

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Емцова Елена Дмитриевна

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ

1.3.1. «Физика космоса, астрономия»

1.3.3. «Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Петров Александр Николаевич

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Основы телепараллельной гравитации	13
1.1 Лагранжианы в тетрадных представлениях ОТО и телепараллельный лагранжиан	13
1.2 Уравнения поля	16
1.3 Проблемы построения законов сохранения в TEGR	18
Глава 2. Сохраняющиеся величины в TEGR	21
2.1 Нётеровские сохраняющиеся величины в произвольной полевой теории	21
2.2 Сохраняющиеся величины для Лагранжиана Мёллера	24
2.3 Сохраняющиеся величины в ковариантном TEGR	25
2.4 Принцип определения инерциальной спиновой связности	29
2.5 Инерциальная спиновая связность и фоновое пространство-время	30
2.6 Обсуждение и итоги Главы	33
Глава 3. Плотность тока: энергия и импульс, измеренные свободно падающим наблюдателем в простейших случаях	34
3.1 Предварительные замечания	34
3.2 Вселенная Фридмана	35
3.3 Пространство (анти-)де Ситтера	37
3.4 Обсуждение и итоги Главы	39
Глава 4. Решение Шварцшильда в TEGR	42
4.1 Масса черной дыры и статическая калибровка Шварцшильда	42
4.2 Свободно падающий наблюдатель и калибровка Леметра	43
4.3 Статическая калибровка Шварцшильда и калибровка Леметра	45
4.3.1 Различные формы статической калибровки Шварцшильда	46
4.3.2 Различные формы калибровки Леметра	48
4.3.3 Обсуждение	49
4.4 Произвольный свободно падающий наблюдатель и e -калибровка	52
4.4.1 Случай $e > 1$	52
4.4.2 Обсуждение	56
4.5 Итоги Главы	57
Глава 5. Сохраняющиеся величины для движущейся черной дыры Шварцшильда	60
5.1 Сферически симметричный материальный шар в пространстве Минковского	60
5.2 Движущаяся черная дыра как материальный шар	62
5.3 Энергия, импульс и соответствующие калибровки	65

	Стр.
5.4 Итоги Главы	67
Глава 6. Тетрады свободно падающих наблюдателей в $f(T)$-гравитации . . .	69
6.1 Полевые уравнения в теориях $f(T)$	69
6.2 Статические сферически симметричные решения в теориях $f(T)$	70
6.3 Обсуждение и итоги Главы	73
Глава 7. Теория кручения, неминимально связанного со скалярным полем .	75
7.1 Полевые переменные и их динамика	77
7.2 Пост-ньютоновское разложение	79
7.3 Случай массивного скалярного поля: параметр γ	82
7.3.1 Статическая точечная масса	82
7.3.2 Скалярное поле во втором порядке	83
7.3.3 Временные компоненты тетрады второго порядка	83
7.3.4 Пространственные компоненты тетрады второго порядка	84
7.3.5 ППН метрика и параметры	84
7.4 Безмассовое скалярное поле: все ППН параметры	85
7.4.1 Скалярное поле во втором порядке	85
7.4.2 Временная компонента тетрады второго порядка	86
7.4.3 Пространственные компоненты тетрады второго порядка	86
7.4.4 Тетрада в третьем порядке	87
7.4.5 Временная компонента тетрады четвертого порядка	88
7.4.6 ППН метрика и параметры	90
7.5 Примеры теорий	91
7.5.1 Телепараллельный эквивалент скалярно-тензорной гравитации	91
7.5.2 Телепараллельная темная энергия и ее обобщения	92
7.5.3 Неминимальная связь с поверхностным членом	93
7.6 Обсуждение и итоги Главы	93
Заключение	95
Список сокращений и условных обозначений	98
Список литературы	99
Приложение А. Дополнения	108
A.1 Инерциальная спиновая связность в различных калибровках	108
A.1.1 Статическая калибровка Шварцшильда	108
A.1.2 Калибровка Леметра	109
A.1.3 e -калибровка	109
A.2 Тривиальность $\bar{\beta} = 0$ для свободно падающей тетрады в $f(T)$ -гравитации . .	110

Введение

Актуальность темы исследования

Один из самых сложных вопросов в современной гравитации состоит в том, что общая теория относительности (ОТО) вместе с представлениями о материи в рамках Стандартной модели несовместна с современными космологическими наблюдениями. Это ускоренное расширение Вселенной как в настоящее время, так и в ее ранние периоды, объясняющиеся темной энергией и инфляцией соответственно. Это также наблюдения галактик и крупномасштабной структуры, которые указывают на присутствие неизвестного компонента - темной материи, которая проявляется в гравитационных эффектах. Помимо различных экзотических моделей элементарных частиц, потенциальное объяснение этих наблюдений дают модифицированные теории гравитации.

Большинство модификаций ОТО производится в ее стандартной формулировке – в терминах римановой кривизны, но можно также модифицировать ОТО на основе ее эквивалентных формулировок, таких как телепараллельный эквивалент ОТО (TEGR - Teleparallel Equivalent of General Relativity), симметричный телепараллельный эквивалент ОТО (STTEGR - Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity) и др. [1; 2]. Такие модификации вызывают чрезвычайно высокий интерес в последние годы. С теоретической точки зрения, модификации TTEGR и STTEGR интересны тем, что уравнения поля остаются уравнениями второго порядка. Они также проявляют сходства с теориями калибровочных полей, что потенциально обеспечивает связь с теориями, описывающими другие фундаментальные взаимодействия в природе.

По этим причинам телепараллельные теории гравитации становятся все более популярными в последние годы и являются **предметом** данного диссертационного исследования. Они включают и сам TTEGR [3–5], и различные его модификации, такие как гравитация $f(T)$ [6–10] и другие модели [11–15]. Среди всех телепараллельных теорий наиболее развитой и изученной является именно TTEGR, см. [3]. Но даже в нем существуют проблемы, которые до сих пор не решены, а их решение является очень важным как для самого TTEGR, так, естественно, и для его модификаций.

В обычной (метрической) ОТО без введения дополнительных структур есть проблемы с построением координатно ковариантных сохраняющихся величин. В тетрадной ОТО построены координатно ковариантные сохраняющиеся величины, но отсутствует их инвариантность относительно локальных лоренцевых вращений [16; 17]. Актуальность решения этой проблемы несомненна. В рамках TTEGR эта проблема может быть решена. Например, в работах [18; 19] построены дважды ковариантные сохраняющиеся величины, но в формализме дифференциальных форм. Этот формализм не очень удобен в приложениях и, к сожалению, не получил развития. Проблема построения в TTEGR сохраняющихся величин, ковариантных

как относительно координатных преобразований, так и относительно локальных лоренцевых вращений одновременно является одной из главных задач, которой мы будем уделять внимание в диссертации.

Как упоминалось, некоторые явления могут быть лучше описаны с помощью расширенных теорий. Инструментами проверки этих теорий являются: построение динамики расширения вселенной, моделирование слияния черных дыр, исследование гравитационных волн, построение изображений теней черных дыр и т.д. Хорошо зарекомендовавшим себя способом проверки жизнеспособности метрических теорий гравитации на масштабах порядка Солнечной системы является параметризованный постньютоновский формализм (ППН) [20–22], который характеризует теории гравитации набором десяти (обычно постоянных) параметров. Сравнение ППН-параметров, полученных из теории, с их значениями, полученными в высокоточных измерениях на масштабах Солнечной системы, накладывает ограничения на параметры разрешенных теорий. Актуальность таких исследований в рамках телепараллельных теорий гравитации очевидна.

Степень разработанности темы исследования

Несмотря на значительное развитие телепараллельных теорий гравитации, эти исследования имеют важные нерешенные (или недостаточно изученные) проблемы. Как упоминалось, одной из них является построение сохраняющихся величин. Лишь в рамках формализма дифференциальных форм были построены сохраняющиеся величины в TEGR [18; 19], которые позволили построить непротиворечивым образом заряды, которые одновременно оказались бы координатно ковариантными и инвариантными относительно локальных лоренцевых вращений тетрад. Однако эти результаты не получили дальнейшего развития и были проверены на ограниченном числе моделей. А насколько известно, определение сохраняющихся величин является одной из самых важных задач для разработки основ той или иной теории.

Как правило, формулы для сохраняющихся величин в TEGR, полученные при разработке того или иного подхода, проходят тестирование в приложениях к различным известным объектам, таким как черные дыры, космологические модели и т.д. [18; 19]. Однако нет одновременного исследования того или иного объекта, представленного в различных координатах, например, шварцшильдова черная дыра, представленная в обычных статических координатах, леметровых координатах, изотропных координатах и т.д. В реальности, эти возможности оказываются очень важными и должны быть рассмотрены.

Среди модифицированных теорий гравитации есть очень важный класс модифицированных телепараллельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем. Эти теории недостаточно проверены на предмет соответствия данным современных наблюдений. В том числе они не были проверены в рамках ППН формализма, что является, с одной стороны, важным, с другой стороны, доступным.

Так как именно соответствие наблюдениям позволяет принять или исключить ту или иную теорию или предположение, то **объектом** данного диссертационного исследования

являются астрофизические и космологические решения. Для проверки сохраняющихся величин в TEGR используются решения ОТО для вселенных Фридмана и (анти-)де Ситтера и черной дыры Шварцшильда. А при применении ППН-формализма, используемого для проверки телепараллельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем, предполагается идеальная жидкость, движущаяся с малой скоростью по сравнению со скоростью света.

Цели и задачи

В целом, диссертация посвящена изучению свойств телепараллельной гравитации. В частности, были поставлены следующие задачи:

1) Построить для TEGR выражения для сохраняющихся величин (токов, суперпотенциалов и зарядов) в самом общем виде в тензорной форме, таких, что они будут одновременно координатно ковариантны и инвариантны относительно локальных лоренцевых вращений тетрад.

2) Исследовать

а) полученные сохраняющиеся величины теоретически;

б) возможности их использования в рамках конкретных космологических и астрофизических моделей, таких как вселенные Фридмана и (анти-)де Ситтера, а также черная дыра Шварцшильда;

в) ограничения для их приложений;

г) сравнить новые выражения с предшествующими, как теоретически, так и в приложениях.

3) Изучить результаты применения новых методов построения сохраняющихся величин в TEGR для обобщений TEGR, типа $f(T)$ -теорий.

4) Оценить жизнеспособность класса модифицированных телералельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем методом ППН-формализма на масштабах Солнечной системы.

Научная новизна работы

Результаты работы являются полностью оригинальными. Это новые ковариантные по отношению к координатным преобразованиям и инвариантные по отношению к локальным лоренцевым вращениям тетрад сохраняющиеся токи, суперпотенциалы и заряды в TEGR, а также законы сохранения для них. Обобщена процедура «выключения» гравитации, которая дает возможность определить необходимую нединамическую величину – инерциальную спиновую связность (ИСС). Обобщено понятие «калибровок» в TEGR. Выяснена неоднозначность применения метода «выключения» гравитации и разработаны способы ее исследования на примере решения для черной дыры Шварцшильда. Впервые построена обобщенная метрика Леметра для решения Шварцшильда. Проведено подробное сравнение оригинальных результатов с предшествующими результатами других авторов.

Новый универсальный метод «выключения» гравитации проверен на предмет подходящих калибровок для обобщенных $f(T)$ -теорий, где также стоит проблема определения «хороших» тетрад.

Впервые проверены на жизнеспособность модифицированные телералельные теории с неминимальной связью кручения со скалярным полем методом ППН-формализма в Солнечной системе.

Теоретическая и практическая значимость

Законы сохранения и сохраняющиеся величины являются одними из самых главных характеристик любой физической теории. Поэтому их разработка в рамках TEGR и соответствующий результат, конечно, имеют высокую научную значимость. Об этом свидетельствует рейтинг рецензируемых журналов, где они опубликованы. И, конечно, это существенный вклад в теоретическое развитие телепараллельных теорий.

В последнее время выходит все больше работ, где в рамках телепараллельных теорий рассматриваются как космологические модели, так и модели астрофизических объектов. Например, для описания недавних наблюдений теней черных дыр в центре галактики M87 и Стрелец A* активно используются (наряду с другими обобщениями ОТО) варианты телепараллельных теорий. В свете этой активности, как с теоретической точки зрения, так и относительно прикладных перспектив, полученные результаты имеют очень высокий потенциал для дальнейшего развития.

В качестве практической значимости результатов проверка на жизнеспособность расширенных телералельных теорий, включая теории с неминимальной связью кручения со скалярным полем, без сомнения важна. При этом теоретические знания были протестированы с помощью конкретных наблюдений в рамках Солнечной системы с использованием метода ППН-формализма.

Методология и методы исследования

Инструментом для построения сохраняющихся величин и законов сохранения для них является классическая теорема Нётер. Используется инвариантность действия TEGR относительно диффеоморфизмов. При этом вектора смещений остаются в выражениях для сохраняющихся токов, суперпотенциалов и зарядов. Соответствующий выбор векторов смещений определяет интерпретацию сохраняющихся величин. Все теоретические расчеты основаны на применении стандартных и проверенных формализмов в физике и математике. Для оценки жизнеспособности телепараллельных теорий с неминимальной связью кручения со скалярным полем на масштабах Солнечной системы использовался ППН-формализм.

Проверка правильности теоретических расчетов, полученных вручную, и проведение наиболее громоздких вычислений производились путем программирования в среде Wolfram Mathematica.

Положения, выносимые на защиту:

1) Теорема Нётер в телепараллельном эквиваленте общей теории относительности приводит к сохраняющимся токам, суперпотенциалам и зарядам, одновременно координатно ковариантным и инвариантным относительно лоренцевых вращений тетрад, построенным впервые в тензорной форме. Решающим является наличие в новых выражениях инерциальной спиновой связности и вектора смещений.

2) Новый универсальный (обобщенный) метод «выключения» гравитации определяет инерциальную спиновую связность. Вектора смещений выбираются в соответствии с приложениями (в виде векторов Киллинга, собственных векторов наблюдателей, и т.д.). Как результат, свободно падающие наблюдатели во вселенных Фридмана и (анти-)де Ситтера, измеряют нулевые плотности энергии и импульса в соответствии со слабым принципом эквивалентности. Масса и импульс как покоящейся, так и движущейся черной дыры Шварцшильда, измеренные бесконечно удаленными наблюдателями являются физически ожидаемыми.

3) Универсальный метод «выключения» гравитации приводит к неоднозначностям, для исследования которых используется новое обобщенное понятие «калибровки». Для черной дыры Шварцшильда одна из калибровок приводит к ожидаемой массе, но не дает соответствия принципу эквивалентности. Другая калибровка, наоборот, удовлетворяет второму требованию, но не первому. Оригинальная новая калибровка одновременно удовлетворяет обоим требованиям.

4) Для модифицированных телепараллельных теорий (i) универсальный метод «выключения» гравитации в общем случае не дает калибровок, удовлетворяющих полевым уравнениям $f(T)$ -гравитации, где также стоит проблема определения «хороших» тетрад; (ii) определяется пост-ньютоновский предел для теорий кручения, неминимально связанного со скалярным полем, а современные данные о пост-ньютоновских параметрах накладывают ограничения на параметры этих теорий, но оставляют их жизнеспособными.

Степень достоверности результатов

Расчеты проводились как вручную, так и с использованием программы Wolfram Mathematica, а затем проверялось их совпадение. Проверялось совпадение результатов, полученных с помощью эквивалентных формул.

Проверялось соответствие полученных результатов результатам работ предыдущих авторов. Для интерпретации полученных результатов использовались выводы из общей теории относительности.

Достоверность результатов исследования подтверждают публикации в рецензируемых журналах и их апробация на международных конференциях.

Апробация результатов

Достоверность этих результатов и их высокая значимость подтверждается тем, что они опубликованы в журналах высокого рейтинга, а также были доложены на международных конференциях:

1) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity (Устный)», XXI International Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory» (PIRT-2019), Москва, МВТУ им. Н.Э.Баумана, Россия, 1-5 июля 2019.

2) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity (Устный)», 10th Alexander Friedmann International Seminar on gravitation and cosmology, Санкт-Петербург, Россия, 23-29 июня 2019.

3) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity (Устный)», Geometric Foundations of Gravity 2019, Тарту, Эстония, 17-21 июня 2019.

4) Emtsova E.D., Hohmann M. «Post-Newtonian limit of scalar-torsion theories of gravity as analogue to scalar-curvature theories (Устный)», Geometric Foundations of Gravity 2019, Тарту, Эстония, 17-21 июня 2019.

5) Emtsova E.D., Krssak M., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On the Schwarzschild solution in TEGR (Устный)», XXII International Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory» (PIRT-21), Москва, МВТУ им. Н.Э.Баумана, Россия, 5-9 июля 2021.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных рецензируемых изданиях, 4 из которых опубликованы в высоко рейтинговых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science/Scopus/RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальностям:

1) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «Conserved currents and superpotentials in teleparallel equivalent of GR», Classical and Quantum Gravity, 37, 095006 (2020). DOI: 10.1088/1361-6382/ab7715 (IF WoS: 3.528)

2) Emtsova Elena D., Manuel Hohmann, «Post-Newtonian limit of scalar-torsion theories of gravity as analogue to scalar-curvature theories», Physical Review D, 101, 024017 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.101.024017 (IF WoS: 5.296)

3) Emtsova E.D., Krššák M., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conserved quantities for the Schwarzschild black hole in teleparallel gravity», European Physical Journal C, 81, 743 (2021). DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09505-x (IF WoS: 4.59)

4) Emtsova E.D., Petrov A.N. «On gauges for a moving black hole in TEGR», General Relativity and Gravitation, 54, 114, (2022). DOI: 10.1007/s10714-022-02996-3 (IF WoS: 2.513)

Опубликована одна статья в рецензируемом журнале списка ВАК:

Emtsova E.D., Petrov A.N. «A moving black hole in TEGR as a moving matter ball», Space, Time and Fundamental Interactions, №2(39), 18-25 (2022). (Емцова Е.Д., Петров А.Н. «Движущаяся черная дыра в TEGR как движущийся материальный шар», Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, №2(39), 18-25 (2022).) DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.2.18-25

Опубликованы 2 статьи в рецензируемом журнале конференций, который в базе данных Scopus:

1) Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On conservation laws in teleparallel gravity», Journal of Physics: Conference Series, 1557, 012017 (10pp) (2020). DOI: 10.1088/1742-6596/1557/1/012017 (IF WoS: 0.547)

2) Emtsova E.D., Krššák M., Petrov A.N., Toporensky A.V. «On the Schwarzschild solution in TEGR», Journal of Physics: Conference Series, 2081, 012017 (9pp) (2021). DOI: 10.1088/1742-6596/2081/1/012017 (IF WoS: 0.48)

Все вышеперечисленные работы соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. Сама работа соответствует, с одной стороны, специальности 1.3.1. «Физика космоса, астрономия». Действительно, все многочисленные приложения осуществляются в рамках моделей черных дыр, которые в настоящее время наблюдаются непосредственно, и чрезвычайно интенсивно изучаются в связи с новыми данными; в рамках космологических моделей, интерес к которым очень сильно возрос после открытия инфляционного расширения, а затем и современного расширения. Исследования в Солнечной системе методом ППН-формализма, конечно, также соответствуют этой специальности. С другой стороны, работа соответствует специальности 1.3.3. «Теоретическая физика». Действительно, теоретическая часть исследования проводится методами гравитационной физики, в том числе, методами телепараллельной гравитации, которая интенсивно развивается.

Личный вклад автора

Автором была выполнена проверка выражений построенных в TEGR сохраняющихся величин (Глава 2) и их представление через величины, используемые в компьютерных расчетах. Выполнен совместно с соавторами как вручную, так и с использованием программы Wolfram Mathematica: (i) расчет сохраняющихся величин для различных решений в TEGR (Главы 3-5), (ii) расчет компонент полевых уравнений в $f(T)$ -гравитации (Глава 6), (iii) расчет ППН-параметров в теориях кручения, неминимально связанного со скалярным полем (Глава 7). Автором был предложен ряд новых теоретических идей, наиболее важными из которых являются: обобщение понятия калибровок в TEGR, построение новой обобщенной метрики Леметра и соответствующей калибровки Леметра, схематическое представление калибровок, обоснование неоднозначности «выключения» гравитации. Написание текстов научных статей проводились совместно с соавторами. Личный вклад автора в полученные результаты численно можно оценить как 60-70

Структура и содержание диссертации

Диссертация состоит из Введения, семи Глав, Заключения, списка сокращений, двух дополнений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 111 страниц, включая 3 рисунка и 2 таблицы. Список литературы включает 133 наименования на 9 страницах.

Во **Ведении** подробно описываются актуальность темы исследования, степень разработанности темы исследования, цели и задачи работы, научная новизна работы, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, формулируются положения, выносимые на защиту, обосновывается степень достоверность и апробация результатов,

перечисляется список опубликованных статей и выступлений на конференциях, описывается личный вклад автора.

В **Главе 1** изложены основы телепараллельной гравитации. Даны основные геометрические определения, затем представлено сравнение лагранжианов в тетрадных представлениях ОТО (лагранжины Гильберта и Мёллера) и телепараллельного лагранжиана. Выписаны уравнения поля в ТЕGR, на основе которых выводится закон сохранения нековариантной величины. Рассмотрены проблемы построения законов сохранения в ТЕGR выводятся сохраняющиеся величины путем интегрирования уравнений поля.

Глава 2 посвящена построению сохраняющихся величин в ТЕGR. В соответствии с [17] представлен вывод нётеровских сохраняющихся величин в произвольной полевой теории с действием, зависящим от произвольных полей и их первых и вторых производных. В явной форме выведены сохраняющиеся величины (нётеровские ток и суперпотенциал) для Лагранжиана Мёллера, а также в явной форме выведены сохраняющиеся величины в ковариантном ТЕGR. Выведен принцип определения инерциальной спиновой связности — универсальный (обобщенный) метод «выключения» гравитации. Сравняется введение ИСС как внешней структуры в ТЕGR и введение в метрической ОТО фонового пространства-времени, снабженного вспомогательной фоновой метрикой и связанными с ней фоновыми символами Кристоффеля.

Глава 3 посвящена вычислению с использованием новых формул энергии и импульса, измеряемых свободно падающими наблюдателями во вселенной Фрийдмана и пространстве (анти-)де Ситтера, через компоненты нетеровского тока в ТЕGR.

Глава 4 посвящена определению и исследованию калибровок в решении Шварцшильда в ТЕGR. Производится вычисление массы статичной черной дыры и вводится статическая калибровка Шварцшильда. Вычислены энергия и импульс, измеряемые падающим наблюдателем и вводится калибровка Леметра. Сравняются статическая калибровка Шварцшильда и калибровка Леметра. Определяется произвольный свободно падающий наблюдатель, производится вычисление соответствующих сохраняющихся величин и вводится e -калибровка.

Глава 5 посвящена построению сохраняющихся величин для движущейся черной дыры Шварцшильда. Построены сохраняющиеся величины для сферически симметричного материального шара в пространстве Минковского. Затем рассмотрена движущаяся черная дыра по аналогии с материальным шаром. Наконец, расчет энергии и импульса движущейся черной дыры сделан напрямую в неподвижной системе отсчета относительно статических наблюдателей и определяется «движущаяся калибровка».

Глава 6 посвящена исследованию тетрад свободно падающих наблюдателей в $f(T)$ -гравитации. Приведены полевые уравнения в $f(T)$ -гравитации. Проверена возможность построения ИСС и хороших тетрад по аналогии с построением ИСС и собственных тетрад в ТЕGR в статических сферически симметричных решениях в $f(T)$ -гравитации. Обсуждается сходство неоднозначности определения собственной тетрады в ТЕGR путем «выключения» гравитации с проявлением так называемых остаточных симметрий в $f(T)$ -гравитации.

Глава 7 посвящена определению ППН параметров в теории кручения, неминимально связанного со скалярным полем. Вначале Главы сделаны некоторые вступительные замечания. Затем представлен лагранжиан теории, описаны полевые переменные и их динамика и описано пост-ньютоновское разложение всех величин. После этого рассмотрен случай массивного скалярного поля, для которого определяется только ППН параметр γ , случай безмассового скалярного поля, для которого находятся все ППН параметры. На основе полученных результатов рассмотрены в рамках ППН-формализма следующие теории: (i) телепараллельный эквивалент скалярно-тензорной гравитации, (ii) телепараллельная темная энергия и ее обобщения, (iii) теория с неминимальной связью скалярного поля с телепараллельным поверхностным членом.

В **Заключении** делаются основные выводы по результатам исследований кандидатской диссертации и приводятся перспективы для дальнейших исследований.

В **Приложении А в Дополнениях** выписаны компоненты наиболее громоздких ИСС в калибровках Шварцшильда, Леметра и e -калибровке (из Главы 4) и показана тривиальность одного из возможных сферически симметричных решений в $f(T)$ -гравитации (из Главы 6).

Глава 1. Основы телепараллельной гравитации

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [23; 24], выполненные автором диссертации совместно с коллегами, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

1.1 Лагранжианы в тетрадных представлениях ОТО и телепараллельный лагранжиан

Хорошо известно, что Эйнштейн уделял существенное внимание тетрадному представлению ОТО (телепараллельному представлению), в частности, для объединения электромагнитного взаимодействия с гравитацией [25; 26]. Связь метрики с тетрадой выражается формулой

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_{\mu} h^b{}_{\nu}, \quad (1.1)$$

где $h^a{}_{\mu}$ ($a = 0, 1, 2, 3$ - нумерует тетрадные вектора, как и другие латинские индексы; $\mu = 0, 1, 2, 3$ - нумерует координаты, как и другие греческие индексы) — 16 тетрадных компонент нового динамического поля вместо 10 компонент физической метрики $g_{\mu\nu}$ в ОТО. $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ — внутренняя метрика Минковского, с помощью которой поднимаются и опускаются тетрадные индексы тензоров, точно так же, как поднимаются и опускаются пространственно-временные индексы с помощью метрики $g_{\mu\nu}$. Все обозначения соответствуют приведенным в книге [3]. Символ \circ над тензором означает, что этот тензор построен с использованием связности Леви-Чивиты $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_{\lambda}g_{\mu\kappa} + \partial_{\kappa}g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}g_{\kappa\lambda})$. Эта связность симметрична по нижним индексам, то есть соответствующее кручение равно нулю: $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda} \equiv \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda\kappa} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda} = 0$. Также она согласована с физической метрикой, то есть соответствующая неметричность равна нулю: $\overset{\circ}{Q}{}_{\mu\alpha\beta} \equiv \overset{\circ}{\nabla}{}_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0$ (где $\overset{\circ}{\nabla}{}_{\mu}$ - ковариантная производная с $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda\kappa}$). Отметим, что существует единственная связность с нулевыми кручением и неметричностью. Однако, описать гравитацию можно не только в терминах связности Левви-Чивиты, но и с помощью телепараллельных связностей [1]. Символ \bullet обозначает отношение тензора к телепараллельным величинам, т.е. построенного с использованием телепараллельной связности $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\lambda}$. Эта связность плоская, то есть соответствующая кривизна равна нулю: $\overset{\bullet}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\mu}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\kappa}{}_{\beta\nu} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\kappa\nu}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\kappa}{}_{\beta\mu} = 0$; и она также согласована с физической метрикой, то есть соответствующая неметричность равна нулю: $\overset{\bullet}{Q}{}_{\mu\alpha\beta} \equiv \overset{\bullet}{\nabla}{}_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0$ (где $\overset{\bullet}{\nabla}{}_{\mu}$ - ковариантная производная с $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\lambda\kappa}$). Отметим, что выбор такой телепараллельной связности не единственен. Преобразование тетрадных индексов в пространственно-временные и обратно производится сверткой с тетрадными векторами, например, $\overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\mu\nu} = h^a{}_{\alpha}h^{\beta}{}_{b}\overset{\bullet}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$; $\overset{\bullet}{T}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = h^{\alpha}{}_a\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu}$, и т. д.

Произвольная спиновая связность

$$A^i_{j\mu} = -h_j{}^\nu \nabla_\mu h^i{}_\nu \quad (1.2)$$

определяется с использованием ковариантной производной ∇_μ , соответствующей производной связности $\Gamma^\alpha_{\kappa\lambda}$. Спиновая связность Леви-Чивиты (Л-ЧСС) в ОТО соответственно равна:

$$\overset{\circ}{A}^i_{j\mu} = -h_j{}^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\mu h^i{}_\nu. \quad (1.3)$$

Лагранжиан Гильберта переписывается в тетрадной форме [27] как

$$\mathcal{L}_H = -\frac{h}{2\kappa} \overset{\circ}{R} = -\frac{h}{2\kappa} h_i{}^\mu h^{j\nu} \left(\partial_\mu \overset{\circ}{A}^i{}_{j\nu} - \partial_\nu \overset{\circ}{A}^i{}_{j\mu} + \overset{\circ}{A}^i{}_{k\mu} \overset{\circ}{A}^k{}_{j\nu} - \overset{\circ}{A}^i{}_{k\nu} \overset{\circ}{A}^k{}_{j\mu} \right), \quad (1.4)$$

где $h = \det h^a{}_\mu = \sqrt{-g}$; $g = \det g_{\mu\nu}$, эйнштейновская постоянная $\kappa = 8\pi$. Лагранжиан (1.4) зависит от производных $h^a{}_\mu$ до второго порядка включительно. Чтобы получить сохраняющиеся величины, зависящие только от производных первого порядка (что более предпочтительно), необходимо иметь лагранжиан, зависящий только от первых производных также. Основываясь на лагранжиане Гильберта (1.4) легко вывести такой лагранжиан:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_H - \partial_\mu \hat{m}^\mu = \mathcal{L}_H - \overset{\circ}{\nabla}_\mu \hat{m}^\mu; \quad \hat{m}^\mu = \frac{h}{\kappa} h^{j\mu} h_i{}^\nu \overset{\circ}{A}^i{}_{j\nu}, \quad (1.5)$$

«крышечка» здесь означает, что величина является математической плотностью веса +1. В явном виде лагранжиан (1.5) переписывается как

$$\mathcal{L}_M = \frac{h}{2\kappa} h_i{}^\mu h^{j\nu} \left(\overset{\circ}{A}^i{}_{k\mu} \overset{\circ}{A}^k{}_{j\nu} - \overset{\circ}{A}^i{}_{k\nu} \overset{\circ}{A}^k{}_{j\mu} \right) \quad (1.6)$$

это хорошо известный лагранжиан Мёллера [28].

Кратко опишем лагранжианы (1.4) и (1.6). Лагранжиан Гильберта — это скалярная плотность веса +1. Кроме того, он Лоренц-инвариантен, поскольку зависит только от метрики (1.1) и ее производных, которые Лоренц-инвариантны. Что касается лагранжиана Мёллера (1.6), то он становится неинвариантным по отношению к локальным лоренцевым вращениям, в то время как он продолжает быть скалярной плотностью веса +1. Основываясь на лагранжиане (1.6), Мёллер предложил тензор энергии-импульса гравитационного поля и связанный с ним суперпотенциал, которые ковариантны по отношению к преобразованиям координат. Однако они, как и лагранжиан (1.6), не ковариантны по отношению к локальным лоренцевым вращениям, подробнее см. подраздел 2.2.

Чтобы построить сохраняющиеся величины, которые бы оставались координатно ковариантными и зависели только от первых производными, но и были Лоренц-инвариантными, мы используем ковариантное представление TERG, см. книгу [3]. Основные формулы следующие. Лоренцево вращение для компонент тетрады имеет вид:

$$h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) h^b{}_\mu, \quad (1.7)$$

где $\Lambda^a{}_b(x)$ - матрица локальных преобразований Лоренца (при явной зависимости от x преобразования называются локальными, а при отсутствии зависимости от x - глобальными),

принадлежит специальной группе Лоренца $SO(1,3)$. Аналогичные преобразования применяются к произвольным тензорам с тетрадными индексами. При лоренцевом вращении произвольная спиновая связность $A^a{}_{b\mu}$ преобразуется по формуле

$$A'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) A^c{}_{d\mu} \Lambda^b{}_d(x) + \Lambda^a{}_c(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^c(x). \quad (1.8)$$

Ковариантность тензоров относительно локально-лоренцевых вращений проверяется при одновременном преобразовании тетрады (1.7) и спиновой связности (1.8). Спиновая связность ОТО (1.3) описывает как гравитационные, так и чисто инерционные эффекты. Поэтому $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ нельзя полностью обратить в нуль локальными лоренцевыми вращениями. С другой стороны, спиновая связность $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$, описывающая только инерционные эффекты, может быть полностью обращена в ноль преобразованием типа (1.8). Поэтому $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$, которая в соответствии с общим определением (1.2) имеет вид $\overset{\bullet}{A}{}^i{}_{j\mu} = -h_j{}^\nu \overset{\bullet}{\nabla}{}_\mu h^i{}_\nu$, можно далее представить в виде:

$$\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{c\mu} = \Lambda^b{}_d(x) \partial_\mu \Lambda_c{}^d(x) \quad (1.9)$$

с соответствующей матрицей локального преобразования Лоренца $\Lambda^b{}_d(x)$. Такая спиновая связность называется инерциальной спиновой связностью (ИСС). Тетрада, соответствующая нулевой ИСС называется собственной. Хотя спиновые связности $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{c\mu}$ и $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{c\mu}$ не тензоры по отношению к локальным лоренцевым вращениям, см. (1.8), но их разность

$$\overset{\bullet}{K}{}^a{}_{c\mu} = \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{c\mu} - \overset{\circ}{A}{}^a{}_{c\mu} \quad (1.10)$$

является Лоренц-ковариантным тензором. Это можно проверить прямой подстановкой локального преобразования Лоренца $\Lambda^b{}_d(x)$ в (1.8) для $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ и $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ - нетензорные части взаимно вычитаются. Величина (1.10) называется тензором искривления (contortion tensor) и обращается в нуль, если гравитационные эффекты отсутствуют. В терминах $\overset{\bullet}{K}{}^a{}_{c\mu}$ лагранжиан Гильберта переписывается в явно Лоренц-ковариантной форме:

$$\mathcal{L}_H = -\frac{h}{2\kappa} \overset{\circ}{R} = \frac{h}{2\kappa} h_i{}^\mu h^{j\nu} \left(\overset{\bullet}{\mathcal{D}}{}_\mu \overset{\bullet}{K}{}^i{}_{j\nu} - \overset{\bullet}{\mathcal{D}}{}_\nu \overset{\bullet}{K}{}^i{}_{j\mu} + \overset{\bullet}{K}{}^i{}_{k\mu} \overset{\bullet}{K}{}^k{}_{j\nu} - \overset{\bullet}{K}{}^i{}_{k\nu} \overset{\bullet}{K}{}^k{}_{j\mu} \right), \quad (1.11)$$

где $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}{}_\sigma$ — Лоренц-ковариантный дифференциальный оператор. В применении к тетрадному вектору, например, он определяется как $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}{}_\sigma V_a = \partial_\sigma V_a - \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\sigma} V_c$.

Чтобы оставить лагранжиан зависимым только от первых производных и не изменить полевые уравнения, нужно вычесть дивергенцию следующего типа:

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_H - \partial_\mu \hat{t}^\mu = \mathcal{L}_H - \overset{\circ}{\nabla}{}_\mu \hat{t}^\mu; \quad \hat{t}^\mu = \frac{h}{\kappa} \overset{\bullet}{K}{}^{\mu\nu}{}_\nu. \quad (1.12)$$

Лагранжиан (1.12) в явном виде переписывается как:

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa} \left(\overset{\bullet}{K}{}^\rho{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{K}{}^\nu{}_{\rho\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^\nu{}_{\rho\nu} \overset{\bullet}{K}{}^{\mu\rho}{}_\mu \right). \quad (1.13)$$

Часто удобнее использовать тензор кручения ($\overset{\bullet}{T}{}^\alpha{}_{\lambda\kappa} \equiv \overset{\bullet}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\lambda\kappa} - \overset{\bullet}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\kappa\lambda}$) вместо тензора искривления:

$$\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{K}{}^\rho{}_{\mu\nu} - \overset{\bullet}{K}{}^\rho{}_{\nu\mu}, \quad 2\overset{\bullet}{K}{}^\rho{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\nu\mu} + \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu} - \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

который также является и координатно ковариантным, и Лоренц-инвариантным. Явное выражение для тензора кручения:

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu + \dot{A}^a{}_{c\mu} h^c{}_\nu - \dot{A}^a{}_{c\nu} h^c{}_\mu. \quad (1.15)$$

Из-за антисимметрии по μ и ν можно переписать это выражение в явно тензорной форме:

$$\dot{T}^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \left(\overset{\circ}{\nabla}_\mu h^a{}_\nu - \overset{\circ}{\nabla}_\nu h^a{}_\mu + \dot{A}^a{}_{c\mu} h^c{}_\nu - \dot{A}^a{}_{c\nu} h^c{}_\mu \right). \quad (1.16)$$

Наконец, лагранжиан (1.12), переписанный через тензор кручения, приобретает вид:

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa} \left(\frac{1}{4} \dot{T}^\rho{}_{\mu\nu} \dot{T}^{\mu\nu}{}_\rho + \frac{1}{2} \dot{T}^\rho{}_{\mu\nu} \dot{T}^{\nu\mu}{}_\rho - \dot{T}^\rho{}_{\mu\rho} \dot{T}^{\nu\mu}{}_\nu \right) \equiv \frac{h}{2\kappa} \dot{T}, \quad (1.17)$$

где \dot{T} - скаляр кручения. (1.17) - это основная и наиболее используемая форма лагранжиана TEGR [3] в ковариантном представлении. Заметим еще раз, что лагранжиан (1.17), имеющий производные только первого порядка, является одновременно и координатно-ковариантным и Лоренц-инвариантным, в отличие от лагранжиана Мёллера (1.6).

Наконец, важно сравнить лагранжиан Мёллера (1.6) с лагранжианом TEGR (1.13), который также эквивалентен (1.17). Напомним, что с помощью определенного локального лоренцева вращения можно получить $\dot{A}^a{}_{b\mu} = 0$. Разумеется, с помощью того же локального лоренцева вращения соответственно трансформируются и Л-ЧСС $\overset{\circ}{A}^a{}_{b\mu}$ и тетрадные векторы $h^a{}_\mu$. Такую фиксацию, где $\dot{A}^a{}_{b\mu} = 0$, обычно называют *калибровкой Вайценобока* в TEGR. Легко заметить, что в этой калибровке лагранжиан (1.13) преобразуется в (1.6). Несмотря на это, есть принципиальная разница. Действительно, после произвольных локальных лоренцевых преобразований, получим $\dot{A}^a{}_{b\mu} \neq 0$ и ковариантный лагранжиан TEGR снова принимает вид (1.13), тогда как лагранжиан Мёллера сохраняет вид (1.6). Таким образом, ниже мы будем отличать представление Мёллера от ковариантного представления TEGR и обратно и сравнивать их.

