

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Булинская Екатерина Владимировна

**Вероятностно-геометрические свойства
пространственного ветвящегося случайного блуждания**

1.1.4— теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2024

Оглавление

Стр.

Введение	4
Глава 1. Применение аппарата марковских цепей с запретами к классификации каталитических ветвящихся процессов	31
1.1 Новые результаты для марковских цепей с запретами	31
1.2 Описание каталитического ветвящегося процесса	37
1.3 Вспомогательный процесс Беллмана–Харриса	38
1.4 Моментный анализ КВП	43
1.5 Важные частные случаи	59
1.6 Предельные теоремы	63
Глава 2. Геометрические аспекты распространения фронта популяции в каталитических ветвящихся случайных блужданиях	69
2.1 Описание каталитического ветвящегося случайного блуждания по \mathbb{Z}^d	69
2.2 Применение результатов главы 1 к КВСБ по \mathbb{Z}^d	70
2.3 Общий подход к исследованию экстремальных положений частиц в КВСБ	72
2.4 Случай “легких хвостов” скачка блуждания	78
2.4.1 Теоремы о предельной форме фронта КВСБ	79
2.4.2 Доказательства результатов о предельной форме фронта	82
2.4.3 Альтернативное представление для предельной формы и примеры	90
2.4.4 Скорость сходимости в предельной теореме для фронта КВСБ	94
2.4.5 Доказательство теоремы о флуктуациях фронта КВСБ	97
2.5 Случай правильно меняющихся хвостов скачка блуждания	115
2.5.1 Предельная теорема для максимума КВСБ по \mathbb{Z}	115
2.5.2 Доказательство предельной теоремы для максимума	117
2.5.3 Случай независимых координат в многомерном КВСБ	127
2.5.4 Примеры	133
2.5.5 Изотропный случай	136

2.6	Промежуточный случай: умеренно тяжелые хвосты скачка блуждания	139
2.6.1	Предельная форма фронта КВСБ в случае семиэкспоненциального распределения скачка блуждания	140
2.6.2	Доказательства предельных теорем для случая семиэкспоненциального распределения	144
2.6.3	Примеры	153
2.7	Сопоставление доказанных результатов	160
Глава 3. Новые модели и результаты анализа динамики популяций		
3.1	Время первого достижения высокого уровня каталитическим ветвящимся случайным блужданием	162
3.2	О максимальном отклонении каталитического ветвящегося случайного блуждания	167
3.3	Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков	177
3.4	Распространение фронта ветвящегося случайного блуждания с периодическими источниками ветвления	190
3.5	Распространение ветвящегося случайного блуждания на периодических графах	204
Заключение		216
Список обозначений и сокращений		219
Список литературы		223

Введение

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена исследованию стохастических моделей распространения популяций (частиц, генов, особей) в пространстве с течением времени. Одна из первых детерминированных моделей такого рода была предложена в известной статье [1], где было выведено знаменитое КПП-уравнение. В последние 20 лет большое число публикаций, выполненных в ведущих научных центрах нашей страны и за рубежом, посвящено моделям, описывающим эволюцию популяций с помощью *ветвящихся случайных блужданий* (ВСБ) (см., например, [2], [3] и [4]). Эти стохастические модели позволяют одновременно учитывать два механизма случайности. Один связан со случайными перемещениями частиц в пространстве, а другой позволяет описывать (случайные) процессы размножения и гибели частиц. Таким образом, ВСБ может рассматриваться как обобщение и случайного блуждания, и ветвящегося процесса – классических объектов теории вероятностей.

К настоящему времени предложено множество разнообразных моделей ВСБ, в которых используются различные виды ветвления и блуждания, причем в разных сочетаниях. Достаточно указать на труды В. А. Ватутина, М. А. Лифшица, С. А. Молчанова, Н. В. Смородиной, В. А. Топчия, Е. Б. Яровой, S. Albeverio, Ph. Carmona, J.-F. Le Gall, F. den Hollander, Y. Hu, V. Mallein, Z. Shi, O. Zeitouni и других ученых (см., например, [5], [6] и [7]). Родственные модели возникают в предположении, что частицы движутся непрерывно, а не совершают скачки. Непрерывным аналогом ВСБ служит *ветвящееся броуновское движение* (см., например, [8–12]). Различные модели ВСБ представляют большой теоретический интерес и важны для приложений в биологии, эпидемиологии, популяционной динамике, химической кинетике, статистической физике, теории гомополимеров, теории массового обслуживания и др. (см., например, статьи [13], [14] и [15]). Таким образом, тематика диссертационной работы является весьма актуальной.

Результаты большинства работ, как правило, относятся к изучению пространственно-однородных ВСБ, в которых законы размножения и гибели частицы не зависят от ее местоположения. Однако особых методов исследования требуют модели ВСБ, в которых среди всех точек пространства есть конечное или счетное фиксированное множество так называемых источников

размножения и гибели частиц (именуемых также источниками ветвления или катализаторами). Только попадая в точки множества катализаторов, частица может произвести потомков или погибнуть, а вне этого множества она совершает блуждание без ветвления. Такие модели называются *каталитическими ветвящимися случайными блужданиями* (КВСБ). Наличие даже единственного катализатора уже вызывает сложности в исследовании (см., например, [16] и [17]). Нас же интересует КВСБ по \mathbb{Z}^d с произвольным конечным или периодическим счетным множеством катализаторов, некоторые аспекты которого изучались, например, в статьях [18], [19] и [20]. Непрерывный аналог КВСБ, называемый *каталитическим ветвящимся броуновским движением*, исследовался в работах [21–27]. Отметим также связь КВСБ с *каталитическими супер-процессами* (см., например, [28], [29] и [30]), а также параболической задачей Андерсона (см., например, [31] [32]). Интересно, что КВСБ может рассматриваться и как система массового обслуживания со случайным числом независимых серверов. Это дает возможность широких приложений для устанавливаемых результатов, см. [33].

В процессе исследования КВСБ по \mathbb{Z}^d оказалось, что некоторые наши результаты справедливы, даже если случайное блуждание по \mathbb{Z}^d заменить на более общий процесс, управляющий перемещением частиц, например, на марковскую цепь с произвольным конечным или счетным пространством состояний. Соответствующая модель носит название *каталитического ветвящегося процесса* (КВП) и в такой общей постановке стала изучаться в работе [34].

Главное внимание в диссертации уделяется различным вероятностно-геометрическим аспектам асимптотического поведения фронта распространения популяции частиц. Выполнено целостное исследование взаимосвязанных сложных задач (в частности, для доказательства теоремы 15 потребовалось установить 14 лемм). С помощью развития вероятностно-аналитической техники в диссертации получен ряд неупрощаемых результатов, многие из которых носят приоритетный характер. К ним относится описание предельной формы фронта распространения надлежащим образом нормированного случайного облака частиц. При этом обнаружены новые эффекты, связанные с тяжестью распределения скачков перемещающихся частиц.

Можно сказать, что диссертация направлена на решение актуальных задач современной теории эволюции популяций в рамках стохастических моделей,

которые сочетают размножение, гибель и перемещение частиц в неоднородной среде, содержащей источники катализа.

Целью диссертационной работы является изучение асимптотического (при растущем времени) поведения общих и локальных численностей частиц в КВП с произвольным конечным числом катализаторов, установление предельных теорем в смысле сильной и слабой сходимости для фронта распространения популяции частиц в КВСБ по решетке любой размерности при различных предположениях о скорости убывания хвоста распределения скачка блуждания, а также решение других разнообразных задач, относящихся к исследованию этих и иных моделей ВСБ.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Проведена полная классификация КВП с произвольным конечным числом катализаторов, которая соответствует выполненному автором моментному анализу общих и локальных численностей частиц.
2. Доказаны предельные теоремы в сильной и слабой формах для нормированных общих и локальных численностей частиц в КВП с произвольным конечным числом катализаторов.
3. Найдены функции, нормирующие положения частиц в надкритическом КВСБ, для существования нетривиальной предельной формы фронта распространения популяции. Установлен детерминированный предел в смысле сходимости почти наверное для легких и умеренно тяжелых хвостов распределения скачка блуждания, а в случае тяжелых хвостов получен случайный предел в смысле слабой сходимости.
4. Выявлен характер флуктуаций нормированного семейства частиц в окрестности предельной формы фронта.
5. Разработаны методы вычислений вероятностей конечности времен достижения с запретами для марковских цепей с произвольным пространством состояний.
6. В случае надкритического КВСБ по целочисленной прямой доказана предельная теорема для момента первого достижения популяцией высокого уровня, а при исследовании критического и докритического КВСБ установлены предельные теоремы для максимума положений всех частиц, когда-либо существовавших в рамках изучаемого процесса.

7. Для докритического КВСБ с одним катализатором получено полное описание предельного поведения локальных численностей частиц, при условии их невырождения, в предположениях о конечной или бесконечной дисперсии числа потомков одной частицы.
8. Для надкритического ВСБ с бесконечным периодическим множеством катализаторов доказаны предельные теоремы о расстоянии Хаусдорфа между случайным нормированным облаком частиц и предельным детерминированным множеством в \mathbb{R}^d отдельно в случаях одинаковых и различных характеристик катализаторов.

Научная новизна.

1. Впервые получена полная классификация КВП с произвольным конечным числом катализаторов, причем естественность ее выбора подтверждена моментным анализом, проведенным для общих и локальных численностей частиц.
2. Впервые доказаны сильные предельные теоремы для фронта распространения КВСБ в многомерной постановке, причем исследованы все случаи: легкие, умеренно тяжелые и тяжелые хвосты распределения скачка блуждания.
3. Выполнено оригинальное исследование скорости распространения популяции частиц в ВСБ с бесконечным периодическим множеством катализаторов, причем результаты сформулированы в виде сильных предельных теорем для расстояния Хаусдорфа между случайным множеством нормированных положений частиц и предельным детерминированным множеством.

Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны специалистам Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Математического института имени В. А. Стеклова РАН, Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН и других учебных и научных организаций. Установленные результаты

могут отражаться в специальных курсах современной теории случайных процессов.

Методология и методы исследования. Для доказательства выносимых на защиту результатов использовался разнообразный вероятностный и аналитический аппарат. А именно, потребовалось задать вспомогательные многотипные ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с финальным типом частиц, ввести времена достижения с запретами для марковских цепей, построить многотипные марковские ветвящиеся процессы и вспомогательное пространственно-однородное общее ВСБ. Использовались теория восстановления и теория больших уклонений, мартингальная замена меры и метод каплинга, преобразования Лапласа и Лежандра–Фенхеля, выпуклый анализ и спинальная техника (так называемая лемма “от многого к малому”, т.е. “many-to-few”), представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр и тауберовы теоремы, результаты о связи между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа, наряду с анализом решений систем нелинейных интегральных уравнений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается полными доказательствами, опубликованными в рецензируемых журналах. Результаты находятся в соответствии с утверждениями, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли всестороннюю апробацию. Следует отметить, что в 2022 году автор диссертации стала победителем Первого Всероссийского конкурса молодых математиков России в номинации «молодые ученые в возрасте до 35 лет» (жюри конкурса возглавлял лауреат Филдсовской медали профессор А. Ю. Окуньков). На конкурс выдвигался цикл статей без соавторов (общий объем представленных на конкурс статей примерно 200 журнальных страниц), написанных и опубликованных после защиты кандидатской диссертации. Эти работы составили основу данной диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах.

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (2023), руководитель академик РАН А. Н. Ширяев.

2. Семинар отдела теории вероятностей Математического института им. В. А. Стеклова (2020), руководитель академик РАН А. С. Холево.
3. Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ РАН (2019, 2014), руководитель академик РАН И. А. Ибрагимов.
4. Общественный научный семинар “Спектральная теория дифференциальных операторов” МГУ им. М. В. Ломоносова (2019), руководитель академик РАН В. А. Садовничий.
5. Семинар Добрушинской лаборатории Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН (2019), руководитель профессор М. Л. Бланк.

Результаты диссертации прошли апробацию на следующих конференциях.

1. Международная конференция “Математика в созвездии наук”, посвященная юбилею ректора МГУ академика РАН В. А. Садовниченко, 1-2 апреля 2024, Москва, Россия.
2. Ломоносовские чтения 2024, МГУ им. М. В. Ломоносова, 20 марта-3 апреля 2024.
3. Конференция по теории ветвящихся процессов и дискретной математике, посвященная 100-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Б. А. Севастьянова, 3 октября 2023, Москва, МИАН, Россия.
4. International conference “Branching Processes and their Applications”, September 18-22, 2023, Tashkent, Samarkand, Uzbekistan.
5. International conference “A Perpetual Search: Mathematics, Physics, Life”. Conference dedicated to the 85-th Anniversary of Professor V. A. Malyshev (1938-2022), June 26-30, 2023, Moscow, Russia.
6. The 20th International conference “ASMDA 2023” (Applied Stochastic Models and Data Analysis), June 6-9, 2023, Heraklion, Crete, Greece.
7. International conference “Limit Theorems of Probability Theory and Mathematical Statistics”, September 26-28, 2022, Tashkent, Uzbekistan.
8. International conference “Branching processes, random walks and probability on discrete structures”, June 21-24, 2022, Moscow, Russia.
9. The 19th International conference “ASMDA 2021” (Applied Stochastic Models and Data Analysis), June 1-4, 2021, Athens, Greece.
10. The 5th International workshop on branching processes and their applications, April 6-22, 2021, Badajoz, Spain.

11. International conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
12. Applied Probability Workshop 2020, August 26-28, 2020, Mathematical Center in Akademgorodok, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
13. The 3rd BRICS Mathematics Conference, June 21-26, 2019, Innopolis, Russia.
14. The 2nd International Conference on Mathematics and Statistics, July 8-10, 2019, Prague, Czech Republic.
15. Понтрягинские чтения XXX, 3-9 мая, 2019, Воронеж, Россия.
16. International conference “Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications” – ACMPT-2017, October 23-28, 2017, Moscow, Russia.
17. International Workshop “Probability, Analysis and Geometry”, September 2-6, 2013, Ulm, Germany.
18. European Meeting of Statisticians, July 20-25, 2013, Budapest, Hungary.
19. Russian-Chinese Seminar on Asymptotic Methods in Probability Theory and Mathematical Statistics, June 10-14, 2013, St. Petersburg, Russia.
20. The 7th International Workshop on Simulation, May 21-25, 2013, Rimini, Italy.

Публикации и личный вклад автора. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно и изложены в 15 статьях без соавторов, 15 из которых ([156]–[170]) опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК (индексируемых в базах данных Web of Science, SCOPUS или РИНЦ).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. В отдельный список собраны обозначения и сокращения, используемые на протяжении всей диссертации. Обозначения, применяемые локально, поясняются отдельно и в общий список не вносятся. Полный объём диссертации составляет 238 страниц, включая 6 рисунков. Список литературы содержит 155 наименований.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и отмечена научная новизна проведенных автором исследований, показана теоретическая и практическая значимость установленных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. При этом мы описываем исследуемые задачи и установленные результаты, не дублируя

сложные формулы, которые содержатся в главах 1–3, а стараемся объяснить основные идеи и применяемые методы, а также отличие от предшествующих работ.

Результаты главы 1 опубликованы в статьях автора [157]–[159]. В этой главе основное внимание уделено каталитическим ветвящимся процессам (КВП). Для введения их классификации понадобилось обратиться к *временам достижения с запретами для марковских цепей*, которым и посвящен раздел 1.1. Это понятие имеет долгую историю, а первое всестороннее изложение предмета было дано в классической монографии [35]. Введение табу-вероятностей и времен достижения с запретами обеспечило мощный инструмент для изучения функционалов марковских цепей (см., например, [35], гл. 2, раздел 14) и свойств траекторий (см., например, [36]), для развития матричных аналитических методов в стохастическом моделировании (см., например, [37], гл. 3, раздел 5) и теории потенциала для марковских цепей (см., например, [38], гл. 4, раздел 6), для статистического оценивания генератора марковской цепи (см. [39]) и т.д. Насколько нам известно, формула для вероятности конечности времени достижения была выведена только для случаев пустого множества запретов (см. [35], гл. 2, раздел 12) и множества запретов, состоящего из единственного состояния (см. [40]). В разделе 1.1 мы завершаем общую картину. Результаты сформулированы в виде трех теорем. Первая из них дает представление для вероятности конечности времени достижения с запретами с помощью табу-вероятностей. Вторая теорема демонстрирует соотношения между такими вероятностями при различных начальных и конечных состояниях, когда множество запретов изменяется на одно состояние. Последний результат позволяет построить конечную итерационную схему для вычисления рассматриваемой вероятности, если либо множество запретов, либо его дополнение конечны. Теорема 3 охватывает важный частный случай для одноэлементного множества запретов. Доказательства используют преобразование Лапласа–Стилтьеса функций, появляющихся в системе Чжуна интегральных уравнений типа свертки.

Наш интерес к изучению времен достижения с запретами обусловлен их применением к полной классификации КВП. Для случая *одного катализатора* модель была описана в [34], хотя в более ограничительной постановке, называемой ветвящимся случайным блужданием (ВСБ) по \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, она была предложена в [41]. Оказывается, что в ВСБ с одним катализатором количество частиц в точке катализа, совпадающей с точкой начала процесса, может быть ис-

следовано с помощью подходящего процесса Беллмана–Харриса с двумя типами частиц (см. [16; 33; 42; 43]). Однако изучение других локальных характеристик процесса с произвольной стартовой точкой может быть выполнено с привлечением процесса Беллмана–Харриса уже с шестью типами частиц (см. [44] и [45]). Для применения таких вспомогательных процессов анализ *времен достижения с запретами для случайного блуждания* по \mathbb{Z}^d показал свою эффективность (см. [16; 40]). Попутно отметим, что результаты разделов 1.2–1.4 позволяют выделить три типа асимптотического (когда время стремится к бесконечности) поведения популяции частиц в КВП. Тип определяется значением перрона корня (меньше, равен или больше 1) введенной нами матрицы с элементами, явно зависящими от изученных вероятностей конечности времен достижения с запретами. Итак, для реализации плана исследований естественно подготовить аппарат времен достижения с запретами для марковских цепей, что и сделано в разделе 1.1.

Разделы 1.3–1.6 главы 1 посвящены изучению КВП, описание которого дано в разделе 1.2. Напомним, что теория ветвящихся процессов представляет собой обширный классический, но быстро развивающийся раздел теории вероятностей, имеющий множество приложений (см., например, монографии [46–52]). Ветвящийся процесс предназначен для описания эволюции популяции индивидумов, которыми могут быть гены, бактерии, особи, клиенты, ожидающие в очереди, и т.п. Особенностью КВП является возможность для представителей популяции (которых мы в дальнейшем будем называть частицами) не только оставлять потомков, но и перемещаться в пространстве. Кроме того, предполагается, что частицы производят потомков исключительно в присутствии катализаторов, которые расположены в произвольном конечном числе точек пространства. Исследование КВП с одним катализатором было начато еще в XX веке (в дополнение к [41] см. также статьи [53] и [54]), причем основными методами исследования служили анализ решений систем дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и спектральная теория операторов. В упомянутой выше работе [34] в качестве основных методов при выполнении моментного анализа процесса выступали спинальная техника, т.е. лемма “от многого к малому”, и теория восстановления. Заметим, что обобщение этих результатов на произвольное конечное множество катализаторов нетривиально, поскольку между катализаторами существует “конкуренция”. Важный частный случай нескольких катализаторов (для которого пространство состояний

марковской цепи совпадает с \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, а сама марковская цепь является симметричным пространственно-однородным случайным блужданием с конечной дисперсией скачков) был исследован в [55]. Там с помощью изучения спектральных свойств эволюционных операторов были получены достаточные условия экспоненциального роста численностей частиц. Мы следуем иному пути, позволяющему установить более широкие результаты при менее ограничительных условиях.

В рамках ветвящихся процессов естественная классическая задача заключается в анализе асимптотического поведения (при $t \rightarrow \infty$) численностей частиц в момент времени t (в отношении разнообразных ветвящихся процессов без катализаторов см., например, монографию [46]). В разделах 1.3–1.5 наша конечная цель является тройкой. Во-первых, мы предлагаем классификацию КВП (с N катализаторами), рассматривая процесс как *надкритический*, *критический* или *докритический*, если перронов корень ρ некоторой матрицы размера $N \times N$ с неотрицательными элементами больше, равен или меньше 1, соответственно. Во-вторых, мы проводим моментный анализ локальных и общих численностей частиц, чтобы подтвердить естественность предложенной классификации (в самом деле, можно увидеть, что асимптотическое поведение моментов всех порядков существенным образом определяется введенным классом КВП). В-третьих, мы рассматриваем некоторые частные случаи КВП и тем самым показываем, что установленные результаты не только обобщают соответствующие результаты других работ, но даже уточняют их. Как упоминалось выше, достижение поставленной тройкой цели привело к установлению новых результатов для марковских цепей с непрерывным временем. Эти вспомогательные результаты, представляющие самостоятельный интерес, содержатся в разделе 1.1

Наш подход состоит в использовании времен достижения марковской цепью точки нахождения одного из N катализаторов с запретами посещения остальных $N-1$ точек катализа и построении вспомогательных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса с не более чем $N^2 + N + 1$ типами частиц. Такой метод иницирован в статье [33], где ВСБ по \mathbb{Z} с одним катализатором было исследовано с помощью введения времен достижения (без запретов) точки нахождения катализатора и рассмотрения подходящего процесса Беллмана–Харриса с двумя типами частиц. Отметим также, что в [18] для изучения ВСБ по \mathbb{Z} с дискретным временем и несколькими катализаторами авторы рассматривали

вложенный многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, получающийся в результате “забывания/выбрасывания времени, проведенного между посещениями мест расположения катализаторов”. Последний подход является плодотворным при классификации ВСБ, поскольку многотипные процессы Гальтона–Ватсона и Беллмана–Харриса допускают одни и те же надкритический, критический или докритический режимы. Однако для дальнейшего изучения ВСБ (моментный анализ, предельные теоремы и т.п.) многотипного процесса Гальтона–Ватсона недостаточно, и поэтому авторы статьи [18] опирались на другую технику такую, как леммы “от многого к малому”. Наш первый вспомогательный процесс строится таким образом, чтобы исследование КВП могло быть в основном сведено к анализу процесса Беллмана–Харриса. Число частиц в этом процессе выбирается так, чтобы гарантировать неразложимость процесса. Оно не может быть меньше чем N и не должно быть больше чем $N(N + 1)$. Хорошо известно (см., например, [46], гл.4, § 5, 6 и 7), что неразложимый многотипный процесс Беллмана–Харриса классифицируется как надкритический, критический или докритический в зависимости от значения перронова корня матрицы, элементами которой являются средние числа непосредственных потомков частиц различных типов. Именно эта идея и лежит в основе классификации КВП. Кроме того, лемма 1 в разделе 1.3 дает даже более удобную для проверки (поскольку размерность используемой матрицы понижается) форму классификации КВП с помощью перронова корня определенной неразложимой матрицы размера $N \times N$. Еще один вспомогательный процесс Беллмана–Харриса требуется при изучении общих численностей частиц в КВП в случае невозвратной марковской цепи. Такой процесс выбирается разложимым с финальным типом частиц. Анализ вспомогательных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса позволяет не только классифицировать КВП, но также вывести систему уравнений восстановления для средних локальных и общих численностей частиц в КВП. Затем, чтобы осуществить моментный анализ локальных и общих численностей частиц, мы опираемся на многомерные теоремы восстановления, установленные в [56] и [57].

Используемый нами подход удобен при реализации, поскольку теория многотипных процессов Беллмана–Харриса хорошо развита и ее результаты могут быть применены к вспомогательным процессам Беллмана–Харриса, что приводит к новым результатам для КВП. Укажем лишь несколько работ за последние декады, относящихся к процессам Беллмана–Харриса, например, [58–62].

Заметим также, что КВП может трактоваться как марковский ветвящийся процесс с не более чем счетным числом типов частиц, поскольку положение частицы может быть ассоциировано с ее типом. Теория ветвящихся процессов со счетным числом типов частиц, несмотря на свою длительную историю (см., например, [63]), не была до сих пор систематизирована ввиду своей сложности. Некоторые работы такие, как [64–69], вносят важный вклад в это направление исследований. Однако результаты упомянутых работ не покрывают утверждения, установленные нами. Несколько иные модели, описывающие перемещение и размножение частиц, исследовались в работах [4; 14; 70–75]. ВСБ, изученные в этих статьях, – пространственно-однородны, в то время как главной особенностью КВП является именно пространственная неоднородность. Некоторые различия в поведении однородного ВСБ по \mathbb{Z} и его каталитического аналога обсуждаются в [18].

В разделе 1.3 вводится первый вспомогательный процесс Беллмана–Харриса и предлагается классификация КВП. Раздел 1.4 включает теорему 4 с доказательством, представляющую моментный анализ локальных и общих численностей частиц в КВП. Там же мы строим второй вспомогательный процесс Беллмана–Харриса, используемый при изучении общих численностей частиц в случае, когда марковская цепь, отвечающая за перемещение частиц, невозвратна. Раздел 1.5 демонстрирует применения наших результатов к КВСБ по \mathbb{Z}^d и к ветвящемуся процессу с одним катализатором. Кроме того, проводится подробное сравнение наших результатов с известными ранее. В последнем разделе 1.6 главы 1 устанавливаются слабые и сильные предельные теоремы для общих и локальных численностей частиц, существующих в КВП в момент времени $t \geq 0$, когда $t \rightarrow \infty$. Всюду “слабые и сильные предельные теоремы” обозначают результаты, описывающие асимптотическое поведение изучаемых случайных объектов соответственно в смысле слабой сходимости распределений и сходимости с вероятностью единица, т.е. почти наверное.

Что касается раздела 1.5, надо отметить, что наш подход сочетания техники времен достижения с запретами и аппарата вспомогательных многотипных процессов Беллмана–Харриса позволяет получить и обосновать классификацию КВП с произвольным конечным множеством катализаторов. Наши выводы справедливы при (в определенном смысле) минимальных ограничениях, налагаемых на характер перемещения и размножения частиц. Поэтому эти результаты

обобщают ряд предшествующих работ на близкие темы. Развитый подход может быть использован в последующем изучении других характеристик КВП.

Перейдем к обсуждению последнего раздела 1.6 главы 1. Напомним, что возникновение ветвящихся процессов восходит к середине XIX века, когда Ф. Гальтон и Г. В. Ватсон предложили модель, объясняющую вырождение фамилий. В рамках этой модели появился простейший ветвящийся процесс, называемый процессом Гальтона–Ватсона (в современной литературе также используется термин “процесс Бьенеме–Гальтона–Ватсона”, поскольку согласно [76] И. Ж. Бьенеме был первым, кто рассмотрел задачу вырождения популяции и дал ее верное решение для определенной дискретной модели). Термин “ветвящийся процесс” был введен А. Н. Колмогоровым в статье [77]. Оказалось, что величина вероятности вырождения, а также средний размер популяции существенно зависят от того, является ли среднее число потомков представителя популяции большим, равным или меньшим единицы. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с таким средним числом потомков называется соответственно надкритическим, критическим или докритическим. Только для надкритического процесса вероятность вырождения меньше единицы, а средний размер популяции стремится к бесконечности с ростом времени. Поэтому после решения задачи о нахождении вероятности вырождения возникает вопрос, как быстро разрастается популяция в случае ее выживания. Ответ на него дают предельные теоремы для численности популяции. Результаты, относящиеся к процессу Гальтона–Ватсона, содержатся, например, в [78], разделы 1–6 и 9.

Нас интересует более сложная модель, чем процесс Гальтона–Ватсона, а именно, КВП с произвольным конечным числом центров катализа. Для КВП естественно ставить вопрос не только о глобальном вырождении частиц, но и о локальном вырождении, а также изучать асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц. Этой проблематике и посвящен раздел 1.6. Нами рассматривается дискретное пространство, по которому перемещаются частицы, но несомненный интерес представляют и ветвящиеся процессы в непрерывном пространстве (см., например, [10–12; 21; 22]).

В разделе 1.6 решается задача о нахождении вероятностей глобального и локального вырождения популяции, а также устанавливаются новые предельные теоремы в сильной (теорема 7) и слабой (теорема 8) формах для общих и локальных численностей частиц в надкритическом КВП. Оказывается, что популяция частиц выживает глобально (в пределе по времени общее число частиц

положительно) и локально (в пределе по времени число частиц в любой фиксированной точке не равно нулю) с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда КВП является надкритическим (см. теоремы 5 и 6 раздела 1.6). Общее число частиц и локальные численности частиц растут экспоненциально быстро только в надкритическом КВСБ (см. теоремы 4, 7 и 8 в разделах 1.4 и 1.6), причем скорость экспоненциального роста обозначается $\nu > 0$ и традиционно носит название “мальтусовского параметра”. Полученные результаты обобщают ряд известных ранее, например, доказанных в статьях [18] (лемма 5.1) и [79]. Так, в [79] были найдены предельные распределения численностей частиц в модели надкритического ВСБ по целочисленной решетке \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, с конечным числом источников ветвления. Предполагалось не только существование всех моментов числа потомков каждой частицы, но и определенная скорость роста таких моментов в зависимости от их порядка. В нашей же работе рассматривается не только более общая модель, но налагаются весьма слабые ограничения на моменты числа потомков каждой частицы, а также изучается предельное поведение числа частиц и в смысле сходимости с вероятностью единица. Эти результаты применяются в главе 2 при дальнейших исследованиях характера распространения популяции частиц в КВСБ по \mathbb{Z}^d , но они также представляют самостоятельный интерес.

Стоит отметить, что добиться упомянутых продвижений в области предельных теорем для надкритического КВП удалось благодаря фундаменту, заложенному в разделах 1.1–1.5. Во-первых, там были введены вспомогательные ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, которые во многом позволяют свести изучение КВП к классическим результатам современной теории ветвящихся процессов. Во-вторых, в разделе 1.4 выполнен моментный анализ общих и локальных численностей частиц, на что существенно опираются доказательства результатов раздела 1.6. Таким образом, при выполнении широких условий в главе 1 изучены новые асимптотические свойства КВП с произвольным конечным множеством катализаторов.

Результаты главы 2 опубликованы в наших статьях [160]–[164], [166] и [167]. Переходя к содержанию главы 2, отметим, что особый раздел теории ветвящихся процессов составляют процессы, в которых частицы, помимо произведения потомства, также перемещаются в пространстве. Для такой вероятностной математической модели, в которой движение частиц между ветвлениями управляется случайным блужданием, называемой ВСБ (о случайном

блуждании без ветвления см., например, [80–84]), один из самых естественных и важных вопросов, заключается в том, как популяция частиц распространяется в пространстве, если она выживает. В течение последних десятилетий этому вопросу уделялось много внимания в рамках различных моделей ВСБ на целочисленных решетках или в евклидовом пространстве. Можно перечислить публикации, начиная со статьи [85], вплоть до многочисленных недавних работ, например, статей [3; 5; 6; 25; 86–98] и монографии [2]. Однако эти результаты практически неприменимы к модели КВСБ по \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, с конечным набором катализаторов, которая рассматривается в главе 2 и частично в главе 3, поскольку эта модель требует специальных методов исследования. Специфической чертой КВСБ является его неоднородность в пространстве, т.е. частицы могут давать потомство только в фиксированных точках “катализа” на \mathbb{Z}^d , причем множество этих точек, в которых расположены катализаторы, конечно и имеет произвольную конфигурацию. Вне катализаторов частицы совершают случайное блуждание по \mathbb{Z}^d без ветвления. КВСБ по \mathbb{Z}^d является частным случаем КВП, в котором пространство состояний марковской цепи совпадает с \mathbb{Z}^d . Переход от абстрактного множества состояний к множеству, наделенному дополнительными свойствами, позволяет ставить новые интересные задачи, относящиеся к распространению случайного облака частиц в пространстве, в том числе о расстоянии между самыми удаленными частицами и начальным положением родительской частицы.

Систематическое изучение различных вариантов КВСБ насчитывает около 20 лет (см., например, [33; 54; 99; 100]), хотя большинство статей в этой области исследований были опубликованы недавно, см., например, [17; 19; 101–105]. Многие из них анализируют асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц, когда время стремится к бесконечности, и лишь некоторые исследуют распространение КВСБ. Анализ средних общих и локальных численностей частиц, выполненный в наиболее общей форме в разделах 1.3–1.5, а также сильные и слабые предельные теоремы, установленные в 1.6, показывают, что КВСБ можно классифицировать как надкритические, критические и докритические, подобно обычным ветвящимся процессам, и только в надкритическом режиме и общие, и локальные численности частиц стремятся к бесконечности с ростом времени. По этой причине первостепенный интерес представляет рассмотрение распространения популяции частиц в надкритическом КВСБ.

Ранее были достигнуты следующие важные вехи в изучении распространения КВСБ. В работах [106], [107] и [108] анализировалось распространение надкритического КВСБ с бинарным делением и симметричным случайным блужданием по \mathbb{Z}^d , скачки которого имели легкие хвосты. Используя методы теории операторов для симметричного эволюционного оператора, связанного со средним локальным и общим числом частиц, они исследовали скорость изменения фронта распространения популяции, определяемого в терминах ограниченности моментов локальных численностей, с течением времени $t \rightarrow \infty$. Изучение распространения популяции в надкритическом КВСБ с другой точки зрения – сходимости почти наверное, – инициировано в статье [18] при $d = 1$ и также легких хвостах распределения скачка блуждания. Авторы статьи используют лемму “от многого к малому”, доказанную в общем виде в [109], технику мартигалов и теоремы восстановления.

Основная цель главы 2 – изучить распространение КВСБ по \mathbb{Z}^d для произвольного натурального d . В отличие от одномерного случая, когда в статье [18] был исследован максимум КВСБ по \mathbb{Z} в случае легких хвостов скачка блуждания (максимум в момент времени t – это положение самой правой частицы на \mathbb{Z} в момент времени t), нельзя напрямую распространить тот же подход на многомерные решетки и воспользоваться фундаментальной техникой мартигалов, как в [18]. Дело в том, что понятие максимума не определено для КВСБ по \mathbb{Z}^d , $d > 1$, поскольку в многомерном случае координаты упорядочены лишь частично. Если бы случайное блуждание было симметричным и катализаторы были бы расположены симметрично, а также начальная точка КВСБ находилась в начале координат, тогда, возможно, было бы достаточно рассмотреть максимум нормы положений частиц или максимальное смещение частиц, аналогично [91]. Однако в более общей постановке интерес представляет не только то, как далеко частица может удалиться от начала координат, но и в каком направлении происходит такое смещение. Поэтому в многомерном случае вместо максимума популяции было бы естественно исследовать движущийся “фронт” распространения популяции, который в некотором смысле разделяет освоенную среду обитания и пустую, не занятую пока территорию.

Однако в процессе исследования оказалось, что более точное определение фронта существенно зависит от поведения популяции, которое кардинально различается в трех основных случаях: хвосты распределения скачка блуждания “легкие” (удовлетворяют условию Крамера), “тяжелые” (хвост представляет со-

бой правильно меняющуюся функцию) или “умеренно тяжелые” (скачок имеет семиэкспоненциальное распределение). Таким образом, превалирующая доля главы 2, а именно разделы 2.4–2.6 относятся к изучению фронта КВСБ по \mathbb{Z}^d в указанных выше основных случаях. В каждом из них находятся предельная форма фронта распространения популяции и нормирующие функции для положений частиц в момент t , обеспечивающие существование этого предела при $t \rightarrow \infty$, а также выясняется, в каком смысле (сильная или слабая сходимость) понимается предельный переход. При этом в разделе 2.1 дается подробное описание рассматриваемой модели, а в разделе 2.2 применяются результаты главы 1 к КВСБ по \mathbb{Z}^d , которые в дальнейшем помогут решению задач в разделах 2.4–2.6. Также в разделе 2.3 обсуждаются общие методы и подходы к решению поставленных в главе 2 задач, а в заключительном разделе 2.7 сопоставляются полученные в главе 2 результаты.

Итак, в разделе 2.4 мы вводим понятие фронта распространения $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ популяции частиц в КВСБ с легкими хвостами скачка блуждания следующим образом. Разделим на t координаты положений всех частиц, существующих в КВСБ в момент времени t , и устремим t к бесконечности. Тогда, как показывают наши теоремы в подразделе 2.4.1, в пределе нет частиц вне множества, ограниченного замкнутой поверхностью \mathcal{P} , и, при условии бесконечного числа посещений катализаторов, на \mathcal{P} существуют частицы п.н. Таким образом, при этом условии неслучайное множество \mathcal{P} асимптотически разделяет п.н. “ареал популяции” и “безжизненную среду”. Более того, мы устанавливаем, что каждая точка \mathcal{P} является предельной точкой для нормированных положений частиц в КВСБ, и выводим альтернативное представление для фронта распространения \mathcal{P} . Последнее представление позволяет нам напрямую (без какого-либо компьютерного моделирования) найти множество \mathcal{P} для ряда примеров в подразделе 2.4.3. Доказательства включают лемму “от многого к малому”, теоремы восстановления для систем уравнений восстановления, мартингальную замену меры, выпуклый анализ, теорию больших уклонений и метод каплинга. Мы также существенно опираемся на результаты раздела 1.4 о средних общих и локальных численностях частиц в КВП, а также на сильные и слабые предельные теоремы для этих величин, приведенные в разделе 1.6. Отметим, что лемма “от многого к малому” является инструментом так называемой спиальной техники и позволяет свести изучение определенных функционалов от ветвящегося процесса со многими (“many”) частицами к функционалам от системы

из нескольких (“few”) частиц, но уже заданной на другом вероятностном пространстве. При этом в случайном дереве, описывающем эволюцию ветвящегося процесса, выделяют последовательность этих частиц, которая и называется “скелетом” или “позвоночником” (“spine”).

