-t}\cos t & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[\tau_p+\frac{5\pi}{4},\, \tau_p+\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & 2 & 2\cos 2t \\ -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t & 4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[\tau_p+\frac{3\pi}{2},\ \tau_p+\frac{7\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t & -4\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[\tau_p+\frac{7\pi}{4},\ \tau_p+2\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t & -4\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[\tau_p+2\pi,\ q_p\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 1 & \sin 2t \\ 0 & -2\sin 2t & 2 \\ -e^{-t}\cos t & -4 & -4\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[q_p,\ q_p+\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 1 & 1 \\ 2\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\frac{\pi}{4}\right)) & -2 & 2 \\ -e^{-t}\cos t & -4+\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\frac{\pi}{4}\right))\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-q_p-3\pi/4}+4\right) & -4 \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[q_p+\frac{\pi}{4},\ q_p+\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & \eta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\frac{\pi}{2}\right)) & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -e^{-t}\cos t & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-q_p-3\pi/4} & -4 \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[q_p+\frac{\pi}{2},\ q_p+\frac{3\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+1) & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -e^{-t}\left(\cos t+\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\frac{3\pi}{4}\right))\right) & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[q_p+\frac{3\pi}{4},\ q_p+\pi\right]$,

$$\begin{pmatrix} \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\pi\right)) & e^{-t}(\cos t+1) & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\pi\right)) & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[q_p+\pi,\ q_p+\frac{5\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) & 1 \\ 2 & -2\eta(\frac{4}{\pi}\left(t-q_p-\frac{5\pi}{4}\right)) & 2 \\ 4 & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[q_p+\frac{5\pi}{4},\ q_p+\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p + \frac{3\pi}{2},\ q_p + \frac{7\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) & 1 \\ 2 & 0 & -2\sin 2t \\ -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[q_p + \frac{7\pi}{4},\ q_p + 2\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) & \cos 2t \\ 2\cos 2t & 0 & -2\sin 2t \\ -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t & -4\cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in [q_p + 2\pi,\ h_p],$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) & 1 \\ 2 & 0 & -2\sin 2t \\ -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t & -4 \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p,\ h_p + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}(\cos t+1) & 1 \\ 2 & 2\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{4}\right)) & -2 \\ -4 & -e^{-t}\cos t & -4 + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{4}\right))\,(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-h_p - 3\pi/4} + 4) \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[h_p + \frac{\pi}{4},\ h_p + \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}(\cos t+1) & \eta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{2}\right)) \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -e^{-t}\cos t & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-h_p - 3\pi/4} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{\pi}{2},\ h_p + \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t}(\cos t+1) & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -e^{-t}\left(\cos t + \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{\pi}{4}\right))\right) & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

при $t \in \left[h_p + \frac{3\pi}{4},\ h_p + \pi\right]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \vartheta(\frac{4}{\pi}(t - h_p - \pi)) & e^{-t}(\cos t+1) \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 4\vartheta(\frac{4}{\pi}(t - h_p - \pi)) & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \pi,\ h_p + \frac{5\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) \\ 2 & 2 & -2\eta(\frac{4}{\pi}\left(t - h_p - \frac{5\pi}{4}\right)) \\ -4 & 4 & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{5\pi}{4},\ h_p + \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t \in \left[h_p + \frac{3\pi}{2},\ h_p + \frac{7\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) \\ -2\sin 2t & 2 & 0 \\ -4 & -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[h_p+\frac{7\pi}{4},\, h_p+2\pi\right],$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t & 0 \\ -4\cos 2t & -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[h_p+2\pi,\, t_p\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t & e^{-t}(\cos t+1) \\ -2\sin 2t & 2 & 0 \\ -4 & -4\sin 2t & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[t_p,\, t_p+\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{-t}(\cos t+1) \\ -2 & 2 & \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{4}\right)) \\ -4 & -4 & -e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[t_p+\frac{\pi}{4},\, t_p+\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} 1+\vartheta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right))\,(\mu_p-1) & 1 & e^{-t}(\cos t+1) \\ -2\eta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right)) & 2 & 1 \\ -4\eta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right)) & -4 & -e^{-t}(\cos t+\vartheta(\frac{2}{\pi}\left(t-t_p-\frac{\pi}{2}\right))) \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[t_p+\frac{\pi}{2},\, t_p+\pi\right]$,

$$\begin{pmatrix} \mu_p & 1 & 0,5\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) \\ 0 & 2-\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) & 1 \\ 0 & -4+3\vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) & \vartheta(\frac{4}{\pi}\left(t-t_p-\pi\right)) \end{pmatrix}$$

при $t\in\left[t_p+\pi,\, t_p+\frac{5\pi}{4}\right]$,

$$\begin{pmatrix} \mu_p & 1 & 0,5\sin 2t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[t_p+\frac{5\pi}{4},\, t_p+\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\begin{pmatrix} \mu_p & 1 & 0,5\sin 2t \\ 0 & -\sin t & 1 \\ 0 & -1 & -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{при } t\in\left[t_p+\frac{3\pi}{2},\, t_p+2\pi\right],$$

где $t_0\equiv 0$ и

$$r_p\equiv t_{p-1}+2\pi+2\pi p,\quad s_p\equiv r_p+2\pi+2\pi p,\quad \tau_p\equiv s_p+2\pi+2\pi p,$$

$$q_p\equiv \tau_p+2\pi+2\pi p,\quad h_p\equiv q_p+2\pi+2\pi p,\quad t_p\equiv h_p+2\pi+2\pi p.$$

7. Зафиксируем произвольное $p\in\mathbb{N}$ и для заданного решения $x\in\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})$, вектора $m\in\mathbb{R}^3$ при любом $\alpha\in\{0,+,*\}$ обозначим

$$\nu^{\alpha}(x,m,I_p)=$$

$$= \nu^\alpha(y,m,t_{p-1}+2\pi,r_p)+\nu^\alpha(x,m,r_p+2\pi,s_p)+\nu^\alpha(x,m,s_p+2\pi,\tau_p)+$$
$$+\nu^\alpha(x,m,\tau_p+2\pi,q_p)+\nu^\alpha(x,m,q_p+2\pi,h_p)+\nu^\alpha(x,m,h_p+2\pi,t_p).$$

Пусть задано отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})$, переводящее каждую ненулевую точку $c \equiv (c_1,c_2,c_3) \in \mathbb{R}^3_*$ в решение

$$\varphi(c) = x_c \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \in \mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}}). \tag{4.5}$$

Последовательность

$$t_0 = 0, \qquad t_p = t_{p-1} + 12\pi + 12\pi p, \quad p \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{p\to+\infty} t_p = +\infty, \quad \lim_{p\to+\infty}(t_p - t_{p-1}) = +\infty,$$

а значит, обладает свойством

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{t_p}{t_{p-1}} = 1 + \lim_{p\to+\infty}\frac{24\pi}{t_{p-1}} + 12\pi\cdot\lim_{p\to+\infty}\frac{p-1}{t_{p-1}} = 1.$$

Последовательность (t_p) удовлетворяет условиям леммы 1.1, поэтому при использовании формул для сильных показателей колеблемости можно не брать в расчет при каждом $p \in \mathbb{N}$ полуинтервалы

$$\begin{gathered}(t_{p-1},\, t_{p-1}+2\pi]\,;\,(r_p,\, r_p+2\pi]\,;\,(s_p,\, s_p+2\pi]\,;\\ (\tau_p,\, \tau_p+2\pi]\,;\,(q_p,\, q_p+2\pi]\,;\,(h_p,\, h_p+2\pi]\end{gathered} \tag{4.6}$$

(т. е. не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число нулей, корней или гиперкорней, ни в само это число).