1.2 Уравнения поля

Включим источники материи в обоих случаях лагранжианов \mathcal{L}_M (1.6) и $\dot{\mathcal{L}}$ (1.17) следующим образом

$$\mathcal{L}_{M\text{TOT}} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}(h), \varphi), \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L}_{TEGR} = \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}(h), \varphi), \quad (1.19)$$

с обобщенными материальными полями φ . Поле тетрады входит в \mathcal{L}_m только через метрику (1.1). Лишь компоненты $h^a{}_\rho$ представляют гравитационное поле, поэтому уравнения гравитационного поля получаются варьированием только по $h^a{}_\rho$. ИСС $\dot{A}^i{}_{j\mu}$, определенная в (1.9), фактически является параметрическим полем, и не имеет отношения к получению уравнений движения в TEGR.

Таким образом, учитывая

$$\begin{aligned}\delta h_b{}^\rho &= -h_a{}^\rho h_b{}^\mu \delta h_{\mu}{}^a, \\ \delta g_{\mu\nu} &= 2h_{a(\mu} \delta h_{\nu)}^a, \\ \delta g^{\mu\nu} &= -2g^{\rho(\mu} h_a{}^{\nu)} \delta h_{\rho}^a,\end{aligned}$$

получаем, что варьирование (1.18) и (1.19) по $h_a{}^\rho$ дает уравнения движения

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta h_a{}^\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h_a{}^\rho} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h_a{}^{\rho,\sigma}} \right) = h \Theta_a{}^\rho, \quad (1.20)$$

$$\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h_a{}^\rho} \equiv \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h_a{}^\rho} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h_a{}^{\rho,\sigma}} \right) = h \Theta_a{}^\rho, \quad (1.21)$$

где тензор энергии-импульса вещества определяется как

$$\Theta_a{}^\rho = -\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h_a{}^\rho}. \quad (1.22)$$

Лагранжианы \mathcal{L}_H в (1.4) и (1.11), \mathcal{L}_M в (1.6) и $\dot{\mathcal{L}}$ в (1.17) отличаются друг от друга на дивергенции. Отсюда следует, что, во-первых, левые части уравнений движения (1.20) и (1.21) совпадают, а сами уравнения (1.20) и (1.21) эквивалентны уравнениям Эйнштейна в стандартной метрической формулировке. Во-вторых, операторы в левых частях уравнений движения не зависят от инерциальной спиновой связности $\dot{A}^i{}_{j\mu}$ в целом, поэтому эти операторы являются Лоренц-ковариантными в обоих случаях. Однако это не так при построении сохраняющихся величин. Рассмотрим (1.21) более подробно.

Введем новые обозначения:

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h_a{}^\rho} \equiv -h \overset{\star}{J}_a{}^\rho, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h_a{}^{\rho,\sigma}} \equiv -\frac{h}{\kappa} \overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}. \quad (1.24)$$

Проведя вычисления, получаем

$$\overset{\star}{J}_a{}^\rho = -\frac{h_a{}^\rho}{h} \dot{\mathcal{L}} + \frac{1}{\kappa} h_a{}^\pi \overset{\bullet}{S}_c{}^{\beta\rho} \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\beta\pi} + \frac{1}{\kappa} \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\beta} \overset{\bullet}{S}_c{}^{\rho\beta}, \quad (1.25)$$

$$\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = \left(\frac{1}{2} \overset{\bullet}{T}{}_\beta{}^{\rho\sigma} - \overset{\bullet}{T}{}^{[\rho\sigma]}{}_\beta - 2 \overset{\bullet}{T}{}^{\alpha[\rho}{}_\alpha \delta_{\beta]}^{\sigma] \right) h_a{}^\beta \equiv \overset{\bullet}{K}{}^{\rho\sigma}{}_a + h_a{}^\sigma \overset{\bullet}{K}{}^{\theta\rho}{}_\theta - h_a{}^\rho \overset{\bullet}{K}{}^{\theta\sigma}{}_\theta, \quad (1.26)$$

где $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}$ - тензор, ковариантный относительно координатных и лоренцевых преобразований и антисимметричный по верхним индексам ρ и σ , именуемый суперпотенциалом. Скаляр кручения в (1.17) выражается как

$$\overset{\bullet}{T} = \frac{1}{2} \overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\rho\sigma}. \quad (1.27)$$

Теперь, перепишем уравнение (1.21) в виде:

$$\kappa h \left(\overset{\star}{J}_a{}^\rho + \Theta_a{}^\rho \right) = \partial_\sigma \left(h \overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} \right), \quad (1.28)$$

что представляет закон сохранения. Действительно, его дивергенция в силу упомянутой антисимметрии (1.26) дает

$$\partial_\rho \left(h \overset{\star}{J}_a{}^\rho + h \Theta_a{}^\rho \right) = 0. \quad (1.29)$$

1.3 Проблемы построения законов сохранения вTEGR

Выражения в (1.28) и (1.29), несмотря на частные производные, координатно-ковариантны. Действительно, легко представить (1.21), (1.28) и (1.29) в явно ковариантной форме:

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} - \overset{\circ}{\nabla}_\sigma \left(\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\sigma}} \right) = h \Theta_a{}^\rho, \quad (1.30)$$

$$\kappa h \left(J_a{}^\rho + \Theta_a{}^\rho \right) = \overset{\circ}{\nabla}_\sigma \left(h \dot{S}_a{}^{\rho\sigma} \right), \quad (1.31)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_\rho \left(h J_a{}^\rho + h \Theta_a{}^\rho \right) = 0. \quad (1.32)$$

Интегрирование (1.28) и (1.29) стандартными методами [27; 29] дает интегральные сохраняющиеся величины на гиперповерхностях постоянного времени $x^0 = \text{const} := \Sigma$:

$$P_a = - \int_\Sigma dx^3 h \left(J_a{}^0 + \Theta_a{}^0 \right) = - \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\Sigma} ds_i \left(h \dot{S}_a{}^{0i} \right), \quad (1.33)$$

где $\oint_{\partial\Sigma}$ обозначает поверхностное интегрирование по $\partial\Sigma$, являющейся границей области Σ на трехмерной гиперповерхности. Эта область также может быть бесконечно большой. Это построение стало возможным именно благодаря пространственно-временной ковариантности. Отметим, что величина (1.33), будучи координатно инвариантной, не является Лоренц-ковариантной.

Теперь обратим внимание, что величина (1.25), будучи вектором в пространстве-времени, не является Лоренц-ковариантной. Принимая во внимание (1.15) - (1.17), легко убедиться, что левая часть равенства (1.24) является одновременно ковариантной и относительно координатных преобразований, и относительно лоренцевых вращений. Таким образом, величина (1.26) является антисимметричным тензором по верхним индексам и является Лоренц- и координатно-ковариантной. Но почему левая часть (1.28) нековариантна относительно лоренцевых вращений? Это связано с тем, что частное дифференцирование в правой части действует на выражение с тетрадным индексом. Авторы книги [3] ковариантизуют (1.25) как

$$J_a{}^\rho = \dot{J}_a{}^\rho + \frac{1}{\kappa} \dot{A}{}^c{}_{a\beta} \dot{S}_c{}^{\rho\beta}, \quad (1.34)$$

$$\dot{J}_a{}^\rho \equiv - \frac{h_a{}^\rho}{h} \dot{\mathcal{L}} + \frac{1}{\kappa} h_a{}^\pi \dot{S}_c{}^{\beta\rho} \dot{T}{}^c{}_{\beta\pi}, \quad (1.35)$$

и далее записывают (1.28) в Лоренц-ковариантной форме

$$\kappa \left(h \dot{J}_a{}^\rho + h \Theta_a{}^\rho \right) = \partial_\sigma \left(h \dot{S}_a{}^{\rho\sigma} \right) - \dot{A}{}^c{}_{a\beta} \left(h \dot{S}_c{}^{\rho\beta} \right) = \dot{\mathcal{D}}_\sigma \left(h \dot{S}_a{}^{\rho\sigma} \right). \quad (1.36)$$

Поскольку $(\dot{\mathcal{D}}_\rho \dot{\mathcal{D}}_\sigma - \dot{\mathcal{D}}_\sigma \dot{\mathcal{D}}_\rho) V_a = 0$, соотношение (1.36) приводит к закону сохранения:

$$\dot{\mathcal{D}}_\rho \left(h \dot{J}_a{}^\rho + h \Theta_a{}^\rho \right) = 0. \quad (1.37)$$

Однако теперь, чтобы получить сохраняющиеся заряды, мы не можем проинтегрировать (1.36) и (1.37) как в (1.33), потому что имеем только ковариантные производные и не можем применить теорему Гаусса. То есть, мы, либо имеем возможность получить непротиворечивым образом сохраняющиеся заряды, как в (1.33), но не имеем Лоренц-ковариантности. Либо добиваемся Лоренц-ковариантности, но теряем возможность получить интегральные заряды. В разделе 2.3 далее мы приведем построение сохраняющихся величин (токов и суперпотенциалов) в ковариантномTEGR, что решает эту проблему одновременно.

Определение (1.33) обсуждается в книге [3] и ссылках [30] и в [31], где оно описывается как компоненты полных энергии и импульса. Есть два момента, которые мы хотели бы подчеркнуть. Во-первых, как было отмечено в [32], величина P_a инвариантна относительно глобальных преобразований Лоренца или локальных преобразований Лоренца, обращающихся в глобальные на бесконечности. Однако для определения заряда в конечных объемах последнее условие не работает.

Второй момент заключается в том, что в этом определении присутствует двусмысленность, связанная с тем, с какой формы уравнений поля мы начинаем. Мы можем записать уравнения поля (1.28) в полностью пространственно-временной форме и, аналогично описанной выше процедуре, определить полную энергию-импульс в индексах пространства-времени как [33]

$$P_\mu = -\frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\Sigma} d^2x h \dot{S}_\mu{}^{01}. \quad (1.38)$$

Несмотря на внешнее сходство с (1.33), эта величина отличается. Очевидно, она инвариантна относительно всех локальных преобразований Лоренца (в нашей ковариантной формулировке), но не инвариантна в относительно диффеоморфизмов, поскольку не преобразуется как вектор. Обе эти проблемы решены нами, как показано ниже.

Проблемы построения законов сохранения и сохраняющихся величин вTEGR обсуждаются в книге [3], также они очень подробно представлены в презентации [34] Мартина Кршака. На основе результатов исследований многих предыдущих авторов он рассматривает сохраняющиеся тензоры энергии-импульса, токи и связанные с ними суперпотенциалы. К построению тензора энергии-импульса вTEGR предъявляются следующие требования - он должен: 1) иметь только первые производные, 2) быть ковариантным как по отношению к преобразованиям координат, так и по отношению к локальным лоренцевым вращениям, 3) позволять непротиворечивым образом строить глобальные (интегральные) сохраняющиеся величины или сохраняющиеся заряды, 4) быть симметричным и 5) быть бесследовым. Два последних требования мы не считаем столь важными. Во-первых, хорошо известно, что канонический тензор энергии-импульса в классической теории поля в общем случае не является симметричным, однако это не является проблемой для построения всех необходимых сохраняющихся величин, см. главу 1 книги [17]. Во-вторых, бесследовость - скорее свойство безмассовой электродинамики. Однако мы не будем приводить эту аналогию как физически столь важную. Действительно, электромагнитное поле рассматривается как распространяющееся по фиксированному или динамическому фоновому пространству-времени, тогда как гравитационное поле представляет собой само пространство-время. Можно было

бы рассматривать возмущения гравитационного поля в заданном пространстве-времени, но это не является задачей этой работы.

Требование 1) мы считаем достаточно важным, и все варианты энергии-импульса в TEGR ему уже удовлетворяют. Основное внимание необходимо уделить требованиям 2) и 3). В [34] отмечается проблема, заключающаяся в том, что все известные подходы, в том числе прямого интегрирования уравнений поля дают: а) либо хорошо определенные сохраняющиеся заряды, выраженные через хорошо определенные поверхностные интегралы, но полученные из Лоренц-нековариантных сохраняющихся «токов»; б) либо ковариантные относительно лоренцевых вращений сохраняющиеся величины, которые, однако, невозможно проинтегрировать для получения сохраняющихся зарядов. Мы решаем эту проблему, строя сохраняющиеся величины в TEGR, применяя теорему Нётер. В результате чего требования 2) и 3) выполняются одновременно.

Глава 2. Сохраняющиеся величины вTEGR

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [23; 24], выполненные автором диссертации совместно с коллегами, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

2.1 Нётеровские сохраняющиеся величины в произвольной полевой теории

Выведем сохраняющиеся величины и законы сохранения для них, следующие из диффеоморфной инвариантности произвольной ковариантной теории полей ψ^A с действием [17; 35; 36]:

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}(\psi^A; \psi^A_{,\alpha}; \psi^A_{,\alpha\beta}). \quad (2.1)$$

Поля ψ^A — произвольная тензорная плотность или набор таких плотностей, где A — коллективный индекс. Учитывая инвариантность теории (2.1) относительно диффеоморфизмов, мы используем вариации ψ^A в виде производной Ли

$$\delta\psi^A = \mathcal{L}_\xi \psi^A = -\xi^\alpha \partial_\alpha \psi^A + \psi^A|_\beta^\alpha \partial_\alpha \xi^\beta. \quad (2.2)$$

Обозначение $\psi^A|_\beta^\alpha$ определяется конкретными свойствами преобразования ψ^A , например, для вектора $\psi^A = \psi^\sigma$ имеем $\psi^\sigma|_\beta^\alpha = \delta_\beta^\sigma \psi^\alpha$. Поскольку \mathcal{L} — это скалярная плотность с весом +1, диффеоморфная инвариантность приводит к основному тождеству Нётер:

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = -\partial_\alpha (\xi^\alpha \mathcal{L}). \quad (2.3)$$

Учитывая (2.2), основное тождество Нётер можно переписать в виде:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \mathcal{L}_\xi \psi^B + \partial_\alpha \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B_{,\alpha}} \mathcal{L}_\xi \psi^B + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B_{,\beta\alpha}} (\mathcal{L}_\xi \psi^B)_{,\beta} + \xi^\alpha \mathcal{L} \right] \equiv 0, \quad (2.4)$$

где $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B} - \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B_{,\mu}} \right) + \partial_{\mu\nu} \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B_{,\mu\nu}} \right)$ и $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B_{,\alpha}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B_{,\alpha}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B_{,\alpha\mu}} \right)$. Здесь мы предпочитаем использовать частные производные динамических переменных, потому что в метрических теориях, вообще говоря, полевые переменные являются компонентами метрического тензора, ковариантные производные которых тождественно равны нулю, и весь формализм теряет смысл.

Подставляя (2.2) в (2.4), перегруппировывая члены, используя правило Лейбница и преобразуя дивергенции, получаем:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B_{,\alpha} + \partial_\beta \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B|_\alpha^\beta \right) \right] \xi^\alpha \\ & + \partial_\alpha \left[\mathcal{U}_\sigma^{\alpha\xi\sigma} + \mathcal{M}_\sigma^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \partial_{\beta\tau} \xi^\sigma \right] \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где коэффициенты разложения полностью определяются лагранжианом и его производными

$$\mathcal{U}_\sigma^\alpha \equiv \mathcal{L}\delta_\sigma^\alpha + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B|_\sigma^\alpha - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B{}_{,\alpha}} \partial_\sigma\psi^B - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B{}_{,\beta\alpha}} \partial_{\beta\sigma}\psi^B, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{M}_\sigma^{\alpha\tau} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B{}_{,\alpha}} \psi^B|_\sigma^\tau - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B{}_{,\tau\alpha}} \partial_\sigma\psi^B + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B{}_{,\beta\alpha}} \partial_\beta(\psi^B|_\sigma^\tau), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B{}_{,\beta\alpha}} \psi^B|_\sigma^\tau + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^B{}_{,\tau\alpha}} \psi^B|_\sigma^\beta \right]. \quad (2.8)$$

Заметим, что для получения коэффициента (2.8) использовалось свойство симметрии, $\mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} = \mathcal{N}_\sigma^{\alpha\beta\tau}$, что следует непосредственно из (2.5) в силу коммутативности вторых частных производных.

Применяя частную производную к каждому из слагаемых в квадратных скобках в тождестве (2.5) и учитывая, что векторное поле ξ^σ и все его частные производные независимы и произвольны в каждой точке пространственно-временного многообразия, приходим к выводу, что все коэффициенты, при ξ^σ , и его частных производных должны быть равны нулю тождественно по отдельности. Это дает систему тождеств:

$$\partial_\alpha \mathcal{U}_\sigma^\alpha \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B{}_{,\alpha} + \partial_\beta \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B|_\alpha^\beta \right), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{U}_\sigma^\alpha + \partial_\lambda \mathcal{M}_\sigma^{\lambda\alpha} \equiv 0, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{M}_\sigma^{(\alpha\beta)} + \partial_\lambda \mathcal{N}_\sigma^{\lambda(\alpha\beta)} \equiv 0, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{N}_\sigma^{(\alpha\beta\gamma)} \equiv 0. \quad (2.12)$$

Система (2.9) - (2.12) была выведена Клейном [37]. Поэтому мы будем называть эту систему *тождествами Клейна*. После дифференцирования (2.10) и использования (2.11) и (2.12) получается, что $\partial_\alpha \mathcal{U}_\sigma^\alpha \equiv 0$. Это означает, что правая сторона (2.9) также должна быть равна нулю тождественно,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B{}_{,\alpha} + \partial_\beta \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^B} \psi^B|_\alpha^\beta \right) \equiv 0. \quad (2.13)$$

Это всего лишь утверждение второй теоремы Нётер [17], кроме того, это обобщение тождества Бьянки. Принимая во внимание историческое развитие теории, мы называем систему (2.9) - (2.13) *тождествами Клейна-Нётер*.

Тождество (2.13) дает возможность вместо (2.5) использовать независимо (2.13) и тождество

$$\partial_\alpha [\mathcal{U}_\sigma^\alpha \xi^\sigma + \mathcal{M}_\sigma^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \partial_{\beta\tau} \xi^\sigma] \equiv 0. \quad (2.14)$$

Входящая под дивергенцию векторная плотность классифицируется как ток

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv - [\mathcal{U}_\sigma^\alpha \xi^\sigma + \mathcal{M}_\sigma^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \partial_{\beta\tau} \xi^\sigma]. \quad (2.15)$$

Знак минус выбран для соответствия обычному знаку минус перед гравитационным (метрическим) действием. Таким образом, тождество (2.14) переписывается следующим образом:

$$\partial_\alpha \mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv 0. \quad (2.16)$$

Поскольку (2.16) является тождеством, ток должен быть выражен через тензорную величину (суперпотенциал), $\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi)$, двойная дивергенция которого должна быть равна нулю тождественно: $\partial_{\alpha\beta} \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv 0$. Покажем, что это действительно так. Учитывая симметрию по последним двум индексам в (2.8) и тождество (2.12), получаем

$$\mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} + \mathcal{N}_\sigma^{\tau\beta\alpha} + \mathcal{N}_\sigma^{\beta\alpha\tau} \equiv 0. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.10) в (2.15), используя (2.11) и (2.17), получаем

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \left(\mathcal{M}_\sigma^{\beta\alpha} \xi^\sigma + 2\mathcal{N}_\sigma^{\beta\alpha\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma \right). \quad (2.18)$$

Учитывая (2.16), следует ожидать, что дивергенция правой части (2.18) исчезнет. Докажем это. Добавим тождественно нулевой член, $\frac{4}{3} \partial_{\beta\lambda} \left(\hat{N}_\sigma^{[\lambda\beta]\alpha} \xi^\sigma \right) \equiv 0$, в правую часть (2.18). Затем, используя (2.11) и (2.17), получим

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \left(-\mathcal{M}_\sigma^{[\alpha\beta]} \xi^\sigma + \frac{2}{3} \partial_\lambda \mathcal{N}_\sigma^{[\alpha\beta]\lambda} \xi^\sigma - \frac{4}{3} \mathcal{N}_\sigma^{[\alpha\beta]\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma \right). \quad (2.19)$$

Выражение в квадратных скобках в правой части (2.19) явно антисимметрично по α и β , а поэтому его двойная дивергенция, действительно, обращается в нуль. Следовательно, оба выражения для тока (2.18) и (2.19), можно представить в виде дивергенции,

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (2.20)$$

где

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi) = \mathcal{M}_\sigma^{\beta\alpha} \xi^\sigma + 2\mathcal{N}_\sigma^{\beta\alpha\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma \quad (2.21)$$

соответствует (2.18), и

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi) = - \left(\mathcal{M}_\sigma^{[\alpha\beta]} \xi^\sigma - \frac{2}{3} \partial_\lambda \mathcal{N}_\sigma^{[\alpha\beta]\lambda} \xi^\sigma + \frac{4}{3} \mathcal{N}_\sigma^{[\alpha\beta]\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma \right) \quad (2.22)$$

соответствует (2.19). Такие величины, как $\mathcal{I}^{\alpha\beta}$, называются *суперпотенциалами*. В обоих случаях $\partial_{\alpha\beta} \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv 0$. Таким образом, тождество (2.20) можно рассматривать как эквивалентное закону сохранения (2.16) для тока.

Наконец, можно определить сохраняющуюся величину $\mathcal{P}(\xi)$, представляющую нётеровский заряд:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma d^3x \mathcal{I}^0(\xi). \quad (2.23)$$

Этот интеграл сводится к поверхностному интегралу

$$\mathcal{P}(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \mathcal{I}^{0i}(\xi), \quad (2.24)$$

в соответствии с тождеством (2.20) и определением (2.22), где i - обозначает пространственные координаты.

Далее, основываясь на результатах этого раздела, мы построим сохраняющиеся величины как в тетрадной ОТО с лагранжианом Мёллера, так и в ковариантном представленииTEGR, и сравним их.

2.2 Сохраняющиеся величины для Лагранжиана Мёллера

Лагранжиан Мёллера (1.6), ковариантный относительно пространства-времени, можно представить в общем виде (2.1). Коллективное поле ψ^A здесь представлено тетрадой ковариантных векторов: $\psi^A = \{h^a_\rho\}$, других полей здесь нет. Также лагранжиан Мёллера не зависит от вторых производных тетрады. Вариации тетрады (2.2) записываются следующим образом:

$$\delta h^a_\rho = \mathcal{L}_\xi h^a_\rho = -\xi^\alpha h^a_{\rho,\alpha} - \xi^\alpha_{,\rho} h^a_\alpha. \quad (2.25)$$

Тогда коэффициенты (2.6), (2.7) и (2.8) лагранжиана Мёллера (1.6), равны

$$\overset{M}{\mathcal{U}}_\sigma^\alpha \equiv \mathcal{L}_M \delta_\sigma^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta h^a_\rho} h^a_\rho|_\sigma^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a_{\rho,\alpha}} h^a_{\rho,\sigma}, \quad (2.26)$$

$$\overset{M}{\mathcal{M}}_\sigma^{\alpha\tau} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a_{\rho,\alpha}} h^a_\rho|_\sigma^\tau \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a_{\tau,\alpha}} h^a_\sigma, \quad (2.27)$$

$$\overset{M}{\mathcal{N}}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \equiv 0. \quad (2.28)$$

Заметим, что величина

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a_{\beta,\alpha}} = -\frac{h}{2\kappa} \overset{\circ}{A}{}^i{}_{j\mu} [h_a^\mu (h_i^\alpha h^{j\beta} - h_i^\beta h^{j\alpha}) - 2h_i^\mu (h_a^\alpha h^{j\beta} - h_a^\beta h^{j\alpha})] \quad (2.29)$$

в выражениях (2.26) и (2.27) ковариантна в пространстве-времени, но не ковариантна относительно Лоренцевых вращений.

Наконец, ток (2.15), соответствующий лагранжиану Мёллера, принимает вид:

$$\overset{M}{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \left[h \overset{M}{\theta}_\sigma{}^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta h^a_\alpha} h^a_\sigma \right] \xi^\sigma + \overset{M}{\mathcal{M}}_\sigma^{\rho\alpha} \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma, \quad (2.30)$$

где гравитационный тензор энергии-импульса Мёллера [28] определяется как

$$\overset{M}{\theta}_\sigma{}^\alpha \equiv \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a_{\rho,\alpha}} \overset{\circ}{\nabla}_\sigma h^a_\rho - \mathcal{L}_M \delta_\sigma^\alpha \right]. \quad (2.31)$$

По общим формулам (2.6) и (2.15) ток $\overset{M}{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ выражается только через частные производные $\partial_\sigma h^a_\rho$ и $\partial_\rho \xi^\sigma$. Однако его легко переписать в ковариантной форме (2.30) с $\overset{\circ}{\nabla}_\sigma h^a_\rho$ и $\overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma$.

Ток (2.30) тождественно сохраняется:

$$\partial_\alpha \overset{M}{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{M}{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv 0 \quad (2.32)$$

и он тождественно выражается через дивергенцию суперпотенциала:

$$\overset{M}{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\alpha \overset{M}{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{M}{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (2.33)$$

где суперпотенциал, см. (2.21), равен

$${}^M\mathcal{J}^{\alpha\beta}(\xi) = -{}^M\mathcal{M}_\sigma^{\alpha\beta}\xi^\sigma. \quad (2.34)$$

Все полученные выше выражения ковариантны относительно координатных преобразований, однако они, очевидно, не ковариантны относительно лоренцевых вращений. Таким образом, во-первых, мы подтверждаем Мёллера [28] в том, что тензор энергии-импульса (2.31) и суперпотенциал (в представлении Мёллера) (2.27) не ковариантны относительно локально лоренцевых вращений. Во-вторых, мы делаем более общее утверждение, что и ток (2.30), и суперпотенциал (2.34) также не являются Лоренц-ковариантными.

Наконец, сделаем два замечания. Во-первых, все приведенные выше законы сохранения являются только тождествами, так как были получены путем тождественных преобразований. Чтобы сделать их физически осмысленными, нужно использовать уравнения поля (1.20). Тогда ток (2.30) приобретает вид:

$${}^M\mathcal{J}^\alpha(\xi) \equiv h \left(\overset{M}{\Theta}_\sigma^\alpha + \Theta_\sigma^\alpha \right) \xi^\sigma + {}^M\mathcal{M}_\sigma^{\rho\alpha} \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma, \quad (2.35)$$

и все тождественно сохраняющиеся величины становятся физически сохраняющимися величинами.

Далее, для решения проблемы нековариантности относительно лоренцевых вращений можно было бы использовать фоновую (вспомогательную) спиновую связность $\bar{A}^i_{j\mu}$ и модифицировать суперпотенциал (2.34):

$${}^M\mathcal{J}^{*\alpha\beta}(\xi) = -\frac{h}{2\kappa} \left(\overset{\circ}{A}^i_{j\mu} - \bar{A}^i_{j\mu} \right) \left[\delta_\sigma^\mu (h_i^\alpha h^{j\beta} - h_i^\beta h^{j\alpha}) - 2h_i^\mu (\delta_\sigma^\alpha h^{j\beta} - \delta_\sigma^\beta h^{j\alpha}) \right] \xi^\sigma. \quad (2.36)$$

Этот суперпотенциал ковариантен как относительно координатных, так и лоренцевых преобразований. Теперь заметим следующее: во-первых, поскольку он не имеет тетрадных индексов, его дивергенция также является Лоренц-инвариантной; во-вторых, из-за антисимметрии исчезает его двойная дивергенция. Закон сохранения

$${}^M\mathcal{J}^{*\alpha}(\xi) \equiv \partial_\beta {}^M\mathcal{J}^{*\alpha\beta}(\xi) \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\beta {}^M\mathcal{J}^{*\alpha\beta}(\xi) \quad (2.37)$$

позволяет определить ток ${}^M\mathcal{J}^{*\alpha}(\xi)$, который и координатно ковариантен, и инвариантен относительно локальных лоренцевых вращений.

2.3 Сохраняющиеся величины в ковариантномTEGR

Лагранжиан (1.17) тоже относится к типу (2.1), но без вторых производных. Поэтому процедура построения токов и суперпотенциалов, так же как и в предыдущем разделе, может быть применена в ковариантномTEGR. Однако, коллективное поле ψ^A представляется в виде набора ковариантных векторов тетрады и инерциальной спиновой связности:

$\Psi^A = \{h^a{}_\rho; \dot{A}^a{}_{b\mu}\}$. Несмотря на то, что ИСС $\dot{A}^a{}_{b\mu}$ не является динамическим полем, ее вариацию необходимо учитывать, поскольку диффеоморфизмы действуют на все рассматриваемые геометрические объекты, одним из которых и является спиновая связность (вектором с нижним пространственно-временным индексом).

Таким образом, вариации (2.2) записываются как

$$\delta h^a{}_\rho = \mathcal{L}_\xi h^a{}_\rho = -\xi^\alpha h^a{}_{\rho,\alpha} - \xi^\alpha{}_{,\rho} h^a{}_\alpha, \quad (2.38)$$

$$\delta \dot{A}^a{}_{b\mu} = \mathcal{L}_\xi \dot{A}^a{}_{b\mu} = -\xi^\alpha \dot{A}^a{}_{b\mu,\alpha} - \xi^\alpha{}_{,\mu} \dot{A}^a{}_{b\alpha}. \quad (2.39)$$

Далее, коэффициенты (2.6) и (2.7), связанные с ковариантным лагранжианом TEGR (1.17), запишутся в виде

$$\dot{\mathcal{U}}_\sigma{}^\alpha \equiv \dot{\mathcal{L}} \delta_\sigma^\alpha + \frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\rho} h^a{}_\rho|_\sigma^\alpha + \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}^a{}_{b\mu}} \dot{A}^a{}_{b\mu}|_\sigma^\alpha - \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} h^a{}_{\rho,\sigma}, \quad (2.40)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_\sigma{}^{\alpha\tau} \equiv \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} h^a{}_\rho|_\sigma^\tau, \quad (2.41)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} \equiv 0. \quad (2.42)$$

Затем, учитывая (1.17) и (1.15), можно вывести

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}^a{}_{b\mu}} \dot{A}^a{}_{b\mu}|_\sigma^\alpha = -\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} \dot{A}^a{}_{b\sigma} h^b{}_\rho. \quad (2.43)$$

В итоге ток (2.15) приобретает вид:

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \left[h \dot{\theta}_\sigma{}^\alpha + \frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\alpha} h^a{}_\sigma \right] \xi^\sigma + \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} h^a{}_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma, \quad (2.44)$$

где величину

$$\dot{\theta}_\sigma{}^\alpha \equiv \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} \left(\overset{\circ}{\nabla}_\sigma h^a{}_\rho + \dot{A}^a{}_{b\sigma} h^b{}_\rho \right) - \dot{\mathcal{L}} \delta_\sigma^\alpha \right] \quad (2.45)$$

можно интерпретировать как тензор энергии-импульса гравитационного поля в ковариантном TEGR. Первоначально ток (2.44) был представлен только частными производными $\partial_\sigma h^a{}_\rho$ и $\partial_\rho \xi^\sigma$. Однако его легко преобразовать к явно ковариантной форме (2.44), выписанной через производные $\overset{\circ}{\nabla}_\sigma h^a{}_\rho$ и $\overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma$.

В силу определений (1.10) и (1.24) ток (2.44) и тензор энергии-импульса (2.45) могут быть представлены как

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \left[h \dot{\theta}_\sigma{}^\alpha + \frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\alpha} h^a{}_\sigma \right] \xi^\sigma + \frac{h}{\kappa} \dot{S}_\sigma{}^{\alpha\rho} \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma, \quad (2.46)$$

$$\dot{\theta}_\sigma{}^\alpha \equiv \frac{1}{\kappa} \dot{S}_\sigma{}^{\alpha\rho} \dot{K}^a{}_{\sigma\rho} - \frac{1}{h} \dot{\mathcal{L}} \delta_\sigma^\alpha, \quad (2.47)$$

где они явно ковариантны как относительно координатных преобразований, так и относительно лоренцевых вращений.

Ток (2.46) сохраняется тождественно, см. (2.16),

$$\partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv 0. \quad (2.48)$$

Точно так же ток тождественно выражается через дивергенцию суперпотенциала

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi). \quad (2.49)$$

Соответствующий суперпотенциал, см. (2.21), равен

$$\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) = -\dot{\mathcal{M}}_\sigma^{\alpha\beta} \xi^\sigma = \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a_{\beta,\alpha}} h^a_{\sigma} \xi^\sigma = \frac{h}{\kappa} \dot{S}_a^{\alpha\beta} h^a_{\sigma} \xi^\sigma. \quad (2.50)$$

Прямое вычисление дает

$$\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) = -\frac{h}{2\kappa} \left(\overset{\circ}{A}^i_{j\mu} - \overset{\bullet}{A}^i_{j\mu} \right) \left[\delta_\sigma^\mu (h_i^\alpha h^{j\beta} - h_i^\beta h^{j\alpha}) - 2h_i^\mu (\delta_\sigma^\alpha h^{j\beta} - \delta_\sigma^\beta h^{j\alpha}) \right] \xi^\sigma. \quad (2.51)$$

Формально этот результат совпадает с (2.36). Однако здесь инерциальная спиновая связность $\overset{\bullet}{A}^i_{j\mu}$ вводится с самого начала, исходя из внутренних соображений построения ковариантногоTEGR [3]. С другой стороны, $\overset{\circ}{A}^i_{j\mu}$ in (2.36) вводится «вручную» на заключительном этапе в качестве дополнительного предположения.

Соотношения (2.48) и (2.49) пока еще являются тождествами, они не несут физического содержания, поскольку до сих пор уравнения поля еще не использовались. После использования уравнений (1.21) ток (2.46) преобразуется в

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = h \left[\overset{\bullet}{\Theta}_\sigma^\alpha + \Theta_\sigma^\alpha \right] \xi^\sigma + \frac{h}{\kappa} \dot{S}_\sigma^{\alpha\rho} \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma. \quad (2.52)$$

После использования уравнений поля тождества (2.48) и (2.49) становятся физически осмысленными дифференциальными законами сохранения:

$$\partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0, \quad (2.53)$$

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi). \quad (2.54)$$

Все величины ковариантны относительно координатных преобразований и инвариантны относительно локальных лоренцевых вращений. Следовательно, интегральные сохраняющиеся величины, которые могут быть построены, имеют те же свойства,

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma dx^3 \dot{\mathcal{J}}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \dot{\mathcal{J}}^{0i}(\xi). \quad (2.55)$$

Таким образом, проблема построения полностью ковариантных законов сохранения, отмеченная при обсуждении (1.33), решена построением (2.53) - (2.55). Отметим, что этот результат получен благодаря не только использованию инерциальной спиновой связности, но и сохранению в выражениях вектора ξ после применения теоремы Нётер.

В отличие от величин P_a (1.33) и P_μ (1.38), $\mathcal{P}(\xi)$ (2.55) является истинно инвариантной величиной как по отношению к диффеоморфизмам, так и по отношению к локальным преобразованиям Лоренца. Однако, заряды Нётер $\mathcal{P}(\xi)$ зависят от векторного поля ξ , которое

изначально не фиксировано и нуждается в определении. Есть много возможных способов определить ξ , но не все имеют физический смысл. В частном случае, когда вектор ξ времениподобен, соответствующий сохраняющийся заряд, ограниченный поверхностью $\partial\Sigma$, представляет собой энергию, измеренную множеством наблюдателей на поверхности $\partial\Sigma$, имеющих собственные вектора ξ

$$E(\xi) = \mathcal{P}(\xi). \quad (2.56)$$

В стандартной метрической формулировке ОТО утверждалось, что физически предпочтительнее выбирать ξ как поля Киллинга пространства-времени [38].

Однако в случае тетрадной теории, как и в случае TEGR, есть дополнительные степени свободы из-за того, что тетрада не определяется полностью уравнениями поля. Это, естественно, дает возможность отождествить ξ с самой тетрадой, что позволяет определить P_a в контексте зарядов Нётер. Чтобы проиллюстрировать это, отождествим времениподобный вектор ξ с времениподобным тетрадным вектором, т.е. $\xi^\mu = -h_0^\mu$, что естественным образом приводит к $E(\xi) = P_0$. Здесь и ниже крышка над цифровым индексом означает, что он является тетрадным. Затем можно обобщить это определение на четыре векторных поля, пронумеровав их индексом (a) : $\xi_{(a)}$, и затем каждое $\xi_{(a)}$ отождествить с соответствующим тетрадным вектором, где индекс a нумерует тетрадные вектора:

$$\mathcal{P}(\xi_{(a)}) = P_a. \quad (2.57)$$

Таким образом, P_a , действительно, представляет интересную с физической точки зрения величину, т.е. это нётеровские заряды для диффеоморфизмов, порожденных самими тетрадными векторами. Можно понимать P_a как полную энергию-импульс всего пространства-времени, измеренную наблюдателями, связанными с тетрадой.

Применяя ту же логику к P_μ (1.38), получаем, что P_μ — это заряды Нётер для $\xi^\mu = dx^\mu$, т.е. для диффеоморфизмов, порожденных смещениями вдоль координатных линий. Физический смысл P_μ довольно неясен, т.к. у координат самих по себе физического смысла нет, и они могут быть произвольными.

Важно прояснить вопрос: есть ли противоречие между новым законом сохранения (2.54) и законом сохранения (1.28) в рамках ковариантного TEGR? Перепишем (2.54) в явном виде:

$$\begin{aligned} & \left[h \dot{S}_a^{\alpha\rho} \left(\overset{\circ}{\nabla}_\sigma h^a_\rho + \dot{A}^a_{b\sigma} h^b_\rho \right) - \kappa \dot{\mathcal{L}} \delta_\sigma^\alpha + \kappa h \Theta_\sigma^\alpha \right] \xi^\sigma + h \dot{S}_a^{\alpha\rho} h^a_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma \\ & = \overset{\circ}{\nabla}_\rho \left(h \dot{S}_a^{\alpha\rho} h^a_\sigma \xi^\sigma \right) = \partial_\rho \left(h \dot{S}_a^{\alpha\rho} \right) h^a_\sigma \xi^\sigma + h \dot{S}_a^{\alpha\rho} \xi^\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho h^a_\sigma + h \dot{S}_a^{\alpha\rho} h^a_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Теперь, исключая слагаемые с $\overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma$, перемещая $h \dot{S}_a^{\alpha\rho} \xi^\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho h^a_\sigma$ в левую часть, производя простые алгебраические операции и сокращая на коэффициент $h^a_\sigma \xi^\sigma$, получаем в точности закон сохранения (1.28). Таким образом, построение (2.54) решает проблемы (1.28), так как после применения теоремы Нётер мы не исключили из рассмотрения вектор смещений ξ . Именно это позволяет строить локальные и глобальные сохраняющиеся величины, ковариантные по отношению к обоим типам преобразований.

2.4 Принцип определения инерциальной спиновой связности

Одна из проблем получения физически приемлемых значений сохраняющихся величин заключается в неоднозначности определения инерциальной спиновой связности в ковариантной формулировке телепараллельной гравитации, с которой мы сталкиваемся в наших расчетах. В ковариантной формулировке и тетрада, и ИСС являются фундаментальными переменными. Уравнения поля определяют тетраду с точностью до локального преобразования Лоренца, однако чисто инерциальная спиновая связность никакими уравнениями поля не определяется. Тем не менее, выбор спиновой связности и локально-лоренцевой степени свободы в тетраде влияет на некоторые физически значимые величины, включая интересующие нас сохраняющиеся заряды.

