ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»
Физический факультет
Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии

На правах рукописи

Корноухов Вадим Сергеевич

Динамические модели гравитирующих колец в небесной механике

1.3.1. Физика космоса, астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Кондратьев Борис Петрович

Москва – 2022

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Эта диссертация посвящена гравитирующим кольцам в небесной механике. В современной астрономической практике исследователи довольно часто встречаются с кольцевыми структурами. Примеры хорошо известны: кольца вокруг планет-гигантов в Солнечной системе, состоящие из относительно мелких тел; кольцевые структуры из звёзд в галактиках и тороидальные структуры, которые близки к кольцевым. Пояс Койпера в Солнечной системе также можно моделировать тороидальной структурой (или кольцевой, но с меньшей точностью).

До недавнего времени кольца в Солнечной системе были известны только у четырёх планет – газовых гигантов: это Сатурн, Юпитер, Уран и Нептун. Изучению этих колец посвящено много работ, см., например, книгу [1]. Однако недавно, в 2014 году при наблюдении покрытия звезды астероидом (это событие отслеживали 7 крупных телескопов) неожиданно были открыты кольца у представителя малых тел [2]. Это был астероид средних размеров – астероид-кентавр Харикло (Chariklo).

Выяснилось, что астероид Харикло имеет два кольца, что резко выделяет его среди других астероидов. Сейчас известно [3], что система колец астероида Харикло состоит из плотного внутреннего кольца *CR1* шириной *5.5 ÷ 7.0 км* и радиусом *390.6 ± 3.3 км* и менее массивного внешнего кольца *CR2* шириной *0.1 ÷ 1.75 км* и радиусом *405.4 ± 3.3 км*. Между кольцами существует зазор (щель) шириной *~14.8 км*.

Открытие колец привлекло внимание исследователей к астероиду Харикло. Однако сведения об этих кольцах в литературе до сих пор являются неполными: нет, например, данных о плотности вещества и массе колец. Поэтому изучение динамики астероида Харикло и его колец остается актуальной задачей.

Ещё одно важное открытие было сделано в 2017 году: при наблюдении прохождения по звезде фона было обнаружено плотное кольцо шириной 70 км и радиусом около 2287 км вокруг карликовой планетой Хаумеа (Haumea) [4]. С динамической точки зрения важно заметить, что это кольцо расположено довольно близко к самой планете (внутри предельного радиуса Роша), причем частицы в кольце делают полный оборот за утроенный период вращения самой Хаумеа. Открытие кольца ещё больше подогрело внимание к Хаумеа.

Метод, который используется в данной работе, заключается в построении специальных моделей колец. А именно, тонкие кольца вокруг небесных тел представляются в виде так называемых колец Гаусса. Кольцо Гаусса представляет собой кеплеров эллипс с одномерной плотностью обратно пропорциональной линейной скорости тела на кеплеровой орбите, в некотором смысле, масса тела «размазывается» по эллиптической орбите.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью работы является развитие метода колец Гаусса и применение его к изучению колец вокруг малых тел Солнечной системы. Для достижения этой цели были поставлены задачи:

1. Адаптация аналитического выражения потенциала кольца Гаусса для применения его на практике;
2. Вычисление взаимной гравитационной энергии двух колец Гаусса;
3. Использование этой взаимной энергии в качестве возмущающей функции при выводе уравнений вековой эволюции колец;
4. Уточнение размеров, формы и внутренней структуры карликовой планеты Хаумеа, а также расположения материального кольца вокруг неё;
5. Вычисление периодов нодальной и апсидальной прецессии кольца Хаумеа;
6. Разработка и применение новой модели R-тороида, как трёхмерного обобщения прецессирующего кольца Гаусса.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в создании и применении комплексного метода изучения динамики малых тел и колец вокруг них. В основном метод направлен:

1. На создание более совершенного способа уточнения размеров и пространственной ориентации эллипсоидального тела по лимбу в картинной плоскости;
2. Изучение новым методом, основанным на взаимной энергии тел, динамических и гравитационных свойств систем колец Гаусса;
3. Разработка и применение нового метода R-тороида. Использование взаимной гравитационной энергии R-тороида и внешнего кольца Гаусса для получения систем уравнений динамической эволюции орбит.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в демонстрации эффективности методов колец Гаусса и R-тороида применительно к малым телам и планетам Солнечной системы, а также к экзопланетам. Полученные на основе этих методов результаты по динамике карликовой планеты Хаумеа и циркумбинарных экзопланет расширяют наши представления об этих небесных телах. Взаимная гравитационная энергия кольца Гаусса с центральным телом позволила оценить нодальную прецессию материального кольца Хаумеа.

Объект и предмет исследования

В диссертационной работе изучаются гравитирующие кольца, такие как кольца Гаусса и кольца не планетного типа вокруг малых планет, а также новый объект – прецессирующее кольцо Гаусса (R-тороид).

Методология и методы исследования

В данной работе развивается и применяется комплексный подход к изучению динамики небесных тел, имеющих кольца. Этот подход включает в себя не только метод описания динамических и гравитационных свойств **систем колец Гаусса**, но также и создание новой аналитической **модели R-тороида**, в основе которой лежит 3D обобщение прецессирующего кольца Гаусса.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Алгоритм построения усечённого ряда по степеням эксцентриситета гравитационного потенциала кольца Гаусса в его главной плоскости расширяет область практического применения колец Гаусса в небесной механике;
2. Метод изучения вековой и долгопериодической эволюции планетных орбит, основанный на разложении взаимной гравитационной энергии двух колец Гаусса в ряд по степеням малых эксцентриситетов и углов ориентации, позволяет получать характеристики и параметры эволюции орбит планет в рамках двупланетной задачи;
3. Замкнутая система уравнения для определения пространственной ориентации и фигуры равновесия каменно-ледяного эллипсоида по его проекции на картинную плоскость и кривым блеска на две различные даты наблюдения уточняет характеристики и параметры орбитальной вековой и долгопериодической эволюции для карликовой планеты Хаумеа;
4. Модель R-тороида как результат трёхмерного обобщения прецессирующего кольца Гаусса, параметры фигуры и внешний потенциал R-тороида, взаимная энергия R-тороида и кольца Гаусса и созданные на этой основе уравнения вековой эволюции пробных орбит в циркумбинарных экзопланетных системах позволяют находить характеристики нодальной и апсидальной прецессии этих орбит.

Достоверность результатов

Достоверность результатов в данной работе определяется использованием в ней надежных и проверенных теоретических методов и вычислительных алгоритмов, а также тем, что все основные результаты прошли проверку, доложены на международных и всероссийских конференциях, а также опубликованы в авторитетных рецензируемых журналах.

Апробация работы

Международные конференции:

1. Уточнение размеров и формы карликовой планеты Хаумеа по наблюдениям покрытия ей звезды и данным фотометрии. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-11 апреля 2018 (устный)
2. To the question of precession ring around dwarf planet Haumea. THE ELEVENTH MOSCOW SOLAR SYSTEM SYMPOSIUM 11M-S3, SPACE RESEARCH INSTITUTE OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, Москва, Россия, 5-9 октября 2020 (устный)

Всероссийские конференции:

1. Determination of the figure of the dwarf planet Haumea from observations of a stellar occultation and photometry data. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2018», Санкт-Петербург, Россия, 1-5 октября 2018 (устный)
2. Новый подход к задаче о вековых возмущениях в небесной механике: метод взаимной энергии двух колец Гаусса. Третья астрометрическая конференция-школа «Астрометрия вчера, сегодня, завтра», Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, ГАИШ, Россия, 14-16 октября 2019 (устный)

3. Высокоточные определения орбит спутников карликовой планеты Хаумеа. Третья астрометрическая конференция-школа «Астрометрия вчера, сегодня, завтра», Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, ГАИШ, Россия, 14-16 октября 2019 (устный)

Публикации по теме диссертации

Основные результаты были опубликованы в 7 рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности:

1. Кондратьев Б.П., **Корноухов В.С.**, Трубицына Н.Г. Разложение компланарного потенциала кольца Гаусса в ряд по степеням эксцентриситета. Астрономический Вестник. Исследования Солнечной Системы. 2021. т.55. №4. с.348-358 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.266) // Переводная версия: Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.**, Trubitsyna N.G. Decomposition of the coplanar potential of the Gaussian ring in a series in degrees of eccentricity. Solar System Research. 2021. vol.55. is.4. p.348-357 (impact-factor WoS: 0.790)
2. Кондратьев Б.П., **Корноухов В.С.** Взаимная энергия колец Гаусса. Журнал Технической Физики. 2019. т.89. №10. с.1477-1481 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 0.776) // Переводная версия: Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.** Mutual energy of Gaussian rings. Technical Physics. 2019. vol.64. is.10. p.1395-1399 (impact-factor WoS: 0.489)
3. Кондратьев Б.П., **Корноухов В.С.** Взаимная гравитационная энергия колец Гаусса и проблема возмущений в небесной механике. Астрономический Журнал. 2020. т.97. №5. с.408-420 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.** Mutual gravitational energy of Gaussian rings and the problem of perturbations in celestial mechanics. Astronomy Reports. 2020. vol.64. is.5. p.434-446 (impact-factor WoS: 1.172)

4. Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.** Determination of the body of the dwarf planet Haumea from observations of a stellar occultation and photometry data. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. vol.478. p.3159-3176 (impact-factor WoS: 5.232)
5. Кондратьев Б.П., **Корноухов В.С.** Вековая эволюция колец вокруг трёхосных гравитирующих тел. Астрономический Журнал. 2020. т.97. №10. с.866-872 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.** Secular evolution of rings around rotating triaxial gravitating bodies // Astronomy Reports. 2020. vol.64. is.10. p.870-875 (impact-factor WoS: 1.172)
6. Кондратьев Б.П., **Корноухов В.С.** R-тороид как трёхмерное обобщение кольца Гаусса и его применение в астрономии. Астрономический Журнал. 2021. т.98. №5. с.407-422 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.** R-toroid as a three-dimensional generalization of a Gaussian ring and its application in Astronomy. Astronomy Reports. 2021. vol.65. is.5. p.412-426 (impact-factor WoS: 1.172)
7. Кондратьев Б.П., **Корноухов В.С.** Исследование вековой эволюции циркумбинарных систем на моделях R-тороида и колец Гаусса // Астрономический Журнал. 2021. т.98. №7. с.571-580 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: Kondratyev B.P., **Kornoukhov V.S.** Study of the secular evolution of circumbinary systems using R-toroid and Gaussian ring models. Astronomy Reports. 2021. vol.65. is.7. p.588-597 (impact-factor WoS: 1.172)

Личный вклад автора

Автор диссертации активно участвовал в разработке новых методов и, в частности, внес вклад в создание моделей взаимодействующих колец Гаусса и R-тороида. С его участием были разработаны программы с помощью пакетов Maple и Wolfram Mathematica, которые позволили уточнить форму карликовой планеты Хаумеа, направление оси её вращения и рассчитать частоту прецессии её кольца. Им были составлены программы по расчёту частот прецессии для орбит пробных планет в трёх экзопланетных системах. Кроме того, диссертант провёл важную работу по проверке математического аппарата, применённого в указанных исследованиях, а также по поиску новой информации о циркумбинарных экзопланетах в научной литературе.

Структура работы

Работа состоит из введения, 3-х глав и заключения. Полный объём диссертация размещён на 118 страницах и включает 28 рисунков, 6 таблиц, список литературы из 54 наименований и 3-х Приложений.

Глава 1 посвящена кольцам Гаусса. Ранее кольца Гаусса уже рассматривались в ряде работ (подробнее см. Главу 1), однако новым в нашей работе является постановка и решение сложной задачи о нахождении взаимной энергии двух колец Гаусса. Эта взаимная энергия колец используется в качестве функции возмущений и применяется для вывода уравнений вековой эволюции орбит и колец.

Глава 2 посвящена удивительной карликовой планете Хаумеа, входящей в число транснептунных объектов, а также динамике недавно открытого вокруг неё кольца из частиц. Здесь важную роль играет решение обратной задачи: восстановление пространственной формы трёхосного объекта по его наблюдаемому лимбу и данным фотометрии.

Глава 3 посвящена новой динамической модели – трёхмерному обобщению прецессирующего кольца Гаусса. Эта модель получила название R-тороида. Заметим, что этот объект имеет смысл вводить, когда период прецессии орбиты внутренней (возмущающей) планеты сравним с орбитальным периодом внешней планеты. В таком случае для внутренней орбиты в сравнении с внешней «быстрыми» переменными оказываются не только средние аномалии орбит, но и долготы внутренней орбиты. В этой главе изучается форма и гравитационный потенциал R-тороида. Особое внимание уделяется решению сложной задачи – нахождению взаимной энергии новой фигуры и внешнего кольца Гаусса. Модель R-тороида особенно актуальна для изучения динамики экзопланет у других звёзд. В данной работе даны примеры изучения новым методом вековой прецессии и эволюции орбит в циркумбинарных системах экзопланет.

Глава 1. Потенциал, взаимная энергия и динамическая эволюция колец Гаусса

При написании данной Главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные соискателем Корноуховым В.С. в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты и выводы исследования: [5], [6] и [7].

1.1 Кольцо Гаусса

В небесной механике классическим способом учёта возмущений для исследования эволюции орбит возмущаемых тел является метод Лагранжа, в котором возмущающая функция раскладывается по неким функциям наклонений, эксцентриситетов и косинусам комбинаций остальных угловых орбитальных элементов. В зависимости от конкретного приложения данные функции могут иметь самый различный вид [8], [9]. В связи с отсутствием компьютеров в прошлом, безусловно, поиск подходящих разложений возмущающей функции позволял находить решения уравнений эволюции оскулирующих элементов орбит возмущаемых тел. Также такие разложения и по сей день помогают исследовать отдельные гармоники в эволюции оскулирующих элементов.

Поскольку число слагаемых в разложении возмущающей функции вообще говоря бесконечно, высокие требования к точности расчётов повышают и трудоёмкость этих разложений. Существенный вклад в решение проблемы исследования отдельных гармоник внёс К.Ф. Гаусс в 1818 году. Он предложил усреднять возмущающую функцию по средним аномалиям, в связи с этим он ввёл понятие некоторого кольца, представляющего кеплеров эллипс, масса которого «размазана» по этому эллипсу с одномерной плотностью, обратно пропорциональной линейной скорости движения тела в данной точке эллипса.

Представление в виде такого кольца (которое впоследствии было названо кольцом Гаусса) орбиты тела является следствием усреднения по средней аномалии. Метод Гаусса в небесной механике является частным случаем так называемого метода усреднения по «быстрой» переменной. «Быстрой» переменной считается переменная, скорость изменения которой много больше по абсолютной величине скорости изменения остальных переменных. Более того, как правило, все «быстрые» переменные считаются независимыми друг от друга, а остальные переменные – независимыми от «быстрых». В случае метода Гаусса в роли «быстрой» переменной выступает средняя аномалия. Усреднение по средней аномалии в методе Гаусса можно считать эквивалентным усреднению за период обращения по орбите, но с одной оговоркой: *изменяющейся со временем в течение одного орбитального периода условно считается только средняя аномалия* (и, например, зависящие от неё истинная и эксцентрическая аномалии). Это значит, что если таких средних аномалий будет, например, две, то усреднять потребуется дважды: за первый орбитальный период и за второй, то есть то время, по которому происходит усреднение – это не то время, за которое изменяются все «быстрые» переменные, а лишь заменяющий параметр, по смыслу являющийся временем. Таким образом, элементарная масса dm представляется через элементарное (заменяющее) время dt в виде

$$\frac{dm}{m} = \frac{dt}{T}, \qquad (1.1)$$

где m – масса кольца Гаусса, T – период обращения по кеплеровой орбите.

Элементарную массу dm можно выразить также через элементарную истинную аномалию $d\upsilon$ из углового момента L_{orb} тела на кеплеровой орбите

$$L_{orb} = mr^2 \frac{d\upsilon}{dt} = m\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}, \qquad (1.2)$$

где υ – истинная аномалия; μ – гравитационный параметр, a – большая полуось, e – эксцентриситет тела; модуль радиус-вектора тела на орбите

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon}. \qquad (1.3)$$

По обобщённому третьему закону Кеплера гравитационный параметр μ связан с орбитальным периодом T и большой полуосью a соотношением

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3. \tag{1.4}$$

Подставив (1.3) и (1.4) в (1.2), а затем (1.2) в (1.1) получим выражение для элементарной массы dm через элементарную истинную аномалию $d\upsilon$

$$dm = \frac{m\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} d\upsilon. \tag{1.5}$$

1.2 Потенциал кольца Гаусса

Потенциал кольца Гаусса в произвольной пространственной точке с радиус-вектором $\vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ может быть выражен в общем интегральном виде

$$\varphi_{ring}\left(\vec{r}\right) = \int \frac{Gdm}{\left|\vec{r} - \vec{r}_G\right|}, \tag{1.6}$$

где $\vec{r}_G$ – радиус-вектор точки на кольце Гаусса с массой dm, определяемой, например, с помощью (1.5).

С учётом (1.5) выражение (1.6) может быть записано в виде

$$\varphi_{ring}\left(\vec{r}\right) = \frac{Gm\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\upsilon}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2 \Delta\left(\vec{r}, \vec{r}_G\right)}, \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta\left(\vec{r}, \vec{r}_G\right) = \left|\vec{r} - \vec{r}_G\right| = \sqrt{r^2 + {r_G}^2 - 2rr_G\cos\psi}, \\ &\cos\psi = \frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}_G\right)}{rr_G} \end{aligned} \tag{1.8}$$

и, если начало системы координат поместить в активный фокус кольца, ось X направить на перицентр, а ось Z перпендикулярно плоскости кольца, то модуль радиус-вектора точки на кольце Гаусса $\vec{r}_G$ будет выражен с помощью формулы (1.3).

Гаусс в своё время ограничился лишь аналитическим получением компонентов градиента потенциала кольца. В конечном аналитическом виде потенциал кольца Гаусса был получен относительно недавно в работах [10], [11], [12].

$$\varphi_{ring}(x_1,x_2,x_3)=\frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda-\nu}}\left\{\mathrm{K}(k)+\frac{ea(x_1+ea)}{a^2+\nu}\left[\Pi(n,k)-\mathrm{K}(k)\right]\right\},$$
$$n=\frac{a^2+\nu}{\nu-\lambda},\quad k=\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\nu}}\le 1. \tag{1.9}$$

где $m-$ масса кольца, $a\ge b-$ его большая и малая полуоси и $e-$ эксцентриситет. $\mathrm{K}(k)$ и $\Pi(n,k)$ – стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода

$$\mathrm{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}};\Pi(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\left(1-n\sin^2 x\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}. \tag{1.10}$$

Эллипсоидальные координаты (μ,ν,λ) пробной точки через соответствующие декартовы координаты (x_1,x_2,x_3) выражаются с помощью формул Виета

$$\lambda+\mu+\nu=(x_1+ea)^2+x_2^2+x_3^2-a^2-b^2,$$
$$\mu\nu+\mu\lambda+\lambda\nu=a^2b^2\left(1-\frac{(x_1+ea)^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right)-x_3^2\left(a^2+b^2\right), \tag{1.11}$$
$$\lambda\mu\nu=x_3^2a^2b^2.$$

Поскольку начало отсчёта расположено в активном фокусе эллипса, уравнение кольца имеет вид

$$\frac{(x_1+ea)^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1. \tag{1.12}$$

1.3 Разложение потенциала кольца Гаусса по степеням эксцентриситета в его плоскости

В астрономической практике довольно часто встречаются случаи почти круговых и почти компланарных орбит, а ввиду неявности выражения эллиптических координат через декартовы (1.11), а также наличия неопределённости «ноль на ноль» в выражении (1.9) при эксцентриситете $e\to 0$ становится актуальной задача о разложении потенциала кольца Гаусса по малому эксцентриситету.

В данной работе разложение аналитического выражения потенциала кольца Гаусса (1.9) ограничивается до четвёртой степени эксцентриситета включительно и производится только на плоскости самого кольца. Также применительно к большим планетам Солнечной системы представлены эквипотенциали колец Гаусса этих планет, рассчитанные по полученным формулам.

1.3.1 Разложение во внутренней области кольца

Разобьём задачу разложения в ряд на две подзадачи. Сначала получим коэффициенты разложения потенциала в области внутри кольца на его плоскости, тогда третья эллипсоидальная координата обратится в нуль $\lambda = 0$ и третья декартова координата – тоже

$$x_3 = 0\,, \tag{1.13}$$

тогда уравнения (1.11) примут вид

$$\begin{aligned} &\lambda = 0, \\ &\mu + \nu = \left(x_1 + ea\right)^2 + x_2^2 - a^2 - b^2, \\ &\mu\nu = a^2 b^2 \left(1 - \frac{\left(x_1 + ea\right)^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ввиду уравнений (1.13) и (1.14), выражения (1.9) немного упростятся

$$\begin{aligned} &\varphi_{ring}\left(x_1, x_2, 0\right) = \frac{2Gm}{\pi\sqrt{-\nu}} \left\{ \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right) + \frac{ea\left(x_1 + ea\right)}{a^2 + \nu} \left[\Pi\left(n, \tilde{k}\right) - \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right) \right] \right\}, \\ &n = \frac{a^2 + \nu}{\nu}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{-\nu}}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Из уравнений (1.14) можно выразить эллипсоидальные координаты пробной точки μ и ν, связанные соотношением $\mu > \nu$:

$$\begin{aligned} &\mu = \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2}; \quad T_1 = \left(x_1 + ea\right)^2 + x_2^2 - a^2 - b^2 \le 0; \\ &\nu = \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2}; \quad T_2 = a^2 b^2 \left(1 - \frac{\left(x_1 + ea\right)^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right) \ge 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

До четвёртой степени включительно ряд для потенциала кольца Гаусса во внутренней области на его плоскости представим в виде

$$\varphi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi a}\left(\varphi_0 + \varphi_1 e + \varphi_2 e^2 + \varphi_3 e^3 + \varphi_4 e^4\right). \tag{1.17}$$

Для уменьшения громоздкости приводимых формул, представим вывод до третьей степени эксцентриситета e^3, подразумевая, что при четвёртой степени эксцентриситета e^4 коэффициент получается аналогично.

Разложения в ряды по эксцентриситету эллиптических координат и их простых комбинаций получаются в виде

$$\nu \approx -a^2\left(1-\frac{x_1^2}{r^2}e^2-\frac{2ax_1x_2^2}{r^4}e^3\right);\ a^2+\nu \approx e^2a^2\left(\frac{x_1^2}{r^2}+\frac{2ax_1x_2^2}{r^4}e\right);$$
$$\frac{1}{\nu}\approx -\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{x_1^2}{r^2}e^2+\frac{2ax_1x_2^2}{r^4}e^3\right);\ \frac{1}{\sqrt{-\nu}}\approx \frac{1}{a}+\frac{x_1^2}{2ar^2}e^2+\frac{x_1x_2^2}{r^4}e^3; \tag{1.18}$$
$$\mu \approx -a^2+r^2+2ax_1e+a^2\left(1+\frac{x_2^2}{r^2}\right)e^2-\frac{2a^3x_1x_2^2}{r^4}e^3.$$

С помощью формул (1.18) ряды для параметра n и модуля эллиптического интеграла $\tilde{k}$ из (1.15) примут вид

$$n\approx -\frac{x_1^2}{r^2}e^2-\frac{2ax_1x_2^2}{r^4}e^3;\ \tilde{k}\approx k+\frac{x_1}{r}e+s_2e^2+s_3e^3, \tag{1.19}$$

где

$$k=\frac{r}{a};\ s_2=\frac{2x_2^2-\left(1-k^2\right)x_1^2}{2a^2k^3};\ s_3=-x_1\frac{x_2^2\left(6-2k^2\right)-x_1^2\left(1+k^2\right)}{2a^3k^5}. \tag{1.20}$$

Разность эллиптических интегралов, входящую в (1.15) с учётом (1.19) запишем в виде

$$\Pi\left(n,\tilde{k}\right)-\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)=n\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\,dx}{\left(1-n\sin^2 x\right)\sqrt{1-\tilde{k}^2\sin^2 x}}\approx n\int_0^{\pi/2}\frac{\left(1-\frac{x_1^2}{r^2}e^2\sin^2 x\right)\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-\tilde{k}^2\sin^2 x}}. \tag{1.21}$$

Используя соотношение

$$\frac{n}{a^2+\nu}=\frac{1}{\nu}, \tag{1.22}$$

в выражении (1.15) можно исключить неопределённость «ноль на ноль», тогда множитель с этой неопределённостью

$$S=\frac{\Pi\left(n,\tilde{k}\right)-\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)}{a^2+\nu}\approx -\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{x_1^2}{r^2}e^2\right)\frac{\left(1-\frac{x_1^2}{r^2}e^2\sin^2 x\right)\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-\left(k+\frac{x_1}{r}e+s_2e^2\right)^2\sin^2 x}}. \tag{1.23}$$

Раскладывая в ряд подынтегральное выражение в (1.23), получаем

$$S\approx -\frac{1}{a^2}\left\{I_{12}+\frac{kx_1}{r}I_{34}e+e^2\left[\frac{k^2x_1^2+2x_2^2}{2r^2}I_{34}+\frac{3k^2x_1^2}{2r^2}I_{56}+\frac{x_1^2}{r^2}\left(I_{12}-I_{14}\right)\right]\right\}. \tag{1.24}$$

Здесь через I_{ij} обозначены вспомогательные интегралы

$$I_{ij}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2j}x}{\left(1-k^2\sin^2 x\right)^{\frac{i}{2}}}dx\,. \tag{1.25}$$

Выражения для вспомогательных интегралов (1.25) представлены в (П1.1).

Также потребуется получить ряд и для слагаемого $\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)$

$$K\left(\tilde{k}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{a_1}+\frac{x_1}{r}e+s_2e^2+s_3e^3\right)^2\sin^2 x}}, \tag{1.26}$$

который после разложения в ряд по эксцентриситету подынтегрального выражения примет вид

$$\begin{aligned}K\left(\tilde{k}\right)\approx I_{10}+\frac{kx_1}{r}I_{32}e+\left[\frac{k^2x_1^2+2x_2^2}{2r^2}I_{32}+\frac{3k^2x_1^2}{2r^2}I_{54}\right]e^2+\\+x_1\left[\frac{k^2x_1^2-\left(2-k^2\right)x_2^2}{r^3k}I_{32}+\frac{3\left(k^2x_1^2+2x_2^2\right)}{2kra^2}I_{54}+\frac{5k^3x_1^2}{2r^3}I_{76}\right]e^3.\end{aligned} \tag{1.27}$$

С учётом обозначений (1.23) и (1.27) потенциал (1.15) запишется в виде

$$\varphi_{ring}\approx\frac{2Gm}{\pi\sqrt{-\nu}}\left\{\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)+ea\left(x_1+ea\right)S\right\}. \tag{1.28}$$

Теперь, чтобы привести (1.28) к виду (1.17), подставим из (1.18) ряд для множителя $\frac{1}{\sqrt{-\nu}}$ в (1.28) и комбинируем с (1.23) и (1.27). В таком случае коэффициенты φ_j (коэффициент φ_4 приводится без вывода, поскольку его вывод, как уже было отмечено, аналогичен выводу для предыдущих коэффициентов) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}&\varphi_0=K(k)\,;\;\varphi_1=\frac{x_1}{k^2a}\left(\frac{2-k^2}{1-k^2}\mathrm{E}(k)-2\mathrm{K}(k)\right);\\&\varphi_2=\frac{1}{2k^4a^2}\left\{\left(-\frac{4-7k^2+k^4}{\left(1-k^2\right)^2}x_1^2+2\frac{2-k^2}{1-k^2}x_2^2\right)\mathrm{E}(k)+\left(\frac{4-5k^2}{1-k^2}x_1^2-4x_2^2\right)\mathrm{K}(k)\right\};\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_3 = \frac{x_1}{6k^6\left(1-k^2\right)^2 a^3}\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{16-42k^2+35k^4+k^6-2k^8}{1-k^2}x_1^2-6\left(8-13k^2+3k^4\right)x_2^2\right]E(k)\\&-\left[\left(16-34k^2+21k^4+k^6\right)x_1^2-6\left(8-9k^2\right)\left(1-k^2\right)x_2^2\right]K(k)\end{aligned}\right\};\\
&\varphi_4 = \frac{1}{8k^8\left(1-k^2\right)^3 a^4}\cdot\left(Q_K K(k) - Q_E E(k)\right),
\end{aligned} \tag{1.30}$$

где

$$\begin{aligned}
&Q_E = \frac{16-58k^2+75k^4-43k^6+k^8+k^{10}}{1-k^2}2x_1^4\\
&-\left(48-126k^2+99k^4-11k^6-2k^8\right)4x_1^2x_2^2+\left(1-k^2\right)\left(8-13k^2+3k^4\right)4x_2^4,\\
&Q_K = \left(32-100k^2+106k^4-45k^6-k^8\right)x_1^4\\
&-\left(48-102k^2+57k^4+k^6\right)4x_1^2x_2^2+\left(1-k^2\right)^2\left(8-9k^2\right)4x_2^4,\ k=\frac{r}{a},\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Уравнение (1.17) при $e=0$ даёт хорошо известное выражение для потенциала однородного круглого кольца во внутренней его области

$$\varphi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi a}K\left(\frac{r}{a}\right). \tag{1.32}$$

Также интересной является асимптотика потенциала в окрестности активного фокуса кольца Гаусса. Для этого сначала положим $x_2=0$, тогда $x_1=ak$, значит, нужно рассмотреть асимптотику коэффициентов (1.29), (1.30) при $k\to 0$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \approx \frac{3\pi}{16}\mathrm{k}^3+\mathrm{O}\left(k^5\right);\varphi_2 \approx \frac{3\pi}{16}\mathrm{k}^2+\mathrm{O}\left(k^4\right);\\
&\varphi_3 \approx \frac{15}{32}\pi k^3+O\left(k^5\right);\varphi_4 \approx \frac{15}{64}\pi k^2+O\left(k^4\right).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Как видно из (1.33), все коэффициенты $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ в пределе $k\to 0$ обращаются в нуль. При этом коэффициент φ_0 в нуль не обращается, значение потенциала в точке активного фокуса тогда будет равно

$$\varphi_{ring}(0,0,0)=\frac{Gm}{a}. \tag{1.34}$$

Результат (1.34) совпадает с результатом, полученным в [12].

1.3.2 Разложение во внешней области кольца

Вторая подзадача включает в себя нахождение ряда для потенциала в точке вне кольца Гаусса на его плоскости. В таком случае третья декартова координата по-прежнему равна нулю (1.13), но теперь равна нулю не λ, а вторая эллипсоидальная координата $\mu = 0$, тогда уравнения (1.11) примут вид

$$\begin{aligned} &\mu = 0, \\ &\lambda + \nu = \left(x_1 + ea\right)^2 + x_2^2 - a^2 - b^2, \\ &\lambda\nu = a^2 b^2 \left(1 - \frac{\left(x_1 + ea\right)^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Формулы (1.16) дают решение и для (1.34), только нужно в них заметить μ на λ.