Для этого в зависимости от точки $c \in \mathbb{R}^3_*$ укажем такой вектор $m \in \mathbb{R}^3$, при котором функция $\langle x_c, m\rangle$ на каждом из указанных участков (4.6) будет иметь ограниченное число гиперкорней и наименьшее общее число нулей, корней или гиперкорней на промежутках

$$\begin{gathered}(t_{p-1}+2\pi, r_p],\ (r_p+2\pi, s_p],\ (s_p+2\pi, \tau_p],\\ (\tau_p+2\pi, q_p],\ (q_p+2\pi, h_p],\ (h_p+2\pi, t_p].\end{gathered} \tag{4.7}$$

8. Для любых векторов $g,h \in \mathbb{R}^3_*$ через $C(g,h)$ обозначим любую содержащую их двумерную плоскость, а через L_1 – объединение осей Oc_1, Oc_2, Oc_3 (ниже в доказательстве теоремы начало координат всюду игнорируется). Для векторов $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ введем обозначение

$$L_2 \equiv C(e_1,e_2)\cup C(e_2,e_3)\cup C(e_1,e_3).$$

Введем в рассмотрение вектор $m^3_\varepsilon = (1-\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1-\varepsilon_3)$. Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})$ в силу теоремы 2 работы [177] найдутся такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in [0, \varepsilon]$, что при любом $t > 0$ справедливо неравенство $\nu^*(x, m^3_\varepsilon, t) < +\infty$.

а). При $c \in L_1$ и $\alpha \in \{0, +, *\}$ минимумы в $\nu^\alpha_\bullet(x_c)$ реализуется на векторе m^3_ε, поскольку на $\mathbb{R}_+$ функция $\langle y, m^3_\varepsilon\rangle$, где $y = (e^{-t}(\cos t + 1),\, 0,\, -e^{-t}\cos t)^T$, отделена от нуля, а значит, при любом $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\nu^\alpha(x_c, m^3_\varepsilon, I_p) = 12p$.

Следовательно, для ненулевых решений построенного уравнения имеет место следующие соотношения

$$\nu^\alpha_\bullet(x_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(x_c, m, t_p) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^\alpha(x_c, m, I_i)}{\sum\limits_{i=1}^{p} 12\pi i} = \tag{4.8}$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi(1\cdot 12 + 2\cdot 12 + \cdots + p\cdot 12)}{12\pi(1+2+\cdots+p)} = 1.$$

б). Пусть $c \in L_2$ и $\alpha \in \{0, +, *\}$. Для любой функции f из множеств

$$\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R},\, c_1\cdot c_2 \neq 0,\, t \in (\tau_p + 2\pi,\, q_p] \cup (q_p + 2\pi,\, h_p]\},$$

$$\{c_2x_2(t) + c_3x_3(t) \mid c_2, c_3 \in \mathbb{R},\, c_2\cdot c_3 \neq 0,\, t \in (q_p + 2\pi,\, h_p] \cup (h_p + 2\pi,\, t_p]\},$$

$$\{c_1x_1(t) + c_3x_3(t) \mid c_1, c_3 \in \mathbb{R},\, c_1\cdot c_3 \neq 0,\, t \in (\tau_p + 2\pi,\, q_p] \cup (h_p + 2\pi,\, t_p]\},$$

любого ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^3_*$, неколлинеарного вектору $m^4 = (4, 0, 1)$, и любом фиксированном p (быть может начиная с некоторого номера p_0) функция $\langle f, m\rangle$ на соответствующих промежутках из (4.7) имеет $12p$ нулей, среди которых нет кратных.

Для любых $p \in \mathbb{N}$, функции g из множеств

$$\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R},\, c_1\cdot c_2 \neq 0,\, t \in (t_{p-1} + 2\pi,\, r_p] \cup (r_p + 2\pi,\, s_p]\},$$

$$\{c_2x_2(t) + c_3x_3(t) \mid c_2, c_3 \in \mathbb{R},\, c_2\cdot c_3 \neq 0,\, t \in (r_p + 2\pi,\, s_p] \cup (s_p + 2\pi,\, \tau_p]\},$$

$$\{c_1x_1(t) + c_3x_3(t) \mid c_1, c_3 \in \mathbb{R},\, c_1\cdot c_3 \neq 0,\, t \in (t_{p-1} + 2\pi,\, r_p] \cup (s_p + 2\pi,\, \tau_p]\}$$

скалярное произведение $\langle g, m^3_\varepsilon\rangle$ на соответствующих промежутках из (4.7) вовсе не будет иметь нулей, поэтому при любых $p \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \{0, +, *\}$ справедливо равенство $\nu^\alpha(x_c, m^3_\varepsilon, I_p) = 14p$. Откуда получаем

$$\nu^{\alpha}_{\bullet}(x_c) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^{\alpha}(x_c, m, t_p) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi\sum\limits_{i=1}^{p}\nu^{\alpha}(x_c, m, I_i)}{\sum\limits_{i=1}^{p} 12\pi i} = \tag{4.9}$$
$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{14\pi(1+2+\dots+p)}{12\pi(1+2+\dots+p)} = \frac{7}{6}.$$

в). Для любого $\alpha \in \{0,+,*\}$ обозначим через G^{α} множество точек $c \in \mathbb{R}^3_* \setminus L_2$, для которых минимум в $\nu^{\alpha}_{\bullet}(x_c)$ реализуется на векторе m^4. Действительно, на каждом из промежутков

$$(\tau_p + 2\pi, q_p],\ (q_p + 2\pi, h_p],\ (h_p + 2\pi, t_p] \tag{4.10}$$

функция $\langle x_c, m^4\rangle$ отделена от нуля, а при любом другом неколлинеарном векторе $m \in \mathbb{R}^3_*$ функция $\langle x_c, m^4\rangle$ на каждом из полуинтервалов (4.10) будет иметь $12p$ нулей (быть может начиная с некоторого номера p).

Теперь для вычисления значений сильных показателей колеблемости указанных решений остается посчитать число нулей, корней и гиперкорней функции $\langle x_c, m^4\rangle$ на каждом из промежутков

$$(t_{p-1} + 2\pi, r_p], \quad (r_p + 2\pi, s_p], \quad (s_p + 2\pi, \tau_p]. \tag{4.11}$$

На том из трех промежутков (4.11), на котором $x_i(t) = \mu_p$ функция $\langle x_c, m^4\rangle$ представима в виде

$$\langle x_c, m^4\rangle = \sqrt{18(c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2)}\sin(t+\psi) + 4c_i\mu_p$$

или

$$\frac{\langle x_c, m^4\rangle}{\sqrt{18}} = \sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2}\sin(t+\psi) + c_i\rho_p,$$

где $\psi \in \mathbb{R}$ — вспомогательный угол и $\rho_p = \frac{4\mu_p}{\sqrt{18}}$.

Пусть для векторов $c \in G^{\alpha}$ и номера $i \in \{1,2,3\}$ выполнено условие

$$c_i^2\rho_p^2 > c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2 \tag{4.12}$$

(здесь и всюду ниже индекс 0 отождествлен с индексом 3, а индекс 4 — с индексом 1). Тогда имеет место оценка

$$\sqrt{c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2} < |c_i\rho_p|,$$

гарантирующая отсутствие нулей функции $\langle x_c, m^4\rangle$ на рассматриваемом промежутке.