Идея ковариантной формулировки состоит в том, что ИСС должна выбираться в зависимости от тетрады так, чтобы устранить расходимости соответствующих физических величин. Впервые она была введена в работе [39]. Позже утверждалось, что она должна быть эквивалентна спиновой связности Леви-Чивиты, соответствующей данной тетраде, в случае «выключения» гравитации, для островной системы, например, в пределе $r \rightarrow \infty$ [18; 19; 31; 32]. Затем утверждалось, что основной принцип выбора спиновой связности можно построить таким образом, чтобы телепараллельный лагранжиан асимптотически обращался в нуль [5; 33; 40]. Идею «выключения» гравитации можно сделать менее зависимой от асимптотического поведения. Для этого, тензор кривизны, построенный из спиновой связности Леви-Чивиты, в любом частном случае исследуемого решения приравнивается нулю, а после этого находятся параметры или их связь, дающая этот результат. Использование этих параметров в компонентах Л-ЧСС дает компоненты ИСС. А это и есть «выключение» гравитации во всем пространстве-времени решения. Именно такой (обобщенный) принцип мы сформулировали в статьях [23; 24] и используем в данной работе.

В ковариантном TEGR все тензоры $\dot{T}^a_{\mu\nu}$, $\dot{K}^{\rho\sigma}_a$ и $\dot{S}_a^{\rho\sigma}$, являются ковариантными тензорами как по отношению к преобразованиям координат, так и по отношению к локальным преобразованиям Лоренца, а скаляр кручения \dot{T} является скаляром. Ковариантность относительно локальных лоренцевых преобразований означает, что тензорные величины ковариантно преобразуются при одновременном преобразовании тетрады (1.7) и инерциальной спиновой связности (1.8).

Рассмотрим основные идеи предложенного нами обобщенного принципа «выключения» гравитации. Вполне естественно потребовать, что в случае отсутствия гравитации ток и суперпотенциал должны быть равными нулю. Рассматривая структуру тока (2.52) и суперпотенциала (2.51), можно обнаружить, что они зависят от $\dot{K}^i_{j\mu} = \dot{A}^i_{j\mu} - \dot{A}^i_{j\mu}$ определенном в (1.10), действительно, см. отношения (1.13), (1.14), (1.26) и (2.47). И если положить $\dot{K}^i_{j\mu} = 0$, то из этого будет следовать, что $\dot{T}^{\alpha}_{\beta\mu} = 0$, $\dot{S}^{\beta\mu}_\alpha = 0$, $\dot{\mathcal{L}} = 0$, $\Theta_\sigma^\alpha = 0$, и таким образом, ток и суперпотенциал обращаются в нуль.

Для определения $\dot{A}^i_{j\mu}$ сделаем следующие шаги. Сначала вычислим тензор кривизны

$$\overset{\circ}{R}^i_{j\mu\nu} = \partial_\mu \overset{\circ}{A}^i_{j\nu} - \partial_\nu \overset{\circ}{A}^i_{j\mu} + \overset{\circ}{A}^i_{k\mu} \overset{\circ}{A}^k_{j\nu} - \overset{\circ}{A}^i_{k\nu} \overset{\circ}{A}^k_{j\mu}, \quad (2.59)$$

который в общем случае не равен нулю для конкретного физического решения. В случае «выключения» гравитации $\overset{\circ}{R}^i_{j\mu\nu} \rightarrow 0$. Это условие позволяет определить значения некоторых параметров и/или их соотношения для этого физического решения. Теперь вспомним, что тензор кривизны для $\dot{A}^i_{j\mu}$ равен нулю по определению в ковариантномTEGR, $\overset{\circ}{R}^i_{j\mu\nu} = 0$. И тогда можно сказать, что при «выключении» гравитации $\overset{\circ}{R}^i_{j\mu\nu} \rightarrow \overset{\circ}{R}^i_{j\mu\nu}$. А спиновая связность, из которой тензор Римана построен, становится также телепараллельной, т.е. $\overset{\circ}{A}^i_{j\mu} \rightarrow \dot{A}^i_{j\mu}$ для тех же найденных параметров и/или их соотношений.

Как мы отметили выше, понятие «выключения» гравитации уже использовалось в литературе для определения $\overset{\circ}{A}^i_{j\mu} \rightarrow \dot{A}^i_{j\mu}$. Так, например, в [31] в случае решения Шварцшильда было предложено положить $M = 0$, что эквивалентно $r \rightarrow \infty$, если источник гравитации локализован в пространстве. В более общем случае предлагается «выключать» ньютоновскую постоянную $G \rightarrow 0$ в конкретных решениях, см. например, [41]. Однако это не может работать везде, потому что, например, не обязательно, чтобы вакуумные решения с ненулевой кривизной содержали компоненты с G . Поэтому наш метод «выключать» гравитацию в (2.59), требуя $\overset{\circ}{R}^i_{j\mu\nu} \rightarrow 0$, является универсальным.

2.5 Инерциальная спиновая связность и фоновое пространство-время

Чтобы лучше понять теоретические принципы построения новых сохраняющихся величин в ковариантномTEGR, полезно сравнить их с известными методами в обычном метрическом представлении ОТО.

Кратко повторим способ построения сохраняющихся величин на основе лагранжиана Мёллера. Начнем с лагранжиана Гильберта в форме (1.4), вычтем дивергенцию (1.5) и получим лагранжиан Мёллера (1.6). Он ковариантен по отношению к координатам, но, в отличие от лагранжиана Гильберта, уже не инвариантен по отношению к локальным лоренцевым вращениям. Применяя теорему Нётер к (1.6), получаем Лоренц-нековариантные величины: тензор энергии-импульса (2.31), сохраняющийся ток (2.35) и суперпотенциал (2.34).

Ковариантный лагранжианTEGR (1.13), он же (1.17), строится из лагранжиана Гильберта в виде (1.11) после вычитания дивергенции в (1.12). В отличие от лагранжиана Мёллера (1.6), лагранжианTEGR (1.17) является одновременно Лоренц-инвариантным и координатно-ковариантным. В результате применение теоремы Нётер приводит к построению полностью ковариантных (как по отношению к координатам, так и по отношению к лоренцевым вращениям) величин: тензора энергии-импульса (2.47), сохраняющегося тока (2.52) и суперпотенциала (2.50). Имея в виду только формальные свойства, подчеркнем, что представления лагранжиана Гильберта в (1.4) и в (1.11) эквивалентны. Таким образом, компоненты

инерциальной спиновой связности $\overset{\bullet}{A}_{j\mu}{}^i$ присутствуют как внешняя (вспомогательная) структура в (1.11), поскольку последний после тождественных преобразований переходит в (1.4).

Эта картина вполне аналогична картине в метрической ОТО. Чтобы построить лагранжиан только с первыми производными, Эйнштейн вычел соответствующую дивергенцию. В результате им был получен известный усеченный лагранжиан Эйнштейна [27]. Однако он не является ковариантным по отношению к общим преобразованиям координат. Несмотря на это, он остается инвариантным относительно координатных смещений на постоянные величины. Это позволяет применить теорему Нётер, которая дает хорошо известный комплекс энергии-импульса (псевдотензор Эйнштейна) и суперпотенциал Фрейда, см. главу 1 в книге [17].¹ Обе эти величины не ковариантны, как и усеченный лагранжиан Эйнштейна. Таким образом, на этом уровне аналогия с подходом Мёллера очевидна. Лагранжиан Мёллера (1.6) не инвариантен по отношению к локальным лоренцевым вращениям и приводит к Лоренц-нековариантным сохраняющимся величинам. С другой стороны, усеченный лагранжиан Эйнштейна является координатно-нековариантным и приводит к координатно-нековариантным сохраняющимся величинам.

Для сравнения в метрическом представлении ОТО мы выбираем метод, предложенный Кацем, Бичаком и Линден-Беллом (KBL) в [43], что дает возможность, используя теорему Нётер, построить сохраняющиеся координатно-ковариантные ток и связанный с ним суперпотенциал, которые содержат как ковариантизированный псевдотензор Эйнштейна, так и ковариантизированный суперпотенциал Фрейда. Их основная идея состоит в построении соответствующего биметрического лагранжиана с учетом вспомогательной фоновой метрики $\bar{g}_{\mu\nu}$ и связанных с ней фоновых символов Кристоффеля $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. Лагранжиан Гильберта в метрическом представлении имеет форму:

$$\mathcal{L}_H = -\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\partial_\rho \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\rho\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\sigma\rho} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\sigma\mu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\rho\nu} \right), \quad (2.1)$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu}$ — символы Кристоффеля, соответствующие физической метрике $g_{\mu\nu}$. Фоновые структуры $\bar{g}_{\mu\nu}$ и $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ могут быть включены в лагранжиан (2.1), который тождественно переписывается в явно ковариантном виде

$$\mathcal{L}_H = -\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} g^{\tau\sigma} \left(\bar{\nabla}_\rho \Delta^\rho{}_{\tau\sigma} - \bar{\nabla}_\sigma \Delta^\rho{}_{\tau\rho} + \Delta^\rho{}_{\rho\eta} \Delta^\eta{}_{\tau\sigma} - \Delta^\rho{}_{\sigma\eta} \Delta^\eta{}_{\tau\rho} + \bar{R}_{\tau\sigma} \right). \quad (2.2)$$

Здесь разность

$$\Delta^\rho{}_{\tau\sigma} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\tau\sigma} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\tau\sigma} \quad (2.3)$$

¹Заметим, что если применить теорему Нётер, используя инвариантность только относительно постоянных смещений координат, то даже ковариантный метрический лагранжиан, такой как лагранжиан Гильберта $\mathcal{L}_H \sim \overset{\circ}{R}$, приводит, так или иначе, к псевдотензорам (не тензорам) и к нековариантным суперпотенциалам, вроде метрического суперпотенциала Мёллера, подробнее см. главу 1 книги [17]. Недавно в [42] изучались и сравнивались теории $f(R)$ и $f(T)$. Оба лагранжиана ковариантны по координатам и по лоренцевым вращениям, но применялась теорема Нётер с использованием инвариантности только относительно постоянных смещений координат. В результате авторы получили только сохраняющиеся псевдотензоры, а не тензоры.

— тензор третьего ранга, а $\bar{\nabla}_\rho$ — ковариантная производная, построенная с помощью $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. Чтобы получить ковариантный лагранжиан KBL, нужно вычесть из лагранжиана Гильберта (2.2) соответствующую дивергенцию и фоновый лагранжиан Гильберта. Таким образом,

$$\mathcal{L}_{KBL} = \mathcal{L}_H - \bar{\mathcal{L}}_H - \partial_\alpha \hat{k}^\alpha; \quad \hat{k}^\alpha = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (g^{\alpha\nu} \Delta^\mu_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \Delta^\alpha_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

После этого получается лагранжиан KBL (2.4) в явно ковариантном виде:

$$\mathcal{L}_{KBL} = -\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-gg^{\tau\sigma}} (\Delta^\rho_{\rho\eta} \Delta^\eta_{\tau\sigma} - \Delta^\rho_{\sigma\eta} \Delta^\eta_{\tau\rho}) - \frac{1}{2\kappa} (\sqrt{-gg^{\tau\sigma}} - \sqrt{-\bar{g}\bar{g}^{\tau\sigma}}) \bar{R}_{\tau\sigma}. \quad (2.5)$$

Теперь мы можем сравнить предложенный здесь метод построения новых сохраняющихся величин в ковариантномTEGR и метод KBL в метрическом представлении ОТО.

Аналоги:

1: оба метода основаны на лагранжиане Гильберта без дополнительных структур. ДляTEGR он берется в тетрадной форме (1.4) а для метрической ОТО - метрической форме (2.1).

2: в ковариантномTEGR определяется координатно- и Лоренц-ковариантный тензор искривления в (1.10) как разность спиновых связностей; в метрической ОТО определяется тензор 3-го ранга в (2.3) как разность символов Кристоффеля.

3: в ковариантномTEGR используется лагранжиан Гильберта в явно Лоренц-инвариантной форме (1.11) с введением внешней инерциальной спиновой связности $\dot{A}^i_{j\mu}$; в метрической ОТО используется лагранжиан Гильберта в явно координатно-ковариантной форме (2.2) с введением внешних структур фонового пространства-времени, $\bar{g}_{\mu\nu}$ и $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$.

4: в ковариантномTEGR выводится Лоренц-инвариантный лагранжиан зависящий только от первых производных (1.13); в метрической ОТО выводится координатно-ковариантный лагранжиан KBL (2.5) зависящий только от первых производных.

5: в ковариантномTEGR лагранжиан (1.13) приводит к построению Лоренц-ковариантных сохраняющихся величин, в отличие от лагранжиана Мёллера; в метрической ОТО лагранжиан KBL (2.5) приводит к построению координатно-ковариантных сохраняющихся величин, в отличие от усеченного лагранжиана Эйнштейна.

6: в методе KBL фоновое пространство-время обычно выбирается в соответствии с конкретной рассматриваемой задачей; в ковариантномTEGR для выбора $\dot{A}^i_{j\mu}$ необходимо следовать, например, принципу, изложенному в предыдущем пункте, который также связан с рассматриваемым решением.

Различия:

Первое замечание формальное. Лагранжиан KBL (2.5) включает дополнительный член $\bar{\mathcal{L}}_H$ по отношению к ковариантному лагранжиануTEGR (1.13). Это связано с тем, что метод KBL позволяет выбрать произвольный искривленный фон, включая невакуумное пространство-время с ненулевой кривизной, определяемой $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$; тогда как в ковариантномTEGR тензор Римана, построенный по $\dot{A}^i_{j\mu}$, должен быть равен нулю всегда.

Второе - в методе KBL фоновое пространство-время можно выбирать действительно «вручную», поскольку в математическом формализме нет ограничений на такой выбор. С другой стороны, в ковариантномTEGR при выборе $\dot{A}^i_{j\mu}$ мы все равно опираемся на рассматриваемое решение.

2.6 Обсуждение и итоги Главы

Основным математическим аппаратом в наших исследованиях является теорема Нётер. Конечно, она уже использовалась в телепараллельной гравитации. Так, в [44; 45] с использованием инвариантности относительно действия конкретных групп подход Нётер был применен для нахождения аналитических космологических решений в расширенных телепараллельных теориях гравитации и для ограничения возможных вариантов лагранжианов. Однако при этом отсутствуют приложения для построения сохраняющихся величин. В [46] использовалась инвариантность лагранжиана относительно диффеоморфизмов, однако окончательные результаты были представлены в простейших выражениях типа (1.28) со своими проблемами. В [42] изучаются теории $f(R)$ и $f(T)$, но метод Нётер использует инвариантность только относительно преобразований, представляющих постоянные смещения по координатам. Тогда получаются только сохраняющиеся псевдотензоры, а не тензоры. В отличие от приведенного выше, мы даем хорошо структурированные выражения для сохраняющихся величин с ясной стандартной интерпретацией.

Перечислим наши основные результаты, представленные в настоящей Главе:

- 1) В рамках ковариантногоTEGR с применением теоремы Нетер в удобной тензорной форме построены законы сохранения (2.53) и (2.54) с сохраняющимся током (2.52), содержащим тензор энергии-импульса гравитации (2.47), и суперпотенциалом (2.50). Все эти величины ковариантны относительно преобразований координат и инвариантны относительно локальных лоренцевых вращений.
- 2) Локальные сохраняющиеся величины дают возможность получить хорошо определенные сохраняющиеся заряды (2.55).
- 3) В разделе 2.4, анализируя структуру сохраняющихся величин, мы вводим принцип определения инерциальной спиновой связности - принцип «выключения гравитации» с помощью зануления тензора Римана.
- 4) Обсуждая философию построения сохраняющихся величин в ковариантномTEGR, мы сравниваем ее с построением ковариантизованных псевдотензора Эйнштейна и суперпотенциала Фрейда, построенных в [43]. Выделяем много аналогичных свойств и некоторые различия.

Глава 3. Плотность тока: энергия и импульс, измеренные свободно падающим наблюдателем в простейших случаях

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [23; 24], выполненные автором диссертации совместно с коллегами, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

3.1 Предварительные замечания

Здесь мы вычисляем плотности сохраняющихся величин, измеренных свободно падающим наблюдателем во вселенной Фридмана (FLRW) и в пространстве (анти-)де Ситтера ((A)dS). Для этого нам нужно найти компоненты нётеровского тока $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$, определенного в (2.52), с собственным вектором свободно падающего наблюдателя ξ . Чтобы лучше понять, какие величины будут рассчитываться, обратимся к специальной теории относительности. Рассмотрим элемент метрики пространства Минковского в виде:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (3.1)$$

Пусть наблюдатель покоится в системе (3.1) с собственным вектором $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$; и пусть введен симметричный тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ для вещества, распределенного в пространстве Минковского. После этого определим сохраняющийся ток $\mathcal{I}^\alpha = T^\alpha{}_\beta \xi^\beta$. Тогда \mathcal{I}^0 можно интерпретировать как плотность энергии, измеряемую наблюдателем. В этом простейшем случае \mathcal{I}^i , где $i = 1, 2, 3$, можно интерпретировать как компоненты плотности импульса. При произвольных преобразованиях координат компоненты тока \mathcal{I}^α преобразуются как компоненты вектора в соответствии с законом преобразования тензоров. В случае $\mathcal{I}^\alpha = 0$ можно сделать вывод об отсутствии плотностей сохраняющихся величин, таких как энергия и импульс, измеряемых наблюдателем. Обратимся к TEGR. Мы также имеем сохраняющийся ток, см. (2.53), точно также как в специальной теории относительности. Следуя этой аналогии будем интерпретировать его компоненты также, как и в специальной теории относительности, если вектор ξ является собственным вектором наблюдателя. Важно отметить, что с использованием закона сохранения (2.54)

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \partial_\beta \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (3.2)$$

можно вычислить (или перепроверить) компоненты тока, через дивергенцию суперпотенциала $\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi)$, определенного в (2.50).

3.2 Вселенная Фрийдмана

Возьмем метрику FLRW в виде:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (3.3)$$

где $k = +1$ для пространства положительной кривизны, $k = 0$ для плоского пространства и $k = -1$ для пространства отрицательной кривизны. Тогда, в соответствии с (1.1), можно взять наиболее удобную для вычислений диагональную тетраду

$$h^a{}_{\mu} = \text{diag} (1, a/\chi, ar, ar \sin \theta) . \quad (3.4)$$

Здесь и далее мы обозначаем $\chi = \sqrt{1 - kr^2}$. Для определенности мы выбрали положительный знак χ . По формуле (1.3) мы вычисляем компоненты Л-ЧСС для (3.3) и (3.4):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{1}} &= \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{1}} = \dot{a}/\chi, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{2}\hat{2}} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{0}\hat{2}} = \dot{a}r, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{0}\hat{3}} = \dot{a}r \sin \theta, \\ \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{2}} &= -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} = -\chi, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = -\chi \sin \theta, \\ \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}\hat{3}} &= -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Чтобы рассчитать ИСС, нам снова нужно решить уравнение $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta} = 0$. Для рассматриваемой системы более подходит эквивалентное уравнение $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{bcd} = \overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta} h_c{}^\gamma h_d{}^\delta = 0$. Для всех неравных нулю тождественно компонентом тензора Римана $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{bcd}$ получились следующие уравнения, которые используются для «выключения» гравитации:

$$R^{\hat{0}}{}_{\hat{i}\hat{0}i} = -R^{\hat{0}}{}_{\hat{i}\hat{0}} = R^i{}_{\hat{0}\hat{0}i} = -R^i{}_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{\ddot{a}}{a} = 0, \quad R^i{}_{\hat{j}\hat{j}i} = -R^i{}_{\hat{j}\hat{j}} = \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} = 0 \quad (3.6)$$

где $i, j = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$. То есть оказалось всего два уравнения: $\dot{a}^2 + k = 0$ и $\ddot{a} = 0$. Поскольку все решения первого уравнения удовлетворяют второму уравнению, то только

$$\dot{a}^2 + k = 0 \quad (3.7)$$

является здесь важным. Интересно отметить, что преобразуя «вакуумное» уравнение Фрийдмана

$$H^2 = \rho_{curv} \quad \text{or} \quad \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{k}{a^2}, \quad (3.8)$$

также получаем (3.7). Другими словами, «выключение» гравитации приводит к вакуумному решению. При $k = 0$ это пространство Минковского $a(t) = \text{const}$; при $k = -1$ это решение Милна $a(t) = \pm t$; а при $k = +1$ действительных вакуумных решений нет, есть только комплексные $a(t) = \pm it$.

Возьмем решение уравнения (3.7) (вакуумное решение) в объединенной форме $a(t) = \sqrt{-kt}$ для всех трех знаков кривизны и подставим его в выражение для Л-ЧСС (3.5). Получем ненулевые компоненты ИСС:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{1}} &= \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{1}} = \sqrt{-k}/\chi, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{2}\hat{2}} = \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{0}\hat{2}} = \sqrt{-kr}, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{0}\hat{3}} = \sqrt{-kr} \sin \theta, \\ \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{2}} &= -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} = -\chi, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = -\chi \sin \theta, \\ \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}\hat{3}} &= -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для каждого из знаков кривизны можно положить $\sqrt{-k} = 0; \pm 1; \pm i$. Таким образом, компоненты (3.9) становятся комплексными величинами¹ при $k = +1$;

Для рассматриваемой системы будет экономичнее представить компоненты тензора искривления в тетрадных индексах \dot{K}^a_{bc} :

$$\dot{K}^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{1}} = \dot{K}^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{1}} = \dot{K}^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{2}} = \dot{K}^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{2}} = \dot{K}^{\hat{0}}_{\hat{3}\hat{3}} = \dot{K}^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{3}} = -H + \sqrt{-k}/a. \quad (3.10)$$

Координатные компоненты тензоров кручения $\dot{T}^\alpha_{\beta\mu}$ и суперпотенциала $\dot{S}^\alpha{}^{\beta\mu}$ соответственно равны:

$$\dot{T}^1{}_{10} = -\dot{T}^1{}_{01} = \dot{T}^2{}_{20} = -\dot{T}^2{}_{02} = \dot{T}^3{}_{30} = -\dot{T}^3{}_{03} = -H + \sqrt{-k}/a, \quad (3.11)$$

$$\dot{S}^1{}_{10} = -\dot{S}^1{}_{01} = \dot{S}^2{}_{20} = -\dot{S}^2{}_{02} = \dot{S}^3{}_{30} = -\dot{S}^3{}_{03} = -2(H - \sqrt{-k}/a). \quad (3.12)$$

Наконец, рассмотрим наблюдателя, покоящегося относительно его сопутствующих координат (t, r, θ, φ) в (3.3). Тогда компоненты его собственного вектора равны

$$\xi^\sigma = (-1, 0, 0, 0). \quad (3.13)$$

Теперь мы можем рассчитать компоненты тока (2.52):

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = h \left(\dot{\Theta}_\sigma{}^\alpha + \Theta_\sigma{}^\alpha \right) \xi^\sigma + h\kappa^{-1} \dot{S}^a{}^{\alpha\rho} h^a{}_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma. \quad (3.14)$$

С вектором (3.13) нам нужно посчитать только компоненты тензора энергии-импульса $\dot{\Theta}_0^\alpha$ и Θ_0^α . Среди них только 00-компоненты ненулевые. Таким образом, по (2.47) имеем $\dot{\Theta}_0^0 = -3\kappa^{-1}(H - \sqrt{-k}/a)^2$. Принимая 00-компоненту уравнений Фридмана как в [27], имеем $\Theta_0^0 = -3\kappa^{-1}(H^2 + k/a^2)$. Кроме того, только 0-компонента последнего члена в (3.14) не равна нулю. Учитывая (3.3), (3.12) и (3.13), получаем:

$$\dot{S}^a{}^{0\rho} h^a{}_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma = -6H(H - \sqrt{-k}/a), \quad (3.15)$$

и наконец мы получили

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = (0, 0, 0, 0). \quad (3.16)$$

Этот результат подтверждается прямым вычислением правой части (3.2). Учитывая (3.4), (3.12) и (3.13), находим $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \kappa^{-1} \partial_\beta (h \dot{S}^a{}^{\alpha\beta} h^a{}_\sigma \xi^\sigma) = 0$. Этот результат очевиден, если посмотреть на (3.12), где отсутствуют компоненты с нижним индексом 0. Результат (3.16) означает, что свободно падающий наблюдатель с собственным вектором (3.13) не измеряет плотности энергии и импульса.

Чтобы перейти к калибровке Вайценбока, нужно применить Лоренцево вращение

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} \chi & -\sqrt{-kr} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-kr} \sin \theta \cos \varphi & \chi \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sqrt{-kr} \sin \theta \sin \varphi & \chi \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sqrt{-kr} \cos \theta & \chi \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

¹В конце раздела обсуждаются возможности использования комплексных компонент спиновой связности.

одновременно и к тетраде (3.4) в соответствии с (1.7), и ИСС (3.9) в соответствии с (1.8). Такое преобразование полностью зануляет ИСС. А тетрада (3.4) преобразуется в собственную тетраду:

$$h^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \chi & -\sqrt{-kra(t)}/\chi & 0 & 0 \\ -\sqrt{-kr} \sin \theta \cos \varphi & a(t) \sin \theta \cos \varphi & ra(t) \cos \theta \cos \varphi & -ra(t) \sin \theta \sin \varphi \\ -\sqrt{-kr} \sin \theta \sin \varphi & a(t) \sin \theta \sin \varphi & ra(t) \cos \theta \sin \varphi & ra(t) \sin \theta \cos \varphi \\ -\sqrt{-kr} \cos \theta & a(t) \cos \theta & -ra(t) \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Заметим, что вращение Лоренца (3.17) может быть представлено действием двух матриц $\Lambda = \Lambda_{rot} \Lambda_{boost}$, где Λ_{rot} представляет собой вращение в трехмерном пространстве:

$$(\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

а Λ_{boost} представляет собой радиальный буст:

$$(\Lambda_{boost})^a{}_b = \begin{pmatrix} \chi & -\sqrt{-kr} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-kr} & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Без сомнения, мы могли бы провести все приведенные выше вычисления в калибровке Вайценбока и в итоге получить тот же результат (3.16). Это связано с тем, что все тензоры, записанные в пространственно-временных индексах, инвариантны относительно лоренцевых вращений; в выражении для тока свернуты все тетрадные индексы, так что снова получаем, что свободно падающий наблюдатель измеряет нулевые плотности энергетических характеристик.

3.3 Пространство (анти-)де Ситтера

Теперь рассмотрим решение (A)dS с метрикой:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.21)$$

Связанная с этой метрикой диагональная тетрада, с которой удобно работать, имеет вид

$$h^a{}_{\mu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

По (1.3), мы вычисляем для метрики (3.21) и тетрады (3.22) компоненты Л-ЧСС, имеющей следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}0} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}0} &= -\frac{1}{3}\Lambda r; \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = -\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}; \\ \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} &= -\sin\theta \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}; \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos\theta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тензор Римана для пространства (A)dS считается как обычно $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta} = \Lambda (h^a{}_{\gamma}h_{b\delta} - h^a{}_{\delta}h_{b\gamma})$. И снова для расчета ИСС нужно решить уравнение $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta} = 0$ но для параметра Λ . Решением является $\Lambda = 0$. Подставляя $\Lambda = 0$ в (3.23), получаем ненулевые компоненты ИСС:

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = -1; \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -\sin\theta; \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos\theta \quad (3.24)$$

Компоненты (3.23) и (3.24) записаны в смешанных индексах $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}$ и $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ как обычно. Но компоненты тензоров $\overset{\bullet}{K}{}^a{}_{bc}$, $\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{bc}$ и $\overset{\bullet}{S}{}^a{}_{bc}$ мы запишем в тетрадных индексах потому, что эта запись имеет здесь наиболее экономичный вид. Итак:

$$\overset{\bullet}{K}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}0} = \overset{\bullet}{K}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}0} = \frac{\frac{1}{3}\Lambda r}{\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}}; \quad \overset{\bullet}{K}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\bullet}{K}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = \overset{\bullet}{K}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{K}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2} - 1}{r}, \quad (3.25)$$

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{0}1} = -\overset{\bullet}{T}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}0} = \frac{\frac{1}{3}\Lambda r}{\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}}; \quad \overset{\bullet}{T}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = \overset{\bullet}{T}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -\overset{\bullet}{T}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{3}1} = -\overset{\bullet}{T}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{2}1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2} - 1}{r}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{0}1} &= -\overset{\bullet}{S}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}0} = -\frac{2}{r} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}; \\ \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{2}1} &= -\overset{\bullet}{S}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -\overset{\bullet}{S}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{3}1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1/2} - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Теперь запишем компоненты собственного вектора свободно падающего наблюдателя для (3.21) в самом общем виде:

$$\xi^\alpha = \left[-C \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}, -\left(C^2 - 1 + \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}, 0, 0 \right] \quad (3.28)$$

где C — константа интегрирования системы уравнений геодезических, которая является произвольной действительной величиной. Вычисляя компоненты тока $\overset{\bullet}{J}{}^\alpha(\xi)$ и повторяя все шаги как в случае FLRW, получаем, что 0-компонента тока (3.14) равна

$$\overset{\bullet}{J}{}^0(\xi) = \frac{2}{\kappa r^2} h C \left(\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-3/2} - 1 \right), \quad (3.29)$$

тогда как другие компоненты нулевые, $\overset{\bullet}{J}{}^i(\xi) = 0$. Этот результат подтверждается прямым вычислением правой части (3.2). Среди всех свободно падающих наблюдателей, определяемых (3.28), можно выделить одного, покоящегося относительно хаббловского потока, связанного с максимально симметричным (A)dS-пространством. Напомним, что хаббловский поток имеет нулевую скорость в начале координат, $r = 0$. Далее, поместив наблюдателя в точку $r = 0$ и выбрав $C = 1$ в (3.28), получим для его собственного вектора $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$, что совпадает с (3.13). Во-первых, это означает, что такой наблюдатель «заморожен» в хаббловском потоке, поскольку он покоится в начале координат, во-вторых, составляющая тока

(3.29) становится равной нулю, т.е. $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0$. Все это означает, что интерпретация плотностей сохраняющихся величин для такого наблюдателя должна быть такой же, как и для покоящегося наблюдателя по отношению к хаббловскому потоку в случае FLRW, см. обсуждение в следующем подразделе.

Завершая подраздел, перейдем к калибровке Вайценбока. После применения лоренцева вращения (3.19) и к тетраде, и к ИСС, все компоненты (3.24) зануляются, а собственная тетрада имеет вид

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin\theta \cos\varphi}{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2}} & r \cos\theta \cos\varphi & -r \sin\theta \sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\theta \sin\varphi}{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2}} & r \cos\theta \sin\varphi & r \sin\theta \cos\varphi \\ 0 & \frac{\cos\theta}{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2}} & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Поскольку компоненты тока $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ инвариантны относительно произвольных локальных лоренцевых вращений, они остаются такими же для собственной тетрады (3.30), то есть $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0$.

3.4 Обсуждение и итоги Главы

Обсуждая сохраняющийся ток $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$, определенный в (3.14) для свободно падающих наблюдателей, мы ограничились наблюдателями, «вмороженными» в хаббловский поток как во вселенных Фридмана, так и в A(dS) пространстве. Мы нашли, что в обоих случаях все его компоненты равны нулю: $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0$. Это означает, что такие наблюдатели не измеряют плотности энергии и импульса - они нулевые в их собственных системах отсчета. Это вполне естественно, поскольку наблюдатели действительно застыли в хаббловском потоке. Поскольку наш формализм ковариантен, компоненты тока $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ для таких свободно падающих наблюдателей в произвольных координатах продолжают обращаться в нуль. Эти результаты находятся, таким образом, в соответствии со слабым принципом эквивалентности, а это означает, что наши определения сохраняющихся токов и связанных с ними суперпотенциалов в TEGR являются состоятельными в теоретических приложениях.

Конструктивно и поучительно сравнить наши результаты с результатами, полученными в [47] для случая FLRW. Авторы ищут обладающие наиболее популярными симметриями решения для хороших тетрад, согласующиеся с полевыми уравнениями $f(T)$ -теорий. Кроме того, они находят соответствующие инерциальные спиновые связности для диагональных тетрад. Для определенности отметим, что в [47] рассматривается та же метрика (3.3) и та же диагональная тетрада (3.4).

В нашем исследовании инерциальная спиновая связность (3.9) и собственная тетрада (3.18) объединяют все три знака кривизны. В случае пространственно плоской Вселенной, $k = 0$, мы отмечаем, что компоненты нашей инерциальной спиновой связности (3.9), относящиеся к диагональной тетраде и компоненты нашей собственной тетрады (3.18), такие же, как и в [47]. Для случая $k = +1$ они становятся комплексными, и такого решения в [47] не приведено. Для случая $k = -1$, (3.9) и (3.18) вещественны и точно совпадают с вещественным решением для $k = -1$ в [47]. Таким образом, мы дополняем [47].

С другой стороны, авторы [47] представляют решения, которые мы не можем дать. Здесь мы выводим компоненты ИСС, относящейся только к диагональной тетраде. В объединенном виде они имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} &= -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} = -\chi, & \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} &= -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = -\chi \sin \theta, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}3} &= -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}3} = \sqrt{kr} \sin \theta, & \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}1} &= -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}1} = \sqrt{k}/\chi, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}2} &= -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}2} = -\sqrt{kr}, & \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} &= -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Оказывается, вычисление компонент тока (3.14) для диагональной тетрады (3.4), спиновой связности ОТО (3.5), собственного вектора (3.13), но с инерциальной спиновой связностью (3.31) вместо (3.9), снова дает $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0$.

Тогда имеем 4 допустимых варианта инерциальной спиновой связности, (3.9) и (3.31), объединяющих случаи $k = +1$ и $k = -1$, которые дают желаемый результат $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0$. Среди них две комплексные. В [47] смысл комплексной спиновой связности (или комплексной собственной тетрады) не обсуждался. Мы пытаемся сделать это сейчас в свете определения сохраняющихся величин в TEGR. Мы уже отмечали, что инерциальная спиновая связность играет вспомогательную роль в ковариантном TEGR. Действительно, в уравнениях поля ее нет. Основное требование к инерциальной спиновой связности состоит в том, что тензор Римана от нее должен быть равен нулю, это основное требование телепараллельного подхода. Таким образом, поскольку комплексные варианты связностей (3.9) и (3.31) имеют нулевую кривизну, их можно использовать для вычисления сохраняющихся величин в TEGR вместе с действительной диагональной тетрадой. С другой стороны, в любом случае можно выбрать действительные варианты спиновых связностей из (3.9) и (3.31) для случаев $k = -1$ и $k = +1$ соответственно.

Наконец, заметим, что формализм, развитый в [47], не позволяет определить собственную тетраду (и инерциальную спиновую связность, связанную с диагональной тетрадой) для пространства (A)dS, тогда как мы определяем их здесь в виде (3.30) и (3.24).

Повторимся, в нашем подходе от выбора вектора ξ зависит интерпретация сохраняющихся величин. отождествляя его с собственным вектором наблюдателя, или векторами Киллинга, мы придаем ему смысл внешней структуры. Этот классический подход принципиально отличается от многих других, используемых в работах по телепараллельной гравитации, где авторы отождествляют наблюдателя с времениподобным тетрадным вектором, см., например, [31; 48; 49] и ссылки там. Формально это выглядит допустимо, однако есть принципиальные проблемы. Действительно, наблюдателя следует рассматривать как *внешний объект*, созданный для наблюдения за физической или геометрической моделью.

В отличие от этой точки зрения, любые компоненты тетрадного вектора, являясь динамическими переменными, представляют внутреннюю структуру в TEGR, а не внешнюю.

В последнее время большое внимание уделяется расширенным теориям телепараллельной гравитации. Наиболее популярны $f(T)$ теории, см. работы [10; 41; 47; 50–54] и ссылки в них. Наш принцип определения собственной тетрады (определение $\overset{\bullet}{A}{}^i{}_{j\mu}$ как $\overset{\circ}{A}{}^i{}_{j\mu}$ с выключенной гравитацией) основан на определении сохраняющихся величин в ковариантной версии TEGR. Ввести такой принцип на уровне уравнений поля невозможно, так как их антисимметричная часть тождественно равна нулю. Другая ситуация в $f(T)$ -теориях, когда роль $\overset{\bullet}{A}{}^i{}_{j\mu}$ становится решающей именно в полевых уравнениях. Инерциальная спиновая связность, $\overset{\bullet}{A}{}^i{}_{j\mu}$ определяется уравнениями поля, а именно, антисимметричной частью уравнений поля. Оказывается, все модифицированные телепараллельные теории с уравнениями поля второго порядка обладают одним и тем же свойством, см. [15].

Задача определения хорошей тетрады или инерциальной спиновой связности в $f(T)$ -гравитации сложна, она не была решена в общем виде. В [47; 54] предлагается исследовать задачу на основе соображений симметрии. Авторы демонстрируют метод на примере аксиально- и сферически-симметричного пространства-времени, вселенных Фридмана и пространства A(dS). Сравнивая наши результаты с результатами в [47], отметим, что в случае вселенных Фридмана они дополняют друг друга, а в случае пространства (A)dS мы имеем возможность определить собственную тетраду, тогда как авторы [47] показывают невозможность определения хорошей тетрады в этом случае. Сходства в найденной спиновой связности во вселенной Фридмана для TEGR и для расширенных теорий, казалось бы, указывают на идентичность поиска собственной тетрады в TEGR и хорошей тетрады в расширенных телепараллельных теориях. Отсюда возникает вопрос о применимости метода «выключения» гравитации для «угадывания» спиновой связности, удовлетворяющей уравнениям поля в расширенных теориях. Ниже мы покажем, что методы построения спиновой связности в TEGR неприменимы в $f(T)$ -гравитации.

В этой главе, чтобы показать, что наши теоретические результаты полезны и эффективны, мы рассчитали плотности энергии и импульса для свободно падающих наблюдателей во вселенной FLRW и пространстве (A)dS и получили нулевые величины во всех случаях, что вполне приемлемо, поскольку мы рассматриваем наблюдателей, покоящихся относительно хаббловского потока.