В данном случае формула (1.9) упростится и примет вид аналогичный (1.15)

$$\begin{aligned} &\varphi_{ring}\left(x_1, x_2, 0\right) = \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda - \nu}} \left\{ \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right) + \frac{ea\left(x_1 + ea\right)}{a^2 + \nu} \left[\Pi\left(n, \tilde{k}\right) - \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)\right] \right\}, \\ &n = \frac{a^2 + \nu}{\nu - \lambda}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{-\nu}{\lambda - \nu}}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Аналогично (1.17) получаем ряд во внешней области кольца Гаусса

$$\varphi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi r}\left(\bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1 e + \bar{\varphi}_2 e^2 + \bar{\varphi}_3 e^3 + \bar{\varphi}_4 e^4\right), \tag{1.37}$$

где коэффициенты $\bar{\varphi}_j$ выражаются аналогично (1.29) и (1.30)

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_0 = K\left(\bar{k}\right); \bar{\varphi}_1 = \frac{x_1}{a}\left(\frac{1 - 2\bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2}\mathrm{E}\left(\bar{k}\right) - \mathrm{K}\left(\bar{k}\right)\right); \\ &\bar{\varphi}_2 = \frac{\bar{k}^2}{2a^2}\left\{\left(-\frac{1 - 7\bar{k}^2 + 4\bar{k}^4}{\left(1 - \bar{k}^2\right)^2} x_1^2 + 2\frac{1 - 2\bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2} x_2^2\right)\mathrm{E}\left(\bar{k}\right) + \left(\frac{1 - 2\bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2} x_1^2 - 2x_2^2\right)\mathrm{K}\left(\bar{k}\right)\right\}; \\ &\bar{\varphi}_3 = \frac{\bar{k}^2 x_1}{6\left(1 - \bar{k}^2\right)a^3}\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{2 - \bar{k}^2 - 35\bar{k}^4 + 42\bar{k}^6 - 16\bar{k}^8}{\left(1 - \bar{k}^2\right)^2} x_1^2 - \frac{6\bar{k}^2\left(3 - 13\bar{k}^2 + 8\bar{k}^4\right)}{1 - \bar{k}^2} x_2^2\right] E\left(\bar{k}\right) - \\ &- \left[\frac{2\left(1 - 7\bar{k}^4 + 4\bar{k}^6\right)}{1 - \bar{k}^2} x_1^2 - 6\bar{k}^2\left(3 - 4\bar{k}^2\right) x_2^2\right] K\left(\bar{k}\right) \end{aligned}\right\}; \\ &\bar{\varphi}_4 = \frac{\bar{k}^4}{8\left(1 - \bar{k}^2\right)a^4} \times \left\{\bar{Q}_K K\left(\bar{k}\right) - \bar{Q}_E E\left(\bar{k}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

где

$$\bar{Q}_E = \frac{\left(1+\bar{k}^2-43\bar{k}^4+75\bar{k}^6-58\bar{k}^8+16\bar{k}^{10}\right)}{\left(1-\bar{k}^2\right)^3}2x_1^4$$
$$-\frac{\left(2+11\bar{k}^2-99\bar{k}^4+126\bar{k}^6-48\bar{k}^8\right)}{\left(1-\bar{k}^2\right)^2}4x_1^2x_2^2+\frac{\left(3-13\bar{k}^2+8\bar{k}^4\right)}{1-\bar{k}^2}4x_2^4;$$
$$\bar{Q}_K = \frac{\left(2+3\bar{k}^2-41\bar{k}^4+44\bar{k}^6-16\bar{k}^8\right)}{\left(1-\bar{k}^2\right)^2}x_1^4 \tag{1.39}$$
$$-\frac{\left(1+6\bar{k}^2-21\bar{k}^4+12\bar{k}^6\right)}{1-\bar{k}^2}8x_1^2x_2^2+4\bar{k}^2\left(3-4\bar{k}^2\right)x_2^4, \quad \bar{k}=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\le 1.$$

Выражения для потенциала (1.17) и (1.37) преобразуются друг в друга с помощью преобразований для эллиптических интегралов (см., например, [13])

$$K(k)=\bar{k}K\left(\bar{k}\right);\, E(k)=\frac{1}{\bar{k}}E\left(\bar{k}\right)-\left(\frac{1}{\bar{k}}-\bar{k}\right)K\left(\bar{k}\right). \tag{1.40}$$

1.3.3 Кривые равного потенциала для колец Гаусса больших планет Солнечной системы

Теперь выражения для потенциала во внутренней области (1.17) и во внешней области (1.37) можно использовать для изображения кривых равного потенциала колец Гаусса для больших планет Солнечной системы в проекции на плоскость, близкой к плоскости эклиптики (пренебрегаем наклонениями орбит всех больших планет к этой плоскости).

Эквипотенциали показаны на рисунках 1.1-1.5. Все необходимые данные по полуосям эксцентриситетам и долготам перицентров взяты из работы [14].

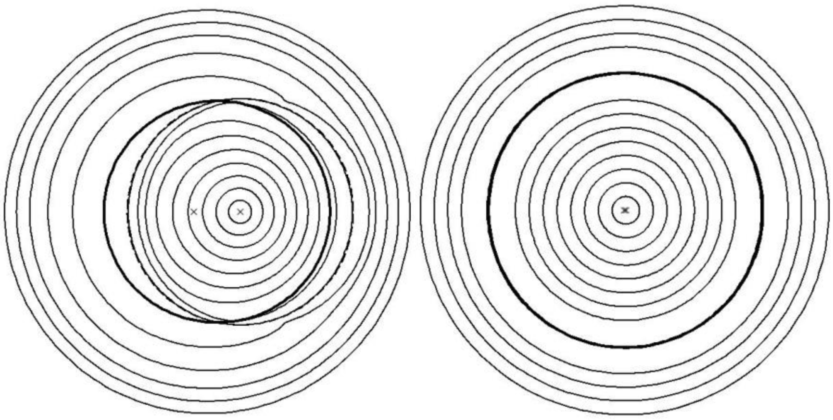

Рис.1.1. Эквипотенциали (показаны тонкими линиями) орбит (показаны жирными линиями) для Меркурия (слева) и Венеры (справа). Крестиками отмечены фокусы эллиптических колец; для сплюснутой орбиты Меркурия эти фокусы заметно расходятся, для Венеры – почти совпадают. Штриховой линией показана окружность, в точках которой потенциал имеет логарифмическую расходимость.

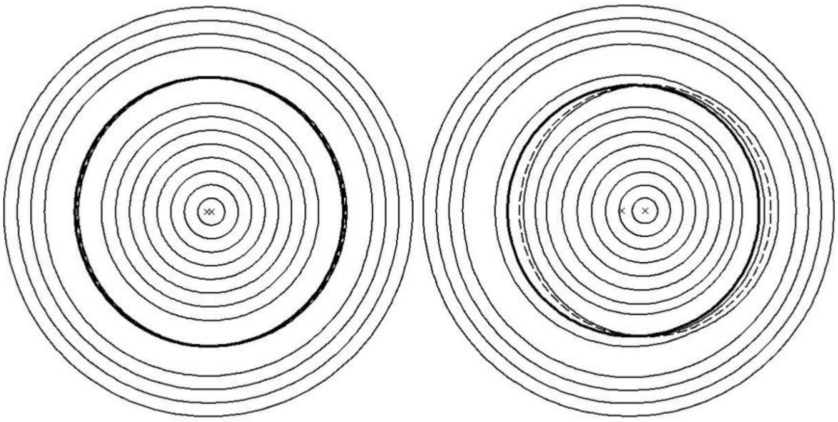

Рис.1.2. То же самое, что на рис.1.1, но для орбит Земли (слева) и Марса (справа).

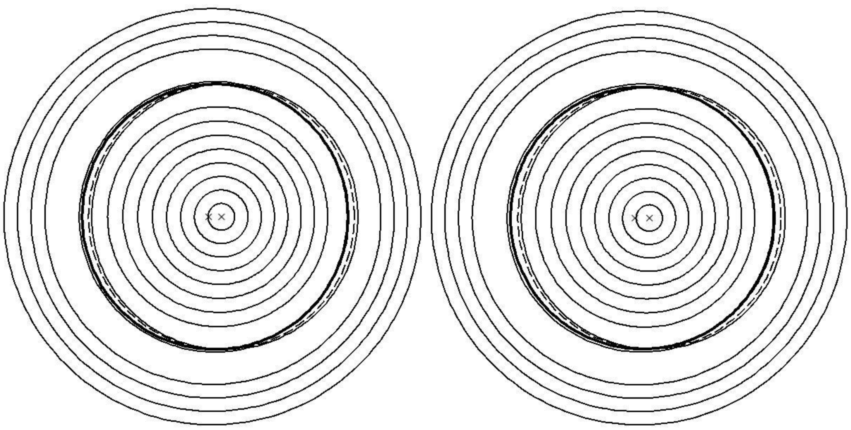

Рис.1.3. То же самое, что на рис.1.1, но для орбит Юпитера (слева) и Сатурна (справа).

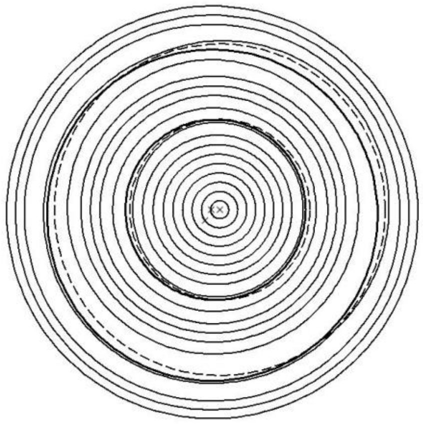

Рис.1.4. Эквипотенциали (тонкими линиями) для суперпозиции гравитационных полей колец Гаусса планет (жирными линиями) Юпитера и Сатурна.

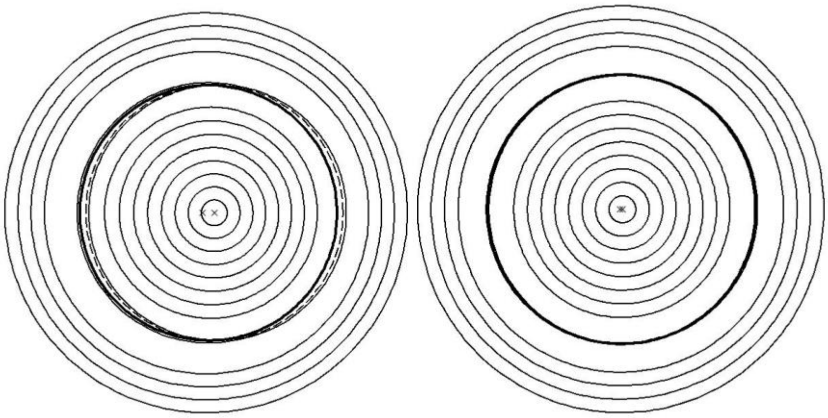

Рис.1.5. То же самое, что на рис.1.1, но для орбит Урана (слева) и Нептуна (справа).

Любопытно поведение эквипотенциалей вблизи штрихованной кривой, это особенно заметно в случае относительно большой сплюснутости орбиты, как, например, у Меркурия. Отдельно, на рис.1.4 показана суперпозиция полей для планет, оказывающих наибольший вклад среди больших планет – для Юпитера и Сатурна. В целом эквипотенциали примерно показывают, как действуют возмущающие силы со стороны больших планет на пробную точку, например, ясно, что компонента возмущающей силы, направленная по касательной к эквипотенциали, равна нулю.

1.4 Взаимная энергия двух компланарных эллиптических колец Гаусса

Не менее актуальной является задача нахождения взаимной гравитационной энергии двух колец Гаусса. В предыдущем разделе были найдены ряды по степеням эксцентриситета для потенциала кольца Гаусса в точках его плоскости. Взаимную энергию двух компланарных колец Гаусса можно вычислить, опираясь на полученный потенциал по формуле

$$W_{mut} = -\int \varphi_{ring,1} dm_2, \tag{1.41}$$

где $\varphi_{ring,1}$ – потенциал условно первого кольца Гаусса в точке второго кольца Гаусса с элементом массы dm_2. Будем считать первое кольцо внешним, тогда второе кольцо будет внутренним. Ряд по эксцентриситетам ограничим до 2-й степени включительно.

Перечисленные условия позволяют записать потенциал первого кольца из (1.17) в виде

$$\varphi_{ring,1} \approx \frac{2Gm_1}{\pi a_1}\left(\varphi_0 + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_1^2\right), \tag{1.42}$$

где коэффициенты из (1.29) перепишутся в виде

$$\begin{gathered} k_1 = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{a_1};\ \varphi_0 = K\ \ k_1\ ;\ \varphi_1 = \frac{x_1}{k_1^2 a_1}\left(\frac{2-k_1^2}{1-k_1^2}\mathrm{E}\ \ k_1\ \ -2\mathrm{K}\ \ k_1\ \ \right); \\ \varphi_2 = \frac{1}{2k_1^4 a_1^2}\left\{\left(-\frac{4-7k_1^2+k_1^4}{1-k_1^2\ \ ^2}x_1^2 + 2\frac{2-k_1^2}{1-k_1^2}x_2^2\right)\mathrm{E}\ \ k_1\ \ + \left(\frac{4-5k_1^2}{1-k_1^2}x_1^2 - 4x_2^2\right)\mathrm{K}\ \ k_1\ \ \right\}. \end{gathered} \tag{1.43}$$

Каноническое уравнение второго кольца Гаусса – это уравнение (1.3) с добавлением индекса 2

$$r_2 = \frac{a_2\ \ 1-e_2^2}{1+e_2\cos\upsilon_2}. \tag{1.44}$$

Пусть теперь линия апсид второго кольца повёрнута на угол β относительно линии апсид первого кольца, тогда с учётом преобразования поворота координаты точки $(x_1, x_2, 0)$ на втором кольце могут быть выражены через соответствующие полярные координаты

$$x_1 = r_2\cos(\upsilon_2+\beta),\quad x_2 = r_2\sin(\upsilon_2+\beta). \tag{1.45}$$

Обозначим отношение полуосей

$$n = \frac{a_2}{a_1} \le 1, \tag{1.46}$$

тогда, с учётом (1.45) модуль эллиптических интегралов k_1 примет вид

$$k_1 = \frac{r_2}{a_1} = n\frac{1-e_2^2}{1+e_2\cos\upsilon_2}. \tag{1.47}$$

В требуемом квадратичном приближении по эксцентриситетам k_1 запишется в виде

$$\begin{aligned} &k_1 \approx n\left[1-e_2\cos\upsilon_2 - e_2^2\sin^2\upsilon_2\right]; \\ &k_1^2 \approx n^2\left[1-2e_2\cos\upsilon_2 + e_2^2\;\, 3\cos^2\upsilon_2 - 2\;\,\right]. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Эллиптические интегралы тоже представим в виде рядов по эксцентриситетам

$$\begin{aligned} K\left(k_1\right) \approx{}& K\left(n\right) - n^2\cos\upsilon_2 e_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{\left(1-n^2\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}n^4\cos^2\upsilon_2 e_2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\,dx}{\left(1-n^2\sin^2 x\right)^{\frac{5}{2}}} + \\ &+\frac{1}{2}n^2\left(3\cos^2\upsilon_2 - 2\right)e_2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{\left(1-n^2\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned} E\left(k_1\right) \approx{}& E\left(n\right) + n^2\cos\upsilon_2 e_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{\left(1-n^2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}n^2\left(3\cos^2\upsilon_2 - 2\right)e_2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{\left(1-n^2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}} - \\ &-\frac{1}{2}n^4\cos^2\upsilon_2 e_2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\,dx}{\left(1-n^2\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Вспомогательные интегралы, входящие в (1.49) и (1.50), это те же интегралы (1.25), где нужно заменить параметр k на параметр n.

Если подставить в (1.42) уравнения (1.45), а также ряды (1.48), (1.49), (1.50), получим ряд по степеням эксцентриситетов для потенциала первого кольца в точках второго кольца в виде

$$\varphi_{ring,1}\left(\upsilon_2\right) = \frac{2Gm_1}{\pi a_1}\left\{K\left(n\right) + s_1e_1 + s_2e_2 + s_{11}e_1^2 + s_{22}e_{22}^2 + s_{12}e_1e_2\right\}. \tag{1.51}$$

Коэффициенты из (1.51) будут равны

$$
\begin{aligned}
&s_1 = \frac{\cos\left(\beta+\upsilon_2\right)}{n}\left[\frac{2-n^2}{1-n^2}E\left(n\right)-2K\left(n\right)\right];\ s_2 = \cos\upsilon_2\left[K\left(n\right)-\frac{E\left(n\right)}{1-n^2}\right];\\
&s_{11} = \frac{E\left(n\right)}{n^2}\left[1+\frac{\sin^2\left(\beta+\upsilon_2\right)}{1-n^2}-\frac{\left(6-11n^2+3n^4\right)\cos^2\left(\beta+\upsilon_2\right)}{2\left(1-n^2\right)^2}\right]-\\
&-\frac{K\left(n\right)}{2n^2}\left[4+\frac{9n^2-8}{1-n^2}\cos^2\left(\beta+\upsilon_2\right)\right];\\
&s_{22} = \left[1-\frac{\cos^2\upsilon_2}{2\left(1-n^2\right)}\right]K\left(n\right)+\frac{E\left(n\right)}{1-n^2}\left[\frac{\left(1+n^2\right)\cos^2\upsilon_2}{2\left(1-n^2\right)}-1\right];\\
&s_{12} = \frac{\cos\upsilon_2\cos\left(\beta+\upsilon_2\right)}{n\left(1-n^2\right)}\left[\left(3n^2-2\right)K\left(n\right)+\frac{2\left(1-2n^2\right)}{1-n^2}E\left(n\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

В выражении (1.41) элемент массы dm_2 второго кольца определяется по формуле (1.5) с добавлением индекса 2 к именам элементов кольца

$$
dm_2 = \frac{m_2\left(1-e_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\left(1+e_2\cos\upsilon_2\right)^2}d\upsilon_2. \tag{1.53}
$$

Уравнение (1.53) также нужно представить в квадратичном приближении по эксцентриситету

$$
dm_2 \approx \frac{m_2}{2\pi}\left[1-2e_2\cos\upsilon_2+\left(3\cos^2\upsilon_2-\frac{3}{2}\right)e_2^2\right]. \tag{1.54}
$$

Подставим теперь в интегральное выражение (1.41) взаимной энергии двух колец Гаусса ряды (1.51) и (1.54), оставим только слагаемые в квадратичном приближении и проинтегрируем по истинной аномалии υ_2 второго кольца, тогда после трудоёмких вычислений получим выражение в виде

$$
W_{mut} = -\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1}\left[W_0+W_1e_1+W_2e_2+W_{11}e_1^2+W_{22}e_2^2+W_{12}e_1e_2\right], \tag{1.55}
$$

где коэффициенты

$$
\begin{aligned}
&W_0 = 2K(n);\ W_1 = W_2 = 0;\\
&W_{11} = W_{22} = \frac{\left(1+n^2\right)E\left(n\right)-\left(1-n^2\right)K\left(n\right)}{2\left(1-n^2\right)^2};\\
&W_{12} = \frac{\left(1-n^2\right)\left(2-n^2\right)K\left(n\right)-2\left(1-n^2+n^4\right)E\left(n\right)}{n\left(1-n^2\right)^2}\cos\beta.
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

Заметим, что слагаемые с первой степенью по эксцентриситетам равны нулю. Коэффициенты при квадрате эксцентриситета e_1^2 первого кольца и квадрате эксцентриситета e_2^2 второго кольца равны, что говорит о некоторой симметрии в задаче о компланарных эллипсах. При этом зависимость от угла β между линиями апсид содержится только в смешанном члене, в коэффициенте при $e_1 e_2$.

1.5 Взаимная энергия двух эллиптических колец Гаусса с малым взаимным наклоном

В предыдущем разделе была получена взаимная энергия двух компланарных эллиптических колец Гаусса. В этом разделе поставлена более общая задача: найти взаимную энергию двух колец Гаусса с малыми эксцентриситетами и малым наклоном друг к другу.

Выберем в качестве плоскости отсчёта для удобства плоскость первого кольца Гаусса, тогда параметры колец Гаусса будут такими

$$a_1, e_1, i_1, \omega_1, m_1;\ a_2, e_2, i_2, \omega_2, m_2, \tag{1.57}$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклон к плоскости отсчёта, ω – аргумент перицентра, m – масса кольца Гаусса, индекс относится к условному номеру кольца Гаусса. Кроме того, при данном выборе плоскости отсчёта наклон первого кольца к плоскости отсчёта очевидно равен нулю $i_1 = 0$, а угол взаимного наклона Δi равен

$$\Delta i = i_2 - i_1 \tag{1.58}$$

Взаимная гравитационная энергия двух колец Гаусса может быть определена, как двойной интеграл

$$W_{mut} = -G \int\limits_{(m_1)} \int\limits_{(m_2)} \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}}, \tag{1.59}$$

где массы элементарных участков колец dm_1 и dm_2 определяются по-прежнему формулой (1.53) с соблюдением соответствия индексов (в случае определения dm_1 нужно заменить индекс 2 на индекс 1), а расстояние между элементарными участками r_{12} равно

$$r_{12}=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\varphi}, \qquad (1.60)$$

в котором канонические уравнения эллипсов определяются с помощью уравнения (1.3), но с добавлением соответствующего индекса. В случае кольца под номером 2 это будет уравнение (1.44). Угол φ здесь – это угол между радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Тогда (1.59) можно записать в более подробном виде

$$W_{mut}=-\frac{Gm_1m_2\left(1-e_1^2\right)^{3/2}\left(1-e_2^2\right)^{3/2}}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r_{12}}\frac{d\upsilon_1}{\left(1+e_1\cos\left(\upsilon_1\right)\right)^2}\frac{d\upsilon_2}{\left(1+e_2\cos\left(\upsilon_2\right)\right)^2}. \qquad (1.61)$$

Введём декартову систему координат с началом в общем фокусе двух колец Гаусса, направив ось Ox вдоль общей линии узлов двух колец на восходящий узел, ось Oz направим перпендикулярно плоскости отсчёта, которая была выбрана совпадающей с плоскостью кольца под номером 1, а ось Oy направим так, чтобы дополнить направляющие векторы осей до правой тройки векторов. В таком случае радиус-вектор k-ого кольца может быть представлен в виде $\vec{r}_k=r_k\left\{\cos u_k,\quad \sin u_k\cos i_k,\quad \sin u_k\sin i_k\right\}$, тогда с учётом (1.58) косинус угла между этими радиус-векторами примет вид $\cos\varphi=\cos u_1\cos u_2+\sin u_1\sin u_2\cos\left(\Delta i\right)$, где $u_k=\upsilon_k+\omega_k$, υ_k – истинная аномалия, ω_k – аргумент перицентра k-ого кольца.

Заменой переменных $\upsilon_1=u_2-\theta-\omega_1$, $u_1=u_2-\theta$, $\upsilon_2=u_2-\omega_2$ приводим (1.61) к виду

$$W_{mut}=-\frac{Gm_1m_2\left(1-e_1^2\right)^{3/2}\left(1-e_2^2\right)^{3/2}}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+e_2\cos\left(u_2-\omega_2\right)\right)^{-2}d\theta du_2}{r_{12}\left(1+e_1\cos\left(u_2-\theta-\omega_1\right)\right)^2}, \qquad (1.62)$$

где входящие в (1.60) модули радиус-векторов точек на кольцах Гаусса и косинус угла между этими векторами равны

$$\begin{gathered} r_1=\frac{a_1\left(1-e_1^2\right)}{1+e_1\cos\left(u_2-\theta-\omega_1\right)};\ r_2=\frac{a_2\left(1-e_2^2\right)}{1+e_2\cos\left(u_2-\omega_2\right)}, \\ \cos\varphi=\cos\theta-\left(1-\cos\left(\Delta i\right)\right)\sin\left(u_2-\theta\right)\sin u_2. \end{gathered} \qquad (1.63)$$

Полагая эксцентриситеты колец e_1,e_2 и угол взаимного наклона Δi малыми, разложим подынтегральное выражение в (1.62) по степеням этих трёх малых параметров в ряд Тейлора, ограничив ряд до 4-й степени включительно. Тогда полученное выражение можно представить в виде

$$\begin{gathered}W_{mut}=-\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1}\Big\{W_{000}+W_{200}\left(e_1^2+e_2^2-\Delta i^2\right)+W_{110}e_1e_2+\\+W_{400}e_1^4+W_{310}e_1^3e_2+W_{220}e_1^2e_2^2+W_{130}e_1e_2^3+W_{040}e_2^4+\Delta i^2\left[W_{202}e_1^2+W_{022}e_2^2+W_{112}e_1e_2\right]+W_{004}\Delta i^4\Big\}.\end{gathered}\tag{1.64}$$

Коэффициенты W_{klm}, которые входят в выражение для взаимной энергии колец Гаусса (1.64), см. в Приложении 2.

Модуль k полных эллиптических интегралов, входящих в выражения для коэффициентов W_{klm} (П2.1-П2.2) симметричен относительно перестановки индексов

$$k=\frac{2\sqrt{a_1a_2}}{a_1+a_2}=\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\le 1,\;\; n=\frac{a_2}{a_1}.\tag{1.65}$$

Для контроля формулы (1.64) ограничим ряд до второй степени включительно, положим $\Delta i=0$ и произведём преобразование Ландена (см., например, [10]) для эллиптических интегралов

$$K\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right)=(1+n)K(n);\;E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right)=\frac{2}{1+n}E(n)-(1-n)K(n).\tag{1.66}$$

Получится выражение (1.55) для взаимной энергии двух компланарных колец Гаусса, приведённое в предыдущем разделе.

1.6 Эволюция колец Гаусса под взаимным возмущением

1.6.1 Математический аппарат

На практике подход с кольцами Гаусса к нахождению возмущений может опираться на систему из нескольких колец Гаусса [15]. Необходимо подчеркнуть, что в таком методе не рассматривается обратное влияние пробного тела на возмущающее кольцо. Условно назовем этот метод расчета возмущений прямым.

Однако в небесной механике часто встречаются и такие задачи, когда необходимо учитывать не только прямое влияние кольца на внешнее тело, но и обратное влияние возмущаемых тел на кольцо. Главный для нас интерес здесь представляет задача, в которой рассматривается взаимодействие между двумя (или несколькими) гравитирующими кольцами Гаусса. В таких задачах усреднение по «быстрым» переменным необходимо делать как для возмущающего, так и для возмущаемого тела. Условно назовем этот второй подход методом полного усреднения.

Для изучения эволюции взаимодействующих колец Гаусса необходимо знать взаимную гравитационную энергию этих колец. Эффективность такого подхода была показана на примере упрощённой двупланетной задачи Солнце-Юпитер-Сатурн в работах [10], [16]. В этих работах был найден взаимный потенциал двух гравитирующих круглых колец с общим центром, плоскости которых пересекаются под углом α друг к другу. С точностью до квадрата угла наклона α^2 включительно, выражение взаимной энергии в этих работах равно

$$W_{mut} = W_0 + W_2 \cdot \alpha^2, \tag{1.67}$$

где R_1 и R_2 – радиусы колец, а

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{2Gm_1m_2}{\pi R_1}\mathrm{K}(k), \\ W_2 &= -\frac{Gm_1m_2}{2\pi R_1}\frac{\mathrm{K}(k)-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{E}(k)}{1-k^2}, \quad k=\frac{R_2}{R_1}\le 1. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Заметим, что если ограничить ряд (1.64) до 2-й степени включительно; положить $e_1 = 0$ и $e_2 = 0$; учесть, что в таком случае $\Delta i = \alpha$, $a_1 = R_1$ и $a_2 = R_2$, а затем произвести преобразование Ландена (1.66), то получим выражение (1.67), как это и должно быть.

Согласно [16], через W_{mut} можно найти момент сил M между кольцами

$$M = -\frac{\partial W_{mut}}{\partial \alpha} = \frac{GM_1M_2}{\pi R_1}\frac{\mathrm{K}(k)-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{E}(k)}{1-k^2}\cdot\alpha. \tag{1.69}$$

Момент сил между кольцами пропорционален углу α в первой степени, и этого достаточно при требуемой точности расчетов. Зная момент сил (1.69) и наделяя кольца орбитальным угловым моментом соответствующих планет, Кондратьев [16] вычислил скорость прецессии узлов $\dot{\Omega} \approx 25.6''/\textit{год}$. Результат применения метода показал его адекватность (метод Лагранжа дает $\dot{\Omega} \approx 25.93''/\textit{год}$ [17]) и позволил дать простое и наглядное объяснение явлению вековой узловой прецессии орбит планет-гигантов.

В работах [10] и [16] показана эффективность использования взаимной энергии колец Гаусса в приближении (1.67) для изучения эволюции орбит в двупланетной задаче Солнце-Юпитер-Сатурн. Поэтому представляется более эффективным решение этой задачи с использованием взаимной энергии, полученной в более общей постановке (1.64). Такой подход позволит не только оценить величину узловой прецессии, но и величину изменения остальных параметров колец Гаусса, причём, будут выявлены не только вековые тренды, но и долгопериодические гармоники.

Широко известны уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{2}{n_0 a}\frac{\partial R}{\partial M_0},\\
&\frac{de}{dt}=\frac{1-e^2}{en_0a^2}\frac{\partial R}{\partial M_0}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{en_0a^2}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
&\frac{di}{dt}=\frac{\cos i}{n_0a^2\sqrt{1-e^2}\sin(i)}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{1}{n_0a^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega},\\
&\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{en_0a^2}\frac{\partial R}{\partial e}-\cos i\frac{d\Omega}{dt},\\
&\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{n_0a^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},
\end{aligned} \tag{1.70}$$

В (1.70) опущено уравнение для средней аномалии на эпоху $\dot{M}_0$, так как данном случае возмущающая функция не содержит явно угол этой аномалии M_0. Поэтому $\frac{\partial R}{\partial M_0}=0$ и, как следствие,

$$\frac{da}{dt}=0. \tag{1.71}$$

Из (1.71) следует, что большие полуоси колец Гаусса под взаимным влиянием остаются неизменными.

Переходя к другой системе оскулирующих элементов $(a, e, i, \varepsilon, \varpi, \Omega)$ и полагая $\omega = \varpi - \Omega; M = \varepsilon - \varpi$, с учетом очевидного равенства $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = 0$, третье из уравнений (1.70) можно записать в другом виде

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{n_0 a^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + tg\left(\frac{i}{2}\right) \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right). \tag{1.72}$$

Прежде нужно определить, как использовать взаимную энергию (1.64) в уравнениях Лагранжа (1.70). Будем действовать через основное уравнение вращающихся тел [18]

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{1.73}$$

где $\vec{L}$ – угловой момент тела, $\vec{M}$ – момент внешних сил, действующих на него. В нашем случае выберем такую систему координат $O\xi\eta\zeta$, в которой ось ζ взята по направлению $\vec{L}$, ось η – вдоль линии узлов к восходящему узлу, а ось ξ дополняет $O\xi\eta\zeta$ до правой тройки векторов. При таком выборе осей, векторное уравнение (1.84) в проекциях дает

$$L\frac{di}{dt} = M_\xi, \ \ L\sin i \frac{d\Omega}{dt} = M_\eta, \ \ \frac{dL}{dt} = M_\zeta. \tag{1.74}$$

С учётом известного выражения для углового момента тела на эллиптической орбите $L = m\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}$, формулы (1.74) при условии (1.71) примут вид

$$\frac{di}{dt} = \frac{M_\xi}{L}, \sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{M_\eta}{L}, -\frac{e}{1-e^2}\frac{de}{dt} = \frac{M_\zeta}{L}. \tag{1.75}$$

Принимая во внимание выражение для эволюции истинной аномалии υ, выраженной только через оскулирующие элементы [19]

$$-\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \tag{1.76}$$

а также упомянутое ранее условие независимости возмущающей функции от средней аномалии, из уравнений Лагранжа (1.70) с заменой третьего уравнения на уравнение (1.72) получим следующую вспомогательную систему уравнений

$$\frac{M_\xi}{L} = -\frac{1}{n_0 a^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{1}{\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} + tg\frac{i}{2}\frac{\partial R}{\partial \varpi}\right),$$
$$\frac{M_\eta}{L} = \frac{1}{n_0 a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},$$
$$\frac{1-e^2}{e}\frac{M_\zeta}{L} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e n_0 a^2}\frac{\partial R}{\partial \omega}, \tag{1.77}$$
$$-\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e n_0 a^2}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Заметим, что из второго уравнения в (1.75) для компоненты $\frac{M_\eta}{L}$ при переходе к круглым кольцам следует полученное ранее в работе [16] уравнение для момента сил $M = -\frac{\partial W_{mut}}{\partial \alpha}$, см. формулу (1.69). Проведение такой аналогии важно для понимания физического смысла уравнений (1.77).

При поворотах системы координат инвариантными остаются: модуль и направление углового момента $\vec{L}$, модуль и направление момента действующих сил $\vec{M}$, а также изменение истинной аномалии. Очевидно, не изменяется при этом и форма эллипса. Эти условия запишем в виде (штрихами отмечены величины в новой системе отсчета)

$$L' = L, M' = M, a' = a, e' = e, \frac{d\upsilon'}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} \tag{1.78}$$

С учётом инвариантности величин (1.78), уравнения эволюции оскулирующих элементов в инерциальной системе отсчёта можно представить в виде

$$\frac{da}{dt} = 0,$$
$$\frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{e}\frac{M_{\zeta'}}{L},$$
$$\frac{di'}{dt} = \frac{M_{\xi'}}{L}, \tag{1.79}$$
$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{1}{\sin i'}\frac{M_{\eta'}}{L},$$
$$\frac{d\omega'}{dt} = -\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) - \cos i'\frac{d\Omega'}{dt}.$$

Рассмотрим вначале эволюцию 2-го кольца под действием 1-го. Возмущающая функция связана с взаимной потенциальной энергией выражением

$$R = -\frac{W_{mut}}{m_2}, \tag{1.80}$$

где W_{mut} вычисляется по формуле (1.64).

Подставляя возмущающую функцию (1.80) во вспомогательную систему уравнений (1.77), после громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1-e_2^2}{e_2}\frac{M_\zeta^{(2)}}{L^{(2)}} = \frac{Gm_1}{16\pi a_1^3 n_2 n^3 (1+n)\left(1-n^2\right)^2}\cdot \sum_{k+l+m=1}^{3} e_{klm}^{(2)} e_1^k e_2^l \Delta i^m,\\
&\frac{M_\xi^{(2)}}{L^{(2)}} = -\frac{Gm_1\Delta i}{8\pi a_1^3 n_2 n^3 (1+n)\left(1-n^2\right)^2}\cdot \sum_{k+l=2}^{2} i_{kl}^{(2)} e_1^k e_2^l,\\
&\frac{1}{\sin(\Delta i)}\frac{M_\eta^{(2)}}{L^{(2)}} = -\frac{Gm_1}{8\pi a_1^3 n_2 n^3 (1+n)\left(1-n^2\right)^2}\cdot \sum_{k+l+m=0}^{2} \Omega_{klm}^{(2)} e_1^k e_2^l \Delta i^m,\\
&\left(\frac{d\upsilon_2}{dt}\right) = \frac{Gm_1}{16\pi a_1^3 n_2 n^3 (1+n)\left(1-n^2\right)^2}\cdot \sum_{k+l+m=1}^{3} \bar{\upsilon}_{klm}^{(2)} e_1^k e_2^{l-1} \Delta i^m.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

В (1.81) специальные коэффициенты даны в Приложении 3.