Раздел 2.4 организован следующим образом. В подразделе 2.4.1 мы напоминаем необходимый справочный материал и формулируем три основные теоремы. Теорема 9 устанавливает асимптотически линейную картину распространения популяции с неограниченным ростом времени. Теорема 10 демонстрирует, что множество \mathcal{P} асимптотически плотно заселено. Теорема 11 дает альтернативное представление для фронта \mathcal{P} . В подразделе 2.4.2 мы устанавливаем обе теоремы 9 и 10, разбивая доказательство на 5 шагов. Подраздел 2.4.3 посвящен доказательству теоремы 11 и рассмотрению пяти примеров. Первый пример связан с КВСБ по \mathbb{Z} , и мы выводим результат [18] как частный случай. Примеры 2а, 2б и 2в иллюстрируют распространение КВСБ по \mathbb{Z}^2 соответственно в случаях простого блуждания, несимметричного блуждания и несимметричного блуждания с неограниченными размерами скачков. Пример 3 иллюстрирует распространение КВСБ по \mathbb{Z}^3 .

Мы не ограничиваемся доказательствами в подразделах 2.4.1–2.4.3 сильных предельных теорем для нормированного фронта распространения популяции частиц в КВСБ по \mathbb{Z}^d с легкими хвостами, но также далее в подразделах 2.4.4 и 2.4.5 изучаем скорость сходимости в этих предельных теоремах. Ранее в [18] было установлено, что максимум M_n в момент времени n , т.е. положение самой правой частицы в КВСБ по \mathbb{Z} , подчиняется усиленному закону больших чисел. Другими словами, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n/n = \mu > 0$ п.н. (почти наверное) на множестве локального невырождения КВСБ, где μ – известная постоянная. Там же было найдено предельное нетривиальное распределение для $M_n - \mu n$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. изучены флуктуации M_n относительно линейного роста μn . В сильной предельной теореме число катализаторов предполагалось произвольным конечным, а в слабой предельной теореме рассматривался один катализатор ввиду технических сложностей. Нашей же целью в подразделах 2.4.4 и 2.4.5 служит распространение результатов статьи [18], относящихся к флуктуациям, на случай $d > 1$ и на случай произвольного конечного числа катализаторов.

В подразделах 2.4.4 и 2.4.5 обе указанные задачи решены, а именно, впервые предложен способ измерения колебаний фронта популяции в КВСБ по \mathbb{Z}^d относительно масштабированной предельной формы фронта в каждой точке

этой поверхности, и найдено соответствующее предельное распределение, когда время растет к бесконечности. Как следствие, при $d = 1$ обобщен результат статьи [18] в общей постановке при произвольном числе катализаторов в КВСБ.

Развиваемые в подразделах 2.4.4 и 2.4.5 методы отличаются от используемых в статьях, относящихся к изучению ВСБ, и от методов работ [18; 106]. Исследование асимптотического поведения максимума в одномерном случае и фронта в многомерном мы сводим к анализу решения полученной нами в разделе 2.3 системы нелинейных интегральных уравнений, причем существенно опираемся на наши предшествующие результаты из главы 1. Прежде всего, доказательство основного результата этих разделов – теоремы 12, – базирующееся на 7 леммах, проводится для $d = 1$ при наличии только одного катализатора, расположенного в начале координат. Далее оно обобщается на произвольное конечное число катализаторов и случай $d > 1$. В этом состоит преимущество предложенного нами подхода.

В разделе 2.5 основное внимание сосредоточено на исследовании КВСБ с тяжелыми хвостами распределения скачка блуждания. Несмотря на недавние достижения в изучении КВСБ с конечным числом катализаторов, где условие Крамера не выполняется (см., например, статьи [31; 110] и ссылки в них), до сих пор не было получено результатов о сходимости максимума КВСБ в предположении о тяжелых хвостах распределения скачков случайного блуждания. Цель раздела 2.5 состоит в том, чтобы предложить подход, охватывающий случай упомянутых тяжелых хвостов.

В теореме 13 подраздела 2.5.1 указан нормирующий множитель для максимума КВСБ по \mathbb{Z} такой, что в смысле слабой сходимости при $t \rightarrow \infty$ нормированный максимум имеет нетривиальный предел, информация о котором также содержится в этой теореме. В рамках данного исследования предполагается, что правый хвост распределения скачка случайного блуждания правильно меняется и для распределения числа потомков каждой частицы выполняется известное “условие $L \log L$ ”, в нашей модели означающее конечность функционалов $E \xi_k \ln \xi_k$, где ξ_k – случайное число потомков одной частицы в k -м катализаторе, $k = 1, \dots, N$. Как обычно, выражение $s \ln s$ при $s = 0$ полагается равным 0.

Заметим, что наши результаты гарантируют экспоненциальный рост максимума КВСБ, как и в модели пространственно-однородного (без катализаторов) ВСБ (см., например, статьи [111] и [31]). Более того, наши условия

на хвост распределения скачка случайного блуждания менее ограничительные, чем в работе [31]. Особо отметим, что еще в разделе 2.3 мы выводим систему нелинейных интегральных уравнений для функций распределения преобразованных максимумов процессов КВСБ, стартовых в различных начальных точках из множества катализаторов. Затем в подразделе 2.5.2 мы анализируем предел решения упомянутой системы, используя многомерную теорию восстановления, преобразование Лапласа, теорию больших уклонений для случайных сумм случайных величин, распределения которых имеют “тяжелые” хвосты (см., например, монографии [112–114]) и другие вероятностно-аналитические методы. Удивительно, что современные методы исследования такие, как спи-нальная техника, в том числе лемма “от многого к малому”, полезные для изучения КВСБ с *легкими хвостами* в статье [18] и разделе 2.4 настоящей диссертации, оказываются неэффективными в случае *тяжелых хвостов* распределения скачка блуждания. При этом идеи статей [115] и [116], не имеющие прямого отношения к обсуждаемым проблемам, оказываются плодотворными в нашем исследовании.

Следует сравнить результаты статьи [18] и теоремы 13, рассматривающие поведение максимума соответственно в случае легких и тяжелых хвостов. Во-первых, нормирующие функции различны: линейная и экспоненциальная. Во-вторых, в [18] устанавливается п.н. сходимость M_t/t к константе, а мы показываем, что распределение M_t/L_t в теореме 13 слабо сходится к невырожденному закону. Отметим также, что, в отличие от [18], мы не предполагаем существования даже математического ожидания скачков случайного блуждания. Напомним, что для независимых одинаково распределенных случайных слагаемых существование математического ожидания влечет усиленный закон больших чисел, тогда как если математическое ожидание отсутствует, но слагаемые имеют правильно меняющиеся хвосты, можно обеспечить только слабую сходимость к устойчивому закону. По-видимому, тот же эффект может обеспечивать *сильную* сходимость нормированного максимума в [18] по сравнению с нашим результатом о *слабой* сходимости при другой нормировке и для других предположений.

В подразделах 2.5.3–2.5.5 мы изучаем аналоги результатов подразделов 2.5.1 и 2.5.2 о максимуме КВСБ с правильно меняющимися хвостами в многомерном случае. Продолжение результатов не является прямым и непосредственным. Так, мы вынуждены дополнительно предполагать, что компоненты

скачка случайного блуждания являются либо независимыми (возможно, близкими к независимым), либо сильно зависимыми. Мы используем первое предположение в подразделе 2.5.3 для доказательств теорем 14 и 15, а второе – в 2.5.5 для доказательства теоремы 16. Подраздел 2.5.4 содержит иллюстрирующие примеры. При этом предполагается, что компоненты скачка случайного блуждания имеют дискретное распределение Парето (с различными параметрами), которое является типичным представителем распределений с правильно меняющимися хвостами. Затем мы применяем теоремы 14 и 15 к нашим примерам и находим предельное множество (когда время стремится к бесконечности), занимаемое популяцией частиц с должным образом нормированными положениями.

Насколько нам известно, распространение популяции не исследовалось для моделей ВСБ, когда скачки случайного блуждания имеют независимые компоненты с правильно меняющимися хвостами распределения. Наши результаты подраздела 2.5.3 выглядят удивительными: после подходящей нормировки координат частиц в КВСБ частицы в конечном итоге концентрируются в случайном множестве, расположенном на осях, которое представляет собой крест в двумерном случае и естественное обобщение креста для более высоких размерностей (для любой более высокой размерности d предельное множество состоит из d отрезков, расположенных на координатных осях и содержащих начало координат). Это резко контрастирует со случаем легких хвостов, в котором предельной формой фронта является *выпуклая поверхность* (см. примеры в подразделе 2.4.3), т.е. в КВСБ после линейной нормировки все частицы расположены в пределе на выпуклой поверхности и внутри нее. Предельная форма фронта популяции типа “крест” является случайной, а сходимость к ней слабая. В этом отличие от ситуации легких хвостов и семиэкспоненциального распределения скачка случайного блуждания (см. разделы 2.4 и 2.6).

В подразделе 2.5.5 мы рассматриваем “*изотропный*” случай, когда скорость убывания хвостов распределения скачков в разных направлениях задается одной и той же правильно меняющейся функцией и компоненты скачка случайного блуждания являются сильно зависимыми. Из-за различного поведения хвостов распределения скачка результаты теоремы 16 радикально отличаются от теорем 14 и 15 подраздела 2.5.3. А именно, если множество B в \mathbb{R}^d , содержащее начало координат с его некоторой окрестностью, удовлетворяет определенному условию изотропии для случайного блуждания (без ветвления),

то в пределе по времени в теореме 16 найдена вероятность того, что популяция частиц с нормированными положениями в КВСБ содержится во множестве B , и в общем случае эта вероятность оказывается положительной.

В разделе 2.6 мы рассматриваем случай, когда скачок случайного блуждания имеет семиэкспоненциальное распределение, т.е. распределение скачков обладает умеренно тяжелыми хвостами. Этот важный класс распределений исследуется в монографии [112], гл. 5 и 7. Семиэкспоненциальные распределения занимают промежуточное положение между распределениями с легкими и правильно меняющимися хвостами. Мы показываем, что ненормированный фронт популяции для КВСБ по \mathbb{Z}^d с независимыми (или близкими к независимым) компонентами скачка случайного блуждания, имеющими семиэкспоненциальное распределение, распространяется асимптотически с течением времени как степенная функция с показателем, большим 1, т.е. быстрее, чем линейная.

В результате нормировки положений частиц упомянутыми степенными функциями масштабированный фронт представляет собой случайное множество в \mathbb{R}^d . При $t \rightarrow \infty$ мы находим его предельную поверхность, называемую “предельной формой фронта”, которая возникает с вероятностью единица. В основном результате раздела 2.6 – теореме 17, – мы получаем уравнение вида $H(z) = \nu$, $z \in \mathbb{R}^d$, для описания поверхности предельной формы фронта распространения популяции частиц в КВСБ, где ν – мальтусовский параметр и H – определенная функция только от переменной z . Скорость роста нормирующих функций также зависит исключительно от мальтусовского параметра и параметров семиэкспоненциального распределения компонент скачков. Таким образом, предельная форма фронта не зависит ни от общего количества катализаторов, ни от их расположения. Она одинакова для КВСБ с несколькими катализаторами и для КВСБ с одним катализатором, если совпадают мальтусовские параметры и главные экспоненты, отвечающие за хвосты распределений скачков.

В случае скачков, имеющих семиэкспоненциальное распределение, мы обнаружили, что предельная форма фронта является поверхностью невыпуклого множества. Напомним, что в случае легких хвостов предельная форма фронта всегда выпуклая (см. теорему 11 раздела 2.4). Заметим также, что в статье [117] изучалось однородное ВСБ на действительной прямой с семиэкспоненциальными приращениями, ВСБ в многомерном пространстве не рассматривалось.

В подразделе 2.6.1 мы формулируем основные результаты для КВСБ по \mathbb{Z}^d с семиэкспоненциальным распределением скачков. Наши теоремы 17 и 18 характеризуют распространение фронта в смысле сходимости с вероятностью единица. В подразделе 2.6.2 мы доказываем эти теоремы, разбивая доказательство на 5 шагов. Сначала мы рассматриваем один катализатор, затем любое конечное число катализаторов. В разделе 2.6.3 приводим типичные примеры. А именно, мы предполагаем, что координаты скачка случайного блуждания независимы и абсолютные значения как строго положительных, так и строго отрицательных составляющих каждой координаты имеют дискретные распределения Вейбулла ([112], гл. 5). Также представлены рисунки, изображающие предельную форму фронта для каждого рассмотренного примера.

Таким образом, в главе 2 нам удалось получить полное описание скорости распространения фронта и его предельной формы в КВСБ по решетке любой размерности с произвольным конечным числом катализаторов и при всех возможных предположениях о хвостах распределения скачка блуждания. При этом наши результаты справедливы в смысле сходимости почти наверное или сходимости по распределению в зависимости от условий, налагаемых на хвосты. Проведенное исследование показывает, что скорость распространения популяции существенно зависит от хвостов распределения скачка случайного блуждания. В частности, в случае легких хвостов фронт популяции распространяется линейно во времени по аналогии с одномерной ситуацией, рассмотренной в [18], (см. раздел 2.4). Если распределение скачков случайного блуждания является семиэкспоненциальным, фронт перемещается со степенной скоростью, но быстрее, чем линейно, см. раздел 2.6. Согласно разделу 2.5 предположение о правильно меняющихся хвостах приводит к экспоненциально быстрому распространению популяции. Интересно, что хотя в статье [106] фронт популяции симметричного КВСБ с бинарным делением частиц и легкими хвостами скачка блуждания был определен и изучен с точки зрения ограниченности моментов локальных численностей частиц, но разные представления о фронте распространения в статье [106] и подразделе 2.4.1 приводят к одинаковой скорости его роста. Однако наш подход представляется более эффективным благодаря полученным результатам, справедливым в смысле сильной и слабой сходимости, при более мягких ограничениях на КВСБ.

Глава 3 посвящена решению различных задач, относящихся как к модели КВСБ по \mathbb{Z}^d с конечным числом катализаторов, рассмотренной в главе 2, так

и к другим моделям ВСБ по \mathbb{Z}^d , в которых источники размножения и гибели (катализаторы) имеются на решетке в счетном количестве и расположены периодически. Результаты главы 3 опубликованы в статьях автора [156], [165] и [168]–[170].

Цель раздела 3.1 состоит в исследовании времени первого выхода частиц популяции в КВСБ по целочисленной прямой \mathbb{Z} на определенный уровень, точнее говоря, на движущуюся границу в \mathbb{Z} . Подчеркнем, что в отличие от ряда предшествующих работ, здесь рассматривается не задача о поведении максимальной координаты имеющихся частиц в зависимости от времени t . Поставленная задача является более сложной, поскольку требуется учесть случайные конфигурации изучаемой системы в предшествующие t моменты времени. Тем не менее, результаты, установленные для упомянутых двух задач, оказываются близкими. Отметим с благодарностью, что задачу раздела 3.1 поставил академик РАН А.Н.Ширяев во время доклада автора в Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН на семинаре отдела теории вероятностей и математической статистики, руководимом академиком РАН А.С.Холево.

В разделе 3.2 мы изучаем распределение максимального отклонения положений частиц за все время существования популяции в модели критического и докритического КВСБ по \mathbb{Z} . В частности, мы доказываем, что в случае простого симметричного случайного блуждания по \mathbb{Z} распределение максимального смещения имеет тяжелый хвост, убывающий степенным образом с показателем $1/2$ или 1 , когда процесс ветвления является соответственно критическим или докритическим. Эти утверждения описывают новые эффекты, которые не возникают в соответствующих исследованиях максимального отклонения критических и докритических ВСБ по \mathbb{Z} .

Для функций распределения максимального отклонения частиц за всю историю процесса нами выведена система уравнений, имеющая единственное решение. В этой системе возникают вероятности, относящиеся только к поведению случайного блуждания на временном отрезке с момента выхода из одного катализатора до момента первого возвращения в него или первого попадания в другой катализатор. Такие вероятности для произвольных случайных блужданий не изучались ранее. Однако в частном, но важном случае простого случайного блуждания (т.е. скачки блуждания происходят только в соседние точки решетки \mathbb{Z}) эти вероятности можно найти на основе решения классической задачи “о разорении игрока”. Поэтому в таком случае мы исследуем

асимптотическое поведение хвостов распределения максимального отклонения частиц в критическом и докритическом КВСБ по \mathbb{Z} . Если простое случайное блуждание имеет снос, то полученные результаты естественны и не вызывают удивления: хвост распределения максимального отклонения либо убывает экспоненциально быстро, либо рассматриваемая случайная величина несобственная. Однако если простое случайное блуждание симметрично, то новые результаты оказываются неожиданными и кардинально отличаются от соответствующих утверждений для ВСБ, рассмотренных в работах [118] и [119].

Цель раздела 3.3 состоит в том, чтобы завершить исследование общих и локальных численностей частиц в КВСБ по \mathbb{Z}^d с одним катализатором, поскольку результаты для *надкритического* КВСБ с одним источником ветвления уже были известны благодаря статье [99], а для *критического* установлены ранее в [45]. Следует отметить, что теоремы для локальных численностей частиц в критическом КВСБ верны при условии конечной дисперсии числа потомков каждой частицы, в то время как в рамках *докритического* КВСБ нам удалось обойтись существованием момента порядка $1 + \delta$, где $\delta \in (0, 1]$. Для этого потребовалось учитывать тонкую взаимосвязь между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа. Вместо традиционной производной по Риману–Лиувиллю в диссертации используется современная лемма из работы [120]. Теорема 24 показывает, как именно асимптотическое поведение средних локальных численностей частиц существенным образом зависит от размерности d целочисленной решетки в докритическом КВСБ с одним катализатором. Теорема 25 дает полную картину того, как быстро стремятся к нулю вероятности невырождения локальных численностей частиц при $t \rightarrow \infty$. Теорема 26 представляет собой аналог условных предельных теорем ягломовского типа для локальных численностей частиц при любой размерности d . Доказательства этих теорем опираются также на представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр (см. [16]) и на тауберовы теоремы для производных преобразований Лапласа (см. раздел 7.3 в [121]).

Прежде чем перейти к разделам 3.4 и 3.5, сделаем еще несколько общих замечаний. В главе 2 и многих работах, упомянутых ранее, изучается ВСБ с конечным числом источников размножения и гибели частиц (см., например, [17; 18; 53; 100]). Теперь же в разделах 3.4 и 3.5 мы рассматриваем модели ВСБ с бесконечным числом источников ветвления. А именно, изучается блуждание

по целочисленной решетке \mathbb{Z}^d с периодически расположенными источниками размножения и гибели частиц, причем в разделе 3.4 предполагается, что все источники ветвления имеют одинаковые характеристики, а в разделе 3.5 считается, что и характеристики могут меняться периодически. Предполагается, что в обоих случаях режимы ветвления надкритические, а для распределения скачка блуждания выполнено условие Крамера. Установлены теоремы о скорости распространения фронта популяции частиц по решетке при неограниченном росте времени. Доказательства основаны на фундаментальных результатах, относящихся к пространственному распространению общего ВСБ с одним или несколькими типами частиц соответственно для случаев, когда характеристики ветвления одинаковые для всех источников ветвления или меняются периодически.

Исследование ВСБ с периодически расположенными источниками размножения и гибели частиц инициировано в статьях [20] и [122], где установлено асимптотическое разложение для средних локальных численностей частиц в момент времени t при $t \rightarrow \infty$. В разделах 3.4 и 3.5 впервые удалось показать, что с вероятностью единица должным образом преобразованное облако исследуемых частиц будет приближаться к определенному предельному множеству в метрике Хаусдорфа, когда время стремится к бесконечности. Доказано, что популяция частиц в надкритическом ВСБ с периодически расположенными источниками размножения и гибели частиц распространяется асимптотически линейно в случае легких хвостов распределения скачка блуждания, т.е. когда выполнено условие Крамера. Эта сходимости имеет место для почти всех элементарных исходов события, означающего невырождение рассматриваемой популяции частиц. Предельное множество в \mathbb{R}^d , именуемое асимптотической формой популяции, найдено в явном виде. Следует подчеркнуть, что, в отличие от работ [20] и [122], мы не предполагаем, что случайное блуждание симметрично, т.е. не исключаем, что оно, например, может иметь снос. Наши результаты получены как для одномерной постановки задачи (изучение максимума или минимума среди положений частиц на \mathbb{Z}), так и для многомерной постановки (изучение распространения облака частиц в пространстве), т.е. для решетки \mathbb{Z}^d при $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$.

Заметим, что для работ по ветвящимся процессам результаты, как правило, устанавливались в предположении, что все частицы одного и того же типа, а затем уже полученные результаты обобщались на случай нескольких типов частиц. Аналогично в разделе 3.3 мы вначале предполагаем, что все источни-

ки ветвления имеют одинаковые характеристики и выводим результаты для распространения популяции. Затем даем упрощенный вид записи асимптотической формы ВСБ, благодаря чему приводим ряд иллюстрирующих примеров. Далее в разделе 3.4 мы переносим эти результаты на случай, когда источники ветвления имеют различные характеристики, которые также меняются периодически. Однако полученная асимптотическая форма ВСБ, выраженная через перроновы корни заданных матричных функций, уже не допускает упрощений.

Глава 1. Применение аппарата марковских цепей с запретами к классификации каталитических ветвящихся процессов

Результаты главы 1 опубликованы в статьях автора [157]–[159].

1.1 Новые результаты для марковских цепей с запретами

Рассмотрим неразложимую марковскую цепь $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем, порожденную консервативной матрицей $Q = (q(x,y))_{x,y \in \mathcal{S}}$, диагональные элементы которой конечны и отрицательны. Здесь \mathcal{S} – это конечное или счетное множество. Для $x \in \mathcal{S}$ пусть

$$\tau_x := \mathbb{I}\{\eta(0) = x\} \inf\{t \geq 0 : \eta(t) \neq x\},$$

где $\mathbb{I}\{B\}$ обозначает индикатор множества B . Введем момент остановки τ_x (по отношению к естественной фильтрации процесса η) как *момент первого выхода из состояния x* и

$$P_x(\tau_x \leq t) = 1 - e^{q(x,x)t}, \quad t \geq 0,$$

(см., например, теорему 5 в [35], гл. 2, раздел 5), где $P_x(\cdot) := P(\cdot | \eta(0) = x)$. Следуя обозначениям Чжуна в [35], гл. 2, раздел 11, для произвольного, возможно пустого, множества $H \subset \mathcal{S}$ (“ \subset ” всегда означает “ \subseteq ”), называемого далее *множеством запретов* и для $t \geq 0$ обозначим

$${}_H P_{x,y}(t) := P_x(\eta(t) = y, \eta(u) \notin H, \min\{\tau_x, t\} < u < t), \quad x, y \in \mathcal{S},$$

переходную вероятность (табу-вероятность) из x в y за время t с запретом на H . В случае $H = \emptyset$ функция $p_{x,y}(\cdot) = \varnothing p_{x,y}(\cdot)$ – это обычная переходная вероятность. Заметим, что ${}_H P_{x,y}(\cdot) \equiv 0$ при $x \in \mathcal{S}$, $y \in H$ и $x \neq y$, в то время как ${}_H P_{x,x}(t) = e^{q(x,x)t}$ при $x \in H$ и ${}_H P_{x,x}(t) \geq e^{q(x,x)t}$ при $x \notin H$, $t \geq 0$. Положим

$${}_H \tau_{x,y} := \mathbb{I}\{\eta(0) = x\} \inf\{t \geq \tau_x : \eta(t) = y, \eta(u) \notin H, \tau_x < u < t\}, \quad x, y \in \mathcal{S},$$

где, как обычно, мы предполагаем, что $\inf\{t \in \emptyset\} = \infty$. Марковский момент ${}_H \tau_{x,y}$ – это *момент первого достижения состояния y при старте из*

состояния x с запретом на множество H , если $x \neq y$, и момент первого возвращения в состояние x с запретом на множество H , если $x = y$. Пусть ${}_H F_{x,y}(t) := P_x({}_H \tau_{x,y} \leq t)$ и $F_{x,y}(t) := P_x(\tau_{x,y} \leq t)$, $t \geq 0$, суть (несобственные) функции распределения соответственно случайных величин ${}_H \tau_{x,y}$ и $\tau_{x,y} := \emptyset \tau_{x,y}$. Ясно, что ${}_H \tau_{x,y} = {}_{H \setminus \{y\}} \tau_{x,y}$ почти наверное (п.н.) при $y \in H$ и, следовательно, ${}_H F_{x,y}(\cdot) \equiv {}_{H \setminus \{y\}} F_{x,y}(\cdot)$ при $y \in H$. Таким образом, достаточно рассмотреть ${}_H F_{x,y}(\cdot)$ при $x, y \in \mathcal{S}$ и $y \notin H$.

Согласно теореме 8 в [35], гл. 2, раздел 11, следующие формулы разложения относительно первого достижения справедливы при $x, y \in \mathcal{S}$, $z \notin H$ и $t \geq 0$

$${}_H p_{x,y}(t) = {}_{z, H} p_{x,y}(t) + \int_0^t {}_H p_{z,y}(t-u) d {}_H F_{x,z}(u), \quad (1.1)$$

$${}_H F_{x,y}(t) = {}_{z, H} F_{x,y}(t) + \int_0^t {}_H F_{z,y}(t-u) d {}_{y, H} F_{x,z}(u), \quad z \neq y, \quad (1.2)$$

где мы пишем ${}_{z, H} p_{x,y}(t)$ вместо ${}_{z \cup H} p_{x,y}(t)$ и аналогично для других символов. Прежде чем применить преобразование Лапласа к функциям из (1.1) и (1.2), положим

$$\hat{p}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t) dt, \quad \check{F}(\lambda) := \int_{0-}^\infty e^{-\lambda t} dF(t), \quad P(t) := \int_0^t p(u) du, \quad \lambda, t > 0,$$

для любой табу-вероятности p и функции распределения F .

Напомним, что (см., например, [35], гл. 2, раздел 10) неразложимая марковская цепь η возвратна, т.е.

$$P_x(\text{множество } \{t \geq \tau_x : \eta(t) = y\} \text{ неограниченное}) = 1$$

для любых $x, y \in \mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда $P_{x,y}(\infty) = \infty$, где $P_{x,y}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} P_{x,y}(t)$. Аналогично η невозвратна, т.е.

$$P_x(\text{множество } \{t \geq \tau_x : \eta(t) = y\} \text{ неограниченное}) = 0$$

для каждого $x, y \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $P_{x,y}(\infty) < \infty$. Подчеркнем, что марковская цепь η является либо возвратной, либо невозвратной (см., например, теорему 4 и следствие 2 в [35], гл. 2, раздел 10). Свойства так называемой функции Грина $G(x, y) := P_{x,y}(\infty)$, $x, y \in \mathcal{S}$, изложены, например, в [80], гл. 4,

разделы 1 и 2. В соответствии с теоремами 1, 3 и соотношением (5) в [35], гл. 2, раздел 12, равенство (1.1) влечет, что

$$F_{x,y}(\infty) = 1, \quad \text{если } \eta \text{ возвратна,} \quad (1.3)$$

$$F_{x,y}(\infty) = \frac{G(x,y)}{G(y,y)} \in (0,1), \quad \text{если } \eta \text{ невозвратна и } x \neq y, \quad (1.4)$$

$$F_{x,x}(\infty) = 1 + \frac{1}{q(x,x)G(x,x)} \in (0,1), \quad \text{если } \eta \text{ невозвратна.} \quad (1.5)$$

Наша цель состоит в том, чтобы найти значение ${}_H F_{x,y}(\infty)$, представляющее собой вероятность конечности случайной величины ${}_H \tau_{x,y}$ при условии $\{\eta(0) = x\}$. Как было уже отмечено, достаточно рассмотреть $x, y \in \mathcal{S}$ и $y \notin H$. Следующее утверждение показывает, что значение ${}_H F_{x,y}(\infty)$ может быть выражено в терминах ${}_H P_{x,y}(\infty)$ и ${}_H P_{y,y}(\infty)$ аналогично (1.4) и (1.5).

Теорема 1. *Для любого непустого множества запретов H и $x, y \in \mathcal{S}$, $y \notin H$, имеем*

$${}_H F_{x,y}(\infty) = \frac{{}_H P_{x,y}(\infty)}{{}_H P_{y,y}(\infty)}, \quad x \neq y, \quad (1.6)$$

$${}_H F_{x,x}(\infty) = 1 + \frac{1}{q(x,x){}_H P_{x,x}(\infty)} \in [0,1), \quad x \notin H, \quad (1.7)$$

где $0 \leqslant {}_H P_{x,y}(\infty) < \infty$ и $0 < {}_H P_{y,y}(\infty) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5 в [35], гл. 2, раздел 11, неравенство ${}_H P_{x,y}(\infty) < \infty$ верно для любого непустого множества H и для всех $x, y \in \mathcal{S}$. Полагая $z = y$, применим преобразование Лапласа к обеим частям соотношения (1.1). Используя свойство свертки преобразования Лапласа (см., например, [123], гл. 13, раздел 2, свойство (i)), мы получаем

$${}_H \check{F}_{x,y}(\lambda) = \frac{{}_H \hat{P}_{x,y}(\lambda) - {}_y {}_H \hat{P}_{x,y}(\lambda)}{{}_H \hat{P}_{y,y}(\lambda)}, \quad \lambda > 0. \quad (1.8)$$

Поскольку ${}_y {}_H p_{x,y}(\cdot) \equiv 0$ при $x \neq y$, соотношение (1.8) влечет (1.6) с учетом равенства $F(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \check{F}(\lambda)$ для функции распределения F , имеющей носитель на $[0, \infty)$. Равенство получается в результате применения теоремы о монотонной сходимости к интегралу Лебега, которым является $\check{F}(\lambda)$. Поскольку ${}_x {}_H p_{x,x}(t) = e^{q(x,x)t}$, $t \geqslant 0$, и ${}_x {}_H \hat{p}_{x,x}(\lambda) = (\lambda - q(x,x))^{-1}$, $\lambda \geqslant 0$, из равенства (1.8) также вытекает (1.7). Теорема 1 доказана. \square

В следующей теореме значение ${}_H F_{x,y}(\infty)$ выражается в терминах ${}_{H'} F_{x',y'}(\infty)$ с подходящим выбором состояний $x',y' \in \mathcal{S}$ и для определенного H' такого, что $H' \subset H$ или $H \subset H'$. Таким образом, для конечного непустого множества H , вычисление значения ${}_H F_{x,y}(\infty)$ может быть сведено к случаю, когда H состоит из единственного состояния. Та же процедура может быть воспроизведена, когда $\mathcal{S} \setminus H$ – конечное множество. Ниже мы используем символ Кронекера $\delta_{x,y}$ для $x,y \in \mathcal{S}$.

Теорема 2. *Если H – непустое подмножество множества \mathcal{S} и $x,y,z \in \mathcal{S}$, $y,z \notin H$, $z \neq y$, то*

$${}_{z,H} F_{x,y}(\infty) = \frac{{}_H F_{x,y}(\infty) - {}_H F_{x,z}(\infty) {}_H F_{z,y}(\infty)}{1 - {}_H F_{y,z}(\infty) {}_H F_{z,y}(\infty)}, \quad (1.9)$$

где ${}_H F_{y,z}(\infty) {}_H F_{z,y}(\infty) < 1$. Если H – любое подмножество множества \mathcal{S} и $x,y \in \mathcal{S}$, $x \notin H$, $x \neq y$, то

$${}_H F_{x,y}(\infty) = \frac{{}_x {}_H F_{x,y}(\infty)}{1 - {}_y {}_H F_{x,x}(\infty)}. \quad (1.10)$$

Более того, для любого $H \subset \mathcal{S}$ и $x,y \in \mathcal{S}$ имеем

$${}_H F_{x,y}(\infty) = (\delta_{x,y} - 1) \frac{q(x,y)}{q(x,x)} - \sum_{z \in \mathcal{S}, z \neq x, z \neq y, z \notin H} \frac{q(x,z)}{q(x,x)} {}_H F_{z,y}(\infty). \quad (1.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря (1.2) имеем следующую систему двух линейных интегральных уравнений относительно функций ${}_{z,H} F_{x,y}(\cdot)$ и ${}_{y,H} F_{x,z}(\cdot)$

$$\begin{cases} {}_H F_{x,y}(t) = {}_{z,H} F_{x,y}(t) + \int_0^t {}_H F_{z,y}(t-u) d {}_{y,H} F_{x,z}(u), \\ {}_H F_{x,z}(t) = {}_{y,H} F_{x,z}(t) + \int_0^t {}_H F_{y,z}(t-u) d {}_{z,H} F_{x,y}(u). \end{cases}$$

Применяя преобразование Лапласа–Стилтьеса и используя его свойство свертки (см., например, [123], гл. 13, раздел 2, свойство (i)), мы получаем новую систему уравнений относительно ${}_{z,H} \check{F}_{x,y}(\lambda)$ и ${}_{y,H} \check{F}_{x,z}(\lambda)$

$$\begin{cases} {}_H \check{F}_{x,y}(\lambda) = {}_{z,H} \check{F}_{x,y}(\lambda) + {}_{y,H} \check{F}_{x,z}(\lambda) {}_H \check{F}_{z,y}(\lambda), \\ {}_H \check{F}_{x,z}(\lambda) = {}_{y,H} \check{F}_{x,z}(\lambda) + {}_{z,H} \check{F}_{x,y}(\lambda) {}_H \check{F}_{y,z}(\lambda). \end{cases}$$

Решая эту систему, мы видим, что

$${}_{z,H} \check{F}_{x,y}(\lambda) = \frac{{}_H \check{F}_{x,y}(\lambda) - {}_H \check{F}_{x,z}(\lambda) {}_H \check{F}_{z,y}(\lambda)}{1 - {}_H \check{F}_{y,z}(\lambda) {}_H \check{F}_{z,y}(\lambda)}.$$

Полагая $\lambda \rightarrow 0+$ в последнем соотношении, приходим к (1.9). Строгое неравенство ${}_H F_{y,z}(\infty) {}_H F_{z,y}(\infty) < 1$ справедливо, поскольку ${}_H F_{y,z}(\infty) {}_H F_{z,y}(\infty) \leqslant {}_H F_{y,y}(\infty)$ в силу (1.2) и соотношения ${}_H F_{y,y}(\infty) < 1$, вытекающего из (1.7). Приходим к формуле (1.10), применяя преобразование Лапласа–Стилтьеса к (1.2), когда $z = x$, и полагая $\lambda \rightarrow 0+$. Утверждение (1.11) следует из равенства

$$\begin{aligned} {}_H F_{x,y}(t) &= (\delta_{x,y} - 1) \left(1 - e^{q(x,x)t}\right) \frac{q(x,y)}{q(x,x)} \\ &- \sum_{z \in \mathcal{S}, z \neq x, z \neq y, z \notin H} \frac{q(x,z)}{q(x,x)} \int_0^t \left(1 - e^{q(x,x)(t-u)}\right) d{}_H F_{z,y}(u), \end{aligned}$$

которое справедливо благодаря строго марковскому свойству цепи η (см., например, теорему 3 в [35], гл. 2, раздел 9) относительно момента останова τ_x . Доказательство теоремы 2 завершено. \square

Следующий результат может быть рассмотрен как дополнение к соотношению (1.9), когда H – пустое множество и η – невозвратная марковская цепь. Последние предположения позволяют получить формулу, содержащую функцию Грина.

Теорема 3. Пусть η – невозвратная марковская цепь и $x, y, z \in \mathcal{S}$. Тогда ${}_z F_{x,y}(\infty) \in [0, 1]$ и

$${}_z F_{x,y}(\infty) = \frac{G(x,y)G(z,z) - G(x,z)G(z,y)}{G(z,z)G(y,y) - G(y,z)G(z,y)}, \quad x \neq y, \quad x \neq z, \quad y \neq z, \quad (1.12)$$

$${}_z F_{y,y}(\infty) = 1 + \frac{G(z,z)}{q(y,y) (G(y,y)G(z,z) - G(y,z)G(z,y))}, \quad y \neq z, \quad (1.13)$$

$${}_z F_{z,y}(\infty) = -\frac{G(z,y)}{q(z,z) (G(y,y)G(z,z) - G(y,z)G(z,y))}, \quad y \neq z. \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Анализируя доказательство теоремы 2, мы видим, что для невозвратной цепи η формула (1.9) верна даже для $H = \emptyset$, так как $F_{y,z}(\infty)F_{z,y}(\infty) < 1$ в силу (1.4). Следовательно, подставляя (1.4) в (1.9), выводим (1.12). Согласно (1.2) и (1.4) имеем ${}_z F_{x,y}(\infty) \leqslant F_{x,y}(\infty) < 1$. Аналогичным образом получаем (1.13) и (1.14), используя (1.4) и (1.5). Теорема 3 установлена. \square

Для возвратной цепи η формула (1.9) неверна для $H = \emptyset$, поскольку $F_{y,z}(\infty)F_{z,y}(\infty) = 1$ в силу (1.3). Поэтому, в общем случае, не существует аналога предыдущей теоремы, отличающейся от утверждения теоремы 1 для

табу-множества (множества запретов), состоящего из одного элемента. Однако для симметричного, пространственно-однородного случайного блуждания по \mathbb{Z} или \mathbb{Z}^2 , имеющего конечную дисперсию скачков (такое случайное блуждание невозвратно по \mathbb{Z}^d при $d \geq 3$), возможно выписать представление для ${}_z F_{x,y}(\infty)$, альтернативное тем, которые приведены в теореме 1. Это следует из теорем 1 и 2 в [40].