Глава 4. Решение Шварцшильда вTEGR

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [55; 56], выполненные автором диссертации совместно с коллегами, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

4.1 Масса черной дыры и статическая калибровка Шварцшильда

Метрика черной дыры Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

где

$$f = f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (4.2)$$

Для тетрады выберем наиболее удобную диагональную форму:

$$h^a{}_{\mu} \equiv \text{diag}\left(f^{\frac{1}{2}}, f^{-\frac{1}{2}}, r, r \sin \theta\right). \quad (4.3)$$

Ниже будет объяснено значение индекса B и аналогичных над компонентами тетрады. Нетрудно догадаться, что здесь расчеты должны быть аналогичны расчетам для решения (A)dS, но с заменой $\frac{1}{3}\Lambda r^2$ на $\frac{2M}{r}$, см. (3.21) и (3.22). Л-ЧСС, рассчитанная для тетрады (4.3) по формуле (1.3), имеет ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}0} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}0} &= \frac{M}{r^2}, & \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} &= -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = -f^{\frac{1}{2}}, \\ \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} &= -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -f^{\frac{1}{2}} \sin \theta, & \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} &= -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Как и ранее, индексы с «крышечкой» обозначают компоненты тетрады, а индексы без «крышечки» - координатные. Все компоненты римановой кривизны пропорциональны M , поэтому «выключение» гравитации осуществляется при $M \rightarrow 0$. Л-ЧСС (4.4) с нулевой массой M определяет для тетрады (4.3) ИСС $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{c\mu}$, которая имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = -1, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -\sin \theta, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos \theta. \quad (4.5)$$

Получились те же самые компоненты инерциальной спиновой связности, что и для вселенной Фридмана (3.9) при $k = 0$ и (анти-)де Ситтера (3.24). Используя (1.26), мы находим компоненты суперпотенциала, ненулевые из которых равны

$$\overset{\bullet}{S}{}_{0^{01}} = -\overset{\bullet}{S}{}_{0^{10}} = +\frac{2}{r} \left(f - f^{\frac{1}{2}}\right), \quad \overset{\bullet}{S}{}_{2^{12}} = \overset{\bullet}{S}{}_{3^{13}} = -\overset{\bullet}{S}{}_{2^{21}} = -\overset{\bullet}{S}{}_{3^{31}} = -\frac{1}{r} \left((1+f)/2 - f^{\frac{1}{2}}\right). \quad (4.6)$$

В пределе $r \rightarrow \infty$ единственными ненулевыми компонентами соответствующей плотности суперпотенциала являются

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h \dot{S}_0^{01} = - \lim_{r \rightarrow \infty} h \dot{S}_0^{10} = -2M \sin \theta. \quad (4.7)$$

Затем, выбрав вектор ξ как времениподобный вектор Киллинга

$$\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0), \quad (4.8)$$

и, используя выражения (2.50) и (2.55), находим заряд Нётер равным M

$$\mathcal{P}(\xi) = M. \quad (4.9)$$

Применяя одновременно преобразование Лоренца (3.19) к диагональной тетраде (4.3) и ИСС (4.5), получаем преобразованную тетраду

$$h^A_\mu \equiv \begin{bmatrix} f^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & f^{-\frac{1}{2}} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

и нулевую ИСС. Такая тетрада называется *собственной* тетрадой, см. [31]. Здесь индексом A мы обозначили собственную тетраду, полученную в этом простом статическом случае.

Статическая диагональная тетрада (4.3), соответствующая метрике Шварцшильда (4.1), находится в паре с соответствующей ИСС (4.5), получаемой по принципу «выключения» гравитации. Мы определяем эту пару как *статическую калибровку Шварцшильда*. Более того, в силу полной инвариантности развитого нами формализма любую пару из тетрады и соответствующей ИСС, полученную из (4.3) и (4.5) произвольными преобразованиями координат и/или произвольными локальными лоренцевыми вращениями тетрады (1.7) и спиновой связности (1.8), также будем относить к статической калибровке. Таким образом, пара из тетрады (4.10) и нулевой ИСС также представляют статическую калибровку для решения Шварцшильда.

4.2 Свободно падающий наблюдатель и калибровка Леметра

В настоящем разделе мы изучаем энергетические характеристики, измеряемые в системе отсчета свободно падающего по радиусу наблюдателя в черную дыру Шварцшильда. Естественно и целесообразно начать исследование в собственных координатах свободно падающих наблюдателей. Наиболее известная и популярная - это система координат Леметра [27].

После преобразования от статических координат Шварцшильда (t, r, θ, φ) к свободно падающим координатам Леметра $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} d\rho &= dt + \frac{dr}{f\sqrt{1-f}}, \\ d\tau &= dt + \frac{dr}{f}\sqrt{1-f}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $f(r)$ определено в (4.2), метрика Шварцшильда (4.1) преобразуется в

$$ds^2 = -d\tau^2 + (1 - f)d\rho^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.2)$$

где

$$r = r(\tau, \rho) = \left[\frac{3}{2}(\rho - \tau) \right]^{2/3} (2M)^{1/3}.$$

Теперь будет удобно выбрать диагональную тетраду, связанную с метрикой (4.2):

$$h^a_{\mu} = \text{diag} \left(1, \sqrt{1 - f(r(\tau, \rho))}, r(\tau, \rho), r(\tau, \rho) \sin \theta \right). \quad (4.3)$$

Выпишем ненулевые компоненты спиновой Л-ЧСС $\overset{\circ}{A}{}^a_{b\mu}$, определенной в (1.3) и связанной с метрикой (4.2) и тетрадой (4.3):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{1}} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{1}} &= \frac{1}{3(\rho - \tau)} \left(\frac{\frac{4}{3}M}{\rho - \tau} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{2}} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{2}} = - \left(\frac{\frac{4}{3}M}{\rho - \tau} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}_{\hat{3}\hat{3}} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{3}} = - \left(\frac{\frac{4}{3}M}{\rho - \tau} \right)^{\frac{1}{3}} \sin \theta, \\ \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}_{\hat{2}\hat{2}} = - \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}_{\hat{1}\hat{2}} &= -1, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}_{\hat{3}\hat{3}} = - \overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}_{\hat{1}\hat{3}} = -\sin \theta, \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}_{\hat{3}\hat{3}} = - \overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}_{\hat{2}\hat{3}} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Все компоненты тензора Римана $\overset{\circ}{R}{}^a_{b\mu\nu}$, вычисленные для (4.2), пропорциональны M и, следовательно, обращаются в нуль в пределе $M \rightarrow 0$. Тогда ИСС $\overset{\bullet}{A}{}^a_{b\mu}$ оказывается результатом предела $M \rightarrow 0$ для Л-ЧСС Леметра (4.2), т.е.

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}_{\hat{2}\hat{2}} = - \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}_{\hat{1}\hat{2}} = -1, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}_{\hat{3}\hat{3}} = - \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}_{\hat{1}\hat{3}} = -\sin \theta, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}_{\hat{3}\hat{3}} = - \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}_{\hat{2}\hat{3}} = -\cos \theta. \quad (4.5)$$

Затем мы вычисляем суперпотенциал $\overset{\bullet}{S}{}^{\alpha\mu\nu} = \overset{\bullet}{S}{}^a{}^{\mu\nu} h^a_{\alpha}$, определяемый по (1.26) для пары из тетрады (4.3) и инерциальной спиновой связности (4.5). Его ненулевые компоненты равны

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{0}\hat{1}} &= - \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{1}\hat{0}} = -\frac{4M}{r^2}, \quad \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{1}\hat{0}\hat{1}} = - \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{1}\hat{1}\hat{0}} = -\frac{2}{r} \sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{1}{1-2M/r}, \\ \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{2}\hat{0}\hat{2}} &= \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{3}\hat{0}\hat{3}} = - \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{2}\hat{2}\hat{0}} = - \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{3}\hat{3}\hat{0}} = -\frac{1}{2r} \sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{1}{1-2M/r}, \\ \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{2}\hat{1}\hat{2}} &= \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{3}\hat{1}\hat{3}} = - \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{2}\hat{2}\hat{1}} = - \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{3}\hat{3}\hat{1}} = +\frac{M}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теперь нам нужно решить вопрос о выборе вектора ξ . Мы можем рассматривать ξ как 4-вектор свободно падающего наблюдателя в виде

$$\tilde{\xi}^{\alpha} = (-1, 0, 0, 0), \quad (4.7)$$

что соответствует отождествлению ξ с нулевой компонентой тетрады, т.е. $\tilde{\xi} = -\overset{C}{h}_{\hat{0}}$. Формально вектор (4.7) совпадает с вектором (4.8), но это различные векторы. Здесь он записан в координатах Леметра и не является вектором Киллинга.

Далее мы получаем нулевой ток Нётер

$$\overset{\bullet}{J}{}^{\alpha}(\tilde{\xi}) = (0, 0, 0, 0), \quad (4.8)$$

что соответствует принципу эквивалентности, т. е. свободно падающий наблюдатель измеряет нулевой нётеровский поток энергии-импульса. Следовательно, далее мы получаем и нулевой нётеровский сохраняющийся заряд

$$E(\tilde{\xi}) = 0, \quad (4.9)$$

т. е. свободно падающий наблюдатель измеряет и нулевую полную массу черной дыры, что совпадает с результатом, полученным в работах [30] и [31].

Мы также можем определить новую собственную тетраду из (4.3), применив локальное преобразование Лоренца $\Lambda_{(Sch)}^{-1}$ (3.19). Инерциальная спиновая связность тогда обратится в нуль, а соответствующая собственная тетрада принимает вид

$$\frac{D}{h}{}^a{}_{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi \left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta \left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Поскольку наш формализм Лоренц-инвариантен, применяя его для пары из собственной тетрады (4.10) и нулевой ИСС, мы снова получаем нулевой результат (4.8) для тока.

Следуя логике предыдущего раздела, определим пару из диагональной тетрады (4.3) (соответствующую метрике Леметра (4.2)) и ИСС (4.5), как *калибровку Леметра*. После любых преобразований координат и/или локальных преобразований Лоренца, примененных одновременно к (4.3) и (4.5), получившаяся пара из тетрады и ИСС также будет относиться к калибровке Леметра.

4.3 Статическая калибровка Шварцшильда и калибровка Леметра

Тетрады (4.3) и (4.10), полученные в калибровке Леметра, были записаны в координатах Леметра. Для прямого сравнения их с тетрадами (4.3) и (4.10), полученными в статической калибровке Шварцшильда, запишем все имеющиеся тетрады в одних и тех же координатах - статических координатах Шварцшильда (t, r, θ, φ) . Применяя координатные преобразования (4.1) к тетраде (4.3), мы можем записать (4.3) в виде:

$$\frac{C}{h}{}^a{}_{\mu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2Mr}}{r-2M} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} & \frac{r}{r-2M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Соответствующая ИСС (4.5) не изменяется, поскольку преобразования (4.1) затрагивают только координаты 0 и 1. Более того, мы можем записать собственную тетраду Леметра (4.10) в координатах Шварцшильда как

$$\frac{D}{h}{}^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2Mr}}{r-2M} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \varphi \sin \theta & \frac{r \cos \varphi \sin \theta}{r-2M} & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta \sin \varphi & \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r-2M} & r \cos \theta \sin \varphi & r \cos \varphi \sin \theta \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta & \frac{r \cos \theta}{r-2M} & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Конечно, нулевая ИСС, связанная с (4.2) в калибровке Леметра, также остается нулевой.

Таким образом, теперь у нас есть все четыре тетрады $\overset{A}{h}$ (4.10), $\overset{B}{h}$ (4.3), $\overset{C}{h}$ (4.1) и $\overset{D}{h}$ (4.2), записанные в одних и тех же координатах Шварцшильда. Оказывается, все эти тетрады связаны напрямую. Тетрада $\overset{B}{h}$ в (4.3) может быть преобразована в тетраду $\overset{C}{h}$ в (4.1)

$$\overset{C}{h}{}^a{}_{\mu} = (\Lambda_{(boost)})^a{}_b \overset{B}{h}{}^b{}_{\mu} \quad (4.3)$$

с помощью радиального буста

$$(\Lambda_{(boost)})^a{}_b = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, а β это величина, определяемая выражением

$$\beta = \sqrt{\frac{2M}{r}}. \quad (4.5)$$

Наконец, мы делаем вывод, что тетрады в координатах Шварцшильда, которые мы обозначили как $\overset{A}{h}$, $\overset{B}{h}$, $\overset{C}{h}$, $\overset{D}{h}$ связаны преобразованиями Лоренца:

$$\overset{A}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}} \overset{B}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(boost)}} \overset{C}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}^{-1}} \overset{D}{h}, \quad (4.6)$$

что значит в подробностях:

$$\begin{aligned} \overset{B}{h}{}^a{}_{\mu} &= (\Lambda_{(Sch)})^a{}_b \overset{A}{h}{}^b{}_{\mu}, \\ \overset{C}{h}{}^a{}_{\mu} &= (\Lambda_{(boost)})^a{}_b \overset{B}{h}{}^b{}_{\mu}, \\ \overset{D}{h}{}^a{}_{\mu} &= (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b \overset{C}{h}{}^b{}_{\mu}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Или, наоборот,

$$\overset{D}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}} \overset{C}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(boost)}^{-1}} \overset{B}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}^{-1}} \overset{A}{h}. \quad (4.8)$$

Теперь рассмотрим вектор 4-скорости свободно падающего на черную дыру наблюдателя. В координатах Леметра он был равен $\tilde{\xi}^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$. В координатах Шварцшильда приобретает вид

$$\tilde{\xi}^\alpha = \left(-\frac{1}{f}, \sqrt{1-f}, 0, 0 \right) = \left(-\frac{1}{1-2M/r}, \sqrt{\frac{2M}{r}}, 0, 0 \right). \quad (4.9)$$

4.3.1 Различные формы статической калибровки Шварцшильда

Итак, мы показали, что все четыре рассмотренные тетрады связаны преобразованиями (4.6). Начав с пары из тетрады и соответствующей ИСС в статической калибровке Шварцшильда ((4.3) и (4.5)), и одновременно их преобразовывая, мы можем получить различные

представления статической калибровки Шварцшильда. Схематично это можно представить как на Рис. 1, где точки – это тетрады, а стрелки – это лоренцевы вращения, приложенные как к тетраде, так и к спиновой связности; жирная точка означает ту начальную тетраду, в которой мы «отключаем» гравитацию, находим спиновую связность, и строим калибровку.

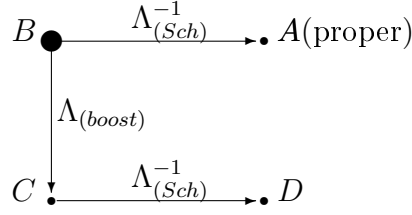


Рисунок 1

Таким образом, пары из тетрад и связанных с ними ИСС в статической калибровке Шварцшильда следующие:

- а) Тетрада $\overset{A}{h}$ является собственной тетрадой с нулевой ИСС.
- б) Тетрада $\overset{B}{h}$ и ИСС (4.5).
- в) Тетрада $\overset{C}{h}$ и ИСС, полученная из составного локального преобразования Лоренца, состоящего из вращения (3.19) и буста (4.4), т.е.

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} &= (\Lambda_{(AC)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(AC)}^{-1})^c{}_b; \\ (\Lambda_{(AC)})^a{}_b &\equiv (\Lambda_{(boost)})^a{}_c (\Lambda_{(Sch)})^c{}_b. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ненулевые компоненты (4.10) приведены в Дополнении, см. (A.1).

- г) Наконец, тетрада $\overset{D}{h}$ и ИСС, полученная из составного локального преобразования Лоренца, состоящего из вращения (3.19), буста (4.4) и вращения обратного (3.19), т.е.

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} &= (\Lambda_{(AD)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(AD)}^{-1})^c{}_b; \\ (\Lambda_{(AD)})^a{}_b &\equiv (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_c (\Lambda_{(boost)})^c{}_d (\Lambda_{(Sch)})^d{}_b. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ненулевые компоненты (4.11) приведены в Дополнении, см. (A.2).

Для всех пар тетрад $\overset{A}{h}$, $\overset{B}{h}$, $\overset{C}{h}$, $\overset{D}{h}$ с соответствующими ИСС в статической калибровке Шварцшильда (см. Рис. 1) соответствующий суперпотенциал благодаря Лоренц-инвариантности будет один и тот же (4.6). Используя времениподобный вектор Киллинга (4.8) в (2.55), мы находим, что полная масса черной дыры равна (4.9), т.е.

$$E(\xi) = M. \quad (4.12)$$

Интересно, что если принять вектор ξ равным скорости свободно падающего наблюдателя (4.9) и использовать его для расчета нётеровского тока и далее нётеровского заряда (2.55) (полной массы черной дыры) в статической калибровке Шварцшильда, то ток окажется неравным нулю, то есть мы не получим принципа эквивалентности, однако, производя интегрирование далее, для нётеровского заряда мы получим тот же самый результат $E = M$. Это просто совпадение, поскольку статическая калибровка Шварцшильда очень уникальна и очень симметрична с (4.7). Мы обсудим это в разделе 4.3.3.

4.3.2 Различные формы калибровки Леметра

Аналогичным образом мы можем получить различные формы калибровки Леметра. Мы начинаем с одной формы калибровки Леметра, с начальной пары, то есть (4.1) и (4.5), и применяем преобразования в (4.6) одновременно и к тетраде, и к ИСС. Схематически это можно изобразить на Рис. 2, где снова точки это тетрады, а стрелки — лоренцевы вращения, жирная точка обозначает начальную тетраду, в которой мы «выключаем» гравитацию:

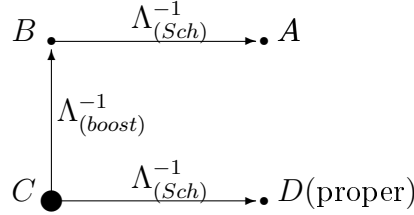


Рисунок 2

На Рис. 2 представлены пары из тетрад и связанных с ними ИСС в калибровке Леметра:

- а) Тетрада $\overset{D}{h}$ является собственной с нулевой ИСС.
- б) Тетрада $\overset{C}{h}$ и ИСС (4.5).
- в) Тетрада $\overset{B}{h}$ и ИСС, вычисленная с использованием составного локального преобразования Лоренца, состоящего из вращения (3.19) и обратного буста (4.4), т.е.

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} &= (\Lambda_{(DB)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(DB)}^{-1})^c{}_b, \\
 (\Lambda_{(DB)})^a{}_b &\equiv (\Lambda_{(boost)}^{-1})^a{}_c (\Lambda_{(Sch)})^c{}_b.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ненулевые компоненты (4.13) приведены в Дополнении (A.3).

- г) Тетрада $\overset{A}{h}$ и ИСС, полученная из составного локального преобразования Лоренца, состоящего из вращения (3.19), буста (4.4) и обратного вращения (3.19):

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} &= (\Lambda_{(DA)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(DA)}^{-1})^c{}_b, \\
 (\Lambda_{(DA)})^a{}_b &\equiv (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_c (\Lambda_{(boost)}^{-1})^c{}_d (\Lambda_{(Sch)})^d{}_b.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ненулевые компоненты (4.14) приведены в Дополнении (A.4).

Все пары тетрад $\overset{D}{h}$, $\overset{C}{h}$, $\overset{B}{h}$, $\overset{A}{h}$ с ИСС, перечисленные выше от а) до г), представляют собой калибровку Леметра и, следовательно, приводят благодаря Лоренц-инвариантности к тому же самому суперпотенциалу, вычисленному в (4.6).

Обсудим теперь выбор вектора ξ и вычисление нётеровских зарядов. Если мы выберем ξ равным (4.9), мы получим как нулевой ток Нётер (4.8), так и нулевой сохраняющийся заряд (4.9) для всех комбинаций тетрад и инерциальных спиновых связностей в пунктах а)-г) выше.

Все перечисленные выше тетрады соответствуют одной и той же метрике Шварцшильда (4.1), несмотря на то, что они находятся в калибровке Леметра. Следовательно, мы можем,

по крайней мере в принципе, рассмотреть времениподобный вектор Киллинга метрики (4.1), заданной (4.8), и вычислить соответствующий нётеровский заряд, он равен

$$E(\xi) = 2M. \quad (4.15)$$

Удивительно, но мы получили конечное значение, которое в два раза больше результата полученного в статической калибровке Шварцшильда (4.9). Мы обсудим этот результат в следующем разделе.

4.3.3 Обсуждение

Теперь сравним наши результаты с предыдущими работами Малуфа *и др.* [30] и Лукаса *и др.* [31], в которых рассматривается та же ситуация со свободно падающими наблюдателями. В обеих этих работах вычислялась полная энергия $P_{\hat{0}} = 0$, а не нётеровские заряды. Однако, как мы обсуждали в конце раздела 2.3, они совпадают при определенных условиях. В [30] авторы работают в нековариантной формулировке TEGR, где инерциальная спиновая связность считается тождественно нулевой, и, следовательно, они работают только с тем, что мы называем собственными тетрадами. Их тетрада (27) в [30] идентична нашей тетраде (4.2), и они находят, что для полной энергии-импульса (1.33) обращается в нуль $\hat{0}$ -компонента: $P_{\hat{0}} = 0$, и интерпретируют этот результат как следствие принципа эквивалентности. В [31] та же ситуация рассматривается в рамках ковариантной формулировки и авторы показывают, что инерциальная спиновая связность «регуляризует», т.е. приводит к конечной полной энергии для произвольных тетрад. В то время как в [30], авторы утверждают, что в случае свободно падающей системы (тетрады) вычисление полной массы невозможно, в статье [31] показано, что можно получить полную массу равную M в ковариантной формулировке, используя свободно падающую тетраду в паре со спиновой связностью, что в нашем формализме соответствует статической калибровке Шварцшильда с тетрадой $\overset{D}{h}$ и спиновой связностью, выраженной через лоренцево вращение из $\overset{A}{h}$ в $\overset{D}{h}$, см. случай d) в разделе 4.3.1. С другой стороны, в [18; 19; 32] вычисляются нётеровские заряды для решения Шварцшильда, но только в статической калибровке Шварцшильда, что всегда приводит к одному и тому же ответу M .

А мы рассчитали нётеровские заряды как для статической калибровки Шварцшильда, так и для калибровки Леметра и рассмотрели различные варианты векторного поля ξ . Наши результаты можно обобщить в таблице 1.

Теперь объясним значение каждого результата в таблице выше. Статическая калибровка Шварцшильда представляет физическую конфигурацию физических полей, соответствующих статическим наблюдателям. Выбор вектора ξ равным (4.8) является особым, поскольку (4.8) является как вектором Киллинга, так и 4-скоростью статического наблюдателя на бесконечности $\xi = -\lim_{r \rightarrow \infty} \overset{B}{h}_{\hat{0}}$, откуда мы получаем то же самое $\mathcal{P}(\xi) = M$. Следовательно,

Калибровка	$\mathcal{P}(\xi)$	$\mathcal{P}(\tilde{\xi})$
статическая Шварцшильда.	M	<i>M</i>
Леметра	<i>2M</i>	0

Таблица 1 — Заряды Нётер в калибровках Шварцшильда и Леметра для разных вариантов векторного поля ξ .

исходя только из этого примера, мы не можем решить, следует ли выбирать ξ равным вектору Киллинга или 4-скорости наблюдателя.

С другой стороны, калибровка Леметра представляет собой физическую конфигурацию физических полей, соответствующих свободно падающим наблюдателям. Выбор вектора $\tilde{\xi}$ в качестве (4.9) представляет 4-скорость наблюдателя, связанного с тетрадой (4.1), т.е. $\tilde{\xi} = -\frac{C}{h_0}$, но это не вектор Киллинга. В этом случае мы получаем физически ожидаемый результат, заключающийся в том, что свободно падающий наблюдатель измеряет нётеровский ток и заряд равными нулю. Оба физически приемлемых вывода соответствуют тому, что ξ был выбран как собственный вектор наблюдателя и связан с нулевой компонентой тетрады. Оба результата выделены жирным шрифтом в таблице выше, чтобы подчеркнуть этот факт.

А как насчет двух других результатов в таблице? Теперь мы можем понять вычисление $\mathcal{P}(\xi)$ в калибровке Леметра как случай, когда мы выбираем ξ равным вектору Киллинга пространства-времени (4.8), а не скорости наблюдателя. Как мы показали, это приводит к довольно странному результату, когда мы получаем значение, вдвое превышающее физическое. Это побуждает нас сделать вывод, что в калибровке Леметра предпочтительным выбором для векторного поля ξ является скорость наблюдателя, а не вектор Киллинга пространства-времени. Однако, как мы покажем в следующем разделе, можно восстановить для $\mathcal{P}(\xi)$ правильное физическое значение M , если ввести ненулевую начальную скорость наблюдателя на бесконечности.

Для полноты мы также рассмотрели $\mathcal{P}(\tilde{\xi})$ и в статической калибровке Шварцшильда. Однако здесь следует быть очень осторожным, поскольку $\tilde{\xi}$ не является вектором Киллинга метрики (4.1) и не представляет собой скорость статического наблюдателя. Это скорее пример неподходящего выбора вектора ξ , когда мы пытаемся вычислить нётеровский заряд в статической калибровке, используя скорость свободно падающего наблюдателя. Хотя этот выбор, очевидно, не имеет смысла, он все же приводит к «правильному» значению для сохраняющегося заряда. Однако это всего лишь совпадение, и правильный результат получается только случайно.

Чтобы понять эти результаты с математической точки зрения, напомним, что все сохраняющиеся заряды определяются пределом плотности суперпотенциала при $r \rightarrow \infty$. В случае статической калибровки Шварцшильда предел имеет вид (4.7), который объясняет, почему мы однозначно получаем результат M даже в случае неподходящего выбора векторного поля ξ , что мы обсуждали выше. С другой стороны, в калибровке Леметра главный член разложения суперпотенциала (4.6) задается выражением

$$\begin{aligned}
\dot{S}_0^{01} &= -\dot{S}_0^{10} = \frac{4M}{r^2}, & \dot{S}_1^{01} &= -\dot{S}_1^{10} = \sqrt{\frac{2M}{r^3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\right), \\
\dot{S}_2^{02} &= \dot{S}_3^{03} = -\dot{S}_2^{20} = -\dot{S}_3^{30} = \sqrt{\frac{M}{2r^3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\right), & & \\
\dot{S}_2^{12} &= \dot{S}_3^{13} = -\dot{S}_2^{21} = -\dot{S}_3^{31} = -\frac{M}{r^2}, & &
\end{aligned} \tag{4.16}$$

и, следовательно, у нас больше свободы сворачивать суперпотенциал с компонентами векторного поля ξ и получать различные значения нётеровских зарядов. Здесь можно заметить, что некоторые компоненты (4.16) ведут себя как $\mathcal{O}(r^{-\frac{3}{2}})$ и, следовательно, плотность суперпотенциала $hS_\rho^{\mu\nu}$ не обращается в нуль на бесконечности.

Следствием указанной выше проблемы является трудность интерпретации полной энергии-импульса P_a в ковариантной формулировке. Напомним, что в калибровке Леметра как собственная тетрада (4.2), так и тетрада (4.1) с соответствующей инерциальной спиновой связностью (4.5) должны представлять одну и ту же физическую ситуацию, и можно было бы наивно ожидать одного и того же значения для энергии-импульса. Хотя в нашем случае калибровки Леметра мы действительно получаем то же самое нулевое значение для 0-компоненты P_a , $P_0 = 0$, если рассматривать все ее компоненты, мы получаем различие:

$$P_a(\overset{D}{h}{}^a{}_\mu, 0) = (0, 0, 0, 0), \quad P_a(\overset{C}{h}{}^a{}_\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) = (0, \infty, 0, 0). \tag{4.17}$$

Мы можем понять этот результат как следствие отождествления векторных полей ξ с тетрадой в определениях P_a , обсуждавшихся в конце раздела 2.3. Хотя ξ является изначально произвольным векторным полем, для того чтобы нётеровский заряд (2.55) представлял собой физически значимую величину, нам нужно отождествить его с движением наблюдателя. В ковариантной формулировке это создает проблему, поскольку физическая конфигурация полей определяется как тетрадой, так и соответствующей инерциальной спиновой связностью (то есть калибровкой), а движение наблюдателя полностью задается только тетрадой. Поэтому, когда мы рассматриваем различные представления калибровки Леметра, обсуждаемые в разделе 4.3.2, каждая тетрада представляет отдельного наблюдателя. Затем мы сталкиваемся с ситуациями, когда вектор ξ и тетрада представляют двух разных наблюдателей в одном и том же выражении для P_a , что делает все выражение нефизическим. Это аналогично нашему нефизическому вычислению $\mathcal{P}(\tilde{\xi})$ в статической калибровке Шварцшильда, рассмотренной выше.

Поэтому в ковариантной формулировке теории более обоснованно рассматривать нётеровые заряды с векторным полем ξ и с сохранением независимости выбора тетрады, сопровождающейся соответствующей спиновой связностью. В такой постановке пара из тетрады и инерциальной спиновой связности представляет собой физическую конфигурацию гравитационного поля, а векторное поле ξ представляет собой наблюдателя, измеряющего гравитационные энергии и импульс. Физически значимые результаты получаются, когда и физическая конфигурация гравитационного поля, и вектор ξ , представляющий наблюдателя соответствуют одной и той же ситуации, т.е. когда векторное поле ξ представляет наблюдателя и определяет калибровку. Например, в нашем случае мы выбираем ξ как скорость статического наблюдателя при работе в статической калибровке, или ξ - скорость свободно падающего наблюдателя при работе в свободно падающей калибровке Леметра.

Обратим внимание, что это не проблема в нековариантной формулировке, где тетрада, используемая в уравнениях поля, представляет того же наблюдателя, что и векторное поле ξ в нётеровском сохраняющемся заряде. Они могут однозначно отождествляться друг с другом, и нет свободы трансформировать их независимо друг от друга. Следовательно, в нековариантной формулировке P_a действительно осмысленно представляет собой энергию-импульс.

4.4 Произвольный свободно падающий наблюдатель и e -калибровка

До сих пор мы рассматривали только таких наблюдателей, которые падают на черную дыру Шварцшильда, имея на бесконечности нулевую начальную скорость. Так же, насколько нам известно, только этот случай рассматривался во всех предыдущих работах, т.е. [30] и [31]. В этом разделе мы обобщаем эту схему на случай произвольно падающего наблюдателя, т.е. такого наблюдателя, чья скорость на бесконечности отличается от нулевой.

Решая уравнение геодезической в общем виде для свободно падающего по радиусу наблюдателя в направлении черной дыры Шварцшильда в координатах Шварцшильда (4.1), получаем

$$\tilde{\xi}^\alpha = \left(-\frac{e}{f}, \sqrt{e^2 - f}, 0, 0 \right) = \left(-\frac{e}{1 - 2M/r}, \sqrt{e^2 - (1 - 2M/r)}, 0, 0 \right), \quad (4.1)$$

где e — некоторое число, характеризующее начальное состояние падающей частицы. Случай, с $e > 1$ соответствует ненулевой начальной скорости на бесконечности $r \rightarrow \infty$, направленной к черной дыре, тогда как $e < 1$ соответствует нулевой скорости при некотором конечном r_0 . Наблюдатель с $e = 1$ имеет нулевую скорость на бесконечности $r \rightarrow \infty$, и выражение (4.1) сводится к рассмотренному ранее (4.9).

4.4.1 Случай $e > 1$

В этом пункте при рассмотрении произвольного свободно падающего наблюдателя мы ограничиваемся случаем $e > 1$. Для такого наблюдателя мы строим собственные координаты, в которых наблюдатель статичен и которые являются обобщением координат Леметра (4.2), и диагональную тетраду для новых координат. Для новой построенной тетрады и координат мы отключаем гравитацию, как и в предыдущих разделах, и находим спиновую связность, тем самым создавая новую калибровку. Затем мы создаем и проверяем сохраняющиеся величины в этой новой калибровке.

Основываясь на (4.1), введем преобразование координат

$$\begin{aligned} d\tau_e &= edt + \frac{\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2M}{r}}}{1 - \frac{2M}{r}} dr, \\ d\rho_e &= dt + \frac{e}{(1 - \frac{2M}{r}) \sqrt{e^2 - 1 + \frac{2M}{r}}} dr, \end{aligned} \quad (4.2)$$

с помощью которого можно преобразовать метрику Шварцшильда (4.1) к форме

$$ds^2 = -d\tau_e^2 + \left(e^2 - 1 + \frac{2M}{r} \right) d\rho_e^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.3)$$

где $r = r(\tau_e, \rho_e)$. После преобразования (4.2) 4-скорость (4.1) принимает вид

$$\tilde{\xi}^\alpha = (-1, 0, 0, 0), \quad (4.4)$$

в новых падающих координатах (4.2). Метрика (4.3) является частным случаем метрики (20) в [57], которая авторами [57] используется для моделирования космологических решений с анизотропной жидкостью.

Наиболее удобным выбором тетрады, соответствующей метрике (4.3), является простейшая диагональная тетрада

$$h^a_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Чтобы найти инерциальную спиновую связность, соответствующую (4.5), мы поступаем аналогично случаю Леметра (см. раздел 4.2). Сначала мы вычисляем Л-ЧСС:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}1} = \overset{\circ}{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}1} &= \frac{M}{r^2}; \quad \overset{\circ}{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \overset{\circ}{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} = -\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1}; \quad \overset{\circ}{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} = -\overset{\circ}{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} = -e; \\ \overset{\circ}{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}3} = \overset{\circ}{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}3} &= -\sin(\theta) \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1}; \quad \overset{\circ}{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = -\overset{\circ}{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = -e \sin(\theta); \\ cA^{\hat{2}}_{\hat{3}3} &= -\overset{\circ}{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} = -\cos(\theta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

и далее «выключаем» в ней гравитацию: $M \rightarrow 0$. Таким образом, мы находим ИСС, имеющую следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \overset{\bullet}{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} &= -\sqrt{e^2 - 1}, \quad \overset{\bullet}{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} = -\overset{\bullet}{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} = -e, \quad \overset{\bullet}{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}3} = \overset{\bullet}{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}3} = -\sin \theta \sqrt{e^2 - 1}, \\ \overset{\bullet}{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} &= -\overset{\bullet}{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = -e \sin \theta, \quad \overset{\bullet}{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тетрада (4.5) и ИСС (4.7) выражены в новых координатах (4.2). Преобразуем их в статические координаты Шварцшильда, что позволит нам удобнее их сравнивать с предыдущими результатами. Можно заметить, что поскольку инерциальная спиновая связность (4.7) имеет только ненулевые векторные компоненты по θ и φ , она будет иметь тот же вид, т.е.

(4.7), в координатах Шварцшильда. Применяя преобразование координат (4.2) к диагональной тетраде (4.5), находим, что в координатах Шварцшильда она примет вид

$${}^E h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e & \frac{\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r}} - 1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r}} - 1 & \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Мы также можем найти собственную тетраду, которую мы обозначаем как ${}^F h$, найдя локальное преобразование Лоренца, которое переводит (4.7) в нуль. Это достигается за счет лоренцева вращения

$$(\Lambda_{(EF)})^a{}_b = (\Lambda_{(Sch)})^a{}_c (\Lambda_{(boost')}^{-1})^c{}_b, \quad (4.9)$$

где радиальный буст

$$(\Lambda_{(boost')})^a{}_b = \begin{pmatrix} e & -\sqrt{e^2 - 1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{e^2 - 1} & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Применяя преобразование Лоренца (4.9) к (4.8), ${}^F h^a{}_\mu = \Lambda_{(EF)}^a{}_b ({}^E h)^b{}_\mu$, мы находим собственную тетраду

$${}^F h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_e & \frac{\mathcal{B}_e}{1 - 2M/r} & 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi \mathcal{B}_e & \frac{\sin \theta \cos \varphi \mathcal{A}_e}{1 - 2M/r} & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \mathcal{B}_e & \frac{\sin \theta \sin \varphi \mathcal{A}_e}{1 - 2M/r} & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \mathcal{B}_e & \frac{\cos \theta \mathcal{A}_e}{1 - 2M/r} & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где мы ввели

$$\mathcal{A}_e \equiv e^2 - \sqrt{e^2 - 1} \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r}} - 1, \quad \mathcal{A}_{e=1} = 1, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{B}_e \equiv e \left(\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r}} - 1 - \sqrt{e^2 - 1} \right), \quad \mathcal{B}_{e=1} = \sqrt{\frac{2M}{r}}. \quad (4.13)$$

В духе предыдущих результатов мы называем пару из тетрады (4.8) и соответствующей ИСС (4.7) или, альтернативно, новую собственную тетраду (4.11) в сочетании с нулевой ИСС *обобщенной калибровкой Леметра* или *e-калибровкой*. Более того, по аналогии с (4.14) мы можем связать новые тетрады ${}^E h$ и ${}^F h$ с тетрадами ${}^B h$ и ${}^A h$ как

$${}^A h \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}} {}^B h \xrightarrow{\Lambda_{(boost_e)}^{-1}} {}^E h \xrightarrow{\Lambda_{(EF)}} {}^F h, \quad (4.14)$$

где мы ввели радиальный буст

$$(\Lambda_{(boost_e)})^a{}_b = \begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} & \frac{\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} & \frac{e}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Взяв тетраду (4.8) и соответствующую инерциальную спиновую связность (4.7) и одновременно преобразуя как тетраду, так и ИСС с помощью приведенных выше преобразований, мы получим различные формы e -калибровки. Это можно проиллюстрировать следующей схемой, см. Рис.3.

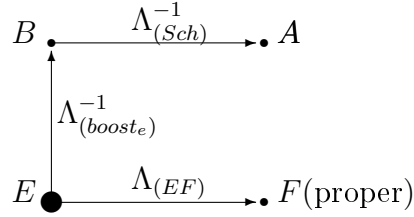


Рисунок 3

Или в деталях можно написать, что e -калибровка задается следующими комбинациями тетрады и инерциальной спиновой связности:

- а) Тетрада $\overset{F}{h}$ является собственной тетрадой, т.е. с нулевой ИСС.
- б) Тетрада $\overset{E}{h}$ и ИСС (4.7).
- в) Тетрада $\overset{B}{h}$ и ИСС, полученная из

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} &= (\Lambda_{(FB)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(FB)}^{-1})^c{}_b; \\ (\Lambda_{(FB)})^a{}_b &\equiv (\Lambda_{(boost_e)}^{-1})^a{}_c (\Lambda_{(boost')}^{-1})^c{}_d (\Lambda_{(Sch)})^d{}_b. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ненулевые компоненты (4.16) выписаны в Дополнении (A.5).

- г) Тетрада $\overset{A}{h}$ и ИСС

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} &= (\Lambda_{(FA)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(FA)}^{-1})^c{}_b; \\ (\Lambda_{(FA)})^a{}_b &\equiv (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_e (\Lambda_{(boost_e)}^{-1})^e{}_c (\Lambda_{(boost')}^{-1})^c{}_d (\Lambda_{(Sch)})^d{}_b. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ненулевые компоненты (4.17) записаны в Дополнении (A.6).

В силу Лоренц-инвариантности все пары тетрад $\overset{F}{h}$, $\overset{E}{h}$, $\overset{B}{h}$, $\overset{A}{h}$ со связанными с ними ИСС, перечисленные выше как а)-г), приводят к одному и тому же суперпотенциалу

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{S}{}_0{}^{01} &= -\overset{\bullet}{S}{}_0{}^{10} = -\frac{2}{r} (\mathcal{A}_e - 1 + 2M/r), & \overset{\bullet}{S}{}_1{}^{01} &= -\overset{\bullet}{S}{}_1{}^{10} = \frac{2}{r} \frac{\mathcal{B}_e}{1-2M/r}, \\ \overset{\bullet}{S}{}_2{}^{02} &= \overset{\bullet}{S}{}_3{}^{03} = -\overset{\bullet}{S}{}_2{}^{20} = -\overset{\bullet}{S}{}_3{}^{30} = \frac{e}{r} \frac{\mathcal{A}_e - 1 + M/r}{(1-2M/r)\sqrt{e^2 + 2M/r - 1}}, \\ \overset{\bullet}{S}{}_2{}^{12} &= \overset{\bullet}{S}{}_3{}^{13} = -\overset{\bullet}{S}{}_2{}^{21} = -\overset{\bullet}{S}{}_3{}^{31} = -\frac{1}{r} (\mathcal{A}_e - 1 + M/r), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где \mathcal{A}_e и \mathcal{B}_e определены в (4.12) и в (4.13) соответственно.