Далее нам понадобится уже определённая ранее вспомогательная система координат $O\xi\eta\zeta$, нужно только конкретизировать её. В системе координат $O\xi\eta\zeta$ ось η пусть будет направлена вдоль общей линии узлов колец Гаусса на восходящий узел, а ось ζ – вдоль вектора углового момента 1-го кольца. Такой выбор нам подсказывает геометрия решаемой задачи и сам вид полученного выражения для взаимной энергии двух колец Гаусса. Нужно перейти от вспомогательной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к исходной системе координат $O\xi'\eta'\zeta'$ (эклиптической системе координат, связанной с инерциальной системой отсчёта). Для этого необходимо выполнить преобразование поворота системы координат $O\xi\eta\zeta$ вокруг оси ζ на угол $\Delta\bar{\omega}_2$, который может быть найден с помощью сферического треугольника на рис. 1.6.

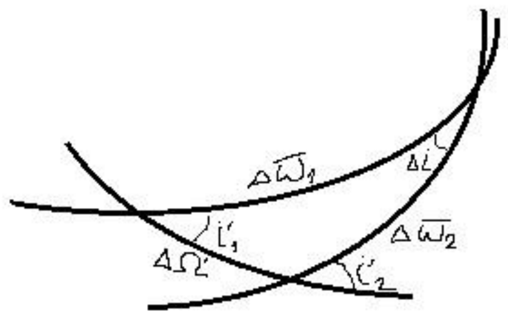

Рис. 1.6. Сферический треугольник в задаче о переходе к эклиптической системе координат. Здесь Δi – угол между кольцами Гаусса; $\Delta\Omega' = \Omega'_2 - \Omega'_1$ – разность долгот восходящих узлов колец Гаусса, отсчитываемая в некоторой плоскости (в нашем случае это плоскость эклиптики); i'_1 и i'_2 – наклонения, соответственно, первого и второго колец Гаусса к плоскости эклиптики; $\Delta\bar{\omega}_i$ – угол между линией узлов i-ого кольца, лежащей в плоскости эклиптики, и общей линией узлов двух колец.

С помощью сферического треугольника на рис.1.6 найдём углы $\Delta\bar{\omega}_1$ и $\Delta\bar{\omega}_2$

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\Delta\bar{\omega}_1\right) = \frac{\sin\left(i'_2\right)\sin\left(\Delta\Omega'\right)}{\sin\left(\Delta i\right)},\ \cos\left(\Delta\bar{\omega}_1\right) = \frac{-\sin\left(i'_1\right)\cos\left(i'_2\right) + \cos\left(i'_1\right)\sin\left(i'_2\right)\cos\left(\Delta\Omega'\right)}{\sin\left(\Delta i\right)};\\
&\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right) = \frac{\sin\left(i'_1\right)\sin\left(\Delta\Omega'\right)}{\sin\left(\Delta i\right)},\ \cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right) = \frac{\sin\left(i'_2\right)\cos\left(i'_1\right) - \cos\left(i'_2\right)\sin\left(i'_1\right)\cos\left(\Delta\Omega'\right)}{\sin\left(\Delta i\right)}.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Тогда компоненты вектора момента сил (делённые на модуль углового момента 2-ого кольца), действующего со стороны 1-ого кольца на 2-ое, преобразуются так

$$\begin{aligned}
&\frac{M^{(2)}_{\xi'}}{L^{(2)}} = \frac{M^{(2)}_{\xi}}{L^{(2)}}\cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right) - \frac{M^{(2)}_{\eta}}{L^{(2)}}\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right),\\
&\frac{M^{(2)}_{\eta'}}{L^{(2)}} = \frac{M^{(2)}_{\xi}}{L^{(2)}}\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right) + \frac{M^{(2)}_{\eta}}{L^{(2)}}\cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right),\\
&\frac{M^{(2)}_{\zeta'}}{L^{(2)}} = \frac{M^{(2)}_{\zeta}}{L^{(2)}}.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Используя вспомогательные формулы (1.83), уравнения эволюции (1.79) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_2}{dt}=0,\\
&\frac{de_2}{dt}=-\frac{1-e_2^2}{e_2}\frac{M_\zeta^{(2)}}{L^{(2)}},\\
&\frac{di_2'}{dt}=\frac{M_\xi^{(2)}}{L^{(2)}}\cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)-\frac{M_\eta^{(2)}}{L^{(2)}}\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right),\\
&\frac{d\Omega_2'}{dt}=\frac{1}{\sin i_2'}\left(\frac{M_\xi^{(2)}}{L^{(2)}}\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)+\frac{M_\eta^{(2)}}{L^{(2)}}\cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)\right),\\
&\frac{d\omega_2'}{dt}=-\left(\frac{d\upsilon_2}{dt}\right)-\cos i_2'\,\frac{d\Omega_2'}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.84}
$$

Подставляя величины (1.81) в уравнения (1.84) и делая замену

$$
\begin{aligned}
&\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1,\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2,\\
&\Delta i=\arccos\left(\cos i_1'\cos i_2'+\sin i_1'\sin i_2'\cos\Delta\Omega'\right)\equiv\Delta i\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right),
\end{aligned}
\tag{1.85}
$$

получаем систему дифференциальных уравнений эволюции для оскулирующих элементов 2-го кольца под действием 1-го

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_2}{dt}=0,\ \frac{de_2}{dt}=-\frac{Gm_1}{16\pi a_1^3n_2n^3\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\cdot\sum_{k+l+m=1}^{3}e_{klm}^{(2)}\Big|_{\substack{\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1\\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2}}e_1^ke_2^l\Delta i^m\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right),\\
&\frac{di_2'}{dt}=-\frac{Gm_1\Delta i\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right)}{8\pi a_1^3n_2n^3\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\cdot\sum_{k+l=2}^{2}i_{kl}^{(2)}\Big|_{\substack{\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1\\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2}}e_1^ke_2^l\cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)+\\
&\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)\cdot\frac{Gm_1}{8\pi a_1^3n_2n^3\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\cdot\sum_{k+l+m=0}^{2}\Omega_{klm}^{(2)}\Big|_{\substack{\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1\\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2}}e_1^ke_2^l\Delta i^{m+1}\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right),\\
&\frac{d\Omega_2'}{dt}=-\frac{Gm_1\Delta i\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right)}{8\pi a_1^3n_2n^3\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2\sin\left(i_2'\right)}\cdot\sum_{k+l=2}^{2}i_{kl}^{(2)}\Big|_{\substack{\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1\\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2}}e_1^ke_2^l\sin\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)-\\
&\cos\left(\Delta\bar{\omega}_2\right)\cdot\frac{Gm_1}{8\pi a_1^3n_2n^3\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2\sin\left(i_2'\right)}\cdot\sum_{k+l+m=0}^{2}\Omega_{klm}^{(2)}\Big|_{\substack{\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1\\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2}}e_1^ke_2^l\Delta i^{m+1}\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right),\\
&\frac{d\omega_2'}{dt}=-\cos\left(i_2'\right)\frac{d\Omega_2'}{dt}-\frac{Gm_1}{16\pi a_1^3n_2n^3\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\cdot\sum_{k+l+m=1}^{3}\bar{\upsilon}_{klm}^{(2)}\Big|_{\substack{\omega_1=\omega_1'-\Delta\bar{\omega}_1\\ \omega_2=\omega_2'-\Delta\bar{\omega}_2}}e_1^ke_2^{l-1}\Delta i^m\left(i_1',i_2',\Delta\Omega'\right).
\end{aligned}
\tag{1.86}
$$

Чтобы получить уравнения эволюции первого кольца под действием второго, нужно сделать перестановку индексов в уравнениях (1.86).

1.6.2 Применение взаимной энергии двух колец Гаусса к двупланетной задаче Солнце-Юпитер-Сатурн

В небесной механике для изучения вековых и долгопериодических возмущений широко применяется аналитический метод Лагранжа, основанный на разложении возмущающей функции в ряд по малым значениям эксцентриситетов и наклонений орбит. Ранее этим методом Лаплас доказал в первом приближении теорему об устойчивости Солнечной Системы. Численными расчётами было установлено, что в эволюции орбит планет и их спутников важную роль играют резонансы. Неожиданные эволюционные закономерности были открыты для орбит планет-гигантов. Оказалось, что на больших масштабах времени противоположные узлы орбит Юпитера и Сатурна на плоскости Лапласа совпадают и движутся вековым образом. Направление этого движения узлов попятное и скорость равна $\dot{\Omega} \approx 25.93'' / \text{год}$ [17]. Характерным является *синхронное* движение узлов и периодические колебания *в противофазе* эксцентриситетов и наклонений орбит Юпитера и Сатурна. Согласно [9], период изменения взаимного наклона орбит равен $T \approx 51000$ *лет,* а эксцентриситетов $T \approx 70000$ *лет.*

В целом, метод Лагранжа является весьма объёмным и трудоемким, о чём можно судить, например, по монографии [9] (в монографии раздел 7.3). Поэтому полученные ранее результаты по эволюции орбит Юпитера и Сатурна важно рассмотреть другим методом, основанным на применении взаимной энергии колец Гаусса. Проблема сводится к изучению эволюции оскулирующих элементов колец под действием их взаимного гравитационного возмущения.

Результаты расчётов по формулам (1.86) представлены на рис.1.7-1.10 (штрихи опущены).

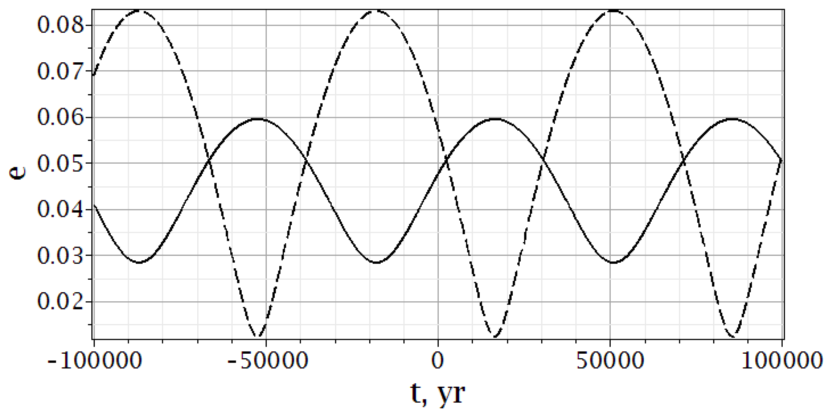

Рис. 1.7 Зависимость от времени эксцентриситетов колец Гаусса Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихованная линия), представляющая долгопериодическую эволюцию орбит планет под действием взаимного возмущения.

Период и амплитуды долгопериодических колебаний эксцентриситетов на рис.1.7 имеют следующие значения

$$T_e = 69.0 \cdot 10^3 \text{ лет}, \;\; A_{e_1} = 0.0311, \;\; A_{e_2} = 0.0706. \tag{1.87}$$

Углы наклона колец к эклиптике также имеют долгопериодические колебания, см. рис.1.8(a). Период и амплитуды этих колебаний равны

$$T_i = 49.9 \cdot 10^3 \text{ лет}, \;\; A_{i_1} = 0.725°, \;\; A_{i_2} = 1.788°. \tag{1.88}$$

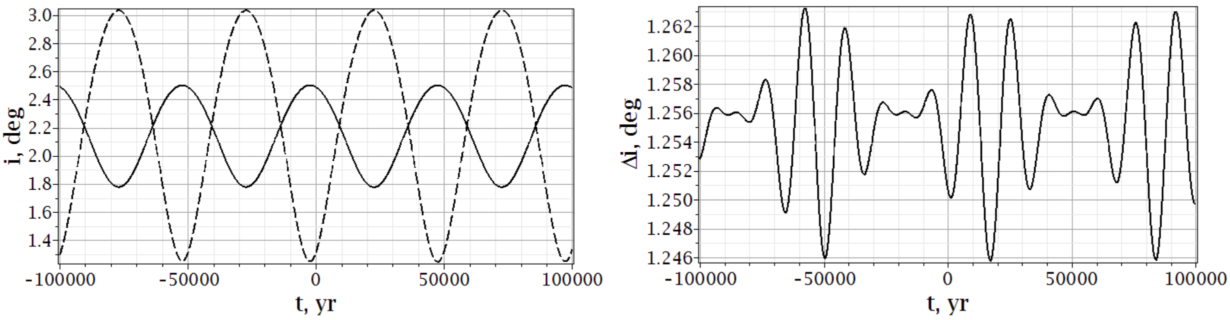

Рис.1.8 a) Слева: зависимость от времени наклонений (к эклиптике) колец Гаусса Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихованная линия); **b)** справа: биения взаимного угла наклона между кольцами Гаусса планет-гигантов.

Любопытно, что взаимный наклон колец Гаусса Юпитера и Сатурна Δi (который, вообще говоря, не равен разности наклонов в эклиптической системе отсчёта, то есть $\Delta i \neq i_2' - i_1'$) имеет биения, которые показаны на рис.1.8(b). Период биений равен $T \approx 68.1 \cdot 10^3$ *лет*.

Эволюция направления линий апсид у колец также имеет сложный характер (рис.1.9(a)). Установлено, что эволюция положений перицентров характеризуется не только долгопериодическими колебаниями для долгот перицентров с периодом

$$T_{\varpi} = 69.0 \cdot 10^3 \text{ лет}, \tag{1.89}$$

но имеет также вековое вращение, причем периоды полного поворота (на $360°$) линий апсид в плоскостях своих колец для Юпитера и Сатурна сильно различаются и соответственно равны

$$T_{\varpi_1}^{\sec} = 37.2 \cdot 10^4 \text{ лет}, \;\; T_{\varpi_2}^{\sec} = 58.2 \cdot 10^3 \text{ лет}. \tag{1.90}$$

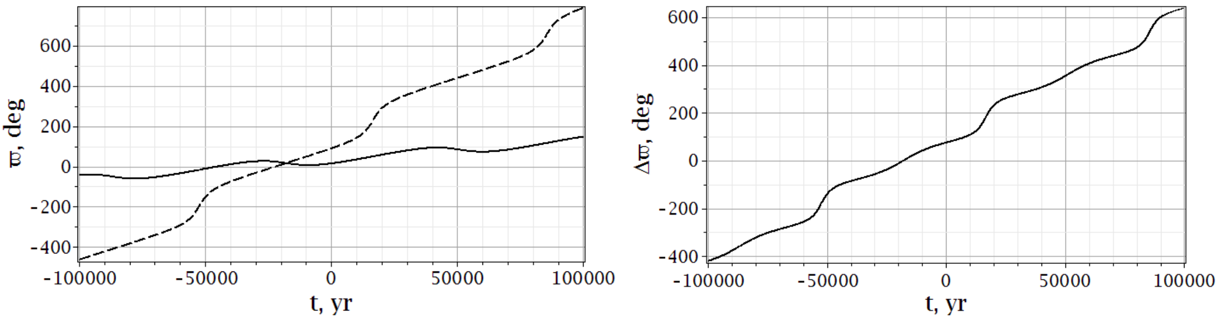

Рис.1.9 a) Слева: зависимость долгот перицентра орбит Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихованная линия); **b)** справа: зависимость от времени разности долгот перицентров орбит $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$ этих планет-гигантов.

На рис.1.9(b) показан график для разности долгот перицентров орбит $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$ планет-гигантов. Период этого вращения равен $T_{\Delta\varpi} = 69.0 \cdot 10^3$ *лет*.

Вычитая из ϖ и $\Delta\varpi$ соответствующие вековые компоненты эволюции, вместо графиков на рис.1.9(a,b) мы получим графики, показанные на рис.1.9(c,d). Собственно, график на рис.1.9(d) представляет собой разность двух кривых, данных на рис.1.9(c).

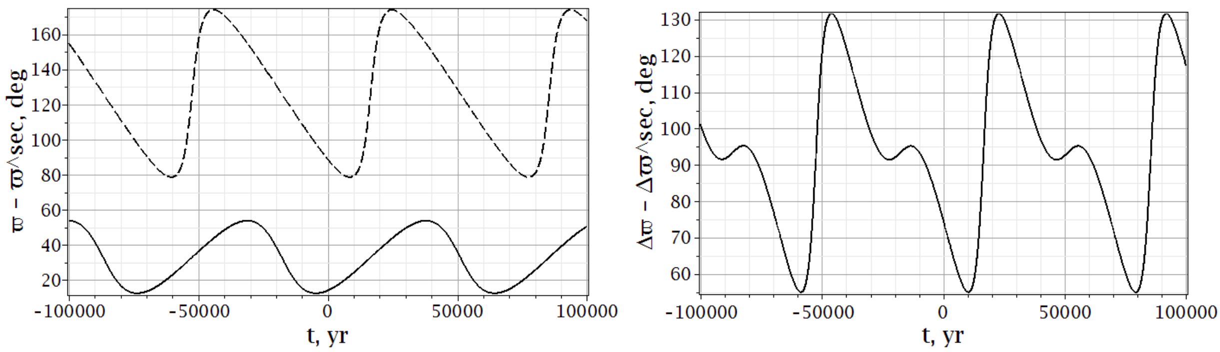

Рис.1.9 c) Слева: зависимость от времени долгот перицентра орбит ϖ (за вычетом вековой компоненты эволюции) Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихованная линия); **d)** справа: зависимость разности долгот перицентров орбит $\Delta\varpi$ планет-гигантов (также за вычетом вековой компоненты эволюции).

В двупланетной задаче важно также найти прецессионное движение самих плоскостей двух колец. На рис.1.10(a,b) это прецессионное движение колец Гаусса представлено эволюцией долгот восходящих узлов. Стоит подчеркнуть, что указанная прецессия имеет не вековой характер, а описывается долгопериодическими поворотными колебаниями.

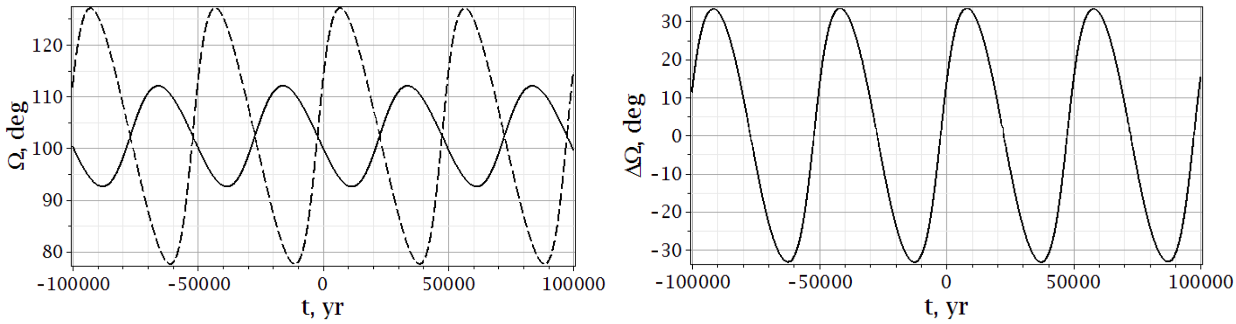

Рис.1.10 a) Слева: зависимость изменения долгот восходящих узлов для Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихованная линия), представляющая долгопериодическую прецессию плоскостей орбит планет-гигантов под действием взаимного возмущения; **b)** справа: разность долгот восходящих узлов орбиты Юпитера и Сатурна как функция времени.

Особенно наглядно периодичность прецессионного движения орбит Юпитера и Сатурна показана на рис.1.10(b). Период и амплитуды колебаний долгот восходящих узлов и их разности соответственно равны

$$T_{\Omega} = 49.9 \cdot 10^3 \textit{ лет}, \ T_{\Delta\Omega} = 49.9 \cdot 10^3 \textit{ лет}; \ A_{\Omega_1} = 19.5°, \ A_{\Omega_2} = 49.5°, \ A_{\Delta\Omega} = 66.7°. \tag{1.91}$$

Заметим, что узлы в эклиптике у орбит Юпитера и Сатурна не находятся строго в противофазе, как это имело бы место для узлов орбит в плоскости Лапласа.

1.7 Заключение главы

Данная глава посвящена некоторым аспектам применения метода колец Гаусса в небесной механике. В разделе 1.3 поставлена и решена задача о разложении в степенной ряд потенциала по малому эксцентриситету кольца Гаусса на его плоскости как во внутренней области кольца, так и вне кольца с точностью до четвёртой степени включительно. Все коэффициенты рядов потенциала кольца Гаусса для внутренней и внешней области получены аналитически и выражены через координаты пробной точки и полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго родов. Стоит подчеркнуть, что трудный для расчётов эллиптический интеграл третьего рода $\Pi(n,k)$, входящий в выражение полного потенциала (1.9), в коэффициентах найденных рядов отсутствует. Это заметно облегчает практическое использование найденных рядов для изучения орбит реальных небесных тел в Солнечной системе. Отметим, что в силу геометрической асимметрии в распределении плотности вещества на кольце Гаусса, все нечётные коэффициенты для внутреннего потенциала (φ_1 из (1.29) и φ_3 из (1.30)), и для внешнего ($\bar{\varphi}_1$ из (1.37) и $\bar{\varphi}_3$ из (1.38)) оказываются пропорциональными координате x_1 в первой степени.

Расчёт по полученным формулам эквипотенциалей для колец соответствующих орбитам больших планет Солнечной системы показывает ориентацию возмущающей силы, действующей на малые небесные малые тела в окрестности орбит планет. В частности, по рис.1.1-1.5 эквипотенциалей видно, что из двух компонент возмущающей силы надо учитывать только нормальную к этим кривым компоненту возмущающей силы, так как касательная компонента заведомо должна быть равна нулю. Отдельно на рис.1.4 был изображён результат расчёта эквипотенциалей для суперпозиции колец Гаусса планет-гигантов Юпитера и Сатурна.

Ряд для компланарного потенциала кольца во внутренней области (1.17) был использован в разделе 1.4 для получения взаимной потенциальной энергии двух слабосжатых колец Гаусса. Взаимная гравитационная энергия колец была получена в квадратичном приближении по степеням эксцентриситетов обоих колец. Доказан ряд важных свойств этого выражения: отсутствие линейных (по e_1 и e_2) членов, равенство коэффициентов второго порядка и зависимость от угла наклона линий апсид только смешанного члена.

В разделе 1.5 была решена задача о нахождении взаимной гравитационной энергии W_{mut} двух колец Гаусса в более общей постановке. Взаимная энергия представлена в виде ряда Тейлора (1.64) по степеням малых эксцентриситетов и малого взаимного наклона между кольцами с точностью до 4-ой степени включительно.

Установлено, что взаимная энергия инвариантна к преобразованиям переноса и поворота системы координат, поэтому можно выбирать системы координат для изучения вековых возмущений наиболее удобным образом. Именно так мы и поступили с выбором вспомогательной системы координат в данном разделе.

В разделе 1.6 выражение взаимной энергии W_{mut} двух колец используется для вывода и решения системы десяти дифференциальных уравнений, описывающих их эволюцию. Решение этих уравнений эволюции получено в виде графиков.

Сравнение этих результатов с традиционным методом разложения возмущающей функции Лагранжа показало на примере решения известной двупланетной задачи Солнце-Юпитер-Сатурн адекватность нового подхода. Кроме того, полученные результаты в решении этой задачи дополняют и уточняют результаты других авторов.

В частности, показано, что прецессионное движение плоскостей двух орбит описывается долгопериодическими поворотными колебаниями с периодом $T_{\Omega} = 49.9 \cdot 10^3$ *лет*. Причём амплитуды колебаний долгот восходящих узлов орбит у обоих планет заметно различаются $A_{\Omega_1} = 19.5°, A_{\Omega_2} = 49.5°$. Отмечено, что узлы в эклиптике у колец Гаусса Юпитера и Сатурна не находятся строго в противофазе, как это имело бы место для узлов этих колец в плоскости Лапласа.

Заметим, что выражения для возмущающих функций получены в данной работе до членов 4-ой степени малых величин, а в книге [9] только до членов 2-ой степени малости. Выражения для возмущающих функций были получены здесь принципиально другим способом, который позволяет сразу изучать вековые и долгопериодические возмущения элементов орбит.

Подчеркнём, что полученное выражение возмущающей функции может применяться не только к планетной задаче, где все наклонности должны быть малыми, но и, например, к задаче с недавно обнаруженными кольцами непланетного типа.

Глава 2. Карликовая планета Хаумеа

При написании данной Главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные соискателем Корноуховым В.С. в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты и выводы исследования: [20] и [21].

2.1 О карликовой планете Хаумеа

Карликовая планета Хаумеа была открыта независимо в 2004-2005 годах командами Брауна [22] и Ортиза. Хаумеа – один из самых любопытных транснептунных объектов, она обращается по своей орбите вокруг Солнца с периодом 281.83 года в слабом резонансе средних движений с планетой Нептун 12:7. С диаметром более 2200 км Хаумеа оказывается сравнимой по размеру с Плутоном, но вращается вокруг своей оси в 40 раз быстрее, чем это делает Плутон.

Благодаря необычным физическим характеристикам, Хаумеа расширяет наши знания об объектах Солнечной системы. Период спинового вращения Хаумеа составляет меньше 4 часов [23], [24] и [25]

$$T_0 = 3.9155 \pm 0.0001 \text{ ч.} \tag{2.1}$$

Хаумеа имеет самое быстрое спиновое вращение среди всех тел Солнечной системы с размерами в поперечнике более 100 км [26], [27]. У Хаумеа есть два маленьких спутника [22], [28] и [29], определение их положений относительно центрального тела по ряду наблюдений позволило оценить массу Хаумеа

$$M = 4.006 \pm 0.040 \cdot 10^{24} \text{ г.} \tag{2.2}$$

Хаумеа быстро привлекла к себе внимание исследователей. В частности, актуальной стала проблема определения пространственной формы этой карликовой планеты. Причём вопросы вызывает не только очень быстрое спиновое вращение, но и наличие двух неравных друг другу соседних локальных максимумов на кривой блеска [23], [25], [30] и [31]. В 2017 году команда Ортиза наблюдала редкое событие [4]: покрытие звезды карликовой планетой Хаумеа. Это позволило не только уточнить форму планеты, но и открыть кольцо вокруг Хаумеа! Кроме того, в работе [24] представлено несколько моделей, объясняющих неравенство локальных максимумов на кривой блеска наличием на поверхности эллипсоидального тела планеты тёмного красного пятна. Всё это, безусловно, делает вопросы о пространственной форме и динамике карликовой планеты Хаумеа интригующими.

В настоящее время форму Хаумеа представляют эллипсоидальной, однако точность оценок полуосей такого эллипсоида не очень высокая, а пространственная ориентация оси вращения остаётся неизвестной. Из-за недостатка данных исследователи, для того чтобы оценить размеры эллипсоида и его пространственную ориентацию, прибегают к различным априорным предположениям, как, например, следующие

1. В статье [29] авторы полагают для удобства вычислений, что ось вращения перпендикулярна линии, направленной на наблюдателя (лежит в картинной плоскости). Это упрощение работает в среднем, поскольку при движении планеты по орбите её ось вращения меняет свою ориентацию относительно наблюдателя.
2. В статье [23] авторы полагают, что фигура Хаумеа – это трёхосный эллипсоид Якоби. Вполне естественно допускать, что фигура Хаумеа находится в гидростатическом равновесии на длинном интервале времени. В этой же статье авторы оценили размеры фигуры

$$a_1 = 980\,км,\ a_2 = 759\,км,\ a_3 = 498\,км,\ R = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} = 718\,км, \tag{2.3}$$

где R – среднеобъёмный радиус карликовой планеты, а её средняя плотность

$$\rho = 2.58\,\text{г/см}^3. \tag{2.4}$$

Опираясь на формулы [32], описывающие эллипсоид Якоби,

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{a_1^2 - a_2^2};\ a_1^2 a_2^2 \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2} = A_3 a_3^2, \tag{2.5}$$

где A_j – коэффициенты внутреннего потенциала однородного эллипсоида, Кондратьев [33] с помощью определённого с высокой точностью периода спинового вращения Хаумеа (2.1) уточнил размеры

$$a_1 = 978\,км,\;\; a_2 = 758\,км,\;\; a_3 = 496\,км,\;\; R = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} = 716\,км, \tag{2.6}$$

и среднюю плотность Хаумеа

$$\rho = 2.60\ \text{г/см}^3. \tag{2.7}$$

Спектр отражённого излучения от Хаумеа показывает наличие на её поверхности водяного льда с незначительными примесями иных веществ. Похожий отражательный спектр имеют и спутники этой карликовой планеты, что даёт основание полагать происхождение спутников путём отделения их от верхнего слоя центрального тела.

Из работ [29], [34] известно, что самым крупным и ярким из двух спутников является внешний спутник Хииака. Его масса равна $m_{Hi'iaka} = 1.79 \cdot 10^{19}\,кг\ \left(0.00451\, M_{Haumea}\right)$, а диаметр составляет примерно $310\,км$. Орбита этого спутника почти круговая ($e_{Hi'iaka} = 0.0513$) с большой полуосью $a_{Hi'iaka} = 49880\,км$ и орбитальным периодом $T_{Hi'iaka} = 49.462\,сут$. Второй (внутренний) спутник Намака обращается вокруг Хаумеа с периодом $T_{Namaka} = 18.2783\,сут$ по довольно эллиптичной орбите с эксцентриситетом $e_{Namaka} = 0.249$ и большой полуосью $a_{Namaka} = 25657\,км$. Намака имеет меньшую массу $m_{Namaka} = 1.79 \cdot 10^{18}\,кг$ и примерный диаметр $170\,км$. Размеры и массы спутников были оценены в предположении, что альбедо их поверхностей совпадают с альбедо поверхности Хаумеа. Плоскости орбит спутников наклонены друг к другу на угол 13º.2. В работе [26] оценено, что орбита спутника Хииака должна быть наклонена к плоскости экватора Хаумеа на 1º÷2º. Согласно гипотезе удара [24], [35] спутники образовались в результате столкновения в далёком прошлом Хаумеа с другим астероидом. Орбита Намаки была сильно возмущена резонансом с Хииакой в соотношении 3:8. Оба спутника в результате приливного ускорения отдалились от Хаумеа с тех пор как отделились от неё. Кондратьев в [33] применил модель с трёхосным неоднородым эллипсоидом к исследованию вопроса о квазиравновесии реальной фигуры Хаумеа, что позволило выдвинуть иную гипотезу происхождения спутников путём отделения их от Хаумеа без какого-либо удара другим астероидом.

21 января 2017 года Хаумеа покрыла звезду фона. Это редкое событие наблюдалось на 12 наземных обсерваториях [4]. Были оценены размеры проекции (лимба) эллипсоидальной фигуры Хаумеа на картинную плоскость. По хордам, соединяющим точки начала и окончания покрытия, был построен эллипс, аппроксимирующий лимб Хаумеа, с размерами

$$\begin{aligned} a_{1\,\mathrm{limb}} &= (852 \pm 2)\ км, \\ a_{2\,\mathrm{limb}} &= (569 \pm 13)\ км. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Оценён также и позиционный угол малой полуоси лимба

$$\varphi = -76.3^0 \pm 1.2^0. \tag{2.9}$$

Кроме лимба по точкам начала и окончания покрытия была построена проекция плотного кольца на картинную плоскость в виде эллипса с размерами

$$a'_{1\,\mathrm{ring}} = \left(2287 \begin{matrix} +75 \\ -45 \end{matrix}\right) км;\ a'_{2\,\mathrm{ring}} = \left(541 \pm 15\right) км, \tag{2.10}$$

и позиционным углом малой полуоси

$$\varphi'_{\mathrm{ring}} = -74.3^0 \pm 1.3^0. \tag{2.11}$$

В той же работе [4] кольцо представлялось круглым, что позволило оценить ширину кольца в 70 км и радиус в 2287 км, и лежащим в экваториальной плоскости Хаумеа, что позволило определить по ориентации кольца ориентацию оси вращения Хаумеа. А с привлечением данных по лимбу [4] и данных фотометрии [29] и [4], были оценены размеры эллипсоида Хаумеа

$$a_1 = (1161 \pm 30)\ км,\ a_2 = (852 \pm 4)\ км,\ a_3 = (513 \pm 16)\ км,\ R = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} = 798\ км, \tag{2.12}$$

а также её средняя плотность

$$\rho = \left(1.885 \pm 0.080\right) \text{г/см}^3. \tag{2.13}$$

По этим данным Хаумеа оказывается более вытянутой и менее плотной по сравнению с прошлыми оценками, см. например (2.6). Оценки размеров (2.12) и средней плотности (2.13) заметно не удовлетворяют уравнениям (2.5) , значит, фигура Хаумеа не находится на последовательности эллипсоидов Якоби.