Завершая раздел 1.1, возвращаемся к общему случаю марковских цепей. В отличие от ${}_H \tau_{x,y}$ определим время достижения состояния y с запретом на множество H после выхода из стартового состояния x как

$${}_H \bar{\tau}_{x,y} := \mathbb{I}\{\eta(0) = x\} \inf\{t \geq 0 : \eta(t + \tau_x) = y, \eta(u) \notin H, \tau_x < u < t + \tau_x\}.$$

Такие случайные величины естественным образом возникают при изучении каталитических ветвящихся процессов. Очевидно, ${}_H \tau_{x,y} = \tau_x + {}_H \bar{\tau}_{x,y}$ и

$$P_x({}_H \bar{\tau}_{x,y} = 0) = (\delta_{x,y} - 1)q(x,y)q(x,x)^{-1}.$$

Более того, в силу строго марковского свойства цепи η случайные величины τ_x и ${}_H \bar{\tau}_{x,y}$ независимы. Следовательно, учитывая формулу свертки и выражение для $P_x(\tau_x \leq t)$, получаем

$${}_H F_{x,y}(t) = \int_{0-}^t \left(1 - e^{q(x,x)(t-u)}\right) d{}_H \bar{F}_{x,y}(u), \quad (1.15)$$

где ${}_H \bar{F}_{x,y}(t) := P_x({}_H \bar{\tau}_{x,y} \leq t)$, $t \geq 0$. Поэтому ${}_H \bar{F}_{x,y}(\infty) = {}_H F_{x,y}(\infty)$ для любых $x, y \in \mathcal{S}$, $H \subset \mathcal{S}$, и утверждения теорем 1 – 3 имеют место, если значение ${}_H F_{x,y}(\infty)$ заменить на ${}_H \bar{F}_{x,y}(\infty)$. Заметим также, что с учетом (1.15) у распределения ${}_H F_{x,y}(\cdot)$ существует ограниченная плотность. Следовательно, функция ${}_H \bar{F}_{x,y}(\cdot)$ также имеет плотность (которая, вообще говоря, неограниченная) в силу следующего равенства

$${}_H \bar{F}_{x,y}(\infty) - {}_H \bar{F}_{x,y}(t) = \sum_{z \in \mathcal{S}, z \notin H, z \neq x, z \neq y} \frac{q(x,z)}{-q(x,x)} ({}_H F_{z,y}(\infty) - {}_H F_{z,y}(t)),$$

которое выводится аналогично лемме 3 в [40]. Таким образом, результаты, установленные для ${}_H \tau_{x,y}$, также верны для ${}_H \bar{\tau}_{x,y}$.

1.2 Описание каталитического ветвящегося процесса

Нас интересует *каталитический ветвящийся процесс* (КВП) с конечным множеством катализаторов (источников размножения и гибели частиц или просто источников ветвления). Эта модель описывает систему частиц, перемещающихся в пространстве и производящих потомство только в присутствии катализаторов. Точнее говоря, пусть в момент $t = 0$ имеется одна частица, движение которой по некоторому конечному или счетному множеству \mathcal{S} задается марковской цепью $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем и инфинитезимальной матрицей $Q = (q(x,y))_{x,y \in \mathcal{S}}$. Когда частица достигает конечного множества катализаторов $W = \{w_1, \dots, w_N\} \subset \mathcal{S}$, скажем, в точке w_k , она проводит там случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\beta_k > 0$. Затем частица либо гибнет, либо покидает точку w_k соответственно с вероятностями α_k и $1 - \alpha_k$ ($0 \leq \alpha_k < 1$). Если частица умирает (в точке w_k), то в момент гибели она замещается случайным числом $\xi_k \geq 0$ потомков, расположенных в той же точке w_k . Если частица покидает w_k , то она совершает скачок в точку $y \neq w_k$ с вероятностью $-q(w_k,y)q(w_k,w_k)^{-1}$ и продолжает движение согласно марковской цепи η . Предполагается, что все новорожденные частицы ведут себя как независимые копии родительской частицы.

Как и в разделе 1.1, будем считать, что марковская цепь η является неразложимой, а матрица Q консервативной (другими словами, $\sum_{y \in \mathcal{S}} q(x,y) = 0$, где $q(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $q(x,x) \in (-\infty, 0)$ для любого $x \in \mathcal{S}$). Обозначим $f_k(s) := \mathbb{E}s^{\xi_k}$, $s \in [0,1]$, вероятностную производящую функцию случайной величины ξ_k , $k = 1, \dots, N$. Будем придерживаться стандартного предположения о существовании конечной производной $f'_k(1)$, т.е. $\mathbb{E}\xi_k < \infty$ для любого $k = 1, \dots, N$.

Пусть $\mu(t)$ обозначает общее число частиц, существующих в КВП в момент $t \geq 0$. Аналогично определим локальные численности $\mu(t; y)$ как количества частиц, расположенных в различных точках $y \in \mathcal{S}$ в момент t .

Наша дальнейшая цель – исследовать асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц в КВП, когда $t \rightarrow \infty$. При этом оказывается, что оно существенным образом зависит от того, к какому из трех классов относится данный КВП: надкритическому, критическому или докритическому. Поэтому в разделе 1.3 мы вводим такую классификацию с помощью вспомо-

гательного процесса Беллмана–Харриса и результатов раздела 1.1. Далее в соответствующих разделах 1.4 и 1.6 мы находим асимптотическое поведение всех моментов общих и локальных численностей частиц и устанавливаем для них предельные теоремы в смысле сильной и слабой сходимости. В разделе 1.5 показываем, как наши новые результаты обобщают ряд известных ранее утверждений.

1.3 Вспомогательный процесс Беллмана–Харриса

Напомним определение ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с n типами частиц. Процесс начинается с одной частицы типа $i \in \{1, \dots, n\}$. Родительская частица имеет случайную продолжительность жизни с функцией распределения $G_i(t)$, $t \geq 0$. Погибая, частица производит потомков в соответствии с вероятностной производящей функцией $g_i(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$. Новые частицы типа $j = 1, \dots, n$ эволюционируют независимо друг от друга и от предыстории процесса с распределением продолжительности жизни $G_j(\cdot)$ и производящей функцией числа потомков $g_j(\cdot)$. Обозначим

$$M := (m_{i,j})_{i,j=1}^n, \text{ где } m_{i,j} = \partial_{s_j} g_i \Big|_{\mathbf{s}=(1,\dots,1)},$$

матрицу средних числа непосредственных потомков частиц различных типов. Ветвящийся процесс Беллмана–Харриса называется *неразложимым*, если матрица M является неразложимой (необходимые сведения о неразложимых матрицах см., например, в [124], гл.1, § 3). Пусть ρ – перронов корень матрицы M (т.е. положительное собственное значение, которое превосходит модули всех остальных собственных значений). Процесс Беллмана–Харриса называется *надкритическим*, если $\rho > 1$, *критическим*, если $\rho = 1$, и *докритическим*, если $\rho < 1$ (см., например, [46], гл.4, § 5, 6 и 7). Обозначим $Z_j(t)$ число частиц типа j , существующих в момент t , где $t \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Для построения вспомогательного процесса Беллмана–Харриса в рамках КВП нам требуется ввести некоторые обозначения. Рассмотрим частицу, перемещение которой по множеству \mathcal{S} определяется марковской цепью η с генератором Q и начальным состоянием x . Напомним, что согласно разделу 1.1 случайная величина $H\bar{\tau}_{x,y}$, где $x, y \in \mathcal{S}$ и $H \subset \mathcal{S}$, – время, проведенное частицей

после выхода из стартовой точки x до первого попадания в y , если траектория частицы не проходит через множество H . Иначе (если траектория частицы проходит через множество H до первого попадания в y) ${}_H\bar{\tau}_{x,y} = \infty$. Случайная величина ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$ называется *временем достижения* состояния y с запретом в H после первого выхода из стартового состояния x . Кроме того, ${}_H\bar{F}_{x,y}(t)$, $t \geq 0$, – несобственная функция распределения ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$. Очевидно,

$${}_H\bar{F}_{x,y}(0) = (\delta_{x,y} - 1)q(x,y)q(x,x)^{-1},$$

где $\delta_{x,y}$ есть символ Кронекера. Явные формулы для вероятности конечности величины ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$, т.е. для величины ${}_H\bar{F}_{x,y}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} {}_H\bar{F}_{x,y}(t)$, вовлекающие вероятности с запретами и функцию Грина, выведены в разделе 1.1. Если множество запретов H пусто, мы будем писать $\bar{\tau}_{x,y}$ и $\bar{F}_{x,y}(\cdot)$ вместо соответственно $\emptyset\bar{\tau}_{x,y}$ и $\emptyset\bar{F}_{x,y}(\cdot)$.

Вернемся к КВП. Временно предположим, что КВП стартует в w_p для некоторого $p = 1, \dots, N$. Положим $W_k := W \setminus \{w_k\}$ и для $j = 1, \dots, N$ обозначим

$$K_j := \{k = 1, \dots, N : w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) - w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(0) > 0\}.$$

Пусть $K_j = \{k(j,1), \dots, k(j, |K_j|)\}$, где

$$1 \leq k(j,1) < k(j,2) < \dots < k(j, |K_j|) \leq N,$$

и $|U|$ обозначает мощность конечного множества U . Разделим популяцию частиц, существующих в момент $t \geq 0$, на $L + 1$ групп при $L := N + \sum_{j=1}^N |K_j|$. Частицы, находящиеся в момент t в точке w_j , образуют j -ю группу, имеющую мощность $\mu(t; w_j)$, $j = 1, \dots, N$. Рассмотрим семейство, состоящее из частиц, которые покинули w_j по крайней мере однажды за интервал $[0, t]$, а вслед за последним посещением w_j еще не достигли W к моменту t , но когда-нибудь попадут в $w_{k(j,i)}$ до возможного посещения множества $W_{k(j,i)}$, $i = 1, \dots, |K_j|$, $j = 1, \dots, N$. Это семейство имеет мощность, обозначаемую $\mu_{j,i}(t)$, и соответствует группе с номером $L(j) + i$, где $L(j) := N + \sum_{l=1}^{j-1} |K_l|$. Группа номер $L+1$ содержит оставшиеся частицы, не включенные в первые L групп. Заметим, что последняя группа состоит из частиц, имеющих бесконечную продолжительность жизни, поскольку после момента t они больше никогда не попадут во множество катализаторов. Таким образом, после момента t эти частицы не произведут потомков и не окажут влияния на численности частиц в других L группах.

Теперь мы можем ввести вспомогательный процесс Беллмана–Харриса, чтобы использовать его для изучения КВП. Рассмотрим L -мерный процесс Беллмана–Харриса, стартующий с одной частицы типа p и имеющий следующие функции распределения и производящие функции

$$G_j(t) = 1 - e^{-\beta_j t}, \quad g_j(\mathbf{s}) = \alpha_j f_j(s_j) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(0) s_k \quad (1.16)$$

$$+(1 - \alpha_j) \sum_{i=1}^{|K_j|} T_{i,j}(\infty) s_{L(j)+i} + (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right),$$

$$G_{L(j)+i}(t) = \frac{T_{i,j}(t)}{T_{i,j}(\infty)}, \quad g_{L(j)+i}(\mathbf{s}) = s_{k(j,i)}, \quad (1.17)$$

где

$$T_{i,j}(t) := w_{k(j,i)} \bar{F}_{w_j, w_{k(j,i)}}(t) - w_{k(j,i)} \bar{F}_{w_j, w_{k(j,i)}}(0), \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

$i = 1, \dots, |K_j|$, $j = 1, \dots, N$. Легко видеть, что для процесса, построенного таким образом, вектор $(Z_1(t), \dots, Z_L(t))$ для каждого $t \geq 0$ имеет такое же распределение, как и вектор размерности L , j -я координата которого есть $\mu(t; w_j)$, а $(L(j) + i)$ -я координата представляет собой $\mu_{j,i}(t)$, $i = 1, \dots, |K_j|$, $j = 1, \dots, N$.

Матрица средних $M = (m_{k,l})_{k,l=1}^L$ введенного процесса Беллмана–Харриса имеет блочный вид, т.е.

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,N+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{N+1,1} & M_{N+1,2} & \dots & M_{N+1,N+1} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Здесь матрица $M_{1,1} = (m_{k,l})_{k,l=1}^N$ обладает элементами

$$m_{k,l} = \delta_{k,l} \alpha_k f'_k(1) + (1 - \alpha_k) w_l \bar{F}_{w_k, w_l}(0).$$

Для $j = 1, \dots, N$ все элементы $N \times |K_j|$ -матрицы $M_{1,j+1}$ равны нулю, кроме j -й строки, а при $i = 1, \dots, |K_j|$ имеем $m_{j,L(j)+i} = (1 - \alpha_j) T_{i,j}(\infty)$. Если $i = 1, \dots, N$, то $|K_i| \times N$ -матрица $M_{i+1,1}$ такова, что, опуская ее j -е нулевые столбцы для всех $j \notin K_i$, получаем единичную матрицу размера $|K_i| \times |K_i|$. Для $i, j \in \{1, \dots, N\}$ $|K_i| \times |K_j|$ -матрица $M_{i+1,j+1}$ содержит лишь нулевые элементы.

Проверим, что заданный процесс Беллмана–Харриса является неразложимым. В силу неразложимости марковской цепи η существует конечный путь из

w_k в w_l с положительной вероятностью для каждой $k, l = 1, \dots, N$. В рамках КВП такой путь имеет также положительную вероятность, поскольку, находясь в точке расположения катализатора w_i , частица может покинуть его без ветвления с положительной вероятностью $1 - \alpha_i$ для каждого $i = 1, \dots, N$. Среди точек, посещенных последовательно этой траекторией марковской цепи η , выберем те, которые лежат во множестве W , скажем, $w_{p(0)}, w_{p(1)}, \dots, w_{p(J)}, w_{p(J+1)}$ при $p(0) := k$ и $p(J+1) := l$. Согласно построению вспомогательного процесса Беллмана–Харриса такой путь соответствует изменениям типа частицы с k на l . А именно, если путь цепи η достигает $w_{p(j+1)}$ сразу после выхода из $w_{p(j)}$, то тип частицы в процессе Беллмана–Харриса меняется с $p(j)$ на $p(j+1)$. Иначе, $p(j+1) \in K_{p(j)}$, т.е. $p(j+1) = k(p(j), i)$ для некоторого $i = 1, \dots, |K_{p(j)}|$, и изменение типа частицы с $p(j)$ на $p(j+1)$ содержит промежуточный тип $L(p(j)) + i$. Следовательно, мы заключаем, что для каждой k и l из $\{1, \dots, N\}$ существуют $n = n(k, l) \in \mathbb{N}$ и набор $\{r(1), \dots, r(n)\} \subset \{1, \dots, L\}$ такие, что $m_{k, r(1)} m_{r(1), r(2)} \dots m_{r(n), l} > 0$. Поскольку $m_{L(j)+i, k(j), i} = 1 > 0$ и $m_{j, L(j)+i} > 0$ для всех $i = 1, \dots, |K_j|$ и $j = 1, \dots, N$ согласно определению (1.18) матрицы M , то предыдущее утверждение остается также справедливым при $k, l = 1, \dots, L$. Тем самым, мы проверили, что для любых k и l из $\{1, \dots, L\}$ существует $n = n(k, l) \in \mathbb{N}$ такое, что $m_{k, l}^{(n)} > 0$, где $m_{k, l}^{(n)}$ есть (k, l) -й элемент матрицы M^n . Таким образом, матрица M неразложима. Более того, если $f'_i(1) > 0$ для некоторого $i = 1, \dots, N$, то $m_{i, i} > 0$ и матрица M *непериодическая* (см., например, [124], гл.1, § 2). В этом случае M является *примитивной* матрицей (см., например, [124], гл.1, § 3).

В силу теоремы Перрона–Фробениуса для неразложимых матриц (см., например, [124], гл.1, § 4) матрица M обладает положительным собственным значением $\rho(M)$ (перроновым корнем), которое имеет максимальный модуль среди всех собственных значений этой матрицы. Используя классификацию построенного процесса Беллмана–Харриса, назовем КВП *надкритическим*, *критическим* или *докритическим*, если соответственно $\rho(M) > 1$, $\rho(M) = 1$ или $\rho(M) < 1$, где матрица M определяется формулой (1.18).

Напомним, что преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения G_i задается формулой

$$\check{G}_i(\lambda) := \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t} dG_i(t), \quad \lambda \geq 0.$$

Пусть $H(\lambda) := (\check{G}_i(\lambda)m_{i,j})_{i,j=1}^L$. Отметим, что $H(0) = M$. Матрица $H(\lambda)$ является неразложимой ввиду неразложимости матрицы M . Положим также $D(\lambda) = (d_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$, $\lambda \geq 0$, с

$$d_{i,j}(\lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda)_{W_j} \check{\bar{F}}_{w_i, w_j}(\lambda). \quad (1.19)$$

Легко видеть, что матрица $D = (d_{i,j})_{i,j=1}^N$, определенная как $D := D(0)$, имеет элементы

$$d_{i,j} = \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) + (1 - \alpha_i)_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(\infty). \quad (1.20)$$

Для неразложимой матрицы A обозначим $\rho(A)$ ее перронов корень. Следующее утверждение дает удобное условие критичности для КВП.

Лемма 1. *Для каждого $\lambda \geq 0$ матрица $D(\lambda)$ неразложима, а значения $\rho(D(\lambda))$ и $\rho(H(\lambda))$ одновременно больше 1, равны 1 или меньше 1. В частности, перроновы корни $\rho(D)$ и $\rho(M)$ одновременно либо больше 1, либо равны 1, либо меньше 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неразложимость матрицы D (а, следовательно, и матрицы $D(\lambda)$) устанавливается так же, как для матрицы M . Согласно теореме Перрона–Фробениуса матрица $H(\lambda)$ имеет строго положительный левый собственный вектор \mathbf{v} (т.е. все координаты положительны), соответствующий собственному значению $\rho(H(\lambda))$. Тем самым, $H(\lambda)^\top \mathbf{v} = \rho(H(\lambda)) \mathbf{v}$, где символ \top обозначает транспонирование, а все векторы рассматриваются как векторы-столбцы. Другими словами,

$$(H(\lambda)^\top - \rho(H(\lambda))I) \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

где I – единичная матрица, а $\mathbf{0}$ – вектор размерности L с нулевыми координатами. Применим некоторые равносильные преобразования к полученной системе уравнений, а именно, для каждого $j, k = 1, \dots, N$ прибавим $(L(j) + i)$ -ю строку, умноженную на $\check{G}_{L(j)+i}(\lambda) \rho(H(\lambda))^{-1}$, к k -й строке, если $k \in K_j$, т.е. $k = k(j, i)$ для некоторого $i = 1, \dots, |K_j|$. Учитывая только первые N уравнений, мы заключаем, что

$$\mathbf{v}_0^\top (H_{1,1}(\lambda) + \rho(H(\lambda))^{-1} R(\lambda) - \rho(H(\lambda))I) = \mathbf{0}^\top.$$

Здесь матрица $H_{1,1}(\lambda) := (\check{G}_i(\lambda)m_{i,j})_{i,j=1}^N$, матрица $R(\lambda) := (r_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$ имеет элементы

$$r_{i,j}(\lambda) := (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda) \left({}_{W_j} \check{\bar{F}}_{w_i, w_j}(\lambda) - {}_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(0) \right),$$

в то время как \mathbf{v}_0 есть строго положительный вектор, координаты которого совпадают с первыми N координатами вектора \mathbf{v} , а $\mathbf{0}$ – вектор размерности N с нулевыми координатами. Заметим, что $D(\lambda) = H_{1,1}(\lambda) + R(\lambda)$. Очевидно, если $\rho = \rho(H(\lambda)) \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \mathbf{v}_0^\top (D(\lambda) - \rho^2 I) &= \mathbf{v}_0^\top (\rho^{-1} H_{1,1}(\lambda) + \rho^{-1} R(\lambda) - \rho I) \\ &\leq \mathbf{v}_0^\top (H_{1,1}(\lambda) + \rho^{-1} R(\lambda) - \rho I) \leq \mathbf{v}_0^\top (H_{1,1}(\lambda) + R(\lambda) - \rho I) = \mathbf{v}_0^\top (D(\lambda) - \rho I). \end{aligned}$$

Аналогично, если $\rho(H(\lambda)) \leq 1$, то предыдущая цепочка неравенств остается справедливой при замене каждого символа \leq на \geq . Окончательно получаем

$$D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \geq \rho(H(\lambda)) \mathbf{v}_0 \text{ и } D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \leq \rho(H(\lambda))^2 \mathbf{v}_0 \text{ при } \rho(H(\lambda)) \geq 1, \quad (1.21)$$

$$D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \leq \rho(H(\lambda)) \mathbf{v}_0 \text{ и } D(\lambda)^\top \mathbf{v}_0 \geq \rho(H(\lambda))^2 \mathbf{v}_0 \text{ при } \rho(H(\lambda)) \leq 1. \quad (1.22)$$

В силу теоремы 1.6 из [124], гл.1, § 4, второе соотношение в (1.21) и первое в (1.22) влекут, что $\rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))^2$ при $\rho(H(\lambda)) \geq 1$ и $\rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))$ при $\rho(H(\lambda)) \leq 1$. Учитывая доказательство теоремы Перрона–Фробениуса, благодаря первому неравенству в (1.21) и второму в (1.22) выводим, что $\rho(D(\lambda)) \geq \rho(H(\lambda))$ при $\rho(H(\lambda)) \geq 1$ и $\rho(D(\lambda)) \geq \rho(H(\lambda))^2$ при $\rho(H(\lambda)) \leq 1$. Следовательно, если $\rho(H(\lambda)) \geq 1$, то $\rho(H(\lambda)) \leq \rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))^2$, в то время как если $\rho(H(\lambda)) \leq 1$, мы имеем $\rho(H(\lambda))^2 \leq \rho(D(\lambda)) \leq \rho(H(\lambda))$. Из этих оценок вытекает утверждение леммы 1. \square

Установленная лемма позволяет следующим образом переформулировать определение надкритического, критического и докритического КВП с помощью матрицы D .

Определение 1. *КВП называется надкритическим, критическим или докритическим, если соответственно $\rho(D) > 1$, $\rho(D) = 1$ или $\rho(D) < 1$, где матрица D задается формулой (1.20).*

1.4 Моментный анализ КВП

В статье [125] показано, что математические ожидания численностей частиц различных типов в надкритическом неразложимом многотипном процессе

Беллмана–Харриса растут экспоненциально (когда время стремится к бесконечности) с некоторой скоростью ν , называемой мальтусовским параметром. Параметр ν положителен и определяется как единственное решение уравнения $\rho(H(\nu)) = 1$. Лемма 1 показывает, что для нашего вспомогательного L -мерного надкритического процесса Беллмана–Харриса эта процедура упрощается и мальтусовский параметр может быть найден как единственный корень уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$ (заметим, что квадратная матрица $H(\lambda)$ имеет порядок $L \geq N$, в то время как квадратная матрица $D(\lambda)$ имеет порядок N). Таким образом, если $\rho(D) > 1$, то в рамках КВП мальтусовский параметр ν задается как единственный (положительный) корень уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$. Если $\rho(D) = \rho(D(0)) > 1$, то такое решение всегда существует. Действительно, согласно теореме Перрона–Фробениуса функция $\rho(D(\lambda))$ по отношению к переменной λ является строго убывающей и стремится к 0 при $\lambda \rightarrow \infty$.

Чтобы сформулировать основной результат раздела 1.4, нам потребуются некоторые новые обозначения. Для надкритического КВП рассмотрим функции $a_n(x, y)$, $x, y \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, которые возникнут в описании асимптотического поведения (при $t \rightarrow \infty$) n -х факториальных моментов

$$m_n(t; x, y) := \mathbf{E}_x \mu(t; y) (\mu(t; y) - 1) \dots (\mu(t; y) - n + 1)$$

локальных численностей частиц в КВП (индекс x обозначает стартовую точку КВП). Функция $a_1(x, y)$ имеет наиболее простой вид, когда $x, y \in W$, а именно,

$$a_1(w_i, w_j) = \frac{\Delta_{j,i}(\nu)}{(\nu + \beta_j) \Delta'(\nu)}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1.23)$$

где $\Delta_{i,j}(\lambda) := (-1)^{i+j} \det(I - D(\lambda))_{i,j}$ и $\Delta'(\nu) := \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(\lambda))|_{\lambda=\nu}$. Если $N = 1$, то функция $\Delta_{1,1}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, полагается тождественно равной 1. Для $y \in \mathcal{S} \setminus W$ пусть

$$a_1(w_i, y) = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{j,i}(\nu) (1 - \alpha_j) \check{G}_j(\nu) \check{F}_{w_j, y}(\nu)}{(\nu - q(y, y)) \Delta'(\nu) (1 - \check{F}_{y, y}(\nu))}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.24)$$

Здесь

$${}_H \check{F}_{x', y'}(\lambda) := (-q(x', x')) (\lambda - q(x', x'))^{-1} {}_H \check{F}_{x', y'}(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad x', y' \in \mathcal{S}, \quad H \subset \mathcal{S},$$

т.е. ${}_H F_{x', y'}(t)$, $t \geq 0$, – это функция распределения времени достижения состояния y' с запретом в H , если марковская цепь η стартовала из состояния x'

(см. раздел 1.4). Отметим, что $\check{G}_j(\lambda) = \beta_j(\lambda + \beta_j)^{-1}$ для каждого $\lambda \geq 0$ и $j = 1, \dots, N$. Значения $a_n(x, y)$ при $n > 1$, $x \in W$ и $y \in \mathcal{S}$ вычисляются с помощью следующей рекуррентной схемы

$$a_n(w_i, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k \Delta_{k,i}(n\nu)}{(n\nu + \beta_k) \Delta(n\nu)} h_{n,k}(a_1(w_k, y), \dots, a_{n-1}(w_k, y)), \quad (1.25)$$

где $i = 1, \dots, N$, $\Delta(\lambda) := \det(I - D(\lambda))$, $\lambda \geq 0$,

$$h_{n,k}(z_1, \dots, z_{n-1}) := \alpha_k \sum_{r=2}^n \frac{f_k^{(r)}(1)}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0, \\ i_1 + \dots + i_r = n}} \frac{n!}{i_1! \dots i_r!} z_{i_1} \dots z_{i_r} \quad (1.26)$$

и $k = 1, \dots, N$. На этом пути значения $a_n(x, y)$ при $n \geq 1$, $x \in \mathcal{S} \setminus W$ и $y \in \mathcal{S}$ определяются согласно формуле

$$a_n(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i \check{F}_{x, w_i}(n\nu) a_n(w_i, y). \quad (1.27)$$

Определим функции $A_n(x)$, $x \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, появляющиеся в асимптотических формулах для n -х факториальных моментов

$$M_n(t; x) := \mathbb{E}_x \mu(t) (\mu(t) - 1) \dots (\mu(t) - n + 1)$$

общих численностей частиц в надкритическом КВП. А именно, для $n = 1$ и $x \in W$ положим

$$A_1(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j \beta_j (f_j'(1) - 1) \Delta_{j,i}(\nu)}{\nu(\nu + \beta_j) \Delta'(\nu)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.28)$$

Если $n > 1$ и $x \in W$, то значения $A_n(x)$ находятся в соответствии со следующей рекуррентной формулой

$$A_n(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j \Delta_{j,i}(n\nu)}{(n\nu + \beta_j) \Delta(n\nu)} h_{n,j}(A_1(w_j), \dots, A_{n-1}(w_j)). \quad (1.29)$$

Опираясь на последние равенства, можно получить значения $A_n(x)$ при $n \geq 1$ и $x \in \mathcal{S} \setminus W$ с помощью соотношения

$$A_n(x) = \sum_{i=1}^N w_i \check{F}_{x, w_i}(n\nu) A_n(w_i). \quad (1.30)$$

Для критического КВП введем функции $b_n(x, y)$ и $B_n(x)$, $x, y \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, возникающие в асимптотических соотношениях соответственно для $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$. А именно, при $i, j = 1, \dots, N$ и $y \in \mathcal{S} \setminus W$ пусть

$$b_1(w_i, w_j) = \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\beta_j \Delta'(0)}, \quad b_1(w_i, y) = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{j,i}(0)(1 - \alpha_j)_W F_{w_j, y}(\infty)}{(-q(y, y)) \Delta'(0)(1 - {}_W F_{y, y}(\infty))}, \quad (1.31)$$

где $\Delta'(0) := \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(\lambda))|_{\lambda=0+}$. Если $n > 1$, $i = 1, \dots, N$ и $y \in \mathcal{S}$, то значения $b_n(w_i, y)$ вычисляются согласно рекуррентной формуле

$$b_n(w_i, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k f_k''(1) \Delta_{k,i}(0)}{2(n-1) \Delta'(0)} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} b_r(w_k, y) b_{n-r}(w_k, y). \quad (1.32)$$

Наконец, значения $b_n(x, y)$ при $n \geq 1$, $x \in \mathcal{S} \setminus W$ и $y \in \mathcal{S}$ определяются следующим образом:

$$b_n(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x, w_i}(\infty) b_n(w_i, y). \quad (1.33)$$

Для $i = 1, \dots, N$ положим

$$B_1(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f_j'(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)}. \quad (1.34)$$

Если $n > 1$, то значения $B_n(w_i)$ подсчитываются рекуррентно, т.е.

$$B_n(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j f_j''(1) \Delta_{j,i}(0)}{2(2n-1) \Delta'(0)} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} B_r(w_j) B_{n-r}(w_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.35)$$

На основе последних равенств значения $B_n(x)$ при $n \geq 1$ и $x \in \mathcal{S} \setminus W$ находятся с помощью соотношения

$$B_n(x) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x, w_i}(\infty) B_n(w_i). \quad (1.36)$$

Наконец, для докритического КВП определим функции $C_n(x)$, $x \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, появляющиеся в описании асимптотического поведения $M_n(t; x)$. Пусть

$$C_1(w_i) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f_j'(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.37)$$

$$C_1(x) = 1 - \sum_{i=1}^N w_i F_{x, w_i}(\infty) + \sum_{i=1}^N w_i F_{x, w_i}(\infty) C_1(w_i), \quad x \in \mathcal{S} \setminus W, \quad (1.38)$$

а для $n > 1$ положим

$$C_n(w_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} h_{n,j}(C_1(w_j), \dots, C_{n-1}(w_j)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.39)$$

$$C_n(x) = \sum_{i=1}^N w_i F_{x,w_i}(\infty) C_n(w_i), \quad x \in \mathcal{S} \setminus W. \quad (1.40)$$

Следующая теорема является основным результатом раздела 1.4, в котором проводится моментный анализ локальных и общих численностей частиц в КВП. Он обобщает теоремы 4.1, 4.2 из [99] и теорему 1 из [34], а также некоторые утверждения теоремы 2 из [53].

Теорема 4. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$, при условии $E\xi_i^n < \infty$ для любого $i = 1, \dots, N$, функции $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$ ограничены на произвольном конечном интервале из $[0, \infty)$ при фиксированных $x, y \in \mathcal{S}$. Более того, асимптотическое поведение $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$ при $t \rightarrow \infty$ зависит существенно от класса КВП и описывается следующим образом.*

1. Если $\rho(D) > 1$, то $\nu > 0$ и

$$m_n(t; x, y) = a_n(x, y)e^{n\nu t} + o(e^{n\nu t}), \quad (1.41)$$

$$M_n(t; x) = A_n(x)e^{n\nu t} + o(e^{n\nu t}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.42)$$

где функции $a_n(x, y)$ и $A_n(x)$, $x, y \in \mathcal{S}$, строго положительны.

2. Если $\rho(D) = 1$, то

$$m_n(t; x, y) = b_n(x, y)t^{n-1} + o(t^{n-1}), \quad (1.43)$$

$$M_n(t; x) = B_n(x)t^{2n-1} + o(t^{2n-1}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.44)$$

где функция $b_n(x, y)$ строго положительна при всех значениях $x, y \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty u dW_j \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ при любых $i, j = 1, \dots, N$ и, дополнительно, в случае возвратной цепи η и $n \geq 2$ верно $\sum_{i=1}^N \alpha_i |f_i(s) - s| > 0$ для некоторого $s \in [0, 1)$. Далее, функция $B_n(x)$ строго положительна для любого $x \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда марковская цепь η невозвратна и $\int_0^\infty u dW_j \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, N$. Иначе соответственно $b_n(\cdot, \cdot) \equiv 0$ и $B_n(\cdot) \equiv 0$.

3. Если $\rho(D) < 1$, то

$$m_n(t; x, y) = o(1), \quad (1.45)$$

$$M_n(t; x) = C_n(x) + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.46)$$

где функция $C_n(x)$ строго положительна для каждого $x \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда марковская цепь η невозвратна. Иначе $C_n(\cdot) \equiv 0$.

Подчеркнем, что мы не налагаем на характер марковской цепи η таких ограничений, как симметрия и однородность переходных вероятностей или конечная дисперсия скачков и т.п. Поэтому в теореме 4 мы устанавливаем точные асимптотические соотношения в пункте 1 и только частично в пунктах 2 и 3. Для уточнения утверждений пунктов 2 и 3 требуются дальнейшие предположения о лежащем в основе КВП движении частиц. Например, даже для критического симметричного ВСБ по \mathbb{Z}^d с одним катализатором (см. [53]) имеется четыре различных асимптотических формулы для $m_n(t; x, y)$ и $M_n(t; x)$ в зависимости от размерности $d = 1, 2, 3$ или 4 и, тем самым, в зависимости от скорости убывания переходных вероятностей (заметим, что для $d \geq 5$ теорема 4 обобщает соответствующие результаты из [53]). Более того, для докритического ВСБ по \mathbb{Z}^d с одним катализатором (см., например, [156] и раздел 3.3) порядки убывания функций $m_n(t; x, y)$ отличаются для всех $d \in \mathbb{N}$.

Перейдем к проверке справедливости утверждений, сформулированных в теореме 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главным образом, мы будем использовать вспомогательный процесс Беллмана–Харриса, построенный в разделе 1.3. Вначале установим теорему 4 для $x, y \in W$ (случай 1) и далее распространим эти результаты на общий случай $x, y \in \mathcal{S}$ (случай 2).

Случай 1. Итак, предположим $x, y \in W$. Дальнейшее доказательство теоремы 4 для случая 1 разбивается на 9 шагов. На шаге 1 мы выводим систему уравнений восстановления относительно факториальных моментов локальных численностей частиц в КВП. Затем на шагах 2, 3 и 4 мы опираемся на эту систему, чтобы доказать соответствующие утверждения (1.41), (1.43) и (1.45) теоремы 4, относящиеся к моментному анализу локальных численностей частиц. Далее, на шагах 5 и 6 выводим систему уравнений восстановления относительно факториальных моментов общих численностей частиц в КВП в зависимости от того, является ли марковская цепь η возвратной или невозвратной. Наконец, на шагах 7, 8 и 9 мы пользуемся этими системами, чтобы установить соответственно утверждения (1.42), (1.44) и (1.46) теоремы 1, касающиеся моментного анализа общего числа частиц. Заметим, что на шаге 6 мы

вводим вспомогательный разложимый $(L + 1)$ -мерный процесс Беллмана–Харриса с финальным типом частиц.

Шаг 1. На данной стадии выведем систему уравнений восстановления относительно факториальных моментов локальных численностей частиц в КВП. При $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $k, l = 1, \dots, L$ обозначим

$$m_n^{BH}(t; k, l) := \mathbb{E}_k Z_l(t)(Z_l(t) - 1) \dots (Z_l(t) - n + 1)$$

факториальный момент n -го порядка числа частиц $Z_l(t)$ типа l в момент t в процессе Беллмана–Харриса (индекс k означает тип родительской частицы). В соответствии с построением вспомогательного процесса имеем $m_n(t; w_i, w_j) = m_n^{BH}(t; i, j)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $i, j = 1, \dots, N$. Таким образом, при условии $\mathbb{E} \xi_k^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и всех $k = 1, \dots, N$, конечность функций $m_n(t; w_i, w_j)$ при любых $i, j = 1, \dots, N$ и $t \geq 0$ вытекает из теоремы 1 в [46], гл.8, § 6. Более того, в силу этой теоремы функции $m_1^{BH}(t; k, l)$, $t \geq 0$, $k, l = 1, \dots, L$, удовлетворяют следующей системе уравнений восстановления:

$$m_1^{BH}(t; k, l) = \delta_{k,l}(1 - G_k(t)) + \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t m_1^{BH}(t - u; r, l) dG_k(u), \quad (1.47)$$

в то время как при $n > 1$ эта теорема и обобщенная формула Фаа ди Бруно (см. [126]) влекут

$$\begin{aligned} m_n^{BH}(t; k, l) &= \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t m_n^{BH}(t - u; r, l) dG_k(u) \\ &+ \sum_{\tilde{\mathbf{i}}} \frac{n!}{\prod_{p=1}^{n-1} i_p^{(1)}! \dots i_p^{(L)}!} \frac{\partial^{J(1)+\dots+J(L)} g_k(\mathbf{s})}{\partial s_1^{J(1)} \dots \partial s_L^{J(L)}} \Big|_{\mathbf{s}=(1,\dots,1)} \\ &\times \int_0^t \prod_{p=1}^{n-1} \left(\left(\frac{m_p^{BH}(t - u; 1, l)}{p!} \right)^{i_p^{(1)}} \dots \left(\frac{m_p^{BH}(t - u; L, l)}{p!} \right)^{i_p^{(L)}} \right) dG_k(u). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Здесь символ $\sum_{\tilde{\mathbf{i}}}$ обозначает сумму, взятую по всем L -мерным векторам $\mathbf{i}_1 = (i_1^{(1)}, \dots, i_1^{(L)})$, \dots , $\mathbf{i}_{n-1} = (i_{n-1}^{(1)}, \dots, i_{n-1}^{(L)})$ с неотрицательными целыми компонентами, удовлетворяющими равенству

$$\sum_{p=1}^{n-1} p \left(i_p^{(1)} + \dots + i_p^{(L)} \right) = n.$$

Для каждого $r = 1, \dots, L$ также положим $J(r) := \sum_{p=1}^{n-1} i_p^{(r)}$. Подставляя в (1.48) явные формулы (1.16) и (1.17) для производящих функций числа потомков

$g_k(\cdot)$, $k = 1, \dots, L$, процесса Беллмана–Харриса, приходим к более компактному соотношению

$$m_n^{BH}(t; k, l) = \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t m_n^{BH}(t-u; r, l) dG_k(u) \quad (1.49)$$

$$+ \mathbb{I}\{k \in \{1, \dots, N\}\} \sum_{\approx} \frac{\alpha_k f_k^{(J)}(1) n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \int_0^t \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{m_p^{BH}(t-u; k, l)}{p!} \right)^{i_p} dG_k(u),$$

где под символом \sum_{\approx} понимается сумма, взятая по всем неотрицательным целым i_1, \dots, i_{n-1} таким, что $\sum_{p=1}^{n-1} p i_p = n$. Мы также используем обозначение $J := i_1 + \dots + i_{n-1}$.