Аналогично, при условии

$$\rho_p^2 c_i^2 < c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

на упомянутом промежутке функция $\langle x_c, m^4\rangle$ имеет $2p$ нулей, корней и гиперкорней, а при условии

$$\rho_p^2 c_i^2 = c_{i-1}^2 + c_{i+1}^2$$

— столько же корней, ровно вдвое меньше нулей и бесконечно много гиперкорней. Понятно, что в данном случае $c \notin G^*$, и минимум в определении сильных показателей колеблемости гиперчастот решений $\varphi(c)$, $c \in \big(\mathbb{R}^3_* \setminus L_2\big) \setminus G^*$ реализуется на векторе m^3_ε, так как на промежутках (4.11) функция $\langle x_c, m^3_\varepsilon\rangle$, не имеет гиперкорней, а на каждом из промежутков (4.10) имеет $4p$ гиперкорней. Эти рассуждения справедливы и для остальных сильных показателей колеблемости в случае если $\big(\mathbb{R}^3_* \setminus L_2\big) \setminus G^\alpha \neq \varnothing$. Следовательно, выполняется

$$\nu^\alpha_\bullet(x) = 1, \quad c \in \big(\mathbb{R}^3_* \setminus L_2\big) \setminus G^\alpha, \quad \alpha \in \{0, +, *\}.$$

г). Обозначим через V_i подмножество пространства $\mathbb{R}^3_*$, состоящее из точек, удовлетворяющих неравенству (4.12), и представляющее собой в пространстве $\mathbb{R}^3_*$ круглый конус (точнее, его внутренность, каковую и будем подразумевать в дальнейшем под словом конус), ось которого совпадает с i-ой осью координат (натянутой на вектор e_i), а раствор — тем больше, чем больше значение ρ_p.

Следуя И.Н. Сергееву (см. [165]), через $U_{i,j} \subset \mathbb{R}^3_*$ обозначим множество точек, принадлежащих ровно i из трех конусов V_1, V_2, V_3 и при этом лежащих на границе ровно j из оставшихся. Тогда для величин $\nu^0_\bullet$, $\nu^+_\bullet$ и $\nu^*_\bullet$ при любом $c \in \mathbb{R}^3_* \setminus L_2$ справедливы равенства

$$\nu^0_\bullet(x_c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{12}, & c \in U_{2,1}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,0} \cup U_{1,2}, \\ \frac{1}{4}, & c \in U_{1,1} \cup U_{0,3}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{1,0} \cup U_{0,2}, \\ \frac{5}{12}, & c \in U_{0,1}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

$$\nu^+_\bullet(x_c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,1} \cup U_{2,0}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{1,2} \cup U_{1,1} \cup U_{1,0}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{0,0} \cup U_{0,1} \cup U_{0,2} \cup U_{0,3}, \end{cases}$$

$$\nu^*_\bullet(x_c) = \begin{cases} 0, & c \in U_{3,0}, \\ \frac{1}{3}, & c \in U_{1,0}, \\ \frac{3}{2}, & c \in U_{0,1} \cup U_{0,2} \cup U_{1,1} \cup U_{0,3} \cup U_{1,2} \cup U_{2,1}, \\ \frac{1}{6}, & c \in U_{2,0}, \\ \frac{1}{2}, & c \in U_{0,0}, \end{cases}$$

причем здесь перечислены все возможные значения этих величин.

9. Проследим за изменением возможных спектров сильных показателей колеблемости системы $A_{\overline{\mu}}$ при изменении последовательности $\overline{\mu} \in \mathrm{M}^\infty$.

а). Если выполняется равенство $\mu_p = \sqrt{1,125}$ (которое равносильно $\rho_p = 1$) при любом $p \in \mathbb{N}$, то конусы V_1, V_2 и V_3 только касаются друг друга, причем только попарно, и все точки касания лежат на шести конкретных прямых (см. п. Б. доказательства леммы 16 [165]). Поэтому непустыми являются только множества $U_{0,0}$, $U_{0,1}$, $U_{1,0}$ и $U_{0,2}$, поэтому, учитывая равенства (4.8)-(4.9), искомые множества значений оказываются следующими

$$\nu^0_\bullet(\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\},$$

$$\nu^+_\bullet(\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}, \quad \nu^*_\bullet(\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}.$$

При $c = (2,1,1) \in U_{1,0}$ скалярное произведение $\langle x_c, m^4 \rangle$ на каждом из промежутков (4.6) вовсе не имеет нулей, поэтому младшие сильные показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней системы $A_{\overline{\mu}}$ действительно равны $1/3$.

б). Если же выполняется неравенство $\mu_p > \sqrt{1,25}$ (из которого следует $1 < \rho_p < \sqrt{2}$) при любом $p \in \mathbb{N}$, то конусы уже попарно пересекаются, но не имеют общих для них всех точек, даже граничных (см. п. В. доказательства леммы 16 [165]). При этом также и граница любого конуса пересекается с любым другим конусом, как и с его границей.

Следовательно, к предыдущему списку непустых множеств добавляются еще два множества $U_{2,0}$ и $U_{1,1}$, поэтому

$$\nu^0_\bullet(\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\},$$

$$\nu^+_\bullet(\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}, \quad \nu^*_\bullet(\mathcal{S}_*(A_{\overline{\mu}})) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{6}\right\}.$$

В этом случае $1/6$ действительно является наименьшим значением сильных показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней системы $A_{\overline{\mu}}$.

В самом деле, решение $c = (c_1, c_2, c_3) \in U_{2,0}$ системы

$$\begin{cases} \rho_p^2 c_1^2 > c_2^2 + c_3^2, \\ \rho_p^2 c_2^2 > c_1^2 + c_3^2, \\ \rho_p^2 c_3^2 < c_1^2 + c_2^2 \end{cases}$$

выберем следующим образом: $c_3 = 1$, а c_1, c_2 - положительными, достаточно большими и сколь угодно близкими (можно даже $c_1 = c_2$). Для таких точек $c \in G^\alpha$ скалярное произведение $\langle x_c, m^4 \rangle$ на каждом из промежутков (4.6) будет отделена от нуля.

10. Примером точки неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для младших сильных показателей колеблемости служит система $A_{\sqrt{1,125}}$ из построенного в настоящем доказательстве семейства, взятое при постоянной последовательности $\mu_1 = \mu_2 = \dots \equiv \sqrt{1,125}$, т. е. относящееся к пункту 9. а), в котором $\varkappa_1(A_{\sqrt{1,125}}) = 1/3$ при любом $\varkappa = \nu_\bullet^0, \nu_\bullet^+, \nu_\bullet^*$.

Действительно, эта система обладает тем свойством, что в любой ее окрестности (в силу непрерывности семейства систем по $\overline{\mu}$) найдется возмущенная система $A_{\overline{\mu}}$ из того же семейства, но попадающее под пункт 9. б) доказательства настоящей леммы, а значит, удовлетворяющее равенству $\varkappa_1(A_{\overline{\mu}}) = 1/6$ при любом $\varkappa = \nu_\bullet^0, \nu_\bullet^+, \nu_\bullet^*$.

Более того, если возмущенную систему $A_{\overline{\mu}}$ подчинить дополнительному условию $\mu_p \to \sqrt{1,125}$ при $p \to \infty$, то для него, помимо указанного равенства, будет выполнено условие $A_{\overline{\mu}} \in \mathcal{B}(A_{\sqrt{1,125}})$, из которого следует, что функционал $\varkappa_1$ не инвариантен в точке $A_{\sqrt{1,125}}$ относительно бесконечно малых возмущений.

Утверждение 4.3 доказано при $n = 3$.

Теперь докажем справедливость утверждения при любом $n > 3$.