2.2 Уточнение размеров и формы карликовой планеты Хаумеа по данным покрытия ей звезды фона и данным фотометрии

2.2.1 Постановка задачи

Наличие неравных соседних максимумом и минимумов на кривой блеска ещё не означает, что фигура Хаумеа не может описываться эллипсоидом. Как уже было отмечено, в статье [24] авторы предложили несколько моделей пятна на поверхности Хаумеа. Потемнение наблюдается на фазовом интервале 0.7 – 1.05, что отражается не только на втором максимуме, но и на соседнем с ним минимуме, в которых звёздная величина отличается примерно на $0^m.05$.

В работе [4] представлены не только проекции фигуры Хаумеа и кольца вокруг неё на картинную плоскость, но и кривая блеска, построенная после события покрытия через некоторый интервал времени, соответствующий нескольким полным оборотам Хаумеа вокруг своей оси. Это значит, в примерно 2-х минутный интервал времени события покрытия попадает нулевая фаза кривой блеска. Фаза ближайшего к нулевой фазе минимума на той кривой блеска относительно мала, поэтому авторы пренебрегли этим отклонением и для удобства положили, что ближайший минимум соответствует строго нулевой фазе.

Аналогично работе [4] была поставлена несколько другая задача со следующими допущениями:

1. Также как и в работе [4], считать кольцо круглым, но допускать ненулевой наклон этого кольца к экваториальной плоскости Хаумеа
2. Для этого отказаться пренебрегать малой фазой одного из минимумов на кривой блеска из работы [4] в отличие от того, как это было сделано в [4]
3. Рассмотреть, как гипотеза красного пятна [24] корректирует оценки параметров фигуры и кольца Хаумеа, то есть рассмотреть две опции:
    a. Пренебречь наличием пятна и считать полную амплитуду на кривой блеска от минимального минимума, до максимального максимума
    b. Учесть наличие пятна, считая полную амплитуду от минимума до максимума на фазовом участке кривой блеска, когда, предположи-

тельно пятно не вносило своего вклада, то есть находилось с обратной стороны Хаумеа

2.2.2 Проекция эллипсоида на картинную плоскость

Уравнение эллипсоида в системе координат $Ox_1x_2x_3$, полуоси (a_1, a_2, a_3) которого направлены вдоль координатных осей, задаётся уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \quad (2.14)$$

Относительно наблюдателя этот эллипсоид может быть ориентирован любым образом, свяжем систему координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$, имеющую общее начало с системой координат $Ox_1x_2x_3$, с наблюдателем так, чтобы ось Ox_1^0 смотрела на наблюдателя, в таком случае плоскость $Ox_2^0x_3^0$ будет картинной плоскостью.

Координаты одной и той же точки в этих двух системах координат будут связаны через матрицу преобразования A

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

с помощью уравнения

$$\vec{x} = A\vec{x}_0. \quad (2.16)$$

Введём три угла, описывающие ориентацию эллипсоида относительно наблюдателя. Удобнее ввести такие углы: φ_{rot} – позиционный угол оси вращения эллипсоида, отсчитываемый в картинной плоскости от оси Ox_3^0 против часовой стрелки, то есть от направления на север в сторону направления на восток; β_{rot} – угол наклона оси вращения эллипсоида к картинной плоскости (считается положительным, если проекция угловой скорости вращения Хаумеа на линию взгляда наблюдателя положительна); γ – угол, отражающий вращение эллипсоида вокруг своей оси. Определим матрицу преобразования A с помощью этих углов, сделав последовательно три преобразования поворота: первый поворот – вокруг оси Ox_1^0

на угол φ_{rot}; второй поворот – вокруг оси Ox_2' на угол β_{rot} и третий поворот – вокруг оси Ox_3'' на угол γ, получится произведение трёх матриц поворота

$$A=\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta_{rot} & 0 & -\sin\beta_{rot}\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta_{rot} & 0 & \cos\beta_{rot}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi_{\text{rot}} & \sin\varphi_{\text{rot}}\\ 0 & -\sin\varphi_{\text{rot}} & \cos\varphi_{\text{rot}}\end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

После перемножения (2.17) получаем матрицу преобразования A в виде

$$A=\begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\beta_{\text{rot}} & \sin\gamma\cos\varphi_{\text{rot}}+\cos\gamma\sin\beta_{\text{rot}}\sin\varphi_{\text{rot}} & \sin\varphi_{\text{rot}}\sin\gamma-\cos\gamma\sin\beta_{\text{rot}}\cos\varphi_{\text{rot}}\\ -\sin\gamma\cos\beta_{\text{rot}} & \cos\gamma\cos\varphi_{\text{rot}}-\sin\gamma\sin\beta_{\text{rot}}\sin\varphi_{\text{rot}} & \sin\varphi_{\text{rot}}\cos\gamma+\sin\gamma\sin\beta_{\text{rot}}\cos\varphi_{\text{rot}}\\ \sin\beta_{\text{rot}} & -\cos\beta_{\text{rot}}\sin\varphi_{\text{rot}} & \cos\beta_{\text{rot}}\cos\varphi_{\text{rot}}\end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.15) и (2.16) в уравнение (2.14), а затем, проецируя на картинную плоскость $Ox_2^0x_3^0$, получим уравнение эллипса в виде [36]

$$\left(R_{12}^2-R_1R_2\right)\left(x_2^0\right)^2+2\left(R_{12}R_{13}-R_1R_{23}\right)x_2^0x_3^0+\left(R_{13}^2-R_1R_3\right)\left(x_3^0\right)^2+R_1=0, \quad (2.19)$$

где

$$R_k=\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{ik}^2}{a_i^2},\ R_{kl}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{ik}\alpha_{il}}{a_i^2}. \quad (2.20)$$

Заметим, что в работе [36] матрица преобразования определялась через стандартные углы Эйлера в отличие от этой работы.

Перепишем уравнение (2.19) в виде

$$A_{22}\left(x_2^0\right)^2+2x_2^0x_3^0A_{23}+A_{33}\left(x_3^0\right)^2=1, \quad (2.21)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}A_{22}&=\frac{R_1R_2-R_{12}^2}{R_1}=\frac{\alpha_{33}^2a_3^2+\alpha_{23}^2a_2^2+\alpha_{13}^2a_1^2}{\alpha_{11}^2a_2^2a_3^2+\alpha_{21}^2a_1^2a_3^2+\alpha_{31}^2a_1^2a_2^2};\\ A_{23}&=\frac{R_1R_{23}-R_{12}R_{13}}{R_1}=-\frac{\alpha_{33}\alpha_{32}a_3^2+\alpha_{23}\alpha_{22}a_2^2+\alpha_{13}\alpha_{12}a_1^2}{\alpha_{11}^2a_2^2a_3^2+\alpha_{21}^2a_1^2a_3^2+\alpha_{31}^2a_1^2a_2^2};\\ A_{33}&=\frac{R_1R_3-R_{13}^2}{R_1}=\frac{\alpha_{32}^2a_3^2+\alpha_{22}^2a_2^2+\alpha_{12}^2a_1^2}{\alpha_{11}^2a_2^2a_3^2+\alpha_{21}^2a_1^2a_3^2+\alpha_{31}^2a_1^2a_2^2}.\end{aligned} \quad (2.22)$$

Квадратичная форма (2.21) имеет инварианты

$$\begin{aligned}I&=A_{22}+A_{33}=\frac{\left(\alpha_{33}^2+\alpha_{32}^2\right)a_3^2+\left(\alpha_{23}^2+\alpha_{22}^2\right)a_2^2+\left(\alpha_{13}^2+\alpha_{12}^2\right)a_1^2}{\alpha_{11}^2a_2^2a_3^2+\alpha_{21}^2a_1^2a_3^2+\alpha_{31}^2a_1^2a_2^2};\\ D&=A_{22}A_{33}-A_{23}^2=\frac{1}{\alpha_{11}^2a_2^2a_3^2+\alpha_{21}^2a_1^2a_3^2+\alpha_{31}^2a_1^2a_2^2}.\end{aligned} \quad (2.23)$$

Полуоси лимба

$$a_{1\,\mathrm{limb}}=\sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}};\ a_{2\,\mathrm{limb}}=\sqrt{-\frac{1}{\lambda_1}}. \qquad (2.24)$$

выражаются через корни

$$\lambda_{1,2}=\frac{I}{2}\pm\sqrt{\frac{I^2}{4}-D} \qquad (2.25)$$

характеристического уравнения

$$\lambda^2-I\lambda+D=0. \qquad (2.26)$$

Уравнение лимба в системе координат $Ox_2^1x_3^1$, оси которой направлены вдоль малых полуосей лимба, имеет вид

$$\frac{\left(x_2^1\right)^2}{a_2^2}+\frac{\left(x_3^1\right)^2}{a_3^2}=1. \qquad (2.27)$$

Координаты точек лимба в системе $Ox_2^1x_3^1$ связаны с координатами этих же точек в системе $Ox_2^0x_3^0$ через позиционный угол малой полуоси лимба с помощью

$$\begin{aligned} x_2^1&=x_2^0\cos\varphi+x_3^0\sin\varphi;\\ x_3^1&=-x_2^0\sin\varphi+x_3^0\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.27), получим уравнение лимба в системе координат $Ox_2^0x_3^0$ в виде

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{a_{1\,\mathrm{limb}}^2}+\frac{\sin^2\varphi}{a_{2\,\mathrm{limb}}^2}\right)\left(x_2^0\right)^2+2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{a_{1\,\mathrm{limb}}^2}-\frac{1}{a_{2\,\mathrm{limb}}^2}\right)x_2^0x_3^0+\left(\frac{\sin^2\varphi}{a_{1\,\mathrm{limb}}^2}+\frac{\cos^2\varphi}{a_{2\,\mathrm{limb}}^2}\right)\left(x_3^0\right)^2=1. \qquad (2.29)$$

Коэффициенты уравнения (2.29) приравняем к коэффициентам уравнения (2.21), а затем, решая полученную систему уравнений относительно позиционного угла φ, получим, что позиционный угол малой полуоси лимба, отсчитываемый в картинной плоскости от оси Ox_3^0, равен (см. также [36])

$$\varphi=-\frac{1}{2}\arctan\left(2\frac{\dfrac{\alpha_{32}\alpha_{33}}{a_1^2a_2^2}+\dfrac{\alpha_{22}\alpha_{23}}{a_1^2a_3^2}+\dfrac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{a_2^2a_3^2}}{\dfrac{\alpha_{32}^2-\alpha_{33}^2}{a_1^2a_2^2}+\dfrac{\alpha_{22}^2-\alpha_{23}^2}{a_1^2a_3^2}+\dfrac{\alpha_{12}^2-\alpha_{13}^2}{a_2^2a_3^2}}\right). \qquad (2.30)$$

При подстановке коэффициентов матрицы (2.18) в (2.30) получаем одно из нужных нам уравнений, связывающее позиционный угол малой полуоси лимба с пространственными параметрами Хаумеа

$$\mathrm{tg}\left[2\left(\varphi_{\mathrm{rot}}-\varphi\right)\right]=\frac{\left(a_1^2-a_2^2\right)\sin\beta_{\mathrm{rot}}}{\left(a_1^2-a_2^2\right)\left(\sin^2\gamma-\cos^2\gamma\sin^2\beta_{\mathrm{rot}}\right)+\left(a_2^2-a_3^2\right)\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}}\sin 2\gamma. \tag{2.31}$$

2.2.3 Площадь проекции эллипсоида на картинную плоскость и локальные экстремумы функции этой площади от угла γ

Площадь лимба, согласно (2.24) и (2.25), даётся формулой

$$S_{\mathrm{limb}}=\pi a_{1\,\mathrm{limb}}a_{2\,\mathrm{limb}}=\frac{\pi}{\sqrt{D}}. \tag{2.32}$$

Используя формулы (2.23-2.25), получим два уравнения для квадратов полуосей лимба в виде

$$\begin{aligned}&a_{1\,\mathrm{limb}}^2a_{2\,\mathrm{limb}}^2=\frac{1}{D}=\alpha_{11}^2a_2^2a_3^2+\alpha_{21}^2a_1^2a_3^2+\alpha_{31}^2a_1^2a_2^2;\\&a_{1\,\mathrm{limb}}^2+a_{2\,\mathrm{limb}}^2=\frac{I}{D}=\left(\alpha_{33}^2+\alpha_{32}^2\right)a_3^2+\left(\alpha_{23}^2+\alpha_{22}^2\right)a_2^2+\left(\alpha_{13}^2+\alpha_{12}^2\right)a_1^2.\end{aligned} \tag{2.33}$$

С учётом (2.18) уравнения (2.33) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}&a_{1\,\mathrm{limb}}^2a_{2\,\mathrm{limb}}^2=\sin^2\beta_{\mathrm{rot}}a_1^2a_2^2+\sin^2\gamma\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}a_1^2a_3^2+\cos^2\gamma\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}a_2^2a_3^2;\\&a_{1\,\mathrm{limb}}^2+a_{2\,\mathrm{limb}}^2=a_1^2\left(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\sin^2\beta_{\mathrm{rot}}\right)+a_2^2\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\sin^2\beta_{\mathrm{rot}}\right)+a_3^2\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Из уравнения (2.34) можно получить выражение для площади лимба через полуоси эллипсоида и углы, описывающие его пространственную ориентацию

$$S_{\mathrm{limb}}=\pi\sqrt{\sin^2\beta_{\mathrm{rot}}a_1^2a_2^2+\sin^2\gamma\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}a_1^2a_3^2+\cos^2\gamma\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}a_2^2a_3^2}. \tag{2.35}$$

Чтобы найти экстремумы площади лимба за период вращения Хаумеа вокруг своей оси, приравняем частную производную площади лимба S_{limb} по углу γ

$$\frac{\partial S_{\mathrm{limb}}}{\partial\gamma}=\frac{\pi a_3^2\left(a_1^2-a_2^2\right)\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}\cdot\sin 2\gamma}{2\sqrt{\sin^2\beta_{\mathrm{rot}}a_1^2a_2^2+\sin^2\gamma\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}a_1^2a_3^2+\cos^2\gamma\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}a_2^2a_3^2}} \tag{2.36}$$

к нулю

$$\frac{\partial S_{\mathrm{limb}}}{\partial\gamma}=0. \tag{2.37}$$

Уравнение (2.37) удовлетворяется в случаях:

1. Если $a_3 = 0$, то есть если тело представляет собой эллиптический диск, вращающийся вокруг перпендикулярной ему оси;
2. Если $\cos\beta_{rot} = 0$, то есть если ось вращения эллипсоида перпендикулярна картинной плоскости;
3. Если $a_1 = a_2$, то есть если тело является сплюснутым сфероидом;
4. Если $\sin 2\gamma = 0$.

Если выполняется хотя бы один из первых трёх пунктов, то площадь проекции тела на картинную плоскость не меняется при вращении этого тела вокруг своей оси, но нам интересны именно экстремумы функции $S_{\text{limb}}(\gamma)$. Согласно 4-ому пункту, функция $S_{\text{limb}}(\gamma)$ достигает своих локальных экстремумов в точках

$$\gamma = \frac{\pi}{2}k,\ k = 0,1,2,... \tag{2.38}$$

если при этом не выполняется ни один из первых трёх пунктов. Заметим также, что если выполняется (2.38), то, согласно (2.31), выполняется и

$$\operatorname{tg}\left[2\left(\varphi_{\text{rot}} - \varphi\right)\right] = 0 \ \Rightarrow\ \varphi_{\text{rot}} - \varphi = \frac{\pi}{2}k,\ k = 0,1,2,... \tag{2.39}$$

Ясно, что при выполнении 2-ого пункта позиционный угол оси вращения тела оказывается неопределённым, хотя формально при этом уравнение (2.31) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left[2\left(\varphi_{\text{rot}} - \varphi\right)\right] = +\operatorname{tg} 2\gamma, & \beta_{rot} = -\dfrac{\pi}{2}; \\ \operatorname{tg}\left[2\left(\varphi_{\text{rot}} - \varphi\right)\right] = -\operatorname{tg} 2\gamma, & \beta_{rot} = +\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{2.40}$$

Сформулируем условия достижения локального минимума и локального максимума площади лимба по отдельности. Если малая ось лимба лежит на той же прямой, что и проекция оси вращения эллипсоида на картинную плоскость, то площадь лимба достигает своего локального минимума и равна

$$S_{\min} = \min_{\gamma}\left(S_{\text{limb}}\right) = \pi a_2 \sqrt{a_1^2 \sin^2\beta_{\text{rot}} + a_3^2 \cos^2\beta_{\text{rot}}}. \tag{2.41}$$

А если малая ось лимба перпендикулярна проекции оси вращения эллипсоида на картинную плоскость, то площадь лимба достигает своего локального максимума и равна

$$S_{\max} = \max_{\gamma}\left(S_{\text{limb}}\right) = \pi a_1 \sqrt{a_2^2 \sin^2 \beta_{\text{rot}} + a_3^2 \cos^2 \beta_{\text{rot}}}. \tag{2.42}$$

Теперь эти условия можно объединить в **теорему об экстремуме площади проекции эллипсоида на картинную плоскость**:

В общем случае, если позиционные углы проекции оси вращения эллипсоида на картинную плоскость и малой оси проекции эллипсоида на картинную плоскость могут быть определены, то площадь проекции эллипсоида на картинную плоскость достигает своего локального минимума (максимума), если проекция оси вращения эллипсоида на картинную плоскость совпадает с малой (большой) осью проекции эллипсоида на картинную плоскость.

2.2.4 Учёт данных фотометрии

Разность звёздных величин Δm, соответствующая двум различным яркостям $I_{\min}$ и $I_{\max}$ определяется с помощью формулы Погсона

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{I_{\min}}{I_{\max}}, \tag{2.43}$$

а полагая альбедо на всех участках поверхности эллипсоида постоянным, с хорошей точностью справедлива прямая пропорциональность между яркостью и видимой площадью отражающего тела

$$\frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{S_{\min}}{S_{\max}}, \tag{2.44}$$

тогда из формул (2.41-2.43) получим уравнение

$$\frac{a_1\sqrt{a_2^2 \sin^2 \beta_{\text{rot}} + a_3^2 \cos^2 \beta_{\text{rot}}}}{a_2\sqrt{a_1^2 \sin^2 \beta_{\text{rot}} + a_3^2 \cos^2 \beta_{\text{rot}}}} = 10^{0.4\Delta m}. \tag{2.45}$$

Как видно из (2.45), амплитуда кривой блеска отражающего вращающегося эллипсоида зависит от соотношения полуосей эллипсоида и угла наклона оси вращения эллипсоида к картинной плоскости.

2.2.5 Ориентация в пространстве и радиус кольца вокруг Хаумеа

Проекция кольца на картинную плоскость имеет полуоси (2.10), ассиметричные отклонения от среднего объясняются тем, что авторы в [4], полагая кольцо круглым, искусственно установили центр проекции кольца в центр лимба Хаумеа. Для удобства сдвинем среднее, чтобы симметризовать отклонения, сама поправка более чем в три раза меньше отклонения

$$a'_{1\,\mathrm{ring}} = \left(2302 \pm 60\right) км;\ a'_{2\,\mathrm{ring}} = \left(541 \pm 15\right) км. \tag{2.46}$$

Оставляя предположение о круглом кольце в силе, полагаем в уравнениях (2.31) и (2.34) , что

$$a_3 = 0;\ a_1 = a_2 = r_{ring};\ \beta_{rot} = \beta_{ring};\ \varphi = \varphi'_{ring};\ \varphi_{rot} = \varphi_{ring}, \tag{2.47}$$

получим, что позиционный угол оси вращения кольца, радиус кольца r_{ring} и синус угла наклона оси вращения кольца к картинной плоскости $\sin\beta_{ring}$ равны

$$\varphi_{ring} = \varphi'_{ring};\ r_{ring} = a'_{1\,\mathrm{ring}};\ \sin\beta_{ring} = \pm\frac{a'_{2\,\mathrm{ring}}}{a'_{1\,\mathrm{ring}}}, \tag{2.48}$$

откуда получается четыре решения для пространственной ориентации кольца

$$r_{ring} = \left(2302 \pm 60\right) км;\ \beta_{ring} = \pm 13^{\circ}.6 \pm 0^{\circ}.5;\ \varphi_{\mathrm{ring}} = -74.3^{0} \pm 1.3^{0} + \pi k,\ k = \overline{0,1}. \tag{2.49}$$

2.2.6 Полная система уравнений, определяющая пространственную ориентацию и форму Хаумеа

Поскольку в данной работе, в отличие от [4], полагается, что кольцо необязательно должно лежать в экваториальной плоскости Хаумеа, кроме трёх уравнений (2.31) и (2.34), включающих параметры лимба, нужно ещё два фотометрических уравнения (2.45) на две различные даты

$$\begin{gathered}
\frac{a_1^2}{a_2^2}\cdot\frac{a_2^2\sin^2\beta_{\mathrm{rot}} + a_3^2\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}}{a_1^2\sin^2\beta_{\mathrm{rot}} + a_3^2\cos^2\beta_{\mathrm{rot}}} = 10^{0.8\Delta m_1},\\
\frac{a_1^2}{a_2^2}\cdot\frac{a_2^2\sin^2\beta_{2\,\mathrm{rot}} + a_3^2\cos^2\beta_{2\,\mathrm{rot}}}{a_1^2\sin^2\beta_{2\,\mathrm{rot}} + a_3^2\cos^2\beta_{2\,\mathrm{rot}}} = 10^{0.8\Delta m_2}.
\end{gathered} \tag{2.50}$$

Пренебрегая прецессией оси вращения Хаумеа на интервале в несколько лет, можно связать друг с другом углы наклона оси вращения Хаумеа к картинной плоскости на две даты с помощью уравнения

$$\left(\cos\alpha_2\cos\delta_2, \sin\alpha_2\cos\delta_2, \sin\delta_2\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha_p\cos\delta_p\\ \sin\alpha_p\cos\delta_p\\ \sin\delta_p\end{pmatrix}+\sin\beta_{2\,\mathrm{rot}}=0, \tag{2.51}$$

где направление на полюс оси вращения Хаумеа, имеющее небесные экваториальные координаты J2000 (α_p, δ_p), выражается с помощью

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_p\cos\delta_p\\ \sin\alpha_p\cos\delta_p\\ \sin\delta_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\alpha\cos\delta\sin\beta_{\mathrm{rot}}-\sin\alpha\sin\varphi_{\mathrm{rot}}\cos\beta_{\mathrm{rot}}-\cos\alpha\sin\delta\cos\beta_{\mathrm{rot}}\cos\varphi_{\mathrm{rot}}\\ -\sin\alpha\cos\delta\sin\beta_{\mathrm{rot}}+\cos\alpha\sin\varphi_{\mathrm{rot}}\cos\beta_{\mathrm{rot}}-\sin\alpha\sin\delta\cos\beta_{\mathrm{rot}}\cos\varphi_{\mathrm{rot}}\\ -\sin\delta\sin\beta_{\mathrm{rot}}+\cos\delta\cos\beta_{\mathrm{rot}}\cos\varphi_{\mathrm{rot}}\end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Первая дата – это дата (январь 2017 года) события покрытия, описанного в работе [4], а также амплитуда кривой блеска Δm_1 из той же работы. На эту дату угол наклона оси вращения Хаумеа равен β_{rot}, а геоцентрические экваториальные небесные координаты J2000 карликовой планеты равны

$$\begin{aligned}\alpha&=14^h12^m03^s,\\ \delta&=+16^\circ33'59''.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Вторая дата – это дата (февраль 2009 года) наблюдений, описанных в работе [25]. На эту дату угол наклона оси вращения Хаумеа равен $\beta_{2\,rot}$, а геоцентрические экваториальные небесные координаты J2000 карликовой планеты равны

$$\begin{aligned}\alpha_2&=13^h43^m10^s,\\ \delta_2&=+18^\circ53'26''.\end{aligned} \tag{2.54}$$

В частной переписке с Х.Л. Ортизом мы с научным руководителем выяснили, что фаза минимума на кривой блеска из работы [4] равна примерно 0.037, что соответствует углу вращения Хаумеа, равному

$$\gamma\approx-13^\circ.32. \tag{2.55}$$

Таким образом, полная система уравнений, необходимых для оценки пространственной ориентации и формы Хаумеа, включает в себя уравнения (2.31), (2.34), а также уравнения (2.50-2.52). В эти уравнения входят 8 неизвестных параметров

$$a_1, a_2, a_3, \varphi_{\mathrm{rot}}, \beta_{\mathrm{rot}}, \beta_{2\,\mathrm{rot}}, \alpha_p, \delta_p; \tag{2.56}$$

а также 10 известных параметров

$$a_{1\,\mathrm{limb}}, a_{2\,\mathrm{limb}}, \gamma, \varphi, \Delta m_1, \Delta m_2, \alpha, \delta, \alpha_2, \delta_2. \tag{2.57}$$

2.2.7 Результаты расчётов

2.2.7.1 Пространственная форма и ориентация оси вращения Хаумеа

В работе [27] амплитуда Δm_2 кривой блеска определена с вычетом вкладов спутников, а вкладом кольца можно пренебречь, если считать его наклон к экваториальной плоскости Хаумеа незначительным. То есть при наклоне $\beta_{ring} \approx 13^{\circ}.6$ оси вращения кольца к картинной плоскости на первую дату, в таком случае, наклон $\beta_{2\,ring} \approx 6^{\circ}.5$ оси вращения кольца на вторую дату, как видно, будет совсем малым. В работе [4] амплитуда Δm_1 кривой блеска получена сразу для всей системы Хаумеа, то есть для самой Хаумеа амплитуда должна немного отличаться от амплитуды для всей системы. Зададим для неё интервал $\Delta m_1 \in \left[0^m.21, 0^m.32\right]$, чтобы проследить, как меняется решение описанной выше полной системы уравнений для восьми неизвестных. Для второй амплитуды будем рассматривать два значения в двух опциях: а) полной амплитуды $\Delta m_2 = 0^m.32$ кривой блеска, пренебрегая вопросом о неравномерности распределения альбедо; б) амплитуды $\Delta m_2 = 0^m.26$ кривой блеска за вычетом вклада пятна.

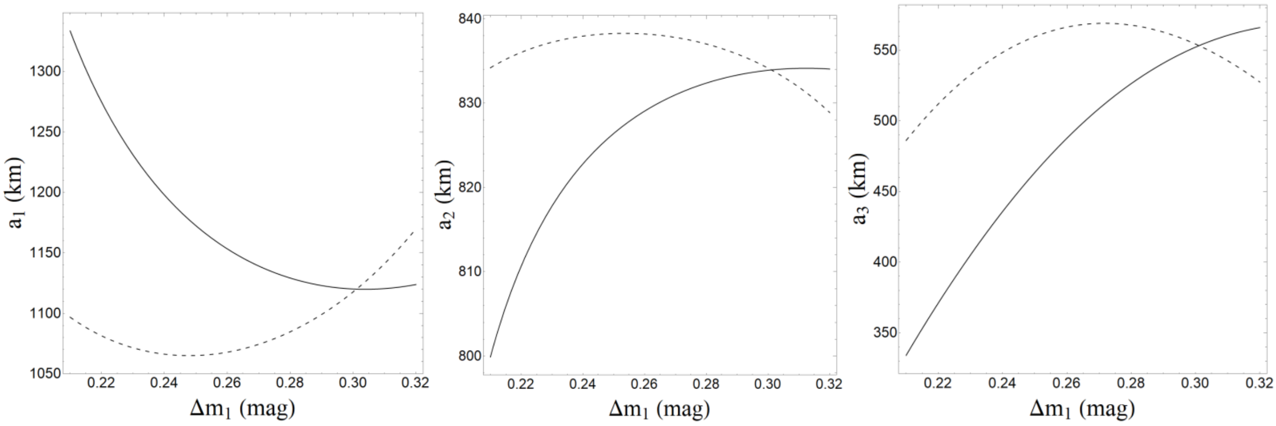

Рис.2.1. Величины большой, средней и малой полуоси (слева-направо) эллипсоида Хаумеа в зависимости от амплитуды кривой блеска на первую дату в двух опциях: в первой опции – от полной амплитуды кривой блеска (сплошная линия) и во второй опции – от амплитуды кривой блеска за вычетом вклада пятна (штрихованная линия).

На рис.2.1 видно, что зависимость большой полуоси эллипсоида Хаумеа от первого фотометрического параметра носит характер изменения, отличный от характера изменения двух других полуосей. Во второй опции на всех трёх графиках экстремум попадает в интервал $\Delta m_1 \in \left[0^m.21, 0^m.32\right]$, для большой полуоси – это локальный минимум, а для средней и малой – это локальный максимум.

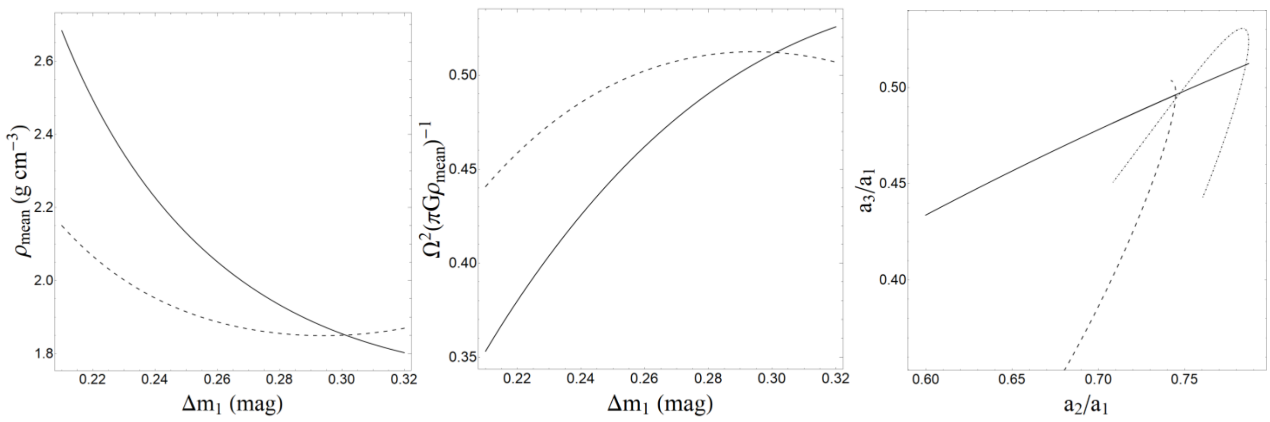

Рис.2.2. Величины средней плотности эллипсоида Хаумеа (левый рисунок) и квадрата угловой скорости осевого вращения Хаумеа в единицах $\pi G \rho_{mean}$ (центральный рисунок) в зависимости от амплитуды кривой блеска на первую дату в двух опциях: полная амплитуда (сплошная линия) и амплитуда за вычетом вклада пятна (штрихованная линия). На правом рисунке показана зависимость отношений полуосей эллипсоида в трёх моделях: для эллипсоида Якоби (сплошная линия) и для эллипсоида Хаумеа в двух опциях (штрихованной линией в первой опции и штрихпунктирной линией во второй опции).

На рис.2.2 (левый график) в двух опциях показана средняя плотность Хаумеа. Средняя плотность в первой опции монотонно убывает, а во второй – имеет локальный минимум. На центральном графике рис.2.2 показана зависимость от Δm_1 квадрата угловой скорости Ω^2, которая известна, поскольку известен период осевого вращения Хаумеа (см. формулу (2.1)), отнесённой к величине $\pi G \rho_{mean}$. В таком случае, очевидно, что с убыванием средней плотности ρ_{mean} будет возрастать безразмерный квадрат угловой скорости осевого вращения Хаумеа $\dfrac{\Omega^2}{\pi G \rho_{mean}}$. На правом графике рис.2.2 показано, как две модели Хаумеа в геометрическом смысле соотносятся с последовательностью эллипсоидов Якоби.

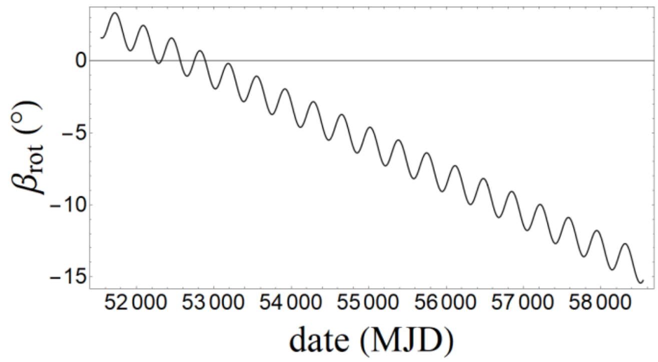

Рис.2.3. Величина угла наклона оси вращения Хаумеа к картинной плоскости в зависимости от модифицированной юлианской даты. Рассчитано по эфемеридам, сгенерированным с помощью веб-интерфейса Лаборатории Реактивного Движения НАСА JPL HORIZONS Web-Interface.

Для наглядности, используя эфемериды Хаумеа, генерируемые веб-интерфейсом Лаборатории Реактивного Движения НАСА JPL HORIZONS Web-Interface, на рис.2.3 представлен угол наклона оси вращения Хаумеа к картинной плоскости на интервале в несколько лет, рассчитанный как угол $\beta_{2\,rot}$ по формуле (2.51). Короткие периоды (1 год) колебаний соответствуют орбитальному движению Земли вокруг Солнца, а долгий период (282 года), который на графике даже не заметен, соответствует орбитальному движению Хаумеа вокруг Солнца.