Шаг 2. Теперь докажем часть утверждения (1.41), относящуюся к случаю $x, y \in W$. Итак, предположим, что $\rho(D) > 1$. Применяя теорему 2.1, пункт (iii), из [56] к системе уравнений восстановления (1.47), получаем

$$e^{-\nu t} m_1^{BH}(t; i, j) \rightarrow \frac{(-1)^{i+j} \det(I - H(\nu))_{j,i}}{(\nu + \beta_j) \frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda)) \Big|_{\lambda=\nu}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.50)$$

для всех $i, j = 1, \dots, N$. Здесь $\nu > 0$ и

$$\frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda)) \Big|_{\lambda=\nu} > 0$$

(см., например, [125]). Сравнивая формулы (1.23) и (1.41) с (1.50), видим, что остается установить соотношения между определителями и алгебраическими дополнениями матриц $I - H(\lambda)$ и $I - D(\lambda)$. Следующая лемма дает эти соотношения.

Лемма 2. *Для всех $\lambda \geq 0$ и $i = 1, \dots, |K_j|$, $j, k = 1, \dots, N$ имеем*

$$\det(I - H(\lambda)) = \det(I - D(\lambda)), \quad \det(I - H(\lambda))_{j,k} = \det(I - D(\lambda))_{j,k},$$

$$(-1)^{L(j)+i+k} \det(I - H(\lambda))_{L(j)+i,k} = (-1)^{j+k} m_{j,L(j)+i} \check{G}_j(\lambda) \det(I - D(\lambda))_{j,k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим преобразования к столбцам матрицы $I - H(\lambda)$, которые не изменяют ее определителя. А именно, для всех $j, k = 1, \dots, N$ прибавим $(L(j) + i)$ -й столбец, умноженный на $\check{G}_{L(j)+i}(\lambda)$, к k -му столбцу, если $k \in K_j$, т.е. $k = k(j, i)$ для некоторого $i = 1, \dots, |K_j|$. После этих преобразований мы получим блочную матрицу, состоящую из четырех блоков. Левый

верхний блок размера $N \times N$ есть матрица $I - D(\lambda)$, в то время как левый нижний блок размера $(L - N) \times N$ и правый нижний блок размера $(L - N) \times (L - N)$ – это соответственно нулевая и единичная матрицы. Используя формулу для определителя блочной матрицы (см., например, [127], гл.2, § 5), приходим к первому утверждению леммы 2. Второе утверждение устанавливается аналогично. Для доказательства третьего утверждения применим описанные выше преобразования к матрице $(I - H(\lambda))_{L(j)+i,k}$ и затем переставим столбец под номером $L(j) + i - 1$ на место столбца под номером N . Определители матрицы $(I - H(\lambda))_{L(j)+i,k}$ и преобразованной матрицы совпадают с точностью до множителя $(-1)^{L(j)+i-N-1}$. Далее мы пользуемся формулой для определителя блочной матрицы еще раз и применяем разложение определителя по N -му столбцу. Лемма 2 полностью доказана. \square

Таким образом, в силу (1.50) и леммы 2 мы получили (1.41) при $n = 1$ и $x, y \in W$. Для проверки соотношения (1.41) при $n > 1$ и $x, y \in W$ используем индукцию по переменной n . Случай $n = 1$ разобран выше. Пусть формула (1.41) верна для всех моментов, порядки которых не превышают $n - 1$. Тогда второй член в правой части (1.49), обозначаемый $V_n(t; k, l)$, имеет следующее асимптотическое поведение

$$V_n(t; k, l) \sim \mathbb{I}\{k \in \{1, \dots, N\}\} e^{nvt} \check{G}_k(n\nu) \sum_{i_1! \dots i_{n-1}!}^{\approx} \frac{\alpha_k f_k^{(J)}(1) n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{a_p(w_k, w_l)}{p!} \right)^{i_p}$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, \dots, L$ и $l = 1, \dots, N$. Учитывая последнее соотношение и применяя теорему 2.1, пункт (iv), из [56] к системе уравнений восстановления (1.49), получаем

$$\frac{m_n^{BH}(t; i, j)}{e^{nvt}} \rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{i+k} \beta_k \det(I - H(n\nu))_{k,i}}{(n\nu + \beta_k) \det(I - H(n\nu))} h_{n,k}(a_1(w_k, w_j), \dots, a_{n-1}(w_k, w_j))$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, N$. Здесь мы пользуемся альтернативным представлением (см., например, [54], теорема 3.3) для функции $h_{n,k}$, определенной в (1.26). Последнее асимптотическое соотношение в сочетании с леммой 2 и формулой (1.25) приводит к искомому утверждению в (1.41), когда $n > 1$ и $x, y \in W$. Отметим, что функции $a_n(w_i, w_j)$, $n \geq 1$, $i, j = 1, \dots, N$, строго положительны согласно, например, [127], гл.13, § 3.

Шаг 3. Далее мы докажем утверждение (1.43) при $x, y \in W$. Предположим, что $\rho(D) = 1$ или, что эквивалентно, единственное решение уравнения

$\rho(D(\mathbf{v})) = 1$ есть $\mathbf{v} = 0$. Используя теорему 2.1, пункт (iii), из [56] к (1.47), приходим к следующему соотношению:

$$m_1^{BH}(t; i, j) \rightarrow \frac{(-1)^{i+j} \det(I - H(0))_{j,i}}{\beta_j \frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda))|_{\lambda=0+}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Эта формула, наряду с (1.31) и леммой 2, влечет требуемое утверждение (1.43) при $n = 1$. Для $n > 1$ воспользуемся методом индукции по переменной n . Совершая шаг индукции, получаем

$$\begin{aligned} V_n(t; k, l) &\sim \sum \frac{\alpha_k f_k^{(J)}(1) n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{b_p(w_k, w_l)}{p!} \right)^{i_p} \int_0^t (t-u)^{n-J} dG_k(u) \\ &\sim t^{n-2} \frac{\alpha_k f_k''(1)}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} b_r(w_k, w_l) b_{n-r}(w_k, w_l), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

для $k, l = 1, \dots, N$, в то время как $V_n(t; k, l) = 0$ для $k = N+1, \dots, L, l = 1, \dots, N$. Следовательно, применяя к (1.49) теорему 2.1, пункт (v), из [56], мы видим, что

$$\frac{m_n^{BH}(t; i, j)}{t^{n-1}} \rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{i+k} \alpha_k f_k''(1) \det(I - H(0))_{k,i}}{2(n-1) \frac{d}{d\lambda} \det(I - H(\lambda))|_{\lambda=0+}} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} b_r(w_k, w_j) b_{n-r}(w_k, w_j)$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, N$. Утверждение (1.43) при $n > 1$ теперь следует из последнего соотношения, определения (1.32) и леммы 2. В силу [127], гл.13, § 3, алгебраическое дополнение $\Delta_{i,j}(0)$ строго положительно для любых $i, j = 1, \dots, N$. Как установлено в [125], $\Delta'(0) \in (0, \infty]$. Более того, $\Delta'(0) < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty u d_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty \quad \text{для всех } i, j = 1, \dots, N.$$

Тем самым, функции $b_n(w_i, w_j)$ строго положительны при всех $n \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \dots, N$, если и только если $\int_0^\infty u d_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(u) < \infty$ и, дополнительно, в случае возвратной цепи η и $n \geq 2$ верно $\sum_{i=1}^N \alpha_i |f_i(s) - s| > 0$ для некоторого $s \in [0, 1)$. Заметим, что последнее условие позволяет выделить случай только перемещения частицы без размножения. Такое КВП является критическим для возвратной марковской цепи η и докритическим для невозвратной η .

Шаг 4. Соотношение (1.45) для случая $x, y \in W$ проверяется применением к (1.47) и (1.49) теоремы 2.2, пункт (ii), из [57]. Здесь мы существенно опираемся на тот факт, что M^n сходится поэлементно к нулевой матрице при $n \rightarrow \infty$, поскольку в докритическом случае $\rho(M) < 1$ в силу леммы 1.

Шаг 5. Выведем систему уравнений восстановления, вовлекающую факториальные моменты общего числа частиц, когда $x \in W$ и цепь η возвратна. При $t \geq 0$ обозначим $Z(t) := \sum_{j=1}^L Z_j(t)$ общее число частиц в момент t во вспомогательном процессе Беллмана–Харриса. В соответствии с построением этого процесса законы распределения для $\mu(t)$ и $Z(t)$ совпадают для каждого $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда марковская цепь η возвратна. В самом деле, если марковская цепь η невозвратна, то с положительной вероятностью существуют частицы в момент t в КВП, имеющие бесконечные продолжительности жизни, поскольку они никогда не достигнут множества W после момента t . Эти частицы не охватываются нашим L -мерным процессом Беллмана–Харриса. Поэтому пока сосредоточимся на возвратном случае. Тогда имеем $M_n(t; w_i) = M_n^{BH}(t; i)$ для всех $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $i = 1, \dots, N$, где

$$M_n^{BH}(t; k) := E_k Z(t)(Z(t) - 1) \dots (Z(t) - n + 1), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

и $k = 1, \dots, L$. Следовательно, при условии $E \xi_i^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и любых $l = 1, \dots, N$, теорема 1 из [46], гл.8, § 6, влечет конечность функций $M_n(t; w_i)$ для каждого $t \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, N$. Более того, в силу этой теоремы функции $M_1^{BH}(t; k)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, L$, удовлетворяют следующей системе уравнений восстановления:

$$M_1^{BH}(t; k) = 1 - G_k(t) + \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t M_1^{BH}(t - u; r) dG_k(u). \quad (1.51)$$

При $n > 1$ эта теорема и обобщенная формула Фаа ди Бруно (см. [126]) дают уравнения относительно $M_n^{BH}(t; k)$ такие же, как полученные из (1.48) после замены $m_n^{BH}(t; k, l)$ на $M_n^{BH}(t; k)$. Тем самым, для $M_n^{BH}(t; k)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, L$, система уравнений восстановления (1.49) имеет место, если функцию $m_n^{BH}(t; k, l)$ заменить на $M_n^{BH}(t; k)$.

Шаг 6. Теперь рассмотрим КВП в случае, когда движение частиц управляется невозвратной марковской цепью η . Чтобы охватить невозвратный случай, построим новый вспомогательный процесс Беллмана–Харриса с $L+1$ типами частиц, причем $(L+1)$ -й тип является финальным (см., например, [128] и [46], гл. 5, § 3). Для нового процесса Беллмана–Харриса обозначим $\widehat{G}_j(t)$, $t \geq 0$, функцию распределения продолжительности жизни частицы j -го типа, а $\widehat{g}_j(\mathbf{s}, s_{L+1})$, $\mathbf{s} \in [0, 1]^L$, $s_{L+1} \in [0, 1]$, – производящую функцию ее потомков, $j = 1, \dots, L+1$. Пусть $\widehat{G}_i(t) = G_i(t)$, $t \geq 0$, для $i = 1, \dots, L$, и $\widehat{g}_j(\mathbf{s}, s_{L+1}) = g_j(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in [0, 1]^L$,

$s_{L+1} \in [0,1]$, когда $j = N + 1, \dots, L$, где G_i и g_j определены в (1.16) и (1.17). Положим

$$\begin{aligned} \widehat{g}_j(\mathbf{s}, s_{L+1}) &= \alpha_j f_j(s_j) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N w_k \overline{F}_{w_j, w_k}(0) s_k \\ &+ (1 - \alpha_j) \sum_{i=1}^{|K_j|} T_{i,j}(\infty) s_{L(j)+i} + (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \overline{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) s_{L+1} \end{aligned}$$

при $j = 1, \dots, N$, $\mathbf{s} \in [0,1]^L$, $s_{L+1} \in [0,1]$, т.е. определения функций g_j и \widehat{g}_j отличаются только последним слагаемым. Поскольку $(L+1)$ -й тип является финальным (другими словами, каждая частица типа $L+1$ обладает бесконечной продолжительностью жизни и не производит потомков), для определенности мы можем положить $\widehat{G}_{L+1}(t) = 0$, $t \geq 0$, и $\widehat{g}_{L+1}(\mathbf{s}, s_{L+1}) = s_{L+1}$, $\mathbf{s} \in [0,1]^L$, $s_{L+1} \in [0,1]$. Матрица средних числа непосредственных потомков частиц различных типов нового процесса имеет элементы $\widehat{m}_{k,l} = m_{k,l}$, $k, l = 1, \dots, L$,

$$\widehat{m}_{i,L+1} = (1 - \alpha_i) \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k \overline{F}_{w_i, w_k}(\infty) \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad \widehat{m}_{L+1,L+1} = 1$$

и $\widehat{m}_{k,l} = 0$ для остальных пар k и l . Пусть $\widehat{Z}_j(t)$, $t \geq 0$, $j = 1, \dots, L+1$, есть число частиц типа j в момент t в новом процессе Беллмана–Харриса. Очевидно, распределения векторов $(\widehat{Z}_1(t), \dots, \widehat{Z}_L(t))$ и $(Z_1(t), \dots, Z_L(t))$ совпадают для каждого $t \geq 0$, если родительские частицы обоих процессов Беллмана–Харриса принадлежат одному и тому же типу. Более того, новый процесс учитывает даже частицы из $(L+1)$ -й группы частиц в КВП (см. раздел 1.3), которые не охватываются L -мерным процессом Беллмана–Харриса. Таким образом, для всех $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, N$ и $t \geq 0$ имеем $M_n(t; w_i) = \widehat{M}_n^{BH}(t; i)$, где

$$\widehat{M}_n^{BH}(t; k) := \mathbb{E}_k \widehat{Z}(t) (\widehat{Z}(t) - 1) \dots (\widehat{Z}(t) - n + 1), \quad k = 1, \dots, L+1,$$

и $\widehat{Z}(t) := \sum_{j=1}^{L+1} \widehat{Z}_j(t)$. Применяя теорему 1 из [46], гл.8, § 6, мы убеждаемся в том, что если $\mathbb{E} \xi_i^n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и любых $i = 1, \dots, N$, то функции $M_n(t; w_i)$ конечны для каждого $t \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, N$. Эта теорема также влечет, что функции $\widehat{M}_1^{BH}(t; k)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, L+1$, удовлетворяют следующей системе из $L+1$ уравнений восстановления

$$\widehat{M}_1^{BH}(t; k) = 1 - \widehat{G}_k(t) + \sum_{r=1}^{L+1} \widehat{m}_{k,r} \int_0^t \widehat{M}_1^{BH}(t-u; r) d\widehat{G}_k(u).$$

Уравнение под номером $L + 1$ есть просто $\widehat{M}_1^{BH}(t; L + 1) = 1, t \geq 0$. Подставляя это значение 1 и выражения для $\widehat{m}_{k,r}, r = 1, \dots, L + 1$, в первые L уравнений, приходим к новой системе из L уравнений восстановления

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1^{BH}(t; k) &= \sum_{r=1}^L m_{k,r} \int_0^t \widehat{M}_1^{BH}(t - u; r) dG_k(u) \\ &+ 1 - G_k(t) + \mathbb{I}\{k \in \{1, \dots, N\}\} (1 - \alpha_k) \left(1 - \sum_{j=1}^N w_j \overline{F}_{w_k, w_j}(\infty) \right) G_k(t) \end{aligned} \quad (1.52)$$

при $t \geq 0$ и $k = 1, \dots, L$. Нетрудно проверить, что в силу теоремы 1 из [46], гл.8, § 6, система из $L + 1$ уравнения, получающаяся из (1.48) в результате замены L на $L + 1$ и $m_n^{BH}(t; k, l)$ на $\widehat{M}_n^{BH}(t; k)$, справедлива при $n > 1, t \geq 0$ и $k = 1, \dots, L + 1$. Уравнение под номером $L + 1$ означает, что $\widehat{M}_n^{BH}(t; L + 1) = 0$. Подставляя его в первые L уравнений и упрощая их аналогично выводу (1.49), приходим к системе из L уравнений восстановления относительно функций $\widehat{M}_n^{BH}(t; k)$ при $n > 1, t \geq 0$ и $k = 1, \dots, L$ такой же, как (1.49), но с $\widehat{M}_n^{BH}(t; k)$ вместо $m_n^{BH}(t; k, l)$.

Шаг 7. Теперь докажем утверждение (1.42) для $x, y \in W$. Итак, предположим, что $\rho(D) > 1$. Вначале рассмотрим возвратный случай. Применяя теорему 2.1, пункт (iii), из [56] к (1.51), мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{M_1^{BH}(t; i)}{e^{\nu t}} &\rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(\nu)}{\nu \Delta'(\nu)} \left(1 - \alpha_j \check{G}_j(\nu) - (1 - \alpha_j) \check{G}_j(\nu) \sum_{k=1}^N w_k \check{\overline{F}}_{w_j, w_k}(\nu) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(\nu)}{\nu \Delta'(\nu)} \left(\delta_{j,k} - \delta_{j,k} \alpha_j f'_j(1) \check{G}_j(\nu) - (1 - \alpha_j) \check{G}_j(\nu) w_k \check{\overline{F}}_{w_j, w_k}(\nu) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \check{G}_j(\nu) \Delta_{j,i}(\nu)}{\nu \Delta'(\nu)} = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j \beta_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(\nu)}{\nu (\nu + \beta_j) \Delta'(\nu)} \end{aligned} \quad (1.53)$$

при $t \rightarrow \infty$ и $i = 1, \dots, N$. Здесь мы опираемся на лемму 2 и формулы (1.16)-(1.18), а также на разложение определителя по столбцу и очевидное равенство $\sum_{k=1}^N w_k \overline{F}_{w_j, w_k}(\infty) = 1$, справедливое в возвратном случае. Мы также учли, что $\Delta(\nu) = 0$, поскольку 1 является собственным значением матрицы $D(\nu)$. Соотношение (1.53) наряду с (1.28) приводит к желаемому утверждению (1.42), когда $n = 1$ и марковская цепь η возвратна. Невозвратный случай разбирается аналогично за исключением двух отличий. Первое состоит

в применении системы уравнений (1.52) вместо (1.51). Второе отличие заключается в том, что для невозвратной марковской цепи η строгое неравенство $\sum_{k=1}^N W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) < 1$ имеет место хотя бы для одного $j \in \{1, \dots, N\}$. Однако при выводе соотношения для $\widehat{M}_1^{BH}(t; i)$, аналогичного (1.53), разность между последней суммой и 1 компенсируется за счет дополнительного слагаемого в (1.52). Таким образом, при $n = 1$ утверждение (1.42) установлено и асимптотическое поведение функций $M_1(t; w_i)$, $i = 1, \dots, N$, в надкритическом КВП не зависит от того, является ли марковская цепь η возвратной или нет. Поскольку при $n > 1$ системы уравнений относительно соответственно $M_n^{BH}(t; k)$ и $\widehat{M}_n^{BH}(t; k)$ имеют такой же вид, как (1.49), асимптотическое поведение функции $M_n(t; w_i)$ в надкритическом КВП также не зависит от возвратности или невозвратности η . Более того, при $n > 1$ вывод формулы (1.42) для общего числа частиц почти дословно повторяет вывод (1.45) для локальных численностей частиц и по этой причине опускается. Заметим, что положительность функции $A_1(w_i)$ (а, следовательно, $A_n(w_i)$ при $n > 1$) для каждого $i = 1, \dots, N$ следует из уже доказанного соотношения (1.41).

Шаг 8. Далее перейдем к доказательству утверждения (1.44) для $x, y \in W$. Итак, рассмотрим случай $\rho(D) = 1$. Применяя теорему 2.1, пункт (v), из [56] к (1.52), получаем

$$\begin{aligned} t^{-1} \widehat{M}_1^{BH}(t; i) &\rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \alpha_j) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)} \left(1 - \sum_{k=1}^N W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) \quad (1.54) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)} (\delta_{j,k} - \delta_{j,k} \alpha_j f'_j(1) - (1 - \alpha_j) W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty)) \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)} = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta'(0)}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, N$. Здесь мы используем лемму 2, а также разложение определителя по столбцу и равенство $\Delta(0) = 0$, справедливое в силу предположения $\rho(D) = 1$. Соотношение (1.54) в сочетании с (1.34) влечет требуемое утверждение в (1.44), когда $n = 1$ и марковская цепь η невозвратна. Если марковская цепь η возвратна, соответствующее утверждение вытекает из теоремы 2.1, пункт (i), из [56] и наблюдения, заключающегося в том, что неинтегральный член в правой части (1.51) стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$, в то время как в (1.52) сходится к положительному пределу хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, N\}$. При

$n > 1$ вывод формулы (1.44) для общего числа частиц снова воспроизводит вывод (1.43) для локальных численностей частиц и по этой причине опускается. Отметим, что в силу (1.54) функция $B_1(w_i)$ (а, следовательно, и $B_n(w_i)$ при $n > 1$) строго положительна для каждого $i = 1, \dots, N$ тогда и только тогда, когда $\Delta'(0) < \infty$ и $\sum_{k=1}^N W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) < 1$ по крайней мере для одного $j \in \{1, \dots, N\}$.

Шаг 9. Наконец, установим (1.46) для случая $x, y \in W$. Тем самым предположим, что $\rho(D) < 1$. Применяя теорему 2.2, пункт (ii), из [57] к (1.52), мы видим, что

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1^{BH}(t; i) &\rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \alpha_j) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} \left(1 - \sum_{k=1}^N W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} (\delta_{j,k} - \delta_{j,k} \alpha_j f'_j(1) - (1 - \alpha_j) W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty)) \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)} = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (f'_j(1) - 1) \Delta_{j,i}(0)}{\Delta(0)}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.55)$$

при каждом $i = 1, \dots, N$. Здесь мы учитываем лемму 2, а также разложение определителя по столбцу и неравенство $\Delta(0) > 0$, верное в силу предположения $\rho(D) < 1$. Формулы (1.37) и (1.55) влекут требуемое утверждение (1.46), когда $n = 1$ и марковская цепь η невозвратна. Если марковская цепь η возвратна, то соответствующее соотношение следует из (1.51) и теоремы 2.2, пункт (ii), из [57]. Когда $n > 1$, эта теорема также приводит к (1.46) ввиду системы уравнений (1.49). Заметим, что в силу (1.55) функция $C_1(w_i)$ (а, следовательно, и $C_n(w_i)$ при $n > 1$) строго положительна для каждого $i = 1, \dots, N$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^N W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) < 1$ хотя бы для одного $j \in \{1, \dots, N\}$, т.е. когда марковская цепь η невозвратна.

Таким образом, теорема 4 полностью доказана для случая $x, y \in W$.

Случай 2. Теперь мы предполагаем, что либо $x \in \mathcal{S} \setminus W$, либо $y \in \mathcal{S} \setminus W$, либо $x, y \in \mathcal{S} \setminus W$. Основная идея оставшейся части доказательства состоит в следующем. Если $x \in \mathcal{S} \setminus W$ и $y \in W$, то мы пополняем множество катализаторов W элементом x . Наоборот, если $x \in W$, а $y \in \mathcal{S} \setminus W$, то дополним множество катализаторов W элементом y . Если $x \in \mathcal{S} \setminus W$ и $y = x$, то добавим x к множеству катализаторов W . Если же и x , и y принадлежат $\mathcal{S} \setminus W$ и, более того, $x \neq y$, то присоединим к множеству катализаторов W состояния x

и y . Далее мы можем использовать уже установленные результаты для КВП с $N+1$ или $N+2$ катализаторами. Итак, положим $w_{N+1} = x$, $W(x) := W \cup \{x\}$ и $W_i(x) := W(x) \setminus \{w_i\}$, $i = 1, \dots, N+1$. Пусть $D(x; \lambda) = (d_{i,j}(x; \lambda))_{i,j=1}^{N+1}$ есть матрица с элементами

$$d_{i,j}(x; \lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda)_{W_j(x)} \check{\check{F}}_{w_i, w_j}(\lambda), \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь $\alpha_{N+1} = 0$, $f'_{N+1}(1) = 0$ и $G_{N+1}(t) := 1 - e^{q(x,x)t}$, $t \geq 0$. Аналогично положим $w_{N+2} = y$, $W(x,y) := W(x) \cup \{y\}$ и $W_i(x,y) := W(x,y) \setminus \{w_i\}$, $i = 1, \dots, N+2$. Рассмотрим матрицу $D(x,y; \lambda) = (d_{i,j}(x,y; \lambda))_{i,j=1}^{N+2}$ с

$$d_{i,j}(x,y; \lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda)_{W_j(x,y)} \check{\check{F}}_{w_i, w_j}(\lambda)$$

при $\lambda \geq 0$. Здесь $\alpha_{N+2} = 0$, $f'_{N+2}(1) = 0$ и $G_{N+2}(t) := 1 - e^{q(y,y)t}$, $t \geq 0$. Наконец, обозначим $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{v}(x,y)$ единственные решения соответственно уравнений $\rho(D(x; \mathbf{v}(x))) = 1$ и $\rho(D(x,y; \mathbf{v}(x,y))) = 1$. Следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 1 и поэтому опускается, показывает, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(x,y)$.

Лемма 3. *Для каждого $\lambda \geq 0$ перроновы корни $\rho(D(\lambda))$, $\rho(D(x; \lambda))$ и $\rho(D(x,y; \lambda))$ одновременно больше 1, равны 1 или меньше 1.*

После применения установленной части теоремы 4 к КВП со множеством катализаторов $W(x)$ или $W(x,y)$ замечаем, что для завершения доказательства теоремы 4 требуется привести выражения вида $a_n(w_{N+1}, w_{N+2})$ к форме (1.27). Это может быть легко проделано с помощью следующего результата, доказательство которого проводится в том же ключе, что и доказательство леммы 2.

Лемма 4. *Для $x, y \in \mathcal{S} \setminus W$, $x \neq y$, $i, j = 1, \dots, N$ и $\lambda \geq 0$ справедливы равенства*

$$\det(I - D(x; \lambda)) = \Delta(\lambda) (1 - {}_W \check{F}_{x,x}(\lambda)), \quad (1.56)$$

$$\det(I - D(x,y; \lambda)) = \Delta(\lambda) (1 - {}_W \check{F}_{x,x}(\lambda)) (1 - {}_{W(x)} \check{F}_{y,y}(\lambda)), \quad (1.57)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(x; \lambda)) \right|_{\lambda=\mathbf{v}} = \Delta'(\mathbf{v}) (1 - {}_W \check{F}_{x,x}(\mathbf{v})), \quad (1.58)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \det(I - D(x,y; \lambda)) \right|_{\lambda=\mathbf{v}} = \Delta'(\mathbf{v}) (1 - {}_W \check{F}_{x,x}(\mathbf{v})) (1 - {}_{W(x)} \check{F}_{y,y}(\mathbf{v})), \quad (1.59)$$

$$(-1)^{i+j} \det(I - D(x; \lambda))_{j,i} = \Delta_{j,i}(\lambda) (1 - {}_W \check{F}_{x,x}(\lambda)), \quad (1.60)$$

$$\frac{(-1)^{j+N+1} \det (I - D(x; \lambda))_{j, N+1}}{1 - {}_W\check{F}_{x,x}(\lambda)} = \sum_{i=1}^N w_i \check{F}_{x,w_i}(\lambda) \Delta_{j,i}(\lambda), \quad (1.61)$$

$$(-1)^{i+N+1} \det (I - D(x; \lambda))_{N+1,i} = \sum_{j=1}^N \Delta_{j,i}(\lambda) (1 - \alpha_j) \check{G}_j(\lambda) {}_W\check{F}_{w_j,x}(\lambda), \quad (1.62)$$

$$\det (I - D(x; \lambda))_{N+1, N+1} = \Delta(\lambda) + \sum_{i,j=1}^N w_i \check{F}_{x,w_i}(\lambda) \Delta_{j,i}(\lambda) (1 - \alpha_j) \check{G}_j(\lambda) {}_W\check{F}_{w_j,x}(\lambda), \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\det(I - D(x,y; \lambda))_{N+2, N+1} (1 - {}_W\check{F}_{y,y}(\lambda))}{(1 - {}_W\check{F}_{x,x}(\lambda)) (1 - {}_W(x)\check{F}_{y,y}(\lambda))} \\ &= \Delta(\lambda) {}_W\check{F}_{x,y}(\lambda) + \sum_{i,j=1}^N w_i \check{F}_{x,w_i}(\lambda) \Delta_{j,i}(\lambda) (1 - \alpha_j) \check{G}_j(\lambda) {}_W\check{F}_{w_j,y}(\lambda), \end{aligned} \quad (1.64)$$

где $\nu \geq 0$ является единственным решением уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$, существующим, когда $\rho(D) \geq 1$. Если $\nu = 0$, то $\frac{d}{d\lambda} \det (I - D(x; \lambda)) \Big|_{\lambda=\nu}$ означает правую производную в 0.

Теорема 4 полностью доказана. \square

1.5 Важные частные случаи

В разделе 1.4 с помощью теоремы 4 установлено, что мальтусовский параметр ν играет ключевую роль в асимптотическом поведении как общих, так и локальных численностей частиц в надкритическом КВП. Прежде чем рассмотреть некоторые частные случаи в настоящем разделе, обсудим альтернативный способ нахождения ν . С этой целью введем матрицы $\tilde{D}(\lambda) = \left(\tilde{d}_{i,j}(\lambda) \right)_{i,j=1}^N$ и $\hat{D}(\lambda) = \left(\hat{d}_{i,j}(\lambda) \right)_{i,j=1}^N$ с соответствующими элементами

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i,j}(\lambda) &:= \left(\alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) - 1 + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda) \frac{\lambda - q(w_i, w_i)}{-q(w_i, w_i)} \right) \check{F}_{w_i, w_j}(\lambda) \\ &+ \delta_{i,j} (\alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) - 1) (1 - \check{F}_{w_i, w_i}(\lambda)), \quad \lambda \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{i,j}(\lambda) &:= \left(\alpha_i f_i'(1) \check{G}_i(\lambda) - 1 + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda) \frac{\lambda - q(w_i, w_i)}{-q(w_i, w_i)} \right) G_\lambda(w_i, w_j) \\ &+ \delta_{i,j} \frac{1 - \alpha_i}{q(w_i, w_i)} \check{G}_i(\lambda), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Здесь $G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; x, y) dt$, $\lambda > 0$, есть преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t; x, y)$, $x, y \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$, марковской цепи η . В отличие от раздела 1.1, далее мы используем обозначения для переходных вероятностей, принятые в теории ВСБ (см., например, [99]). Заметим, что функция $G_0(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} G_\lambda(x, y)$ называется *функцией Грина* и является конечной тогда и только тогда, когда марковская цепь η невозвратна (см., например, теорему 4 и следствие 2 в [35], гл.2, § 10). Напомним также, что согласно теореме 3 и соотношению (4) из [35], гл.2, § 12, имеем

$$\check{F}_{w_i, w_j}(\lambda) = \frac{G_\lambda(w_i, w_j)}{G_\lambda(w_j, w_j)}, \quad \check{F}_{w_i, w_i}(\lambda) = 1 - \frac{1}{(\lambda - q(w_i, w_i)) G_\lambda(w_i, w_i)} \quad (1.65)$$

для любых $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$ и $\lambda > 0$.

Из леммы 1 и определения мальтусовского параметра в разделе 1.4 следует, что параметр ν может быть найден как наибольшее число λ , удовлетворяющее соотношению $\det(D(\lambda) - I) = 0$. Следующая лемма позволяет найти ν как наибольшее число λ , являющееся решением уравнения $\det \widetilde{D}(\lambda) = 0$ или равносильного уравнения $\det \widehat{D}(\lambda) = 0$. Заметим, что элементы матрицы $D(\lambda)$ выражаются через преобразования Лапласа времен достижения *с запретами* во множествах W_i , $i = 1, \dots, N$, в то время как элементы матрицы $\widetilde{D}(\lambda)$ представлены в терминах преобразований Лапласа времен достижения *без запретов*. Наконец, элементы матрицы $\widehat{D}(\lambda)$ вовлекают преобразования Лапласа только переходных вероятностей.

Лемма 5. *Для любого $\lambda > 0$ имеем $\det(D(\lambda) - I) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det \widetilde{D}(\lambda) = 0$ или, эквивалентно, когда $\det \widehat{D}(\lambda) = 0$. Более того, эти соотношения справедливы даже при $\lambda = 0$, если цепь η невозвратна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем матрицы $\widetilde{R}(\lambda) = (\widetilde{r}_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$ и $\widehat{R}(\lambda) = (\widehat{r}_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$, $\lambda > 0$, с соответствующими элементами $\widetilde{r}_{i,j}(\lambda) := \delta_{i,j} + (1 - \delta_{i,j}) \check{F}_{w_i, w_j}(\lambda)$ и $\widehat{r}_{i,j}(\lambda) := G_\lambda(w_i, w_j)$. Согласно формуле (1.65) j -й столбец ($1 \leq j \leq N$) матрицы $\widehat{R}(\lambda)$ получается из j -го столбца матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$ в результате умножения его на $G_\lambda(w_j, w_j)$, где $G_\lambda(w_i, w_j) > 0$ в силу неразложимости η . Следовательно,

$\det \tilde{R}(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det \hat{R}(\lambda) = 0$ для любого $\lambda > 0$. Покажем, что $\det \hat{R}(\lambda) \neq 0$, если $\lambda > 0$. Аналогично доказательству теоремы 8 из [35], гл.2, § 11, можно вывести, что

$$F_{w_i, w_j}(t) = W_j F_{w_i, w_j}(t) + \sum_{k=1, k \neq j}^N \int_0^t W_k F_{w_i, w_k}(t-u) dF_{w_k, w_j}(u) \quad (1.66)$$

для всех $i, j = 1, \dots, N$. Заметим, что последнее соотношение имеет естественную интерпретацию. А именно, путь марковской цепи из w_i в w_j может либо избежать множества W_j , либо может пройти через некоторый элемент из W_j и потом уже достичь w_j . Применяя преобразование Лапласа–Стилтьеса к (1.66), получаем

$$\check{F}_{w_i, w_j}(\lambda) = W_j \check{F}_{w_i, w_j}(\lambda) + \sum_{k=1, k \neq j}^N W_k \check{F}_{w_i, w_k}(\lambda) \check{F}_{w_k, w_j}(\lambda). \quad (1.67)$$

Умножая каждую часть равенства (1.67) на $G_\lambda(w_j, w_j)$ и учитывая (1.65), мы видим, что

$$G_\lambda(w_i, w_j) - \frac{\delta_{i,j}}{\lambda - q(w_i, w_i)} = \sum_{k=1}^N W_k \check{F}_{w_i, w_k}(\lambda) G_\lambda(w_k, w_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Перепишем эти тождества в следующем матричном виде:

$$\hat{R}(\lambda) - T(\lambda) = U(\lambda) \hat{R}(\lambda) \quad \text{или, эквивалентно,} \quad \hat{R}(\lambda) (I - U(\lambda)) = T(\lambda),$$

где

$$T(\lambda) := \left(\delta_{i,j} (\lambda - q(w_i, w_i))^{-1} \right)_{i,j=1}^N, \quad U(\lambda) := \left(W_j \check{F}_{w_i, w_j}(\lambda) \right)_{i,j=1}^N, \quad \lambda > 0.$$

Отсюда заключаем, что $\det \hat{R}(\lambda) \neq 0$ для каждого $\lambda > 0$, поскольку определитель $\det T(\lambda)$ строго положителен.

Из (1.67) следует, что $(D(\lambda) - I) \tilde{R}(\lambda) = \tilde{D}(\lambda)$. Рассматривая определители матриц в левой и правой частях последнего равенства, приходим к первому утверждению леммы 5. Ее второе утверждение вытекает из представления $\tilde{d}_{i,j}(\lambda) G_\lambda(w_j, w_j) = \hat{d}_{i,j}(\lambda)$, справедливого для всех $\lambda > 0$ и $i, j = 1, \dots, N$ в силу (1.65).

Все вышеприведенные рассуждения остаются верными даже при $\lambda = 0$, если марковская цепь η невозвратна. Таким образом, лемма 5 полностью доказана. \square

Рассмотрим некоторые применения наших результатов к моделям, изучавшимся ранее разными исследователями.