11. Выберем фундаментальные матрицы

$$\operatorname{diag}\left[Z_3(t), A_\psi(t), \dots, A_\psi(t)\right], \quad \operatorname{diag}\left[Z_3(t), A_\phi(t), \dots, A_\phi(t)\right],$$

$$\operatorname{diag}\left[Z_3(t), A_\varphi(t), \dots, A_\varphi(t)\right], \quad \operatorname{diag}\left[Z_3(t), A_\gamma(t), \dots, A_\gamma(t)\right]$$

некоторых систем $A_n, B_n, C_n, D_n \in \tilde{\mathcal{M}}^n$, где

$$A_u(t) = \begin{pmatrix} \cos u(t) & -\sin u(t) \\ \sin u(t) & \cos u(t) \end{pmatrix}.$$

Если в формулах общих решений этих систем коэффициенты $c_4, c_5, \dots, c_n$ равны нулю, то ненулевые компоненты вектора $m = (m_1, m_2, m_3, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_*^n$ выбираем согласно рассуждениям, проводимым в пункте 3 настоящего доказательства. Пусть в формуле общего решения второй системы хотя бы один из коэффициентов $c_4, c_5, \ldots, c_n$ отличен от нуля и его номер равен r. Тогда выбираем вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ с нулевыми компонентами за исключением r-го. Тогда при любом $\varkappa = \nu^0_\circ, \nu^+_\circ, \nu^*_\circ, \nu^0_\bullet, \nu^+_\bullet, \nu^*_\bullet$ справедливы равенства

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A_n)) = \varkappa(\mathcal{S}_*(B_n)) = \{0; 1\},$$

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(C_n)) = \{1\}, \quad \varkappa(\mathcal{S}_*(D_n)) = \{0,5; 1\}.$$

Далее, рассуждения из пп. 5 и 6 доказательства утверждения 4.1 завершают доказательство настоящего утверждения.

Утверждение 4.3 полностью доказано.

Из доказанных утверждений 4.1–4.3 следует справедливость теоремы 4.1.

Заключение

Основные научные результаты диссертации

Результаты диссертационной работы автора, выносимые на защиту, являются новыми и состоят в следущем:

1) на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами установлены соотношения между всеми показателями колеблемости, найдены их спектры и главные значения для каждой автономной системы;

2) для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, при любом $n > 2$ построено уравнение n-го порядка, спектры верхних сильных показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков, нулей и корней которого совпадают с множеством $\mathcal{A}$;

3) при любом $n > 2$ в пространстве решений уравнений n-го порядка установлено отсутствие свойства остаточности у сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;

4) при любом $n > 2$ в пространстве n-мерных линейных систем с равномерной топологией найдены точки, в которых каждый из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является непрерывным и инвариантным относительно бесконечно малых возмущений;

5) установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Выводы

В диссертации изучен важный класс функционалов на пространстве обыкновенных дифференциальных уравнений и систем — ляпуновские характеристики колеблемости. Разработан метод варьирования системы, с помощью которого установлены следующие их свойства: неостаточность сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений выше второго порядка, разрывность крайних показателей колеблемости на множестве дифференциальных систем с равномерной на положительной полуоси топологией и их неинваринатность относительно бесконечно малых возмущений, а также отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения. Кроме того, с помощью метода варьирования системы конструктивно доказано существование дифференциального уравнения порядка выше второго, у которого спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль. На множестве решений автономных дифференциальных систем установлены точность и абсолютность всех показателей колеблемости, найдены их спектры, описаны их главные значения. Полученные в работе результаты обобщают и усиливают предшествующие результаты ряда авторов, а на некоторые вопросы, долгое время остававшиеся открытыми, дают окончательные ответы.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях по асимптотической теории линейных дифференциальных систем, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Описание возможных спектров показателей колеблемости является актуальной задачей теории асимптотических характеристик. Эта задача решена лишь частично для небольшого класса дифференциальных уравнений и систем — для остальных требуются дальнейшее изучение, поиск соответствующих подходов (некоторые из них намечены в диссертации) и разработка методов их реализации.

Отметим, что новые методы изучения показателей колеблемости дифференциальных систем с аналитическими (голоморфными) коэффициентами, а также численные методы нахождения показателей колеблемости будут полезны механикам и специалистам по математическому моделированию.

Показатели колеблемости дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами до сих пор мало изучены. Результаты диссертации отчасти заполняют этот пробел, но в этом направлении остается еще много интересных нерешенных задач.

Библиографический список

[1] Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.– 347 с.

[2] Адамов Н.В. О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости // Матем. сборник. – 1935. – Т. 42, № 6. – С. 647–668.

[3] Адамов Н.В. О некоторых преобразованиях, не меняющих интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка // Матем. сборник. – 1948. – Т. 65, № 2. – С. 187–228.

[4] Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 1992. – 240 с.

[5] Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Матем. сборник. – 1959. – Т. 51, № 4. – С. 475–486.

[6] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.:Наука, 1977. – 368 с.

[7] Амелькин В.В., Чинь Зань Данг. Сильная изохронность центра динамических систем с полиномами второй степени // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 739—743.

[8] Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.

[9] Амелькин В.В., Касим Мухамед Аль-Хайдер. Сильная изохронность полиномиальных дифференциальных систем с центром // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 7. – С. 867—873.

[10] Амелькин В.В., Калитин Б.С. Изохронные и импульсные колебания двумерных динамических систем. – М.: Комкнига, 2006. – 208 с.

[11] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е. Теория колебаний, изд. 2.- М.:Физматгиз, 1959. – 918 с.

[12] Арнольд В.И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия // Функцион. анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19, вып. 4. – С. 1–10.

[13] Асташова И.В. К задаче Изобова о кнезеровских решениях сингулярных нелинейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 10–15.

[14] Асташова И.В. Асимптотика колеблющихся решений уравнений со степенной нелинейностью // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". – 2017. – Т. 132. – С. 8–13.

[15] Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2005. – Вып. 25. – С. 3–17.

[16] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. – 648 с.

[17] Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.:Наука, 1968. – 560 с.

[18] Барабанов Е.А. Строение множества нижних показателей линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 12. – С. 1084–1085.

[19] Барабанов Е.А. Волков И.А. Строение множества характеристических показателей Ляпунова экспоненциально устойчивых квазилинейных систем // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 3–19.

[20] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1592–1600.

[21] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I //Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 10. – С. 1302–1320.

[22] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II //Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1595–1609.

[23] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений //Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 1. – С. 24–31.

[24] Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 12. – С. 1579–1588.

[25] Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 4. – С. 31–43.

[26] Баутин Н.Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояний равновесия типа фокус или центр // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 1. – С. 181–196.

[27] Баутин Н.Н. Оценка числа алгебраических предельных циклов системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, с алгебраическими правыми частями // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 2. – С. 362.

[28] Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 10. – С. 1307–1318.

[29] Беклемишева Я.А. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Матем. сборник. – 1962. – Т. 56, № 2. – С. 207–236.

[30] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.

[31] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 410 с.

[32] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы //Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1662–1663.

[33] Бурлаков Д.С., Сергеев И.Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем //Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 899.

[34] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 75–93.

[35] Бурлаков Д. С. Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 845.

[36] Бурлаков Д.С. Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2015. – № 2. – С. 49–53.

[37] Бурлаков Д.С. Оценки скорости блуждания решений линейного дифференциального уравнения через его коэффициенты //Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 8. – С. 1003–1010.

[38] Бурлаков Д.С. Оценки колеблемости и блуждаемости решений линейных систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Моск. гос. ун-т. - М., 2016.

[39] Быков В.В. Об измеримости некоторых характеристик колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С. 1574.

[40] Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 419–425.

[41] Быков В.В. Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 4. – С. 441–445.

[42] Быков В.В. О классах Бэра ляпуновских инвариантов // Матем. сборник. – 2017. – Т. 208, № 5. – С. 38–62.

[43] Быков В.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. – 2020. – Т. 84, № 6. – С. 3–22.

[44] Быков Я.В. Об одном классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 11. – С. 1449–1475.

[45] Былов Б.Ф. О геометрическом расположении и оценке роста решений возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 7. – С. 882–897.

[46] Былов Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 2. – С. 243–252.

[47] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[48] Бэр Р. Теория разрывных функций / Пер. с фр. и редакция А.Я. Хинчина. – М.-Л.: ГТТИ, 1932. – 134 с.

[49] Ветохин А.Н. К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1039–1042.

[50] Ветохин А.Н. К бэровской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1302–1311.

[51] Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 3. – С. 333–340.

[52] Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 91, № 5. – С. 999–1002.