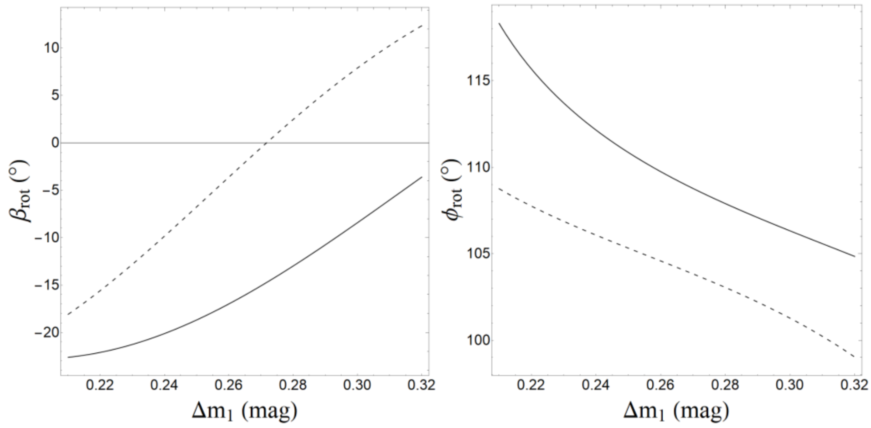

Рис.2.4. Величины угла наклона к картинной плоскости (на левом рисунке) и позиционного угла на картинной плоскости (на правом рисунке) оси вращения Хаумеа в зависимости от амплитуды кривой блеска в двух опциях (сплошной линией в первой опции и штрихованной линией во второй опции).

На рис.2.4 показаны зависимости от Δm_1 углов ориентации оси вращения Хаумеа в двух опциях. Угол $\beta_{rot}(\Delta m_1)$ в целом возрастает, а угол $\varphi_{rot}(\Delta m_1)$ в целом убывает на заданном отрезке $\Delta m_1 \in \left[0^m.21, 0^m.32\right]$.

2.2.7.2 Наклоны кольца и орбиты Хииаки к экватору Хаумеа

Вопрос о прямом или ретроградном обращении спутников вокруг Хаумеа стоит с момента открытия спутников. Ответ на этот вопрос интересен также с космогонической точки зрения. Подтверждение ретроградного движения спутников по отношению к спиновому вращению Хаумеа отсеяло бы часть гипотез о происхождении спутников, но вопрос о направлении орбитального движения спутников по отношению к направлению осевого вращения Хаумеа до сих пор не разрешён.

Согласно работе [37] направление на полюс орбиты Хииаки в небесных экваториальных координатах J2000

$$\begin{aligned} \alpha_{p\,sat} &= 283.0^0 \pm 0.2^0, \\ \delta_{p\,sat} &= -10.6^0 \pm 0.7^0. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Направление же на полюс кольца должно быть близким к направлению на полюс орбиты Хииаки, поэтому, с учётом формулы (2.49) и (2.52), это направление должно быть таким

$$\alpha_{p\,\text{ring}} = 285.1^0 \pm 0.5^0, \quad \delta_{p\,\text{ring}} = -10.6^0 \pm 1.2^0. \tag{2.59}$$

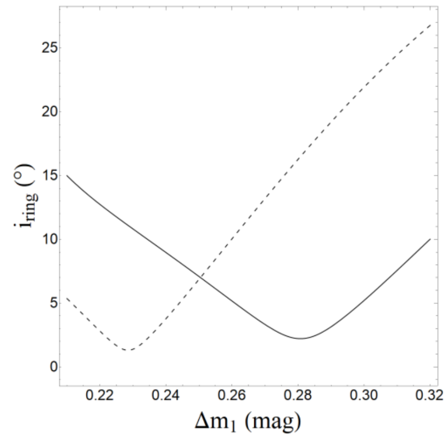

Рис.2.5. Величина угла наклона кольца к экваториальной плоскости Хаумеа в зависимости от амплитуды кривой блеска в двух опциях (сплошной линией в первой опции и штрихованной линией во второй опции).

На рис.2.5 показаны графики зависимости наклона кольца к экватору Хаумеа от фотометрического параметра в двух опциях.

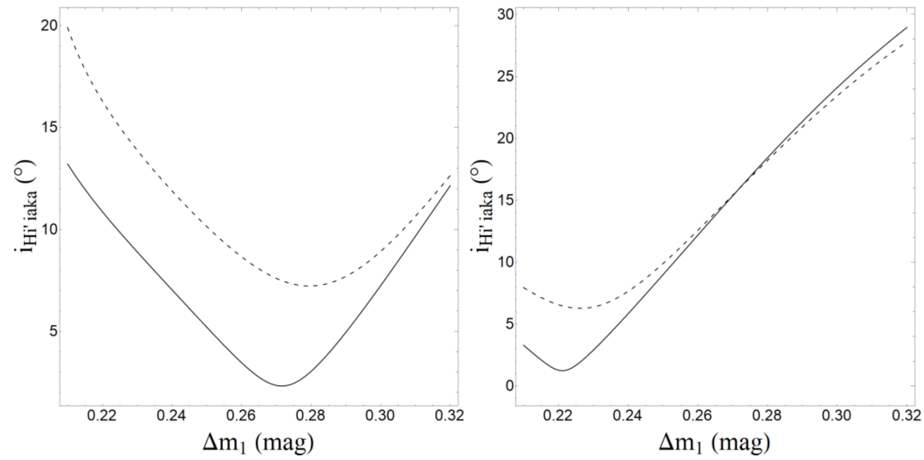

Рис.2.6. Величины углов наклона орбиты спутника Хииака карликовой планеты Хаумеа к её экваториальной плоскости (в первой опции на левом рисунке, а во второй опции на правом рисунке) в зависимости от амплитуды кривой блеска при двух случаях взаимной ориентации орбитального углового момента Хииаки и спинового углового момента Хаумеа: сплошной линией – в случае прямого движения спутника и штрихованной линией – в случае ретроградного движения спутника.

На рис 2.6 изображены 4 графика в двух опциях, каждая из которых представлена в двух случаях движения спутника: прямого и ретроградного. В случае ретроградного движения оценка угла наклона орбиты Хииаки к экваториальной плоскости больше 7°. В случае прямого движения минимальное значение этого угла достигает всего лишь 2°, что предпочтительнее. Поэтому больший приоритет в вопросе о направлении движения спутников Хаумеа мы отдаём случаю прямого движения.

2.2.7.3 Наиболее предпочтительные оценки параметров системы Хаумеа

С учётом выбора наиболее приоритетных направлений на полюс кольца и полюс Хаумеа решение полной системы уравнений из раздела 2.2.6 с вариацией нормально распределённых входных параметров методом Монте-Карло позволило оценить средние и стандартные отклонения восьми неизвестных параметров (2.56), позволило оценить также углы наклона к экватору Хаумеа кольца и орбиты Хииаки.

Для двух фотометрических параметров (в скобках указан вариант во второй опции)

$$\begin{aligned}&\Delta m_1 = 0^m.27 \pm 0^m.02,\ \Delta m_2 = 0^m.32 \pm 0^m.02;\\&\left(\Delta m_1 = 0^m.22 \pm 0^m.02,\ \Delta m_2 = 0^m.26 \pm 0^m.02;\right)\end{aligned} \tag{2.60}$$

получены оценки полуосей Хаумеа, её среднеобъёмного радиуса, её средней плотности

$$\begin{aligned}&a_1 = (1139 \pm 16)\,\textit{км},\ a_2 = (830 \pm 6)\,\textit{км},\ a_3 = (508 \pm 13)\,\textit{км},\\&R = (783 \pm 8)\,\textit{км},\ \rho_{\text{mean}} = (1.99 \pm 0.07)\,\frac{\textit{г}}{\textit{см}^3};\\&\left(\begin{aligned}&a_1 = (1082 \pm 15)\,\textit{км},\ a_2 = (836 \pm 5)\,\textit{км},\ a_3 = (511 \pm 13)\,\textit{км},\\&R = (773 \pm 8)\,\textit{км},\ \rho_{\text{mean}} = (2.07 \pm 0.07)\,\frac{\textit{г}}{\textit{см}^3};\end{aligned}\right)\end{aligned} \tag{2.61}$$

а также ориентации оси вращения Хаумеа и наклонов кольца и орбиты Хииаки к экватору Хаумеа

$$\begin{aligned}&\beta_{rot} = -15^{\circ}.2 \pm 1^{\circ}.0,\ \varphi_{rot} = 108^{\circ}.9 \pm 1^{\circ}.4,\ i_{\text{ring}} = 3^{\circ}.7 \pm 1^{\circ}.7,\ i_{\text{Hi'iaka}} = 2^{\circ}.7 \pm 1^{\circ}.3.\\&\left(\beta_{rot} = -15^{\circ}.6 \pm 1^{\circ}.1,\ \varphi_{rot} = 107^{\circ}.7 \pm 1^{\circ}.3,\ i_{\text{ring}} = 3^{\circ}.2 \pm 1^{\circ}.4,\ i_{\text{Hi'iaka}} = 2^{\circ}.0 \pm 1^{\circ}.0.\right)\end{aligned} \tag{2.62}$$

Направление на полюс Хаумеа

$$\alpha_{\text{p}} = 282^{\circ}.6 \pm 1^{\circ}.1,\ \delta_{\text{p}} = -13^{\circ}.0 \pm 1^{\circ}.3.$$
$$\left(\alpha_{\text{p}} = 282^{\circ}.6 \pm 1^{\circ}.2,\ \delta_{\text{p}} = -11^{\circ}.9 \pm 1^{\circ}.2.\right) \tag{2.63}$$

Сравнение с результатами [4] показывает, что в этой работе оценка средней плотности немного больше, а сам эллипсоид Хаумеа оказывается менее вытянутым. Оценки наклонов кольца и орбиты Хииаки к экватору Хаумеа малы, но всё же отличны от нуля.

Так же интересно посмотреть, как полученные оценки вписываются в данные по фотометрии из других работ. Сравним с данными по амплитудам кривых блеска из работ [23] и [24].

Дата	Наблюдаемая амплитуда (полная)	Вычисленная амплитуда (полная)	Наблюдаемая амплитуда (с исключением пятна)	Вычисленная амплитуда (с исключением пятна)
27.01.2005 – 25.07.2005	$0.28^{m} \pm 0.04^{m}$	$0.34^{m} \pm 0.04^{m}$	$0.23^{m} \pm 0.04^{m}$	$0.28^{m} \pm 0.04^{m}$
15.06.2007 – 24.07.2007	$0.29^{m} \pm 0.02^{m}$	$0.33^{m} \pm 0.02^{m}$	$0.24^{m} \pm 0.02^{m}$	$0.27^{m} \pm 0.02^{m}$

Табл.2.1. Результаты оценок амплитуд кривых блеска на две даты. В скобках указано, какие амплитуды были взяты: полная амплитуда или амплитуда с исключённым вкладом красного пятна. «Наблюдаемая амплитуда» значит, что значение взято из соответствующих статей. «Вычисленная амплитуда» значит, что она была вычислена по нашим двум моделям.

В табл.2.1 приведены оценки амплитуд кривых блеска. Оказалось, что вычисленные амплитуды для двух моделей немного больше наблюдаемых. Это можно объяснить тем, что амплитуды в наших моделях вычислялись непосредственно для самого эллипсоида Хаумеа, а в статьях [23] и [24] амплитуды включают в себя вклад от всей системы Хаумеа. Вклад спутников и кольца должен уменьшать амплитуду кривой блеска самой Хаумеа, что легко можно видеть из закона Погсона (2.43).

2.3 Прецессия кольца вокруг Хаумеа

2.3.1 Постановка задачи

В разделе 2.2.7 были уточнены внешние параметры фигуры Хаумеа, а также кольца вокруг неё. В связи с тем, что кольцо, судя по всему, имеет небольшой наклон к экватору Хаумеа, становится интересным вопрос об узловой прецессии этого кольца. Для этого необходимо также знать внешний потенциал центрального тела. Кроме данных о форме центрального тела для вычисления потенциала нужна информация и о внутреннем распределении масс.

В связи с этим задача ставится следующим образом. Оценить скорость (и, соответственно, период) узловой прецессии кольца вокруг Хаумеа с учётом того, что центральное тело состоит из каменного ядра и ледяной оболочки.

2.3.2 Азимутально усреднённый внешний потенциал трёхосного эллипсоида

Внешний потенциал центрального тела через сферические функции записывается в стандартном виде

$$\varphi(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r}\left\{1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\theta)\left[C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda\right]\right\}, \qquad (2.64)$$

где r, θ и λ есть радиус, широта и долгота пробной точки в системе координат с началом в центре масс тела, R_0 – нормировочный радиус (обычно берётся либо средний экваториальный радиус, либо наибольший экваториальный радиус, либо среднеобъёмный радиус), P_{nm} – присоединенные полиномы Лежандра, C_{nm} и S_{nm} – коэффициенты потенциала, определяемые через распределение масс внутри тела. В случае однородного эллипсоида с внешней границей, заданной уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1,\ a_1\ge a_2\ge a_3, \qquad (2.65)$$

часть коэффициентов тождественно равна нулю

$$\begin{aligned}&C_{nm}=0,\ \textit{при нечётных } n \textit{ и } m;\\&S_{nm}=0,\ \textit{при всех } n \textit{ и } m.\end{aligned} \qquad (2.66)$$

Хаумеа вращается вокруг своей малой оси очень быстро с периодом меньше 4 часов (2.1), а нам интересна именно линейная (вековая) составляющая прецессии. Поэтому разумно усреднить внешний потенциал (2.64) по долготе λ. Как видно, такое усреднение приведёт к исчезновению всех гармоник с индексами $m > 0$, а все остальные гармоники после такого усреднения не изменятся

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\lambda)\,d\lambda = \begin{cases}1, & m = 0\\ 0, & m > 0\end{cases}; \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\lambda)\,d\lambda = 0. \tag{2.67}$$

Ограничимся зональными гармониками 4-ой степени, тогда в цилиндрических координатах усреднённый по долготе и ограниченный 4-ой степенью внешний потенциал вращающегося вокруг малой оси однородного трёхосного эллипсоида примет вид

$$\varphi(r,z) \approx \frac{GM}{r}\cdot\left(1+\frac{1}{2}C_{20}\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\left(3\cdot\left(\frac{z}{r}\right)^2-1\right)+\frac{1}{8}C_{40}\left(\frac{R_0}{r}\right)^4\left(35\cdot\left(\frac{z}{r}\right)^4-30\cdot\left(\frac{z}{r}\right)^2+3\right)\right), \tag{2.68}$$

где z – высота пробной частицы над плоскостью экватора, а коэффициенты зональных гармоник равны соответствующим зональным гармоникам неподвижного однородного трёхосного эллипсоида той же формы

$$\begin{aligned} C_{20} &= \frac{2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2}{10R_0^2}; \\ C_{40} &= 3\frac{3\left(a_1^4 + a_2^4\right) + 8a_3^4 + 2a_1^2a_2^2 - 8\left(a_1^2 + a_2^2\right)a_3^2}{280R_0^4}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

2.3.3 Взаимная гравитационная энергия центрального тела и кольца Гаусса

Поскольку нас интересует именно вековые составляющие прецессии, то кроме азимутального усреднения внешнего потенциала центрального тела потребуется усреднить и орбитальное движение по средней аномалии. Это значит, что нужно найти энергию кольца Гаусса в поле (2.68). Усреднению методом Гаусса уделялось внимание в Главе 1.

Цилиндрические координаты точки на кольце Гаусса

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon}, \quad z = r\sin(\upsilon+\omega)\cdot\sin i, \tag{2.70}$$

где υ – истинная аномалия, ω – аргумент перицентра, i – наклон орбиты к плоскости экватора центрального тела, a – большая полуось, e – эксцентриситет орбиты. Тогда взаимная энергия центрального тела и пробной материальной точки в произвольный момент времени будет равна

$$W_{mut} = -m \cdot \varphi\left(r\left(a,e,\upsilon\right), z\left(a,e,i,\omega,\upsilon\right)\right). \tag{2.71}$$

Усреднённое методом Гаусса выражение (2.71) в интегральном виде

$$W_{mut} = -\frac{m\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi\left[r\left(a,e,\upsilon\right), z\left(a,e,i,\omega,\upsilon\right)\right] \frac{d\upsilon}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} \tag{2.72}$$

представляет собой искомую энергию кольца Гаусса в поле (2.68). В явном виде эта энергия может быть записана, например, так

$$W_{mut} = W_0 + W_1 + W_2, \tag{2.73}$$

где

$$\begin{gathered} W_0 = -\frac{GMm}{a}; \; W_1 = \frac{1}{4}\frac{GMm}{a} C_{20}\left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \frac{3\cos^2 i - 1}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}; \\ W_2 = -\frac{3}{128}\frac{GMm}{a\left(1-e^2\right)^{\frac{7}{2}}} C_{40}\left(\frac{R_0}{a}\right)^4 \begin{pmatrix} \left(\left(5\cos^2 i - 1\right) - \left(7\cos^2 i - 1\right)\cdot 5\sin^2 i \sin^2\omega\right)\cdot 4e^2 \\ +\left(35\cos^4 i - 30\cos^2 i + 3\right)\left(2+e^2\right) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.74}$$

Функция Лагранжа, необходимая для получения уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов, аналогично тому, как это было сделано в Главе 2, выражается через взаимную энергию с помощью формулы

$$L = -\frac{W_{mut}}{m}. \tag{2.75}$$

2.3.4 Уравнения вековой эволюции кольца Гаусса в азимутально усреднённом потенциале центрального тела

После подстановки (2.75) в уравнения эволюции Лагранжа для оскулирующих элементов (см., например, [8]) получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} C_{20} \cdot n \cdot \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{\left(1-e^2\right)^2},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{4} C_{20} \cdot n \cdot \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{5\cos^2 i - 1}{\left(1-e^2\right)^2},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{15}{16} C_{40} \cdot n \cdot \left(\frac{R_0}{a} \right)^4 \frac{\sin^2 i \left(7\cos^2 i - 1\right)}{\left(1-e^2\right)^3} e \sin\omega \cos\omega, \qquad (2.76)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{15}{16} C_{40} \cdot n \cdot \left(\frac{R_0}{a} \right)^4 \frac{\sin i \cos i \left(7\cos^2 i - 1\right)}{\left(1-e^2\right)^4} e^2 \sin\omega \cos\omega.$$

Здесь $n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ – среднее движение точечной массы m по своей орбите, а коэффициенты C_{20} и C_{40} даны в (2.69). В первых двух уравнениях опущены слагаемые с коэффициентами 4-ой зональной гармоники ввиду их относительной малости по сравнению с основными слагаемыми. В двух последних уравнениях слагаемые с коэффициентом 2-ой зональной гармоники оказались тождественно равными нулю.

Заметим, что отношение скоростей прецессий из первых двух уравнений в (2.76) равно

$$\frac{\dot{\omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{5\cos^2 i - 1}{2\cos i}. \qquad (2.77)$$

Уравнение (2.77) показывает, что отношение угловых скоростей (или периодов) апсидальной и узловой прецессий зависит только от угла наклона i кольца Гаусса к экватору центрального тела.

2.3.5 Уточнённая модель внутренней структуры Хаумеа

Хаумеа можно представить состоящей из эллипсоидального каменного ядра и конфокальной ледяной оболочки. Фигура равновесия такого тела изучалась в работе [33].

Поверхность S_c каменного ядра плотности ρ_c описывается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_{1c}^2} + \frac{x_2^2}{a_{2c}^2} + \frac{x_3^2}{a_{3c}^2} = 1, \; a_{1c} > a_{2c} > a_{3c}, \qquad (2.78)$$

а внутренняя и внешняя поверхности ледяной оболочки плотности ρ_{sh} представлены, соответственно, уравнениями (2.78) и (2.65). Для устойчивости фигуры следует потребовать $\rho_c > \rho_{sh}$.

Уравнение равновесия жидкой массы, вращающейся вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью Ω

$$grad\, p = \rho grad\Phi, \tag{2.79}$$

где $p(\vec{x})$ – внутреннее давление, а полный потенциал $\Phi(\vec{x})$ равен

$$\Phi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\Omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right), \tag{2.80}$$

требует, чтобы внутренняя и внешняя поверхности были уровенными $\Phi(\vec{x}) = const$. Это накладывает ограничения на форму оболочки. Оболочка, в таком случае, должна представлять собой фокалоид, квадраты полуосей внутренней и внешней поверхностей которого связаны уравнениями

$$a_{1c}^2 = a_1^2 - \lambda,\ a_{2c}^2 = a_2^2 - \lambda,\ a_{3c}^2 = a_3^2 - \lambda, \tag{2.81}$$

где λ – наибольший корень кубического уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_{1c}^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_{2c}^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_{3c}^2 + \lambda} = 1. \tag{2.82}$$

Внешний потенциал двуслойного эллипсоида, как например в [33], можно представить в виде комбинации внешних потенциалов однородных эллипсоидов

$$\varphi = \varphi\left(\rho_{sh}, a_1, a_2, a_3\right) + \varphi\left(\rho_c, a_1, a_2, a_3\right) - \varphi\left(\rho_{sh}, a_{1c}, a_{2c}, a_{3c}\right). \tag{2.83}$$

Для коэффициентов зональных гармоник потенциала (2.83) находим

$$\bar{C}_{n0} = C_{n0}\left(a_{1c}, a_{2c}, a_{3c}\right)\left(\frac{a_{1c}a_{2c}a_{3c}}{a_1 a_2 a_3}\right)^{\frac{3+n}{3}} \frac{\rho_c - \rho_{sh}}{\rho_{mean}} + C_{n0}\left(a_1, a_2, a_3\right)\frac{\rho_{sh}}{\rho_{mean}}, \tag{2.84}$$

где ρ_{mean} – средняя плотность, которая даётся формулой

$$\rho_{mean} = \frac{a_{1c}a_{2c}a_{3c}}{a_1 a_2 a_3}\left(\rho_c - \rho_{sh}\right) + \rho_{sh}. \tag{2.85}$$

С помощью уравнений (2.69) и (2.81) уравнение (2.84) преобразуется к более простому виду

$$\bar{C}_{n0} = C_{n0}\left(a_1, a_2, a_3\right). \tag{2.86}$$

Заметим, что уравнение (2.86) не противоречит обобщённой теореме Маклорена-Лапласа [10].

Для конкретных оценок воспользуемся параметрами фигуры Хаумеа и кольца вокруг неё из раздела 2.2 (см. формулы (2.61) и (2.62)) и работы [33]

$$\begin{gathered}
a_1 = \left(1082 \pm 15\right) \textit{км},\ a_2 = \left(836 \pm 5\right) \textit{км},\ a_3 = \left(511 \pm 13\right) \textit{км},\ R_0 = \left(773 \pm 8\right) \textit{км}, \\
\rho_{mean} = \left(2.07 \pm 0.07\right) \frac{\textit{г}}{\textit{см}^3},\ \rho_c \approx 3 \frac{\textit{г}}{\textit{см}^3},\ \rho_{sh} \approx 1 \frac{\textit{г}}{\textit{см}^3}, \\
r_{ring} = \left(2302 \pm 60\right) \textit{км},\ e_{ring} = 0,\ i_{ring} = 3^{\circ}.2 \pm 1^{\circ}.4.
\end{gathered} \tag{2.87}$$

С помощью данных (2.87) из уравнений (2.81) и (2.85) находим полуоси и среднеобъёмный радиус каменного ядра

$$a_{1c} = 1010\ \textit{км},\ a_{2c} = 740\ \textit{км},\ a_{3c} = 331\ \textit{км},\ R_{0c} = 628\ \textit{км}, \tag{2.88}$$

тогда масса ядра M_c и масса оболочки M_{sh}, соответственно, равны

$$M_c = \left(3.1 \pm 0.1\right) \cdot 10^{24}\ \textit{г},\ M_{sh} = \left(0.9 \pm 0.1\right) \cdot 10^{24}\ \textit{г}. \tag{2.89}$$

А отношение массы оболочки к полной массе планетоида равно

$$\kappa = \frac{M_{sh}}{M_c + M_{sh}} \approx 22.5\%. \tag{2.90}$$

Коэффициенты внешнего потенциала такой фигуры, нормированные на среднеобъёмный радиус R_0, будут равны

$$C_{20} = -0.225 \pm 0.009,\ C_{40} = 0.116 \pm 0.009. \tag{2.91}$$

2.3.6 Прецессия кольца

На основе данных (2.87) из формул (2.86), (2.76) и (2.69) получаем оценку частоты узловой прецессии кольца вокруг Хаумеа

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(-5.7 \pm 0.3\right) \cdot 10^{-6} c^{-1}. \tag{2.92}$$

Это соответствует периоду узловой прецессии

$$T_{\Omega} = 12.9 \pm 0.7\ \textit{сут}. \tag{2.93}$$

Формально, на основе соотношения (2.77) можно оценить и период прецессии линии апсид

$$T_{\omega} = 6.5 \pm 0.4\, сут. \tag{2.94}$$

По периодам узловой и апсидальной прецессии видно, что кольцо довольно быстро меняет свою пространственную ориентацию относительно центрального тела.

2.3.7 Условия резонанса в кольце Хаумеа

Для карликовой планеты Хаумеа помехой при расчете прецессии кольца может стать наличие резонанса 3:1 орбитального периода частиц кольца с периодом вращения самого планетоида. Наличие этого резонанса не раз обсуждалось в литературе (см., например, [38]).

При резонансе появляются дополнительные локальные возмущения, возникает вопрос о выживании кольца. В литературе ранее нередко высказывалось мнение, что при наличии резонансов метод колец Гаусса может давать сбой (см., например, [39]). У реальных орбит есть отклонения от строгого резонанса, что открывает возможность дополнительного усреднения локальных возмущений [16]. Ясно, чем острее резонанс, тем длиннее должен быть период усреднения дополнительных возмущений. Отметим, что для кольца Хаумеа резонанс 3:1 также имеет место лишь приблизительно и не является острым. Вопрос заключается в том, на каких характерных временах T_{rel} усредняются дополнительные возмущения.

Используя внешний потенциал Хаумеа (2.68) находим квадрат линейной скорости движения частиц кольца на круговой траектории в плоскости экватора (поскольку наклон кольца к этой плоскости довольно мал)

$$V^2(r) = \frac{GM}{r}\left[1 - \frac{3}{2}C_{20}\left(\frac{R_0}{r}\right)^2 + \frac{15}{8}C_{40}\left(\frac{R_0}{r}\right)^4\right]. \tag{2.95}$$

Введём параметр вращения, равный отношению периода обращения по круговой траектории частицы кольца к периоду спинового вращения Хаумеа (2.1)

$$\alpha = \frac{2\pi r}{V(r)\cdot T_0}. \tag{2.96}$$

Значение параметра $\alpha(r)$ изображено на рис.2.7.

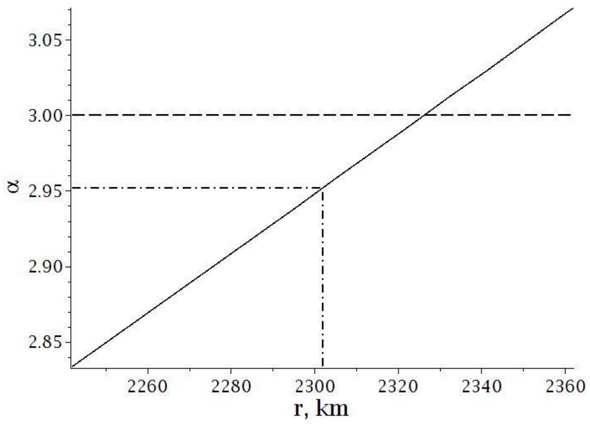

Рис.2.7. Зависимость орбитального периода вращения частиц кольца Хаумеа в единицах периода осевого вращения Хаумеа от радиуса r. Штрихами показано значение $\alpha = 3$, а штрихпунктирными линиями отмечена точка для среднего значения радиуса кольца.

Как и ожидалось, вытянутость центрального тела заметным образом сказывается на оценке орбитального периода обращения частиц кольца, уводя отношение периодов от резонансного значения 3:1. Из рисунка видно, что острого резонанса для частиц кольца Хаумеа нет. Действительно, значение параметра $\alpha = 2.95 \pm 0.01$ для среднего радиуса кольца $r = 2302\,км$ заметно меньше 3. Согласно методу расчета [16] , находим время релаксации T_{rel}

$$T_{rel} = \frac{T_0}{2}\frac{\alpha}{\alpha - 1}. \tag{2.97}$$

Отметим, что в формуле дополнительно появился коэффициент $1/2$, так как эллипсоид имеет два острых конца, то есть частота влияния Хаумеа на частицы кольца в два раза больше спиновой частоты. Расчёт по формуле (2.97) даёт

$$T_{rel} = \left(2.96 \pm 0.01\right) ч. \tag{2.98}$$

Период узловой прецессии кольца по расчётам составил примерно 13 суток (2.93), тогда отношение периода узловой прецессии кольца ко времени релаксации будет равно

$$\frac{T_\Omega}{T_{rel}} = 105 \pm 6. \tag{2.99}$$

Это значит, что за период прецессии плоскости кольца вкладом обозначенного неострого резонанса можно пренебречь.

2.4 Заключение главы

В разделе 2.2 представлены результаты уточнённых оценок размеров Хаумеа и пространственной ориентации её оси вращения по данным события покрытия системой Хаумеа звезды фона и по данным фотометрии. Неравномерность альбедо поверхности Хаумеа является существенной преградой на пути к уточнению размеров этого планетоида. В связи с этим оценки были проведены в двух опциях: а) с игнорированием вопроса о неравномерности альбедо (амплитуда вариации блеска Хаумеа считалась от меньшего минимума до большего максимума на кривой блеска); б) с учётом гипотезы о тёмном пятне на поверхности карликовой планеты [24] (амплитуда вариации блеска Хаумеа считалась между теми минимумом и максимумом, где предположительно пятно не вносит своего вклада). Кроме того, в отличие от [4] восстановление формы Хаумеа по её проекции на картинную плоскость производилось в более полной постановке, то есть с учётом, что лимб на самом деле имел не минимальную площадь за период осевого вращения эллипсоида, а близкую к минимальной.

Показано, что по нашим оценкам фигура Хаумеа чуть менее вытянута и имеет чуть большую плотность по сравнению с результатами работы [4], а кольцо всё же имеет малый наклон $i_{\mathrm{ring}} \approx 3^{\circ} \div 4^{\circ}$ к экваториальной плоскости центрального тела. При выборе решения мы руководствовались тем, что наклон орбиты Хииаки к экваториальной плоскости Хаумеа должен быть малым, как и наклон кольца. Взяв оценку пространственной ориентации орбиты Хииаки из [37], мы получили, что наименьший наклон орбиты этого спутника будет составлять $i_{\mathrm{Hi'iaka}} \approx 2^{\circ} \div 3^{\circ}$ в случае, если орбитальное движение этого спутника будет прямым. Вопрос о прямом или ретроградном орбитальном движении спутников по отношению к направлению осевого вращения Хаумеа важен с точки зрения космогонии спутников.

В разделе 2.3 по уточнённым оценкам из раздела 2.2 представлены результаты уточнённой внутренней структуры Хаумеа. Показано, что масса ледяной оболочки карликовой планеты составляет примерно 22.5% от всей массы Хаумеа (каменное ядро + ледяная оболочка). Оценены периоды узловой и апсидальной прецессии кольца вокруг Хаумеа (соответственно, примерно 12.9 суток и 6.5 суток) с помощью метода, основанного на энергии кольца Гаусса в азимутально усреднённом внешнем потенциале быстро вращающегося неоднородного эллипсоида. Период узловой прецессии кольца примерно в 80 раз больше периода осевого вращения центрального тела, что и обуславливает необходимость азимутального усреднения внешнего потенциала вращающегося эллипсоида.

Отмечено, что упоминаемый резонанс 3:1 в движении частиц кольца выполняется лишь приблизительно, то есть вместо 3 отношение периодов составляет 2.95. Это значит, что резонанс не является острым, а необходимое время усреднения дополнительных возмущений оказалось на два порядка меньше периода прецессии плоскости кольца в азимутально усреднённом поле Хаумеа, что делает адекватным применение независимого усреднения по «быстрым» переменным. Можно предположить, что наличие резкой внешней границы кольца обуславливается наличием вблизи неё резонанса 3:1.

Глава 3. R-тороид как трёхмерное обобщение кольца Гаусса

При написании данной Главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные соискателем Корноуховым В.С. в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты и выводы исследования: [40] и [41].

3.1 Введение

В небесной механике для выявления вековых эффектов в эволюции орбит небесных тел активно применяются методы усреднения по «быстрым» переменным. В Главе 1 было уделено внимание усреднению по средней аномалии и вводилось понятие кольца Гаусса. Однако, усреднения по средним аномалиям может быть недостаточно. Если потенциал, в котором движется тело, отличен от $\varphi = \dfrac{\mu}{r}$, то в случае плоского движения скорость вращения линии апсид может оказаться существенной для того, чтобы долготу перицентра можно было также считать «быстрой» переменной. Тогда, как показано в [42], возможно дополнительное усреднение, приводящее к «размазыванию» массы кольца Гаусса за счёт равномерного движения его линии апсид. Получается плоское неоднородное 2D кольцо, названное в работе [43] **R-кольцом**. Структура и гравитационный потенциал R-кольца изучались в работах [42], [43], [10].