Теперь вычислим для (4.18) ток Нётер и соответствующие нётеровские заряды (2.55) с различными векторными полями ξ . Для векторного поля $\tilde{\xi}^\alpha$, представляющего свободно падающего наблюдателя (4.1), мы получаем нулевой ток Нётер

$$\overset{\bullet}{J}^\alpha(\tilde{\xi}) = (0, 0, 0, 0) \quad (4.19)$$

и, следовательно, это естественным образом приводит к нулевому значению сохраняющегося заряда

$$\mathcal{P}(\tilde{\xi}) = 0, \quad (4.20)$$

что аналогично ситуации в случае Леметра и согласуется с ожиданиями, основанными на принципе эквивалентности.

Однако, если мы выберем вектор ξ равным времениподобному вектору Киллинга метрики (4.1), имеющему вид (4.8), но в координатах $(\tau_e, \rho_e, \theta, \varphi)$ в (4.2), получим желаемый результат

$$\mathcal{P}(\xi) = M. \quad (4.21)$$

Оба приемлемых результата (4.20) и (4.21) отражены в таблице 4.2:

Калибровка	$\mathcal{P}(\xi)$	$\mathcal{P}(\tilde{\xi})$
e -калибровка	M	0

Таблица 2 — заряды Нётер в e -калибровке.

Это действительно удивительный результат, поскольку, в отличие от случая калибровки Леметра, где мы нашли (4.15), мы имеем теперь тот же физический результат, что и в статической калибровке Шварцшильда. Это означает, что введение начальной скорости для наблюдателя меняет результат с неприемлемых $2M$ на физически осмысленное значение M . Мы обсудим этот результат в следующем разделе.

4.4.2 Обсуждение

Обобщенная калибровка Леметра или e -калибровка — это новый результат, неизвестный ранее. В случае, когда мы выбираем векторное поле ξ , связанное со скоростью свободно падающего наблюдателя, т. е. $\xi = -\frac{E}{h_0}$, находим, что нётеровские ток и заряд равны нулю. Это аналогично обычной калибровке Леметра и может быть понято как следствие принципа эквивалентности.

Однако интересный новый результат заключается в том, что если мы выберем вектор ξ как времениподобный вектор Киллинга (4.8), мы получим тот же результат, что и в статической калибровке Шварцшильда. Это означает, что введение начальной скорости для наблюдателя регулирует соответствующий сохраняющийся заряд от (4.15) до (4.21). Еще более интригующим является то, что переход от (4.15) при $e = 1$ к (4.21) при $e > 1$ является разрывным и происходит в произвольно малой окрестности $e = 1$.

Хотя с физической точки зрения сначала может показаться неясным, каким образом учет сколь угодно малой скорости может регулировать полную энергию, на чисто математическом уровне это, возможно, можно понять как следствие регулирующего свойства начальной скорости. Здесь имеется в виду тот факт, что для стандартной калибровки Леметра метрика (4.2) и соответствующая тетрада (4.3) сингулярны в пределе $M \rightarrow 0$ при

«выключении» гравитации и на пространственной бесконечности $r \rightarrow \infty$. А этот предел используется для определения ИСС (4.5). С другой стороны, в рамках e -калибровки метрика (4.3) и соответствующая тетрада (4.5) уже регулярны в пределе $M \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$.

Приведенный выше результат еще более любопытен, если мы примем во внимание важную роль постоянного буста (4.10). Рассмотрим цепочку преобразований (4.14) от собственной тетрады в статической калибровке Шварцшильда $\overset{A}{h}$, к собственной тетраде в e -калибровке $\overset{F}{h}$. Постоянный буст (4.10) содержится в последнем преобразовании в $\Lambda_{(EF)}$, задаваемом формулой (4.9), и, как оказалось, имеет решающее значение для получения сохраняющихся зарядов, обсуждавшихся выше.

То, почему это кажется любопытным, является тот факт, что постоянный буст (4.10) является глобальным преобразованием Лоренца, поэтому совсем не ожидается, что он может как-то повлиять на какие-либо сохраняющиеся величины. Заметим, что речь не идет об использовании ковариантных или нековариантных формулировок, поскольку весь вопрос о ковариантности традиционно касается только локальных преобразований Лоренца, а не глобальных.

Теперь кратко опишем случай $e < 1$, когда свободно падающие наблюдатели имеют орбиты, ограниченные конечным радиусом $r_0 = 2M/(1 - e^2)$. Поскольку существует максимальный радиус r_0 , где могут находиться наблюдатели, мы не можем непосредственно применить наши формулы, выведенные для асимптотических значений r . Только формально мы можем сделать аналитическое продолжение преобразования координат (4.2) в область $r > r_0$, где (4.2) станет комплексным, образуя комплексные величины, такие как $\overset{\bullet}{K}^{\alpha}_{\mu\nu}$, $\overset{\bullet}{T}^{\alpha}_{\mu\nu}$, $\overset{\bullet}{S}^{\alpha}_{\mu\nu}$. Но компонента суперпотенциала (4.18) $\overset{\bullet}{S}^{01} = -\frac{2}{r}(\mathcal{A}_e - 1 + 2M/r)$ оказывается действительной при $r > r_0$, что приводит к правильной массе $E = M$ (4.21). Компоненты тока Нётер, рассчитанные с вектором (4.1), который также становится комплексным при $r > r_0$, снова равны нулю (4.19). Ситуация с появлением комплексных величин уже встречалась при рассмотрении космологических моделей (см. раздел 3.2), где получались формально приемлемые реальные результаты, с наличием комплексных величин в промежуточных расчетах, физическая интерпретация которых не ясна.

4.5 Итоги Главы

Основные результаты, касающиеся различных определений сохраняющихся зарядов для статических и свободно падающих наблюдателей, подробно обсуждались в подразделах 4.3.3 и 4.4.2, где мы продемонстрировали, как получить некоторые физические результаты, и сравнили наши вычисления с предыдущими результатами [30; 31]. В частности, мы хотели бы обратить внимание на наше обсуждение связи между зарядами Нётер и другими определениями энергии-импульса, использовавшимися ранее, а также на обобщение

свободно падающих наблюдателей, которые бы покоились в системе Леметра, на случай с произвольной начальной скоростью, что привело к построению *e*-калибровки, см. Раздел 4.4.

Отметим теперь следующий результат наших вычислений. Напомним, что существуют две формулировки телепараллельных теорий: нековариантная и ковариантная. В нековариантной формулировке ТЕGR уравнения поля инвариантны относительно локально-лоренцевы вращений, но величины, такие как сохраняющиеся заряды и энергия-импульс, - нет. Тогда существует класс «предпочтительных» тетрад, называемых собственными тетрадами, которые приводят к конечным значениям сохраняющихся зарядов. С другой стороны, в ковариантной формулировке, учивая инерциальную спиновую связность и используя векторы смещений, мы можем применять произвольные преобразования Лоренца к тетраде и спиновой связности, и сохраняющиеся величины останутся ковариантными. Однако нам нужно как-то вычислить соответствующую ИСС и, следовательно, по существу нам нужно определить те же локальные лоренцевы степени свободы, что и при определении собственной тетрады.

Существуют различные подходы к определению собственных тетрад в ТЕGR или же соответствующих спиновых связностей [47; 54; 58; 59]. Мы рассмотрели здесь метод «выключения» гравитации, введенный в [31] и получивший дальнейшее развитие в [23; 24; 33; 40; 41].

Хотя этот метод на первый взгляд хорошо работает в самых простых случаях, таких как энергия, измеряемая наблюдателем в хаббловском потоке, или масса ЧД Шварцшильда, рассчитанная в статической системе, он показывает неоднозначность, если начинать расчеты в разных координатах одного и того же решения. Это приводит к различным собственным тетрадам, а следовательно и различным калибровкам, в которых получаются различные значения для сохраняющихся величин. Так, в ходе наших вычислений мы получили три различные калибровки:

1 - Статическая калибровка Шварцшильда, дающая правильную массу ЧД, но не соответствующая принципу эквивалентности;

2 - Калибровка Леметра, дающая массу в 2 раза больше ожидаемой, но соответствующая принципу эквивалентности;

3 - Обобщенная *e*-калибровка, полученная для свободно падающего наблюдателя с произвольной энергией и рассмотренная впервые, дающая и ожидаемую массу ЧД, и соответствующая принципу эквивалентности;

Обратим внимание, что такое рассмотрение обусловлено тем, что система координат изначально может быть любая, и, следовательно, мы должны иметь возможность получать значимые результаты, используя произвольные системы координат в качестве отправной точки для построения удобной тетрады и всех последующих операций.

Интересным наблюдением из наших расчетов является факт покомпонентного совпадения ИСС, рассчитанной изначально в статических координатах Шварцшильда, и ИСС, рассчитанной изначально в координатах Леметра (где компоненты выражены в этих же начальных координатах соответственно). Обе спиновые связности строились одинаково, начиная с метрики, с построением простейшей диагональной в этой метрике тетрады и «выключением» гравитации. Отличие заключалось в том, что отправными точками была метрика,

выраженная в разных системах координат. Так что, несмотря на тот очевидный факт, что для перехода от диагональной статической тетрады Шварцшильда к диагональной тетраде Леметра необходимо применить лоренцев буст, спиновые связности остаются «неизменными». Тот факт, что обе спиновые связности покомпонентно одинаковы для разных тетрад, показывает, что процесс определения спиновой связности не является единственным.

Можно объяснить, откуда берется неоднозначность метода «выключения» гравитации, используемого для определения ИСС. Метод совершенно нечувствителен к любому локальному преобразованию Лоренца, пропорциональному параметру, контролирующему силу гравитации, поскольку этот параметр тоже «выключается» вместе с гравитацией. В нашем случае буст (4.4) пропорционален M , и мы берем предел $M \rightarrow 0$, чтобы определить ИСС. Поэтому неудивительно, что полученная ИСС нечувствительна к этому бусту.

Глава 5. Сохраняющиеся величины для движущейся черной дыры Шварцшильда

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [60; 61], выполненные автором диссертации совместно с коллегами, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

5.1 Сферически симметричный материальный шар в пространстве Минковского

С самого начала, поскольку модель движущейся черной дыры похожа на движущуюся сферически распределенную материю в пространстве Минковского, полезно рассмотреть такую материю в плоском пространстве-времени с метрикой:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (5.1)$$

Здесь мы обозначаем эти координаты как $(t, x, y, z) = (x^0, x^i) = (x^\alpha)$, где $i = 1, 2, 3$. Чтобы превратить это пространство-время в систему отсчета, мы дополняем его статическими наблюдателями, которые имеют собственные векторы $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$. Пусть материя в пространстве Минковского имеет дифференциально сохраняющийся тензор энергии-импульса Θ^α_β такой, что $\partial_\alpha \Theta^\alpha_\beta = 0$. Тогда ток $\mathcal{J}^\alpha = \Theta^\alpha_\beta \xi^\beta$ также сохраняется, $\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0$, а его компоненты представляют собой плотность энергии $\mathcal{J}^0 = \Theta^0_0 \xi^0$ и плотность импульса $\mathcal{J}^i = \Theta^i_0 \xi^0$, измеренные введенными выше наблюдателями. Определение тока $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ вTEGR (2.54) и (2.53) - это обобщение самого простейшего определения тока в пространстве Минковского, а его компоненты $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ имеют аналогичную интерпретацию для наблюдателей с собственными векторами ξ .

Предполагая статическое сферически-симметричное распределение вещества, имеем следующее выражение для тока:

$$\mathcal{J}_s^\alpha = [\rho(r), 0, 0, 0], \quad (5.2)$$

где $\rho(r) = \mathcal{J}_s^0(r) = \Theta^0_0(r) \xi^0$ - просто плотность энергии, $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$ и

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (5.3)$$

Предположим, что материя, распределенная на гиперповерхности Σ постоянного времени, ограничена $\partial\Sigma$, являющейся сферой $r = r_0$. Тогда массу/энергию такого шара материи можно рассчитать как

$$E_s = \iiint_{\Sigma} dx dy dz \mathcal{J}_s^0(r) = \iiint_{\Sigma} dx dy dz \rho(r) = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dr d\theta d\varphi \rho(r) r^2 \sin \theta = \mathcal{M}. \quad (5.4)$$

Предположим, что абсолютно идентичный шар из материи движется относительно системы $\{x^\alpha\}$, связанной с (5.1), с постоянной скоростью v вдоль оси $0 \div x$. Собственные координаты движущегося объекта связаны с координатами в (5.1) преобразованием Лоренца:

$$\bar{t} = \gamma(t - vx); \quad \bar{x} = \gamma(x - vt); \quad \bar{y} = y; \quad \bar{z} = z, \quad (5.5)$$

где $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. По аналогии с системой отсчета $\{x^\alpha\}$, определяемой (5.1), движущийся шар имеет собственную (свою) систему отсчета $\{\bar{x}^\alpha\}$.

Чтобы проиллюстрировать приведенные ниже расчеты, связанные с движущимся шаром материи, рассмотрим более простой случай. Пусть движущаяся сфера заполнена N точечными частицами с массами m и статичными в собственной системе отсчета $\{\bar{x}^\alpha\}$, таким образом, полная масса всех частиц в системе $\{\bar{x}^\alpha\}$ равна $\mathcal{M}_s = Nm$. Теперь найдем массу такого движущегося объекта в системе $\{x^\alpha\}$. Во-первых, движущаяся сфера подвергается релятивистскому сжатию, и ее объем уменьшается в γ раз. Во-вторых, в силу эффектов специальной теории относительности энергия и импульс каждой частицы с массой m становятся равными γm и $\gamma v m$ соответственно. Наконец, в-третьих, поскольку число частиц N сохраняется, концентрация частиц увеличивается в γ раз. В этой простейшей модели видно, что первый и третий факторы компенсируются. Тогда очевидным результатом для полных массы и импульса движущегося объекта будет $\mathcal{M}_m = N(\gamma m) = \gamma \mathcal{M}_s$ и $\mathcal{P}_m^1 = N(\gamma v m) = \gamma v \mathcal{M}_s$.

Приведенная выше логика работает и в случае непрерывного распределения материи. Таким образом, в собственной системе $\{\bar{x}^\alpha\}$ движущегося шара ток имеет вид:

$$\mathcal{J}_s^{\bar{\alpha}} = [\rho(\bar{r}), 0, 0, 0], \quad (5.6)$$

где $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ и $\rho(\bar{r})$ — такая же функция как в (5.2). Отметим, что здесь были использованы собственные вектора статических наблюдателей $\xi^{\bar{\alpha}} = (-1, 0, 0, 0)$ в системе отсчета $\{\bar{x}^\alpha\}$. Теперь перейдем от системы $\{\bar{x}^\alpha\}$ к системе $\{x^\alpha\}$. Первый фактор релятивистского сжатия сферы необходимо учитывать в области интегрирования. Вследствие второго фактора, компоненты вектора (5.6) после преобразований Лоренца (5.5) становятся:

$$\mathcal{J}_m^\alpha = [\gamma \rho(\bar{r}), \gamma v \rho(\bar{r}), 0, 0] \quad (5.7)$$

в системе $\{x^\alpha\}$ в координатах (t, x, y, z) , где $\bar{r}^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2$. Вследствие третьего фактора, из-за релятивистского сжатия компоненты (5.7) должны быть умножены на γ при интегрировании в сжатых границах.

Таким образом, для получения полной массы движущегося шара материи нужно вычислить интеграл

$$E_m = \iiint_{\Sigma} dx dy dz (\gamma \mathcal{J}_m^0(\bar{r})) = \gamma \iiint_{\Sigma} dx' dy' dz' \rho(r') = 4\pi\gamma \int_0^{r_0} dr' r'^2 \rho(r') = \gamma \mathcal{M}, \quad (5.8)$$

где граница $\partial\Sigma$ области Σ определяется как $\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$, вычисленная в момент $t = 0$ без ограничения общности. После простого переопределения $x' = \gamma x$ имеем $x'^2 + y^2 + z^2 = r'^2$, и граница $\partial\Sigma$ определяется как обычно: $r' = r_0$, поэтому последнее интегрирование в (5.8) точно повторяет (5.4). Таким же образом, по аналогии с примером точечных частиц, где

полный импульс получается простым суммированием, полный импульс движущегося шара материи получается интегрированием плотности импульса $\mathcal{J}_m^1(\bar{r})$, умноженной на γ

$$P_m^1 = \iiint_{\Sigma} dx dy dz (\gamma \mathcal{J}_m^1(\bar{r})) = \gamma v \iiint_{\Sigma} dx' dy' dz' \rho(r') = 4\pi\gamma v \int_0^{r_0} dr' r'^2 \rho(r') = \gamma v \mathcal{M}. \quad (5.9)$$

Во-первых, результаты (5.8) и (5.9) находятся в полном соответствии с выводами специальной теории относительности. Во-вторых, именно указанный выше способ будет использован для расчета глобальной массы и импульса движущейся черной дыры, поскольку ковариантный формализм [23; 24] позволяет реализовать эту программу.

5.2 Движущаяся черная дыра как материальный шар

По аналогии с шаром материи в пространстве Минковского рассмотрим решение Шварцшильда в статическом представлении. Так же как в книге [62], возьмем метрику Шварцшильда в изотропных координатах:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \psi^4(r)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.10)$$

где $\alpha(r) \equiv (1 - \frac{M}{2r})/(1 + \frac{M}{2r})$, $\psi(r) \equiv 1 + \frac{M}{2r}$ и снова $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Удобнее всего здесь выбрать диагональную тетраду в форме:

$$h^a{}_{\mu} = \text{diag} [\alpha(r), \psi^2(r), \psi^2(r), \psi^2(r)]. \quad (5.11)$$

Ненулевые компоненты Л-ЧСС $\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\nu} = -h_b{}^{\rho} \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} h^a{}_{\rho}$, рассчитанные для метрики (5.10) и тетрады (5.11) равны:

$$\overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{i}0} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{i}}{}_{\hat{0}0} = \frac{Mx^i}{r^3} \frac{1}{\psi^4(r)}; \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{i}}{}_{\hat{k}i} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{k}}{}_{\hat{i}i} = -\frac{Mx^k}{r^3} \frac{1}{\psi(r)}, \quad (5.12)$$

где, как и прежде, индексы с «крышечкой» нумеруют тетрадные компоненты тетрады, индексы без «крышечки» – координатные; латинские индексы $i, k = 1, 2, 3$ нумеруют тетрадные и координатные компоненты так, что i и \hat{i} (k и \hat{k}) принимают одинаковые значения; $x^i \equiv (x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$. «Выключение гравитации» в (5.12) обеспечивается условием $M \rightarrow 0$, что приводит к занулению всех компонент Л-ЧСС, что дает ИСС $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = 0$. Получается, что диагональная тетрада (5.11) оказалась здесь собственной тетрадой. Для Л-ЧСС (5.12) и нулевой ИСС по формуле (2.50) вычисляем компоненты суперпотенциала $\overset{\bullet}{S}{}^{\sigma}{}^{\alpha\beta}$, ненулевые значения которых:

$$\overset{\bullet}{S}{}^{\hat{0}}{}_{0i} = -\overset{\bullet}{S}{}^{\hat{i}}{}_{00} = -\frac{2Mx^i}{r^3} \frac{1}{\psi^5(r)}; \quad \overset{\bullet}{S}{}^{\hat{i}}{}_{ik} = -\overset{\bullet}{S}{}^{\hat{k}}{}_{ki} = \frac{M^2x^k}{2r^4} \frac{1}{\alpha(r)\psi^6(r)}. \quad (5.13)$$

Для расчета полной массы черной дыры Шварцшильда удобнее брать сферические координаты. Поэтому применим стандартное преобразование координат (5.3), после которого метрика (5.10) примет вид:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \psi^4(r) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (5.14)$$

Возьмем снова удобную диагональную тетраду для (5.14):

$$h^a{}_{\mu} = \text{diag} [\alpha(r), \psi^2(r), r\psi^2(r), r\psi^2(r) \sin \theta]. \quad (5.15)$$

Для метрики (5.14) и тетрады (5.15) ненулевые компоненты Л-ЧСС равны

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A}{}^{\hat{0}}{}_{\hat{1}0} = \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{0}0} &= \frac{M}{r^2} \frac{1}{\psi^4(r)}; \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = \frac{M}{r} \frac{1}{\psi(r)} - 1; \\ \overset{\circ}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} &= -\alpha(r) \sin \theta; \quad \overset{\circ}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\circ}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos \theta, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где сейчас $x^i \equiv (x^1, x^2, x^3) \equiv (r, \theta, \varphi)$.

«Выключение» гравитации с помощью $M \rightarrow 0$ в (5.16) дает ИСС, ненулевые компоненты которой равны:

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = -1; \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -\sin \theta; \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos \theta. \quad (5.17)$$

Тогда по формуле (2.50) с Л-ЧСС (5.16) и ИСС (5.17) получаем суперпотенциал $\overset{\bullet}{S}{}^{\sigma\alpha\beta}$, имеющий следующие ненулевые компоненты :

$$\overset{\bullet}{S}{}^0{}_{01} = -\overset{\bullet}{S}{}^0{}_{10} = -\frac{2M}{r^2} \frac{1}{\psi^5(r)}; \quad \overset{\bullet}{S}{}^2{}_{12} = -\overset{\bullet}{S}{}^2{}_{21} = \overset{\bullet}{S}{}^3{}_{13} = -\overset{\bullet}{S}{}^3{}_{31} = -\frac{M^2}{2r^3} \frac{1}{\alpha(r)\psi^6(r)}. \quad (5.18)$$

После применения преобразований (1.7) и (1.8) к тетраде (5.15) и ИСС (5.17) соответственно, где

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

полученная ИСС равна нулю, а следовательно полученная тетрада это собственная тетрада. Она после преобразований координат (5.3) превращается в тетраду (5.11), а суперпотенциал (5.18) переходит в (5.13). В рамках ковариантного формализма [23; 24] произвольные пары тетрад и инерциальных спиновых связностей, связанные гладкими координатными и/или локальными преобразованиями Лоренца, представляют одну и ту же калибровку в терминологии [55; 56], и следовательно, приведут в расчетах к тому же самому результату, см. предыдущую главу. Здесь в расчетах используется калибровка, представленная парой тетрады (5.11) и нулевой ИСС (или парой тетрады (5.15) и ИСС (5.17)). Будем называть эту калибровку *изотропной калибровкой Шварцшильда*.

Для расчета полной массы/энергии черной дыры необходимо определить наблюдателей так же, как это было сделано в пространстве Минковского. Пространство-время с метрикой (5.10) или (5.14) и с 4-векторами статических наблюдателей

$$\xi^\sigma = [-\alpha^{-1}(r), 0, 0, 0] \quad (5.20)$$

представляет статическую систему отсчета $\{x^\alpha\}$. Тогда (2.50) с (5.18) дает единственную ненулевую компоненту суперпотенциала Нётер

$$\overset{\bullet}{J}{}^s{}_{01} = -\overset{\bullet}{J}{}^s{}_{10} = 2\kappa^{-1} M \psi(r) \sin \theta; \quad (5.21)$$

и (2.53) дает ток Нётер в виде:

$$\dot{\mathcal{J}}_s^\alpha = [2\kappa^{-1}M\psi'(r)\sin\theta, 0, 0, 0]. \quad (5.22)$$

Поскольку $\dot{\mathcal{J}}_s^\alpha$ является векторной плотностью, см. (2.54) и (2.53), плотность энергии в (5.22), представленная в сферических координатах, может быть переписана как $\dot{\mathcal{J}}_s^0 = \dot{\rho}(r)r^2\sin\theta$, где $\dot{\rho}(r)$ — плотность энергии в декартовых координатах (5.10). Таким образом, подставляя (5.22) и (5.21) в (2.55), получаем

$$E_s = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma} dx dy dz \dot{\rho}(r) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma} dr d\theta d\varphi \dot{\mathcal{J}}_s^0 = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Sigma} d\theta d\varphi \dot{\mathcal{J}}_s^{01} = M, \quad (5.23)$$

где снова граница $\partial\Sigma$ области Σ представляет собой сферу $r = r_0$, как для материального шара, а затем берется предел $r_0 \rightarrow \infty$. Результат (5.23) можно интерпретировать как полную массу черной дыры, поскольку при $r_0 \rightarrow \infty$ 4-вектор (5.20) асимптотически стремится к времениподобному вектору Киллинга $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$. Если заряд (5.23) рассчитывается при конечном $r = r_0$, его можно интерпретировать как энергию, измеренную наблюдателями, покоящимися при $r = r_0$. Приемлемый результат (5.23) показывает нам, что указанный выше выбор изотропной калибровки Шварцшильда как раз соответствует задаче вычисления полной массы.

Полезно сравнить изотропную калибровку Шварцшильда со статической калибровкой Шварцшильда. Изотропные координаты в (5.14) связаны со статическими координатами Шварцшильда в (4.1) соотношением $R = r(1 + M/2r)^2$. Здесь R — это шварцшильдова координата в (4.1). Применяя это преобразование к компонентам тетрады (5.15), можно получить компоненты диагональной тетрады в (4.3) в статической калибровке Шварцшильда; компоненты ИСС (5.17) не меняются и совпадают с компонентами (4.5). Таким образом, изотропная калибровка Шварцшильда и статическая калибровки Шварцшильда представляют собой одну и ту же калибровку, представленную в разных координатах. По определению калибровки, данному выше, результат (5.23) как раз и отражает их совпадение.

Для описания движущейся черной дыры авторы [62] применяют координатное преобразование (5.5) к метрике *с чертой* (5.10) и получают метрику движущейся черной дыры в системе отсчета $\{x^\alpha\}$:

$$ds^2 = -\bar{\alpha}^2 dt^2 + \gamma^2(\psi^4 - \alpha^2 v^2)(dx + \bar{\beta} dt)^2 + \psi^4(dy^2 + dz^2). \quad (5.24)$$

Здесь $\bar{\alpha} = \alpha\gamma^{-1}(1 - \alpha^2 v^2/\psi^4)^{-1/2}$; $\bar{\beta} = -v(1 - \alpha^2/\psi^4)(1 - \alpha^2 v^2/\psi^4)^{-1}$, $\alpha = \alpha(\bar{r})$ и $\psi = \psi(\bar{r})$, где $\bar{r}^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2$. Перейдем к *собственной* системе отсчета движущейся черной дыры $\{\bar{x}^\alpha\}$, определяемой метрикой (5.10), но *с чертой*, и связанным с ней наблюдателям аналогично статическому случаю (5.20). Повторяя все шаги, проделанные для статической черной дыры, и сохраняя полученную статическую калибровку относительно черной дыры, получаем в координатах $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\dot{\mathcal{J}}_s^{\bar{\alpha}}(\bar{r}) = [\dot{\rho}(\bar{r}), 0, 0, 0], \quad (5.25)$$

где зависимость $\dot{\rho}(\bar{r})$ точно такая же, как для (5.22), и $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$. Отметим, что здесь были использованы собственные вектора статических наблюдателей $\xi^{\bar{\alpha}} = (-\alpha^{-1}(\bar{r}), 0, 0, 0)$ в

системе отсчета $\{\bar{x}^\alpha\}$. Подчеркнем, что в системе $\{\bar{x}^\alpha\}$ мы, конечно, повторяем результат (5.23): $\bar{E}_s = M$ для полной массы.

Поскольку калибровка уже выбрана, а решение (5.24) получается из метрики с чертой (5.10) с использованием (5.5), ковариантный формализм [23; 24] позволяет преобразовать компоненты тока (5.25) с использованием (5.5) в систему $\{x^\alpha\}$:

$$\dot{\mathcal{J}}_m^\alpha(\bar{r}) = \left[\gamma \dot{\rho}(\bar{r}), \gamma v \dot{\rho}(\bar{r}), 0, 0 \right]. \quad (5.26)$$

Формально (5.26) совпадает с током (5.7) для шара материи в пространстве Минковского. Точно так же интегрирование компонентов (5.26) фактически повторяет интегрирование в (5.8) и (5.9). Единственное отличие состоит в том, что согласно (2.55) можно перейти к поверхностному интегрированию, как в (5.23), а затем взять предел $r' = r_0 \rightarrow \infty$. Наконец, мы получаем полные массу и импульс для движущейся черной дыры:

$$E_m = \gamma M; \quad P_m^1 = \gamma v M, \quad (5.27)$$

что находится в полном соответствии с выводами специальной теории относительности.

В этом разделе, чтобы рассчитать энергию и импульс движущейся черной дыры, существенным было использовать свойства полной ковариантности нашего похода [23; 24]. Однако, для получения конечного результата (5.27) были использованы глобальные лоренцевы преобразования (5.5), примененные к плотности энергии, как компоненте вектора энергии-импульса в системе отсчета $\{\bar{x}^\alpha\}$ с собственными векторами статических наблюдателей в этой же системе отсчета. Более интересным является расчет энергии и импульса напрямую для движущейся черной дыры (5.24) в системе отсчета $\{x^\alpha\}$ с вектором статических наблюдателей (5.20). Именно это мы делаем в следующем разделе. При этом является важным анализ использования возможных калибровок.

5.3 Энергия, импульс и соответствующие калибровки

В собственной системе отсчета $\{\bar{x}^\alpha\}$ и для связанной с ней изотропной калибровки Шварцшильда компоненты $S_{\bar{\sigma}}^{m\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ суперпотенциала в (2.50) - это в точности компоненты (5.13), только с чертой. Нижний индекс «m» означает, что величина связана с движущейся черной дырой. В силу полной ковариантности формализма мы представляем компоненты $S_{\bar{\sigma}}^{m\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ как $S_{\sigma}^{m\alpha\beta}$ в системе отсчета $\{x^\alpha\}$ с использованием преобразования координат (5.5). Конечно, компоненты $S_{\sigma}^{m\alpha\beta}$ в системе $\{x^\alpha\}$ отличаются от компонент $\dot{S}_{\sigma}^{m\alpha\beta}$ в (5.13) в системе $\{x^\alpha\}$.

Для вычисления полной энергии движущейся черной дыры в системе $\{x^\alpha\}$ снова воспользуемся общими формулами (2.55). Таким образом, мы используем ту же логику, что и в (5.23), только с индексом «m». Таким образом

$$E^m = \lim_{r \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma_r} dx dy dz \mathcal{J}^0(\xi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma_r} dx dy dz \partial_k \dot{\mathcal{J}}^{0k}(\xi), \quad (5.28)$$

где $\partial\Sigma_r$ ($r = \text{const}$) — внешняя граница Σ_r . Чтобы вычислить это выражение, мы используем следующее. Во-первых, мы уже провели более простой расчет для статического случая в изотропной системе координат в изотропной калибровке Шварцшильда. Во-вторых, поскольку мы рассматриваем предел $r \rightarrow \infty$, членами, не дающими вклада в этот предел, можно пренебречь. Таким образом, интегрирование (5.28) проводится на гиперповерхности $t = \text{const}$. Без ограничения общности можно положить $t = 0$, и затем сделать на этой гиперповерхности преобразование координат $x = \bar{x}/\gamma, y = \bar{y}, z = \bar{z}$. Тогда $r^2 = \bar{r}^2/\gamma^2 + v^2(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$ или $\bar{r}^2 = r^2 + \gamma^2 v^2 x^2$. Поэтому можно заменить $r \rightarrow \infty$ на $\bar{r} \rightarrow \infty$ и аналогично на гиперповерхности $t = \text{const}$, и, таким образом, (5.28) переписывается как

$${}^m E = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} \iiint_{\Sigma_{\bar{r}}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \partial_k \mathcal{J}^{0k}(\xi). \quad (5.29)$$

Здесь предел вычисляется для поверхности $\partial\Sigma_{\bar{r}}$, определенной равенством $\bar{r} = \text{const}$. Подынтегральная функция в (5.29) переписывается как

$$\partial_k \mathcal{J}^{0k}(\xi) = \partial_{\beta} \mathcal{J}^{0\beta}(\xi) = \frac{1}{\kappa} \partial_{\beta} \left(h(x^{\alpha}) S_{\sigma}^{0\beta} \xi^{\sigma} \right) = \frac{1}{\kappa} \partial_{\beta} \left(h(\bar{r}) S_{\sigma}^{0\beta} \xi^{\sigma} \right). \quad (5.30)$$

Поскольку определитель преобразований Лоренца (5.5) равен единице, можно преобразовать $h(x^{\alpha}) = \det h^a_{\mu}$ просто в $h(\bar{r}) = \det h^a_{\bar{\mu}}$. Таким образом, последнее равенство в (5.30) выполняется из-за ковариантности дивергенции, которая содержит тензорную плотность веса +1. В качестве наблюдателя мы можем снова выбрать статического наблюдателя с собственным вектором (5.20), для которого $\xi^{\sigma} \rightarrow (-1, 0, 0, 0)$ при $r, \bar{r} \rightarrow \infty$. Наконец, для вычисления (5.29) нам понадобится асимптотическое поведение при $r, \bar{r} \rightarrow \infty$ величины

$${}^m S_0^{0\bar{\beta}} \xi^0 = S_{\sigma}^{0\bar{\beta}} \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^0} \xi^0 = -S_0^{0\bar{\beta}} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \text{neglectable terms}. \quad (5.31)$$

Последние члены не важны из-за асимптотического поведения (5.13), записанного в координатах с чертой. Учитывая (5.5), перепишем (5.30) как

$$\partial_k \mathcal{J}^{0k}(\xi) = \gamma^2 \partial_{\bar{k}} \dot{\mathcal{J}}_{\bar{s}}^{\bar{0}\bar{k}}(\xi) + \text{neglectable terms} \quad (5.32)$$

и подставим его в (5.29)

$${}^m E = \gamma \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma_{\bar{r}}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \partial_{\bar{k}} \dot{\mathcal{J}}_{\bar{s}}^{\bar{0}\bar{k}}(\xi) = \gamma \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Sigma_{\bar{r}}} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} \dot{\mathcal{J}}_{\bar{s}}^{\bar{0}\bar{1}}(\xi) = \gamma \overset{s}{E} = \gamma M. \quad (5.33)$$

Вычисления ведутся в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, введенных теперь на гиперповерхности $t = \text{const}$. Последний интеграл записан в сферических координатах, фактически повторяя вычисление (5.23), которое дает энергию неподвижной черной дыры $\overset{s}{E}$.

Формулы (2.55), (2.50) для определения глобальных сохраняющихся величин достаточно универсальны, и выбор вектора ξ определяет их интерпретацию. Формулы (5.28)-(5.30) универсальны вплоть до выбора вектора ξ . Чтобы вычислить импульс движущейся черной дыры, выбираем $\xi^{\alpha} = (0, \xi^1, 0, 0)$, где $\xi^1 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, задающий вектор Киллинга трансляции по x на бесконечности $r \rightarrow \infty$. В этом случае необходимо вывести асимптотику выражения:

$${}^m S_1^{0\bar{\beta}} \xi^1 = S_{\sigma}^{0\bar{\beta}} \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^1} \xi^1 = S_0^{0\bar{\beta}} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \text{neglectable terms}. \quad (5.34)$$

Опять же, последние члены не важны из-за асимптотического поведения (5.13), записанного в координатах с чертой. Заметим, что знак «минус» в $S_0^{\bar{0}\bar{i}}$ в (5.13) и знак «минус» в $\partial\bar{t}/\partial x = -v\gamma$ компенсируются, таким образом, основное слагаемое в (5.34) положительно. С учетом (5.5) перепишем (5.30) для ξ , асимптотического вектора трансляции по x , в виде

$$\partial_k \mathcal{J}^{0k}(\xi) = v\gamma^2 \partial_{\bar{k}} \dot{\mathcal{J}}^{\bar{0}\bar{k}}(\xi) + \text{neglectable terms.} \quad (5.35)$$

Таким образом, аналогично (5.33) для полного импульса движущейся черной дыры:

$$\overset{m}{P} = v\gamma \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma_{\bar{r}}} d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z} \partial_{\bar{k}} \dot{\mathcal{J}}^{\bar{0}\bar{k}}(\xi) = v\gamma \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Sigma_{\bar{r}}} d\bar{\theta}d\bar{\varphi} \dot{\mathcal{J}}^{\bar{0}\bar{1}}(\xi) = v\gamma \overset{s}{E} = v\gamma M. \quad (5.36)$$

Видно, что результаты (5.33) и (5.36) приемлемы с точки зрения теории относительности.

Возвращаясь к калибровкам, введенным в главе 4, напомним, что как статическая калибровка Шварцшильда, так и отличающаяся от нее калибровка Леметра не принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, но тем не менее обе получаются путем «выключения» гравитации. Однако выше мы показали, что если применить к статической тетраде (4.3) радиальный буст (4.4), а ИСС (4.5) оставить покомпонентно неизменной, то получится калибровка Леметра. Здесь, следуя той же логике в построении «движущейся калибровки», применим к тетраде (5.11) буст, имеющий смысл движения черной дыры по оси x с постоянной скоростью относительно бесконечно далекого наблюдателя:

$$(\Lambda_{boost})^{a' b} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

при этом ИСС остается нулевой. С другой стороны, чтобы оставаться в изотропной калибровке Шварцшильда, одновременно с преобразованием тетрады мы должны применить глобальный буст (5.37) к нулевой ИСС в соответствии с (1.8). Мы видим, что при таком преобразовании ИСС остается нулевой. Таким образом, «движущаяся калибровка» и изотропная калибровка Шварцшильда - это одна и та же калибровка. Это означает, что приемлемые результаты как для полной энергии, так и для полного импульса движущейся черной дыры фактически были получены также и в рамках соответствующей «движущейся калибровки». Конечно, вышеупомянутая «движущаяся калибровка» может быть получена с помощью принципа «выключения» гравитации для движущейся тетрады. Действительно, после применения глобального буста (5.37) к Л-ЧСС (5.12) она остается прежней, следовательно, «выключив» гравитацию, мы снова получим нулевую ИСС.

5.4 Итоги Главы

Обсудим результаты. Во-первых, преобразование (5.5), примененное к (5.10), представляет глобальный лоренцев буст для удаленных наблюдателей. Таким образом, результаты

(5.27), представляющие глобальные (на бесконечности) сохраняющиеся величины, можно интерпретировать как приемлемые.

Во-вторых, результат (5.23) был получен путем выбора (5.10) или (5.14) с наблюдателями (5.20). Тот же результат может быть получен с использованием вектора Киллинга $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ вместо (5.20). Однако, следуя этой логике, для вычисления плотности импульса потребовался бы пространственноподобный вектор Киллинга, но его не существует для рассматриваемого решения. Здесь, следуя аналогиям в пространстве Минковского, мы интерпретируем компоненты сохраняющегося тока для статической черной дыры как компоненты вектора энергии-импульса, когда плотность энергии и плотность импульса измеряются локальными наблюдателями. Компоненты тока для движущейся черной дыры получаются соответствующим преобразованием (5.5), и применяя к нему с последующее интегрирование, мы получением окончательно результаты (5.27).

В-третьих, использование формализма [23; 24] напрямую дает возможность использовать ξ как асимптотические вектора смещений Киллинга, что дает возможность получить ожидаемый импульс.