[53] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1957. – Т. 42, № 2. – С. 207–222.

[54] Виноград Р.Э. О достижимости центрального показателя // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 7. – С. 1212–1217.

[55] Войделевич А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений //Изв. НАН Беларуси. Сер. физико-матем. наук. – 2015. – № 3. – С. 17–23.

[56] Войделевич А. С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений //Журнал Белорусского гос. ун-та. Матем. Инфор. – 2019. – № 1. – С. 28–32.

[57] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.:Физматгиз, 1954. – 576 с.

[58] Гаргянц А.Г. О метрической типичности старшего показателя Перрона на ршениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 8. – С. 1011–1017.

[59] Гаргянц А.Г. О существовании линейной дифференциальной системы с заданными показателями Перрона // Изв. РАН. Сер. матем. – 2019. – Т. 83, № 2. – С. 21–39.

[60] Гелиг А.Х. Условия автоколебательности нелинейных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1985. – № 1. – С. 10–15.

[61] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одном механизме жесткого возбуждения колебаний в нелинейных флаттерных системах // Модел. и анализ информ. систем. – 2014. – Т. 21, № 1. – С. 32–44.

[62] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, № 6. – С. 21–86.

[63] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1400–1418.

[64] Горицкий А.Ю. Характеристические частоты линейных комбинаций синусов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 860.

[65] Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. – 2012.– Т. 48, № 4. – С. 479–486.

[66] Горицкий А.Ю. Подсчет характеристических частот нулей с помощью оператора монодромии // Дифференц. уравнения. – 2013.– Т. 49, № 11. – С. 1501.

[67] Гробман Д.М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 1. – С. 121–166.

[68] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

[69] Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научный вестн. МГТУ ГА. Сер. Матем. – 1999. – № 16. – С. 5–10.

[70] Дементьев Ю.И. Подвижность показателей Ляпунова под действием бесконечно малых возмущений // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 11. – С. 1575.

[71] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

[72] Демидович Б.П. О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Математика. Т. VI, Уч. записки Моск. гос. ун-та. – 1952. – Вып. 163. – С. 123–132.

[73] Домшлак Ю.И. О колеблемости и неколеблемости решений векторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 961–969.

[74] Евтухов В.М., Костин А.В. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // ДАН СССР. – 1976. – Т. 231, № 5. – С. 1059–1062.

[75] Ерченко А.А. Ляпуновская приводимость бесконечно малых возмущений систем и уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 145–160.

[76] Ефимов Д.В., Фрадков А.Л. Условия колебательности по якубовичу для нелинейных систем // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2006. – Вып. 4. – С. 28–40.

[77] Жукова А.А. Число вращения как полная характеристика устойчивости уравнения Хилла // Вест. СамГУ–Естественнонаучная сер. – 2009. – Т. 68, № 2. – С. 26–32.

[78] Жуковский Н.Е. Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$ // Матем. сборник. – 1892. – Т. 16, № 3. – С. 582–591.

[79] Зорич В.А. Математический анализ. II. – М.: Наука, 1984. – 794 с.

[80] Зубов В.И. Колебания и волны. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. – 416 с.

[81] Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 469–477.

[82] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 1954–1966.

[83] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 71–146.

[84] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 1. – С. 5–8.

[85] Изобов Н.А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35, № 2. – С. 189–199.

[86] Изобов Н.А. О кнезеровских решениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 4. – С. 581–588.

[87] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 12. – С. 2034–2055.

[88] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. – Мн.: БГУ, 2006. – 320 с.

[89] Изобов Н.А., Ильин А.В. Конечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 12. – С. 1522–1536.

[90] Изобов Н.А., Ильин А.В. Эффект Перрона бесконечной смены значений характеристических показателей в любой окрестности начала координат // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 11. – С. 1420–1432.

[91] Изобов Н.А., Ильин А.В. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 11. – С. 1427–1439.

[92] Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 464–472.

[93] Каменев И.В. К теореме сравнения Хартмана для линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 6. – С. 1136—1137.

[94] Каменев И.В. Об одном интегральном признаке колеблемости линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, № 2. – С. 249—252.

[95] Каменев И.В. К теореме В.А. Кондратьева о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 4. – С. 598—603.

[96] Каменев И.В. Об одной асимптотической формуле Хартмана в теории линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 2. – С. 348—350.

[97] Карасаев И.К. Об одном способе определения характеристических показателей линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. вузов. Матем., – 1981. – Т. 3. – С. 73—75.

[98] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. – М.: Наука, 1985. – 408 с.

[99] Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторого обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, № 1. – С. 33–36.

[100] Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 2. – С. 207–219.

[101] Кигурадзе И.Т.,Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.

[102] Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[103] Козлов В.В. Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 3. – С. 358–367.

[104] Кокушкин В.И. Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2014. Т. 50, № 10. – С. 1406–1407.

[105] Кондратьев В.А. Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 4. – С. 742–745.

[106] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)}+$ $+p(x)y = 0$ // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1961. – Т. 10. – С. 419–436.

[107] Кондратьев В.А. О колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 118, № 1. – С. 22–24.

[108] Коньков А.А. О кнезеровских решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН. – 2013. – Т. 453, № 5. – С. 482–485.

[109] Коплатадзе Р.Г. Об асимптотическом поведении решений системы двух линейных дифференциальных уравнений // Труды Тбилисск. ун-та. – 1968. – Т. 129. – С. 179–194.

[110] Коршикова Н. Л. О нулях решений одного класса линейных уравнений n-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 15, № 5. – С. 757–764.

[111] Куратовский К. Топология. В 2-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 596 с.

[112] Куратовский К. Топология. В 2-х т. – Т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.

[113] Куклес И.С., Пискунов Н.С. Проблема изохронности в теории нелинейных колебаний // Тр. сейсмолог. ин-та АН СССР. – 1937. – № 93. – С. 1–20.

[114] Левин А.Ю. Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае // Матем. сборник. – 1968. – Т. 75, № 1. – С. 39–63.

[115] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+$ $+p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. – 1969. – Т. 24, № 2. – С. 43–96.

[116] Левин А.Ю. Абсолютная неосциляционная устойчивость и смежные вопросы // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4, вып. 1. – С. 154–166.

[117] Леонов Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1566—1567.

[118] Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. – М., Ижевск: РХД, 2006. – 168 с.

[119] Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В. Прямой метод вычисления ляпуновских величин двумерных динамических систем // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 119–126.

[120] Леонов Г.А., Кузнецов Н.В. Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фунд. направ. – 2012. – Т. 45. – С. 105—121.

[121] Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2012. – Вып. 4. – С. 18–27.

[122] Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. – М.: Гостехиздат, 1953. – 360 с.

[123] Ляпунов А.М. Собр. сочинений. В 6-ти т. – Т. 2. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.

[124] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем второго порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 184–212.

[125] Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания для уравнений второго и третьего порядка //Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 821.

[126] Лысак М.Д. Возможные соотношения между спектрами показателей и скоростей блуждания трехмерных систем // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 825–826.

[127] Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Изв. Ин-та матем. и инфор. УдГУ. – 2015. – Вып. 2(46) – С. 106–111.

[128] Лысак М.Д. Спектры скорости и показателя блуждания для линейных дифференциальных систем специального вида // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 539–544.

[129] Мазаник С.А. Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. – Мн.: БГУ, 2008. – 176 с.

[130] Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 209–212.

[131] Макаров Е.К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 495–499.

[132] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. матем. журнал. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99–104.

[133] Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1775–1784.

[134] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 1408–1416.

[135] Мирзов Дж.Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Майкоп: РИПО «Адыгея», 1993. – 131 с.

[136] Мирзов Дж.Д. О колебаниях по Немыцкому решений систем дифференциальных уравнений // Избранные труды STAB04: Избранные труды VIII международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», – М., Инст-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2–4 июня 2004 — Электронное издание.