Возможно и дальнейшее обобщение. Если движение не плоское, то плоскость самого R-кольца в инерциальной системе отсчёта будет также прецессировать вокруг некоторого направления. Появляется возможность дополнительного азимутального усреднения, которое приводит уже к «размазыванию» массы R-кольца внутри некоторого тороида. Такую неоднородную 3D фигуру тороидального типа мы назвали **R-тороидом**.

3.2 R-кольцо как двумерное обобщение кольца Гаусса

Сначала обсудим розеточные кольца (R-кольца), представляющие обобщение эллиптического кольца Гаусса на двумерный случай [42], [43]. Такие розеточные кольца (рис.3.1) конструируются: а) или из многих одиночных колец Гаусса, б) или заполняются розеточными, прецессирующими вокруг центральной массы, орбитами. Пространственный потенциал R-кольца изучался в работах [42], [43], [10]. Полезность модели R-кольца определяется тем, что такие кольца естественным образом могут формироваться в планетных системах и в центральных областях плоских галактик.

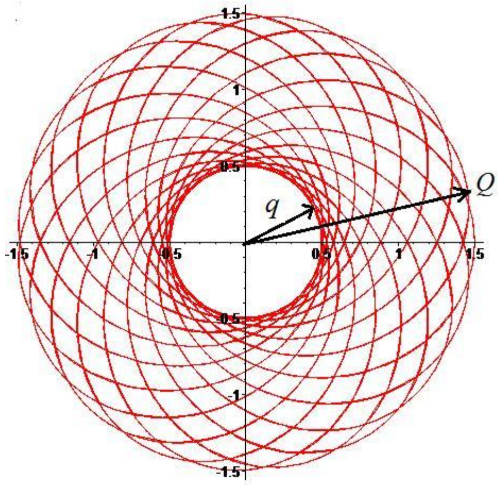

Рис.3.1. Прецессия линии апсид создает розеточное кольцо. Взяты параметры $a=1, e=0.5.$ Показаны внутренний q и внешний Q радиусы R-кольца.

В частном случае $e \to 1$ получается полный круговой диск. Распределение поверхностной плотности в R-кольце дается формулой

$$\sigma(r)=\frac{C}{\sqrt{(Q-r)(r-q)}},\ C=\frac{M}{\pi^2(q+Q)}. \tag{3.1}$$

Здесь M – масса кольца, $Q=a(1+e)$ и $q=a(1-e)$ – расстояния от активного фокуса до точек апоцентра и перицентра в эллипсе, соответственно, a – большая полуось, e – эксцентриситет кольца Гаусса. На рис.3.2 показан график распределения плотности в R-кольце.

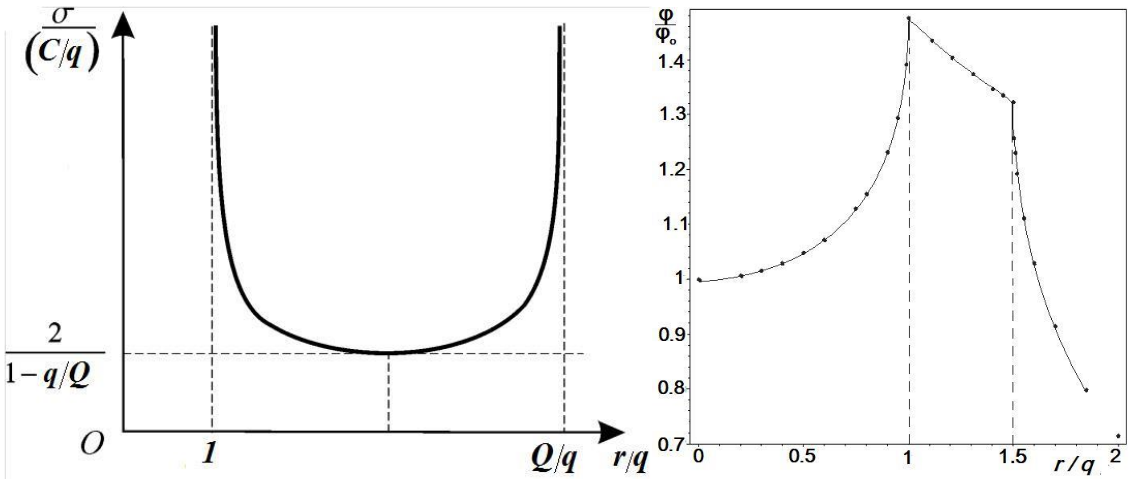

Рис.3.2. Распределение нормированной плотности (левый график) и потенциала в плоскости R-кольца (правый график). Вертикальными штриховыми линиями отмечены точки входа и выхода из кольца.

Средняя поверхностная плотность в кольце будет равна

$$\bar{\sigma} = \frac{M}{\pi\left(Q^2 - q^2\right)}. \tag{3.2}$$

Потенциал R-кольца в интегральном виде дается формулой (см. монографию [3])

$$\varphi\left(r, x_3\right) = \frac{2}{\pi^2}\varphi_0 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{z(\gamma)}{\sqrt{R^2(\gamma, r) + x_3^2}} K\left(2\sqrt{\frac{r \cdot z(\gamma)}{R^2(\gamma, r) + x_3^2}}\right) d\gamma, \tag{3.3}$$

где $K\left(2\sqrt{\frac{r \cdot z(\gamma)}{R^2(\gamma, r) + x_3^2}}\right)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, φ_0 – потенциал в центре розеточного кольца

$$\varphi_0 = \varphi\left(0, 0\right) = \frac{2MG}{q+Q} = \frac{MG}{a} = 2\pi G\bar{\sigma}\left(Q - q\right), \tag{3.4}$$

а вспомогательные величины

$$z(\gamma) = \frac{Q-q}{2}\sin\gamma + \frac{Q+q}{2};$$
$$R(\gamma, r) = z(\gamma) + r. \tag{3.5}$$

Пример расчета потенциала R-кольца в его плоскости $x_3 = 0$ по формуле (3.3) показан на рис.3.2 (правый график). Из него видно, что потенциал кольца возрастает от центра вплоть до его внутренней границы и на входе в кольцо, в точке $r = q$, потенциал имеет абсолютный максимум; в самом кольце потенциал почти линейно убывает вплоть до его внешней границы $r = Q$; затем, в области вне кольца $r \geq Q$ потенциал быстро спадает.

Отметим, что расчёты потенциала по формуле (3.3) затруднены тем, что при $r = z\ \gamma$ модуль $k = 1$ и, как известно, эллиптический интеграл первого рода $K(1)$ логарифмически расходится. Эти технические трудности удаётся преодолеть, в монографии [10] построены эквипотенциали поля R-кольца в плоскости Orx_3. Они показаны на рис.3.3.

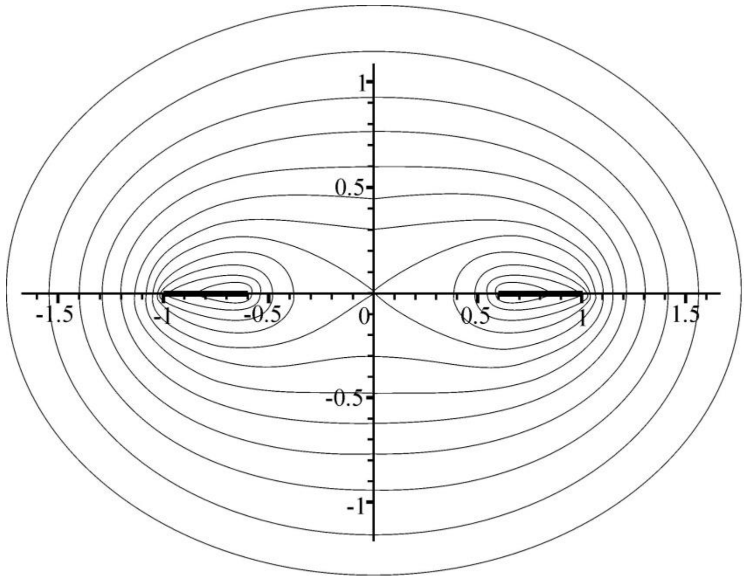

Рис.3.3. Линии равного потенциала розеточного кольца (жирной линией показано сечение самого R-кольца). Отношение внутреннего радиуса кольца q к внешнему Q равно $3:5$. Потенциал нормирован на $\pi^2/2\cdot\varphi_0\ 1-q/Q$. Двенадцать изолиний (от внешних к внутренним) рассчитаны для потенциала, начиная со значения 6.127 и заканчивая значением 15.886 с интервалом 0.8871 (по монографии [10]).

В работе [43] модель R-кольца применялась для изучения движения газа и звёзд в плоских галактиках. С помощью R-кольца изучалась также динамика звёздного диска вокруг сверхмассивной черной дыры в центре Галактики (clockwise stellar disk).

3.3 Постановка задачи и фигура R-тороида

Если плоскость R-кольца прецессирует вокруг некоторого направления, в движении тела появляется ещё одна степень свободы и становится возможным следующее – третье усреднение орбиты спутника. Таким образом, метод получения новой фигуры включает в себя тройное усреднение движения материальной точки по «быстрым» переменным. Первое усреднение дает 1D кольцо Гаусса, на следующем этапе делается усреднение вращающегося кольца Гаусса по углу прецессии его линии апсид (это дает 2D R-кольцо); наконец, на третьем этапе мы проводим азимутальное усреднение прецессирующего R-кольца, что и даёт в итоге трёхмерный R-тороид.

Поясним сказанное. Начнём с изучения пространственной формы R-тороида. Как уже говорилось, модель R-тороида получается методом усреднения движения прецессирующего R-кольца по долготе; в результате получается особая 3D фигура тороидального типа. Для описания области пространства, которую занимает R-тороид, обратимся к сферическим координатам (r,θ,φ), где угол широты θ отсчитывается от экваториальной плоскости. Находим, что фигура тороида описывается ограничениями (см. рис.3.4 справа)

$$\begin{cases} q \le r \le Q, \\ -i \le \theta \le i. \end{cases} \tag{3.6}$$

Фигура R-тороида показана на рис.3.4 (слева).

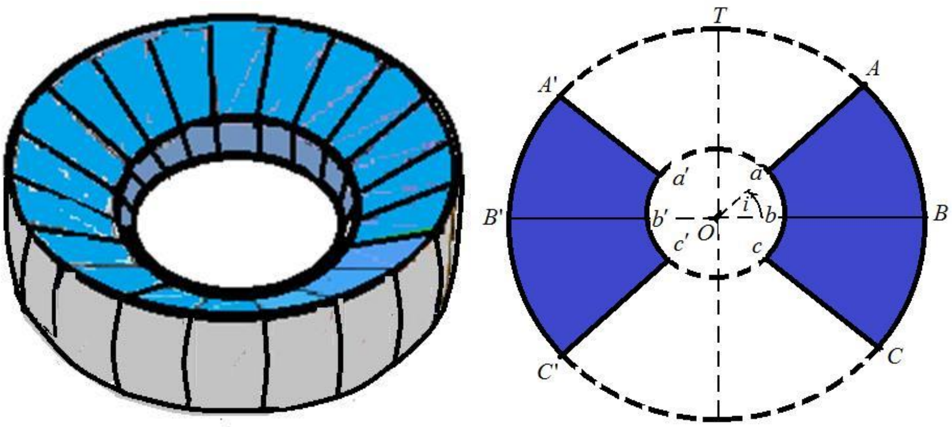

Рис.3.4. R-тороид: слева – 3D изображение, справа – меридиональное сечение R-тороида (показано синим цветом). OT – ось симметрии. Внешняя (ABC и $A'B'C'$) и внутренняя (abc и $a'b'c'$) границы справа и слева есть части кругов, которые соединяются прямыми отрезками (aA, cC) и $(a'A', c'C')$. Обозначен угол i наклона плоских боковых сторон.

Объем R-тороида, как легко убедиться, равен

$$V = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-i}^{i}\int\limits_q^{Q} r^2 \cos\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi\left(Q^3 - q^3\right)\sin i = \frac{8}{3}\pi a^3 e\left(3 + e^2\right)\sin i. \tag{3.7}$$

Здесь e – эксцентриситет исходного кольца Гаусса.

Далее найдём распределение плотности $\rho(\vec{x})$ в R-тороиде. Для этого «размажем» прецессирующее R-кольцо с плотностью (3.1) по объёму (3.6), получим

$$\rho(r,\theta)=\frac{M}{2\pi^3 ar\sqrt{\sin^2 i-\sin^2\theta}\sqrt{(Q-r)(r-q)}}, \tag{3.8}$$

где M – масса, i – угол наклона боковых сторон R-тороида. Для проверки легко убедиться, что распределение плотности (3.8) действительно даёт массу R-тороида

$$\int_0^{2\pi}\int_{-i}^{i}\int_q^Q \rho(r,\theta)r^2\cos\theta drd\theta d\varphi=M. \tag{3.9}$$

Зная объём (3.7) и массу новой фигуры, находим среднюю плотность $\bar{\rho}$, представим закон плотности (3.8) в нормированном виде

$$\frac{\rho(r,\theta)}{\bar{\rho}}=\frac{4a^2e\left(3+e^2\right)\sin i}{3\pi^2 r\sqrt{\sin^2 i-\sin^2\theta}\sqrt{(Q-r)(r-q)}}. \tag{3.10}$$

Заметим, что поверхность R-тороида представляет собой «скорлупу» с аномально высокой плотностью. Действительно, при заданном угле θ плотность (3.10) обращается в бесконечность как на внешних (при $r=Q$) ABC и $A'B'C'$ (см. рис. 3.4), так и на внутренних (при $r=q$) abc и $a'b'c'$ фронтальных участках поверхности. «Скорлупа» появляется не только из-за особенностей распределения плотности в самом R-кольце, но также из-за обращения в нуль члена $\sin^2 i-\sin^2\theta=0$ в точках на плоских сторонах самого R-тороида. На рис.3.5 показаны два графика плотности, демонстрирующие указанные особенности в структуре R-тороида.

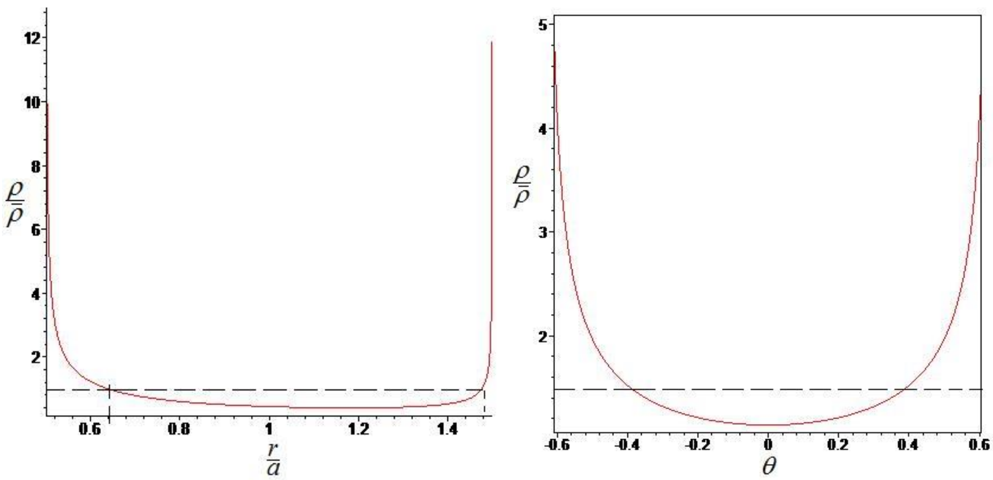

Рис.3.5. Нормированная плотность R-тороида (слева – в экваториальной плоскости, справа – при заданном $r = 0.5Q$). Для расчетов взяты параметра эллипса $a = 1, e = 0.5.$ Штрихами показано значение средней плотности.

На рис.3.5 видно, что в большей части объёма R-тороида плотность мало зависит от координат, причем оказывается там меньше средней по объёму плотности.

3.4 Потенциал R-тороида в интегральном виде

Из-за формы и сингулярности плотности на поверхности R-тороида, его гравитационный потенциал является сложной функцией координат. Рассмотрим этот потенциал подробнее.

При законе плотности (3.8), потенциал R-тороида будет представлен тройным интегралом

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{GM}{2\pi^3 a}\int_0^{2\pi}\int_{-i}^{i}\int_q^Q \frac{r'\cos\theta' dr' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\theta'}\sqrt{(Q-r')(r'-q)}\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}}, \tag{3.11}$$

где ψ – угол между $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, косинус которого равен

$$\cos\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos\theta' \\ \sin\varphi'\cos\theta' \\ \sin\theta' \end{pmatrix} = \cos(\varphi' - \varphi)\cos\theta'\cos\theta + \sin\theta'\sin\theta. \tag{3.12}$$

Из-за наличия тройного интеграла и сингулярности в самой подынтегральной функции, расчёты потенциала по общей формуле (3.11) требуют определенных затрат машинного времени; подобные технические трудности существуют и в частных случаях (3.13) и (3.16).

В частном случае, на оси симметрии R-тороида, где $\theta = \pi/2$ и $\cos\psi = \sin\theta'$, потенциал (3.11) будет представлен однократным интегралом

$$\Phi(r) = \frac{2GM}{\pi^2 a}\int_q^Q \frac{K(k) r' dr'}{\sqrt{(Q-r')(r'-q)}\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\sin i}}, \tag{3.13}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}};\ k = 2\sqrt{\frac{rr'\sin i}{r^2 + r'^2 + 2rr'\sin i}}. \tag{3.14}$$

Графики потенциала на оси симметрии у тороидов с разными углами наклона i его плоских сторон (см. рис.3.6). Отметим, что для углов $i > \pi/3$ потенциал при малых r/a ведет себя немонотонно и есть области, где сила притяжения направлена от центра фигуры.

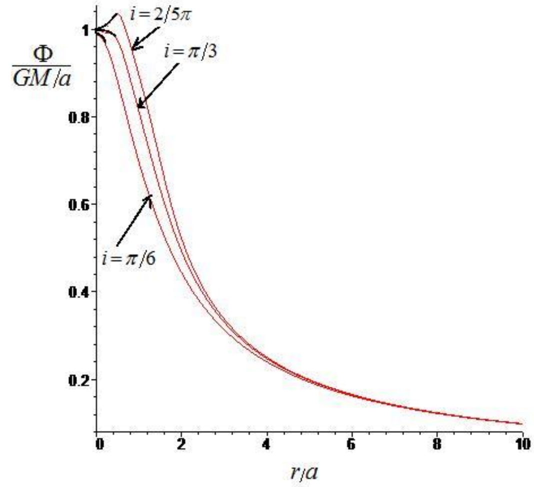

Рис.3.6. Зависимость нормированного потенциала R-тороида на оси симметрии от r/a. Расчёты проведены по формуле (3.13) для параметров эллипса $a=1, e=0.5$ и разных углов наклона сторон i.

В центре симметрии данной фигуры, где $r=0,$ потенциал равен

$$\Phi_0 = \frac{GM}{\pi^2 a}\int_{-i}^{i}\frac{\cos\theta' d\theta'}{\sqrt{\sin^2 i-\sin^2\theta'}}\int_{q}^{Q}\frac{dr'}{\sqrt{(Q-r')(r'-q)}} = \frac{GM}{a}. \tag{3.15}$$

Как следует из формулы (3.11), потенциал R-тороида в экваториальной плоскости даётся двойным интегралом

$$\Phi(r,\theta) = \frac{GM}{2\pi^3 a}\int_{q}^{Q}\frac{r'dr'}{\sqrt{(Q-r')(r'-q)}}\int_{-i}^{i}\frac{\cos\theta'}{\sqrt{\sin^2 i-\sin^2\theta'}}\frac{K\left(\sqrt{\frac{2b_1}{b_1+b_2}}\right)}{\sqrt{b_1+b_2}}d\theta', \tag{3.16}$$

где

$$b_1 = r^2 + r'^2;\ b_2 = 2rr'\cos\theta'. \tag{3.17}$$

Результаты расчётов по формуле (3.16) в экваториальной плоскости R-тороида для разных углов i показаны на рис.3.7.

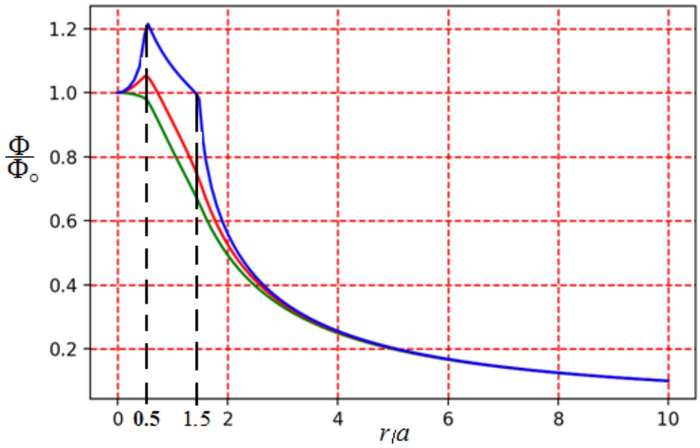

Рис.3.7. Зависимость нормированного потенциала R-тороида в экваториальной плоскости от r/a. Расчёт выполнен для параметров эллипса $a=1, e=0.5$ и углов наклона $i=0, \pi/6, \pi/3$ (последовательность графиков сверху вниз). Верхний график представляет потенциал в плоскости R-кольца. Вертикальными штриховыми линиями отмечены точки входа и выхода из тороида.

Из рис. 3.6 и 3.7 следует, что при малых углах наклона сторон i потенциал (3.16) вблизи центра фигуры ведет себя немонотонно: сила притяжения в экваториальной плоскости монотонно возрастает от центра к внутренней границе фигуры (однако на оси симметрии потенциал будет всюду убывать). Вместе с тем, для R-тороидов с большими углами наклона i, потенциал на оси симметрии в указанной области изменяется немонотонно, но монотонно убывает на плоскости симметрии фигуры. Именно на эффекте возрастания потенциала от центра к внутренней границе кольца основывалась модель, с помощью которой в [38] было дано объяснение эффекту существования резких локальных минимумов на кривых вращения у плоских галактик.

В предельном случае $i=\pi/2$ R-тороид превращается в толстый сферический слой.

3.5 Представление внешнего потенциала R-тороида в виде рядов

Преобразуем формулу (3.11) для потенциала R-тороида, положив в ней

$$\sin\theta' = \sin u \cdot \sin i, \quad r' = x + a. \tag{3.18}$$

Тем самым, вместо переменных (r', θ') вводятся новые переменные (x, u). Тогда

$$\begin{aligned}&\cos\theta' d\theta' = \cos u \cdot \sin i \cdot du,\\ &\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\theta'} = \cos u \cdot \sin i,\\ &\sqrt{(Q-r')(r'-q)} = \sqrt{a^2e^2 - x^2}\end{aligned} \tag{3.19}$$

и интеграл (3.11) примет вид

$$\Phi(r,\theta) = \frac{2GM}{\pi^3 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-ae}^{ae}\frac{(x+a)K(\bar{k})\,dxdu}{\Delta(x,u)\sqrt{a^2e^2-x^2}}, \tag{3.20}$$

где

$$\Delta(x,u) = \sqrt{R^2 + z^2 + (x+a)^2 + 2(x+a)\left[R\sqrt{1-g^2(u)} - z\cdot g(u)\right]}, \tag{3.21}$$

а

$$\begin{aligned}&R = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad g(u) = \sin i \cdot \sin u,\\ &\bar{k}^2 = \frac{4(x+a)R\sqrt{1-g^2(u)}}{R^2 + z^2 + (x+a)^2 + 2(x+a)\left[R\sqrt{1-g^2(u)} - z\cdot g(u)\right]}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Введём функцию $F(R,z,x,a,g)$

$$F(R,z,x,a,g) = \frac{K(\bar{k})}{\sqrt{R^2 + z^2 + (x+a)^2 + 2(x+a)\left[R\sqrt{1-g^2(u)} - z\cdot g(u)\right]}}, \tag{3.23}$$

которую разложим в ряд по переменным x и g. В результате получим ряд

$$F(R,z,x,a,g) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{g^m}{m!}\left.\frac{\partial^{n+m}F(R,z,x,a,g)}{\partial x^n \partial g^m}\right|_{\substack{x=0\\ g=0}}, \tag{3.24}$$

который можно переписать, учитывая вид функции (3.23), в виде

$$F(R,z,x,a,g) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{g^m}{m!}\left.\frac{\partial^{n+m}\bar{F}(R,z,a,g)}{\partial a^n \partial g^m}\right|_{g=0}, \tag{3.25}$$

где $\bar{F}(R,z,a,g) = F(R,z,x=0,a,g)$. После подстановки ряда (3.25) в (3.20) с учётом (3.23) и перестановки местами суммирования и интегрирования, двойной интеграл разделится на сумму произведений двух однократных интегралов

$$\Phi_{out}(r,\varphi,\theta) = \frac{2GM}{\pi^3 a}\sum_{n,m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\int_{-ae}^{ae}\frac{(x+a)x^n dx}{\sqrt{a^2e^2-x^2}}\frac{\sin^m i}{m!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^m u du\left.\frac{\partial^{n+m}\bar{F}(R,z,a,g)}{\partial a^n \partial g^m}\right|_{g=0}\right]. \tag{3.26}$$

Отсюда, вводя коэффициенты

$$P_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n = 2l - 1\,(l = 1,2,3,\ldots); \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2l\,(l = 1,2,3,\ldots). \end{cases} \tag{3.27}$$

в итоге получим формулу

$$\Phi_{out}(R,z) = \frac{2GM}{\pi^3} \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\frac{a^n e^n (eP_{n+1} + P_n)}{n!} \frac{P_m \sin^m i}{m!} \frac{\partial^{n+m} \bar{F}(R,z,a,g)}{\partial a^n \partial g^m} \bigg|_{g=0} \right]. \tag{3.28}$$

Так как на внешней части R-тороида плотность (3.8) имеет сингулярность $\rho(r = Q) \to \infty$, ряд (3.28) при приближении пробной точки к веществу R-тороида будет сходиться всё медленнее, и внутри вещества ряд неприменим.

Формулу (3.28) можно представить в более наглядном виде, если рассматривать её как ряд для потенциала R-тороида по степеням малых e и i. С точностью до второй степени e и $\sin i$, такой ряд примет вид

$$\Phi(R,z) = \frac{2GM}{\pi\sqrt{(R+a)^2 + z^2}} (\varphi_0 + \varphi_2), \tag{3.29}$$

где

$$\varphi_0 = K(k);\ k = 2\sqrt{\frac{Ra}{(R+a)^2 + z^2}};\quad \varphi_2 = \frac{e^2 - \sin^2 i}{8\left((R+a)^2 + z^2\right)\left((R-a)^2 + z^2\right)} \times$$
$$\times \left(\begin{array}{l} \dfrac{(R^2 + a^2 + z^2)\left((R-a)^2 + z(z+2a)\right)\left((R-a)^2 + z(z-2a)\right)}{(R-a)^2 + z^2} E(k) - \\ -\left((R^2 - a^2)^2 + z^2(2R^2 + z^2)\right) K(k) \end{array} \right). \tag{3.30}$$

Заметим, что, благодаря присутствию в числителе φ_2 выражения $e^2 - \sin^2 i$, так как эти члены имеют разные знаки, эксцентриситет кольца и его наклон во втором приближении могут взаимно компенсировать вклад друг друга в потенциал.

В частном случае $i = 0$, когда R-тороид превращается в плоское широкое R-кольцо, усечённый потенциал (3.29) в точках главной плоскости (при $z = 0$) примет вид

$$\Phi(R)=\frac{2GM}{\pi(R+a)}\left\{K(k)+\frac{e^2}{8}\left(\frac{R^2+a^2}{(R-a)^2}E(k)-K(k)\right)\right\},\ k=\frac{2\sqrt{Ra}}{R+a}. \tag{3.31}$$

Здесь R – расстояние от центра R-кольца до пробной точки, a – средний радиус R-кольца (большая полуось исходного кольца Гаусса), e – эксцентриситет исходного кольца Гаусса. Полный потенциал R-кольца в главной плоскости был ранее получен в [43].

Кроме того, потенциал R-тороида можно представить в виде ряда по малым величинам обратных расстояний $\frac{a}{r}$. Для этого заметим, что подынтегральный множитель в (3.11) есть производящая функция для полиномов Лежандра $\bar{P}_n(\cos\psi)$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+(x+a)^2-2r(x+a)\cos\psi}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{P}_n(\cos\psi)\left(\frac{x+a}{r}\right)^n; \tag{3.32}$$

подставив (3.32) в интегральное выражение (3.11), получим ряд

$$\Phi_{out}(r,\theta)=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n P_{2n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(2n+1)!P_{2k}e^{2k}}{(2(n-k)+1)!(2k)!}\right]\bar{P}_{2n}(\cos i)\bar{P}_{2n}(\sin\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right\}. \tag{3.33}$$

В частности, с точностью до 4-й степени по $\frac{a}{r}$ включительно, ряд (3.33) имеет вид

$$\Phi_{out}(r,\theta)=\frac{GM}{r}\left\{\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\bar{P}_2(\cos i)\bar{P}_2(\sin\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^2+\\ +\frac{3}{8}\left(1+5e^2+\frac{15}{8}e^4\right)\bar{P}_4(\cos i)\bar{P}_4(\sin\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^4+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^6\right)\end{array}\right\}. \tag{3.34}$$

где полиномы Лежандра 2-ой и 4-й степеней в явном виде

$$\bar{P}_2(x)=\frac{3x^2-1}{2};\ \bar{P}_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8}. \tag{3.35}$$

3.6 Взаимная гравитационная энергия R-тороида и кольца Гаусса. Уравнения эволюции кольца

Для вывода уравнений вековой эволюции внешней орбиты в гравитационном поле R-тороида необходимо знать взаимную (потенциальную) энергию R-тороида и кольца Гаусса, представляющего орбиту. Интегрируя выражение внешнего потенциала R-тороида (3.34) по внешней оскулирующей орбите с распределением массы (1.5), получим указанную взаимную энергию тел в виде

$$W_{mut} = -\frac{M'\left(1-e'^2\right)^{3/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi_{out}\left(r',\varphi',\theta'\right)d\upsilon'}{\left(1+e'\cos\upsilon'\right)^2}, \tag{3.36}$$

где верхний штрих $(\ )'$ обозначает параметры, которые относятся к кольцу Гаусса. Сделаем в (3.36) замены

$$r' = \frac{a'\left(1-e'^2\right)}{1+e'\cos\upsilon'},\ \sin\theta' = \sin\left(\upsilon'+\omega'\right)\sin i',\ \cos\theta' = \sqrt{1-\sin^2\left(\upsilon'+\omega'\right)\sin^2 i'}. \tag{3.37}$$

Интегрируя (3.36) с учётом (3.34) и замен (3.37), получим взаимную энергию W_{mut} R-тороида и кольца Гаусса в виде усечённого ряда

$$W_{mut} = -\frac{GMM'}{a'}\times\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{1}{4\left(1-e'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\dfrac{3}{2}e^2\right)\bar{P}_2\left(\cos i\right)\bar{P}_2\left(\cos i'\right)\left(\dfrac{a}{a'}\right)^2+ \\ +\dfrac{9}{64\left(1-e'^2\right)^{\frac{7}{2}}}\left(1+5e^2+\dfrac{15}{8}e^4\right)\bar{P}_4\left(\cos i\right)\left(\dfrac{a}{a'}\right)^4\times \\ \times\left[\begin{array}{l}\left(1+\dfrac{1}{2}e'^2\right)\bar{P}_4\left(\cos i'\right)+\dfrac{e'^2}{4}\left(5\cos^2 i'-1\right)- \\ -\dfrac{5e'^2\sin^2 i'\sin^2\omega'}{4}\left(7\cos^2 i'-1\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}. \tag{3.38}$$

Рассмотрим эволюцию гауссова кольца в силовом поле R-тороида. Исходим из известных уравнений Лагранжа эволюции оскулирующего эллипса [8]. Функция возмущения здесь заменяется (с точностью до коэффициента пропорциональности, см. формулу (1.80)) найденной выше функцией взаимной энергии колец Гаусса (3.36)

$$R\left(e',i',\omega'\right) = -\frac{W_{mut}}{M'}. \tag{3.39}$$

Заметим, что так как функция $R\left(e',i',\omega'\right)$ зависит только от трёх параметров кольца Гаусса, сами уравнения Лагранжа заметно упрощаются и имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{de'}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'n'a'^2}\frac{\partial R}{\partial \omega'},\\
\frac{di'}{dt} &= \frac{\cos i'}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}\sin i'}\frac{\partial R}{\partial \omega'},\\
\frac{d\omega'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{e'n'a'^2}\frac{\partial R}{\partial e'} - \cos i'\frac{d\Omega'}{dt},\\
\frac{d\Omega'}{dt} &= \frac{1}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}\sin i'}\frac{\partial R}{\partial i'}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Отметим, что в (3.40) есть только четыре уравнения, так как большая полуось $a' = const.$

Используя теперь (3.39), где W_{mut} рассчитывается по формуле (3.38), после многих выкладок получим из (3.40) уравнения эволюции кольца Гаусса в силовом поле R-тороида

$$\begin{aligned}
\left(\frac{de'}{dt}\right)_p &= \frac{15n'}{16}C_{40}^p\frac{M}{M_*}\left(\frac{a}{a'}\right)^4\frac{\sin^2 i'\left(7\cos^2 i'-1\right)e'\sin\omega'\cos\omega'}{\left(1-e'^2\right)^3};\\
\left(\frac{di'}{dt}\right)_p &= -\frac{15n'}{16}C_{40}^p\frac{M}{M_*}\left(\frac{a}{a'}\right)^4\frac{\sin i'\cos i'\left(7\cos^2 i'-1\right)e'^2\sin\omega'\cos\omega'}{\left(1-e'^2\right)^4};\\
\left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_p &= \frac{3n'}{2}C_{20}^p\frac{M}{M_*}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\frac{\cos i'}{\left(1-e'^2\right)^2};\\
\left(\frac{d\omega'}{dt}\right)_p &= -\frac{3n'}{4}C_{20}^p\frac{M}{M_*}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\frac{5\cos^2 i'-1}{\left(1-e'^2\right)^2},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где M_* – масса центральной звезды, M – масса планеты (R-тороида), а коэффициенты гармоник поля R-тороида при нормировочном радиусе $R = a$ равны

$$C_{20}^p = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\bar{P}_2\left(\cos i\right);\quad C_{40}^p = \frac{3}{8}\left(1+5e^2+\frac{15}{8}e^4\right)\bar{P}_4\left(\cos i\right). \tag{3.42}$$

Уравнения (3.41) даны в системе отсчета, где главной плоскостью является плоскость Лапласа для системы звезда-планета.