В-четвертых, при детальном исследовании решения Шварцшильда в TEGR было установлено, что для одного и того же решения «выключение» гравитации в разных тетрадах может в общем случае приводить к разным ИСС, в том числе дающим неприемлемые результаты. Здесь же «выключение» гравитации в (5.10) с (5.11) и (5.14) с (5.15) дало единственную изотропную калибровку Шварцшильда, которую мы использовали и в которой тетрада (5.11) является собственной тетрадой, т.е. ассоциированной с нулевой ИСС, и эта калибровка приводит к физически значимым результатам (5.23) и (5.27).

В-пятых, «движущаяся калибровка», получаемая для движущейся тетрады путем «выключения» гравитации, также совпадает со статической калибровкой Шварцшильда и дает физически приемлемые результаты (5.33) и (5.36).

Глава 6. Тетрады свободно падающих наблюдателей в $f(T)$ -гравитации

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [55; 56], выполненные автором диссертации совместно с коллегами, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

6.1 Полевые уравнения в теориях $f(T)$

Одной из самых популярных моделей модифицированной гравитации является модель $f(T)$, где лагранжиан принимается как произвольная функция скаляра кручения (1.27) из лагранжиана TEGR (1.17) [6–9]

$$\dot{\mathcal{L}}_f = \frac{h}{2\kappa} f(\dot{T}). \quad (6.1)$$

Большое внимание уделялось нахождению решений антисимметричной части уравнений поля. Либо идет поиск тетрад, которые удовлетворяют антисимметричным уравнениям поля с нулевой ИСС¹, называемых *хорошими тетрадами* [58]. Либо антисимметричная часть уравнений позволяет найти соответствующую спиновую связность для произвольных тетрад, удовлетворяющих полевым уравнениям, в ковариантной формулировке теории [5; 41].

Чтобы понять важность антисимметричной части уравнений поля, рассмотрим версию уравнений поля $f(T)$, полученную варьированием по компонентам тетрады и полностью выраженную в лоренцевых индексах:

$$E_{ab} = h\kappa\Theta_{ab}, \quad (6.2)$$

где $E_{ab} = \eta_{bc}h^c{}_\rho E_a{}^\rho$, вычисляется из вариации гравитационной части действия по компонентам тетрады и имеет вид [5]:

$$E_{ab} = h \left(f_{TT} \dot{S}_{ab}{}^\nu \partial_\nu \dot{T} + f_T \overset{\circ}{G}_{ab} + \frac{1}{2} \eta_{ab} (f - \dot{T} f_T) \right), \quad (6.3)$$

где $\overset{\circ}{G}_{ab}$ — тензор Эйнштейна в тетрадных индексах, f_T и f_{TT} — первая и вторая производная от $f(\dot{T})$ по \dot{T} соответственно. Для сокращения записей будем опускать жирную точку над скаляром кручения, предполагая: $T \equiv \dot{T}$, $f(T) \equiv f(\dot{T})$, $f_{TT} \equiv f_{\dot{T}\dot{T}}$. Из формы уравнений поля (6.2), (6.3) видно, что первое слагаемое дает решающее отличие динамики теории

¹По скольку в модифицированных телепараллельных теориях спиновая связность становится элементом динамики, то она может иметь уже несколько другую физическую интерпретацию, но мы по прежнему будем использовать эту аббревиатуру и в модифицированных телепараллельных теориях.

от ОТО. Это также единственный член, который дает вклад в антисимметричную часть уравнений поля:

$$E_{[ab]} = f_{TT} \dot{S}_{[ab]}{}^\nu \partial_\nu \dot{T} = 0. \quad (6.4)$$

Таким образом, антисимметричные уравнения поля (6.4) содержат существенную информацию об истинной динамике $f(T)$, чем и обусловлен наш интерес к ним. Более того, в ковариантной формулировке можно показать, что вариация по спиновой связности приводит именно к этой антисимметричной части тетрадных уравнений поля и, следовательно, содержит ту же информацию [53].

Можно заметить, что в случае $f_{TT} = 0$ теория тривиально удовлетворяет этим уравнениям, но именно в этом случае теория $f(T)$ становится ТЕGR. Аналогичным образом случай $T = \text{const}$ приводит теорию к ОТО с эффективной космологической постоянной [63; 64]. Нас в первую очередь интересуют нетривиальные решения этих антисимметричных уравнений, поскольку именно они могут представить новые решения в $f(T)$ -гравитации.

6.2 Статические сферически симметричные решения в теориях $f(T)$

Статическое сферически симметричное пространство-время в общем виде может быть представлено метрикой

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-A^2, B^2, r^2, r^2 \sin^2 \theta) \quad (6.5)$$

где A, B — некоторые функции от r , которые в случае сведения теории к ТЕGR сводятся к компонентам метрики (4.1).

Мы можем определить различные тетрады аналогично тетрадам ТЕGR, описанным выше, где мы сохраняем те же самые буквенные обозначения, но добавляем черту над величиной, чтобы отличить ее от случая ТЕGR, т. е. например диагональную тетраду для статической метрики (6.5) мы обозначаем как

$$\bar{h}^a{}_\mu \equiv \text{diag}(A, B, r, r \sin \theta). \quad (6.6)$$

В случае ТЕGR выбор тетрады \bar{h}^B (4.3) с нулевой ИСС привел бы к расходящимся сохраняющимся зарядам. В случае $f(T)$ тетрада \bar{h}^B (6.6) в паре с нулевой ИСС приводит к нетривиальным значениям $\dot{S}_{[ab]}{}^\nu \partial_\nu \dot{T}$ в антисимметричных уравнениях поля. В этом случае антисимметричные уравнения поля выполняются только при $f_{TT} = 0$ и, следовательно, теория тривиально сводится к ТЕGR, поэтому (6.6) является *плохой тетрадой* [58].

Решение этой проблемы состоит в том, что мы должны либо рассмотреть в качестве хорошей тетрады [58]

$$\bar{h}^A{}^\mu{}_\mu = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b \bar{h}^B{}^\mu{}_\mu \quad (6.7)$$

с нулевой ИСС, где $(\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a_b$ задается в (3.19). Либо использовать тетраду (6.6) с соответствующей ненулевой ИСС, которая оказалась равной той, что в (4.5) [41],[5].

Можно заметить, что в этом очень конкретном случае решение проблемы антисимметричных уравнений поля в случае $f(T)$ кажется эквивалентным проблеме нахождения сохраняющихся зарядов в TEGR². Поэтому интересно рассмотреть аналогии с падающими тетрадами из предыдущих разделов, чтобы продемонстрировать различия между этими двумя понятиями.

В частности, сосредоточимся на свободно падающей тетраде для общего сферически-симметричного пространства-времени (6.5). В случае TEGR мы могли бы рассмотреть радиальный буст, заданный в (4.4), (4.5), но это требует знания решения уравнений поля $A = 1/B = f^{\frac{1}{2}}$, которые изначально неизвестны.

Следовательно, в случае $f(T)$ мы должны рассматривать свободно падающую тетраду для общего сферически-симметричного пространства-времени (6.5). Чтобы ее найти, определим обобщенное ускорение в виде: $\varphi^a_b = \overset{\circ}{A}^a_{b\dot{0}}$ [31]. Для диагональной тетрады (6.6) находим, что единственная ненулевая компонента равна $\varphi^{\hat{0}}_{\hat{1}} = A'/(AB)$, и, следовательно, эта диагональная тетрада представляет собой статического наблюдателя. Затем мы можем рассмотреть буст в направлении r (4.4) с некоторой общей функцией $\bar{\beta} \equiv \bar{\beta}(r)$ и найти, что ненулевое обобщенное ускорение преобразуется как

$$\varphi^{\hat{0}}_{\hat{1}} = \varphi^{\hat{1}}_{\hat{0}} = \frac{\bar{\gamma}^2 A' + A\bar{\beta}\bar{\beta}'}{AB\bar{\gamma}^3}, \quad (6.8)$$

где $\bar{\gamma} = (1 - \bar{\beta}^2)^{-1/2}$, и штрих обозначает производную по радиальной координате.

Приравнявая это значение к нулю, мы находим, что обобщенное ускорение обращается в нуль для $\bar{\beta} = \pm\sqrt{1 - c_1 A^2}$ в (4.4). Без ограничения общности можно выбрать решение со знаком плюс и выбрать $c_1 = 1$, т.е.

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - A^2}. \quad (6.9)$$

Мы можем определить свободно падающую тетраду для сферически симметричного пространства-времени (6.5) следующим образом:

$$\bar{h}^a_{\mu} = \bar{\Lambda}_{(boost)}^a_b \bar{h}^b_{\mu}, \quad (6.10)$$

где $\bar{\Lambda}_{(boost)}^a_b$ — радиальный буст, аналогичный (4.4), с (6.9).

Затем попробуем определить в $f(T)$ аналог собственной тетрады Леметра (4.10), комбинируя этот радиальный буст и локальное преобразование Лоренца (3.19) собственной тетрады в TEGR к диагональной, которое также имеет место в $f(T)$ в (6.7), т.е.

$$\bar{D}^a_{\mu} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a_b \bar{C}^b_{\mu} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a_b \bar{\Lambda}_{(boost)}^b_c \bar{h}^c_{\mu}. \quad (6.11)$$

Более того, тетрада \bar{D}^a_{μ} может быть получена таким же способом, как и в TEGR - «выключением» гравитации. Применяя аналогичную логику, мы (i) выбираем падающую тетраду

²Один из интересных случаев, когда это происходит, это случай пространственно-плоского пространства-времени FRWL, где диагональная декартова тетрада является и собственной, и хорошей тетрадой.

$\bar{h}^a{}_\mu$ в качестве начальной, (ii) вычисляем Л-ЧСС для метрики (6.5) и тетрады $\bar{h}^a{}_\mu$ и соответствующий тензор Римана, (iii) «выключаем» гравитацию, положив $A(r) \rightarrow 1$, $B(r) \rightarrow 1$, что зануляет тензор Римана и (iv) получаем в точности выражение (4.7) для Л-ЧСС при принятых условиях. Заметим, что даже не обязательно брать свободно падающую метрику, чтобы диагонализировать $\bar{h}^a{}_\mu$, и получить этот результат. Далее можно проверить, что полученная таким образом для $\bar{h}^a{}_\mu$ ИСС (предел Л-ЧСС при $A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 1$) обратится в нуль после вращения (1.8) с $(\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b$, тогда как $\bar{h}^a{}_\mu$ после вращения (1.7) с $(\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b$ перейдет в $\bar{D}^a{}_\mu$.

Теперь мы можем перейти к выписыванию компонент уравнений поля для (6.11) и нулевой ИСС. Находим, что их антисимметричная часть (6.4) определяется выражениями

$$E_{[\hat{0}\hat{1}]} = \frac{2f_{TT}\bar{\beta}T'}{rAB} \cos \varphi \sin \theta. \quad (6.12)$$

$$E_{[\hat{0}\hat{2}]} = -\frac{2f_{TT}\bar{\beta}T'}{rAB} \cos \theta, \quad (6.13)$$

$$E_{[\hat{0}\hat{3}]} = \frac{2f_{TT}\bar{\beta}T'}{rAB} \sin \varphi \sin \theta, \quad (6.14)$$

откуда сразу можно увидеть проблему и понять, почему эта конструкция не работает в случае $f(T)$ -гравитации. Эти уравнения выполняются, только если либо $f_{TT} = 0$, что сводит теорию к пределу TEGR, либо к $\bar{\beta} = 0$, что подразумевает $A = 1$,³ либо $T' = 0$, что приводит к ОТО с эффективной космологической постоянной.

Теперь рассмотрим скаляр кручения как для решения TEGR (4.10), так и для обобщенного аналога (6.11). В то время как в первом случае имеем

$$T(\bar{h}^a{}_\mu, 0) = 0, \quad (6.15)$$

то в последнем случае находим выражение

$$T(\bar{D}^a{}_\mu, 0) = 2 \frac{A(1 + B^2) - 2B + 2rA'}{r^2AB^2}, \quad (6.16)$$

которое, в общем случае отлично от нуля и сводится к (6.15) только в случае решения TEGR $A = 1/B = f^{\frac{1}{2}}$. То есть не существует такого решения, которое занулило бы антисимметричную часть уравнений (6.4), не сводя теорию к TEGR.

Отсюда видно, что радиальный буст (4.4) с (4.5) в случае TEGR играет особую роль, так как делает тетраду как свободно падающей, так и обращающей в нуль скаляр кручения. С другой стороны, в случае с тетрадой в общем виде (6.6) радиальный буст с $\bar{\beta}$ в (6.9) только делает наблюдателя свободно падающим, но не обращает в ноль соответствующий скаляр кручения, из чего следует, что (6.11) - плохая тетрада.

А теперь объясним, почему это заслуживает нашего внимания. В случае TEGR свободно падающая тетрада (4.10) дает нам конечный сохраняющийся заряд - либо (4.9), либо

³В принципе можно было бы рассмотреть и случай $A = 1$ с произвольным B . Однако, как показано в Дополнении A.2, из симметричных уравнений поля также следует, что и $B = 1$. То есть получается тривиальный случай, который не дает никакой новой хорошей тетрады для $f(T)$ -гравитации.

(4.15), и, следовательно, может считаться собственной тетрадой. Однако, как мы только что показали, аналогичное построение с помощью «выключения» гравитации обобщенной свободно падающей тетрады (6.11), имеющей аналогичную конструкцию, не дает хорошей тетрады в $f(T)$ -гравитации, удовлетворяющей уравнениям поля (с нулевой ИСС). Таким образом, это интересная иллюстрация того, что хорошие тетрады в $f(T)$ -гравитации отличаются от собственных тетрад в TEGR и не всегда могут быть построены простым обобщением процедуры построения собственных тетрад в TEGR.

Ради полноты нашего анализа мы можем рассмотреть буст, который обращает в нуль скаляр кручения, обобщая подход, представленный в [63; 64]. Мы можем рассмотреть зависящее от времени радиальное ускорение с величиной

$$\beta^* = -\tanh\left(c_1 - \frac{t(A + 2rA')}{2rB}\right) \quad (6.17)$$

и определить тетраду

$$\bar{h}^a{}_{\mu} = \bar{\Lambda}_{(boost)}{}^a{}_b(\beta^*) \bar{h}^b{}_{\mu} \quad (6.18)$$

для которой скаляр кручения равен нулю

$$T(\bar{h}^a{}_{\mu}, 0) = 0. \quad (6.19)$$

Хотя мы не получили здесь никакой новой хорошей тетрады, мы продемонстрировали, как найти наиболее общее скалярное решение с нулевым кручением для общего сферически-симметричного пространства-времени (6.5). В этом смысле наш результат (6.18) является интересным новым результатом среди предыдущих работ [63–65].

6.3 Обсуждение и итоги Главы

В настоящей главе мы рассмотрели несколько вопросов, связанных с проблемой локально лоренцевых степеней свободы и сравнением определений собственных тетрад в TEGR и хороших тетрад $f(T)$ -гравитации.

В $f(T)$ -гравитации эти локальные степени свободы Лоренца играют еще более важную роль, поскольку они включены в уравнения поля. В исходной нековариантной формулировке $f(T)$ -гравитации уравнения поля непротиворечивы только для особого класса тетрад, называемых *хорошими* тетрадами [58]. Для геометрий Шварцшильда и Фридмана мы получили, что хорошие тетрады совпадают с собственными тетрадами из TEGR. В ковариантной формулировке мы рассматриваем ненулевую ИСС, которая позволяет нам использовать произвольную относительно лоренцева вращения тетраду в уравнениях поля и, следовательно, мы можем «восстановить» симметрию относительно локальных лоренцевых вращений. Однако эта симметрия восстанавливается только после того, как мы определяем правильную

ИСС, соответствующую тетраде. Поэтому, как и в случае с TEGR, необходимо определить лоренцевы степени свободы в обеих постановках.

Можно сравнить неоднозначность определения собственной тетрады в TEGR путем «выключения» гравитации с проявлением так называемых *остаточных симметрий* в $f(T)$ -гравитации. Они открыты в пространстве-времени FRWL, где было замечено существование класса локально-лоренцевых симметрий которые преобразуют одну хорошую тетраду в другую хорошую тетраду [66; 67]. Это означает, что, несмотря на явное нарушение локальной Лоренц-инвариантности в нековариантной постановке, не все симметрии нарушаются, некоторые из них сохраняются. Получается, что хорошие тетрады в $f(T)$ и, аналогично, собственные тетрады в TEGR не уникальны и являются классом эквивалентности тетрад, связанных остаточными симметриями. В ковариантной формулировке это означает, что могут существовать две тетрады, связанные остаточной симметрией, и обеим им соответствует одна и та же ИСС, с чем мы и столкнулись. См. недавнее обсуждение решения Керра [50], где было продемонстрировано, что две тетрады Керра соответствуют одной и той же ИСС. Об использовании этих симметрий при анализе проблемы степеней свободы в $f(T)$ -гравитации см. [68]⁴.

Но несмотря на схожесть проблемы неоднозначного определения собственной тетрады в TEGR и наличия остаточных локально-лоренцевых симметрий в $f(T)$ -гравитации, сами по себе хорошие и собственные тетрады будут отличаться. Мы продемонстрировали, что если в свободно падающей системе в теории $f(T)$ попытаться построить хорошую тетраду по аналогии с собственной свободно падающей тетрадой TEGR, или же угадать ее при помощи «выключения» гравитации, попытка проваливается, поскольку такая тетрада не удовлетворяет уравнениям поля, что указывает на то, что собственные и хорошие тетрады на самом деле различны, а «выключение» гравитации в расширенных телепараллельных теориях не применимо.

Отсюда следует необходимость более пристального внимания к проблеме локально-лоренцевых степеней свободы в TEGR и продолжения поиска более точного определения собственной тетрады. Мы также должны продолжить попытки понять связь между понятиями собственной тетрады в TEGR и хорошей тетрады в теории $f(T)$.

⁴Подробное обсуждение см. в [69]

Глава 7. Теория кручения, неминимально связанного со скалярным полем

При написании данной Главы диссертации использована публикация [70], выполненная автором диссертации совместно с коллегами, в которой, согласно Положению о присуждении учёных степеней МГУ, отражены методы, основные результаты, положения и выводы исследования.

В этой главе мы рассматриваем недавно предложенный класс расширенных телепараллельных теорий гравитации, со скалярным полем, неминимально связанным с кручением плоской связности, согласованной с метрикой. Этот класс теорий: (i) построен по аналогии с хорошо изученным классом теорий со скалярным полем, неминимально связанным с Римановой кривизной, (ii) имеет с ним ряд общих черт, таких как конформные свободы, и (iii) является его расширением. Для этого класса теорий мы определяем параметризованный постньютоновский (ППН) предел как для массивного, так и для безмассового скалярного поля. В случае массивного скалярного поля определяются эффективная гравитационная постоянная и постньютоновский параметр γ , оба из которых зависят от расстояния между гравитирующей и пробной массаами. В безмассовом случае мы вычисляем полный набор параметров и обнаруживаем, что только γ и β потенциально отклоняются от своих значений в ОТО. В частности, мы находим, что для минимально связанного скалярного поля теория становится неотличимой от ОТО на уровне постньютоновского приближения.

Среди теорий с тензором кривизны важным классом модифицированных теорий гравитации являются теории со скалярной кривизной [71; 72]. Общим для этих теорий является то, что они содержат одно или несколько скалярных полей, которые, как правило, неминимально связаны с кривизной связности Леви-Чивиты. Гравитационную динамику теории определяет взаимодействие метрических и скалярных полей.

Класс теорий, представляющих особый интерес, определяется наличием четырех произвольных функций в функционале действия, где любой конкретный выбор этих функций определяет конкретную теорию [73]. Замечательным свойством этого класса скалярно-тензорных теорий является их поведение при конформных преобразованиях метрики, связывающих между собой различные теории внутри этого класса. Продолжаются споры о том, приводят ли эти конформно связанные теории к физически эквивалентным предсказаниям [74–85]. В результате развития этой дискуссии был идентифицирован ряд инвариантных величин, которые можно использовать для выражения физических наблюдаемых независимо от выбора конформной системы [86; 87].

Вышеупомянутый класс теорий, как и многие другие модифицированные теории гравитации, интерпретируются как модификации ОТО в ее стандартной формулировке - в терминах кривизны связности Леви-Чивиты, но можно рассмотреть и альтернативные отправные точки для модификаций, например TEGR, STEGR и другие эквивалентные ОТО теории [1; 2]. Эти формулировки вызвали повышенный интерес в последние годы из-за того,

что они демонстрируют больше сходства с теориями калибровочных полей, что потенциально обеспечивает их связь с теориями, описывающими другие фундаментальные взаимодействия в природе. Здесь мы сосредоточимся на так называемых телепараллельных моделях гравитации, где кручение играет роль кривизны как величины, опосредующей гравитационное взаимодействие [3; 4; 25; 88; 89]. Здесь мы также рассматриваем ковариантную формулировку теории, которая включает произвольную спиновую связность нулевой кривизны и ассоциированную с метрикой [5; 41; 53; 90].

TEGR был отправной точкой для многочисленных модифицированных теорий гравитации, большинство из которых нацелены на ответы на вышеупомянутые вопросы, поднятые по отношению к общей теории относительности в свете космологических наблюдений и противоречий с физикой элементарных частиц [12; 91–98]. В то время как большинство этих теорий, включая расширения с помощью скалярных полей, используют связность Вайценбека для реализации телепараллельной геометрии, недавно была предложена Лоренц-ковариантная формулировка теорий гравитации [99], представленных кручением со скалярным полем, которую мы рассматриваем. Оказывается, что большой класс этих теорий можно построить, следуя принципу Лоренц-ковариантности [100–102]. В этом классе теорий можно найти особый подкласс теорий, эквивалентных подклассу теорий кривизны со скалярным полем [73; 102]. Исследуемый здесь класс теорий также демонстрирует инвариантность относительно масштабных преобразований конформной системы, как и в теориях кривизны со скалярным полем.

Применение формализма ППН к конкретным теориям гравитации кручения со скалярным полем, в частности к телепараллельной модели темной энергии [103], показало что эти теории дают те же значения ППН параметров, что и общая теория относительности, и поэтому их нельзя отличить от ОТО с помощью вышеупомянутых измерений. Однако также было обнаружено, что более общие теории, имеющие неминимальную связь с телепараллельным поверхностным членом, имеют постньютоновский предел [104], отличный от ОТО. Мы обобщаем эти более ранние исследования на упомянутый выше общий класс теорий гравитации кручения со скалярным полем [102]. Поскольку мы используем ковариантную формулировку этих теорий, мы используем недавно разработанную адаптацию ППН формализма к ковариантным телепараллельным теориям гравитации [105]. Воспользовавшись свободой выбора конформной системы отсчета в рассматриваемом нами классе теорий, выберем систему Жордана для вычисления ППН параметров.

Далее, чтобы не было неверных ассоциаций с предыдущими результатами, а также для более экономичного изложения, используем следующие немного отличные обозначения: заглавные латинские буквы $A, B, \dots = 0, \dots, 3$ для индексов Лоренца, маленькие греческие буквы $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3$ для координатных индексов, маленькие латинские буквы $i, j, \dots = 1, \dots, 3$ для пространственных индексов. Метрика Минковского η_{AB} и $\eta_{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $(-, +, +, +)$. Также отличаются некоторые обозначения, например, для тетрад, спиновых связностей, и др., которые будут определены самостоятельно.

7.1 Полевые переменные и их динамика

Начнем рассмотрение недавно предложенного класса теорий гравитации [102] с краткого обзора полей, действия и уравнений поля. В этих теориях используется ковариантная формулировка гравитации кручения со скалярным полем [99], где динамические поля задаются тетрадой θ^A_μ , инерциальной спиновой связностью $\omega^A_{B\mu}$ и скалярным полем φ . Для удобства будем использовать оригинальные обозначения, используемые при работе в данном формализме. Метрика теперь записывается как

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB}\theta^A_\mu\theta^B_\nu, \quad (7.1)$$

и тензор кручения имеет вид

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = e_A^\rho (\partial_\mu\theta^A_\nu - \partial_\nu\theta^A_\mu + \omega^A_{B\mu}\theta^B_\nu - \omega^A_{B\nu}\theta^B_\mu), \quad (7.2)$$

где e_A^μ — обратная тетрада, определенная таким образом, что $\theta^A_\mu e_A^\nu = \delta_\mu^\nu$ и $\theta^A_\mu e_B^\mu = \delta_B^A$.

Рассматриваемое действие имеет вид

$$S[\theta^A_\mu, \omega^A_{B\mu}, \varphi, \chi^I] = S_g[\theta^A_\mu, \omega^A_{B\mu}, \varphi] + S_m[e^{\alpha(\varphi)}\theta^A_\mu, \chi^I], \quad (7.3)$$

и, таким образом, распадается на гравитационную часть S_g и часть с материей S_m . Последнее зависит, помимо упомянутых выше динамических полей φ , от произвольного множества χ^I полей материи. Будем предполагать, что источником материи является идеальная жидкость, как подробно обсуждается далее в 7.2. Мы также предполагаем, что нет прямой связи между полями материи χ^I и телепараллельной спиновой связностью $\omega^A_{B\mu}$, и что их связь с тетрадой и скалярным полем осуществляется только через конформно преобразованную метрику $e^{2\alpha(\varphi)}g_{\mu\nu} = e^{2\alpha(\varphi)}\eta_{AB}\theta^A_\mu\theta^B_\nu$ со свободной функцией α скалярного поля. Из этого предположения следует, что вариация действия материи по динамическим полям после интегрирования по частям имеет вид

$$\delta S_m[e^{\alpha(\varphi)}\theta^A_\mu, \chi^I] = \int_M [\Theta_{A^\mu} (\delta\theta^A_\mu + \alpha'(\varphi)\theta^A_\mu\delta\varphi) + \varpi_I\delta\chi^I] \theta d^4x, \quad (7.4)$$

где штрих в $\alpha'(\varphi) = d\alpha/d\varphi$ обозначает производную по φ , и что тензор энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu} = \theta^A_\mu g_{\nu\rho}\Theta_{A^\rho}$ симметричен, $\Theta_{[\mu\nu]} = 0$. Здесь θ обозначает определитель тетрады θ^A_μ , а $\varpi_I = 0$ — уравнения поля материи.

Гравитационную часть действия представим в виде

$$S_g[\theta^A_\mu, \omega^A_{B\mu}, \varphi] = \frac{1}{2\kappa^2} \int_M [-\mathcal{A}(\varphi)T + 2\mathcal{B}(\varphi)X + 2\mathcal{C}(\varphi)Y - 2\kappa^2\mathcal{V}(\varphi)] \theta d^4x, \quad (7.5)$$

где скаляр кручения

$$T = \frac{1}{2}T^{\rho}_{\mu\nu}S_{\rho}{}^{\mu\nu} \quad (7.6)$$

определен через суперпотенциал

$$S_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\nu\mu\rho} + T_{\rho\mu\nu} - T_{\mu\nu\rho}) - g_{\rho\mu}T^{\sigma}{}_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma\mu}, \quad (7.7)$$

и мы использовали кинетический член скалярного поля

$$X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}, \quad (7.8)$$

а также член с неминимальной кинетической связью между скалярным полем и векторной частью кручения (вектором кручения)

$$Y = g^{\mu\nu}T^{\rho}_{\rho\mu}\varphi_{,\nu}. \quad (7.9)$$

Любое конкретное действие этого класса определяется заданием произвольных функций $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{V}$ скалярного поля, в дополнение к произвольной функции α в действии материи. Комбинированное действие (7.3) сохраняет свою форму при конформных преобразованиях $\bar{\theta}^A_{\mu} = e^{\gamma(\varphi)}\theta^A_{\mu}$ тетрады и переопределениях $\bar{\varphi} = f(\varphi)$ скалярного поля [102] с произвольными функциями $\gamma(\varphi)$ и $f(\varphi)$. Это позволяет сократить количество произвольных функций в действии. Поэтому мы перейдем в жорданову систему и, следовательно, примем $\alpha(\varphi) \equiv 0$, чего можно достичь, выполнив конформное преобразование с $\gamma = \alpha$.

Заметим также, что с член, определяющий связь производной, который необходим для придания гравитационному действию инвариантности относительно конформных преобразований, как показано в [102], также может быть записан в виде

$$2\mathcal{C}(\varphi)Y = 2\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}[\tilde{\mathcal{C}}(\varphi)T_{\mu}^{\mu\nu}] - \tilde{\mathcal{C}}(\varphi)B, \quad (7.10)$$

где $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}'$ и мы ввели телепараллельный поверхностный член

$$B = \overset{\circ}{R} + T = 2\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}T_{\mu}^{\mu\nu}. \quad (7.11)$$

Опустив полную дивергенцию в (7.10), мы можем, таким образом, вместо связи с производной рассматривать связь с поверхностным членом B .

Следуя выводу, подробно описанному в [102], мы можем разложить уравнения поля на три отдельных набора уравнений, которые запишем в виде

$$E_{(\mu\nu)} = \kappa^2\Theta_{\mu\nu}, \quad E_{[\mu\nu]} = 0, \quad E = 0. \quad (7.12)$$

Первые два уравнения получаются вариацией действия по тетраде θ^A_{μ} и разделением на симметричную и антисимметричную части. Их левая часть, полученная из вариации гравитационной части (7.5) действия, имеет вид:

$$\begin{aligned} E_{(\mu\nu)} = & (\mathcal{A}' + \mathcal{C})S_{(\mu\nu)}{}^{\rho}\varphi_{,\rho} + \mathcal{A}\left(\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{R}g_{\mu\nu}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathcal{B} - \mathcal{C}'\right)\varphi_{,\rho}\varphi_{,\sigma}g^{\rho\sigma}g_{\mu\nu} \\ & - (\mathcal{B} - \mathcal{C}')\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \mathcal{C}\left(\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\varphi - \overset{\circ}{\square}\varphi g_{\mu\nu}\right) + \kappa^2\mathcal{V}g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

для симметричной части и

$$E_{[\mu\nu]} = (\mathcal{A}' + \mathcal{C})T^{\rho}_{[\mu\nu]}\varphi_{,\rho} \quad (7.14)$$

для антисимметричной части, где $\overset{\circ}{\square}$ - ковариантный оператор Д'Аламбера. Антисимметричное уравнение поля также можно получить, варьируя действие по $\omega^A_{B\mu}$, допуская только

такие вариации, которые сохраняют ее нулевую кривизну. Третье и последнее уравнение поля получается вариацией по скалярному полю. Его левая часть принимает вид

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{A}' T - \mathcal{B} \overset{\circ}{\square} \varphi - \frac{1}{2} \mathcal{B}' g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \mathcal{C} \overset{\circ}{\nabla}_{\mu} T_{\nu}{}^{\nu\mu} + \kappa^2 \mathcal{V}', \quad (7.15)$$

не путать со свертками $E_{\mu\nu}$. Можно было бы решить эти уравнения напрямую, используя разложение теории возмущений, обсуждаемое в следующем разделе. Однако оказывается, что можно значительно упростить эту задачу, выполнив ряд преобразований уравнений поля. Начнем с замены симметричной части уравнений поля на ее разницу с вычтенным следом. Тогда симметричная часть уравнений поля и соответствующая замена имеют вид

$$\bar{E}_{(\mu\nu)} = \kappa^2 \bar{\Theta}_{\mu\nu}, \quad \bar{E}_{(\mu\nu)} = E_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma}, \quad \bar{\Theta}_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Theta_{\rho\sigma}. \quad (7.16)$$

После этого преобразования левая часть соответствующих уравнений поля имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{E}_{(\mu\nu)} = & (\mathcal{A}' + \mathcal{C}) (S_{(\mu\nu)}{}^{\rho} + g_{\mu\nu} T_{\chi}{}^{\chi\rho}) \varphi_{,\rho} + \mathcal{A} \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{C}' g_{\mu\nu} \varphi_{,\rho} \varphi_{,\sigma} g^{\rho\sigma} \\ & - (\mathcal{B} - \mathcal{C}') \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \mathcal{C} \overset{\circ}{\nabla}_{\mu} \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} \varphi + \frac{1}{2} \mathcal{C} \overset{\circ}{\square} \varphi g_{\mu\nu} - \kappa^2 \mathcal{V} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Второе преобразование, которое мы применяем, касается уравнения скалярного поля. Заметим, что левая часть (7.15) содержит производные тетрады второго порядка, которые появляются из ковариантной производной кручения. Их можно убрать, добавив подходящее слагаемое со следом тетрадных уравнений поля, таким образом, преобразованное скалярное уравнение поля примет вид

$$\bar{E} = 2\mathcal{A}E + \mathcal{C} g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = \kappa^2 \mathcal{C} \Theta, \quad (7.18)$$

где левая часть теперь определяется как

$$\bar{E} = (\mathcal{A}' + \mathcal{C}) (\mathcal{A}T - 2\mathcal{C}T_{\mu}{}^{\mu\nu} \varphi_{,\nu}) - (2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\mathcal{C}^2) \overset{\circ}{\square} \varphi + (\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{A}\mathcal{B}' - 3\mathcal{C}\mathcal{C}') g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + 2\kappa^2 (\mathcal{A}\mathcal{V}' + 2\mathcal{C}\mathcal{V}). \quad (7.19)$$

Ниже будем решать эти уравнения в разложении до 4-го порядка малости.

7.2 Пост-ньютоновское разложение

Заметим, что существуют разные версии ППН формализма; здесь мы будем использовать обозначения и определения в их классической форме [20]. Возьмем за основу ППН формализм, адаптированный к ковариантной формулировке теорий телепараллельной гравитации [105] и дополним его так, чтобы он включал скалярное поле помимо тетрады [106].

Основное предположение ППН формализма состоит в том, что тензор энергии-импульса соответствует идеальной жидкости с плотностью энергии покоя ρ , удельной внутренней энергией Π , давлением p и 4-скоростью u^{μ} , который определяется выражением

$$\Theta^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}. \quad (7.20)$$

4-скорость u^μ нормируется метрикой $g_{\mu\nu}$, так что $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1$. Затем предполагается, что существует система отсчета, условно отождествляемая с системой покоя Вселенной, в которой скорость $v^i = u^i/u^0$ источника материи мала по сравнению со скоростью света, которую мы приравниваем к единице, $c \equiv 1$. Скорость $|\vec{v}|$ принимается как параметр возмущения. Затем вводятся порядки по скорости $\mathcal{O}(n) \propto |\vec{v}|^n$, по которым разлагаются все динамические величины. Здесь мы решили работать в калибровке Вайценбека, так что $\omega^A_{B\mu} \equiv 0$ при всех порядках возмущения [105], и мы должны разложить только тетраду и скалярное поле. Нулевой порядок $\mathcal{O}(0)$ является фоновым решением, для которого мы выбираем диагональную тетраду $\Delta^A_\mu = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, а также постоянное фоновое значение Φ скалярного поля. Запишем разложение тетрады в виде

$$\theta^A_\mu = \Delta^A_\mu + \tau^A_\mu = \Delta^A_\mu + \overset{1}{\tau}^A_\mu + \overset{2}{\tau}^A_\mu + \overset{3}{\tau}^A_\mu + \overset{4}{\tau}^A_\mu + \mathcal{O}(5), \quad (7.21)$$

и скалярного поля φ в виде

$$\varphi = \Phi + \psi = \Phi + \overset{1}{\psi} + \overset{2}{\psi} + \overset{3}{\psi} + \overset{4}{\psi} + \mathcal{O}(5). \quad (7.22)$$

Здесь мы использовали надстрочные числа для обозначения порядков по скорости, т. е. каждый компонент $\overset{n}{\tau}^A_\mu$ и $\overset{n}{\psi}$ имеет порядок $\mathcal{O}(n)$. Порядки по скорости выше четвертого не учитываются в ППН формализме, они не являются необходимыми для получения ППН параметров.

Вместе со скалярным полем мы также должны разложить свободные функции $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{V}$ в действии (7.5) по порядкам скорости. Для этого воспользуемся рядом Тейлора в виде

$$\mathcal{A}(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^k}{k!} \left. \frac{d^k}{d\varphi^k} \mathcal{A}(\varphi) \right|_{\varphi=\Phi} \equiv A + A'\psi + A''\frac{\psi^2}{2} + A'''\frac{\psi^3}{6} + \dots, \quad (7.23)$$

и аналогично для всех других функций. Латинские буквы со штрихами - это коэффициенты ряда Тейлора, равные производным этого порядка от функций при космологическом фоновом значении скалярного поля:

$$A = \mathcal{A}(\Phi), \quad A' = \mathcal{A}'(\Phi), \quad A'' = \mathcal{A}''(\Phi), \quad A''' = \mathcal{A}'''(\Phi), \quad \dots \quad (7.24)$$

Ряд Тейлора (7.23) также является разложением по порядкам скорости, где предполагается, что все коэффициенты Тейлора имеют порядок скорости $\mathcal{O}(0)$.

Далее, следуя телепараллельному ППН формализму [105], введем еще одно удобное выражение для тетрадных возмущений. Для этого мы опустим индекс Лоренца, используя метрику Минковского η_{AB} , и преобразуем его в координатный индекс, используя фоновую тетраду Δ^A_μ . Это дает выражения

$$\tau_{\mu\nu} = \Delta^A_\mu \eta_{AB} \tau^B_\nu, \quad \overset{n}{\tau}_{\mu\nu} = \Delta^A_\mu \eta_{AB} \overset{n}{\tau}^B_\nu, \quad (7.25)$$

с чисто координатными индексами. Для определения ППН параметров не все компоненты тетрады и скалярного поля необходимо разлагать до четвертого порядка скорости, потому

что некоторые исчезают из-за ньютоновского сохранения энергии или симметрии обращения времени. Для изучаемой модели оказывается, что отличные от нуля компоненты разложения полей, которые нам нужно определить, это

$${}^2\tau_{00}, \quad {}^2\tau_{ij}, \quad {}^3\tau_{0i}, \quad {}^3\tau_{i0}, \quad {}^4\tau_{00}, \quad {}^2\psi, \quad {}^4\psi. \quad (7.26)$$

Используя разложение (7.21) и компоненты тетрады, перечисленные выше, мы можем разложить все величины в уравнениях поля, до соответствующих порядков скоростей. Наиболее важной для нашего расчета является метрика, фоновое значение которой строится из диагональной фоновой тетрады $\Delta^A{}_\mu$ и представляет метрику Минковского, $g_{\mu\nu}^0 = \eta_{\mu\nu}$. Метрика разлагается вокруг этого фона по порядкам скоростей в виде

$${}^2g_{00} = 2{}^2\tau_{00}, \quad {}^2g_{ij} = 2{}^2\tau_{(ij)}, \quad {}^3g_{0i} = 2{}^3\tau_{(i0)}, \quad {}^4g_{00} = -({}^2\tau_{00})^2 + 2{}^4\tau_{00}. \quad (7.27)$$

В уравнениях поля далее есть кручение, которое можно разложить в виде [105]

$$\begin{aligned} T^0{}_{0i} &= {}^2\tau_{00,i}, \quad T^i{}_{jk} = 2\delta^{il}{}^2\tau_{l[k,j]}, \quad T^i{}_{0j} = \delta^{ik}({}^2\tau_{kj,0} - {}^3\tau_{k0,j}), \\ T^0{}_{ij} &= 2{}^3\tau_{0[i,j]}, \quad T^0{}_{0i} = {}^2\tau_{00}{}^2\tau_{00,i} - {}^3\tau_{0i,0} + {}^4\tau_{00,i}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Для производных тетрады и скалярного поля нам потребуется дополнительное предположение, что гравитационное поле является квазистатическим, то есть его изменения вызываются только движением источника материи со скоростью много меньшей скорости света. Таким образом, производные по времени ∂_0 компонентов тетрады и скалярного поля идут с одним дополнительным порядком скорости $\mathcal{O}(1)$.