Пример 1. Сосредоточимся на КВСБ по \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, предложенном в [33]. Эта модель является частным случаем КВП, если мы допустим в качестве η симметричное и пространственно-однородное случайное блуждание по \mathbb{Z}^d с конечной дисперсией скачков, а также положим $N = 1$, $w_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 1$ и $f_1(\cdot) = f(\cdot)$. Тогда мы выводим то же условие критичности, которое использовалось в [16], т.е. $D = 1$ или, эквивалентно,

$$\alpha f'(1) + (1 - \alpha) (1 + q(\mathbf{0}, \mathbf{0})^{-1} G_0^{-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = 1.$$

Для возвратной марковской цепи η , $G_0^{-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ полагается равным 0. Применяя теорему 4 к КВСБ по \mathbb{Z}^d , приходим к теореме 4.1 и теореме 4.2 из [99], а также некоторым утверждениям теоремы 5 из [16] и теоремы 1 из [45].

Пример 2. Рассмотрим каталитический ветвящийся процесс с одним катализатором (расположенным, скажем, в некоторой точке $w \in \mathcal{S}$), изучавшийся в [34]. Здесь перемещение частиц управляется неразложимой марковской цепью η . Тем самым, такая постановка задачи менее ограничительна, чем в *Примере 1*. Как показано в [34], асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц зависит от того, будет ли среднее число потомков, производимых частицей в месте нахождения катализатора, меньше, равно или больше $G_0^{-1}(w, w) + 1$, а также зависит от возвратности/невозвратности η . Мы приходим к той же классификации, полагая $N = 1$, $w_1 = w$, $\alpha_1 = (1 - q(w, w))^{-1}$, $\beta_1 = 1 - q(w, w)$ и $f'_1(1) = m$ в нашем КВП. Тогда в силу (1.65) и очевидной формулы $F_{w,w}(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \check{F}_{w,w}(\lambda)$ значение $sign(D - 1)$ совпадает с $sign(m - G_0^{-1}(w, w) - 1)$. Подчеркнем, что в отличие от [34] мы не предполагаем существование всех моментов числа потомков, т.е. конечности $f_1^{(k)}(1)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Некоторые утверждения теоремы 4 в случае КВП с одним катализатором сильнее, чем соответствующие утверждения теоремы 1 из [34] (например, стоит сравнить соотношения (1.45) и (1.46) в нашей теореме 4 с пунктом iii)а) в теореме 1 из [34]). Однако часть утверждений теоремы 1 из [34] не охватывается нашей теоремой 4, поскольку они вовлекают асимптотические оценки для моментов численностей частиц в терминах локальных времен уровня w марковской цепи η . При этом авторы статьи [34] не обсуждают асимптотическое поведение таких локальных времен.

Пример 3. Сосредоточимся на ВСБ по \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, с несколькими источниками ветвления, исследованном в [55]. Эта модель является частным случаем КВП таким, что η представляет собой симметричное и пространственно-однородное случайное блуждание по \mathbb{Z}^d с конечной дисперсией скачков, причем симметрия случайного блуждания может нарушаться только в конечном множестве точек из \mathbb{Z}^d . Как установлено в [55], скорость экспоненциального роста численностей частиц является наибольшим положительным числом λ , удовлетворяющим уравнению $\det \widehat{D}(\lambda) = 0$ (что согласуется с нашей леммой 5). Однако необходимые и достаточные условия существования этого положительного решения λ не были найдены, как отмечается в Заключение статьи [55]. Стоит отметить, что такое необходимое и достаточное условие приводится в нашей работе и в силу леммы 5 и теоремы 4 состоит в том, что $\rho(D) > 1$, т.е. в наших терминах заключается в надкритичности режима КВП.

Завершая раздел 1.5, хотелось бы отметить, что наш подход сочетания техники времен достижения с запретом и аппарата вспомогательных многотипных процессов Беллмана–Харриса позволяет получить и обосновать классификацию КВП с произвольным конечным множеством катализаторов. Обсуждаемые результаты диссертации справедливы при минимальных ограничениях, налагаемых на характер перемещения и размножения частиц. Поэтому эти результаты обобщают ряд предшествующих работ на близкие темы. Развитый подход может быть использован в последующем изучении других характеристик КВП.

1.6 Предельные теоремы

Чтобы сформулировать основные результаты раздела 1.6, введем дополнительные обозначения. Для $j, k = 1, \dots, N$ и $t \geq 0$ положим

$$G_{j,k}(t) := \beta_j \int_0^t w_k \overline{F}_{w_j, w_k}(t-u) e^{-\beta_j u} du. \quad (1.68)$$

Напомним, что в разделе 1.3 была введена матричная функция $D(\lambda)$, которая представляет собой неразложимую матрицу размера $N \times N$ при каждом $\lambda \geq 0$. А именно, $D(\lambda) = (d_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$, где $d_{i,j}(\lambda) = \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda) w_j \check{\overline{F}}_{w_i, w_j}(\lambda)$. Согласно определению 1 в разделе 1.3 КВП называется надкритическим, если перронов корень $\rho(D(0))$ матрицы $D(0)$ превосходит

единицу. Тогда в силу монотонности всех элементов матричной функции $D(\cdot)$ существует решение $\nu > 0$ уравнения $\rho(D(\lambda)) = 1$. Как показывает теорема 4 в разделе 1.4, именно это положительное число ν задает скорость экспоненциального роста средних общих и локальных численностей частиц (в литературе, посвященной популяционной динамике и ветвящимся процессам, она традиционно называется мальтусовским параметром). Точнее говоря, $E_x \mu(t) \sim A(x)e^{\nu t}$ и $E_x \mu(t; y) \sim a(x, y)e^{\nu t}$ при $t \rightarrow \infty$, где индекс $x \in \mathcal{S}$ обозначает стартовую точку КВП. Явные формулы для функций $A(\cdot)$ и $a(\cdot, \cdot)$ приведены в разделе 1.4.

Теорема 5 посвящена решению задачи о нахождении вероятности глобального вырождения $q(x) := P_x(\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_x(\mu(t) = 0)$, $x \in \mathcal{S}$, в модели КВП.

Теорема 5. *Для вероятности глобального вырождения $q(x)$ при $x \in \mathcal{S} \setminus W$ справедливо представление*

$$q(x) = \sum_{k=1}^N w_k F_{x, w_k}(\infty) q(w_k), \quad (1.69)$$

где величины $q(w_j)$, $j = 1, \dots, N$, удовлетворяют следующей системе уравнений

$$q(w_j) = \alpha_j f_j(q(w_j)) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N w_k F_{w_j, w_k}(\infty) q(w_k). \quad (1.70)$$

При этом вектор $(q(w_1), \dots, q(w_N))$ является покомпонентно наименьшим корнем системы уравнений (1.70) в кубе $[0, 1]^N$. Более того, если марковская цепь η возвратна, то $q(x) = 1$, $x \in \mathcal{S}$, или $q(x) < 1$, $x \in \mathcal{S}$, соответственно при $\rho(D(0)) \leq 1$ или $\rho(D(0)) > 1$. Если же марковская цепь η невозвратна, то $q(x) < 1$ при всех $x \in \mathcal{S}$.

Вероятности глобального вырождения $q(x)$ можно противопоставить вероятность локального вырождения $Q(x, y) = P_x(\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu(t; y) = 0)$ при $x, y \in \mathcal{S}$. Следующая теорема показывает, что, на самом деле, функция $Q(x, y)$ не зависит от переменной y .

Теорема 6. *Верно равенство $Q(x, y) = Q(x)$ для любого $y \in \mathcal{S}$, где функция $Q(x)$ при $x \in \mathcal{S} \setminus W$ имеет вид*

$$Q(x) = \sum_{k=1}^N w_k F_{x, w_k}(\infty) Q(w_k) + 1 - \sum_{k=1}^N w_k F_{x, w_k}(\infty), \quad (1.71)$$

а величины $Q(w_j)$, $j = 1, \dots, N$, являются наименьшим решением системы уравнений

$$Q(w_j) = \alpha_j f_j(Q(w_j)) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N W_k F_{w_j, w_k}(\infty) Q(w_k) + (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N W_k F_{w_j, w_k}(\infty) \right) \quad (1.72)$$

в кубе $[0, 1]^N$. Более того, если $\rho(D(0)) \leq 1$, то $Q(x) = 1$ при всех $x \in \mathcal{S}$. Если же $\rho(D(0)) > 1$, то $Q(x) < 1$ для каждого $x \in \mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 5 и 6. Благодаря построенным в разделах 1.3 и 1.4 вспомогательным процессам Беллмана–Харриса доказательства теорем 5 и 6 сводятся к применению теорем 4 и 5 из [46], глава 5, §1, к этим процессам. \square

Ясно, что $0 \leq q(x) \leq Q(x) \leq 1$, $x \in \mathcal{S}$. Из явного вида соотношений (1.69)–(1.72) заключаем, что если выполнено строгое неравенство $\sum_{k=1}^N W_k F_{x, w_k}(\infty) < 1$ хотя бы для одного $x \in \mathcal{S}$, т.е. марковская цепь η невозвратна, то $q(x) < Q(x)$ для всех $x \in \mathcal{S}$. В противном случае, т.е. если марковская цепь η возвратна, соотношения для $q(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ совпадают, а, следовательно, $q(x) = Q(x)$ для всех x . В терминах статьи [129] вышесказанное означает, что для невозвратной марковской цепи η и при $\rho(D(0)) \leq 1$ мы имеем дело с фазой исключительно глобального выживания КВП, а в случае возвратной марковской цепи η и $\rho(D(0)) > 1$ наблюдается сильное локальное выживание КВП.

Теперь перейдем к рассмотрению вопроса о скорости роста численности популяции в случае глобального и локального выживания, т.е. при $\rho(D(0)) > 1$. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ – правый собственный вектор матрицы $D(\mathbf{v})$, соответствующий перроннову корню $\rho(D(\mathbf{v}))$, равному единице, причем $u_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, и $\sum_{k=1}^N u_k = 1$. Следует отметить, что в силу теоремы Перрона–Фробениуса (см., например, [46], глава IV, §5) такой собственный вектор всегда можно найти, поскольку матрица $D(\mathbf{v})$ неразложима согласно лемме 1 из раздела 1.3. Напомним определение матричной функции $D(x; \lambda)$, $x \notin W$, $\lambda \geq 0$, введенной в разделе 1.4 при доказательстве теоремы 4, случай 2. При $x \notin W$ положим $w_{N+1} = x$, $W(x) := W \cup \{x\}$ и $W_i(x) := W(x) \setminus \{w_i\}$, $i = 1, \dots, N+1$. Тогда матрица $D(x; \lambda) = (d_{i,j}(x; \lambda))_{i,j=1}^{N+1}$ имеет элементы

$$d_{i,j}(x; \lambda) := \delta_{i,j} \alpha_i f'_i(1) \check{G}_i(\lambda) + (1 - \alpha_i) \check{G}_i(\lambda)_{W_j(x)} \check{F}_{w_i, w_j}(\lambda), \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь $\alpha_{N+1} = 0$, $f'_{N+1}(1) = 0$ и $G_{N+1}(t) := 1 - e^{q(x,x)t}$, $t \geq 0$. В силу леммы 4 из раздела 1.4 матрица $D(x; \lambda)$ неразложима и $\rho(D(x; \nu)) = 1$. Определим $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_{N+1}(x))$ как правый собственный вектор матрицы $D(x; \nu)$, отвечающий перрону корню $\rho(D(x; \nu))$, равному единице, такой, что $u_k(x) > 0$, $k = 1, \dots, N+1$, и $\sum_{k=1}^N u_k(x) = 1$. Заметим, что, опираясь на доказательство леммы 4 в разделе 1.4, нетрудно проверить равенства $u_i(x) = u_i$ при всех $i = 1, \dots, N$ и $x \in \mathcal{S} \setminus W$. Положим $c(x) := u_k^{-1}$, если $x = w_k$ для некоторого $k = 1, \dots, N$, и $c(x) := u_{N+1}^{-1}(x)$, если $x \in \mathcal{S} \setminus W$. Пусть также символы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ обозначают векторы, у которых все компоненты являются соответственно нулями или единицами, а размерность векторов ясна из контекста.

В разделе 1.6 мы имеем дело с тремя видами сходимости случайных величин – почти наверное, по вероятности и по распределению, которые соответственно обозначаются $\xrightarrow{n.н.}$, \xrightarrow{P} и \xrightarrow{d} . Теорема 7 описывает сильную сходимость векторов нормированных общих и локальных численностей частиц в КВП, когда время t растет к бесконечности. При доказательстве теорем 7 и 8 используются результаты об асимптотическом поведении нормирующих средних, полученные в теореме 4 из раздела 1.4.

Теорема 7. *Пусть надкритический КВП стартует в точке $x \in \mathcal{S}$. Предположим, что элементы матрицы Q равномерно ограничены, т.е. для всех $z_1, z_2 \in \mathcal{S}$ и некоторой постоянной $C > 0$ верно $|q(z_1, z_2)| < C$. Пусть также $E\xi_k^2 < \infty$ для каждого $k = 1, \dots, N$. Тогда существует невырожденная случайная величина ζ такая, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{S}$ имеет место соотношение*

$$\left(\frac{\mu(t)}{E_x \mu(t)}, \frac{\mu(t; y_1)}{E_x \mu(t; y_1)}, \dots, \frac{\mu(t; y_n)}{E_x \mu(t; y_n)} \right) \xrightarrow{n.н.} c(x) \zeta \mathbf{1}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова сведем доказательство теоремы 7 к результатам, ранее установленным для многотипных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса. Действительно, если марковская цепь η возвратна, то утверждение теоремы 7 вытекает из построения вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана–Харриса в разделе 1.3, применения к нему теоремы 4.1 из [57] и учета того факта, что при выполнении условий теоремы 7 распределения времен продолжительности жизни частиц разных типов во вспомогательном процессе Беллмана–Харриса абсолютно-непрерывны и имеют ограниченные плотности. Последнее наблюдение справедливо в силу рассуждений, проведенных в конце раздела 1.1.

Если же марковская цепь η невозвратна, то следует применить схему доказательства теоремы 4.1 из [57] к вспомогательному процессу Беллмана–Харриса с финальным типом частиц, введенному в разделе 1.4 при рассмотрении случая 1 (шаг 6) теоремы 4. \square

Теперь ослабим ограничения на изучаемый процесс. Положим, как обычно, выражение $s \ln s$ при $s = 0$ равным 0.

Теорема 8. Пусть надкритический КВП стартует в точке $x \in \mathcal{S}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{S}$ справедлива следующая альтернатива.

1. Если $E\xi_k \ln \xi_k = \infty$ для некоторого $k \in \{1, \dots, N\}$, то

$$\left(\frac{\mu(t)}{E_x \mu(t)}, \frac{\mu(t; y_1)}{E_x \mu(t; y_1)}, \dots, \frac{\mu(t; y_n)}{E_x \mu(t; y_n)} \right) \xrightarrow{P} \mathbf{0}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.74)$$

2. Если $E\xi_k \ln \xi_k < \infty$ для всех $k = 1, \dots, N$, то

$$\left(\frac{\mu(t)}{E_x \mu(t)}, \frac{\mu(t; y_1)}{E_x \mu(t; y_1)}, \dots, \frac{\mu(t; y_n)}{E_x \mu(t; y_n)} \right) \xrightarrow{d} c(x)\zeta \mathbf{1}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.75)$$

Здесь ζ – невырожденная случайная величина со следующими свойствами.

(i) $E_x \zeta = c(x)^{-1}$.

(ii) $P_x(\zeta = 0) = P_x(\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu(t; y) = 0)$ для любого $y \in \mathcal{S}$.

(iii) Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda; x) := E_x e^{-\lambda \zeta}$, $\lambda \geq 0$, $x \in \mathcal{S}$, случайной величины ζ при $x \in \mathcal{S} \setminus W$ имеет вид

$$\varphi(\lambda; x) = \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \varphi(\lambda e^{-\nu u}; w_k) d_{W_k} F_{x, w_k}(u) + 1 - \sum_{k=1}^N W_k F_{x, w_k}(\infty), \quad (1.76)$$

где функции $\varphi(\cdot; w_j)$, $j = 1, \dots, N$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda; w_j) &= \alpha_j \int_0^\infty f_j(\varphi(\lambda e^{-\nu u}; w_j)) dG_j(u) \\ &+ (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \varphi(\lambda e^{-\nu u}; w_k) dG_{j,k}(u) \\ &+ (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N W_k \bar{F}_{w_j, w_k}(\infty) \right). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Система уравнений (1.76) имеет единственное решение $\varphi(\cdot; w_j)$, $j = 1, \dots, N$, в функциональном классе \mathcal{C}_θ для каждого $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$,

$\theta_i > 0, i = 1, \dots, N$. Здесь класс функций

$$\mathcal{C}_\theta := \left\{ (\varphi(\cdot; w_1), \dots, \varphi(\cdot; w_N)) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi(\lambda; w_i)}{\lambda} = \theta_i, i = 1, \dots, N \right\}, \quad (1.78)$$

где $\varphi(\cdot; w_i)$ отображает $[0, \infty)$ в $(0, 1]$, $\varphi(0; w_i) = 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $\theta_i > 0, i = 1, \dots, N$. где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $\theta_i > 0, i = 1, \dots, N$.

(iv) Условное распределение ζ при условии старта КВП в точке $x \in \mathcal{S}$ является абсолютно непрерывным на положительной полуоси и имеет непрерывную функцию плотности.

Заметим, что в соотношении (1.75) теоремы 8 существенна сходимость именно векторов, в то время как в формулах (1.73) и (1.74) сходимость векторов равносильна сходимости их компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Если марковская цепь η возвратна, то теорема 8 доказывается с помощью теоремы 1.1 из [116], примененной к построенному в разделе 1.3 вспомогательному процессу Беллмана–Харриса. Однако если марковская цепь η невозвратна, то утверждение теоремы 8 устанавливается применением схемы доказательства теоремы 1.1 из [116] к процессу Беллмана–Харриса с финальным типом частиц, введенному при доказательстве, относящемуся к случаю 1 (шаг 6) теоремы 4 в разделе 1.4.

Отдельного рассмотрения требует лишь доказательство единственности решения системы уравнений (1.77) в пункте (iii) утверждения теоремы 8. В случае $N = 1$ и стартовой точки $x = w_1$ это доказательство в основном повторяет доказательства теорем 1, 2 и 3 из работы [115], в то время как в случае нескольких катализаторов и $x \in W$ доказательство единственности решения системы уравнений (1.77) следует аргументам обобщений указанных теорем в статье [116], а именно, обоснованию теорем 2.1, 2.2 и 2.3. При доказательстве мы существенно опираемся на тот факт, что перронов корень матрицы $D(0)$ больше 1 в силу рассматриваемого надкритического режима (см. определение 1 в разделе 1.3). Более того, мы вовлекаем определение мальтусовского параметра ν и теорию Фробениуса для неразложимых неотрицательных матриц. Поскольку основные идеи, на которых базируется доказательство единственности решения системы уравнений (1.77) из пункта (iii), используются ниже при доказательстве леммы 22, остальные детали этого доказательства могут быть опущены. \square

Глава 2. Геометрические аспекты распространения фронта популяции в каталитических ветвящихся случайных блужданиях

Результаты главы 2 опубликованы в статьях автора [160–164,166,167].

2.1 Описание каталитического ветвящегося случайного блуждания по \mathbb{Z}^d

Каталитическое ветвящееся случайное блуждание (КВСБ) по \mathbb{Z}^d является частным случаем изученного в главе 1 каталитического ветвящегося процесса (КВП), в котором пространство состояний \mathcal{S} марковской цепи η совпадает с целочисленной решеткой \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, а сама марковская цепь η представляет собой случайное блуждание $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем по этой решетке. Однако для удобства изложения далее приведем отдельное описание КВСБ по \mathbb{Z}^d .

В начальный момент времени $t = 0$ существует единственная частица, которая движется по \mathbb{Z}^d согласно марковской цепи $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем, порожденной инфинитезимальной матрицей $Q = (q(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d}$. Когда эта частица попадает в конечное множество катализаторов $W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\} \subset \mathbb{Z}^d$, скажем, в точке \mathbf{w}_k , она проводит там случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\beta_k > 0$. Затем частица либо производит потомков, либо покидает точку \mathbf{w}_k соответственно с вероятностями α_k и $1 - \alpha_k$ ($0 \leq \alpha_k < 1$). Если частица ветвится (в точке \mathbf{w}_k), она погибает и непосредственно перед гибелью производит случайное неотрицательное целое число ξ_k потомков, расположенных в той же точке \mathbf{w}_k . Если частица покидает \mathbf{w}_k , она переходит в точку $\mathbf{y} \neq \mathbf{w}_k$ с вероятностью $-(1 - \alpha_k)q(\mathbf{w}_k, \mathbf{y})q(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k)^{-1}$ и продолжает свое движение, управляемое марковской цепью \mathbf{S} . Предполагается, что новорожденные частицы ведут себя как независимые копии своих родителей.

Предполагаем, что марковская цепь \mathbf{S} неприводима, а матрица Q консервативна (т.е. $\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, где $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in (-\infty, 0)$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$). Обозначим $f_k(s) := \mathbb{E}s^{\xi_k}$, $s \in [0, 1]$, производящую функ-

цию числа потомков частицы в k -м катализаторе, $k = 1, \dots, N$. Мы используем стандартное предположение о существовании конечной производной $f'_k(1)$, т.е. $m_k := E\xi_k < \infty$ для любых $k = 1, \dots, N$. Пусть $\mu(t)$ – общее количество частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$, а локальные численности частиц $\mu(t; \mathbf{y})$ – это количества частиц, расположенных в отдельных точках $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t .

В то время как в статье [18] авторы рассматривали КВСБ с дискретным временем, нас интересует процесс с непрерывным временем, поскольку в последнем случае мы можем напрямую использовать результаты главы 1. Стоит отметить, что при условиях дискретного и непрерывного времени большинство асимптотических результатов оказываются одинаковыми с точностью до констант. Более того, в отличие от статьи [18], в главе 2 мы рассматриваем вариант КВСБ, в котором есть дополнительный параметр α_k , определяющий соотношение между “ветвлением” и “блужданием” частицы, расположенной в каждой точке катализатора \mathbf{w}_k . Однако, как показано, например, в работах [99] и [45], введение дополнительных параметров не влияет на асимптотические результаты для КВСБ с точностью до констант. Наконец, тогда как в статье [18], лежащее в основе случайное блуждание по \mathbb{Z} , построено как совокупная сумма независимых одинаково распределенных случайных величин, аналогичным образом мы предполагаем, что лежащее в основе случайное блуждание (т.е. наше КВСБ без ветвления) является однородным в пространстве. Другими словами, считаем выполненным следующее условие

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}) = q(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.1)$$

Таким образом, наше исследование здесь можно рассматривать как продолжение анализа распространения КВСБ, начатого в [18] для одномерного случая.

2.2 Применение результатов главы 1 к КВСБ по \mathbb{Z}^d

Временно забудем, что в некоторых точках \mathbb{Z}^d есть катализаторы, и рассмотрим только движение частицы по \mathbb{Z}^d в соответствии с марковской цепью \mathbf{S} с генератором Q и начальной точкой \mathbf{x} . Условия, налагаемые на элементы $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, позволяют нам использовать явную конструкцию случайного

блуждания по \mathbb{Z}^d с генератором Q (см., например, теорему 1.2 в [130], гл. 9, раздел 1). Согласно этой конструкции \mathbf{S} является регулярным скачкообразным процессом с непрерывными справа траекториями и для времен перехода процесса $\tau^{(0)} := 0$ и

$$\tau^{(n)} := \inf \left\{ t \geq \tau^{(n-1)} : \mathbf{S}(t) \neq \mathbf{S}(\tau^{(n-1)}) \right\}, \quad n \geq 1,$$

выполняется следующее утверждение. Случайные величины $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ являются независимыми, и каждая из них имеет экспоненциальное распределение с параметром q . Обозначим $\Pi = \{\Pi(t), t \geq 0\}$ пуассоновский процесс, построенный с помощью случайной последовательности $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. Π – это пуассоновский процесс интенсивности q . Пусть \mathbf{Y}^i – значение i -го скачка случайного блуждания \mathbf{S} ($i = 1, 2, \dots$). В силу этой теоремы 1.2 в [130], гл. 9, раздел 1, случайные величины $\mathbf{Y}^1, \mathbf{Y}^2, \dots$ являются независимыми и одинаково распределенными, имеют распределение $P(\mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}) = q(\mathbf{0}, \mathbf{y})/q$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, и не зависят от последовательности $\{\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$. Другими словами, справедлива формула

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{\Pi(t)} \mathbf{Y}^i \quad (2.2)$$

(как обычно, $\sum_{i \in \emptyset} \mathbf{Y}^i = 0$), где \mathbf{x} – начальное состояние марковской цепи \mathbf{S} . Благодаря этому равенству нетрудно показать, что \mathbf{S} является процессом с независимыми приращениями. В дальнейшем мы рассматриваем версию процесса \mathbf{S} , построенную таким образом и называемую также сложным пуассоновским процессом.

В формуле (1.19) в разделе 1.3 была введена матричная функция $D(\lambda)$ со значениями во множестве неразложимых матриц размером $N \times N$ для каждого $\lambda \geq 0$. Согласно определению 1 в разделе 1.3 КВСБ называется *надкритическим*, если перронов корень $\rho(D(0))$ матрицы $D(0)$ больше 1. Тогда ввиду монотонности всех элементов матричной функции $D(\cdot)$ существует решение $\nu > 0$ уравнения $\rho(D(\lambda)) = 1$. Как показывает теорема 4 в разделе 1.4, именно это положительное число ν определяет скорость экспоненциального роста средних общих и локальных численностей частиц. Точнее, $E_{\mathbf{x}} \mu(t) \sim A(\mathbf{x}) e^{\nu t}$ и $E_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y}) \sim a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{\nu t}$ при $t \rightarrow \infty$ (явные формулы для функций $A(\cdot)$ и $a(\cdot, \cdot)$ приведены в разделе 1.4. Именно эти средние играют роль нормирующих функций

в теоремах 7 и 8 в разделе 1.6, посвященных сильной и слабой сходимости векторов общих и локальных численностей частиц в надкритическом КВСБ при неограниченном росте времени. В данной главе мы сосредоточимся только на надкритическом КВСБ по \mathbb{Z}^d .

Пусть $Z(t) \subset \mathbb{Z}^d$ – (случайное) множество частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$. Для частицы $v \in Z(t)$ обозначим ее положение в момент времени t вектором $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t), \dots, X_d^v(t))$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{I} := \left\{ \omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \{v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in W\} \neq \emptyset \right\} \in \mathcal{F}. \quad (2.3)$$

Чтобы избежать операций с континуальным набором множеств $\{A_t\}_{t \geq 0}$, мы положим $\limsup_{t \rightarrow \infty} A_t := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_{n/2^m}$, т.е. будем иметь дело только с двоично-рациональными значениями параметра t вместо всех его неотрицательных значений. Для каждого $\omega \in \mathcal{I}$ найдется возрастающая к бесконечности последовательность двоично-рациональных значений $t_l^{br}(\omega)$, $l \in \mathbb{N}$, такая, что в каждый момент $t_l^{br}(\omega)$ имеются частицы во множестве катализаторов W . Событие, состоящее из элементарных исходов ω , для которых существует аналогичная последовательность любых (не только двоично-рациональных) значений $t_l^{any}(\omega)$, $l \in \mathbb{N}$, имеет ту же вероятность $P(\mathcal{I})$, и мы можем назвать множество \mathcal{I} *событием бесконечного числа посещений катализаторов*. Поведение КВСБ на дополнении \mathcal{I}^c этого множества п.н. тривиально. Действительно, при достаточно больших значениях $t \geq t_0(\omega)$ либо КВСБ вырождается, либо КВСБ образует систему нескольких случайных блужданий (без ветвления), стартующих соответственно из $\mathbf{X}^v(\omega, t_0)$, $v \in Z(t_0)$, в момент времени t_0 . Надкритический режим КВСБ гарантирует, что $P(\mathcal{I}) > 0$ (теорема 8 в разделе 1.6).

2.3 Общий подход к исследованию экстремальных положений частиц в КВСБ

В разделе 2.3 мы получим базовые нелинейные системы интегральных уравнений типа свертки, на основе анализа решений которых выводятся асимптотические результаты для максимума популяции или фронта распространения популяции частиц в КВСБ по \mathbb{Z}^d при соответственно $d = 1$ или $d > 1$. Этот подход является общим при исследовании экстремальных положений частиц в

КВСБ с “легкими”, “тяжелыми” и “умеренно тяжелыми” хвостами распределения скачков блуждания. Однако в данном контексте удобно применить вместо этого аппарата иные современные методы теории вероятностей. Доказательство асимптотически линейного распространения фронта КВСБ по \mathbb{Z}^d с легкими хвостами мы проведем не с помощью анализа решения системы нелинейных интегральных уравнений типа свертки, а с помощью спинальной техники (леммы “от многого к малому”), многомерной теории восстановления, теории больших уклонений и мартингальной замены меры.

Отметим, что в дальнейшем для анализа решений нелинейных интегральных уравнений типа свертки мы будем применять методы, развитые в статьях [18; 115; 116], а также метод перевала, преобразования Лапласа и Лежандра, лемму Бореля-Кантелли и метод каплинга.

Временно рассмотрим случай, когда $d = 1$, $N = 1$ и $w_1 = 0$. Положим $M_t := \max \{X^v(t) : v \in Z(t)\}$ – положение самой правой частицы в момент времени t в модели КВСБ по \mathbb{Z} . В следующей лемме выводится интегральное уравнение для хвоста распределения максимума M_t .

Лемма 6. Пусть условие (2.1) выполнено. Тогда вероятность $P_0(M_t > u)$, где $t \geq 0$, $u \geq 0$, удовлетворяет следующему нелинейному интегральному уравнению типа свертки

$$\begin{aligned} P_0(M_t > u) &= \alpha_1 \int_0^t (1 - f_1(1 - P_0(M_{t-s} > u))) dG_1(s) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_0^t P_0(M_{t-s} > u) dG_{1,1}(s) + I(t; u), \end{aligned} \quad (2.4)$$

а при $u \geq 0$ мы положили

$$I(t; u) := \sum_{y \neq 0} (1 - \alpha_1) \frac{q(0, y)}{q} \int_0^t P_y(S(t-s) > u, \tau_{y,0} > t-s) dG_1(s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим всевозможные эволюции родительской частицы в КВСБ. А именно, после времени, распределенного экспоненциально с параметром β_1 , частица может либо произвести $k \in \mathbb{Z}_+$ потомков с вероятностью $\alpha_1 P(\xi_1 = k)$, либо совершить скачок в точку $y \neq 0$ с вероятностью $(1 - \alpha_1)q(0, y)/q$, а затем впоследствии впервые вернуться в начало координат через время $\bar{\tau}_{y,0}$. Если родительская частица не вернулась в начало координат до момента t , она совершает случайное блуждание S , стартующее в точке y .

Наконец, может случиться, что родительская частица не претерпела никаких изменений к моменту t . Резюмируя все вышесказанное, мы можем написать следующую формулу при каждом $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_0(M_t \leq u) &= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 = k) \int_0^t (P_0(M_{t-s} \leq u))^k dG_1(s) + (1 - G_1(t)) \\ &+ \sum_{y \neq 0} (1 - \alpha_1) \frac{q(0,y)}{q} \int_0^t P_0(M_{t-s} \leq u) d(G_1 * \bar{F}_{y,0}(s)) \\ &+ \sum_{y \neq 0} (1 - \alpha_1) \frac{q(0,y)}{q} \int_0^t P_y(S(t-s) \leq u, \tau_{y,0} > t-s) dG_1(s). \end{aligned}$$

Перепишывая последнее уравнение относительно неизвестной функции $P_0(M_t > u)$ и учитывая очевидное тождество

$$P_y(S(s) \leq u, \tau_{y,0} > s) = 1 - F_{y,0}(s) - P_y(S(s) > u, \tau_{y,0} > s), \quad s \geq 0,$$

мы получаем утверждение леммы 6. \square

Следующая лемма дает удобное представление для функции I в терминах вероятности $P_0(S(t) > u)$ при $u \geq 0$.

Лемма 7. Пусть условие (2.1) выполнено. Тогда для любых $t, u \geq 0$ имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{qI(t; u)}{(1 - \alpha_1)\beta_1} &= P_0(S(t) > u) - \int_0^t P_0(S(t-s) > u) dF_{0,0}(s) \\ &- \frac{\beta_1 - q}{\beta_1} \int_0^t P_0(S(t-s) > u) d(G_1(s) - G_1 * F_{0,0}(s)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что для любого неотрицательного u верно равенство

$$\sum_{y \neq 0} \frac{q(0,y)}{q} \int_0^t P_y(S(t-s) > u, \tau_{y,0} > t-s) dG_0(s) = P_0(S(t) > u, \tau_{0,0} > t), \quad (2.6)$$

где $G_0(t) := 1 - e^{-qt}$, $t \geq 0$. Заметим, что функция I имеет вид левой части последнего равенства, если в определении I опустить множитель $(1 - \alpha_1)$ и заменить функцию G_1 на G_0 . Учитывая это наблюдение, вначале проверим, что выражение $(1 - \alpha_1)^{-1}\beta_1^{-1}qI(t; u)$ при $u \geq 0$ совпадает со следующим выражением:

$$P_0(S(t) > u, \tau_{0,0} > t) - \frac{\beta_1 - q}{\beta_1} \int_0^t P_0(S(t-s) > u, \tau_{0,0} > t-s) dG_1(s). \quad (2.7)$$

В самом деле, применяя преобразование Лапласа к последней функции, мы можем написать

$$\frac{\lambda + q}{\lambda + \beta_1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}_0(S(t) > u, \tau_{0,0} > t) dt,$$

поскольку $\check{G}_1(\lambda) = \beta_1 / (\lambda + \beta_1)$, $\lambda \geq 0$. Мы получим то же самое выражение, если применим преобразование Лапласа к функции $(1 - \alpha_1)^{-1} \beta_1^{-1} qI(t; u)$, а также примем во внимание равенство (2.6). Далее единственность преобразования Лапласа влечет альтернативное представление (2.7) для $(1 - \alpha_1)^{-1} \beta_1^{-1} qI(t; u)$.

Очевидно, для любого $u \geq 0$ верна формула

$$\mathbb{P}_0(S(t) > u, \tau_{0,0} > t) = \mathbb{P}_0(S(t) > u) - \int_0^t \mathbb{P}_0(S(t-s) > u) dF_{0,0}(s).$$

Подставляя последнее равенство в проверенное альтернативное представление (2.7) для $(1 - \alpha_1)^{-1} \beta_1^{-1} qI(t; u)$, мы приходим к утверждению леммы 7. \square

Напомним, что согласно определению надкритического режима (см. определение 1) КВСБ по \mathbb{Z}^d с одним катализатором, расположенным в начале координат, справедливы соотношения $\alpha_1 m_1 + (1 - \alpha_1) F_{0,0}(\infty) > 1$ и

$$\alpha_1 m_1 \check{G}_1(\mathbf{v}) + (1 - \alpha_1) \check{G}_1(\mathbf{v}) \check{F}_{0,0}(\mathbf{v}) = 1.$$

В терминах функции G такой, что

$$G(t) := \alpha_1 m_1 G_1(t) + (1 - \alpha_1) G_1 * \bar{F}_{0,0}(t), \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

это означает, что $\check{G}(\mathbf{v}) = 1$.

Возвращаемся к случаю $d = 1$. Одним из важных, хотя и не единственным, следствием лемм 6 и 7 является следующее утверждение.

Лемма 8. Пусть справедливо условие (2.1). Тогда для всех $u \geq 0$ и $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\mathbb{P}_0(M_t > u) \leq \int_0^t I(t-s; u) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $u \geq 0$ в силу формулы Лагранжа конечных приращений для функции f_1 (см., например, [131], с. 113) уравнение (2.4) влечет неравенство

$$\mathbb{P}_0(M_t > u) \leq \int_0^t \mathbb{P}_0(M_{t-s} > u) dG(s) + I(t; u). \quad (2.10)$$

Применяя это неравенство последовательно k раз, мы получаем

$$P_0(M_t > u) \leq \int_0^t P_0(M_{t-s} > u) dG^{*(k+1)}(s) + \int_0^t I(t-s; u) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(s). \quad (2.11)$$

Для любого фиксированного t имеем $G^{*k}(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Например, это верно согласно лемме 22 в [121] или теореме 1 в [123], гл. 6, раздел 6. Следовательно, член $\int_0^t P_0(M_{t-s} > u) dG^{*(k+1)}(s)$ пренебрежимо мал для больших k . Устремляя $k \rightarrow \infty$ в правой части соотношения (2.11), получаем требуемое неравенство (2.9). Лемма 8 доказана. \square

Выпишем аналог лемм 6–8 в более общем случае, когда $d \in \mathbb{N}$. С этой целью для множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$E(t; \mathcal{U}) := P_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U}).$$

Несмотря на целочисленностные координаты $\mathbf{X}^v(t)$, удобнее рассматривать включение $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, а не $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^d$. Аргументация леммы 9 опускается, поскольку она повторяет доказательство лемм 6–8.