Кроме того, нам понадобятся также уравнения эволюции кольца Гаусса в потенциале центрального тела, разложенном по сферическим гармоникам (см. 2.76)

$$\left(\frac{de'}{dt}\right)_c = \frac{15n'}{16} C_{40}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^4 \frac{\sin^2 i' \left(7\cos^2 i' - 1\right) e' \sin\omega' \cos\omega'}{\left(1 - e'^2\right)^3};$$

$$\left(\frac{di'}{dt}\right)_c = -\frac{15n'}{16} C_{40}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^4 \frac{\sin i' \cos i' \left(7\cos^2 i' - 1\right) e'^2 \sin\omega' \cos\omega'}{\left(1 - e'^2\right)^4};$$

$$\left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_c = \frac{3n'}{2} C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{\cos i'}{\left(1 - e'^2\right)^2}; \tag{3.43}$$

$$\left(\frac{d\omega'}{dt}\right)_c = -\frac{3n'}{4} C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{5\cos^2 i' - 1}{\left(1 - e'^2\right)^2},$$

где R_* – среднеобъёмный радиус центрального тела, выступающий в качестве нормировочного радиуса. Подчеркнем, что в (3.43) главная плоскость проходит через экваториальную плоскость центрального тела.

3.7 Отношение периодов узловой и апсидальной прецессий орбиты

С помощью 2-х из 4-х уравнений в (3.41) (и так же в (3.43), см. (2.77)) находим отношение периодов прецессии для внешней орбиты пробной планеты (оскулирующего кольца Гаусса)

$$\frac{T'_\Omega}{T'_\omega} = \left|\frac{\dot{\omega}'}{\dot{\Omega}'}\right| = \frac{5\cos^2 i' - 1}{2\cos i'} \approx 2\left(1 - \frac{3}{4} i'^2 + O\left(i'^6\right)\right). \tag{3.44}$$

Из (3.44) следует, что отношение периодов узловой и апсидальной прецессий кольца Гаусса, находящегося в гравитационном поле R-тороида, оказывается чуть меньше 2

$$\frac{T'_\Omega}{T'_\omega} \le 2. \tag{3.45}$$

В случае рассмотрения возмущений только от центрального тела, относительно его экваториальной плоскости, в частности, при $i = 0$ уравнение (3.44) даёт $T_\Omega / T_\omega = 2$. Этот результат подтверждён при моделировании динамики экзопланеты **KOI 120.01** [44] .

3.8 Планеты-гиганты Солнечной системы

Модель R-тороида предназначена для изучения вековой эволюции внешних орбит, большие полуоси которых превышают некоторое критическое (минимальное) значение $a_{\min}$. При известном периоде узловой прецессии орбиты возмущающего тела T_Ω значение $a_{\min}$ рассчитывается по формуле

$$a_{\min} \approx \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} T_\Omega \right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (3.46)$$

Здесь $\mu = G\left(M_* + M_p\right)$ – гравитационный параметр системы.

Сначала рассмотрим модель R-тороида для двух планет-гигантов Солнечной системы. Начнем с Юпитера. Требуется знать два периода: период движения планеты вокруг Солнца $T_{orb} \approx 11.86233\,лет$ и период прецессии узла орбиты Юпитера $T_{J\Omega}$. По данным [14], в линейном приближении частота движения узла орбиты Юпитера равна

$$\frac{d}{dt}\Omega_J \approx 6362''.03561. \qquad (3.47)$$

(время в столетиях). Следовательно, соответствующий период прецессии будет примерно равен $T_{J\Omega} \approx 20370.84\,лет$. Угол наклона орбиты Юпитера к эклиптике в настоящее время мал и равен $i \approx 1^\circ.30327$, но в прошлом, согласно расчётам в рамках двупланетной задачи (раздел 2.6 и монография [9]), он мог достигать и больших значений $i \approx 2^\circ.5$. Ширина R-кольца для Юпитера равна $2ea \approx 0.50\,а.е.$ Так как характерное время создания R-тороида для Юпитера равно $T_\Omega \approx 20370.84\,лет$, то на меньших масштабах времени фигура R-тороида для Юпитера не будет полной. Отсюда следует, что вековое влияние R-тороида Юпитера можно рассматривать только на те небесные тела, большие полуоси орбит которых удовлетворяют неравенству $a \geq 747\,а.е.$ Аналогичные расчёты для Сатурна приведены в табл.3.1.

Планета	T_Ω, *годы*	$a_{\min}$, *а.е.*
Юпитер	20370.84	747
Сатурн	14025.67	582.4

Табл.3.1. Периоды узловой прецессии и соответствующие $a_{\min}$ для двух планет-гигантов.

Для Сатурна величина $a_{\min} \geq 582\,а.е.$ оказывается даже меньше, чем для Юпитера. Следовательно, модели R-тороидов для Юпитера и Сатурна позволяют рассчитать вековые эффекты не только в движении гипотетической Планеты 9 (с принятыми для неё параметрами $a \approx 400 - 800\, а.е.$ [44], [46]), но также в движении седноидов и некоторых экстремальных транснептунных объектов (eTNO).

3.9 Экзопланеты

В последние годы исследование внесолнечных планетных систем идёт бурными темпами, и постоянный приток новых данных, появляющихся вследствие совершенствования методов моделирования и наблюдений, ставит новые задачи.

Для решения этих задач перспективным является применение модели R-тороида к экзопланетам. Особый интерес вызывает класс горячих юпитеров, имеющих тесные орбиты и большие массы [47]. В литературе уже есть данные, указывающие, что некоторые из таких планет, в отличие от планет Солнечной системы, могут иметь быструю узловую прецессию. Приведем некоторые примеры.

Kepler-413b

Kepler-413b, согласно работе [48], относится к классу циркумбинарных экзопланет; она обращается с периодом $T_{orb} \approx 66.262$ сут. вокруг тесной пары звёзд классов K и M с массами $M_1 = 0.820 \pm 0.015\, M_{Sun}$ и $M_2 = 0.542 \pm 0.008\, M_{Sun}$. Звёзды обращаются вокруг центра масс всего за 10.11615 ± 0.00001 суток по почти круговым $(e = 0.037 \pm 0.002)$ орбитам. Радиус и масса экзопланеты, равны $R \approx 0.388\, R_J$, $M \approx 0.2110\, M_J$. По этим характеристикам, данная экзопланета близка к горячим Сатурнам. Параметры орбиты этой планеты равны $e = 0.118$, $q \approx 0.3553\, а.е.$, $i \approx 30^0$. Для орбиты этой планеты известен период узловой прецессии $T_\Omega \approx 11\, лет$ [48]. Следовательно, для данной планеты $\frac{T_\Omega}{T_{orb}} \approx 60.83$. По этим данным можно рассчитать критическое значение большой полуоси орбиты, которое оказывается равным $a_{\min} \approx 5.48\, а.е.$ Таким образом, для системы Kepler-413 модель R-тороида позволяет описывать эволюцию орбит, расположенных на умеренных (несколько астрономических единиц) расстояниях от центральной звезды.

WASP-33b

Классифицируется как retrograde hot Jupiter [49]. Одна из самых горячих известных экзопланет. Обращается вокруг звезды с массой $M \approx 1.5\, M_{Sun}$ по очень тесной орбите с полуосью $a = 0.02\, а.е.$ и периодом $T_{orb} \approx 1.22$ суток. Частота движения восходящего узла равна $\dot{\Omega} \approx 0.373^{\circ}\ лет^{-1}$, что соответствует периоду узловой прецессии $T_{\Omega} \approx 965\, лет$. Следовательно, для этой экзопланеты $a_{\min} \approx 112\, а.е.$, то есть модель R-тороида позволяет описывать эволюцию орбит, далёких от центральной звезды.

PTFO 8-8695b

Согласно [50], [51], экзопланета PTFO 8-8695b (горячий юпитер) движется по сильно наклонённой орбите вокруг центральной звезды. Так как $a = 0.0084\, а.е.$ и $T_{orb} \approx 10.76$ ч., PTFO 8-8695b является одной из самых близко расположенных к звезде экзопланет. Критическое значение большой полуоси орбиты $a_{\min}$ для этой планеты (см. формулу (3.47)) составляет всего $a_{\min} \approx 0.2 \div 0.7\, а.е.$ Таким образом, модель R-тороида для планеты PTFO 8-8695b позволяет описывать эволюцию орбит тел, которые очень близко подходят к центральной звезде. Примечательно, что вторая планета в этой системе PTFO 8-8695c находится очень далеко от центральной звезды $a = 662\, а.е.$ и заведомо попадает в зону гравитационного воздействия R-тороида PTFO 8-8695b.

3.10 Расчёт суммарного эффекта влияния несферичности прецессирующей звезды и возмущения от R-тороида планеты. Пример экзопланеты PTFO 8-8695b

Рассмотрим теперь комбинированную модель, в которой учитывается возмущающее влияние от R-тороида внутренней планеты b и центральной прецессирующей звезды в системе PTFO-8-8695 на орбиту внешней планеты. В указанной статье [51] даны два набора параметров наилучшего соответствия

$M_* \left[M_{Sun} \right]$	0.34	0.44
$M \left[M_J \right]$	3.0 ± 0.2	3.6 ± 0.3
$R_* \left[R_{Sun} \right]$	1.04 ± 0.01	1.03 ± 0.01
C_{20}^c	–0.0064	–0.0049
$\varphi_p \left[^\circ \right]$	51	52.9
$\varphi_* \left[^\circ \right]$	18	20.2
$\varphi \left[^\circ \right]$	69 ± 3	73.1 ± 0.6

Табл.3.2. Данные из статьи [51]. M_* – масса звезды; M – масса планеты b; R_* – радиус звезды; C_{20}^c – коэффициент 2-й зональной гармоники поля звезды; φ_p – наклон орбитального момента планеты b к суммарному моменту звезды и планеты b; φ_* – наклон спинового момента звезды к суммарному моменту звезды и планеты b; φ – угол между моментами звезды и планеты b. Коэффициент $C_{20}^c = -C \cdot f$ был рассчитан нами, в [51] были приведены значения f, а значение коэффициента $C = 0.059$.

Далее сосредоточим внимание только на прецессии линии узлов и линии апсид пробной планеты. Напомним, что уравнения (3.41) записаны для случая, когда главной плоскостью является плоскость Лапласа для системы звезда-планета b, а уравнения (3.43) – когда главная плоскость проходит через экватор центрального тела. Чтобы найти суммарный эффект влияния несферичности звезды и возмущения от планеты b, нужно привести уравнения к единой главной плоскости, в качестве которой выберем плоскость Лапласа уравнений (3.41).

Введём, согласно разделу 1.6, дополнительное уравнение

$$\left(\frac{d\omega''}{dt} \right)_c + \cos i'' \left(\frac{d\Omega''}{dt} \right)_c = -\frac{3n'}{4} C_{20}^c \left(\frac{R}{a'} \right)^2 \frac{3\cos^2 i'' - 1}{\left(1 - e'^2 \right)^2}, \tag{3.48}$$

где с помощью верхних штрихов $(\ )''$ обозначаются углы в системе с экваториальной плоскостью звезды в качестве главной. Как показано в разделе 1.6, значение левой и правой частей уравнения (3.48) при переходе в другую главную плоскость не меняется, т.е.

$$\left(\frac{d\omega'}{dt} \right)_c + \cos i' \left(\frac{d\Omega'}{dt} \right)_c = \left(\frac{d\omega''}{dt} \right)_c + \cos i'' \left(\frac{d\Omega''}{dt} \right)_c \tag{3.49}$$

и, кроме того, согласно тому же разделу 1.6,

$$\cos i'' = \cos i' \cos\varphi_* + \sin i' \sin\varphi_* \cos\Delta\Omega;$$
$$\cos\Delta\bar{\omega} = \frac{\sin i' \cos\varphi_* - \cos i' \sin\varphi_* \cos\Delta\Omega}{\sin i''}; \tag{3.50}$$
$$\left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_c = \frac{\cos\Delta\bar{\omega}}{\sin i'} \sin i'' \left(\frac{d\Omega''}{dt}\right)_c.$$

Используя (3.49-3.50) третье и четвёртое уравнение из формулы (3.41) примут вид

$$\left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_c = \frac{3n'}{2} C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{\cos i' \cos\varphi_* + \sin i' \sin\varphi_* \cos\Delta\Omega}{\left(1-e'^2\right)^2} \left(\cos\varphi_* - \frac{\cos i'}{\sin i'} \sin\varphi_* \cos\Delta\Omega\right);$$
$$\left(\frac{d\omega'}{dt}\right)_c = -\frac{3n'}{4} C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{3\left(\cos i' \cos\varphi_* + \sin i' \sin\varphi_* \cos\Delta\Omega\right)^2 - 1}{\left(1-e'^2\right)^2} - \cos i' \left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_c. \tag{3.51}$$

Учитывая, что ось вращения звезды прецессирует очень быстро (~45 дней) по сравнению с прецессией орбиты пробной планеты ($\sim 10^6$ *лет*), уравнения (3.51) следует усреднить по «быстрой» переменной $\Delta\Omega$; тогда получим

$$\left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_c = \frac{3n'}{2} C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{3\cos^2\varphi_* - 1}{2} \frac{\cos i'}{\left(1-e'^2\right)^2};$$
$$\left(\frac{d\omega'}{dt}\right)_c = -\frac{3n'}{4} C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{3\cos^2\varphi_* - 1}{2} \frac{5\cos^2 i' - 1}{\left(1-e'^2\right)^2}. \tag{3.52}$$

Из формул (3.41), (3.43), (3.52) получим уравнения для прецессии линий узлов и линии апсид под влиянием несферичности звезды совместно с влиянием планеты *b*

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{3n'}{2}\left[C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{3\cos^2\varphi_* - 1}{2} + C_{20}^p \frac{M}{M_*}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\right] \frac{\cos i'}{\left(1-e'^2\right)^2};$$
$$\frac{d\omega'}{dt} = -\frac{3n'}{4}\left[C_{20}^c \left(\frac{R_*}{a'}\right)^2 \frac{3\cos^2\varphi_* - 1}{2} + C_{20}^p \frac{M}{M_*}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\right] \frac{5\cos^2 i' - 1}{\left(1-e'^2\right)^2}. \tag{3.53}$$

Представим решение для угловых частот в таком виде

$$\frac{d\Omega'}{dt} = A_{\Omega'} \left(\frac{1\,a.e.}{a'}\right)^{7/2} \frac{\cos i'}{\left(1-e'^2\right)^2};$$
$$\frac{d\omega'}{dt} = A_{\omega'} \left(\frac{1\,a.e.}{a'}\right)^{7/2} \frac{5\cos^2 i' - 1}{4\left(1-e'^2\right)^2}. \tag{3.54}$$

Тогда периоды прецессии даются формулами

$$T_{\Omega'} = T_{\Omega'}^0 \left(\frac{a'}{1\, a.e.} \right)^{7/2} \frac{\left(1 - e'^2\right)^2}{\left|\cos i'\right|};$$
$$T_{\omega'} = T_{\omega'}^0 \left(\frac{a'}{1\, a.e.} \right)^{7/2} \frac{4\left(1 - e'^2\right)^2}{\left|5\cos^2 i' - 1\right|}, \qquad (3.55)$$

где коэффициенты даны в табл.3.3.

$A_{\omega'}^c \left[10^{-14}\ рад/с\right]$	4.5 ± 0.1	3.66 ± 0.07
$A_{\Omega'}^c \left[10^{-14}\ рад/с\right]$	-2.25 ± 0.05	-1.83 ± 0.04
$A_{\omega'}^p \left[10^{-14}\ рад/с\right]$	1.0 ± 0.6	0.5 ± 0.2
$A_{\Omega'}^p \left[10^{-14}\ рад/с\right]$	-0.5 ± 0.3	-0.25 ± 0.08
$A_{\omega'} \left[10^{-14}\ рад/с\right]$	5.5 ± 0.6	4.2 ± 0.2
$A_{\Omega'} \left[10^{-14}\ рад/с\right]$	-2.7 ± 0.3	-2.1 ± 0.1
$T_{\omega'}^0 \left[10^6\ лет\right]$	3.6 ± 0.4	4.8 ± 0.2
$T_{\Omega'}^0 \left[10^6\ лет\right]$	7.3 ± 0.8	9.6 ± 0.4
C_{20}^p	-0.047 ± 0.028	-0.023 ± 0.005
C_{40}^p	-0.159 ± 0.004	-0.154 ± 0.002

Табл.3.3. Результаты расчёта прецессии орбиты пробной планеты: $A_{\omega'}^c = \left(\frac{d\omega'}{dt} \right)_c \Big|_{\substack{a'=1\, a.e. \\ e'=0;\, i'=0}}$; $A_{\Omega'}^c = \left(\frac{d\Omega'}{dt} \right)_c \Big|_{\substack{a'=1\, a.e. \\ e'=0;\, i'=0}}$; $A_{\omega'}^p = \left(\frac{d\omega'}{dt} \right)_p \Big|_{\substack{a'=1\, a.e. \\ e'=0;\, i'=0}}$; $A_{\Omega'}^p = \left(\frac{d\Omega'}{dt} \right)_p \Big|_{\substack{a'=1\, a.e. \\ e'=0;\, i'=0}}$; $A_{\omega'} = \frac{d\omega'}{dt} \Big|_{\substack{a'=1\, a.e. \\ e'=0;\, i'=0}}$; $A_{\Omega'} = \frac{d\Omega'}{dt} \Big|_{\substack{a'=1\, a.e. \\ e'=0;\, i'=0}}$; $T_{\omega'}^0 = \frac{2\pi}{\left|A_{\omega'}\right|}$; $T_{\Omega'}^0 = \frac{2\pi}{\left|A_{\Omega'}\right|}$; C_{20}^p и C_{40}^p – коэффициенты 2-й и 4-й зональной гармоники поля R-тороида планеты *b*.

Результаты расчёта по формулам (3.55) показаны на рис.3.8.

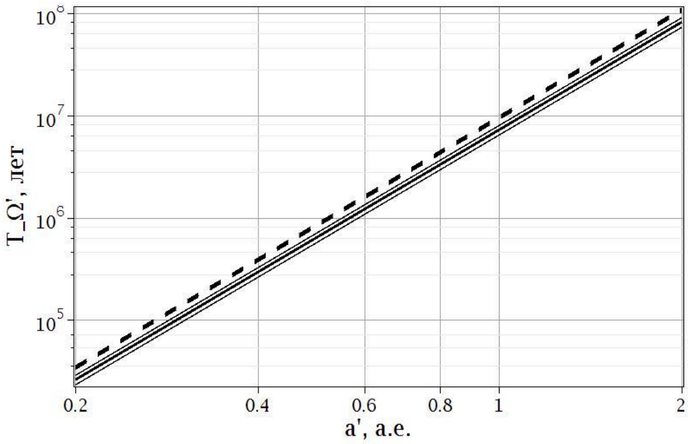

Рис.3.8. График зависимости периода прецессии долготы узла орбиты пробной планеты $T_{\Omega'}\left(a'\right)\Big|_{\substack{e'=0\\ i'=0}}$, измеряемого в годах, от её полуоси, измеряемой в астрономических единицах, в вырожденном случае $e'=0$ и $i'=0$. График представлен в логарифмической шкале по обеим осям. Сплошной линией показан результат для первого варианта $M_* = 0.34 M_{Sun}$, штрихованной линией – для второго варианта $M_* = 0.44 M_{Sun}$. Указаны границы оценки периода в пределах 1σ.

График на рис.3.8 построен от минимального значения полуоси пробной планеты $a_{\min} = 0.2\,a.e.$. При таком значении полуоси орбиты оценка периода прецессии долготы восходящего узла для двух наборов входных параметров из табл.3.2 $T_{\Omega'}\Big|_{\substack{a'=a_{\min}\\ e'=0\\ i'=0}} = \left[\left(26.1\pm3.0\right)\cdot10^3\ \textit{лет};\ \ \left(34.3\pm1.5\right)\cdot10^3\ \textit{лет}\right]$.

3.11 Применение модели R-тороида к циркумбинарным системам Kepler-413 и Kepler-453

3.11.1 Плоскость Лапласа и углы ориентации

Особенно актуальным является применение модели R-тороида к задачам по экзопланетной тематике. Большой интерес представляют циркумбинарные системы, состоящие из тесной пары звёзд и обращающейся вокруг них экзопланеты. Циркумбинарные планеты (или планеты с кратными орбитами, о них см. [52], [53]) важно изучать потому, что относящиеся к ним орбитальные конфигурации и трёхчастичные гравитационные взаимодействия позволяют оценивать массы и радиусы тел.

В данном разделе прецессия орбит в циркумбинарных системах изучается с помощью модели, состоящей из трёх R-тороидов, описывающих двойную звезду и экзопланету. Рассматриваются две задачи. В первой ставится цель исследовать прецессию пробных орбит в силовом поле трёх R-тороидов. Во второй задаче методом колец Гаусса изучается вековая эволюция орбит звёзд и экзопланеты самой циркумбинарной системы.

Рассмотрим циркумбинарную систему, в которой одна экзопланета движется по внешней (отдаленной) орбите вокруг тесной пары звёзд. Для описания движения тел в такой системе надо знать массы и орбитальные параметры двух звёзд $\left(M_1, M_2, a_1, a_2, e_{12}, i'_{12}\right)$ и планеты $\left(m, a_p, e_p, i'_p\right)$. Далее углы наклонов орбит звёзд i'_{12} и планеты i'_p будем отсчитывать от общей для системы плоскости Лапласа (рис.3.9).

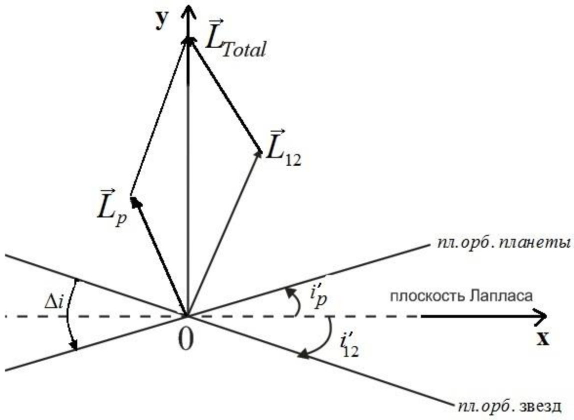

Рис.3.9. Схема векторов угловых орбитальных моментов в циркумбинарной системе. Штрихами показана плоскость Лапласа.

Угловой момент орбитального эллиптического движения тела (на единицу массы) в заданной тройной системе запишем в виде

$$L' = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}, \tag{3.56}$$

где a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты, $\mu = G\bar{M}$ – аналог гравитационного параметра тела. Если начало координат находится в центре масс двойной звезды (принимается условие $m << M_1 + M_2$), то отмеченные верхней чертой величины $\bar{M}$ равны

$$\bar{M}_1 = \frac{M_2^3}{\left(M_1+M_2\right)^2}; \quad \bar{M}_2 = \frac{M_1^3}{\left(M_1+M_2\right)^2}; \quad \bar{m} = M_1 + M_2. \tag{3.57}$$

Через величины $\bar{M}$ из (3.57) орбитальный угловой момент звёздной пары равен

$$L_{12} = M_1\sqrt{G\bar{M}_1 a_1\left(1-e_{12}^2\right)} + M_2\sqrt{G\bar{M}_2 a_2\left(1-e_{12}^2\right)}, \tag{3.58}$$

где полуоси орбит каждой звезды (с фокусом в общем центре масс) связаны очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_{12}, \\ a_1 M_1 &= a_2 M_2. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Тогда угловой орбитальный момент планеты массой m будет равен

$$L_p = m\sqrt{G\left(M_1 + M_2\right)a_p\left(1 - e_p^2\right)}. \tag{3.60}$$

В данной системе рассмотрим плоскость Лапласа. По определению, это есть та плоскость, которая нормальна вектору полного орбитального углового момента системы $\vec{L}_{Total} = \vec{L}_{12} + \vec{L}_p$. В заданных декартовых координатах (рис.3.9) проекции векторов угловых моментов на оси Ox и Oy будут равны (см. также [16]):

$$\begin{aligned} L_{12}^{(x)} &= L_{12}\cos\left(\frac{\pi}{2} - i'_{12}\right) = L_{12}\sin i'_{12}, \\ L_{12}^{(y)} &= L_{12}\sin\left(\frac{\pi}{2} - i'_{12}\right) = L_{12}\cos i'_{12}; \\ L_p^{(x)} &= L_p\cos\left(\frac{\pi}{2} + i'_p\right) = -L_p\sin i'_p, \\ L_p^{(y)} &= L_p\sin\left(\frac{\pi}{2} + i'_p\right) = L_p\cos i'_p, \end{aligned} \tag{3.61}$$

где i'_p и i'_{12}– вспомогательные углы наклона плоскостей орбит планеты и звёзд к плоскости Лапласа. Указанное выше условие перпендикулярности плоскости Лапласа вектору $\vec{L}_{Total}$ выполняется, если

$$L_p \sin i'_p = L_{12}\sin i'_{12}. \tag{3.62}$$

Таким образом, для вспомогательных углов i'_p и i'_{12} получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\sin i'_p}{\sin i'_{12}} = \frac{L_{12}}{L_p} = \gamma, \\ &i'_p + i'_{12} = \Delta i. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Можно выразить наклон из (3.63) плоскости орбит двойной звезды i'_{12} к плоскости Лапласа через взаимный наклон Δi между плоскостями орбит звёзд и орбиты планеты

$$i'_{12} = \arctan \frac{\sin \Delta i}{\gamma + \cos \Delta i}. \qquad (3.64)$$

Согласно формулам (3.58) и (3.60), отношение угловых орбитальных моментов двойной звезды и планеты в циркумбинарной системе равно

$$\gamma = \frac{L_{12}}{L_p} = \sqrt{\frac{1-e_{12}^2}{1-e_p^2}} \left[\frac{M_1\sqrt{\bar{M}_1 a_1} + M_2\sqrt{\bar{M}_2 a_2}}{m\sqrt{\bar{m} a_p}} \right]. \qquad (3.65)$$

3.11.2 R-тороиды циркумбинарных систем Kepler-413 и Kepler-453

Рассмотрим две циркумбинарные системы Kepler-413 и Kepler-453 с точки зрения моделирования орбит трёх тел в каждой системе тороидами. Необходимые данные по этим системам взяты из работ [48], [54] и представлены в табл.3.4.

Система	Kepler-413	Kepler-453
$M_1\,[M_{Sun}]$	0.820 ± 0.015	0.944 ± 0.010
$M_2\,[M_{Sun}]$	0.542 ± 0.008	0.1951 ± 0.0020
$a_{12}\,[a.e.]$	0.10148 ± 0.00057	0.18539 ± 0.00066
e_{12}	0.0365 ± 0.0023	0.0524 ± 0.0037
$i_{12}\,[^\circ]$	87.332 ± 0.050	90.266 ± 0.052
$\omega_{12}\,[^\circ]$	279.74 ± 0.62	263.05 ± 0.48
$M_p\,[M_{Earth}]$	67 ± 21	0.2 ± 16.0
$a_p\,[a.e.]$	0.355 ± 0.002	0.7903 ± 0.0028
e_p	0.1181 ± 0.0018	0.0359 ± 0.0088
$i_p\,[^\circ]$	89.929 ± 0.024	89.4429 ± 0.0091
$\omega_p\,[^\circ]$	94.6 ± 2.2	185.1 ± 3.7
$\Delta\Omega_p\,[^\circ]$	3.139 ± 0.080	2.103 ± 0.055
$\Delta i\,[^\circ]$	4.073 ± 0.113	2.258 ± 0.039

Табл.3.4. Параметры для циркумбинарных систем Kepler-413 из [48] и Kepler-453 из [54].

Чтобы оценить периоды прецессии в случае данных циркумбинарных систем, нужно рассмотреть суммарный вклад от трёх R-тороидов: двух R-тороидов, соответствующих звёздам и одному R-тороиду, соответствующему планете. Необходимые уравнения из (3.41) для каждого из R-тороидов запишутся в виде

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_R = \dot{\Omega}_R^0 \left(\frac{a_E}{a}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{\cos i}{\left(1-e^2\right)^2};$$
$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_R = \dot{\omega}_R^0 \left(\frac{a_E}{a}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{5\cos^2 i - 1}{4\left(1-e^2\right)^2}, \tag{3.66}$$

где $R = \{1, 2, p\}$ – индекс, обозначающий конкретный R-тороид; коэффициенты частот равны (здесь a_E равно одной астрономической единице в нужных единицах измерения)

$$\dot{\Omega}_R^0 = \frac{3}{2} C_{20}^R \frac{m_R}{\bar{m}} \left(\frac{a_R}{a_E}\right)^2 \sqrt{\frac{G\bar{m}}{a_E^3}}, \ \dot{\omega}_R^0 = -2\dot{\Omega}_R^0, \tag{3.67}$$

а коэффициенты зональных гармоник R-тороидов из (3.42) равны

$$C_{20}^R = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}e_R^2\right)\frac{3\cos^2 i_R - 1}{2};$$
$$C_{40}^R = \frac{3}{8}\left(1+5e_R^2+\frac{15}{8}e_R^4\right)\frac{35\cos^4 i_R - 30\cos^2 i_R + 3}{8}. \tag{3.68}$$

Коэффициенты частот прецессии орбиты пробной планеты в суммарном поле трёх тороидов тогда равны

$$\dot{\Omega}_{12p}^0 = \dot{\Omega}_1^0 + \dot{\Omega}_2^0 + \dot{\Omega}_p^0;$$
$$\dot{\omega}_{12p}^0 = -2\dot{\Omega}_{12p}^0, \tag{3.69}$$

а соответствующие этим коэффициентам частот коэффициенты периодов прецессии запишутся в виде

$$\left(T_\Omega^{12p}\right)_0 = \frac{2\pi}{\left|\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{12p}^0\right|}; \ \left(T_\omega^{12p}\right)_0 = \frac{1}{2} T_\Omega^{12p}. \tag{3.70}$$

Частоты прецессии орбиты пробной планеты в суммарном поле трёх тороидов определяются формулой (3.66), где индекс $R = 12p$, а соответствующие им периоды прецессии тогда даются уравнениями

$$T_\Omega^{12p} = \left(T_\Omega^{12p}\right)_0 \left(\frac{a}{a_E}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{\left(1-e^2\right)^2}{\cos i};$$
$$T_\omega^{12p} = \left(T_\omega^{12p}\right)_0 \left(\frac{a}{a_E}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{4\left(1-e^2\right)^2}{5\cos^2 i - 1}. \tag{3.71}$$

Результаты расчётов по формулам (3.63-3.65) , (3.67-3.70) и (3.46) даны в табл.3.5.