Наконец, мы используем разложение (7.27) метрического тензора, чтобы разложить тензор энергии-импульса (7.20) на порядки по скорости и тетрадным возмущениям. Используем стандартное присвоение ППН порядков по скорости плотности массы покоя, удельной внутренней энергии и давлению, основанное на их порядках по величине в Солнечной системе, т.о. присваиваем порядок $\mathcal{O}(2)$ величинам ρ и Π , и порядок $\mathcal{O}(4)$ величине p [20]. Тогда тензор энергии-импульса (7.20) может быть разложен в виде

$$\Theta_{00} = \rho \left(1 + \Pi + v^2 - 2{}^2\tau_{00} \right) + \mathcal{O}(6), \quad (7.29a)$$

$$\Theta_{0j} = -\rho v_j + \mathcal{O}(5), \quad (7.29b)$$

$$\Theta_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + \mathcal{O}(6). \quad (7.29c)$$

Для дальнейшей работы мы также раскладываем тензор энергии-импульса с вычтенным следом, введенный в (7.16), по порядкам скорости и получаем выражения

$$\bar{\Theta}_{00} = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho\Pi + \rho v^2 - \rho{}^2\tau_{00} + \frac{3}{2}p + \mathcal{O}(6), \quad (7.30a)$$

$$\bar{\Theta}_{0j} = -\rho v_j + \mathcal{O}(5), \quad (7.30b)$$

$$\bar{\Theta}_{ij} = \frac{1}{2}\rho\delta_{ij} + \frac{1}{2}\rho\Pi\delta_{ij} + \rho v_i v_j + \rho{}^2\tau_{(ij)} - \frac{1}{2}p\delta_{ij} + \mathcal{O}(6). \quad (7.30c)$$

Заметим, в частности, что при нулевом порядке по скорости тензор энергии-импульса обращается в нуль, $\overset{0}{\Theta}_{\mu\nu} = 0$, так что нам остается решать вакуумные уравнения поля. Вставив фоновые значения тетрады $\overset{0}{\theta}^A{}_{\mu} = \Delta^A{}_{\mu}$ и скалярного поля $\overset{0}{\phi} = \Phi$ в соответствующие уравнения поля (7.12), находим, что гравитационная часть полевых уравнений в нулевом порядке определяется выражениями

$$\overset{0}{E}_{00} = -\kappa^2 V, \quad \overset{0}{E}_{ij} = \kappa^2 V \delta_{ij}, \quad \overset{0}{E} = \kappa^2 V'. \quad (7.31)$$

Отсюда следует, что анзац для возмущений согласуется с вакуумными уравнениями поля только в том случае, если $V = V' = 0$. Поэтому далее мы ограничимся теориями, удовлетворяющими этому условию. Хотя на первый взгляд эти условия могут показаться очень ограничительными, это не обязательно так. Условие $V = 0$ просто подразумевает, что любая космологическая постоянная достаточно мала, чтобы не затронуть Солнечную систему, что является разумным предположением. Кроме того, $V' = 0$ может проявляться как аттрактор в космологии теорий кручения со скалярным полем и, следовательно, это также разумно в поздней Вселенной [107].

7.3 Случай массивного скалярного поля: параметр γ

Рассмотрим произвольный потенциал \mathcal{V} для скалярного поля, коэффициенты разложения которого в ряд Тейлора удовлетворяют условиям $V = V' = 0$. Чтобы решить уравнения для возмущений поля, рассмотрим простой случай статической точечной массы в качестве источника. При этом предположении решаем уравнения поля во втором порядке скорости: для скалярного поля в подразделе 7.3.2, для временной компоненты тетрады в подразделе 7.3.3 и пространственной компоненты тетрады в подразделе 7.3.4. Исходя из этих решений определяем метрические возмущения второго порядка и ППН параметр γ в 7.3.5.

7.3.1 Статическая точечная масса

Отправной точкой расчета является предположение, что источником гравитационного поля является одна точечная масса M , чей тензор энергии-импульса имеет вид (7.20) с

$$\rho = M\delta(\vec{x}), \quad \Pi = 0, \quad p = 0, \quad v_i = 0, \quad (7.32)$$

где $\delta(\vec{x})$ - это дельта-функция Дирака. Таким образом, мы предполагаем, что точечная масса покоится в выбранной нами системе координат. В дальнейшем мы будем использовать сферические координаты, где r обозначает радиальную координату, а точечная масса расположена в начале координат $r = 0$. Далее через $U(r) = M/r$ будем обозначать ньютоновский гравитационный потенциал этого источника.

7.3.2 Скалярное поле во втором порядке

Во втором порядке можно записать уравнение (7.18) с (7.19) для скалярного поля в виде

$$\Delta \overset{2}{\psi} - m_\phi^2 \overset{2}{\psi} = -c_\phi \rho, \quad (7.33)$$

где $\Delta = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ является оператором Лапласа, и мы ввели сокращения

$$m_\phi^2 = \frac{2\kappa^2 AV''}{2AB + 3C^2}, \quad c_\phi = \frac{-\kappa^2 C}{2AB + 3C^2}. \quad (7.34)$$

Мы видим, что уравнение задается экранированным уравнением Пуассона, где m_ϕ можно интерпретировать как массу скалярного поля. Таким образом, решением уравнения второго порядка (7.33) является выражение

$$\overset{2}{\psi}(r) = \frac{M}{4\pi r} c_\phi e^{-m_\phi r}, \quad (7.35)$$

которое имеет форму потенциала Юкавы.

7.3.3 Временные компоненты тетрады второго порядка

Далее выписываем уравнение второго порядка для тетрадного поля с вычтенным следом (7.16) с (7.17) для временной составляющей $\overset{2}{E}_{00}$ в форме

$$2\Delta \overset{2}{\tau}_{00} = c_1 \overset{2}{\psi} - c_2 \rho. \quad (7.36)$$

Здесь мы ввели дополнительные сокращения

$$c_1 = -\frac{C}{A} m_\phi^2, \quad c_2 = -\frac{c_\phi C}{A} + \frac{\kappa^2}{A}. \quad (7.37)$$

Подставив ранее найденное решение (7.35) для $\overset{2}{\psi}$ в (7.36) и решив его, получим

$$\overset{2}{\tau}_{00} = G_{\text{eff}}(r) U(r) = \frac{M}{8\pi r} \left[c_2 + \frac{c_1 c_\phi}{m_\phi^2} (e^{-m_\phi r} - 1) \right]. \quad (7.38)$$

В приведенном выше выражении мы ввели эффективную гравитационную постоянную, которая определяется выражением

$$G_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{8\pi} \left[c_2 + \frac{c_1 c_\phi}{m_\phi^2} (e^{-m_\phi r} - 1) \right], \quad (7.39)$$

и, следовательно, зависит от расстояния r между наблюдателем (или пробной массой) и гравитирующей массой. Видно, что эффективный гравитационный потенциал представлен чисто ньютоновским потенциалом и членом типа Юкавы. Далее находим, что в случае $C \rightarrow 0$

член типа Юкавы не возникает, и гравитационная постоянная становится действительно постоянной, $G_{\text{eff}} \rightarrow \kappa^2/8\pi$. Это связано с тем, что в этом случае часть от источника в уравнении скалярного поля обращается в нуль и, следовательно, скалярное поле второго порядка не возникает. Однако и в этом случае гравитационная постоянная все еще зависит от фонового значения A функции \mathcal{A} перед скаляром кручения T , как и следовало ожидать [108].

7.3.4 Пространственные компоненты тетрады второго порядка

Уравнения второго порядка для тетрадного поля с вычтенным следом (7.16) с (7.17) для пространственной компоненты $\overset{2}{E}_{ij}$ имеет вид

$$2\Delta \overset{2}{\tau}_{ij} = (c_3 \overset{2}{\Psi} - c_4 \rho) \delta_{ij}, \quad (7.40)$$

где мы обозначили

$$c_3 = \frac{C}{A} m_\phi^2, \quad c_4 = \frac{c_\phi C}{A} + \frac{\kappa^2}{A}. \quad (7.41)$$

Подставляя решение (7.35) для скалярного поля во втором порядке $\overset{2}{\Psi}$ в уравнение поля (7.40), находим решение

$$\overset{2}{\tau}_{ij}(r) = \frac{M}{8\pi r} \left[c_3 - \frac{c_4 c_\phi}{m_\phi^2} (e^{-m_\phi r} - 1) \right] \delta_{ij}. \quad (7.42)$$

Опять имеем чисто ньютоновскую часть и член типа Юкавы.

7.3.5 ППН метрика и параметры

Для статического точечного источника (7.32) сферически-симметричная постньютоновская метрика имеет общий вид

$$g_{00} = -1 + 2\overset{2}{\tau}_{00} = -1 + 2G_{\text{eff}}(r)U(r) + \mathcal{O}(4), \quad (7.43a)$$

$$g_{0j} = \mathcal{O}(5), \quad (7.43b)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\overset{2}{\tau}_{(ij)} = [1 + 2G_{\text{eff}}(r)\gamma(r)U(r)] \delta_{ij} + \mathcal{O}(4). \quad (7.43в)$$

Здесь $\gamma(r)$ — искомый постньютоновский параметр. Из нашего решения для тетрады находим для $\gamma(r)$ выражение:

$$\gamma(r) = \frac{2\omega + 3 - e^{-m_\phi r}}{2\omega + 3 + e^{-m_\phi r}}, \quad (7.44)$$

где мы ввели $\omega = \frac{AB}{C^2}$, а масса скалярного поля m_ϕ определяется соотношением (7.34). Этот результат согласуется с хорошо известным случаем массивного скалярного поля в различных теориях со скалярным полем, связанным с кривизной [109—114]. В частности, это согласуется с общей теорией относительности в пределе $\omega \rightarrow \infty$ нулевой кинетической связи или $m_\phi \rightarrow \infty$ бесконечно тяжелого скалярного поля.

7.4 Безмассовое скалярное поле: все ППН параметры

Чтобы продвинуться дальше и также решить уравнения поля для возмущений в более высоком порядке по скорости, ограничимся теориями, в которых скалярное поле безмассово, а его потенциал удовлетворяет дополнительным условиям $V'' = V''' = 0$. Оказывается, в этом случае мы можем выразить возмущения всех динамических величин через стандартные ППН-потенциалы. Они получаются путем решения уравнений поля по порядку: скалярное поле во втором порядке в подразделе 7.4.1, временная компонента тетрады во втором порядке в подразделе 7.4.2, пространственные компоненты тетрады во втором порядке в подразделе 7.4.3, затем компоненты тетрады в третьем порядке по скорости в подразделе 7.4.4 и, наконец, четвертый порядок по скорости в подразделе 7.4.5. Из этих решений мы получаем полную метрику и постньютоновские параметры, выписанные в подразделе 7.4.6.

7.4.1 Скалярное поле во втором порядке

Как и в случае массивного скалярного поля, начинаем с решения уравнения для скалярного поля (7.18) с (7.19) во втором порядке по скорости. В случае безмассового скалярного поля уравнение второго порядка имеет вид

$$-(2AB + 3C^2)\Delta\overset{2}{\psi} = -\kappa^2 C \rho. \quad (7.45)$$

Теперь это обычное уравнение Пуассона, имеющее общее решение

$$\overset{2}{\psi} = -\frac{\kappa^2 C}{4\pi(2AB + 3C^2)} U \quad (7.46)$$

для произвольного распределения плотности массы источника ρ , где ньютоновский потенциал определяется как решение уравнения Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\rho \quad \Leftrightarrow \quad U(t, \vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (7.47)$$

Заметим, что для безмассового скалярного поля члена зависимости типа Юкавы не возникает.

7.4.2 Временная компонента тетрады второго порядка

Продолжаем работу с тетрадным уравнением второго порядка (7.16) с (7.17). Его временная составляющая имеет вид

$$-A\Delta^2\tau_{00} - \frac{C}{2}\Delta^2\psi = \frac{\kappa^2}{2}\rho. \quad (7.48)$$

Используя решение (7.46) для скалярного поля второго порядка, мы находим решение

$$\tau_{00}^2 = \frac{\kappa^2}{4\pi A} \frac{AB + 2C^2}{2AB + 3C^2} U. \quad (7.49)$$

Записав решение в виде $\tau_{00}^2 = GU$, мы можем посчитать гравитационную постоянную

$$G = \frac{\kappa^2}{4\pi A} \frac{AB + 2C^2}{2AB + 3C^2}, \quad (7.50)$$

которая теперь действительно является постоянной, а не эффективной величиной, зависящей от расстояния между источником и пробной массой. Следовательно, мы опускаем индекс “eff”. Будем использовать это выражение позже, чтобы нормировать константу связи κ . Заметим, что и здесь мы имеем $G \rightarrow \kappa^2/8\pi A$ для $C \rightarrow 0$, как и в массивном случае [108].

7.4.3 Пространственные компоненты тетрады второго порядка

На следующем шаге мы решаем пространственную часть уравнений второго порядка для тетрады с вычтенным следом, которая имеет вид

$$A \left(\tau_{00,ij}^2 - \tau_{kk,ij}^2 - \Delta^2 \tau_{(ij)}^2 + \tau_{(i|k|,j)k}^2 + \tau_{k(i,j)k}^2 \right) + \frac{C}{2} \left(2\psi_{,ij}^2 + \Delta^2 \psi \delta_{ij} \right) = \frac{\kappa^2}{2} \rho \delta_{ij}. \quad (7.51)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся инвариантностью теории по отношению к диффеоморфизмам, что позволяет выбрать постньютоновскую систему координат [20; 115], и введем калибровочное условие

$$0 = K_i = h_{ij,j} - \frac{1}{2}h_{jj,i} + \frac{1}{2}h_{00,i} + \frac{C}{A}\psi_{,i} \quad (7.52)$$

на метрические возмущения $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, что является прямой адаптацией калибровочного условия, введенного в [116] для гравитации со скалярным полем, связанным с кривизной. Раскладывая это калибровочное условие до второго порядка по скорости и подставляя тетрадные возмущения, находим

$$\overset{2}{K}_i = \tau_{ij,j}^2 + \tau_{ji,j}^2 - \tau_{jj,i}^2 + \tau_{00,i}^2 + \frac{C}{A} \psi_{,i}^2. \quad (7.53)$$

Можно использовать это калибровочное условие, прибавив ноль к уравнениям поля с вычтенным следом (7.16). Следовательно, вместо решения исходных уравнений поля мы решаем уравнения

$$\overset{2}{E}_{ij} - \frac{A}{2} \left(\overset{2}{K}_{i,j} + \overset{2}{K}_{j,i} \right) = \kappa^2 \overset{2}{\Theta}_{ij}, \quad (7.54)$$

которые эквивалентны исходным уравнениям, если выполняется калибровочное условие (7.52). Тогда тетрадное уравнение второго порядка упрощается до

$$-A\Delta^2 \overset{2}{\tau}_{(ij)} + \frac{C}{2} \Delta^2 \psi \delta_{ij} = \frac{\kappa^2}{2} \rho \delta_{ij}. \quad (7.55)$$

Используя решение (7.46) для скалярного поля второго порядка, находим решение

$$\overset{2}{\tau}_{(ij)} = \frac{\kappa^2}{4\pi A} \frac{AB + C^2}{2AB + 3C^2} U \delta_{ij} \quad (7.56)$$

для симметричной части пространственных компонент тетрады. Заметим, что антисимметричная часть компонент тетрады еще не определяется уравнениями поля в этом порядке по скорости.

7.4.4 Тетрада в третьем порядке

Теперь перейдем к третьему порядку по скорости. На данном этапе нам необходимо рассмотреть только симметричную часть тетрадных уравнений поля, которая имеет вид

$$A \left(\overset{2}{\tau}_{(ij),0j} - \overset{2}{\tau}_{jj,0i} - \Delta^3 \overset{3}{\tau}_{(0i)} + \overset{3}{\tau}_{(0j),ij} \right) + C \overset{2}{\psi}_{,0i} = -\kappa^2 \rho v_i, \quad (7.57)$$

так как остальные уравнения удовлетворяются тождественно. Также в этом случае мы должны ввести калибровочное условие для фиксации постньютоновской системы координат [20; 115]. Здесь мы снова следуем изложенному в [116] и выбираем калибровочное условие

$$0 = K_0 = h_{0i,i} - \frac{1}{2} h_{ii,0} + \frac{C}{A} \psi_{,0}. \quad (7.58)$$

В третьем порядке по скорости с подставлением тетрадных возмущений это калибровочное условие имеет вид

$$\overset{3}{K}_0 = \overset{3}{\tau}_{0i,i} + \overset{3}{\tau}_{i0,i} - \overset{2}{\tau}_{ii,0} + \frac{C}{A} \overset{2}{\psi}_{,0}. \quad (7.59)$$

Затем действуем так же, как и для второго порядка по скорости - вычитаем подходящее кратное калибровочному условию слагаемое из уравнений поля. После этого уравнения, которые мы решаем, имеют вид

$$\overset{3}{E}_{(0i)} - \frac{A}{2} \left(\overset{3}{C}_{0,i} + \overset{2}{C}_{i,0} \right) = \kappa^2 \overset{3}{\Theta}_{(0i)}. \quad (7.60)$$

Снова отметим, что они эквивалентны исходным уравнениям при условии, что условие калибровки (7.58) выполнено. Таким образом, получаем уравнения

$$-A\Delta\overset{3}{\tau}_{(0i)} - \frac{A_2}{2}\overset{2}{\tau}_{00,0i} = -\kappa^2\rho v_i. \quad (7.61)$$

Используя ранее найденное решение (7.49), находим

$$\overset{3}{\tau}_{(0i)} = -\frac{\kappa^2}{16\pi A(2AB + 3C^2)} [(7AB + 10C^2)V_i + (AB + 2C^2)W_i], \quad (7.62)$$

где постньютоновские потенциалы V_i и W_i удовлетворяют

$$\Delta V_i = -4\pi\rho v_i, \quad \Delta W_i = -4\pi\rho v_i + 2U_{,0i}; \quad (7.63)$$

см. [20, уравнение. (4.32)] с определениями постньютоновских потенциалов. Также в этом случае мы определяем только симметричную часть тетрады. Однако вскоре мы увидим, что этого будет достаточно для нашей цели определения постньютоновского предела.

7.4.5 Временная компонента тетрады четвертого порядка

Перейдем к решению уравнений четвертого порядка по скорости, где мы должны определить временные компоненты тетрады. Временная составляющая тетрадных уравнений поля четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} & -A\Delta\overset{4}{\tau}_{00} + 2A\overset{3}{\tau}_{(0i),0i} - A\overset{2}{\tau}_{ii,00} + A\overset{2}{\tau}_{00}\Delta\overset{2}{\tau}_{00} + 2A\overset{2}{\tau}_{ij}\overset{2}{\tau}_{00,ij} + 2A\overset{2}{\tau}_{00,i}\overset{2}{\tau}_{(ij),j} \\ & -A\overset{2}{\tau}_{00,i}\overset{2}{\tau}_{jj,i} - \frac{C}{2}\Delta\overset{4}{\psi} + \frac{3C}{2}\overset{2}{\psi}_{,00} + C\overset{2}{\tau}_{00}\Delta\overset{2}{\psi} + C\overset{2}{\tau}_{ij}\overset{2}{\psi}_{,ij} - A'\Delta\overset{2}{\tau}_{00}\overset{2}{\psi} + \left(\frac{C}{2} - A'\right)\overset{2}{\tau}_{00,i}\overset{2}{\psi}_{,i} \\ & + C\overset{2}{\tau}_{(ij),j}\overset{2}{\psi}_{,i} - \frac{C}{2}\overset{2}{\tau}_{jj,i}\overset{2}{\psi}_{,i} - \frac{C'}{2}\overset{2}{\psi}\Delta\overset{2}{\psi} - \frac{C'}{2}\overset{2}{\psi}_{,i}\overset{2}{\psi}_{,i} = \kappa^2\rho \left(-\overset{2}{\tau}_{00} + v^2 + \frac{\Pi}{2} + \frac{3p}{2\rho}\right). \end{aligned} \quad (7.64)$$

Чтобы исключить скалярное поле четвертого порядка, которое появляется в виде слагаемого с $\Delta\overset{4}{\psi}$, мы используем соответствующее уравнение для скалярного поля четвертого порядка в форме

$$\begin{aligned} & (2AB + 3C^2) \left(-\Delta\overset{4}{\psi} + \overset{2}{\psi}_{,00} + 2\overset{2}{\tau}_{ij}\overset{2}{\psi}_{,ij} + \overset{2}{\tau}_{ij,j}\overset{2}{\psi}_{,i} \right) - 2(BA' + AB' + 3CC')\overset{2}{\psi}\Delta\overset{2}{\psi} \\ & + A(A' + C) \left(4\overset{2}{\tau}_{00,i}\overset{2}{\tau}_{j[j,i]} + 4\overset{2}{\tau}_{i[i,j]}\overset{2}{\tau}_{k[j,k]} + \overset{2}{\tau}_{(ij),k}\overset{2}{\tau}_{(ij),k} + \frac{1}{2}\overset{2}{\tau}_{ij,k}\overset{2}{\tau}_{kj,i} - \overset{2}{\tau}_{ij,k}\overset{2}{\tau}_{jk,i} - \frac{1}{2}\overset{2}{\tau}_{ij,k}\overset{2}{\tau}_{ik,j} \right) \\ & + (BC - AB' - 3CC')\overset{2}{\psi}_{,i}\overset{2}{\psi}_{,i} + (2AB + C^2 - 2CA') \left(\overset{2}{\tau}_{ji,j}\overset{2}{\psi}_{,i} - \overset{2}{\tau}_{jj,i}\overset{2}{\psi}_{,i} + \overset{2}{\tau}_{00,i}\overset{2}{\psi}_{,i} \right) = \\ & = \kappa^2 \left[C(3p - \rho\Pi) - C'\overset{2}{\psi}\rho \right]. \end{aligned} \quad (7.65)$$

В последнем уравнении также появляется антисимметричная часть тетрады второго порядка, которую мы находим, решая антисимметричное уравнение четвертого порядка

$$\overset{4}{E}_{[ij]} = (A' + C) \left(\overset{2}{\tau}_{00,[i}\overset{2}{\psi}_{,j]} - \overset{2}{\tau}_{kk,[i}\overset{2}{\psi}_{,j]} + \overset{2}{\tau}_{k[i,k]}\overset{2}{\psi}_{,j]} - \overset{2}{\tau}_{k[i,j]}\overset{2}{\psi}_{,k} \right) = 0, \quad (7.66)$$

что является низшим порядком в разложении антисимметричного уравнения (7.14), поскольку его нулевой и второй порядок равны нулю тождественно. Также заметим, что правая часть равна нулю, см. (7.12), из-за того, что тензор энергии-импульса, полученный в (7.4), симметричен. Поскольку все остальные члены в этом уравнении, возникающие из скалярных полей и симметричных компонентов тетрады, имеют вид $U_{,[i}U_{,j]}$ и, следовательно, равны нулю, оно решается тождественно, полагая $\tau_{[ij]}^2 = 0$. Используя решения более низкого порядка и следуя описанным выше шагам, окончательно получаем тетрадное уравнение поля четвертого порядка в виде:

$$\Delta \tau_{00}^4 = w_1 U_{,00} + w_2 U_{,i} U_{,i} + w_3 \rho U + w_4 \rho \Pi + w_5 \rho v^2 + w_6 p, \quad (7.67)$$

где константы определяются как

$$w_1 = 0, \quad (7.68a)$$

$$w_2 = \frac{\kappa^4 (4A^3 B^3 - 6C^5 (A' - 3C) - ABC^3 (8A' - 33C) - A^2 C [2B^2 (A' - 10C) + B' C^2 - 2BCC'])}{-32\pi^2 A^2 (2AB + 3C^2)^3}, \quad (7.68б)$$

$$w_3 = -\frac{\kappa^4 (2A^3 B^3 + 6A' C^5 + 2ABC^3 (4A' + 3C) + A^2 C [B^2 (2A' + 7C) + B' C^2 - 2BCC'])}{4\pi A^2 (2AB + 3C^2)^3}, \quad (7.68в)$$

$$w_4 = -\frac{\kappa^2 (AB + 2C^2)}{A (2AB + 3C^2)}, \quad (7.68г)$$

$$w_5 = -\frac{\kappa^2}{A}, \quad (7.68д)$$

$$w_6 = -\frac{3\kappa^2 (AB + C^2)}{A (2AB + 3C^2)}. \quad (7.68е)$$

Слагаемые в правой части соответствуют постньютоновским потенциалам четвертого порядка, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= -4\pi \rho v^2, \quad \Delta \Phi_2 = -4\pi \rho U, \quad \Delta \Phi_3 = -4\pi \rho \Pi, \\ \Delta \Phi_4 &= -4\pi p, \quad \Delta (\bar{A} + \bar{B} - \Phi_1) = -2U_{,00}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_4, \bar{A}, \bar{B}$ определены в [20, Eq. (4.35)], и мы пишем черту над потенциалами \bar{A}, \bar{B} , чтобы не путать их с коэффициентами разложения функций \mathcal{A}, \mathcal{B} . Таким образом, решение имеет вид

$$\tau_{00}^4 = \frac{w_2}{2} U^2 + \left(\frac{w_1}{2} - \frac{w_5}{4\pi} \right) \Phi_1 - \left(w_2 + \frac{w_3}{4\pi} \right) \Phi_2 - \frac{w_4}{4\pi} \Phi_3 - \frac{w_6}{4\pi} \Phi_4 - \frac{w_1}{2} \bar{A} - \frac{w_1}{2} \bar{B}. \quad (7.70)$$

Итак, мы определили все компоненты тетрады, необходимые для вычисления постньютоновского предела.

7.4.6 ППН метрика и параметры

Используя компоненты тетрады, полученные из расчета, подробно описанного выше, мы теперь можем вычислить компоненты постньютоновской метрики. По формуле (7.27) находим компоненты

$${}^2g_{00} = 2U, \quad (7.71a)$$

$${}^2g_{ij} = 2\frac{AB + C^2}{AB + 2C^2}U\delta_{ij}, \quad (7.71б)$$

$${}^3g_{0i} = -\frac{1}{2}\left(\frac{7AB + 10C^2}{AB + 2C^2}V_i + W_i\right), \quad (7.71в)$$

$$\begin{aligned} {}^4g_{00} = & \left(3 + \frac{AB}{AB + 2C^2}\right)\Phi_1 + 2\Phi_3 + \left(3 + \frac{3AB}{AB + 2C^2}\right)\Phi_4 \\ & + \frac{8A^3B^3 + 6C^5(A' + 3C) + ABC^3(8A' + 45C) + A^2C[2B^2(A' + 17C) + B'C^2 - 2BCC']}{(AB + 2C^2)^2(2AB + 3C^2)}\Phi_2 \\ & - \frac{8A^3B^3 - 6C^5(A' - 7C) - ABC^3(8A' - 73C) - A^2C[2B^2(A' - 21C) + B'C^2 - 2BCC']}{2(AB + 2C^2)^2(2AB + 3C^2)}U^2, \end{aligned} \quad (7.71г)$$

где мы исключили k с помощью нормировки $G \equiv 1$ гравитационной постоянной (7.50). По сравнению со стандартной ППН метрикой [20, Eq. (4.48)], имеющей форму

$${}^2g_{00} = 2U, \quad (7.72a)$$

$${}^2g_{ij} = 2\gamma U\delta_{ij}, \quad (7.72б)$$

$${}^3g_{0i} = -\frac{1}{2}(3 + 4\gamma + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_i - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_i, \quad (7.72в)$$

$$\begin{aligned} {}^4g_{00} = & -2\beta U^2 - 2\xi\Phi_W + (2 + 2\gamma + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + 2(1 + 3\gamma - 2\beta + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 \\ & + 2(1 + \zeta_3)\Phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)\bar{A}, \end{aligned} \quad (7.72г)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \xi$ – остальные ППН параметры, мы видим, что эта метрика уже находится в ППН калибровке, так как \bar{B} не появляется, так что мы можем сразу считать ППН параметры. Мы находим, что единственными нетривиальными параметрами являются

$$\gamma = 1 - \frac{C^2}{AB + 2C^2} \quad (7.73)$$

и

$$\beta = 1 - \frac{C\{6C^4(C + A') + ABC^2(7C + 8A') + A^2[2B^2(C + A') + B'C^2 - 2BCC']\}}{4(AB + 2C^2)^2(2AB + 3C^2)}, \quad (7.74)$$

в то время как все другие ППН параметры равны нулю, $\xi = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$. Теории этого типа называются полностью консервативными, поскольку в них нет никаких эффектов предпочтительной системы отсчета, предпочтительного местоположения или нарушения сохранения полного импульса.

Мы можем также выразить этот результат через конформные инварианты [102], которые связаны с функциями параметров системы Жордана, которые мы использовали, формулами

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{B}, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathcal{C}. \quad (7.75)$$

В терминах этих инвариантных функций ППН параметры задаются выражениями

$$\gamma = 1 - \frac{2K^2 I_1}{G + 4K^2 I_1} \quad (7.76)$$

и

$$\beta = 1 + \frac{K[(G + 2K^2 I_1)(G + 6K^2 I_1)I_1' - (2G^2 + 14GK^2 I_1 + 24K^4 I_1^2 + G'K - 2GK')KI_1^2]}{4I_1(G + 3K^2 I_1)(G + 4K^2 I_1)^2} \quad (7.77)$$

Заметим, что здесь G не обозначает гравитационную постоянную, а постоянное фоновое значение $G = \mathcal{G}(\Phi)$ функции \mathcal{G} . Наконец, заметим, что функция \mathcal{K} (или \mathcal{C} в системе Жордана, которую мы использовали для вычисления), а значит, и ее первый коэффициент Тейлора $K = \mathcal{K}(\Phi)$ определяет неминимальную кинетическую связь скалярного поля с телепараллельной геометрией. Таким образом, мы видим, что в пределе минимальной связи $K \rightarrow 0$ и γ , и β равны своим значениям в общей теории относительности. Следовательно, такие теории нельзя отличить от общей теории относительности по их ППН параметрам, и для изучения их феноменологии необходимо использовать более сложные методы.

На этом мы завершаем вывод ППН параметров для общего класса теорий кручения со скалярным полем. Конкретные примеры будут рассмотрены в следующем разделе.

7.5 Примеры теорий

Чтобы проиллюстрировать результаты, представленные выше, рассмотрим несколько конкретных классов теорий-примеров и вычислим их ППН параметры. В подразделе 7.5.1 мы обсуждаем телепараллельный эквивалент гравитации со скалярным полем, связанным с кривизной. Телепараллельная темная энергия и ее обобщения обсуждаются в подразделе 7.5.2. Также рассмотрим теории с неминимальной связью с поверхностным членом в 7.5.3.

7.5.1 Телепараллельный эквивалент скалярно-тензорной гравитации

Для частного случая $\mathcal{C} = -\mathcal{A}'$ можно показать, что гравитационная часть действия сводится к хорошо известному действию скалярно-тензорной гравитации [73] лишь с разницей

до граничного члена, которым мы здесь пренебрегаем [102]:

$$S_g[\theta^a, \omega^a_b, \varphi] = \frac{1}{2\kappa^2} \int_M \left[\mathcal{A}(\varphi) \overset{\circ}{R} + 2\mathcal{B}(\varphi)X - 2\kappa^2\mathcal{V}(\varphi) \right] \theta d^4x. \quad (7.78)$$

Заменяв \mathcal{C} на $-\mathcal{A}'$, находим, что наши результаты как в массивном, так и в безмассовом случаях действительно сводятся к более ранним результатам определения постньютоновского предела в скалярно-тензорной гравитации [86; 109—111; 117].

7.5.2 Телепараллельная темная энергия и ее обобщения

Второй класс теорий условно выражается в жордановой системе $\alpha \equiv 0$, и характеризуется нулевой кинетической связью скалярного поля с кручением, $\mathcal{C} \equiv 0$ и потенциалом скалярного поля \mathcal{V} в общем виде. Этот класс включает в себя множество хорошо изученных конкурирующих теорий, называемых обобщенными телепараллельными моделями темной энергии и имеющих действие вида:

1. Классическая телепараллельная модель темной энергии [12]:

$$S_g = \int_M \left[-\frac{T}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \xi \varphi^2 T) - \mathcal{V}(\varphi) \right] \theta d^4x, \quad (7.79)$$

с константой связи ξ и потенциалом \mathcal{V} . Сравнивая (7.79) с гравитационной частью действия изучаемой теории (7.5), находим функции: $\mathcal{A} = 1 + 2\kappa^2 \xi \varphi^2$ и $\mathcal{B} = -\kappa^2$.

2. Взаимодействующая темная энергия [93]:

$$S_g = \int_M \left[-\frac{T}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \xi F(\varphi) T) - \mathcal{V}(\varphi) \right] \theta d^4x, \quad (7.80)$$

где $\mathcal{A} = 1 + 2\kappa^2 \xi F(\varphi)$ и $\mathcal{B} = -\kappa^2$.

3. Действие типа Бранса-Дикке со связью с кручением общего вида [91]:

$$S_g = \int_M \left[-\frac{F(\varphi)}{2\kappa^2} T - \omega g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \mathcal{V}(\varphi) \right] \theta d^4x, \quad (7.81)$$

где $\mathcal{A} = F(\varphi)$ и $\mathcal{B} = 2\kappa^2 \omega$.

4. Действие типа Бранса-Дикке с динамическим кинетическим членом [95]:

$$S_g = \int_M \left[-\frac{\varphi}{2\kappa^2} T - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \mathcal{V}(\varphi) \right] \theta d^4x, \quad (7.82)$$

где $\mathcal{A} = \varphi$ и $\mathcal{B} = 2\kappa^2 \omega(\varphi)/\varphi$.

В связи с тем, что все эти модели имеют нулевую кинетическую связь, $\mathcal{C} = 0$, мы находим, что рассчитанные нами ППН параметры в массивном случае γ (7.44) и в безмассовом случае γ (7.73) и β (7.74) принимают значения $\gamma = \beta = 1$. Отсюда мы заключаем, что постньютоновский предел этих теорий согласуется с общей теорией относительности, так что эти теории нельзя отличить от ОТО по измерениям ППН параметров. Таким образом, для моделей (7.79) и (7.82) наш результат сводится к ППН параметрам, найденным в предыдущих исследованиях [95; 103].

7.5.3 Неминимальная связь с поверхностным членом

В последней модели, которую мы рассматриваем, присутствует неминимальная связь скалярного поля с телепараллельным поверхностным членом, и действие имеет вид [96]:

$$S_g = \int_M \left[-\frac{T}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \xi \varphi^2 T - \chi \varphi^2 B) - \mathcal{V}(\varphi) \right] \theta d^4x \quad (7.83)$$

с константами ξ, χ и потенциалом \mathcal{V} в общем виде, а поверхностный член B определяется соотношением (7.11). Чтобы привести действие к виду (7.5), необходимо выполнить интегрирование по частям. После этого шага находим функции:

$$A = 1 + 2\kappa^2 \xi \varphi^2, \quad B = -\kappa^2, \quad C = 4\kappa^2 \chi \varphi. \quad (7.84)$$

Здесь мы ограничимся безмассовым случаем $\mathcal{V} = 0$; см. [104], где есть обсуждение постньютоновского предела этой теории с массивным скалярным полем. Заметим, что функции выше явно зависят от κ , так что для нормировки $G = 1$ гравитационной постоянной мы должны подставить их в выражение (7.50). Это дает решение

$$\kappa^2 = \frac{16\pi}{1 - 32\pi(\xi - 6\chi^2)\Phi^2 + \sqrt{(1 - 64\pi\chi^2\Phi^2)(1 - 576\pi\chi^2\Phi^2)}} \quad (7.85)$$

как единственное решение, которое дает $\kappa^2 \rightarrow 8\pi$ в пределе $\Phi \rightarrow 0$, чего и следовало ожидать. Далее заметим, что $C \rightarrow 0$ в пределе $\chi \rightarrow 0$. Таким образом, полезно разложить ППН параметры в ряд Тейлора по χ , поскольку они стремятся к своим значениям в общей теории относительности при $\chi \rightarrow 0$. Это дает результат

$$\gamma = 1 + 128\pi\chi^2\Phi^2 + \mathcal{O}(\chi^4), \quad \beta = 1 + 32\pi\xi\chi\Phi^2 + 32\pi\chi^2\Phi^2 + \mathcal{O}(\chi^3). \quad (7.86)$$

Сравнение этих результатов с наблюдаемыми значениями ППН параметров дает ограничения на константы.

7.6 Обсуждение и итоги Главы

Мы получили постньютоновский предел и ППН параметры для общего класса теорий гравитации кручения со скалярным полем с неминимальной кинетической связью между скалярным полем и векторной частью кручения. Мы обнаружили, что для непротиворечивости постньютоновского приближения нужно положить нулевое космологическое фоновое значение потенциала скалярного поля и его первой производной. Для случая массивного скалярного поля мы рассчитали ППН параметр γ в предположении статического точечного источника массы. Мы смогли отказаться от этого предположения в случае безмассового скалярного поля, для которого мы рассчитали полный набор ППН параметров. Наши результаты показывают, что класс теорий гравитации кручения со скалярным полем является

полностью консервативным. Это следует из того, что только ППН параметры β и γ потенциально отклоняются от их значений в общей теории относительности, а все остальные параметры равны их значениям в ОТО, что подразумевает отсутствие предпочтительной системы отсчета или эффектов предпочтительного местоположения, а также сохранение энергии и импульса. Мы также обнаружили, что отклоняющиеся значения для β и γ получаются только при неминимальной кинетической связи с вектором кручения. Далее мы выразили ППН параметры через величины, инвариантные относительно конформных преобразований.

Чтобы проиллюстрировать наши выводы, мы применили их к ряду конкретных моделей в рамках рассмотренного нами класса теорий кручения со скалярным полем, которые ранее рассматривались в литературе в основном как космологические модели. Многие из этих теорий имеют минимальную связь и поэтому идентичны общей теории относительности на уровне ППН параметров. Мы также рассмотрели телепараллельный эквивалент скалярно-тензорных теорий гравитации и обнаружили, что найденные в этом рассмотрении ППН параметры совпадают с их значениями, посчитанными для классического представления этих теорий через кривизну связности Леви-Чивиты. Это подтверждает согласованность нашего подхода с предыдущими результатами.

Результат работы по определению ППН параметров перспективен для ее расширения и обобщения. Например, на основании имеющихся результатов можно рассматривать более общие теории, с более сложными членами кинетической связи. Так, например, в телепараллельном расширении гравитации Хорндески [118] был получен постньютоновский предел и ППН параметры [119] аналогично найденным в классической гравитации Хорндески [114]. Кроме того, можно рассматривать и теории с более чем одним скалярным полем, построенные аналогично [102], и т.д. Далее, рассмотрев теории из другого аналогично построенного класса, где скалярные поля связаны с неметричностью плоской связности без кручения [120; 121], был также получен постньютоновский предел и ППН параметры [122–124]. Интересным возможным направлением будущих исследований может быть применение теории возмущений более высокого порядка для изучения излучения гравитационных волн во время слияния двойных черных дыр [125].