Лемма 9. Пусть справедливо условие (2.1). Тогда вероятность $E(t; \mathcal{U})$, $t \geq 0$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{0} \notin \mathcal{U}$, удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению типа свертки

$$\begin{aligned} E(t; \mathcal{U}) &= \alpha_1 \int_0^t (1 - f_1(1 - E(t-s; \mathcal{U}))) dG_1(s) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_0^t E(t-s; \mathcal{U}) dG_{1,1}(s) + I(t; \mathcal{U}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где функция I определяется следующим образом:

$$I(t; \mathcal{U}) := \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}} (1 - \alpha_1) \frac{q(\mathbf{0}, \mathbf{y})}{q} \int_0^t P_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}, \tau_{\mathbf{y}, \mathbf{0}} > t-s) dG_1(s), \quad (2.13)$$

причем для любых $t \geq 0$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{0} \notin \mathcal{U}$, она допускает представление

$$\begin{aligned} \frac{qI(t; \mathcal{U})}{(1 - \alpha_1)\beta_1} &= P_0(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}) - \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}) dF_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(s) \\ &- \frac{\beta_1 - q}{\beta_1} \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}) d(G_1(s) - G_1 * F_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(s)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Более того, для любого $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{0} \notin \mathcal{U}$, и всех $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$E(t; \mathcal{U}) \leq \int_0^t I(t-s; \mathcal{U}) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s). \quad (2.15)$$

Теперь обсудим, что меняется в формулировке последней леммы, когда вместо одного катализатора имеется несколько катализаторов, т.е. рассмотрим общий случай $d \in \mathbb{N}$ и $N > 1$. В случае нескольких катализаторов аналогом вероятности $E(t; \mathcal{U})$ является вектор $\mathbf{E}(t; \mathcal{U}) := (E_{\mathbf{w}_1}(t; \mathcal{U}), \dots, E_{\mathbf{w}_N}(t; \mathcal{U}))$ с координатами $E_{\mathbf{w}_i}(t; \mathcal{U}) := P_{\mathbf{w}_i}(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$, $i = 1, \dots, N$, $t \geq 0$, для множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$. Как в лемме 9, вектор $\mathbf{E}(t; \mathcal{U})$ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений типа свертки

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{w}_i}(t; \mathcal{U}) &= \alpha_i \int_0^t (1 - f_i(1 - E_{\mathbf{w}_i}(t - s; \mathcal{U}))) dG_i(s) \\ &+ (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^N \int_0^t E_{\mathbf{w}_j}(t - s; \mathcal{U}) dG_{i,j}(s) + I_{\mathbf{w}_i}(t; \mathcal{U}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где функция $I_{\mathbf{w}_i}(t; \mathcal{U})$ определяется как

$$\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{y} \notin W} (1 - \alpha_i) \frac{q(\mathbf{w}_i, \mathbf{y})}{q} \int_0^t P_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}, W_k \tau_{\mathbf{y}, \mathbf{w}_k} > t - s, k = 1, \dots, N) dG_i(s), \quad (2.17)$$

$t \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $W \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Аналогом представления (2.14) в случае нескольких источников ветвления является следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{qI_{\mathbf{w}_i}(t; \mathcal{U})}{(1 - \alpha_i)\beta_i} &= P_{\mathbf{w}_i}(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}) - \sum_{k=1}^N \int_0^t P_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}) d_{W_k} F_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k}(s) \\ &- \frac{\beta_i - q}{\beta_i} \int_0^t P_{\mathbf{w}_i}(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}) dG_i(s) \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_i - q}{\beta_i} \int_0^t P_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}) dG_i *_{W_k} F_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k}(s). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{w}_i}(t; \mathcal{U}) &\leq \frac{(1 - \alpha_i)\beta_i}{q} P_{\mathbf{w}_i}(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}) \\ &+ \frac{(1 - \alpha_i)|\beta_i - q|}{q} \int_0^t P_{\mathbf{w}_i}(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}) dG_i(s) =: K_i(t; \mathcal{U}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Аналогично неравенству (2.15) выводим векторное неравенство, справедливое по координатам,

$$\mathbf{E}(t; \mathcal{U}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k} * \mathbf{K}(t; \mathcal{U}). \quad (2.19)$$

Здесь в качестве аналога функции G , определяемой соотношением (2.8), в случае с несколькими катализаторами выступает матрица $\mathcal{G}(t) = (G_{i,j}^{(N)}(t))_{i,j=1}^N$ с элементами

$$G_{i,j}^{(N)}(t) := \delta_{i,j} \alpha_i m_i G_i(t) + (1 - \alpha_i) G_i * w_j \bar{F}_{w_i, w_j}(t), \quad t \geq 0.$$

Вектор-столбец $\mathbf{K}(t; \mathcal{U})$, $t \geq 0$, имеет i -ю координату $K_i(t; \mathcal{U})$. Заметим, что элемент $d_{i,j}(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, представляет собой преобразование Лапласа функции $G_{i,j}^{(N)}$. Напомним, что свертка матриц определяется так же, как умножение матриц, за исключением того, что мы рассматриваем свертку элементов матриц, а не их произведение: $A * B = \left(\sum_{k=1}^N a_{ik} * b_{kj} \right)_{i,j=1, \dots, N}$.

2.4 Случай “легких хвостов” скачка блуждания

Предположим, что функция

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{s}) &:= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} q(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} \left(e^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} - 1 \right) q(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \\ &= q \left(\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} e^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} \frac{q(\mathbf{0}, \mathbf{x})}{q} - 1 \right) = q \left(\mathbb{E} e^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{Y}^1 \rangle} - 1 \right) < \infty \end{aligned} \quad (2.20)$$

для любого $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ (всюду $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}^d). Такое предположение представляет собой для скачка \mathbf{Y}^1 условие Крамера, выполненное в \mathbb{R}^d . Легко проверить, что гессиан функции Ψ положительно определен и, следовательно, Ψ – выпуклая функция. Заметим, что с помощью равенства (2.2) нетрудно вывести, что $\mathbb{E} e^{\langle \theta, \mathbf{S}(t) \rangle} = e^{t\Psi(\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. По этой причине функцию Ψ называют логарифмической производящей функцией моментов для случайной величины $\mathbf{S}(1)$. Положим также

$$\mathcal{R} := \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d : \Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \}. \quad (2.21)$$

Как указано в начале раздела 2.3, в подразделах 2.4.1–2.4.3 используются методы, отличные от подходов, использованных в остальной части главы 2. В частности, мы вовлекаем спиальную технику, которая подразумевает, что при каждом ветвлении частицы выбирается в точности один представитель из ее

непосредственных потомков, причем тот, чей род доживет до рассматриваемого момента t . В результате мы можем считать, что среди выбранных частиц, которые являются представителями разных поколений, но одного и того же рода, есть одна частица, существующая вплоть до момента t , совершающая случайное блуждание без ветвления. Чтобы ее блуждание было однородным, нам дополнительно требуется, чтобы времена, проведенные частицей в каждой точке решетки (в том числе и в любом источнике ветвления) до выхода из нее, имели бы экспоненциальные распределения с одним и тем же параметром (см., например, [99]). Таким образом, в теоремах 9–12 мы считаем, что условие однородности случайного блуждания означает выполнение равенств

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}) = q(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \beta_k = q/(1 - \alpha_k), \quad (2.22)$$

для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ и $k = 1, \dots, N$, где $q := -q(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in (0, \infty)$. Таким образом, в разделе 2.4 мы считаем, что условие однородности случайного блуждания выполнено в виде соотношения (2.22).

2.4.1 Теоремы о предельной форме фронта КВСБ

Для $\varepsilon > 0$ введем следующие множества:

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle > \nu + \varepsilon \text{ хотя бы для одного } \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{Q}_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle < \nu - \varepsilon \text{ для всех } \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}, \quad \varepsilon \in [0, \nu), \quad (2.24)$$

где \mathcal{R} задается формулой (2.21). Положим $\mathcal{O} := \mathcal{O}_0$, $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{P} := \partial\mathcal{Q} = \partial\mathcal{O}$. Заметим, что каждое множество \mathcal{Q}_ε , \mathcal{Q} или $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ является выпуклым как пересечение полупространств (см., например, теорему 2.1 в [132]).

Теорема 9. Пусть условия (2.20) и (2.22) выполнены для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d . Тогда для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$P_{\mathbf{x}}(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_0 = t_0(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_0, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/t \notin \mathcal{O}_\varepsilon) = 1, \quad (2.25)$$

$$P_{\mathbf{x}}(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \nu) \exists t_1 = t_1(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_1 \exists v \in Z(t), \mathbf{X}^v(t)/t \notin \mathcal{Q}_\varepsilon | \mathcal{I}) = 1, \quad (2.26)$$

где множества \mathcal{O}_ε и \mathcal{Q}_ε определены соответственно в формулах (2.23) и (2.24), а запись “т.ч.” обозначает “такое, что.”

Теорема 9 означает, что если мы разделим координаты положения каждой частицы, существующей в КВСБ в момент времени t , на t , а затем устремим t бесконечности, то в пределе п.н. не будет частиц вне множества $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ и при условии бесконечного числа посещений катализаторов п.н. будут частицы в множестве \mathcal{P} . В этом смысле естественно называть границу \mathcal{P} предельной формой фронта распространения популяции частиц. Следующая теорема уточняет утверждение (2.26) теоремы 9 и устанавливает, что каждую точку множества \mathcal{P} можно рассматривать как предельную точку для нормированных положений частиц в КВСБ.

Теорема 10. Пусть условия теоремы 9 выполнены. Тогда для каждого $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$ имеем

$$P_{\mathbf{x}} \left(\omega : \forall t \geq 0 \exists v_{\mathbf{y}} = v_{\mathbf{y}}(t, \omega) \in Z(t) \text{ такое, что } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{X}^{v_{\mathbf{y}}}(t)}{t} = \mathbf{y} \Big| \mathcal{I} \right) = 1.$$

Из определения множества \mathcal{P} следует, что

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle \leq \mathbf{v} \text{ для всех } \mathbf{r} \in \mathcal{R} \text{ и } \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{v} \text{ хотя бы для одного } \mathbf{r} \in \mathcal{R} \}.$$

Следующий результат дает еще один способ найти фронт распространения \mathcal{P} .

Теорема 11. Справедливо представление \mathcal{P} в виде $\mathcal{P} = \{ \mathbf{z}(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathcal{R} \}$, где

$$\mathbf{z}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}}{\langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle} \nabla \Psi(\mathbf{r}).$$

Эта теорема позволяет находить напрямую (без компьютерных симуляций) множество \mathcal{P} для ряда примеров в подразделе 2.4.3. Более того, из доказательства теоремы 11 следует, что определение множества \mathcal{P} может быть дано эквивалентным образом:

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{v} \text{ для одного } \mathbf{r} \in \mathcal{R} \text{ и } \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle < \mathbf{v} \text{ для остальных } \mathbf{r} \in \mathcal{R} \}. \quad (2.27)$$

Теоремы 9–11 показывают, что популяция частиц распространяется асимптотически линейно на \mathbb{Z}^d с ростом времени, а форма фронта распространения не зависит от количества катализаторов и их расположения, а зависит только от

значения мальтусовского параметра ν и функции Ψ , характеризующей случайное блуждание. Таким образом, в наших предельных теоремах нормирующий множитель для положений частиц равен t^{-1} и он не зависит от размерности решетки.

Следует отметить, что в статье [106] также используется концепция фронта распространения КВСБ. В рассмотренном там КВСБ деление частиц предполагается бинарным, а случайное блуждание по \mathbb{Z}^d симметричным. При этом фронт задается как $\Gamma_t = \{\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{E}_0 \mu(t; \mathbf{y}) < C\}$, где C – некоторая положительная постоянная. Кроме того, в нашей терминологии в статье [106] показано, что $\Gamma_t = t(\mathcal{P} \cup \mathcal{O})$. С другой стороны, наша формула (2.33) и ее аналог в случае нескольких катализаторов также влекут, что $\mathbf{E}_0 \mu(t; \mathbf{y}) < C$ для некоторой положительной постоянной $C > 0$ и любого $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in t(\mathcal{P} \cup \mathcal{O})$. Заметим, что мы устанавливаем результаты, справедливые п.н., и налагаем меньше ограничений на модель, чем в работах других авторов.

Настоящее исследование стало возможным благодаря формулам “от многого к малому”, полученным в наиболее общем виде в [109], а затем примененным к КВСБ с одним катализатором в [34]. Аналогичным образом можно получить следующую формулу “от многого к малому” для КВСБ с несколькими катализаторами

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}} \sum_{v \in Z(t)} g(\mathbf{X}^v(t)) = \mathbf{E}_{\mathbf{x}} g(\mathbf{S}(t)) \prod_{k=1}^N \exp\{\alpha_k \beta_k (m_k - 1) L(t; \mathbf{w}_k)\}, \quad (2.28)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция, а локальное время случайного блуждания \mathbf{S} в точке \mathbf{y} определяется формулой

$$L(t; \mathbf{y}) := \int_0^t \mathbb{I}\{\mathbf{S}(u) = \mathbf{y}\} du, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \quad t \geq 0.$$

Как отмечалось ранее, в этом разделе мы также используем теоремы восстановления для систем уравнений восстановления, мартингальную замену меры, выпуклый анализ, теорию больших уклонений и метод каплинга. Мы существенно опираемся на результаты раздела 1.4 о средних общих и локальных численностях частиц в КВСБ, а также на сильную и слабую предельные теоремы для этих величин, установленные в разделе 1.6.

2.4.2 Доказательства результатов о предельной форме фронта

В этом подразделе мы установим сразу две теоремы 9 и 10, посвященные изучению распространения КВСБ по \mathbb{Z}^d . Для ясности изложения их общее доказательство разделено на 5 шагов.

Шаг 1. На первом шаге мы предполагаем, что $W = \{\mathbf{w}_1\}$ с $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, а начальной точкой КВСБ также является $\mathbf{0}$. Чтобы вывести первое утверждение (2.25) теоремы 9 для этого случая, мы используем схему получения оценки сверху в теореме 1.1 из [18]. На этом пути приходится развить подход авторов этой статьи, поскольку мы рассматриваем многомерную решетку и модель с непрерывным временем, а не одномерную решетку и модель с дискретным временем, изученные этими авторами.

Зафиксируем $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{r},\varepsilon} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle > \nu + \varepsilon\}$. Согласно формуле (2.28) имеем

$$\begin{aligned} P_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in t\mathcal{O}_{\mathbf{r},\varepsilon}) &= P_0\left(\sum_{v \in Z(t)} \mathbb{I}\{\mathbf{X}^v(t) \in t\mathcal{O}_{\mathbf{r},\varepsilon}\} \neq 0\right) \\ &\leq E_0 \sum_{v \in Z(t)} \mathbb{I}\{\mathbf{X}^v(t) \in t\mathcal{O}_{\mathbf{r},\varepsilon}\} = E_0(\mathbb{I}\{\mathbf{S}(t) \in t\mathcal{O}_{\mathbf{r},\varepsilon}\} \exp\{\alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\}) \\ &\leq E_0 \exp\{\theta(\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle - t(\nu + \varepsilon)) + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\} = e^{-t\theta(\nu + \varepsilon)} \kappa(t). \end{aligned}$$

Здесь $\theta > 0$ и

$$\kappa(t) := E_0 \exp\{\theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\}.$$

Используя свойства условного математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} &E_0 \exp\{\theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\} \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} \leq t\} \\ &= E_0(E_0(\exp\{\theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\} | \tau_0, \bar{\tau}_{0,0}) \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} \leq t\}) \\ &= \int_0^t \kappa(t-u) \left(\int_0^u q e^{q(\alpha_1 m_1 - 1)(u-z)/(1-\alpha_1)} d\bar{F}_{0,0}(z) \right) du = \kappa * \psi(t), \end{aligned}$$

где функция $\psi(u)$, $u \geq 0$, есть интеграл внутри больших скобок в предыдущей формуле. Мы также учли, что $\beta_1 = q/(1 - \alpha_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= E_0 \exp\{\theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\} \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} > t\} \\ &\quad + E_0 \exp\{\theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1)L(t; \mathbf{0})\} \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} \leq t\} \\ &= \zeta(t) + \kappa * \psi(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\zeta(t) &:= E_0 \exp\{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1) L(t; \mathbf{0})\} \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} > t\} \\ &= E_0 \exp\{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1) \min\{\tau_0, t\}\} \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} > t\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим $\theta > 1$. Тогда в силу выпуклости функции Ψ имеет место строгое неравенство $\Psi(\theta \mathbf{r}) > \Psi(\mathbf{r}) = \nu$. Положим $\tilde{\kappa}(t) := e^{-t\Psi(\theta \mathbf{r})} \kappa(t)$, $\tilde{\zeta}(t) := e^{-t\Psi(\theta \mathbf{r})} \zeta(t)$ и $\tilde{\psi}(t) := e^{-t\Psi(\theta \mathbf{r})} \psi(t)$. Таким образом, получаем уравнение восстановления

$$\tilde{\kappa}(t) = \tilde{\zeta}(t) + \tilde{\kappa} * \tilde{\psi}(t). \quad (2.29)$$

В силу определения мальтусовского параметра имеем

$$\alpha_1 m_1 \check{G}_1(\nu) + (1 - \alpha_1) \check{G}_1(\nu) \check{F}_{0,0}(\nu) = 1$$

и, как следствие,

$$\check{F}_{0,0}(\nu) = \frac{1 - \alpha_1 m_1 \check{G}_1(\nu)}{(1 - \alpha_1) \check{G}_1(\nu)} = \frac{(1 - \alpha_1)\nu - \alpha_1 m_1 q + q}{q(1 - \alpha_1)}.$$

Последние равенства влекут, что

$$\int_0^\infty e^{-\nu u} \psi(u) du = \check{F}_{0,0}(\nu) \int_0^\infty q e^{-(\nu - q(\alpha_1 m_1 - 1)/(1 - \alpha_1))u} du = 1$$

и, значит,

$$\int_0^\infty \tilde{\psi}(u) du < \int_0^\infty e^{-\nu u} \psi(u) du = 1. \quad (2.30)$$

Кроме того, мы вывели простое и полезное неравенство

$$\nu + q > \alpha_1 \beta_1 (m_1 - 1). \quad (2.31)$$

Нетрудно проверить с помощью соотношения (2.2) и тождества $E u^{\Pi(t)} = \exp\{qt(u - 1)\}$, $u \in [0, 1]$, $t \geq 0$, что процесс $\{e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle - t\Psi(\theta \mathbf{r})}, t \geq 0\}$ является мартингалом (относительно естественной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ случайного процесса \mathbf{S}). В частности,

$$E_0 e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle} = E_0 \prod_{i=1}^{\Pi(t)} e^{\theta\langle \mathbf{Y}^i, \mathbf{r} \rangle} = E_0 \left(\frac{\Psi(\theta \mathbf{r})}{q} + 1 \right)^{\Pi(t)} = e^{t\Psi(\theta \mathbf{r})}. \quad (2.32)$$

С помощью мартингальной замены меры определим меру P^θ следующим образом:

$$\frac{dP^\theta}{dP_0} = e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle - t\Psi(\theta\mathbf{r})} \text{ на } \mathcal{F}_t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(t) &= E^\theta e^{\alpha_1\beta_1(m_1-1)\min\{\tau_0, t\}} \mathbb{I}\{\tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} > t\} \\ &= E^\theta e^{\alpha_1\beta_1(m_1-1)t} \mathbb{I}\{\tau_0 > t\} + E^\theta e^{\alpha_1\beta_1(m_1-1)\tau_0} \mathbb{I}\{\tau_0 \leq t, \tau_0 + \bar{\tau}_{0,0} > t\} \\ &= e^{\alpha_1\beta_1(m_1-1)t} P^\theta(\tau_0 > t) + E^\theta e^{\alpha_1\beta_1(m_1-1)\tau_0} \mathbb{I}\{\tau_0 \leq t\} \left(1 - \bar{F}_{0,0}^\theta(t - \tau_0)\right), \end{aligned}$$

где $\bar{F}_{0,0}^\theta(t) := P^\theta(\bar{\tau}_{0,0} \leq t)$, $t \geq 0$. Найдем распределение случайной величины τ_0 относительно меры P^θ . В силу (2.32) получаем

$$\begin{aligned} P^\theta(\tau_0 \leq t) &= E_0 \mathbb{I}\{\tau_0 \leq t\} e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle - t\Psi(\theta\mathbf{r})} = e^{-t\Psi(\theta\mathbf{r})} E_0 \left(\mathbb{I}\{\tau_0 \leq t\} E_0 \left(e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle} \middle| \tau_0 \right) \right) \\ &= e^{-t\Psi(\theta\mathbf{r})} \int_0^t \left(E_0 e^{\theta\langle \mathbf{S}(t-u), \mathbf{r} \rangle} \right) \left(\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} e^{\theta\langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle} \frac{q(\mathbf{0}, \mathbf{x})}{q} \right) q e^{-qu} du \\ &= (\Psi(\theta\mathbf{r}) + q) \int_0^t e^{-u(\Psi(\theta\mathbf{r}) + q)} du, \end{aligned}$$

т.е. τ_0 имеет экспоненциальное распределение с параметром $\Psi(\theta\mathbf{r}) + q$ по мере P^θ . Опираясь на этот факт, мы выводим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(t) &= e^{-(\Psi(\theta\mathbf{r}) + q - \alpha_1\beta_1(m_1-1))t} + (\Psi(\theta\mathbf{r}) + q) \times \\ &\times \int_0^t e^{-(\Psi(\theta\mathbf{r}) + q - \alpha_1\beta_1(m_1-1))u} \left(1 - \bar{F}_{0,0}^\theta(t - u)\right) du. \end{aligned}$$

Устремляя t к бесконечности, получаем

$$\tilde{\zeta}(t) \rightarrow \tilde{\zeta}(\infty) = \frac{(\Psi(\theta\mathbf{r}) + q) P^\theta(\bar{\tau}_{0,0} = \infty)}{\Psi(\theta\mathbf{r}) + q - \alpha_1\beta_1(m_1 - 1)},$$

если $\Psi(\theta\mathbf{r}) + q > \alpha_1\beta_1(m_1 - 1)$. Последнее неравенство справедливо в силу формулы (2.31). Теперь, чтобы проверить неравенство $\tilde{\zeta}(\infty) > 0$, нам достаточно показать, что $P^\theta(\bar{\tau}_{0,0} = \infty) > 0$.

Используя технику характеристических функций, можно проверить, что процесс $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ также имеет независимые приращения относительно меры P^θ . Более того, с учетом (2.32) верны равенства

$$\begin{aligned} E^\theta S_i(t) &= E_0 \left(S_i(t) e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle - t\Psi(\theta\mathbf{r})} \right) = \frac{E_0 \left(S_i(t) e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle} \right)}{E_0 e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle}} \\ &= \frac{1}{\theta} \frac{\partial \ln E_0 e^{\theta\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{s} \rangle}}{\partial s_i} \Bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{r}} = \frac{t}{\theta} \frac{\partial \Psi(\theta\mathbf{s})}{\partial s_i} \Bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\mathbf{E}^\theta \mathbf{S}(t) = (\mathbf{E}^\theta S_1(t), \dots, \mathbf{E}^\theta S_d(t)) \neq \mathbf{0}$, $t > 0$. Предположим противное: $\nabla \Psi(\theta \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Поскольку гессиан функции Ψ положительно определен, функция Ψ достигает глобального минимума в точке $\theta \mathbf{r}$. Однако $\Psi(\theta \mathbf{r}) > \Psi(\mathbf{r}) = \nu$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathbf{E}^\theta \mathbf{S}(t) \neq \mathbf{0}$ для каждого $t > 0$ и \mathbf{S} – это случайное блуждание по мере \mathbf{P}^θ с ненулевым сносом. Тогда закон больших чисел, примененный к \mathbf{S} как к процессу с независимыми приращениями, влечет $\mathbf{P}^\theta(\bar{\tau}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}} = \infty) > 0$.

Следовательно, применяя теорему восстановления (см., например, теорему 1 в [123], гл. 11, раздел 6) к уравнению восстановления (2.29) и учитывая неравенство (2.30), приходим к соотношению

$$\tilde{\kappa}(t) \rightarrow \tilde{\kappa}(\infty) = \frac{\tilde{\zeta}(\infty)}{1 - \int_0^\infty \tilde{\psi}(u) du} \in (0, \infty), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если $t\Psi(\theta \mathbf{r}) - t\theta(\nu + \varepsilon) < 0$, т.е. $\theta(\nu + \varepsilon) > \Psi(\theta \mathbf{r})$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in t\mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon}) &\leq \mathbf{E}_0 \sum_{v \in Z(t)} \mathbb{I}\{\mathbf{X}^v(t) \in t\mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon}\} \\ &\leq e^{-t(\theta(\nu + \varepsilon) - \Psi(\theta \mathbf{r}))} \tilde{\kappa}(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Обозначим A_t событие $\{\omega : \forall v \in Z(t) \text{ верно, что } \mathbf{X}^v(t) \notin t\mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon}\}$. Как обычно, A^c означает дополнение множества A и $\{A_n \text{ бесконечно часто}\} = \{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n$ для последовательности событий A_n . В силу леммы Бореля-Кантелли оценка (2.33) влечет $\mathbf{P}_0(A_{n/2^m}^c \text{ б.ч.}) = 0$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mathbf{P}_0(\bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty A_{n/2^m}) = 1$. Это означает, что для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует положительное целое число $k = k(m, \omega)$ такое, что для любого $n \geq k$ и для любого $v \in Z(n/2^m)$ имеем $\mathbf{X}^v(n/2^m) \notin n/2^m \mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon}$. Поскольку множество бинарных рациональных чисел плотно в \mathbb{R} и время ожидания частицы $v \in Z(t)$ в множестве $t\mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon}$ содержит ненулевой интервал с вероятностью 1, мы делаем вывод, что

$$\mathbf{P}_0(\omega : \exists t_0(\omega) \text{ такое, что } \forall t \geq t_0(\omega) \text{ и } \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) \notin t\mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon}) = 1 \quad (2.34)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Утверждение (2.34) остается верным, когда θ стремится к 1. Более того, при $\theta \rightarrow 1$ условие $\theta(\nu + \varepsilon) > \Psi(\theta \mathbf{r})$ превращается в тривиальное, а именно $\nu + \varepsilon > \nu$.

Перестанем фиксировать $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. Если множество \mathcal{R} конечно (это имеет место, когда $d = 1$), положим $\Upsilon = \mathcal{R}$. Иначе, пусть Υ – всюду плотное множество в \mathcal{R} (например, пусть Υ – множество векторов \mathbf{r} из \mathcal{R} с рациональными

координатами r_1, \dots, r_{d-1}). Рассмотрим область

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \cup_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \mathcal{O}_{\mathbf{r}, \varepsilon} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle > \mathbf{v} + \varepsilon \text{ хотя бы для одного } \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}.$$

Соотношение (2.34) влечет

$$P_0(\omega : \exists t_1(\omega) \text{ такое, что } \forall t \geq t_1(\omega) \text{ и } \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) \notin t\mathcal{O}_\varepsilon) = 1.$$

Таким образом, мы получили первое утверждение теоремы 9 в случае КВСБ с одним катализатором в $\mathbf{0}$ и стартовой точкой $\mathbf{0}$.

Шаг 2. На втором шаге мы также предполагаем, что $W = \{\mathbf{w}_1\}$ с $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ и стартовая точка КВСБ находится в $\mathbf{0}$. Кроме того, сосредоточимся на случае $E\xi_1^2 < \infty$. Установим теорему 10 и утверждение (2.26) теоремы 9 при таких предположениях.

В силу теорем 7 и 8 из раздела 1.6 существуют положительные постоянные C_k , $k \in \mathbb{N}$, причем $C_k \geq C_{k+1}$, и множества $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $P(\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, такие, что справедливо неравенство

$$\mu(t; \mathbf{0}) \geq C_k e^{\mathbf{v}t} \quad \text{п.н. на множестве } \mathcal{I}_k \quad (2.35)$$

для всех достаточно больших t . Действительно, достаточно положить $\mathcal{I}_k := \{\omega : \zeta(\omega) \geq \frac{1}{k}\}$, а $C_k := \frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Для упрощения записи будем считать, что $\mathcal{I} = \mathcal{I}_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, поскольку иначе можно совершить предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в конце рассуждений шага 2.

Зафиксируем $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. Пусть δ – это число такое, что $0 < \delta < 1$. Таким образом, согласно соотношению (2.35) на множестве \mathcal{I} в момент δt существует по крайней мере $[Ce^{\mathbf{v}\delta t}]$ частиц, находящихся в $\mathbf{0}$, для некоторой положительной постоянной C (как обычно, $[u]$ означает целую часть числа $u \in \mathbb{R}_+$). Если каждая из этих частиц независимо от других перемещается согласно случайному блужданию \mathbf{S} так, что $\langle \mathbf{S}(u), \mathbf{r} \rangle > 0$ для каждого $u \in [\tau_0, t(1 - \delta)]$, то дальнейшие частицы в КВСБ в момент t не ближе, чем $[Ce^{\mathbf{v}\delta t}]$ независимых одинаково распределенных копий $\mathbf{S}(t(1 - \delta))$ таких, что $\langle \mathbf{S}(u), \mathbf{r} \rangle > 0$ для каждого $u \in [\tau_0, t(1 - \delta)]$. Оценка больших уклонений (см., например, теорему 4.9.5 в [81]) дает, что для каждого $\varepsilon \in (0, \mathbf{v})$

$$P_0(\langle \mathbf{S}(u), \mathbf{r} \rangle > 0, u \in [\tau_0, t(1 - \delta)], \langle \mathbf{S}(t(1 - \delta)), \mathbf{r} \rangle \geq (\mathbf{v} - \varepsilon)t) = e^{-t(1-\delta)K_{\mathbf{r}, \varepsilon} + o(t)}$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь $K_{\mathbf{r}, \varepsilon} = \inf \left\{ \int_0^1 L_{\mathbf{r}}(\varphi'(u)) du \right\}$ и нижняя грань берется по всем абсолютно непрерывным функциям $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ таким, что $\varphi(0) = 0$,

$\varphi(u) > 0$, $u \in (0,1)$, и $\varphi(1) = (\nu - \varepsilon)(1 - \delta)^{-1}$. В свою очередь, функция

$$L_{\mathbf{r}}(\theta) := \sup_{\vartheta \in \mathbb{R}} (\theta \vartheta - \Psi(\vartheta \mathbf{r})), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

является преобразованием Лежандра-Фенхеля функции $\Psi(\vartheta \mathbf{r})$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Нижняя грань $K_{\mathbf{r},\varepsilon} = L_{\mathbf{r}}((\nu - \varepsilon)(1 - \delta)^{-1})$ достигается, когда функция $\varphi = \varphi_0$ линейная, т.е. $\varphi_0(u) = (\nu - \varepsilon)(1 - \delta)^{-1}u$, $u \in [0,1]$, поскольку с помощью неравенства Йенсена имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{\mathbf{r}}(\varphi'(u)) du &\geq L_{\mathbf{r}}\left(\int_0^1 \varphi'(u) du\right) = L_{\mathbf{r}}(\varphi(1) - \varphi(0)) \\ &= L_{\mathbf{r}}((\nu - \varepsilon)(1 - \delta)^{-1}) = \int_0^1 L_{\mathbf{r}}(\varphi_0'(u)) du. \end{aligned}$$

Полагая $\mathcal{Q}_{\mathbf{r},\varepsilon} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle < \nu - \varepsilon\}$ (здесь $0 < \varepsilon < \nu$), мы получаем

$$\begin{aligned} &P_0(\mathbf{X}^v(t) \in t\mathcal{Q}_{\mathbf{r},\varepsilon} \text{ для любого } v \in Z(t), \mu(t; \mathbf{0}) \geq Ce^{\nu\delta t}) \quad (2.36) \\ &\leq (1 - P_0(\langle \mathbf{S}(u), \mathbf{r} \rangle > 0, u \in [\tau_0, t(1-\delta)], \langle \mathbf{S}(t(1-\delta)), \mathbf{r} \rangle \geq (\nu - \varepsilon)t))^{[Ce^{\nu\delta t}]} \\ &\leq \exp\left\{-[Ce^{\nu\delta t}] e^{-t(1-\delta)K_{\mathbf{r},\varepsilon} + o(t)}\right\} = \exp\left\{-e^{(\nu\delta - (1-\delta)K_{\mathbf{r},\varepsilon})t + o(t)}\right\}, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Обозначим B_t событие $\{\omega : \exists v \in Z(t) \text{ такое, что } \mathbf{X}^v(t) \notin t\mathcal{Q}_{\mathbf{r},\varepsilon}\}$. В силу леммы Бореля-Кантелли оценка (2.36) влечет $P_0\left(B_{n/2^m}^c \text{ б.ч.} \middle| \mathcal{I}\right) = 0$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$, если

$$\nu\delta - (1 - \delta)L_{\mathbf{r}}((\nu - \varepsilon)(1 - \delta)^{-1}) > 0. \quad (2.37)$$

Следовательно, $P_0\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_{n/2^m} \middle| \mathcal{I}\right) = 1$. Это означает, что для почти всех $\omega \in \mathcal{I}$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует положительное целое $k = k(m, \omega)$ такое, что для каждого $n \geq k$ можно найти $v \in Z(n/2^m)$ такое, что $\mathbf{X}^v(n/2^m) \notin n/2^m \mathcal{Q}_{\mathbf{r},\varepsilon}$. Поскольку множество бинарных рациональных чисел плотно в \mathbb{R} и время ожидания частицы $v \in Z(t)$ во множестве $t\mathcal{Q}_{\mathbf{r},\varepsilon}^c$ содержит ненулевой интервал с вероятностью 1, мы заключаем, что

$$P_0(\omega : \exists t_0(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_0(\omega) \exists v \in Z(t), \text{ для которого } \mathbf{X}^v(t) \notin t\mathcal{Q}_{\mathbf{r},\varepsilon} \middle| \mathcal{I}) = 1 \quad (2.38)$$

при любом $\varepsilon \in (0, \nu)$.

Покажем, что для каждого $\varepsilon \in (0, \nu)$ существует $\delta = \delta(\mathbf{r}, \varepsilon) \in (0, 1)$ такое, что условие (2.37) выполнено. В самом деле, положим $a(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial \Psi(\theta \mathbf{r})}{\partial \theta} \right|_{\theta=1}$. Тогда

согласно свойствам преобразования Лежандра–Фенхеля (см., например, [81], гл. 1, раздел 1) имеем $L_{\mathbf{r}}(a(\mathbf{r})) = a(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) - \mathbf{v} \geq 0$. Отсюда следует, что для $\delta(\mathbf{r}, \varepsilon) = 1 - (\mathbf{v} - \varepsilon)/a(\mathbf{r})$ неравенство (2.37) сводится к тривиальному, а именно $\mathbf{v} > \mathbf{v} - \varepsilon$. Таким образом, условие (2.37) справедливо при $\delta(\mathbf{r}, \varepsilon) = 1 - (\mathbf{v} - \varepsilon)/a(\mathbf{r})$.

Сочетание доказанной части теоремы 9 и формулы (2.38) влекут утверждение теоремы 10 для случая единственного катализатора в $\mathbf{0}$ и стартовой точки $\mathbf{0}$, если $E\xi_1^2 < \infty$. При тех же условиях утверждение (2.26) теоремы 9 установлено, поскольку из соотношения (2.38) вытекает, что

$$P_{\mathbf{0}}(\omega : \exists t_0(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_0(\omega) \exists v \in Z(t), \text{ для которого } \mathbf{X}^v(t) \notin tQ_\varepsilon | \mathcal{I}) = 1$$

при каждом $\varepsilon \in (0, \mathbf{v})$.

Шаг 3. На третьем шаге мы предполагаем, что $W = \{\mathbf{w}_1\}$ с $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ и стартовой точкой КВСБ в $\mathbf{0}$, причем теперь $E\xi_1^2 = \infty$. Чтобы доказать теорему 10 и утверждение (2.26) теоремы 9 в таких предположениях, можно последовать той же схеме доказательства, предложенной в разделе 5.3 статьи [18] и основанной на методе каплинга. Следует отметить, что в отличие от [18] мы используем теорему 7 раздела 1.6, посвященную сильной сходимости общих и локальных численностей частиц в надкритическом КВСБ, вместо того, чтобы обращаться к свойствам фундаментального мартингала, как в статье [18]. Более того, здесь мы иначе определяем функцию g , а именно,

$$g(u) := \alpha f_1(q_{esc} + (1 - q_{esc})u) + (1 - \alpha)q_{esc} - u, \quad u \in [0, 1],$$

где $q_{esc} = P_{\mathbf{0}}(\bar{\tau}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}} = \infty) = 1 - \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(\infty)$ – это вероятность того, что случайное блуждание \mathbf{S} не вернется в стартовую точку. Остальные детали доказательства Шага 3 могут быть опущены.

Шаг 4. Теперь рассмотрим надкритическое КВСБ по \mathbb{Z}^d с конечным множеством катализаторов W и стартовой точкой $\mathbf{w}_i \in W$. В этом случае доказательство теорем 9 и 10 в основном повторяет аргументы шагов 1, 2 и 3. Поэтому мы обсудим только некоторые различия в этих доказательствах.

Модифицируя шаг 1, мы имеем дело с системой уравнений восстановления вместо одного уравнения восстановления, а именно,

$$\kappa_i(t) = \zeta_i(t) + \sum_{j=1}^N \Psi_{i,j} * \kappa_j(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0,$$

где

$$\kappa_i(t) := \mathbb{E}_{\mathbf{w}_i} \exp \left\{ \theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \sum_{j=1}^N \alpha_j \beta_j (m_j - 1) L(t; \mathbf{w}_j) \right\},$$

$$\begin{aligned} \zeta_i(t) &:= \mathbb{E}_{\mathbf{w}_i} \exp \{ \theta \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle + \alpha_i \beta_i (m_i - 1) \min \{ \tau_{\mathbf{w}_i}, t \} \} \\ &\times \mathbb{I} \{ \tau_{\mathbf{w}_i} + w_j \bar{\tau}_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j} > t, j = 1, \dots, N \}, \end{aligned}$$

$$\psi_{i,j}(t) := \int_0^t q e^{q(\alpha_i m_i - 1)(t-u)/(1-\alpha_i)} d_{W_j} \bar{F}_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(u).$$

Обозначая $J(\lambda)$ и $K(\lambda)$ матрицы с соответствующими элементами $\int_0^\infty e^{-\lambda u} \psi_{i,j}(u) du$ и $\delta_{i,j} (1 - \alpha_i m_i q / (\lambda(1 - \alpha_i) + q))$, $i, j = 1, \dots, N$, $\lambda \geq \nu$, можно проверить для каждого $\rho \in \mathbb{R}$ следующее равенство

$$D(\lambda) - \rho I = K(\lambda)(J(\lambda) - \rho I),$$

где, как обычно, I – единичная матрица. Следовательно, поскольку для $\lambda \geq \nu$ диагональная матрица $K(\lambda)$ невырождена, неразложимая матрица $J(\lambda)$ имеет перронов корень $\rho(J(\lambda))$, равный 1, тогда и только тогда, когда $\lambda = \nu$. Отсюда следует, что перронов корень матрицы $J(\Psi(\theta \mathbf{r}))$ (при $\theta > 1$) строго меньше 1.