Система	Kepler-413	Kepler-453
C_{20}^1, C_{20}^2	-0.5010 ± 0.0001	-0.5021 ± 0.0003
C_{40}^1, C_{40}^2	0.3775 ± 0.0003	0.3802 ± 0.0007
C_{20}^p	-0.5066 ± 0.0003	-0.4998 ± 0.0005
C_{40}^p	0.3912 ± 0.0010	0.3745 ± 0.0012
$\dot{\Omega}_1^0 \left[10^{-10}\ c^{-1}\right]$	-1.71 ± 0.04	-1.34 ± 0.03
$\dot{\Omega}_2^0 \left[10^{-10}\ c^{-1}\right]$	-2.60 ± 0.04	-6.47 ± 0.06
$\dot{\Omega}_p^0 \left[10^{-10}\ c^{-1}\right]$	-0.03 ± 0.01	-0.0005 ± 0.0420
$\dot{\Omega}_{12p}^0 \left[10^{-9}\ c^{-1}\right]$	-0.43 ± 0.06	-0.78 ± 0.01
$\dot{\omega}_{12p}^0 \left[10^{-9}\ c^{-1}\right]$	0.84 ± 0.11	1.56 ± 0.02
$\left(T_{\Omega}^{12p}\right)_0 [\text{лет}]$	459 ± 6	255 ± 3
$\left(T_{\omega}^{12p}\right)_0 [\text{лет}]$	230 ± 3	128 ± 2
$i'_{12} \left[{}^\circ\right]$	0.0047 ± 0.0015	0.00002 ± 0.00139
$i'_p \left[{}^\circ\right]$	4.07 ± 0.11	2.26 ± 0.04
γ	10^3	10^5
$a_{\min}$ [а.е.]	5.7	24

Табл.3.5. Рассчитанные по формулам (3.67-3.70), (3.63-3.65) и (3.46) коэффициенты 2-ой и 4-ой зональных гармоник R-тороидов звёзд C_{20}^1, C_{20}^2, C_{40}^1, C_{40}^2 и планеты C_{20}^p, C_{40}^p; величины $\dot{\Omega}_R^0$ пробной планеты от отдельного тороида, где индекс $R = \{1, 2, p\}$; скорости прецессии линии узлов и линии апсид пробной планеты от всех тороидов $\dot{\Omega}_{12p}^0$ и $\dot{\omega}_{12p}^0$; соответствующие периоды прецессии $\left(T_{\Omega}^{12p}\right)_0$ и $\left(T_{\omega}^{12p}\right)_0$ (все расчёты сделаны для вырожденного случая нулевых эксцентриситетов и наклонов орбит пробных планет); наклоны орбитальных моментов звёздной пары и планеты к суммарному угловому моменту i'_{12} и i'_p; отношение орбитальных моментов двойной звезды и планеты γ, а также критическое значение $a_{\min}$ больших полуосей пробных орбит, при которых модель R-тороида применима.

Рассчитаем теперь по формулам (3.71) периоды прецессии пробной планеты в зависимости от большой полуоси орбиты в случае нулевых эксцентриситета и наклона орбиты к главной плоскости $\left(a = a_{\min}, e = 0, i = 0^\circ\right)$.

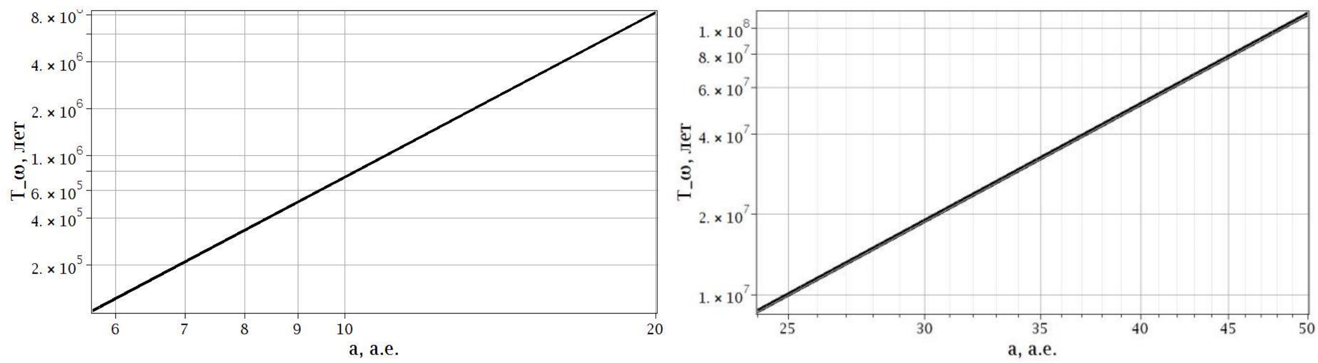

Рис.3.10. Графики зависимости периода прецессии аргумента перицентра орбиты пробной планеты $T_{\omega}^{12p}\left(a\right)\Big|_{\substack{e=0\\i=0}}$, измеряемого в годах, от её полуоси в астрономических единицах, в вырожденном случае $e=0$ и $i=0$. График слева – для системы Kepler-413, справа – для системы Kepler-453. Для наглядности графики представлены в логарифмической шкале по обеим осям.

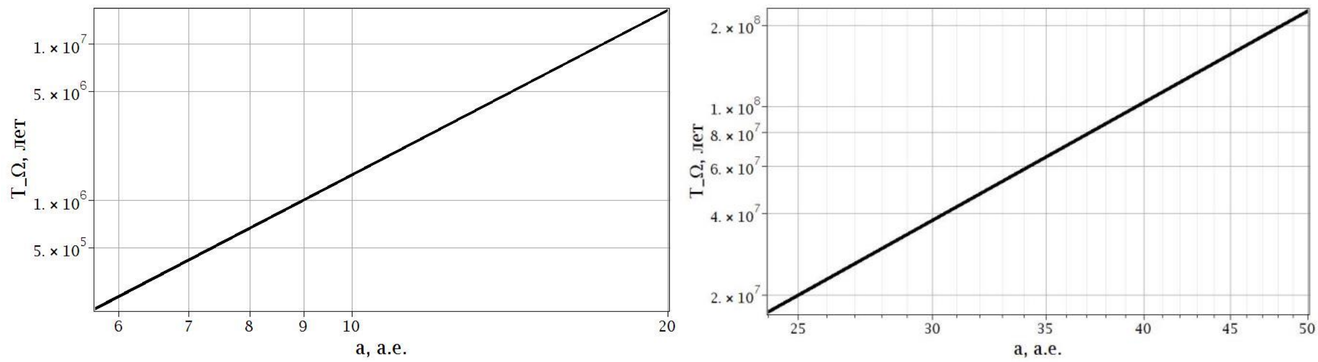

Рис.3.11. Графики зависимости периода прецессии долготы восходящего узла орбиты пробной планеты $T_{\Omega}^{12p}\left(a\right)\Big|_{\substack{e=0\\i=0}}$, измеряемого в годах, от её полуоси, измеряемой в астрономических единицах, в вырожденном случае $e=0$ и $i=0$. График (в логарифмической шкале по обеим осям) слева для системы Kepler-413, справа – для системы Kepler-453.

Графики на рис.3.10 и 3.11 построены от минимальных значений полуоси пробной планеты $a_{\min}$, данных в табл. 3.5. Для системы Kepler-413 при значении $a=a_{cr}$ имеем оценку периода апсидальной прецессии $T_{\omega}^{12p}=\left(102\pm1\right)\cdot10^{3}$ *лет*, а для периода прецессии долготы восходящего узла $T_{\Omega}^{12p}=\left(203\pm3\right)\cdot10^{3}$ *лет.* Для системы Kepler-453, соответственно, находим $T_{\omega}^{12p}=\left(87\pm1\right)\cdot10^{5}$ *лет* и $T_{\Omega}^{12p}=\left(173\pm2\right)\cdot10^{5}$ *лет*.

3.12 Заключение главы

В этой главе построена и изучена новая модель для изучения вековых возмущений в небесной механике, названная R-тороидом. Метод построения R-тороида состоит из трёх этапов: вначале движение усредняется по кеплеровскому эллипсу и получается одномерное кольцо Гаусса, затем усреднение прецессирующего кольца Гаусса по углу вращения линии апсид даёт двумерное R-кольцо; наконец, выполняя азимутальное усреднение прецессирующего R-кольца, получаем трёхмерный R-тороид.

В разделе 3.3 рассмотрена сама фигура R-тороида. Распределение плотности внутри R-тороида является уникальным – его поверхность напоминает скорлупу с аномально высокой плотностью. В разделах 3.4 и 3.5 мы подробно изучаем гравитационный потенциал новой фигуры. Этот потенциал представлен не только в интегральной форме, но и в виде ряда как по степеням малых e и i, так и ряда по обратным расстояниям пробной точки. Это позволило изучить зоны монотонного и немонотонного поведения потенциала.

В разделе 3.6 методом интегрирования внешнего потенциала тороида по оскулирущей орбите, была получена взаимная (потенциальная) энергия W_{mut} R-тороида и кольца Гаусса. Важность нахождения W_{mut} объясняется тем, что именно она используется затем в качестве возмущающей функции для вывода системы уравнений эволюции оскулирующих колец в гравитационном поле R-тороида, а также в поле центральной прецессирующей звезды.

В разделе 3.7 было найдено отношение периодов узловой T_Ω и апсидальной T_ω прецессии кольца Гаусса в поле R-тороида; показано, что при малом наклоне отношение T_Ω/T_ω существенно близко к 2. Именно такое отношений для частот прецессий дают современные модели для экзопланет [44].

В разделах 3.8 и 3.9 рассмотрены вопросы применимости R-тороида. Установлено, что вековое влияние R-тороидов Сатурна и Юпитера распространяется на орбиты тел с полуосями, большими $a_{\min} \approx 582\,а.е.$ и $a_{\min} \approx 747\,а.е.$, соответственно. Следовательно, модель R-тороида можно применять для изучения вековой эволюции орбит тел в рассеянном диске Солнечной системы. Кроме того, эта модель позволяет изучать влияние планет-гигантов на движение гипотетической планеты 9.

Перспективным является использование новой модели для изучения вековых эффектов в движении экзопланет, например, горячих юпитеров. Параметры модели R-тороида были конкретизированы для трёх экзопланет, время узловой прецессии у которых известны. Показано, что среди огромного разнообразия внесолнечных систем существуют такие экзопланеты, для которых модель R-тороида позволяет описывать эволюцию орбит на умеренных расстояниях от центральной звезды. Так, для экзопланеты PTFO 8-8695b R-тороид позволяет описывать эволюцию всех орбит с большими полуосями $a \geq 0.2$ *а.е.*

В разделе 3.10 был развит метод вычисления суммарного влияния гравитационного поля от центральной прецессирующей несферичной звезды и R-тороида ближней планеты PTFO 8-8695b на движение пробного тела.

В разделе 3.11 рассмотрено применение модели R-тороида к двум циркумбинарным системам Kepler-413 и Kepler-453. Прецессия орбит пробных планет в данных моделях основана на учёте совокупного влияния трёх тороидов для двух звёзд и одной циркумбинарной экзопланеты в системе отсчёта центра масс звёздной пары.

Заключение

В диссертационной работе были поставлены и решены следующие основные задачи:

- Потенциал кольца Гаусса в его собственной плоскости представлен в виде ряда по малому эксцентриситету. Алгоритм ряда использовался в расчетах силовых полей колец Гаусса для планет Солнечной системы.
- Найдена взаимная гравитационная энергия двух колец Гаусса в виде усечённого ряда Тейлора (до 4-ой степени включительно) по малым эксцентриситетам и взаимному наклону. Алгоритм этого ряда успешно применен при изучении вековой и долгопериодической эволюции планетных орбит на примере двупланетной задачи «Солнце-Юпитер-Сатурн».
- Построен алгоритм в виде замкнутой системы из восьми алгебраических уравнений для решения обратной задачи о нахождении пространственной ориентации и размеров небесных тел эллипсоидальной формы с учетом данных фотометрии и формы лимба тел в картинной плоскости. Данный метод успешно применен при исследовании формы и динамики карликовой планеты Хаумеа. Разработан алгоритм усреднения внешнего потенциала вокруг быстровращающегося трехосного эллипсоида и найдены две главные зональные гармоники. Подход позволил рассчитать прецессию кольца вокруг Хаумеа.
- Построена модель трёхмерного обобщения прецессирующего кольца Гаусса (R-тороид), изучена его форма и внешний гравитационный потенциал. Найдена взаимная энергия R-тороида и внешнего кольца Гаусса. Модель R-тороида применяется для изучения вековой динамики экзопланет и, в частности, для вычисления периодов нодальной и апсидальной прецессии пробных орбит в экзопланетных системах PTFO8-8695, Kepler-413 и Kepler-453.

Наконец заметим, что круг задач, связанных с динамикой гравитирующих колец, ещё не исчерпан. Например, классический метод Гаусса, как уже было отмечено, «ломается» в случае острых резонансов, поэтому актуальной остаётся проблема адаптирования этого метода к задачам с острыми резонансами. Актуальными остаются и задачи о влиянии различных резонансов на структуру R-колец и R-тороидов.

Список литературы

[1] Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. Небесная механика сплошной среды. 1994, Наука, М., 348 с.

[2] Braga-Ribas F., Sicardy B., Ortiz J.L. et al. A ring system detected around the Centaur (10199) Chariklo // Nature. 2014. vol.508. is.7494. p.72-75

[3] Bérard D., Sicardy B., Camargo J.I.B. et al. The structure of Chariklo's rings from stellar occultation // The Astronomical Journal. 2017. vol.154. is.4. id.144. 21pp

[4] Ortiz J.L., Santos-Sanz P., Sicardy B. et al. The size, shape, density and ring of the dwarf planet Haumea from stellar occultation // Nature. 2017. vol.550. is.7675. p.219-223

[5] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С., Трубицына Н.Г. Разложение компланарного потенциала кольца Гаусса в ряд по степеням эксцентриситета // Астрономический Вестник. 2021. т.55. №4. с.348-358

[6] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. Взаимная энергия колец Гаусса // Журнал Технической Физики. 2019. т.89. №10. с.1477-1481

[7] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. Взаимная гравитационная энергия колец Гаусса и проблема возмущений в небесной механике // Астрономический Журнал. 2020. т.97. №5. с.408-420

[8] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. 1975. Наука, М., 800с.

[9] Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. 2009. Физматлит, М., 588с.

[10] Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. - М.: Мир. 2007, 512с.

[11] Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: СПбГУ, 2008, 207с.

[12] Кондратьев Б.П. Потенциал кольца Гаусса. Новый подход // Астрономический вестник. 2012. т.46. №5. с.380-391

[13] Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций: с приложениями к механике. – М.: КомКнига. 2006, 368с.

[14] Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J. et al. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets // Astronomy and Astrophysics. 1994. vol.282. is.2. p.663-683

[15] Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н. Силовая функция слабоэллиптического гауссова кольца и её обобщение на почти компланарную систему колец // Астрономический Вестник. т.46. №1. с.72-80

[16] Кондратьев Б.П. Прецессия узлов орбит Юпитера и Сатурна от взаимного возмущения: модель двух колец // Астрономический Вестник. 2014. т.48. №5. с.396-404

[17] Шарлье К. Небесная механика. 1966, Наука, М., 628с.

[18] Вебстер А.Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. 1933, ГТТИ, Л.-М., 635с.

[19] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. 1968, Наука, М., 800с.

[20] Kondratyev B.P., Kornoukhov V.S. Determination of the body of the dwarf planet Haumea from observations of a stellar occultation and photometry data // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. vol.478. p.3159-3176

[21] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. Вековая эволюция колец вокруг трёхосных гравитирующих тел // Астрономический Журнал. 2020. т.97. №10. с.866-872

[22] Brown M.E., Bouchez A.H., Rabinowitz D. et al. Keck Observatory laser guide star adaptive optics discovery and characterization of a satellite to the large Kuiper belt object 2003 EL61 // The Astrophysical Journal. 2005. vol.632. L45-L48

[23] Rabinowitz D.L., Barkume K., Brown M.E. et al. Photometric observations constraining the size, shape and albedo of 2003 EL61, a rapidly rotating, Pluto-sized object in the Kuiper belt // The Astrophysical Journal. 2006. vol.639. p.1238-1251

[24] Lacerda P., Jewitt D., Peixinho N. High-precision photometry of extreme KBO 2003 EL61 // The Astronomical Journal. 2008. vol.135. is.5. p.1749-1756

[25] Thirouin A., Ortiz J.L., Duffard R. et al. Shirt-term variability of a sample of 29 trans-Neptunian objects and Centaurs // Astronomy & Astrophysics. 2010. vol.522. A93. 43pp

[26] Ćuk M., Ragozzine D., Nesvorný D. On the dynamics and origin of Haumea's moons // The Astronomical Journal. 2013. vol.146. is.4. id.89. 13pp

[27] Lockwood A.C., Brown M.E., Stransberry J. The size and shape of the oblong dwarf planet Haumea // Earth, Moon, and Planets. 2014. vol.111. is.3-4. p.127-137

[28] Brown M.E., van Dam M.A., Bouchez A.H. et al. Satellites of the largest Kuiper belt objects // The Astrophysical Journal. 2006. vol.639. L43-L46

[29] Ragozzine D., Brown M.E. Orbits and masses of the satellites of the dwarf planet Haumea (2003 EL61) // The Astrophysical Journal. 2009. vol.137. p.4766-4776

[30] Fraser W. C., Brown M. E. NICMOS photometry of the unusual dwarf planet Haumea and its satellites // The Astrophysical Journal. 2009. vol.714. is.1. L1-L3

[31] Lacerda P. Time-resolved near-red photometry of extreme Kuiper belt object Haumea //The Astronomical Journal. 2009. vol.137. is.2. p.3404-3413

[32] Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. 1969, New Haven and London, Yale university Press

[33] Kondratyev B.P. The near equilibrium figure of the dwarf planet Haumea and possible mechanism of origin of its satellites // Astrophysics & Space Science. 2016. vol.361. is.5. id.169. 9pp

[34] Hastings D.M., Ragozzine D., Fabrycky D.C. et al. The short rotation period of Hi'iaka, Haumea's largest satellite // The Astronomical Journal. 2016. vol.152. is.6. id.195. 12pp

[35] Leinhardt Z.M. Marcus R.A., Stewart S.T. The formation of the collisional family around the dwarf planet Haumea // The Astrophysical Journal. 2010. vol.714. p.1789-1799

[36] Кондратьев Б.П., Озерной Л.М. Какую пространственную форму имеют эллиптические галактики? // Письма в Астрономический Журнал. 1979. т.5. с.67

[37] Gourgeot F., Carry B., Dumas C. et al. Near-infrared spatially resolved spectroscopy of (136108) Haumea's multiple system // Astronomy & Astrophysics. 2016. vol.593. A19. 10pp

[38] Sicardy B., Renner S., Leiva R. et al. Chapter 11 – The dynamics of rings around Centaurs and Trans-Neptunian objects. 2020, The Trans-Neptunian Solar System. Elsevier, p.249-269

[39] Альвен Х., Аррениус Г. Эволюция Солнечной системы. 1979, Мир, М., 512с.

[40] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. R-тороид как трёхмерное обобщение кольца Гаусса и его применение в астрономии // Астрономический Журнал. 2021. т.98. №5. с.407-422

[41] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. Исследование вековой эволюции циркумбинарных систем на моделях R-тороида и колец Гаусса // Астрономический Журнал. 2021. т.98. №7. с.571-580

[42] Kondratyev B.P., Trubitsyna N.G., Mukhametshina E.Sh. Gravitational Potential of Material Wide Ring, Filled by Rosette Orbit // Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems, 2004. ASP Conference Proceedings, vol.316. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. p.326

[43] Kondratyev B.P. Two-dimensional generalization of Gaussian rings and dynamics of the central regions of flat galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. vol.442. p.1755-1766

[44] Judkovsky Y., Ofir A., Aharonson O. Light-curve evolution due to secular dynamics and the vanishing transits of KOI 120.01 // The Astronomical Journal. 2020. vol.160. is.4. id.195. 9pp

[45] Batygin K., Brown M.E. Evidence for a Distant Giant Planet in the Solar System// The Astronomical Journal. 2016. vol.151. is.2. id.22. 12pp

[46] Batygin K., Adams F.C., Brown M. E et al. The Planet Nine Hypothesis // Physics Reports. 2019. vol.805. p.1-53

[47] Wittenmyer R.A, Endl M., Cochran W.D. et al. Dynamical and Observational Constraints on Additional Planets in Highly Eccentric Planetary Systems // The Astronomical Journal. 2007. vol.134. is.3. p.1276-1284

[48] Kostov V.B., McCullough P.R., Carter J.A. et al. Kepler-413b: a slightly misaligned, Neptune-size transiting circumbinary planet // The Astrophysical Journal. 2014. vol.784. id.14. 18pp

[49] Johnson M.C., Cochran W.D., Collier Cameron A. et al. Measurement of the nodal precession of WASP-33b via Doppler tomography // The Astrophysical Journal Letters. 2015. vol.810. L23. 5pp

[50] Raetz St., Schmidt T.O.B., Czesla S. et al. YETI observations of the young transiting planet candidate CSVO 30 b // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. vol.460. is.3. p.2834-2852

[51] Barnes J.W., van Eyken J.C., Jackson B.K. et al. Measurement of spin-orbit misalignment and nodal precession for the planet around pre-main-sequence star PTFO 8-8695 from gravity darkening // The Astrophysical Journal. 2013. vol.774. id.53. 15pp

[52] Chen Ch., Franchini A., Lubow S. H. et al. Orbital dynamics of circumbinary planets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2019. vol.490. is.4. p.5634-5646

[53] Bromley B.C., Kenyon S.J. On the Estimation of Circumbinary Orbital Properties // The Astronomical Journal. 2021. vol.161. is.1. id.25. 12pp

[54] Welsh W.F., Orosz J.A., Short D.R. et al. Kepler-453b – The 10th *Kepler* transiting circumbinary planet // The Astrophysical Journal. 2015. vol.809. id.26. 17pp

Приложение 1

Выражения для вспомогательных интегралов (1.25) через эллиптические интегралы первого и второго родов имеют вид

$$
\begin{aligned}
&I_{10}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=K(k);\\
&I_{12}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=\frac{K(k)-E(k)}{k^2};\\
&I_{14}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=-\frac{2}{3}\frac{(1+k^2)E(k)}{k^4}+\frac{1}{3}\frac{(2+k^2)K(k)}{k^4};\\
&I_{32}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}-\frac{K(k)}{k^2};\\
&I_{34}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(2-k^2)E(k)}{k^4(1-k^2)}-\frac{2K(k)}{k^4};\\
&I_{54}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{2}{3}\frac{(1-2k^2)E(k)}{k^4(1-k^2)^2}+\frac{1}{3}\frac{(2-3k^2)K(k)}{k^4(1-k^2)};\\
&I_{56}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{3}\frac{(3k^4-13k^2+8)E(k)}{k^6(1-k^2)^2}+\frac{1}{3}\frac{(8-9k^2)K(k)}{k^6(1-k^2)};\\
&I_{76}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6 x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{7}{2}}}=-\frac{1}{15}\frac{(23k^4-23k^2+8)E(k)}{k^6(1-k^2)^3}-\frac{1}{15}\frac{(15k^4-19k^2+8)K(k)}{k^6(1-k^2)^2}.
\end{aligned}
\qquad (\text{П}1.1)
$$

Приложение 2

Коэффициенты W_{klm}, которые входят в выражение для взаимной энергии колец Гаусса (1.64), имеют вид:

$$W_{000} = \frac{2}{1+n}K(k);\ W_{200} = W_{020} = -W_{002} = \frac{1}{4(1+n)}\left(\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right);$$

$$W_{110} = -\frac{1}{n(1+n)}\left(\frac{1-n^2+n^4}{(1-n)^2}E(k) - (1+n^2)K(k)\right)\cdot\cos(\omega_2-\omega_1);$$

$$W_{202} = \frac{1}{16(1+n)(1-n^2)^2}\times$$

$$\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{1-3n^2+23n^4+3n^6}{(1-n)^2}E(k) - (1-n^2+3n^4)K(k)\right)\cdot 2\cos^2(\omega_1)\\ -\left(\dfrac{1+21n^2+47n^4+3n^6}{(1-n)^2}E(k) - (1+5n^2+3n^4)K(k)\right)\end{array}\right);$$

$$W_{022} = \frac{1}{16(1+n)(1-n^2)^2}\times$$

$$\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{3+23n^2-3n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k) - (3-n^2+n^4)K(k)\right)\cdot 2\cos^2(\omega_2)\\ -\left(\dfrac{3+47n^2+21n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k) - (3+5n^2+n^4)K(k)\right)\end{array}\right); \qquad (П2.1)$$

$$W_{112} = -\frac{1}{16n(1+n)(1-n^2)^2}\times$$

$$\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{4-15n^2-25n^4-15n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k) - (4-11n^2+4n^4)(1+n^2)K(k)\right)\cdot\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)+\\ \left(\dfrac{4-21n^2-110n^4-21n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k) - (4-n^2)(1-4n^2)(1+n^2)K(k)\right)\cdot\sin(\omega_1)\sin(\omega_2)\end{array}\right);$$

$$W_{004} = -\frac{1}{96(1+n)(1-n^2)^2}\left(\frac{1-37n^2-37n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k) - (1-3n-n^2)(1+3n-n^2)K(k)\right);$$

$$W_{400} = \frac{1}{32(1+n)(1-n^2)^2}\left(\frac{3+23n^2-3n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k) - (3-n^2+n^4)K(k)\right);$$

$$W_{040} = \frac{1}{32(1+n)(1-n^2)^2}\left(\frac{1-3n^2+23n^4+3n^6}{(1-n)^2}E(k) - (1-n^2+3n^4)K(k)\right);$$

$$W_{310}=-\frac{n\cos\left(\omega_2-\omega_1\right)}{16\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\left(\frac{9+50n^2-15n^4+4n^6}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(9-7n^2+4n^4\right)K\left(k\right)\right);$$

$$W_{130}=-\frac{\cos\left(\omega_2-\omega_1\right)}{16n\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\left(\frac{4-15n^2+50n^4+9n^6}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(4-7n^2+9n^4\right)K\left(k\right)\right);$$

$$W_{220}=\frac{3}{16\left(1+n\right)\left(1-n^2\right)^2}\times \tag{П2.2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\left(\frac{\left(1+n^2\right)\left(1-2n-n^2\right)\left(1+2n-n^2\right)}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(1-n-n^2\right)\left(1+n-n^2\right)K\left(k\right)\right)\cdot 2\sin^2\left(\omega_2-\omega_1\right)\\ -\left(\frac{\left(1+n^2\right)\left(1-4n+n^2\right)\left(1+4n+n^2\right)}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(1-5n^2+n^4\right)K\left(k\right)\right)\end{array}\right);$$

Приложение 3

В формулах (1.81) специальные коэффициенты выражаются через эллиптические интегралы первого и второго родов:

$$e_{102}^{(2)}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{4-15n^2-26n^4-15n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-11n^2+4n^4\right)\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cdot\cos\omega_1\sin\omega_2-\\ \left(\dfrac{4-21n^2-110n^4-21n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-n^2\right)\left(1-4n^2\right)\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cdot\sin\omega_1\cos\omega_2\end{pmatrix};$$

$$e_{012}^{(2)}=-\left(\frac{3+23n^2-3n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(3-n^2+n^4\right)K(k)\right)\cdot 4n\sin(\omega_2)\cos(\omega_2);$$

$$e_{300}^{(2)}=\left(\frac{9+50n^2-15n^4+4n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(9-7n^2+4n^4\right)K(k)\right)\cdot n^2\sin(\omega_2-\omega_1); \qquad (\text{П}3.1)$$

$$e_{210}^{(2)}=\left(\frac{\left(1+n^2\right)\left(1-2n-n^2\right)\left(1+2n-n^2\right)}{(1-n)^2}E(k)-\left(1-n-n^2\right)\left(1+n-n^2\right)K(k)\right)\times$$
$$12n\sin(\omega_2-\omega_1)\cos(\omega_2-\omega_1);$$

$$e_{120}^{(2)}=-\sin(\omega_2-\omega_1)\cdot\left(\frac{4-9n^2-18n^4-33n^6+8n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-n^2-17n^4+8n^6\right)K(k)\right);$$

$$e_{100}^{(2)}=\left(\frac{1-n^2+n^4}{(1-n)^2}E(k)-\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cdot 16\left(1-n^2\right)^2\sin(\omega_2-\omega_1);$$

другие коэффициенты $e_{klm}^{(2)}=0$;

$$i_{20}^{(2)}=\left(\frac{1-3n^2+23n^4+3n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(1-n^2+3n^4\right)K(k)\right)\cdot 2n\sin(\omega_1)\cos(\omega_1);$$

$$i_{02}^{(2)}=\left(\frac{3+23n^2-3n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(3-n^2+n^4\right)K(k)\right)\cdot 2n\sin(\omega_2)\cos(\omega_2); \qquad (\text{П}3.2)$$

$$i_{11}^{(2)}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{4-15n^2-26n^4-15n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-11n^2+4n^4\right)\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cos(\omega_1)\sin(\omega_2)\\ -\left(\dfrac{4-9n^2+58n^4-9n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-5n^2+4n^4\right)\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cdot\sin(\omega_1)\cos(\omega_2)\end{pmatrix};$$

$$\bar{\upsilon}_{102}^{(2)}=\left(\frac{4-15n^2-26n^4-15n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-11n^2+4n^4\right)\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cdot$$

$$\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)+\sin(\omega_1)\sin(\omega_2)\cdot$$

$$\left(\frac{4-21n^2-110n^4-21n^6+4n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(4-n^2\right)\left(1-4n^2\right)\left(1+n^2\right)K(k)\right);$$

$$\bar{\upsilon}_{012}^{(2)}=2n\cdot\left(\frac{3+47n^2+21n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(3+5n^2+n^4\right)K(k)\right)-$$

$$\left(\frac{3+23n^2-3n^4+n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(3-n^2+n^4\right)K(k)\right)\cdot 4n\cos^2(\omega_2);$$

$$\bar{\upsilon}_{300}^{(2)}=\left(\frac{9+50n^2-15n^4+4n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(9-7n^2+4n^4\right)K(k)\right)\cdot n^2\cos(\omega_2-\omega_1);$$

$$\bar{\upsilon}_{210}^{(2)}=6n\cdot\left(\frac{\left(1+n^2\right)\left(1-4n+n^2\right)\left(1+4n+n^2\right)}{(1-n)^2}E(k)-\left(1-5n^2+n^4\right)K(k)\right)- \qquad (\text{П}3.3)$$

$$\left(\frac{\left(1+n^2\right)\left(1-2n-n^2\right)\left(1+2n-n^2\right)}{(1-n)^2}E(k)-\left(1-n-n^2\right)\left(1+n-n^2\right)K(k)\right)\cdot 12n\sin^2(\omega_2-\omega_1);$$

$$\bar{\upsilon}_{120}^{(2)}=\left(\frac{4-21n^2+118n^4+51n^6-8n^8}{(1-n)^2}E(k)-\left(1-3n^2+8n^4\right)\left(4-n^2\right)K(k)\right)\cdot\cos(\omega_2-\omega_1);$$

$$\bar{\upsilon}_{100}^{(2)}=\left(\frac{1-n^2+n^4}{(1-n)^2}E(k)-\left(1+n^2\right)K(k)\right)\cdot 16\left(1-n^2\right)^2\cos(\omega_2-\omega_1);$$

$$\bar{\upsilon}_{030}^{(2)}=\left(\frac{1+n^2-25n^4-n^6}{(1-n)^2}E(k)-\left(1-3n^2-n^4\right)K(k)\right)\cdot 2n;$$

$$\bar{\upsilon}_{010}^{(2)}=-\left(\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k)-K(k)\right)\cdot 8n\left(1-n^2\right)^2;$$

другие коэффициенты $\bar{\upsilon}_{klm}^{(2)}=0$;

$$\Omega_{002}^{(2)}=\left(\frac{\left(1+n^2\right)\left(1-4n+n^2\right)\left(1+4n+n^2\right)}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(1-5n^2+n^4\right)K\left(k\right)\right)\cdot n;$$

$$\Omega_{200}^{(2)}=\left(\frac{1+21n^2+47n^4+3n^6}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(1+5n^2+3n^4\right)K\left(k\right)\right)\cdot n-$$

$$\left(\frac{1-3n^2+23n^4+3n^6}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(1-n^2+3n^4\right)K\left(k\right)\right)\cdot 2n\cos^2\left(\omega_1\right);$$

$$\Omega_{110}^{(2)}=\left(\frac{4-15n^2-26n^4-15n^6+4n^8}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(4-11n^2+4n^4\right)\left(1+n^2\right)K\left(k\right)\right)\cdot\cos\left(\omega_1\right)\cos\left(\omega_2\right)$$

$$+\left(\frac{4-21n^2-110n^4-21n^6+4n^8}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(4-n^2\right)\left(1-4n^2\right)\left(1+n^2\right)K\left(k\right)\right)\cdot\sin\left(\omega_1\right)\sin\left(\omega_2\right); \qquad (\Pi 3.4)$$

$$\Omega_{020}^{(2)}=\left(\frac{5+45n^2+19n^4+3n^6}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(5+n^2+3n^4\right)K\left(k\right)\right)\cdot n-$$

$$\left(\frac{3+23n^2-3n^4+n^6}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-\left(3-n^2+n^4\right)K\left(k\right)\right)\cdot 2n\cos^2\left(\omega_2\right);$$

$$\Omega_{000}^{(2)}=\left(\frac{1+n^2}{\left(1-n\right)^2}E\left(k\right)-K\left(k\right)\right)\cdot 4n\left(1-n^2\right)^2;$$

другие коэффициенты $\Omega_{klm}^{(2)}=0$.