[137] Миценко В.В. Блуждаемость решений двумерных треугольных и диагональных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 907–908.

[138] Миценко В.В. О блуждаемости решений двумерных дагональных и треугольных дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 221–241.

[139] Миценко В.В. О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 851–852.

[140] Миценко В.В. Спектр верхнего показателя блуждаемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1347–1352.

[141] Миценко В.В. О спектрах характеристик блуждаемости линейных дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 822–824.

[142] Мышкис А.Д. Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 12. – С. 2267–2268.

[143] Мышкис А.Д. О теоремах типа Штурма для линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 9. – С. 1639–1641.

[144] Назаров Н.Н. Проблема изохронности при нелинейных колебаниях // Тр. ИММ АН Уз ССР. – 1948, вып. 4. – С. 12–23.

[145] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М., 1957. – 480 с.

[146] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.

[147] Немыцкий В.В. Колебательные режимы многомерных динамических систем // Труды Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. – Киев. – 1963. – Т. 2. – С. 308–314.

[148] Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.; – Л.: Наука, 1964. – 370 с.

[149] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.1. М.: Наука, 1978. – 392 с.

[150] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.2. М.: Наука, 1978. – 432 с.

[151] Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 226–235.

[152] Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 1048–1054.

[153] Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 220 с.

[154] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, № 6. – С. 925–931.

[155] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 2. – С. 253–259.

[156] Рогачев В.В. Существование решений с заданным числом нулей у регулярно нелинейного уравнения типа Эмдена-Фаулера произвольного порядка // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 12. – С. 1638–1644.

[157] Садовничий В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

[158] Салов Е.Е. О наименьшем классе Бэра минорант промежуточных по казателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1571.

[159] Салов Е.Е. О свойстве верхне-предельности показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 852.

[160] Салова Т.В. Одновременная достижимость центральных показателей четырехмерных гамильтоновых систем при бесконечно малых гамильтоновых возмущениях // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1441–1454.

[161] Салова Т.В. Об одновременной условной стабилизуруемости и дестабилизируемости линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1676–1677.

[162] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 111–166.

[163] Сергеев И.Н. Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 3. – С. 345–354.

[164] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1573.

[165] Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.

[166] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 11. – С. 1577.

[167] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 908.

[168] Сергеев И.Н. Полные частоты линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 1670.

[169] Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2009. – № 3. – С. 25–33.

[170] Сергеев И.Н. Распределение полных частот и показателей блуждаемости в пространстве решений линейной автономной системы// Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине И.Г. Петровского: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ». 2011. С. 342–343.

[171] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2011. – № 6. – С. 21–26.

[172] Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1661–1662.

[173] Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С. 1567–1568.

[174] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76, № 1. – С. 149–172.

[175] Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2013. – Вып. 29. – С. 414–442.

[176] Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 288 с.

[177] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204, № 1. – С. 119-138.

[178] Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений //Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1501–1503.

[179] Сергеев И.Н. Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем //Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 844–845.

[180] Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и инфор. УдГУ. – 2015. – Вып. 2(46). – С. 171–183.

[181] Сергеев И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем //Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 5. – С. 732–751.

[182] Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2016. – Вып. 31. – С. 177–219.

[183] Сергеев И.Н. Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". – 2017. – Т. 132. – С. 117–121.

[184] Сергеев И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2019. – № 1. – С. 21–26.

[185] Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2021. – № 3. – С. 41–46.

[186] Сергеев И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 6. – С. 726–734.

[187] Сергеев И.Н. Исследование полных свойств колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы по первому приближению // Матем. заметки. – 2024. – Т. 115, № 4. – С. 610–618.

[188] Смоленцев М.В. О спектрах частот нулей решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Моск. гос. ун-т. - М., 2013.

[189] Смоленцев М.В. Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С. 1571–1572.

[190] Смоленцев М.В. Существование линейного уравнения третьего порядка со счетным спектром частот // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 242–251.

[191] Смоленцев М.В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1413–1417.

[192] Соболь И.М. Исследование асимптотического поведения решений линейного дифференциального уравнения второго порядка при помощи полярных координат // Матем. сборник. – 1951. – Т. 28 (70), № 3. – С. 707–714.

[193] Сташ А.Х. Некоторые свойства частот решений линейных дифференциальных уравнений и систем: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Моск. гос. ун-т. - М., 2013.

[194] Схаляхо Ч.А. О распределении нулей решений одной нелинейной системы// Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 232–239.

[195] Томберг Э.А., Якубович В.А. Условия автоколебаний в нелинейных системах // Сиб. мат. журн. – 1989. – Т. 30, № 4. – С. 180–195.

[196] Тонков Е.Л. Неосциляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 12. – С. 2180–2185.

[197] Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра: Учеб. пособие. — М.: Физматлит, 2007. — 480 с.

[198] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

[199] Филиппов А.Ф. О свойствах решений линейной системы с квазипериодическими коэффициентами // Матем. заметки. – 1990. – Т. 47, вып. 2. – С. 124–129.

[200] Фурсов А.С. Радиусы устойчивости и неустойчивости для многочленов третьей и четвертой степеней // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1992. – № 2. – С. 28–33.

[201] Фурсов А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 990–1000.

[202] Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.

[203] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. – 720 с.

[204] Цой С.В. Пример несовпадения полной и векторной частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 815.

[205] Чантурия Т.А. Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 470–482.

[206] Чантурия Т.А. Об осцилляционных свойствах систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикладной матем. им. И.Н.Векуа. – 1983. – Т. 14. – С. 163–206.

[207] Чантурия Т.А. О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 11. – С. 1905–1915.

[208] Шишлянников Е.М. О континуальных спектрах частот у линейных дифференциальных уравнений и систем // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 856–857.

[209] Шишлянников Е.М. Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 1. – С. 64–68.

[210] Шишлянников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 5. – С. 14–21.

[211] Шишлянников Е.М. Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Матем. сборник. – 2018. – Т. 209, № 12. – С. 149–164.

[212] Шумафов М.М. К задаче стабилизации двумерной линейной дискретной системы //Известия Вузов. Сев.Кавказ. регион. Естеств. Науки. – 2009. – № 5. – С. 71–74.

[213] Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. – 1991. – Т. 49, № 5. – С. 142–148.

[214] Якубович В.А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. матем. журнал. – 1973. – Т.14, № 5. – С. 1100–1129.

[215] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

[216] Alexandroff P.S. Sur le puissance des ensembles (B) // Comp. rend. Acad. Sci. – 1916. – V. 162. – P. 323–325.

[217] Atkinson F.V. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. – 1955. – V. 5, № 1. – P. 643–647.

[218] Belohorec S. A criterion for oscillation and nonoscillation // Acta F.R.N. Univ. Comen. Math. – 1969. – V. 20. – P. 75–79.

[219] Baire R. Sur la representation des functions discontinues // Acta Math. – 1906. – V. 30. – P. 1–48.

[220] Efimov D.V., Fradkov A.L. Excitation of oscillations in nonlinear systems under static feedback // Proc. IEEE CDC. – 2004. – Bahamas, 2004. – P. 2521–2526.

[221] Kneser A.J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen beigrosser reden // Wethen der Arguments, I. J. Reine und angew. Math. – 1898. – V. 116. – P. 173–212.

[222] Kuznetsov N.V., Alexeeva T.A., Leonov G.A. Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // Nonlinear Dyn. – 2016. – V. 85. – P. 195–201.

[223] Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. – 1999. – V. 37, № 2. – P. 305–322.

[224] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czechosl. Math. Journ. – 1958. – V. 8, № 3. – P. 360–588.

[225] Kusano T., Naito M. Nonlinear oscillation of fourth-order differential equations // Canad. J. Math. – 1976. – V. 28, № 4. – P. 840–852.

[226] Levin J.J., Shatz S.S. Nonlinear oscillation of fixed period // J. Math. Anal. Appl. – 1963. – V. 7, № 2. – P. 284 – 288.