В том же ключе, как и на шаге 1, можно вывести, что

$$\tilde{\zeta}_i(t) \rightarrow \tilde{\zeta}_i(\infty) = \frac{(\Psi(\theta \mathbf{r}) + q) \left(1 - \sum_{j=1}^N w_j \bar{F}_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}^\theta(\infty) \right)}{\Psi(\theta \mathbf{r}) + q - \alpha_i \beta_i (m_i - 1)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и конечный предел $(\tilde{\zeta}_1(\infty), \dots, \tilde{\zeta}_N(\infty))$ не совпадает тождественно с нулевым вектором. Тогда, применяя теорему восстановления (см., например, теорему 2.2, пункт (ii), статьи [57]) к системе уравнений восстановления

$$\tilde{\kappa}_i(t) = \tilde{\zeta}_i(t) + \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}_{i,j} * \tilde{\kappa}_j(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0,$$

мы приходим к соотношению $\tilde{\kappa}_i(t) \rightarrow \tilde{\kappa}_i(\infty) > 0$ для каждого $i = 1, \dots, N$ при $t \rightarrow \infty$, где

$$(\tilde{\kappa}_1(\infty), \dots, \tilde{\kappa}_N(\infty)) = \left(\tilde{\zeta}_1(\infty), \dots, \tilde{\zeta}_N(\infty) \right) \left(I - J(\Psi(\theta \mathbf{r}))^\top \right)^{-1},$$

а символ $^\top$ означает транспонирование матрицы. Оставшаяся часть доказательства утверждения (2.25) в случае КВСБ с общим множеством катализаторов W и стартовой точкой из W , а также доказательства утверждения (2.26) и теоремы 10 проводятся аналогично аргументам шагов 1, 2 и 3.

Шаг 5. Обращаясь к надкритическому КВСБ по \mathbb{Z}^d с конечным множеством катализаторов W и стартовой точкой $\mathbf{x} \notin W$, мы дополняем множество катализаторов W элементом $\mathbf{w}_{N+1} = \mathbf{x}$ и полагаем $\alpha_{N+1} = 0$, $m_{N+1} = 0$, $G_{N+1}(t) = 1 - e^{-qt}$, $t \geq 0$. Согласно лемме 3 в разделе 1.4 новое КВСБ с множеством катализаторов $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N+1}\}$ является надкритическим, если первоначальное КВСБ надкритическое, и мальтусовские параметры в этих КВСБ совпадают. Тогда можно применить доказанные части теорем 9 и 10 к новому КВСБ и получить искомые утверждения этих теорем для КВСБ с произвольной стартовой точкой.

Таким образом, доказательство теорем 9 и 10 завершено. \square

2.4.3 Альтернативное представление для предельной формы и примеры

Во-первых, докажем теорему 11. С этой целью положим $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$. Проверим включение $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}$. В самом деле, в соответствии с теоремой 23.5 из [132] для каждого $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathcal{R}$ имеем

$$\langle \mathbf{z}(\mathbf{r}), \mathbf{r}' \rangle = \nu \frac{\langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r}' \rangle}{\langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle} \leq \nu \frac{L(\nabla \Psi(\mathbf{r})) + \Psi(\mathbf{r}')}{L(\nabla \Psi(\mathbf{r})) + \Psi(\mathbf{r})} = \nu, \quad (2.39)$$

где функция $L(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$, – это преобразование Лежандра–Фенхеля функции $\Psi(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$, а равенство в последнем неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Другими словами, мы установили, что $\langle \mathbf{z}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle = \nu$ и $\langle \mathbf{z}(\mathbf{r}), \mathbf{r}' \rangle < \nu$, $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$. Таким образом, $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}$.

Теперь проверим, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{Z}$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Поскольку сферический образ замкнутой выпуклой поверхности \mathcal{R} – это единичная сфера (см., например, [133], гл. 1, раздел 4), а функция Ψ гладкая, можно найти $\sigma > 0$ и $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ такие, что $\mathbf{x} = \sigma \nabla \Psi(\mathbf{r})$. Следовательно, в силу (2.39) имеем $\langle \mathbf{x}, \mathbf{r}' \rangle = \sigma \langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r}' \rangle \leq \sigma \langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle$, причем равенство в последнем неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Точка $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, поэтому делаем вывод, что $\sigma = \nu \langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle^{-1}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{z}(\mathbf{r}) \in \mathcal{Z}$.

Таким образом, доказательство теоремы 11 завершено. \square

Рассмотрим пять примеров.

Пример 1. Сосредоточимся на КВСБ с непрерывным временем, являющемся аналогом КВСБ по \mathbb{Z} с дискретным временем, рассмотренного в статье [18]. Тогда множество \mathcal{R} состоит из двух точек r_1 и r_2 , которые являются корнями уравнения $\Psi(r) = \mathbf{v}$. Поскольку $\Psi(0) = 0$ и Ψ – это выпуклая функция, мы видим, что $r_1 < 0 < r_2$. Следовательно, предельная форма фронта \mathcal{P} также состоит из двух точек $\mathbf{v} r_1^{-1}$ и $\mathbf{v} r_2^{-1}$, т.е. для достаточно больших t все частицы расположены почти наверное во множестве

$$t(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = t\{x \in \mathbb{R} : \mathbf{v} r_1^{-1} \leq x \leq \mathbf{v} r_2^{-1}\}.$$

Это заключение приводит к результату статьи [18].

Пример 2а. Сконцентрируемся на простейшем случае КВСБ по \mathbb{Z}^2 , т.е. когда скачки случайного блуждания происходят в соседние точки с вероятностями $1/4$. Тогда

$$\Psi(\mathbf{s}) = \frac{q}{4}(e^{s_1} + e^{s_2} + e^{-s_1} + e^{-s_2}) - q = \frac{q}{2}(\cosh s_1 + \cosh s_2) - q, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2.$$

Решая уравнение $\Psi(r_1, r_2) = \mathbf{v}$ относительно неизвестного r_2 , мы получаем $r_2 = \pm \operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - \cosh r_1)$, где $r_1 \in [-\operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 1), \operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 1)]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(\mathbf{r}) &= (q \sinh r_1 / 2, \pm q \sinh(\operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - \cosh r_1)) / 2) \text{ и } \mathbf{z}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mathbf{v} (\sinh r_1, \pm \sinh(\operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - \cosh r_1)))}{r_1 \sinh r_1 + \operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - \cosh r_1) \sinh(\operatorname{arcosh}(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - \cosh r_1))} \end{aligned}$$

для $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. График \mathcal{P} представлен на рисунке 2.1 слева при $\mathbf{v} = 2$ и $q = 2$.

Пример 2б. Рассмотрим несимметричное КВСБ по \mathbb{Z}^2 , т.е., например, когда случайное блуждание мгновенно сдвигается на вектор $(2,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ или $(0,-1)$ с соответствующими вероятностями $1/2$, $1/6$, $1/6$ или $1/6$. Тогда $\Psi(\mathbf{s}) = q(e^{2s_1}/2 + e^{-s_1}/6 + \cosh s_2/3) - q$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$. Решая уравнение $\Psi(r_1, r_2) = \mathbf{v}$ относительно r_2 , получаем $r_2 = \pm \operatorname{arcosh}(3\mathbf{v}q^{-1} + 3 - 3e^{2r_1}/2 - e^{-r_1}/2)$, где $r_1 \in \mathbb{R}$ таково, что $3e^{3r_1} - 2(3\mathbf{v}q^{-1} + 2)e^{r_1} + 1 \leq 0$. Отсюда следует, что

$$\nabla \Psi(\mathbf{r}) = (q(e^{2r_1} - e^{-r_1}/6), \pm q \sinh(\operatorname{arcosh}(3\mathbf{v}q^{-1} + 3 - 3e^{2r_1}/2 - e^{-r_1}/2)) / 3).$$

Аналогичным образом можно выписать точную формулу для $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. График множества \mathcal{P} представлен на рисунке 2.1 справа при $\mathbf{v} = 1$ и $q = 3$.

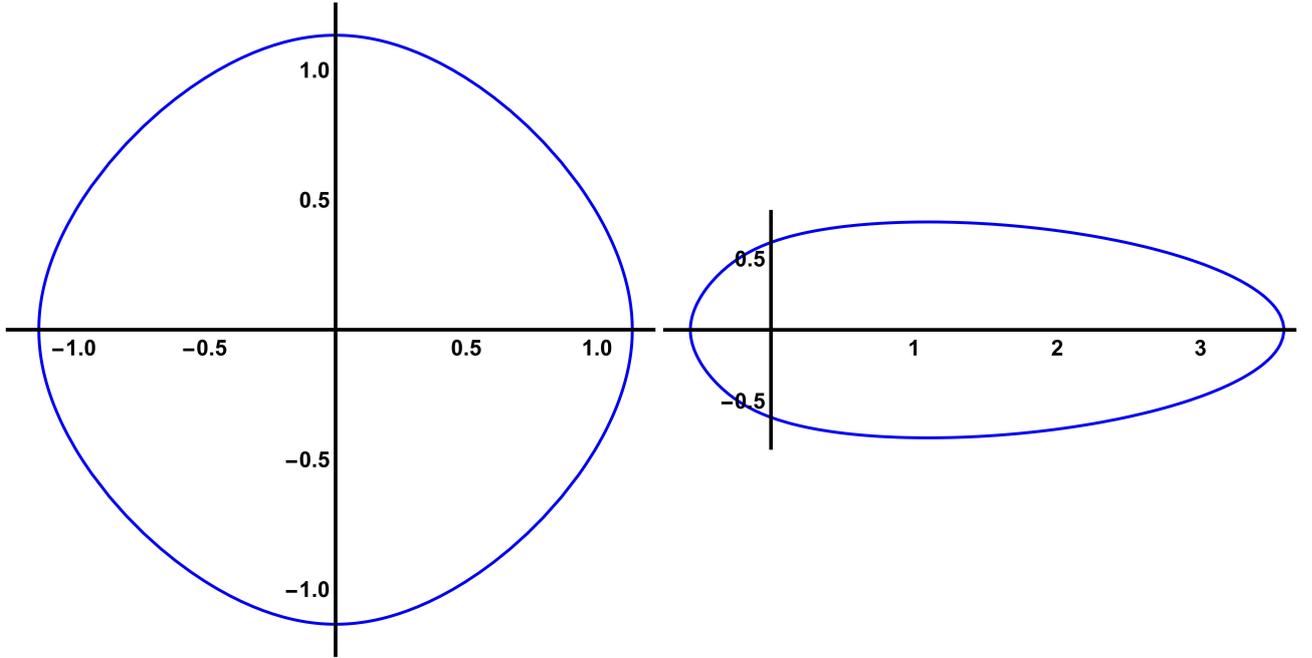


Рисунок 2.1 — Слева и справа графики множества \mathcal{P} соответственно для примеров 2а и 2б.

Пример 2в. Сосредоточимся на несимметричном КВСБ по \mathbb{Z}^2 с неограниченными размерами скачков. А именно, пусть случайное блуждание мгновенно перемещается на вектор $(n,0)$, $(-n,0)$, $(0,1)$ или $(0,-1)$, где $n \in \mathbb{N}$, с соответствующими вероятностями $\sigma_1^{n-1}e^{-\sigma_1}/(4(n-1)!)$, $\sigma_2^{n-1}e^{-\sigma_2}/(4(n-1)!)$, $1/4$ или $1/4$. Другими словами, скачки случайного блуждания вправо и влево подчиняются сдвинутому распределению Пуассона с соответствующими параметрами $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$, в то время как смещение случайного блуждания вверх или вниз происходит только в соседние точки. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{s}) &= q \left(\frac{e^{-\sigma_1}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{s_1 n} \sigma_1^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{-\sigma_2}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-s_1 n} \sigma_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\cosh s_2}{2} \right) - q \\ &= q \left(\frac{e^{\sigma_1(e^{s_1}-1)+s_1}}{4} + \frac{e^{\sigma_2(e^{-s_1}-1)-s_1}}{4} + \frac{\cosh s_2}{2} \right) - q, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Решая уравнение $\Psi(r_1, r_2) = \mathbf{v}$ относительно неизвестного r_2 , приходим к равенству $r_2 = \pm \operatorname{arcosh} \left(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - e^{\sigma_1(e^{r_1}-1)+r_1}/2 - e^{\sigma_2(e^{-r_1}-1)-r_1}/2 \right)$, где значение $r_1 \in \mathbb{R}$ такое, что аргумент функции arcosh в предыдущей формуле не меньше, чем 1. Следовательно,

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(\mathbf{r}) &= \left(\frac{q}{4} \left(e^{\sigma_1(e^{r_1}-1)+r_1} (\sigma_1 e^{r_1} + 1) - e^{\sigma_2(e^{-r_1}-1)-r_1} (\sigma_2 e^{-r_1} + 1) \right), \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{q}{2} \sinh \left(\operatorname{arcosh} \left(2\mathbf{v}q^{-1} + 2 - \frac{1}{2} e^{\sigma_1(e^{r_1}-1)+r_1} - \frac{1}{2} e^{\sigma_2(e^{-r_1}-1)-r_1} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

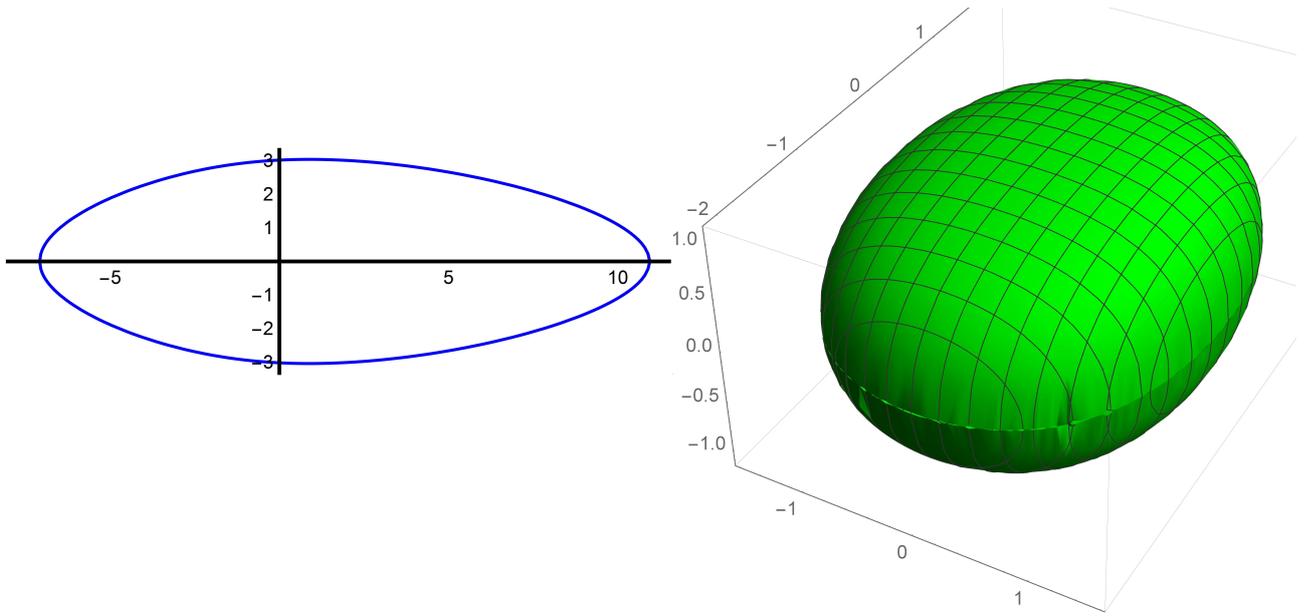


Рисунок 2.2 — Слева и справа соответствующие графики множества \mathcal{P} для примеров 2в и 3.

а точная формула для $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$, может быть выписана аналогичным образом. График множества \mathcal{P} представлен на рисунке 2.2 слева при $\nu = 4$, $q = 8$, $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_2 = 1$.

Пример 3. Рассмотрим КВСБ по \mathbb{Z}^3 такое, что координаты случайного блуждания независимы и его скачок $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ имеет следующие маргинальные распределения. Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$P(Y_1 = n) = P(Y_1 = -n) = \frac{\sigma_1^{n-1} e^{-\sigma_1}}{2(n-1)!},$$

$$P(Y_2 = n) = P(Y_2 = -n) = \frac{\sigma_2^{n-1} e^{-\sigma_2}}{2(n-1)!}, \quad P(Y_3 = 1) = P(Y_3 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку функция $\Psi(\mathbf{s})$ может быть представлена в виде $\Psi(\mathbf{s}) = q (\mathbb{E} e^{(\mathbf{s}, \mathbf{Y})} - 1)$, имеем

$$\Psi(\mathbf{s}) = q \frac{V(\sigma_1, s_1)}{2} \cdot \frac{V(\sigma_2, s_2)}{2} \cdot \cosh s_3 - q, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3,$$

где $V(\sigma, u) := e^{\sigma(e^u - 1) + u} + e^{\sigma(e^{-u} - 1) - u}$, $\sigma > 0$ и $u \in \mathbb{R}$. Решая уравнение $\Psi(r_1, r_2, r_3) = \nu$ относительно неизвестного r_3 , мы получаем

$$r_3 = \pm \operatorname{arcosh} \frac{4\nu q^{-1} + 4}{V(\sigma_1, r_1) V(\sigma_2, r_2)}, \quad (2.40)$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что аргумент функции arcosh в формуле (2.40) не меньше, чем 1. Тогда

$$\nabla \Psi(\mathbf{r}) = (\mathbf{v} + q) \left(\frac{e^{\sigma_1(e^{r_1}-1)+r_1} (\sigma_1 e^{r_1} + 1) - e^{\sigma_1(e^{-r_1}-1)-r_1} (\sigma_1 e^{-r_1} + 1)}{V(\sigma_1, r_1)}, \right. \\ \left. \frac{e^{\sigma_2(e^{r_2}-1)+r_2} (\sigma_2 e^{r_2} + 1) - e^{\sigma_2(e^{-r_2}-1)-r_2} (\sigma_2 e^{-r_2} + 1)}{V(\sigma_2, r_2)}, \frac{V(\sigma_1, r_1)V(\sigma_2, r_2)}{4\mathbf{v}q^{-1} + 4} \sinh r_3 \right),$$

где r_3 описывается соотношением (2.40). Аналогично можно написать явную формулу для $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. График множества \mathcal{P} представлен на рисунке 2.2 справа, когда $\mathbf{v} = 0.5$, $q = 1$, $\sigma_1 = 0.2$ и $\sigma_2 = 0.5$.

2.4.4 Скорость сходимости в предельной теореме для фронта КВСБ

В подразделах 2.4.4 и 2.4.5 мы считаем выполненным уже встречавшееся в теореме 8 в разделе 1.6 известное логарифмическое моментное условие (см., например, [46], гл. 2, раздел 3), т.е.

$$\mathbb{E} \xi_k \ln \xi_k < \infty, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.41)$$

где, как обычно, выражение $s \ln s$ при $s = 0$ полагается равным 0.

Напомним, что $M_t = \max\{X^v(t) : v \in Z(t)\}$, – максимум КВСБ по \mathbb{Z} в момент времени t , т.е. положение самой правой частицы среди существующих в КВСБ в момент времени t . Согласно [18] для надкритического КВСБ по \mathbb{Z} при выполнении условий (2.20) и (2.22) справедлива сильная предельная теорема $M_t/t \rightarrow \mu$ п.н. на множестве \mathcal{I} при $t \rightarrow \infty$, где $\mu := \mathbf{v}/r$ и $r > 0$ таково, что $\Psi(r) = \mathbf{v}$. Аналогичный результат для КВСБ по \mathbb{Z}^d установлен в подразделе 2.4.1 и утверждает, что для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ имеют место равенства

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists T_1 = T_1(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq T_1 \text{ и } \forall v \in Z(t), \mathbf{X}^v(t)/t \notin \mathcal{O}_\varepsilon) = 1, \quad (2.42)$$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \mathbf{v}) \exists T_2 = T_2(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq T_2 \exists v \in Z(t), \mathbf{X}^v(t)/t \notin \mathcal{Q}_\varepsilon | \mathcal{I}) = 1, \quad (2.43)$$

где множества \mathcal{O}_ε , $\varepsilon > 0$, и \mathcal{Q}_ε , $\varepsilon \in (0, \mathbf{v})$, определены соответственно в соотношениях (2.23) и (2.24). Напомним, что $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{P} = \partial\mathcal{Q} = \partial\mathcal{O}$.

Таким образом, в многомерном случае аналогом предела μ является поверхность $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, называемая *предельной формой фронта* популяции частиц в КВСБ. Заметим, что каждое множество \mathcal{Q}_ε , \mathcal{Q} или $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ выпукло как пересечение полупространств (см., напр., теорему 2.1 в монографии [132]). В подразделе 2.4.1 в теореме 11 также выведено альтернативное представление для множества \mathcal{P} .

В статье [18] изучались флуктуации максимума M_n относительно μn при $n \rightarrow \infty$ в КВСБ по \mathbb{Z} с одним катализатором. Другими словами, была найдена скорость сходимости в сильной предельной теореме для M_n и оказалось, что $M_n - \mu n$ имеет нетривиальное предельное распределение. Теперь мы обобщим эти результаты на случай многомерной решетки и произвольного конечного числа катализаторов. Понятие максимального положения частицы на многомерной решетке не определено, и неочевидно, каким образом рассматривать флуктуации положений частиц в момент t относительно масштабированной предельной поверхности.

Мы предлагаем следующий подход. В силу формулы (2.27) для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ найдется единственное значение параметра $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}$ такое, что $\langle \mathbf{x}, \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle = \nu$, а для остальных точек $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$ верно $\langle \mathbf{y}, \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle < \nu$. Отсюда следует, что $\mathbf{r}(\mathbf{x})/|\mathbf{r}(\mathbf{x})|$ – вектор нормали к поверхности \mathcal{P} в точке \mathbf{x} . Предлагается измерять “амплитуду” флуктуаций положений частиц относительно уровня $\mathbf{x}t$ для предельной точки $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, проецируя координаты $\mathbf{X}^v(t)$ частицы $v \in Z(t)$ на вектор нормали $\mathbf{r}(\mathbf{x})/|\mathbf{r}(\mathbf{x})|$ к предельной поверхности в точке \mathbf{x} . Пусть $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$ и $v_{\mathbf{z}} \in Z(t)$ обозначает такую последовательность частиц, что $\mathbf{X}^{v_{\mathbf{z}}}(t)/t \rightarrow \mathbf{z}$ п.н. на событии \mathcal{I} при $t \rightarrow \infty$ (такая последовательность всегда существует на событии \mathcal{I} в силу теоремы 10 из подраздела 2.4.1). Тогда для последовательности частиц $v_{\mathbf{y}} \in Z(t)$, сопоставленной $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, имеем $\langle \mathbf{X}^{v_{\mathbf{y}}}(t), \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle / t \rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle < \nu$, $t \rightarrow \infty$, п.н. на событии \mathcal{I} . При этом $\langle \mathbf{X}^{v_{\mathbf{x}}}(t), \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle / t \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{r}(\mathbf{x}) \rangle = \nu$, $t \rightarrow \infty$, п.н. на \mathcal{I} . Поэтому основной вклад в асимптотическое поведение $M_t(\mathbf{r}) - \nu t$ будет вносить последовательность частиц $v_{\mathbf{x}} \in Z(t)$, а не $v_{\mathbf{y}} \in Z(t)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, при $t \rightarrow \infty$, где $M_t(\mathbf{r}) := \max \{ \langle \mathbf{X}^v(t), \mathbf{r} \rangle : v \in Z(t) \}$.

Таким образом, наш подход, состоящий в изучении предельного поведения $M_t(\mathbf{r}) - \nu t$ при $t \rightarrow \infty$ и каждом $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$, имеет два достоинства. Во-первых, мы получаем способ измерения относительных колебаний фронта популяции частиц в каждой точке предельной формы фронта распространения популяции.

Во-вторых, на изучаемую величину не влияют флуктуации фронта в других точках его предельной формы.

Заметим, что при $d = 1$ случайная величина M_t принимает целочисленные значения, а вычитаемая линейная корректировка μt действительнозначна. Поэтому ниже в следствии 1 возникает поправочный член $\{\mu t + y\}$, где, как обычно, $\{s\} \in [0,1)$ – дробная часть числа $s \geq 0$, а $[s]$ – его целая часть, и $s = [s] + \{s\}$. Аналогично при $d > 1$ случайная величина $M_t(\mathbf{r})$ имеет решетчатое распределение, если все попарные отношения координат вектора \mathbf{r} представляют собой рациональные числа. А именно, если $r_i = \bar{r}_i r^*$, где $\bar{r}_i \in \mathbb{Z}$, причем наибольший общий делитель всех \bar{r}_i , $i = 1, \dots, d$, есть 1, то $M_t(\mathbf{r})$ принимает значения вида $r^* k$, $k \in \mathbb{Z}$, (аналогичный вывод см., напр., в [134], Лемма 13.3.1, с. 402). Наоборот, если хотя бы одно из отношений координат вектора \mathbf{r} иррационально, то в области значений величины $M_t(\mathbf{r})$ имеются точки “сгущения”, поэтому соответствующее распределение нерешетчатое. Этим объясняется введение поправочной функции $\chi(t; y) := r^* \{\nu t / r^* + y / r^*\}$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, в первом случае, а во втором случае для удобства положим $\chi(t; y) = 0$ при всех $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат подразделов 2.4.4 и 2.4.5.

Теорема 12. Пусть условия (2.20), (2.22) и (2.41) выполнены для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d с мальтусовским параметром ν . Тогда при каждом $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(M_t(\mathbf{r}) - \nu t \leq y) - \varphi \left(e^{-y + \chi(t; y)}; \mathbf{x} \right) \right) = 0, \quad (2.44)$$

где функция $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$, $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, является решением системы уравнений (1.76) и (1.77). При этом функция $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$ стремится к вероятности $1 - \mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\mathcal{I})$ локального вырождения популяции КВСБ, когда $\lambda \rightarrow \infty$, при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$.

Важно, что предельная функция φ в теореме 12 определена однозначно, поскольку решение системы (1.77) ищется в классе функций \mathcal{C}_{θ} , а вектор $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ имеет координаты $\theta_j > 0$, равные $\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{y - \chi(t; y)} \mathbb{P}_{\mathbf{w}_j}(M_t(\mathbf{r}) > \nu t + y))$. Точное значение последнего выражения найдено в лемме 15 ниже (обозначается c_*) и ее аналоге в случае нескольких катализаторов и многомерной решетки.

Утверждение теоремы о том, что функция $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$ стремится к вероятности $1 - P_{\mathbf{x}}(\mathcal{I})$ локального вырождения популяции КВСБ, когда $\lambda \rightarrow \infty$, при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, следует из теоремы 8 раздела 1.6. Это означает, что получено полное описание флуктуаций фронта распространения популяции частиц в КВСБ в случае ее локального невырождения. Если же популяция вырождается локально (с вероятностью $1 - P_{\mathbf{x}}(\mathcal{I})$), то, как отмечалось выше, либо КВСБ вырождается, либо с некоторого момента времени образует систему нескольких случайных блужданий (без ветвления). В обоих последних случаях не может быть речи об исследовании “фронта популяции”.

В качестве следствия выпишем результат, относящийся к изучению максимума КВСБ по \mathbb{Z} , который был установлен в [18] в предположении, что имеется единственный катализатор, расположенный в начале координат (мы не налагаем таких ограничений).

Следствие 1. *Если выполнены условия (2.20), (2.22) и (2.41) для надкритического КВСБ по \mathbb{Z} с мальтусовским параметром ν , то при каждых $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(P_x(M_t - \mu t \leq y) - \varphi \left(e^{-ry + \{\mu t + y\}}; x \right) \right) = 0. \quad (2.45)$$

Доказательство теоремы 12 и следствия 1 существенно отличается от аргументов статьи [18], хотя в обоих исследованиях важную роль играет теория восстановления. В то время как в [18] используются оценки сверху и снизу для исследуемой вероятности, в подразделе 2.4.5 выводится уравнение для этой вероятности и затем находится ее асимптотическое поведение. Преимущество нашего подхода состоит в том, что доказательство, проведенное изначально для случая одного катализатора и размерности решетки 1, естественно обобщается на случай многих катализаторов и произвольной размерности решетки.

2.4.5 Доказательство теоремы о флуктуациях фронта КВСБ

Для ясности изложения вначале рассмотрим КВСБ по \mathbb{Z} с единственным катализатором w_1 , расположенным, без ограничения общности, в начале координат, т.е. $W = \{w_1\}$ с $w_1 = 0$, а также стартовой точкой 0.

Пусть $E(t; u) := P_0(\exists v \in Z(t) : X^v(t) > u) = P_0(M_t > u)$, $t, u \geq 0$. В силу лемм 6 и 7, а также предположения (2.22) вероятность $E(t; u)$, $t, u \geq 0$, удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению типа свертки

$$\begin{aligned} E(t; u) &= \alpha_1 \int_0^t (1 - f_1(1 - E(t-s; u))) dG_1(s) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_0^t E(t-s; u) dG_{1,1}(s) + I(t; u), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned} I(t; u) &= P_0(S(t) > u) - \int_0^t P_0(S(t-s) > u) dF_{0,0}(s) \\ &- \alpha_1 \int_0^t P_0(S(t-s) > u) d(G_1(s) - G_1 * F_{0,0}(s)). \end{aligned} \quad (2.47)$$

В следующей лемме содержатся вспомогательные результаты, относящиеся к вероятностям больших уклонений рассматриваемого случайного блуждания (без ветвления).

Лемма 10. Пусть выполнены условия (2.20) и (2.22) для случайного блуждания S . Тогда при всех $s, t, x \geq 0$ справедливо неравенство

$$P_0(S(t) \geq x) \leq e^{-sx + t\Psi(s)}. \quad (2.48)$$

Более того, при всех $t \geq 0$, $\theta := x/t \geq qEY^1$, верна оценка

$$P_0(S(t) \geq x) \leq e^{-t\Lambda(\theta)}, \quad (2.49)$$

где функция

$$\Lambda(\vartheta) := \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\vartheta s - \ln E_0 e^{sS(1)} \right) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \Psi(s)), \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$

есть функция уклонений случайной величины $S(1)$ (см., например, [112], гл. 6, раздел 1). Если же $\theta = x/t > qEY^1$, $x \in \mathbb{Z}$, $t > 0$, то для всех таких $x, t \rightarrow \infty$, при каждом $\varepsilon_1 > 0$ и $\Theta_1 > qEY^1 + \varepsilon_1$ равномерно по $\theta \in [qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1]$ имеем

$$P_0(S(t) \geq x) \sim \frac{e^{-t\Lambda(\theta)}}{(1 - e^{-\lambda(\theta)}) \sqrt{2\pi t D(\theta)}}, \quad (2.50)$$

где $\lambda(\vartheta) := \Lambda'(\vartheta) > 0$, когда $\vartheta > ES(1) = qEY^1$, а $D(\vartheta) := \Psi''(s)|_{s=\lambda(\vartheta)} > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью представления (2.2) и экспоненциального неравенства Чебышева (говорят также о неравенстве Маркова), примененного к случайному блужданию с дискретным временем (см., напр., неравенство (1.1.19) из теоремы 1.1.1 в [81], гл. 1, раздел 1), в случае непрерывного времени имеем

$$\begin{aligned} P_0(S(t) \geq x) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(\Pi(t) = j) P_0\left(\sum_{i=1}^j Y^i \geq x\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{-qt} \frac{(qt)^j}{j!} e^{-sx} \left(\mathbb{E} e^{sY^1}\right)^j = e^{-sx+t\Psi(s)} \end{aligned}$$

при всех $s, t, x \geq 0$. Таким образом, утверждение (2.48) установлено. Неравенство (2.49) следует из доказанного неравенства (2.48) и определения функции Λ .

Учитывая представление (2.2) и привлекая аппарат характеристических функций, нетрудно проверить, что случайное блуждание S – это процесс с независимыми приращениями. Более того, как и при доказательстве неравенства (2.48), выводим, что $\mathbb{E}_0 e^{sS(t)} = e^{t\Psi(s)}$. Положим $t_k := [2^k t]/2^k$. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем $t_k \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $t \rightarrow \infty$. Кроме того, $t_k \leq t$ и $t - t_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Применяя асимптотическую формулу (6.1.17) из следствия 6.1.7 книги [112], гл. 6, раздел 1, справедливую для случайного блуждания с дискретным временем, в условиях доказываемой леммы получаем

$$\begin{aligned} P_0(S(t_k) \geq x) &= P_0\left(\sum_{i=1}^{[2^k t]} (S(i/2^k) - S((i-1)/2^k)) \geq x\right) \\ &\sim \frac{e^{-[2^k t]\Lambda_k(x/[2^k t])}}{(1 - e^{-\lambda_k(x/[2^k t])})\sqrt{2\pi[2^k t]D_k(x/[2^k t])}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

при каждом фиксированном $k \in \mathbb{Z}_+$ и $x, t \rightarrow \infty$. Асимптотическое соотношение (2.51) выполнено равномерно по $x/[2^k t] \in [E_0 S(1/2^k) + \varepsilon_2, \Theta_2]$, где ε_2 – любое положительное число, а значение $\Theta_2 > E_0 S(1/2^k)$ тоже выбирается произвольно.

В формуле (2.51) функция

$$\Lambda_k(\vartheta) := \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(s\vartheta - \ln \mathbb{E}_0 e^{sS(1/2^k)} \right), \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$

есть функция уклонений случайной величины $S(1/2^k)$, $\lambda_k(\vartheta) := \Lambda'_k(\vartheta)$ и $D_k(\vartheta) := (\ln \mathbb{E}_0 e^{sS(1/2^k)})''|_{s=\lambda_k(\vartheta)}$. Легко видеть, что

$$\Lambda_k(\vartheta) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \Psi(s)/2^k) = \Lambda(2^k \vartheta) / 2^k, \quad \lambda_k(\vartheta) = \lambda(2^k \vartheta)$$

и $D_k(\vartheta) = \Psi''(s)|_{s=\lambda(2^k\vartheta)}/2^k$ при всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ и каждом $k \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому соотношение (2.51) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathbb{P}(S(t_k) \geq x) \sim \frac{e^{-t_k\Lambda(\theta_k)}}{(1 - e^{-\lambda(\theta_k)}) \sqrt{2\pi t_k D(\theta_k)}}, \quad t, x \rightarrow \infty, \quad (2.52)$$

при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ равномерно по $\theta_k := x/t_k \in [qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1]$, если рассмотреть $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/2^k$ и $\Theta_2 = \Theta_1/2^k$. Однако равномерность сходимости по θ_k означает также равномерную сходимость по $k \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, формула (2.50) установлена при $t = n/2^k$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для завершения доказательства леммы 10 осталось перейти от случая двоично-рациональных значений t к произвольным действительным. Напомним, что $\theta = x/t$ и $\theta_k = x/t_k$. Ясно, что $t \geq t_k$ и $\theta \leq \theta_k$. Обозначим также $g(\hat{t}, \hat{\theta}) := \hat{t}\Lambda(\hat{\theta}) + \ln \hat{t}/2$ и $1/h(\hat{\theta}) := (1 - e^{-\lambda(\hat{\theta})}) \sqrt{2\pi D(\hat{\theta})}$, $\hat{t} > 0$, $\hat{\theta} > qEY^1$. Тогда при всех достаточно больших значениях t и всех $\theta, \theta_k \in [qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1]$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathbb{P}_0(S(t) \geq x)}{h(\theta)e^{-g(t,\theta)}} - \frac{\mathbb{P}_0(S(t_k) \geq x)}{h(\theta_k)e^{-g(t_k,\theta_k)}} \right| \leq \frac{|\mathbb{P}_0(S(t) \geq x) - \mathbb{P}_0(S(t_k) \geq x)|}{h(\theta)e^{-g(t,\theta)}} \\ & + \frac{\mathbb{P}_0(S(t_k) \geq x)}{h(\theta_k)e^{-g(t_k,\theta_k)}} \frac{|h(\theta)e^{-g(t,\theta)} - h(\theta_k)e^{-g(t_k,\theta_k)}|}{h(\theta)e^{-g(t,\theta)}} \\ & \leq \frac{q\sqrt{t}(t-t_k)}{e^{-t\Lambda(\Theta_1)}} \max(h(\vartheta))^{-1} + C_1(t-t_k) + C_2e^{g(t,\theta)-g(t_k,\theta_k)}(t-t_k), \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $\max(h(\vartheta))^{-1}$ берется по значениям ϑ из промежутка $[qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1]$, а постоянные $C_i = C_i(qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1)$, $i = 1, 2$, не зависят от θ и θ_k в силу соотношения (2.52). Действительно, последнее неравенство справедливо, поскольку условие (2.22) влечет, что

$$|\mathbb{P}_0(S(t) \geq x) - \mathbb{P}_0(S(t_k) \geq x)| \leq \mathbb{P}_0(S(t-t_k) \neq 0) \leq 1 - e^{-q(t-t_k)} \leq q(t-t_k),$$

а, кроме того, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \left| h(\theta)e^{-g(t,\theta)} - h(\theta_k)e^{-g(t_k,\theta_k)} \right| = \left| \left(h(\theta)e^{-g(t,\theta)} - h(\theta_k)e^{-g(t,\theta)} \right) \right. \\ & + \left. \left(h(\theta_k)e^{-g(t,\theta)} - h(\theta_k)e^{-g(t,\theta_k)} \right) + \left(h(\theta_k)e^{-g(t,\theta_k)} - h(\theta_k)e^{-g(t_k,\theta_k)} \right) \right| \\ & \leq e^{-g(t,\theta)} (\theta_k - \theta) \max h'(\vartheta) + h(\theta_k)e^{-g(t,\theta)} (g(t,\theta_k) - g(t,\theta)) \\ & + h(\theta_k)e^{-g(t_k,\theta_k)} (g(t,\theta_k) - g(t_k,\theta_k)) \leq e^{-g(t,\theta)} \theta \frac{t-t_k}{t_k} \max h'(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h(\theta_k) e^{-g(t, \theta)} t (\theta_k - \theta) \Lambda'(\theta_1) + h(\theta_k) e^{-g(t_k, \theta_k)} ((t - t_k) \Lambda(\theta_k) + \ln(t/t_k)/2) \\
& \leq e^{-g(t, \theta)} \Theta_1 \frac{t - t_k}{t - 1} \max h'(\vartheta) + h(\theta_k) e^{-g(t, \theta)} \frac{t}{t - 1} (t - t_k) \Theta_1 \lambda(\Theta_1) \\
& + h(\theta_k) e^{-g(t_k, \theta)} (t - t_k) \Lambda(\Theta_1) + h(\theta_k) e^{-g(t_k, \theta)} \frac{t - t_k}{t - 1}.
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенства $1 - e^{-u} \leq u$, $\ln u \leq u - 1$, $u \geq 0$, $g(t_k, \theta_k) \geq g(t_k, \theta)$, а также формулу Лагранжа для конечных приращений.