Заключение

В телепараллельном эквиваленте общей теории относительности с применением теоремы Нётер были построены сохраняющиеся величины: токи, суперпотенциалы и заряды. Они являются одновременно координатно ковариантными и инвариантными относительно лоренцевых вращений тетрад. Эти величины впервые построены в тензорной форме, что является преимуществом, поскольку именно такая форма обычно используется в вычислениях в релятивистской астрофизике и космологии. Результат достигнут благодаря использованию ИСС и произвольного вектора смещений, относительно которого подразумевается диффеоморфная инвариантность. Также было показано преимущество применения теоремы Нётер для построения сохраняющихся величин по сравнению с прямым интегрированием полевых уравнений. Действительно, в первом случае локальные сохраняющиеся величины дают возможность получить хорошо определенные сохраняющиеся заряды, а во втором такое невозможно. Проведено сравнение построения сохраняющихся величин в ковариантном TEGR с аналогичным построением в метрической ОТО с фоном. Выделено много аналогичных свойств и некоторые различия. Исходя из анализа структуры сохраняющихся величин, для определения ИСС, являющейся нединамической структурой, введен обобщенный принцип «выключения» гравитации, основанный на занулении тензора Римана, и проведено его сравнение с другими способами определения ИСС. Для определения вектора смещений рассмотрено две возможности: векторы Киллинга пространства-времени при определении глобальных зарядов и собственные векторы различного типа наблюдателей при определении локальных характеристик гравитационного поля.

Для тестирования новых выражений для сохраняющихся величин проведены их расчеты в известных решениях в ОТО. Рассчитаны нулевые плотности энергии и импульса, измеряемые свободно падающими наблюдателями, «вмороженными» в хаббловский поток, во вселенной Фридмана и пространстве (A)dS, что соответствует принципу эквивалентности. При исследовании решения Шварцшильда оказалось, что универсальный метод «выключения» гравитации приводит к неоднозначностям: «выключение» гравитации в различных тетрадах привело к образованию абсолютно разных пар тетрад и ИСС, не связанных между собой ковариантными преобразованиями и дающих различные значения для сохраняющихся величин. Для их конструктивного исследования было обобщено понятие «калибровки». В ходе вычислений мы получили три различные калибровки: статическая калибровка, дающая правильную массу для черной дыры, но не соответствующая принципу эквивалентности; калибровка Леметра, дающая массу в 2 раза больше ожидаемой, но соответствующая принципу эквивалентности; обобщенная e -калибровка, зависящая от параметра e , полученная впервые для свободно падающего наблюдателя с произвольной энергией (такой наблюдатель имеет ненулевую начальную скорость на бесконечности, или гиперболическую орбиту), дающая и ожидаемую массу черной дыры, и соответствующая принципу эквивалентности. Неоднозначность метода «выключения» гравитации, используемого для определения спиновой связности, была объяснена нечувствительностью «выключения» гравитации к любому

локальному преобразованию Лоренца, пропорциональному параметру, контролирующему силу гравитации, поскольку этот параметр тоже «выключается» вместе с гравитацией.

Для определения массы и момента движущейся черной дыры были использованы: инвариантность зарядов Нётер относительно лоренцевых вращений и координатных преобразований, а также аналогия с движущейся материей. Первое позволило значительно упростить расчеты, а второе - решить проблему недостающего вектора Киллинга. В результате, заряды Нётер дали физически ожидаемые значения массы и момента движущейся черной дыры. Также было показано, что «выключение гравитации» в двух разных тетрадах, построенных как диагональные тетрады в сферических и декартовых изотропных координатах, приводило к одной и той же шварцшильдовой статической калибровке, а новая «движущаяся» калибровка, построенная аналогичным образом для бесконечно далекого наблюдателя, движущегося относительно черной дыры, совпадает со шварцшильдовой статической калибровкой.

В $f(T)$ -гравитации локальные лоренцевы степени свободы играют еще более важную роль, поскольку они включены в уравнения поля. В исходной нековариантной формулировке $f(T)$ -гравитации уравнения поля непротиворечивы только для особого класса тетрад, который обычно называют хорошими тетрадами [58]. Для геометрий Шварцшильда и Фридмана мы получили, что хорошие тетрады совпадают с собственными тетрадами из TEGR. В ковариантной формулировке $f(T)$ -гравитации мы рассматриваем ненулевую ИСС, которая позволяет нам использовать произвольную относительно лоренцевых вращений тетраду в уравнениях поля и, следовательно, мы можем «восстановить» локальную лоренцеву симметрию. Однако она восстанавливается только после того, как мы определяем правильную спиновую связность, соответствующую тетраде. Поэтому, как и в случае с TEGR, необходимо определить лоренцевы степени свободы в обеих постановках.

Отмечена аналогия неоднозначности определения собственной тетрады в TEGR путем «выключения» гравитации с проявлением остаточных симметрий в $f(T)$ -гравитации. Но несмотря на это и тот факт, что в некоторых выделенных случаях хорошие тетрады в $f(T)$ -гравитации и собственные тетрады в TEGR совпадали, было показано, что в общем случае хорошие и собственные тетрады будут отличаться. Также было показано, что «выключение» гравитации для угадывания спиновой связности в расширенных телепараллельных теориях не применимо.

Получен постньютоновский предел и ППН параметры для общего класса теорий гравитации кручения со скалярным полем с неминимальной кинетической связью между скалярным полем и векторной частью кручения. Для массивного скалярного поля мы рассчитали ППН параметр γ в предположении статического точечного источника. Для безмассового скалярного поля и для произвольного ограниченного распределения массы рассчитан полный набор ППН параметров. Показано, что только ППН параметры β и γ потенциально отклоняются от их значений в общей теории относительности, а остальные параметры полностью соответствуют ОТО, из чего следует, что класс теорий гравитации кручения со скалярным полем является полностью консервативным (отсутствие предпочтительной системы отсчета или эффектов предпочтительного местоположения, а также сохранение энергии и импульса).

са). Параметры β и γ отклоняются от ОТО только при неминимальной кинетической связи с вектором кручения. Для конкретных моделей в рамках рассмотренного класса теорий кручения со скалярным полем, которые ранее рассматривались в литературе в основном как космологические модели, была показана согласованность с предыдущими результатами.

В настоящее время исследования телепараллельных теорий методами ППН-формализма активно ведутся. Так недавно был получен постньютоновский предел для более общего класса теорий кручения, неминимально связанного со скалярным полем [119; 126], а затем аналогичное исследование было проведено для теорий неметричности, неминимально связанной со скалярным полем [122–124].

Безусловно, телепараллельные теории перспективны. Они уже стали хорошим инструментом для анализа явлений в астрофизике, описания сверхточных наблюдений в рамках солнечной системы, а также описания эффектов на космологических масштабах. Изучение свойствTEGR не менее важно с точки зрения теоретической физики. Как пример, на масштабах солнечной системы было показано наличие постньютоновского предела [95; 104; 105; 126]. Также активно изучаются космологические решения [10; 44; 59; 94; 97; 107; 127–129] и др. Рассматриваются и решения гравитационных волн в модифицированных телепараллельных теориях, например, [130–133] и др. Очевидно, что будет получено больше изображений теней черных дыр, что станет очень хорошим тестом для модифицированных телепараллельных теорий. С другой стороны, сами объекты получают большее число инструментов для исследования их свойств, что чрезвычайно важно.

Развитые в диссертации методы универсальны. В связи с этим, методы, примененные кTEGR и $f(T)$ -теориям планируется использовать в дальнейших исследованиях свойствSTEGR-а и модифицированных телепараллельных теорий с неметричностью, таких как $f(Q)$ -гравитация и др.

Список сокращений и условных обозначений

- РАН** — Российская академия наук
- ОТО** — общая теория относительности
- TEGR** — Teleparallel Equivalent of General Relativity – телепараллельный эквивалент ОТО
- STEGR** — Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity – симметричный телепараллельный эквивалент ОТО
- Л-ЧСС** — спиновая связность Леви-Чивиты
- ИСС** — инерциальная спиновая связность
- KVL** — метод, предложенный Кацем, Бичаком и Линден-Беллом
- FLRW** — Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric – метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера
- Пространство **(A)dS** — пространство (анти-)де Ситтера
- ППН** — параметризованный постньютоновский (формализм)

Список литературы

1. *Jiménez, J. B.* The Geometrical Trinity of Gravity / J. B. Jiménez, L. Heisenberg, T. S. Koivisto // Universe. — 2019. — Vol. 5, no. 7. — P. 173.
2. General teleparallel quadratic gravity / J. B. Jiménez [et al.] // Phys. Lett. B. — 2020. — Vol. 805. — P. 135422.
3. *Aldrovandi, R.* Teleparallel Gravity: An Introduction. Vol. 173 / R. Aldrovandi, J. G. Pereira. — Dordrecht : Springer, 2013.
4. *Maluf, J. W.* The teleparallel equivalent of general relativity / J. W. Maluf // Annalen Phys. — 2013. — Vol. 525. — P. 339—357.
5. Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach / M. Krššák [et al.] // Class. Quant. Grav. — 2019. — Vol. 36, no. 18. — P. 183001.
6. *Ferraro, R.* Modified teleparallel gravity: Inflation without inflaton / R. Ferraro, F. Fiorini // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D75. — P. 084031.
7. *Bengochea, G. R.* Dark torsion as the cosmic speed-up / G. R. Bengochea, R. Ferraro // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D79. — P. 124019.
8. *Ferraro, R.* On Born-Infeld Gravity in Weitzenböck spacetime / R. Ferraro, F. Fiorini // Phys. Rev. — 2008. — Vol. D78. — P. 124019.
9. *Linder, E. V.* Einstein's Other Gravity and the Acceleration of the Universe / E. V. Linder // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 127301 ; — [Erratum: Phys. Rev.D82,109902(2010)].
10. f(T) teleparallel gravity and cosmology / Y.-F. Cai [et al.] // Rept. Prog. Phys. — 2016. — Vol. 79, no. 10. — P. 106901.
11. *Hayashi, K.* New General Relativity / K. Hayashi, T. Shirafuji // Phys. Rev. D / ed. by J.-P. Hsu, D. Fine. — 1979. — Vol. 19. — P. 3524—3553 ; — [Addendum: Phys.Rev.D 24, 3312–3314 (1982)].
12. “Teleparallel” dark energy / C.-Q. Geng [et al.] // Phys. Lett. B. — 2011. — Vol. 704. — P. 384—387.
13. *Maluf, J. W.* Conformally invariant teleparallel theories of gravity / J. W. Maluf, F. F. Faria // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85. — P. 027502.
14. *Bahamonde, S.* New classes of modified teleparallel gravity models / S. Bahamonde, C. G. Böhm, M. Krššák // Phys. Lett. B. — 2017. — Vol. 775. — P. 37—43.
15. Teleparallel theories of gravity as analogue of nonlinear electrodynamics / M. Hohmann [et al.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 97, no. 10. — P. 104042.
16. *Szabados, L. B.* Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in General Relativity / L. B. Szabados // Living Rev. Rel. — 2009. — Vol. 12. — P. 4.

17. Metric Theories of Gravity: Perturbations and Conservation Laws. Vol. 38 / A. N. Petrov [et al.]. — De Gruyter, 04/2017. — (De Gruyter Studies in Mathematical Physics).
18. *Obukhov, Y. N.* Invariant conserved currents in gravity theories with local Lorentz and diffeomorphism symmetry / Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 74. — P. 064002.
19. *Obukhov, Y. N.* Conserved currents in gravitational models with quasi-invariant Lagrangians: Application to teleparallel gravity / Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar, J. G. Pereira // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 74. — P. 104007.
20. *Will, C. M.* Theory and experiment in gravitational physics / C. M. Will. — Cambridge University Press, 1993.
21. *Will, C. M.* The Confrontation between General Relativity and Experiment / C. M. Will // Living Rev. Rel. — 2014. — Vol. 17. — P. 4.
22. *Will, C. M.* Theory and Experiment in Gravitational Physics / C. M. Will. — Cambridge University Press, 2018.
23. *Emtsova, E. D.* Conserved currents and superpotentials in teleparallel equivalent of GR / E. D. Emtsova, A. N. Petrov, A. V. Toporensky // Class. Quant. Grav. — 2020. — Vol. 37, no. 9. — P. 095006.
24. *Emtsova, E. D.* On conservation laws in teleparallel gravity / E. D. Emtsova, A. N. Petrov, A. V. Toporensky // J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — Vol. 1557, no. 1. — P. 012017.
25. *Einstein, A.* Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus / A. Einstein // Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. — 1928. — Vol. 17. — P. 217—221.
26. *Einstein, A.* Neue möglichkeit für eine einheitliche feldtheorie von gravitation und elektrizität / A. Einstein. — San Francisco : W. H. Freeman, 1928.
27. *Landau, L. D.* The Classical Theory of Fields. Volume 2 / L. D. Landau, E. M. Lifschits. — Oxford : Pergamon Press, 1975. — (Course of Theoretical Physics).
28. *C, M.* Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity / M. C // Ann. Phys. — 1961. — Vol. 12. — P. 118.
29. *Misner, C. W.* Gravitation / C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. — San Francisco : W. H. Freeman, 1973.
30. *Maluf, J. W.* On reference frames in spacetime and gravitational energy in freely falling frames / J. W. Maluf, F. F. Faria, S. C. Ulhoa // Class. Quant. Grav. — 2007. — Vol. 24. — P. 2743—2754.
31. *Lucas, T. G.* Regularizing role of teleparallelism / T. G. Lucas, Y. N. Obukhov, J. G. Pereira // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D80. — P. 064043.
32. *Obukhov, Y. N.* Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity / Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 73. — P. 124017.

33. *Krššák, M.* Spin Connection and Renormalization of Teleparallel Action / M. Krššák, J. G. Pereira // Eur. Phys. J. C. — 2015. — Vol. 75, no. 11. — P. 519.
34. *Krššák, M.* Gravitational energy-momentum in teleparallel gravity: A critical assessment Presentation (Conference: Teleparallel universes in Salamanca, November 26-28) / M. Krššák. — 2018.
35. *Mitskevich, N. V.* Physical Fields in General Relativity Theory / N. V. Mitskevich. — Moscow : Nauka, 1969.
36. *Petrov, A. N.* Covariantized Noether identities and conservation laws for perturbations in metric theories of gravity / A. N. Petrov, R. R. Lompay // Gen. Rel. Grav. — 2013. — Vol. 45. — P. 545—579.
37. *Klein, F.* Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie / F. Klein // Felix Klein. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vol. 1 / ed. by R. Fricke, A. Ostrowski. — Berlin : Springer, 1921. — P. 568—585 ; — in German.
38. *Chen, C.-M.* Quasilocal quantities for GR and other gravity theories / C.-M. Chen, J. M. Nester // Class. Quant. Grav. — 1999. — Vol. 16. — P. 1279—1304.
39. *Obukhov, Y. N.* Metric affine approach to teleparallel gravity / Y. N. Obukhov, J. G. Pereira // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 67. — P. 044016.
40. *Krššák, M.* Holographic Renormalization in Teleparallel Gravity / M. Krššák // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77, no. 1. — P. 44.
41. *Krššák, M.* The covariant formulation of $f(T)$ gravity / M. Krššák, E. N. Saridakis // Class. Quant. Grav. — 2016. — Vol. 33, no. 11. — P. 115009.
42. *Capozziello, S.* The gravitational energy-momentum pseudotensor: the cases of $f(R)$ and $f(T)$ gravity / S. Capozziello, M. Capriolo, M. Transirico // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2018. — Vol. 15. — P. 1850164.
43. *Katz, J.* Relativistic conservation laws and integral constraints for large cosmological perturbations / J. Katz, J. Bicak, D. Lynden-Bell // Phys. Rev. D. — 1997. — Vol. 55. — P. 5957—5969.
44. *Bahamonde, S.* Noether symmetries and boundary terms in extended Teleparallel gravity cosmology / S. Bahamonde, U. Camci, S. Capozziello // Class. Quant. Grav. — 2019. — Vol. 36, no. 6. — P. 065013.
45. *Kucukakca, Y.* Noether symmetry analysis of anisotropic universe in $f(T,B)$ gravity / Y. Kucukakca // Turk. J. Phys. — 2018. — Vol. 42, no. 4. — P. 386—401.
46. The Total energy-momentum of the universe in teleparallel gravity / Y.-X. Liu [et al.] // arXiv:0706.3245. — 2007. — June.
47. Modified teleparallel theories of gravity in symmetric spacetimes / M. Hohmann [et al.] // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 100, no. 8. — P. 084002.

48. *Maluf, J. W.* Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence / J. W. Maluf, M. V. O. Veiga, J. F. da Rocha-Neto // *Gen. Rel. Grav.* — 2007. — Vol. 39. — P. 227—240.
49. *Formiga, J. B.* The energy-momentum tensor of gravitational waves, Wyman spacetime and freely falling observers / J. B. Formiga // *Annalen Phys.* — 2018. — Vol. 530. — P. 0320.
50. Difficulties of Teleparallel Theories of Gravity with Local Lorentz Symmetry / J. W. Maluf [et al.] // *Class. Quant. Grav.* — 2020. — Vol. 37, no. 6. — P. 067003.
51. *Li, B.* $f(T)$ gravity and local Lorentz invariance / B. Li, T. P. Sotiriou, J. D. Barrow // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D83. — P. 064035.
52. *Sotiriou, T. P.* Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry / T. P. Sotiriou, B. Li, J. D. Barrow // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D83. — P. 104030.
53. *Golovnev, A.* On the covariance of teleparallel gravity theories / A. Golovnev, T. Koivisto, M. Sandstad // *Class. Quant. Grav.* — 2017. — Vol. 34, no. 14. — P. 145013.
54. Flat connection for rotating spacetimes in extended teleparallel gravity theories / L. Järv [et al.] // *Universe.* — 2019. — Vol. 5. — P. 142.
55. On conserved quantities for the Schwarzschild black hole in teleparallel gravity / E. D. Emtsova [et al.] // *Eur. Phys. J. C.* — 2021. — Vol. 81, no. 8. — P. 743.
56. On the Schwarzschild solution in TEGR / E. D. Emtsova [et al.] // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — Vol. 2081, no. 1. — P. 012017.
57. *Bronnikov, K.* Multi-horizon spherically symmetric spacetimes with several scales of vacuum energy / K. Bronnikov, I. Dymnikova, E. Galaktionov // *Class. Quant. Grav.* — 2012. — Vol. 29. — P. 095025.
58. *Tamanini, N.* Good and bad tetrads in $f(T)$ gravity / N. Tamanini, C. G. Boehmer // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D86. — P. 044009.
59. *Toporensky, A.* Spin connection and cosmological perturbations in $f(T)$ gravity / A. Toporensky, P. Tretyakov // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 102, no. 4. — P. 044049.
60. *Emtsova, E. D.* A moving black hole in TEGR as a moving matter ball / E. D. Emtsova, A. N. Petrov // *Space, Time and Fundamental Interactions.* — 2022. — No. 39. — P. 18—25.
61. *Emtsova, E. D.* On gauges for a moving black hole in TEGR / E. D. Emtsova, A. N. Petrov // *Gen. Rel. Grav.* — 2022. — Vol. 54, no. 10. — P. 114.
62. *Hartle, J.* Gravitational interaction of a black hole with distant bodies. In: Thorne, K.S., MacDonald D.A. (eds.) *Black Holes: The Membrane Paradigm*, pp. 146-180. / J. Hartle, K. Thorne, R. Price. — New Haven/London : Yale University Press, 1986.
63. *Ferraro, R.* Spherically symmetric static spacetimes in vacuum $f(T)$ gravity / R. Ferraro, F. Fiorini // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84. — P. 083518.

64. *Bejarano, C.* Kerr geometry in $f(T)$ gravity / C. Bejarano, R. Ferraro, M. J. Guzmán // Eur. Phys. J. C. — 2015. — Vol. 75. — P. 77.
65. *Bejarano, C.* McVittie solution in $f(T)$ gravity / C. Bejarano, R. Ferraro, M. J. Guzmán // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77, no. 12. — P. 825.
66. *Ferraro, R.* Remnant group of local Lorentz transformations in $f(T)$ theories / R. Ferraro, F. Fiorini // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91, no. 6. — P. 064019.
67. Remnant Symmetry, Propagation and Evolution in $f(T)$ Gravity / P. Chen [et al.] // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91, no. 6. — P. 064003.
68. *Golovnev, A.* Nontrivial Minkowski backgrounds in $f(T)$ gravity / A. Golovnev, M.-J. Guzman // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 103, no. 4. — P. 044009.
69. *Krššák, M.* Teleparallel Gravity: Role of Inertia, Remnant Symmetries, and Uniqueness of Formulation / M. Krššák // Work in progress. —
70. *Emtsova, E. D.* Post-Newtonian limit of scalar-torsion theories of gravity as analogue to scalar-curvature theories / E. D. Emtsova, M. Hohmann // Phys. Rev. — 2020. — Vol. D101, no. 2. — P. 024017.
71. *Faraoni, V.* Cosmology in scalar tensor gravity / V. Faraoni // Fundam. Theor. Phys. — 2004. — Vol. 139.
72. *Fujii, Y.* The scalar-tensor theory of gravitation / Y. Fujii, K. Maeda. — Cambridge University Press, 2007.
73. *Flanagan, E. E.* The Conformal frame freedom in theories of gravitation / E. E. Flanagan // Class. Quant. Grav. — 2004. — Vol. 21. — P. 3817.
74. Cosmological viability of $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase / S. Capozziello [et al.] // Phys. Lett. — 2006. — Vol. B639. — P. 135—143.
75. Correspondence of $F(R)$ Gravity Singularities in Jordan and Einstein Frames / S. Bahamonde [et al.] // Annals Phys. — 2016. — Vol. 373. — P. 96—114.
76. Deceleration versus acceleration universe in different frames of $F(R)$ gravity / S. Bahamonde [et al.] // Phys. Lett. — 2017. — Vol. B766. — P. 225—230.
77. *Brooker, D. J.* Precision predictions for the primordial power spectra from $f(R)$ models of inflation / D. J. Brooker, S. D. Odintsov, R. P. Woodard // Nucl. Phys. — 2016. — Vol. B911. — P. 318—337.
78. *Catena, R.* Einstein and Jordan reconciled: a frame-invariant approach to scalar-tensor cosmology / R. Catena, M. Pietroni, L. Scarabello // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 084039.
79. *Faraoni, V.* The (pseudo)issue of the conformal frame revisited / V. Faraoni, S. Nadeau // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D75. — P. 023501.

80. *Deruelle, N.* Conformal equivalence in classical gravity: the example of 'Veiled' General Relativity / N. Deruelle, M. Sasaki // Springer Proc. Phys. — 2011. — Vol. 137. — P. 247—260.
81. *Chiba, T.* Conformal-Frame (In)dependence of Cosmological Observations in Scalar-Tensor Theory / T. Chiba, M. Yamaguchi // JCAP. — 2013. — Vol. 1310. — P. 040.
82. *Postma, M.* Equivalence of the Einstein and Jordan frames / M. Postma, M. Volponi // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D90, no. 10. — P. 103516.
83. *Faraoni, V.* Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology / V. Faraoni, E. Gunzig, P. Nardone // Fund. Cosmic Phys. — 1999. — Vol. 20. — P. 121.
84. *Capozziello, S.* Physical non-equivalence of the Jordan and Einstein frames / S. Capozziello, P. Martin-Moruno, C. Rubano // Phys. Lett. — 2010. — Vol. B689. — P. 117—121.
85. *Rondeau, F.* Equivalence of cosmological observables in conformally related scalar tensor theories / F. Rondeau, B. Li // Phys. Rev. — 2017. — Vol. D96, no. 12. — P. 124009.
86. Invariant quantities in the scalar-tensor theories of gravitation / L. Järv [et al.] // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91, no. 2. — P. 024041.
87. *Kuusk, P.* Invariant quantities in the multiscalar-tensor theories of gravitation / P. Kuusk, L. Jarv, O. Vilson // Int. J. Mod. Phys. — 2016. — Vol. A31, 02n03. — P. 1641003.
88. *Møller, C.* Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity / C. Møller // K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. — 1961. — Vol. 1. — P. 1—50.
89. *Golovnev, A.* Introduction to teleparallel gravities / A. Golovnev // 9th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics Belgrade, Serbia, September 18-23, 2017. — 2018.
90. Reflections on the covariance of modified teleparallel theories of gravity / C. Bejarano [et al.] // Universe. — 2019. — Vol. 5. — P. 158.
91. *Izumi, K.* Acausality and Nonunique Evolution in Generalized Teleparallel Gravity / K. Izumi, J.-A. Gu, Y. C. Ong // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D89, no. 8. — P. 084025.
92. *Chakrabarti, S.* Some aspects of reconstruction using a scalar field in $f(T)$ gravity / S. Chakrabarti, J. L. Said, G. Farrugia // Eur. Phys. J. — 2017. — Vol. C77, no. 12. — P. 815.
93. *Otalora, G.* Scaling attractors in interacting teleparallel dark energy / G. Otalora // JCAP. — 2013. — Vol. 1307. — P. 044.
94. *Jamil, M.* Stability of a non-minimally conformally coupled scalar field in $F(T)$ cosmology / M. Jamil, D. Momeni, R. Myrzakulov // Eur. Phys. J. — 2012. — Vol. C72. — P. 2075.
95. *Chen, Z.-C.* Post-Newtonian Approximation of Teleparallel Gravity Coupled with a Scalar Field / Z.-C. Chen, Y. Wu, H. Wei // Nucl. Phys. — 2015. — Vol. B894. — P. 422—438.

96. *Bahamonde, S.* Teleparallel quintessence with a nonminimal coupling to a boundary term / S. Bahamonde, M. Wright // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92, no. 8. — P. 084034 ; — [Erratum: Phys. Rev.D93,no.10,109901(2016)].
97. *Bamba, K.* Conformal symmetry and accelerating cosmology in teleparallel gravity / K. Bamba, S. D. Odintsov, D. Sáez-Gómez // Phys. Rev. — 2013. — Vol. D88. — P. 084042.
98. *Nojiri, S.* Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution / S. Nojiri, S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou // Phys. Rept. — 2017. — Vol. 692. — P. 1—104.
99. *Hohmann, M.* Covariant formulation of scalar-torsion gravity / M. Hohmann, L. Järv, U. Ualikhanova // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D97, no. 10. — P. 104011.
100. *Hohmann, M.* Scalar-torsion theories of gravity I: general formalism and conformal transformations / M. Hohmann // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 6. — P. 064002.
101. *Hohmann, M.* Scalar-torsion theories of gravity II: $L(T, X, Y, \varphi)$ theory / M. Hohmann, C. Pfeifer // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 6. — P. 064003.
102. *Hohmann, M.* Scalar-torsion theories of gravity III: analogue of scalar-tensor gravity and conformal invariants / M. Hohmann // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 6. — P. 064004.
103. *Li, J.-T.* Parametrized post-Newtonian limit of the teleparallel dark energy model / J.-T. Li, Y.-P. Wu, C.-Q. Geng // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D89, no. 4. — P. 044040.
104. *Mohseni Sadjadi, H.* Parameterized post-Newtonian approximation in a teleparallel model of dark energy with a boundary term / H. Mohseni Sadjadi // Eur. Phys. J. — 2017. — Vol. C77, no. 3. — P. 191.
105. *Ualikhanova, U.* Parameterized post-Newtonian limit of general teleparallel gravity theories / U. Ualikhanova, M. Hohmann // Phys. Rev. — 2019. — Vol. D100. — P. 104011.
106. *Hayward, J.* Scalar tetrad theories of gravity / J. Hayward // Gen. Rel. Grav. — 1981. — Vol. 13. — P. 43—55.
107. *Jarv, L.* General relativity as an attractor for scalar-torsion cosmology / L. Jarv, A. Toporensky // Phys. Rev. — 2016. — Vol. D93, no. 2. — P. 024051.
108. *Järv, L.* Effective Gravitational “Constant” in Scalar-(Curvature)Tensor and Scalar-Torsion Gravities / L. Järv // Universe. — 2017. — Vol. 3, no. 2. — P. 37.
109. *Olmo, G. J.* The Gravity Lagrangian according to solar system experiments / G. J. Olmo // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 261102.
110. *Olmo, G. J.* Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism / G. J. Olmo // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D72. — P. 083505.
111. *Perivolaropoulos, L.* PPN Parameter γ and Solar System Constraints of Massive Brans-Dicke Theories / L. Perivolaropoulos // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 047501.

112. Post-Newtonian parameters γ and β of scalar-tensor gravity with a general potential / M. Hohmann [et al.] // Phys. Rev. — 2013. — Vol. D88, no. 8. — P. 084054 ; — [Erratum: Phys. Rev.D89,no.6,069901(2014)].
113. Testing scalar-tensor theories and parametrized post-Newtonian parameters in Earth orbit / A. Schärer [et al.] // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D90, no. 12. — P. 123005.
114. *Hohmann, M.* Parametrized post-Newtonian limit of Horndeski's gravity theory / M. Hohmann // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92, no. 6. — P. 064019.
115. *Hohmann, M.* Gauge-invariant approach to the parametrized post-Newtonian formalism / M. Hohmann // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 101, no. 2. — P. 024061.
116. *Nutku, Y.* The Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics in the Brans-Dicke Theory / Y. Nutku // Astrophys. J. — 1969. — Mar. — Vol. 155. — P. 999.
117. *Nordtvedt Jr., K.* Post-Newtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences / K. Nordtvedt Jr. // Astrophys. J. — 1970. — Vol. 161. — P. 1059—1067.
118. *Bahamonde, S.* Can Horndeski Theory be recast using Teleparallel Gravity? / S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, J. L. Said // Phys. Rev. — 2019. — Vol. D100, no. 6. — P. 064018.
119. Post-Newtonian limit of Teleparallel Horndeski gravity / S. Bahamonde [et al.] // Class. Quant. Grav. — 2020. — Vol. 38, no. 2. — P. 025006.
120. Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension / L. Järv [et al.] // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D97, no. 12. — P. 124025.
121. *Rünkla, M.* Family of scalar-nonmetricity theories of gravity / M. Rünkla, O. Vilson // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 8. — P. 084034.
122. *Flathmann, K.* Post-Newtonian limit of generalized symmetric teleparallel gravity / K. Flathmann, M. Hohmann // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 103, no. 4. — P. 044030.
123. *Hohmann, M.* Gauge-Invariant Post-Newtonian Perturbations in Symmetric Teleparallel Gravity / M. Hohmann // Astron. Rep. — 2021. — Vol. 65, no. 10. — P. 952—956.
124. *Flathmann, K.* Parametrized post-Newtonian limit of generalized scalar-nonmetricity theories of gravity / K. Flathmann, M. Hohmann // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105, no. 4. — P. 044002.
125. *Blanchet, L.* Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries / L. Blanchet // Living Rev. Rel. — 2014. — Vol. 17. — P. 2.
126. *Flathmann, K.* Post-Newtonian Limit of Generalized Scalar-Torsion Theories of Gravity / K. Flathmann, M. Hohmann // Phys. Rev. — 2020. — Vol. D101. — P. 024005.
127. Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology / S. Bahamonde [et al.] // arXiv:2106.13793. — 2021. — June.

128. *Golovnev, A.* Cosmological perturbations in modified teleparallel gravity models / A. Golovnev, T. Koivisto // JCAP. — 2018. — Vol. 1811, no. 11. — P. 012.
129. *Hohmann, M.* Dynamical systems approach and generic properties of $f(T)$ cosmology / M. Hohmann, L. Jarv, U. Ualikhanova // Phys. Rev. — 2017. — Vol. D96, no. 4. — P. 043508.
130. Propagation of gravitational waves in teleparallel gravity theories / M. Hohmann [et al.] // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 12. — P. 124004.
131. No further gravitational wave modes in $F(T)$ gravity / K. Bamba [et al.] // Phys. Lett. — 2013. — Vol. B727. — P. 194—198.
132. Gravitational Waves in Modified Teleparallel Theories / G. Farrugia [et al.] // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D97, no. 12. — P. 124064.
133. *Nunes, R. C.* New observational constraints on $f(T)$ gravity through gravitational-wave astronomy / R. C. Nunes, S. Pan, E. N. Saridakis // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 10. — P. 104055.

Приложение А

Дополнения

А.1 Инерциальная спиновая связность в различных калибровках

В этом Дополнении мы выводим компоненты инерциальных спиновых связностей в различных калибровках, рассматриваемых в статье, которые являются довольно объемными и громоздкими.

А.1.1 Статическая калибровка Шварцшильда

1) Инерциальная спиновая связность, соответствующая $\overset{C}{h}$, имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}1} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}1} = \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} = -\frac{1}{f} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} = -\frac{\sin \theta}{f^{\frac{1}{2}}}, \quad \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} = -\cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

2) Тетраде $\overset{D}{h}$ соответствует инерциальная спиновая связность со следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}1} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}1} = -\dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}3} = -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}3} = \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta \cos \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}2} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}2} = -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}3} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}3} = \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} = \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta \sin \varphi, \quad \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} = -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta \sin \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}1} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}1} = \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta, \quad \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}2} = \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}3} = -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}3} = \left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin^2 \theta, \quad \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}2} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}2} = -\left(1 - \frac{1}{f}\right) \cos \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = \left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \quad \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}2} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}2} = -\left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} = -\left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Калибровка Леметра

1) Тетраде $\overset{B}{h}$ соответствует инерциальная спиновая связность со следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}1} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}1} &= -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}}, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} &= \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} &= -\frac{\sin \theta}{f^{\frac{1}{2}}}, & \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} &= -\cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

2) Тетраде $\overset{A}{h}$ соответствует инерциальная спиновая связность со следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}1} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}1} &= -\dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}3} = -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}3} = -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta \cos \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}2} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}2} &= \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}3} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}3} = \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} &= -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta \sin \varphi, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} &= \frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta \sin \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}1} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}1} &= -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \cos \theta, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}2} &= -\frac{1}{2rf} \sqrt{\frac{2M}{r}} \sin \theta, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}3} = -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}3} &= \left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin^2 \theta, & \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}2} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}2} &= -\left(1 - \frac{1}{f}\right) \cos \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} &= \left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, & \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}2} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}2} &= -\left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin \varphi, \\ \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} &= -\left(1 - \frac{1}{f}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.1.3 e -калибровка

Мы используем здесь сокращенное обозначение (4.12) и (4.13) для \mathcal{A}_e и \mathcal{B}_e соответственно.

1) Тетраде $\overset{B}{h}$ соответствует инерциальная спиновая связность со следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}1} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}1} &= -\frac{eM}{fr^2} (e^2 - f)^{-\frac{1}{2}}, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} &= \mathcal{B}_e f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = \sin \theta \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = -\sin \theta \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} &= -\mathcal{A}_e f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta, & \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} &= -\cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

2) Тетраде $\overset{A}{h}$ соответствует инерциальная спиновая связность со следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned}
\dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{1}} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{1}} &= -\frac{eM}{fr^2} (e^2 - f)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \varphi, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{1}} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{1}} &= -\frac{eM}{fr^2} (e^2 - f)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \varphi, \\
\dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}\hat{1}} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{1}} &= -\frac{eM}{fr^2} (e^2 - f)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{2}} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{2}} &= \mathcal{B}_e f^{-\frac{1}{2}} \cos \theta \cos \varphi, \\
\dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{3}} = \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{3}} &= -\mathcal{B}_e f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \varphi, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{2}} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{2}} &= \mathcal{B}_e f^{-\frac{1}{2}} \cos \theta \sin \varphi, \\
\dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{3}} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{3}} &= \mathcal{B}_e f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \varphi, & \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}\hat{2}} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{2}} &= -\mathcal{B}_e f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta, \\
\dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}\hat{3}} = -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}\hat{3}} &= -\left(\mathcal{A}_e f^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \sin^2 \theta, & \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}\hat{2}} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}\hat{2}} &= \left(\mathcal{A}_e f^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \cos \varphi, \\
\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}\hat{2}} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}\hat{2}} &= \left(\mathcal{A}_e f^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \sin \varphi, & \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}\hat{3}} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}\hat{3}} &= -\left(\mathcal{A}_e f^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \\
\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}\hat{3}} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}\hat{3}} &= \left(\mathcal{A}_e f^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2 Тривиальность $\bar{\beta} = 0$ для свободно падающей тетрады в $f(T)$ -гравитации

В разделе 6 мы нашли, что для тетрады (6.11), которая была построена по аналогии со случаем Леметра (4.2) как свободно падающая тетрада, заданная лоренцевым бустом, в общем сферически симметричном пространстве-времени, антисимметричные уравнения поля имеют вид (6.12)-(6.14). Эти уравнения выполняются только в трех случаях: 1) $f_{TT} = 0$; 2) $T' = 0$; 3) $\bar{\beta} = 0$. В то время как случай 1) точно ограничивает теорию до TEGR, случай 2) сводится к TEGR с эффективной космологической постоянной, случай 3) подразумевает $A = 1$, но в принципе оставляет нам возможность иметь нетривиальное решение для B . Покажем, что это не так, и оставшиеся симметричные уравнения поля также дают $B = 1$ и, следовательно, сделают этот случай тривиальным.

Рассмотрим тетраду (6.11), антисимметричные уравнения поля (6.12)-(6.14) и рассмотрим случай $\bar{\beta} = 1$, из которого следует, что $A = 1$. Затем мы находим, что остальные уравнения поля в их смешанной форме будут иметь вид

$$E_0^0 = \frac{4(f_T + f_{TT}rT')B^2 - 4(f_T + f_{TT}rT')B + fr^2B^3 + 4f_TrB'}{2r^2B^3}, \tag{A.7}$$

$$E_1^1 = \frac{f}{2} - \frac{2f_T}{r^2B^2} + \frac{2f_T}{r^2B}. \tag{A.8}$$

$$E_2^2 = \frac{2(2f_T + f_{TT}rT')B^2 - 2(f_T + f_{TT}rT')B + (-2f_T + fr)2B^3 + 2f_TrB'}{2r^2B^3}, \tag{A.9}$$

$$E_3^3 = E_2^2. \tag{A.10}$$

Затем мы можем вычесть первое и третье уравнения, чтобы найти

$$2E_2^2 - E_0^0 = \frac{f}{2} - \frac{2f_T}{r^2} + \frac{2f_T}{r^2B}. \tag{A.11}$$

Сравнивая это уравнение со вторым уравнением, мы видим, что получается

$$B = 1. \tag{A.12}$$

Следовательно, случай $\bar{\beta} = 0$ действительно тривиален и скрытого нетривиального решения нет. Естественно, об этом можно было догадаться сразу, поскольку $\bar{\beta} = 0$ вообще не соответствует какому-то бусту и является лишь частным случаем хорошей тетрады (6.7) с $A = 1$. Однако нам неизвестно о демонстрации тривиальности решения $A = 1$ в литературе по $f(T)$.