[227] Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Time-varying linearization and the Perron effects // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2007. – V. 17, № 4. – P. 1079–1107.

[228] Lusin N. Sur la classification de M. Baire // Comp. rend. Acad. Sci. – 1917. – V. 164. – P. 91–94.

[229] Makarov E., Niezabitowski M., Popova S., Zaitsev V., Zhuravleva M. On assignment of the upper Bohl exponent for linear discrete-time systems in infinite-dimensional spaces // 25th Int. Conf. Methods Models Autom. Robot. (MMAR). – 2021. – P. 239–244.

[230] Mibu Y. On Baire functions on infinite product spaces // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1944. – V. 20, № 9. – P. 661–663.

[231] Nawrat A., Czornik A. On the central exponent of discrete time-varying linear systems // 21st Intl. Conf. on Systems Engineering. – 2011. – P. 22–25.

[232] Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95, № 1. – P. 101–123.

[233] Obi C. Analitical theory of nonlinear oscillations VII. The periods of the periodic solutions of the equation $\ddot{x} + g(x) = 0$ // J. Math. Anal. Appl. – 1976. – V. 55, № 2. – P. 295–301.

[234] Opial Z. Sur les periodes des solutions de léquation differentielle $\ddot{x} + g(x) = 0$ // Ann. Polon. Math. – 1961. – V. 10, № 1. – P. 49–72.

[235] Palmer K.J. Exponential dichotomy, integral separation and diagonalizability of linear systems of ordinary differential equations // J. Differ. Equ. – 1982. – V. 43, № 2. – P. 184–203.

[236] Perron O. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist (erste Mitteilung) // J. reine und angew. Math. – 1913. – Bd. 142, Hf. 4. – S. 254–270.

[237] Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 31, Hf. 4. – S. 748–766.

[238] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 32, Hf. 1. – S. 703–728.

[239] Pogromsky A., Glad T., Nijmeijer H. On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. – 1999. – V. 9. № 4. – P. 629–644.

[240] Poincare H. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies // Amer. J. Math. – 1885. – V. 7, № 3. – P. 1–56.

[241] Pötzsche C., Russ E. Continuity and invariance of the Sacker–Sell spectrum // J. Dyn. Differ. Equ. – 2016. – V. 28. – P. 533–566.

[242] Sacker R., Sell G. A spectral theory for linear differential systems // J. Differ. Equ. – 1978. – V. 27. – P. 320–358.

[243] Siegmund S. Dichotomy spectrum for nonautonomous differential equations // J. Dyn. Differ. Equ. – 2002. – V. 14. – P. 243–258.

[244] Sontag E.D. Asymptotic amplitudes and Cauchy gains: A small gain principle and an application to inhibitory biological feedback // Systems and Control Letters. – 2002. – V. 47. – P. 167–179.

[245] Souslin M. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis // Comp. rend. Acad. Sci. – 1917. – V. 165. – P. 88–90.

[246] Srivastava S.M. A Course on Borel Sets. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 271 p.

[247] Urabe M. Potential forces which yield periodic motions of a fixed period // J. Math. Mech. – 1961. – V. 10, № 4. – P. 569–578.

[248] Urabe M. Relations between periods and amplitudes of periodic solutions of $\ddot{x} + g(x) = 0$ // Funkcial. Ekvas. Ser. Interuacia. – 1964. – V. 6, № 2. – P. 63–88.

[249] Waltman P. Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. – 1966. – V. 18. – P. 385–389.

[250] Wong J.S.W. A note on second order nonlinear oscillation // SIAM Review. – 1968. – V. 10. – P. 88–91.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ и индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus и RSCI

[251] Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1418–1422. — Перевод: Stash A. Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations // Differ. Equ. – 2014. – V. 50, № 10. – P. 1413–1417.

[252] Stash A.Kh. Spectra of total and vector frequencies of third-order linear differential equations // J. Math. Sci. – 2015. – V. 210, № 3. – P. 270–280.

[253] Сташ А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 143–144. — Перевод: Stash A. Kh. Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies // Differ. Equ. – 2015. – V. 51, № 1. – P. 146–148.

[254] Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вест. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 2. – С. 65–68. — Перевод: Stash A.Kh. The absence of residual property for total hyper-frequencies of solutions to third order differential equations //Moscow Univ. Math. Bull. – 2017. – V. 72, № 2. – P. 81–83.

[255] Сташ А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2019. – № 5. – С. 48–51. — Перевод: Stash A.Kh. Some properties of oscillation indicators of solutions to a two-dimensional system // Moscow Univ. Math. Bull. – 2019. – V. 74, № 5. – P. 202–204.

[256] Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. – 2019. – Т. 29, вып. 4. – С. 558–568.

[257] Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. – 2021. – Т. 31, вып. 1. – С. 59–69.

[258] Сташ А.Х. Свойства характеристик колеблемости Сергеева периодического уравнения второго порядка // Владикав. матем. журнал. – 2021. – Т. 23, вып. 2. – С. 78–86.

[259] Сташ А.Х. Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Владикав. матем. журнал. –

2022. – Т. 24, вып. 3. – С. 120–132. — Перевод: Stash A.Kh. Oriented rotatability exponents of solution to homogeneous autonomous linear differential systems// Siberian Mathematical Journal. – 2024. – V. 65, № 1. – P. 234–244.

[260] Сташ А.Х. О существенных значениях частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. – 2023. – Т. 33, вып. 1. – С. 141–155.

[261] Сташ А.Х. О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения и процессы управления. – 2023. – № 1. – С. 78–109.

[262] Сташ А.Х. Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем // Владикав. матем. журнал. – 2023. – Т. 25, вып. 2. – С. 136–143.

[263] Сташ А.Х. Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 5. – С. 588–595. — Перевод: Stash A.Kh. On the control of the spectra of upper strong oscillation exponents of signs, zeros, and roots of third-order differential equations // Differ. Equ. – 2023. – V. 59, № 5. – P. 597–605.

[264] Сташ А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 8. – С. 1139–1142. — Перевод: Stash A.Kh. Comparing the spectra of oscillation exponents of a nonlinear system and the first approximation system // Differ. Equ. – 2023. – V. 59, № 8. – P. 1147–1150.

[265] Сташ А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем // Вест. рос. ун-тов. Матем. – 2023. – Т. 28, № 141. – С. 60–67.

[266] Сташ А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 2. – С. 157–171. — Перевод: Stash A.Kh. On Essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system // Proc. Steklov Inst. Math. – 2023. – V. 321, № 1. – P. 216–229.

[267] Сташ А.Х. О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия вузов. Математика. – 2024. – № 4. – С. 47–66. — Перевод: Stash A.Kh. On infinite spectra of oscillation exponents of third-order linear differential equations // Russian Mathematics (WoS; Scopus SJR: 0.457). – 2024. – V. 68, № 4. – P. 42–59.

[268] Сташ А.Х. О некоторых свойствах сильных показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений // Владикав. матем. журнал. – 2024. – Т. 26, вып. 2. – С. 122–132.

Публикации автора по теме диссертации в журналах из перечня ВАК, индексируемых в базе данных РИНЦ

[269] Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2013. – Вып. 2 (119). – С. 9–23.

[270] Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2013. – Вып. 3 (122). – С. 9–17.

[271] Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2013. – Вып. 4 (125). – С. 25–31.

[272] Сташ А.Х. О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2014. – Вып. 1 (133). – С. 30–36.

[273] Сташ А.Х. О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2014. – Вып. 2 (137). – С. 23–32.

[274] Сташ А.Х. О существенных значениях частот решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2014. – Вып. 3(142). – С. 33–44.

[275] Сташ А.Х. О спектрах полных и векторных частот знаков и корней линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естествен.-матем. и техн. науки. – 2015. – Вып. 1(154). – С.27–31.

[276] Сташ А.Х. О некоторых свойствах полных и векторных частот знаков и корней решений линейных однородных двумерных дифференциальных систем // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2015. – Вып. 2 (161). – С. 13–17.

[277] Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2015. – Вып. 3 (166). – С. 18–22.

[278] Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений линейных неоднородных автономных дифференциальных уравнений // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2015. – Вып. 4 (171). – С. 30–35.

[279] Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2016. – Вып. 1 (176). – С. 17–24.

[280] Сташ А.Х. Свойства главных полных и векторных частот строгих знаков линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2016. – Вып. 2 (181). – С. 39–47.

[281] Сташ А.Х. К вопросу о строгих неравенствах между нижними и верхними главными частотами дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2016. – Вып. 3 (186). – С. 21–27.

[282] Сташ А.Х. Пример несовпадения полной и векторной частот гиперкорней решения дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2016. – Вып. 4 (191). – С. 47–50.

[283] Сташ А.Х. О некоторых свойствах полных и векторных гиперчастот решений двумерной дифференциальной системы // Вестн. Адыг. гос.

ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2017. – Вып. 2 (201). – С. 31–34.

[284] Сташ А.Х. Элементарное доказательство совпадения полной и векторной частот нулей решений автономных дифференциальных систем // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2018. – Вып. 1 (216). – С. 54–58.

[285] Сташ А.Х. О некоторых свойствах гиперчастот решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2018. – Вып. 2 (221). – С. 21–25.

[286] Сташ А.Х. О некоторых свойствах гиперчастот решений линейных многомерных дифференциальных систем // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2018. – Вып. 3 (226). – С. 20–24.

[287] Сташ А.Х. О разрывности старших частот на множестве линейных однородных многомерных дифференциальных систем // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2018. – Вып. 4 (231). – С. 28–32.

Аннотации докладов на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете

[288] Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1665.

[289] Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 908.

[290] Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 807–808. — Перевод: Stash A.Kh. Spectra of complete and vector frequencies of two-dimensional linear differential systems //Differ. Equ. 2013. V. 49, № 6. P. 779.

[291] Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1497–1498.

[292] Сташ А.Х. О спектрах частот некоторых линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 856.

[293] Сташ А.Х. Полные и векторные частоты нестрогих знаков решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 829–830.

[294] Сташ А.Х. О разрывности некоторых крайних частот на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, №11. – С. 1552–1553.

[295] Сташ А.Х. Полные и векторные частоты решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №6. – С. 853–854.

[296] Сташ А.Х. Полные и векторные частоты решений линейной однородной автономной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №6. – С. 851–852.

[297] Сташ А.Х. Неравенства между нижними и верхними главными частотами линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 11. – С. 1584–1585.

[298] Сташ А.Х. Некоторые свойства полных и векторных гиперчастот решений маломерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 11. – С. 1560–1561.

[299] Сташ А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости гиперкорней решений многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1574–1576.

[300] Сташ А.Х. Показатели колеблемости решений дифференциальных систем //Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 903–904.

[301] Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости и частот Сергеева уравнения Хилла //Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 6. – С. 837–838.

[302] Сташ А.Х. О множествах значений показателей вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 6. – С. 858–860.

[303] Сташ А.Х. О нулевых спектрах показателей колеблемости и вращаемости треугольных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 6. – С. 861–862.

[304] Сташ А.Х. Об управлении суслинскими спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней линейных однородных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 11. – С. 1575–1576.

[305] Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений высокого порядка// Дифференц. уравнения. – 2024. – Т. 60, № 6. – С. 850–852.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

[306] Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных систем // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы II Межд. конф. молодых ученых (Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г.) – Нальчик: ООО «Ред. журн. «Эльбрус», 2012. – С. 211–212.

[307] Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейных уравнений третьего порядка // Материалы IX Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 9–10 февраля 2012 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ. Том I. 2012. – С. 324–328.

[308] Сташ А.Х. О спектрах полных и векторных частот решений треугольных систем линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка // Материалы X Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 7–8 февраля 2013 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ. Том I. 2013. – С. 323–325.

[309] Сташ А.Х. Некоторые свойства полных и векторных частот линейных двумерных дифференциальных систем // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы XI Школы молодых ученых (Терскол, 4 – 8 декабря 2013 г.) – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. – С. 69–72.

[310] Сташ А.Х. Полные и векторные частоты знаков и корней решений линейных треугольных дифференциальных систем // Материалы XII

Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь», посвященной 75-летию Адыгейского государственного университета (Майкоп, 7–8 февраля 2015 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ. 2015. – С. 226–229.

[311] Сташ А.Х. Свойства частот решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Материалы I Межд. научн. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 8–10 октября 2015 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ. 2015. – С. 204–207.

[312] Сташ А.Х. О полных и векторных частотах решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // XIV Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 17–22 октября 2016 г.) – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2016. – С. 288–290.

[313] Сташ А.Х. Полные и векторные частоты гиперкорней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Материалы XIII Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 8–9 февраля 2016 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ, 2016. – С. 333–336.

[314] Сташ А.Х. Пример несовпадения полной и векторной гиперчастот решения двумерной дифференциальной системы // Материалы II Межд. научн. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 20–24 октября 2017 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. – С. 226–228.

[315] Сташ А.Х. О существовании двумерной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот нестрогих знаков и гиперкорней // Материалы XIV Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 8–9 февраля 2017 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ, Том II, 2017. – С. 58–60.

[316] Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений автономных дифференциальных систем // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы V Межд. научн. конф., посвященной 80-летию А. М. Нахушева (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.) – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. – С. 187.

[317] Сташ А.Х. Формула для вычисления скалярных частот решений двух классов линейных однородных дифференциальных уравнений второго

порядка // Материалы XV Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 8–9 февраля 2018 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ, 2018. – С. 227–230.

[318] Stash A.Kh. On the coincidence of the spectra of the exponents of oscillations of conjugate differential systems // Book of Abstracts. Third International Conference «Caucasian Mathematics Conference» (Rostov-on-Don, August 26-29, 2019) – Rostov-on-Don: Rostov branch of the Russian Engineering Academy Publishing. 2019. – P. 37–38.

[319] Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений автономных дифференциальных систем // Материалы III Межд. научн. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 15–20 октября 2019 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ, 2019. – С. 86–89.

[320] Сташ А.Х. Свойства частот Сергеева уравнения Хилла // Сборник тезисов Межд. научн. конф. «Уфимская осенняя математическая школа-2020». Часть 2. (Уфа, 11-14 ноября 2020 г.) – Уфа: Из-во Аэтерна, 2020. – С. 246–248.

[321] Сташ А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений дифференциальных систем // Сборник материалов межд. конф. «КРОМШ-2021» (Симферополь, 18–25 сентября 2021 г.) – Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021. – С. 55.

[322] Сташ А.Х. О показателях вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Материалы IV Межд. научн. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г.) – Майкоп: Изд-во АГУ, 2021. – С. 195–197.

[323] Сташ А.Х. О спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вторая конференция математических центров России (Москва, 7–11 ноября 2022 г.): сборник тезисов. – Москва: Из-во Моск. ун-та, 2022. – С. 221–223.

[324] Сташ А.Х. Вычисление показателей колеблемости некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Межд. конф.: Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.) – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023. – С. 318–319.

[325] Сташ А.Х. Вопросы непрерывности показателей колеблемости на множестве решений линейных дифференциальных систем // Современ-

ные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXIV: материалы межд. Воронежской весенней математической школы, посвященной 115-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина (Воронеж, 3 – 9 мая 2023 г.) – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023. – С. 372–374.

[326] Сташ А.Х. О спектрах характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Межд. научн. конф. (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023. – С. 224–225.

[327] Сташ А.Х. О свойствах показателей колеблемости нелинейной системы и системы ее первого приближения// «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024): Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.). – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. – С. 292–295.