Наконец, рассмотрим $k = k(t)$ и положим, например, $k(t) = [t]^2$. Тогда $t - t_k \leq 2^{-k(t)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $e^{g(t, \theta) - g(t_k, \theta)} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1]$. Поэтому из соотношения (2.53) следует, что

$$\left| \frac{P_0(S(t) \geq x)}{h(\theta) e^{-g(t, \theta)}} - \frac{P_0(S(t_k) \geq x)}{h(\theta_k) e^{-g(t_k, \theta_k)}} \right| \rightarrow 0, \quad x, t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\theta, \theta_k \in [qEY^1 + \varepsilon_1, \Theta_1]$, что вместе с соотношением (2.52) влечет требуемую формулу (2.50).

Лемма 10 полностью доказана. \square

Напомним, что из определения 1 надкритического режима КВСБ (см. раздел 1.3) следуют два соотношения $\alpha_1 m_1 + (1 - \alpha_1) F_{0,0}(\infty) > 1$ и $\alpha_1 m_1 \check{G}_1(\nu) + (1 - \alpha_1) \check{G}_1(\nu) \bar{F}_{0,0}(\nu) = 1$, что в терминах функции

$$G(t) = \alpha_1 m_1 G_1(t) + (1 - \alpha_1) G_1 * \bar{F}_{0,0}(t), \quad t \geq 0,$$

означает $\check{G}(\nu) = 1$.

Лемма 11. Пусть выполнены условия (2.20) и (2.22). Тогда при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-r\{\mu t + y\}} \int_0^t I(t - u; \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = c_* e^{-ry},$$

где постоянная

$$c_* := \frac{e^{-r} (1 - \check{F}_{0,0}(\nu)) (1 - \alpha_1 \check{G}_1(\nu))}{\sqrt{2} (1 - e^{-r}) \Psi'(r) \int_0^{\infty} s e^{-\nu s} dG(s)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Lambda(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, является преобразованием Лежандра–Фенхеля функции $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, (см., напр., [112], гл. 6, раздел 1). В том числе это означает, что $\Lambda'(\vartheta) = \lambda(\vartheta) = \lambda$ тогда и только тогда, когда $\Psi'(\lambda) = \vartheta$ для всех $\vartheta, \lambda \in \mathbb{R}$, причем $\Lambda(\vartheta) = \lambda(\vartheta)\vartheta - \Psi(\lambda(\vartheta))$. Напомним, что $\Psi(r) = \nu$, и обозначим $\Psi'(r) = \theta_0$. Следовательно, $\Lambda'(\theta_0) = \lambda(\theta_0) = r$ и $\Lambda(\theta_0) = r\theta_0 - \nu$.

В силу выпуклости функции Ψ , а также равенств $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(r) = \nu$, имеем $\Psi'(0) < \nu/r = \mu$, где $\Psi'(0) = E_0 S(1) = qEY^1$. Поскольку функция $\Psi'(s)$, $s \in \mathbb{R}$, возрастающая, то $\theta_0 = \Psi'(r) > \Psi'(0)$. Функция $\Lambda(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, достигает своего минимального значения, равного 0, в точке $\vartheta = E_0 S(1) = \Psi'(0)$, поэтому $\Lambda(\theta_0) > 0$. Другими словами, $r\theta_0 - \nu > 0 = r\mu - \nu$, т.е. $\theta_0 > \mu$.

Покажем, что для каждого $y \in \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon \in (0, \theta_0 - \mu)$ справедливо соотношение

$$\int_{\Gamma(t)} I(t-u; \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.54)$$

где

$$\Gamma(t) := [0, t] \setminus [t - t\mu(\theta_0 - \varepsilon)^{-1}, t - t\mu(\theta_0 + \varepsilon)^{-1}] \subset \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Из доказательств лемм 6 и 7 раздела 2.5 при выполнении условия (2.22) следуют неравенства $0 \leq I(t; u) \leq P_0(S(t) > u)$ при всех $t, u \geq 0$. Воспользовавшись оценкой (2.48), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} I(t-u; \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) &\leq \int_{\Gamma(t)} P_0(S(t-u) > \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &=: J_1(t) + J_2(t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

для всех $t \geq 0$. Последний интеграл представили в виде суммы двух интегралов $J_1(t)$ и $J_2(t)$, отвечающих соответственно промежуткам интегрирования $\Gamma(t) \cap [0, t - v(t)]$ и $\Gamma(t) \cap (t - v(t), t]$, где $v(t)$, $t \geq 0$, – некоторая возрастающая к бесконечности функция, $v(t) = o(t)$, $t \rightarrow \infty$.

Для оценки интеграла $J_1(t)$ применяем неравенство (2.49) к подынтегральному выражению при достаточно больших значениях t , в результате чего получаем

$$\begin{aligned} P_0(S(t-u) > \mu t + y) &\leq \exp \left\{ -(t-u) \Lambda \left(\frac{\mu t + y}{t-u} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -(t-u) \left(r \cdot \frac{\mu t + y}{t-u} - \nu \right) \right\} \exp \{ -(t-u) V(t, u) \} \\ &= \exp \{ -ry - \nu u - (t-u) V(t, u) \}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

где функция $V(t, u) := \Lambda((\mu t + y)/(t-u)) - r(\mu t + y)/(t-u) + \nu$, $t > u$, $u \geq 0$, принимает только неотрицательные значения в силу определения функции Λ . При этом $V(t, u) = 0$, если и только если $\Lambda'((\mu t + y)/(t-u)) =$

$\lambda((\mu t + y)/(t - u)) = r$. Последнее равенство имеет место при $(\mu t + y)/(t - u) = \theta_0$, т.е. когда $u = t - (\mu t + y)/\theta_0$. Таким образом, если $|\theta_0 y/(\mu t + y)| < \varepsilon$ (что верно для всех достаточно больших значений t), то $u \notin \Gamma(t)$. Поэтому $V(t, u) \neq 0$ при $u \in \Gamma(t)$ и всех достаточно больших t . Поскольку функция $\Lambda(\vartheta) - r\vartheta + \nu$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, выпуклая, она достигает своего минимального значения в точке $\vartheta = r$. Отсюда следует, что для любого ε и достаточно больших t существует $\delta > 0$ такое, что $V(t, u) \geq \delta$ при всех $u \in \Gamma(t)$. С учетом формулы (2.56) и теоремы 25 книги [121], с. 30, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq e^{-ry} \int_{\Gamma(t) \cap [0, t-v(t)]} e^{-\nu u - (t-u)\delta} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq e^{-ry - (t-v(t))\nu - v(t)\delta} \int_0^{t-v(t)} e^{(t-v(t)-u)(\nu-\delta)} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\sim e^{-ry - v(t)\delta} \left(\int_0^{\infty} s e^{-\nu s} dG(s) \right)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\delta s} ds = o(1) \end{aligned} \quad (2.57)$$

при $t \rightarrow \infty$, если $v(t) \rightarrow \infty$.

Оценивая интеграл $J_2(t)$, применяем неравенство (2.48) при $s = r + \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, а также теорему 25 книги [121], с. 30. В результате имеем

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq \int_{t-v(t)}^t e^{-(r+\varepsilon_0)(\mu t + y) + (t-u)\Psi(r+\varepsilon_0)} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq e^{-(r+\varepsilon_0)y - \nu t - t\mu\varepsilon_0 + v(t)\Psi(r+\varepsilon_0)} \int_0^t d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq e^{-(r+\varepsilon_0)y - t\mu\varepsilon_0 + v(t)\Psi(r+\varepsilon_0)} \left(\nu \int_0^{\infty} s e^{-\nu s} dG(s) \right)^{-1} = o(1) \end{aligned} \quad (2.58)$$

при $t \rightarrow \infty$, если $v(t) = o(t)$. Сочетание установленных формул (2.55), (2.57) и (2.58) влечет искомое соотношение (2.54).

Для завершения доказательства леммы 11 осталось показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-r\{\mu t + y\}} \int_{t-t\mu(\theta_0-\varepsilon)^{-1}}^{t-t\mu(\theta_0+\varepsilon)^{-1}} I(t-u; \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = c_* e^{-ry}. \quad (2.59)$$

Вначале изучим асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ интеграла

$$\begin{aligned} J_3(t) &:= \int_{t-t\mu/(\theta_0-\varepsilon)}^{t-t\mu/(\theta_0+\varepsilon)} P_0(S(t-u) > \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &= - \int_{\mu/(\theta_0+\varepsilon)}^{\mu/(\theta_0-\varepsilon)} P_0(S(tv) > \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(t(1-v)), \end{aligned}$$

в котором мы сделали замену переменных $v = 1 - u/t$, т.е. $u = t(1 - v)$. Заметим, что $P_0(S(tv) > \mu t + y) = P_0(S(tv) \geq \mu t + y + 1 - \{\mu t + y\})$. Поэтому, применяя формулу (2.50), получаем, что

$$J_3(t) \sim - \int_{\mu/(\theta_0+\varepsilon)}^{\mu/(\theta_0-\varepsilon)} \frac{e^{-tv\Lambda(\mu/v+\rho/v)}}{(1 - e^{-\lambda(\mu/v+\rho/v)}) \sqrt{2\pi tv D(\mu/v + \rho/v)}} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(t(1-v))$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\rho = \rho(t) := (y + 1 - \{\mu t + y\})/t$. Исследование асимптотического поведения последнего интеграла сводится к изучению следующей функции:

$$J_3(t) \sim \sqrt{t} \int_{\mu/(\theta_0+\varepsilon)}^{\mu/(\theta_0-\varepsilon)} \frac{C_3 e^{-t(v\Lambda(\mu/v+\rho/v)-v(1-v))}}{(1 - e^{-\lambda(\mu/v+\rho/v)}) \sqrt{2\pi v D(\mu/v + \rho/v)}} dv, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Действительно, учитывая предельное поведение плотности функции восстановления (см., например, [135], с. 55), имеем

$$d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(u) du, \quad e^{-vt} \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}^{*k}(t), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}^{*k}(t) \rightarrow C_3, \quad (2.61)$$

где $t \rightarrow \infty$, а постоянная $(C_3)^{-1} := \int_0^{\infty} s e^{-vs} dG(s) = \int_0^{\infty} s e^{-vs} g(s) ds$, $g(u) := G'(u)$, $\tilde{g}(u) := e^{-vu} g(u)$, $u \geq 0$, и g^{*k} обозначает свертку k -го порядка плотности g .

Интеграл в соотношении (2.60) представляет собой интеграл Лапласа (см., например, [136], с. 96), содержащий дополнительный параметр ρ . Поэтому теорема 2.1 книги [136], гл. 2, раздел 2, влечет следующее асимптотическое соотношение:

$$J_3(t) \sim \frac{C_3 e^{-t\rho r}}{(1 - e^{-r}) \theta_0 \sqrt{2D(\theta_0)\Lambda''(\theta_0)}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\Lambda''(\vartheta) = \lambda'(\vartheta)$ и $\Psi'(\lambda(\vartheta)) = \vartheta$, т.е. $\Psi''(\lambda(\vartheta))\lambda'(\vartheta) = 1$, то $\Lambda''(\theta_0) = 1/\Psi''(r)$, где $\theta_0 = \Psi'(r)$ и $\lambda(\theta_0) = r$. В итоге приходим к соотношению

$$J_3(t) \sim \frac{e^{-r(y+1-\{\mu t+y\})}}{(1 - e^{-r}) \Psi'(r) \sqrt{2} \int_0^{\infty} s e^{-vs} dG(s)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

С помощью (2.61) устанавливаем, что

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(t-u) dF_{0,0}(u) \sim C_3 \check{F}_{0,0}(v) e^{vt}, \quad \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(t-u) dG_1(u) \sim C_3 \check{G}_1(v) e^{vt}, \quad (2.62)$$

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(t) d(G_1 * F_{0,0}(u)) \sim C_3 \check{G}_1(\nu) \check{F}_{0,0}(\nu) e^{\nu t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\check{G}_1(\nu) = \beta_1 / (\nu + \beta_1)$. Поэтому, учитывая определение (2.47) и действуя аналогично нахождению асимптотического поведения функции $J_3(t)$ при $t \rightarrow \infty$, приходим к соотношению (2.59). Лемма 11 полностью доказана. \square

В лемме 11 при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}$ и $t \rightarrow \infty$ найдено предельное поведение интеграла $\int_0^t I(t-u; \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u)$. Следующая лемма дает оценку сверху для этого интеграла и всех $y, t \geq 0$.

Лемма 12. Пусть имеют место условия (2.20) и (2.22). Тогда при всех значениях $y, t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^t I(t-u; \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq C_4 e^{-ry}, \quad (2.63)$$

где C_4 – положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы 12 во многом напоминает доказательство предыдущей леммы 11. Во-первых, снова применим оценку $0 \leq I(t; u) \leq P_0(S(t) > u)$, $t, u \geq 0$, вытекающую из доказательств лемм 6 и 7 раздела 2.5 при выполнении условия (2.22). Во-вторых, воспользуемся следующим представлением:

$$\int_0^t P_0(S(t-u) > \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = J_1(t; y) + J_2(t; y) + J_3(t; y), \quad (2.64)$$

где интегралы $J_1(t; y)$, $J_2(t; y)$ и $J_3(t; y)$, $t, y \geq 0$, берутся соответственно по промежуткам $\Upsilon_1(t; y) := [t - (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0, t - v(t)]$, $(t - v(t), t]$ и $[0, t - (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0)$. Здесь фиксированное положительное число $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ и $v(t)$, $t \geq 0$, – возрастающая к бесконечности функция, причем $v(t) = o(t)$, $t \rightarrow \infty$, и $v(t) \leq (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0$ при всех $t \geq 0$. Если найдется $\varepsilon_4 > 0$ такое, что $(\mu t + y)/\theta_0 > t(1 + \varepsilon_4)$, то полагаем $\Upsilon_1(t; y) := [0, t - v(t)]$ и $J_3(t; y) = 0$.

Аналогично выводу оценки для $J_1(t)$ в лемме 11 (см. формулы (2.56) и (2.57)) приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} J_1(t; y) &\leq e^{-ry} \int_{\Upsilon_1(t; y)} e^{-\nu u - (t-u)V(t, u)} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq e^{-ry} \int_0^{t-v(t)} e^{-\nu u - (t-u)\delta_1} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq C_5 e^{-ry}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

справедливым при всех $y \geq 0$, некоторой положительной постоянной C_5 и любых $t \geq T_3$. Напомним, что неотрицательная функция $V(t, u)$, $t > u$, $u \geq 0$, обращается в ноль только в точке $u = t - (\mu t + y)/\theta_0$, которая не принадлежит области интегрирования $\Upsilon_1(t; y)$. Поэтому, на множестве $u \in \Upsilon_1(t; y)$ имеет место одна из оценок $V(t, u) \geq V(t, t - (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0) = \Lambda(\theta_0/(1 - \varepsilon_3)) - r\theta_0/(1 - \varepsilon_3) + \nu \geq \delta_1$ или $V(t, u) \geq V(t, 0) > \Lambda(\theta_0(1 + \varepsilon_4)) - r\theta_0(1 + \varepsilon_4) + \nu \geq \delta_1$ для некоторого значения δ_1 .

Как и при выводе оценки (2.58) в лемме 11, получаем

$$J_2(t; y) \leq C_6 e^{-ry} \quad (2.66)$$

при всех $y \geq 0$, некоторой положительной постоянной C_6 и всех $t \geq T_4$.

Оценим сверху $J_3(t; y)$ в нетривиальном случае, когда $J_3(t; y) \neq 0$. Применяя соотношение (2.50), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} J_3(t; y) &\leq C_7 \int_0^{t - (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0} \frac{e^{-(t-u)\Lambda((\mu t + y)/(t-u))}}{\sqrt{t-u}} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq \frac{C_7 \sqrt{\theta_0} e^{-ry}}{\sqrt{(\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)}} \int_0^{t - (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0} e^{-\nu u - (t-u)\Lambda''(\mu)((\mu t + y)/(t-u) - \theta_0)^2} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq \frac{C_8 e^{-ry}}{\sqrt{\mu t + y}} \int_0^{t - (\mu t + y)(1 - \varepsilon_3)/\theta_0} e^{-\Lambda''(\mu)(\mu t + y - \theta_0(t-u))^2/\sqrt{t-u}} du \\ &\leq \frac{C_8 e^{-ry} \sqrt{t}}{\theta_0 \sqrt{\mu t + y}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Lambda''(\mu)v^2} dv \leq C_9 e^{-ry}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

справедливым для некоторых постоянных C_7, C_8, C_9 (зависящих от ε_3) и всех $t \geq T_5$. Здесь мы использовали соотношение (2.61), формулу Тейлора в виде $\Lambda((\mu t + y)/(t-u)) = r\theta_0 - \nu + r((\mu t + y)/(t-u) - \theta_0) + \Lambda''(\tilde{\theta})((\mu t + y)/(t-u) - \theta_0)^2$ (значение $\tilde{\theta}$ лежит в промежутке между θ_0 и $(\mu t + y)/(t-u)$) и замену переменных $v = (\mu t + y - \theta_0(t-u))/\sqrt{t}$, т.е. $dv = \theta_0 du/\sqrt{t}$.

Наконец, из неравенства (2.48) при $s = r$ следует, что

$$\int_0^t P_0(S(t-u) > \mu t + y) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq e^{-ry} \int_0^{T_6} e^{-\nu u} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = C_{10} e^{-ry}$$

для постоянной $C_{10} > 0$ и всех $t \in [0, T_6]$, где $T_6 := \max\{T_3, T_4, T_5\}$. Последнее неравенство в сочетании с установленными соотношениями (2.64), (2.65), (2.66)

и (2.67) завершает доказательство леммы 12, причем можно положить $C_4 := \max\{C_5, C_6, C_9, C_{10}\}$. \square

Получим верхнюю оценку для вероятности $P_0(M_t - \mu(t + \tilde{t}) \geq y)$.

Лемма 13. *Если выполнены условия (2.20) и (2.22), то для всех $\tilde{t}, t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ и некоторой положительной постоянной C справедливо следующее неравенство:*

$$P_0(M_t - \mu(t + \tilde{t}) > y) \leq C e^{-\nu \tilde{t} - ry}. \quad (2.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $u = \mu(t + \tilde{t}) + y$ в неравенстве (2.9) леммы 8 и используя лемму 12, приходим к утверждению леммы 13 при $\mu \tilde{t} + y \geq 0$ и $C = C_4$. Если $\mu \tilde{t} + y < 0$, то требуемое неравенство (2.68) остается верным, если взять $C \geq 1$. Лемма 13 полностью доказана. \square

Для $t \geq 0$ и $u \geq 0$ положим

$$J(t; u) := m_1 \int_0^t E(t - s; u) dG_1(s) - \int_0^t (1 - f_1(1 - E(t - s; u))) dG_1(s).$$

Лемма 14. *Если выполнены условия (2.20), (2.22) и (2.41), то имеет место соотношение*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ry} \int_0^t J(t - s; \mu t + y) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула Лагранжа для конечных приращений, примененная к функции f_1 , и лемма 13, используемая, когда $C e^{-ry} < 1$, гарантируют, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{ry} \int_0^t J(t - s; \mu t + y) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \\ &\leq C \int_0^t (m_1 - f_1'(1 - C e^{-ry} e^{-\nu s})) e^{-\nu s} d \left(G_1 * \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \right). \end{aligned}$$

В силу соотношения (2.62) имеем

$$e^{ry} \int_0^t J(t - s; \mu t + y) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \leq C_{11} \int_0^t (m_1 - f_1'(1 - C e^{-ry} e^{-\nu s})) ds$$

для некоторой положительной постоянной C_{11} . Покажем, что последний интеграл сходится при $t \rightarrow \infty$, если $E \xi_1 \ln \xi_1 < \infty$. Действительно,

$$\int_0^t (m_1 - f_1'(1 - C e^{-ry} e^{-\nu s})) ds = \int_0^t \left(E \xi_1 - E \left(\xi_1 (1 - C e^{-ry} e^{-\nu s})^{\xi_1 - 1} \right) \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\frac{\xi_1}{\nu} \int_{1-Ce^{-ry}}^{1-Ce^{-ry}e^{-\nu t}} \frac{1-u^{\xi_1-1}}{1-u} du \right) = \mathbb{E} \left(\frac{\xi_1}{\nu} \int_{1-Ce^{-ry}}^{1-Ce^{-ry}e^{-\nu t}} \sum_{k=1}^{\xi_1-1} u^{k-1} du \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{\xi_1}{\nu} \sum_{k=1}^{\xi_1-1} \frac{(1-Ce^{-ry}e^{-\nu t})^k - (1-Ce^{-ry})^k}{k} \right) \leq \mathbb{E} \left(\frac{\xi_1}{\nu} \sum_{k=1}^{\xi_1-1} \frac{1 - (1-Ce^{-ry})^k}{k} \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\frac{\xi_1}{\nu} \left(1 - (1-Ce^{-ry})^{\xi_1} \right) \sum_{k=1}^{\xi_1-1} \frac{1}{k} \right) \leq \mathbb{E} \left(\frac{\xi_1}{\nu} \ln \xi_1 \left(1 - (1-Ce^{-ry})^{\xi_1} \right) \right).
\end{aligned}$$

Здесь мы совершили замену переменной $u = 1 - Ce^{-ry}e^{-\nu s}$, $du = C\nu e^{-ry}e^{-\nu s} ds$, т.е. $ds = du / (\nu(1-u))$. Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $\mathbb{E} \left(\xi_1 \ln \xi_1 \left(1 - (1 - Ce^{-ry})^{\xi_1} \right) \right) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$. Таким образом, лемма 14 полностью доказана. \square

Из леммы 13 вытекает, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} E(t; \mu(t + \tilde{t}) + y) = 0$ и

$$e^{ry} E(t; \mu(t + \tilde{t}) + y) \leq Ce^{-\nu \tilde{t}}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t, \tilde{t} \geq 0.$$

Следующий результат уточняет последнее утверждение с помощью леммы 14, когда $t \rightarrow \infty$, а затем $y \rightarrow +\infty$.

Лемма 15. *Если имеют место условия (2.20), (2.22) и (2.41), то верно следующее соотношение:*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ry - r\{\mu t + y\}} E(t; \mu t + y) = c_*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (2.46) для каждого $u \geq 0$ имеем

$$E(t; u) = \int_0^t E(t-s; u) dG(s) + I(t; u) - J(t; u).$$

Итерация этого уравнения k раз дает

$$\begin{aligned}
E(t; u) &= \int_0^t E(t-s; u) dG^{*(k+1)}(s) \\
&+ \int_0^t I(t-s; u) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(s) - \int_0^t J(t-s; u) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(s).
\end{aligned}$$

Снова применяя лемму 22 из [121], при каждом фиксированном t получаем $G^{*k}(t) \rightarrow 0$, когда $k \rightarrow \infty$. Следовательно, член $\int_0^t E(t-s; u) dG^{*(k+1)}(s)$ пренебрежимо мал при больших значениях k . Поэтому последнее уравнение можно переписать как

$$E(t; \mu t + y) = \int_0^t I(t-s; \mu t + y) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) - \int_0^t J(t-s; \mu t + y) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s).$$

Поделив обе части полученного равенства на e^{-ry} , устремив t к бесконечности и затем y к $+\infty$, выводим утверждение леммы 15 с учетом лемм 11 и 14. \square

Утверждение следующей леммы совпадает с утверждением следствия 1, когда $N = 1$, $w_1 = 0$ и стартовая точка КВСБ есть $x = 0$.

Лемма 16. Пусть справедливы условия (2.20), (2.22) и (2.41). Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{ry-r\{\mu t+y\}} \left(1 - E(t; \mu t + y) - \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}}; 0) \right) = 0,$$

где $\varphi(\cdot; 0) \in \mathcal{C}_{c_*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$K(t; y) := e^{ry-r\{\mu t+y\}} \left(1 - E(t; \mu t + y) - \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}}; 0) \right).$$

Во-первых, заметим, что

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} |K(t; y)| = 0. \quad (2.69)$$

Это справедливо в силу леммы 15, уравнения (1.77) и неравенства треугольника, поскольку

$$\begin{aligned} |K(t; y)| &\leq \left| e^{ry-r\{\mu t+y\}} E(t; \mu t + y) - c_* \right| \\ &\quad + \left| e^{ry-r\{\mu t+y\}} \left(1 - \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}}; 0) \right) - c_* \right|. \end{aligned}$$

Чтобы доказать лемму, достаточно проверить, что для $K_T(y) := \sup_{t \geq T} |K(t; y)|$ справедливо равенство $K(y) := \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(y) = 0$. Уравнения (1.77) (при $N = 1$ и $w_1 = x = 0$) и (2.46) позволяют записать

$$e^{ry-r\{\mu t+y\}} \left(E(t; \mu t + y) - 1 + \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}}; 0) \right) = I_{11}(t, T; y) + I_{12}(t, T; y) + I_2(t; y), \quad (2.70)$$

где для $T < t$ мы положили функцию $I_{11}(t, T; y)$ равной

$$\begin{aligned} &\alpha_1 e^{ry-r\{\mu t+y\}} \int_0^{t-T} \left(f_1(\varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0)) - f_1(1 - E(t-s; \mu t + y)) \right) dG_1(s) \\ &+ (1-\alpha_1) e^{ry-r\{\mu t+y\}} \int_0^{t-T} \left(E(t-s; \mu t + y) - 1 + \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0) \right) d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(s)), \end{aligned}$$

а интеграл $I_{12}(t, T; y)$ отличается от $I_{11}(t, T; y)$ только пределами интегрирования, т.е. возникает \int_{t-T}^t вместо \int_0^{t-T} . Наконец,

$$\begin{aligned} I_2(t; y) &:= e^{ry-r\{\mu t+y\}} I(t; \mu t + y) - \alpha_1 e^{ry-r\{\mu t+y\}} \\ &\times \int_t^\infty \left(1 - f_1 \left(\varphi \left(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0 \right) \right) \right) dG_1(s) \\ &- (1 - \alpha_1) e^{ry-r\{\mu t+y\}} \int_t^\infty \left(1 - \varphi \left(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0 \right) \right) d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(s)). \end{aligned}$$

Из соотношений (2.47) и (2.50) следует, что для каждого $y \in \mathbb{R}$ найдется такое число $\varepsilon_4 \in (0, \mu - qEY^1)$, что

$$e^{ry-r\{\mu t+y\}} I(t; \mu t + y) \leq C_{12}(y) e^{-t\Lambda(\mu - \varepsilon_4)}$$

для некоторой положительной функции $C_{12}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, где $\Lambda(\mu - \varepsilon_4) > 0$. Поэтому с учетом формулы Лагранжа для конечных приращений, примененной к f_1 , и ограниченности функции $(1 - \varphi(\lambda; 0)) / \lambda$, $\lambda \geq 0$, некоторой константой $C_{13} \geq c_*$ имеем

$$\begin{aligned} |I_2(t; y)| &\leq C_{12}(y) e^{-t\Lambda(\mu - \varepsilon_4)} \\ &+ \alpha_1 m_1 \int_t^\infty \frac{1 - \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0)}{e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}} e^{-\nu s} dG_1(s) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_t^\infty \frac{1 - \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0)}{e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}} e^{-\nu s} d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(s)) \\ &\leq C_{12}(y) e^{-t\Lambda(\mu - \varepsilon_4)} + C_{13} \left(1 - \tilde{G}(t) \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Здесь \tilde{G} есть функция распределения такая, что

$$d\tilde{G}(s) = e^{-\nu s} dG(s), \quad s \geq 0.$$

Пусть $t > 2T$. Тогда в силу (2.69), формулы Лагранжа для конечных приращений, примененной к функции f_1 , и леммы 13, получаем (для некоторой положительной постоянной C_{14}) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} |I_{12}(t, T; y)| &\leq e^{ry-r\{\mu t+y\}} \\ &\times \int_{t-T}^t \left| E(t-s; \mu t + y) - 1 + \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0) \right| dG(s) \\ &= \int_{t-T}^t |K(t-s; y + \mu s)| e^{-\nu s} dG(s) \leq C_{14} \left(1 - \tilde{G}(T) \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Снова используя формулу Лагранжа конечных приращений для f_1 , при любом $t > T$ делаем вывод, что

$$\begin{aligned} |I_{11}(t, T; y)| &\leq e^{ry-r\{\mu t+y\}} \int_0^{t-T} \left| E(t-s; \mu t+y) - 1 + \varphi(e^{-ry+r\{\mu t+y\}} e^{-\nu s}; 0) \right| dG(s) \\ &= \int_0^{t-T} |K(t-s; y + \mu s)| e^{-\nu s} dG(s) \\ &\leq \int_0^{t-T} K_T(y + \mu s) d\tilde{G}(s) \leq EK_T(y + \mu \zeta), \end{aligned} \quad (2.73)$$

где ζ – случайная величина, имеющая функцию распределения \tilde{G} .

Сочетание формул (2.70)–(2.73) при $t > 2T$ приводит к неравенству

$$|K(t; y)| \leq C_{12}(y)e^{-t\Lambda(\mu-\varepsilon_4)} + C_{13}(1-\tilde{G}(t)) + C_{14}(1-\tilde{G}(T)) + EK_T(y + \mu \zeta).$$

Это означает, что

$$K_{2T}(y) \leq EK_T(y + \mu \zeta) + C_{12}(y)e^{-T\Lambda(\mu-\varepsilon_4)} + (C_{13} + C_{14})(1 - \tilde{G}(T)).$$

Согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости, при $T \rightarrow \infty$ последняя формула влечет соотношение $K(y) \leq EK(y + \mu \zeta)$. Итерация этой формулы дает следующее неравенство:

$$K(y) \leq EK(y + \mu Z_n), \quad (2.74)$$

где $Z_n := \sum_{k=1}^n \zeta_k$ и ζ_k , $k \in \mathbb{Z}^+$, – независимые одинаково распределенные случайные величины с таким же распределением, как у ζ . С учетом усиленного закона больших чисел и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, неравенство (2.74) влечет $0 \leq K(y) \leq K(+\infty)$. Однако $K(+\infty) = 0$ в силу (2.69). Поэтому лемма 16 доказана. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. При $N = 1$ и $x = w_1 = 0$ утверждение следствия 1 вытекает из леммы 16. Теперь мы имеем дело с $N > 1$ и $x \in W$, скажем, $x = w_i$. Обсудим здесь основные различия в случаях единственного катализатора и нескольких катализаторов и дадим дальнейшее доказательство, опуская громоздкие детали. В постановке задачи с несколькими катализаторами, аналогом уравнения (2.46) является система интегральных уравнений

$$\begin{aligned} P_{w_i}(M_t > u) &= \alpha_i \int_0^t (1 - f_i(1 - P_{w_i}(M_{t-s} > u))) dG_i(s) \\ &+ (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^N \int_0^t P_{w_j}(M_{t-s} > u) d(G_i *_{w_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(s)) + I_i^{(N)}(t; u), \end{aligned} \quad (2.75)$$

где $i = 1, \dots, N$ и функции $I_i^{(N)}(t; u)$, $t \geq 0$, $u \geq \max\{w_1, \dots, w_N\}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} I_i^{(N)}(t; u) &= P_{w_i}(S(t) > u) - \sum_{k=1}^N \int_0^t P_{w_k}(S(t-s) > u) d_{W_k} F_{w_i, w_k}(s) \\ &- \alpha_i \int_0^t P_{w_i}(S(t-s) > u) dG_i(s) \\ &+ \alpha_i \sum_{k=1}^N \int_0^t P_{w_k}(S(t-s) > u) dG_i *_{W_k} F_{w_i, w_k}(s). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Следующий шаг в случае нескольких катализаторов – ввести аналог функции G , возникающей в лемме 11, а именно, матрицу $\mathcal{G}(t) = \left(G_{i,j}^{(N)}(t) \right)_{i,j=1}^N$, где $G_{i,j}^{(N)}(t) = \delta_{i,j} \alpha_i m_i G_i(t) + (1 - \alpha_i) G_i *_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(t)$, $t \geq 0$. Заметим, что элемент $d_{i,j}(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, фигурирующей в определении 1 надкритического режима КВСБ (см. раздел 1.3), есть преобразование Лапласа функции $G_{i,j}^{(N)}$.

Перейдем к аналогу леммы 13 и затем вернемся к аналогам лемм 11 и 12. Согласно формуле Лагранжа для конечных приращений, примененной к функциям f_1, \dots, f_N , система уравнений (2.75) влечет следующее векторное неравенство:

$$\mathcal{P}(t; u) \leq \mathcal{G} * \mathcal{P}(t; u) + \mathcal{I}(t; u), \quad (2.77)$$

справедливое по координатам, где мы положили

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t; u) &:= (P_{w_1}(M_t > u), \dots, P_{w_N}(M_t > u))^\top, \\ \mathcal{I}(t; u) &:= \left(I_1^{(N)}(t; u), \dots, I_N^{(N)}(t; u) \right)^\top, \end{aligned}$$

а символ \top обозначает транспонирование матрицы. Напомним, что операция “ $*$ ” свертки матриц определяется так же, как и умножение матриц, за исключением того, что мы производим свертку ее элементов, а не умножаем их. Выполняя k раз итерацию неравенства (2.77), устремляя k к бесконечности и применяя лемму 1.1 из статьи [56], как и при доказательстве формулы (2.9), мы выводим, что

$$\mathcal{P}(t; u) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{I}(t; u). \quad (2.78)$$

Таким образом, как и в лемме 11 при $N = 1$, в случае $N > 1$ мы исследуем асимптотическое поведение выражения $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{I}(t; u)$, когда $u = \mu t + y$ и

$t \rightarrow \infty$. Полностью аналогично лемме 11, используя следствие 3.1, пункт (i), статьи [56] (вместо теоремы 25 в [121], с. 30, и результатов на с. 55 в [135]), приходим к выводу, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{I}(t; \mu t + y) \sim e^{-ry+r\{\mu t+y\}} \left(K_1^{(N)}, \dots, K_N^{(N)} \right)^\top, \quad t \rightarrow \infty.$$

Постоянные $K_i^{(N)} > 0$, $i = 1, \dots, N$, могут быть выписаны в явном виде, который является громоздким и лишним, а потому опускается. Более того, леммы 12 и 13 также остаются неизменными в случае $N > 1$ (с, возможно, другими постоянными C'_4 и C' вместо, соответственно, C_4 и C).

Обобщение функции $J(t; u)$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, на случай $N > 1$ есть вектор-функция $\mathcal{J}(t; u)$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, с координатами $J_i^{(N)}(t; u)$, $i = 1, \dots, N$, вида

$$m_i \int_0^t P_{w_i}(M_{t-s} > u) dG_i(s) - \int_0^t (1 - f_i(1 - P_{w_i}(M_{t-s} > u))) dG_i(s).$$

Аналог леммы 14 в случае нескольких катализаторов позволяет утверждать, что при тех же условиях имеем

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ry} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{J}(t; \mu t + y) = (0, \dots, 0)^\top.$$

При этом повторяется доказательство леммы 14, однако теперь мы применяем следствие 3.1, пункт (i), статьи [56] вместо теоремы 25 книги [121], с. 30.

Между утверждениями лемм 15, 16 и их соответствующих аналогов в случае нескольких катализаторов различия незначительны, то же относится и к доказательствам. Поэтому мы только отметим, что доказательство аналога леммы 16 следует доказательству теоремы 3.3 статьи [116], в то время как доказательство самой леммы 16 основывается на работе [115]. Таким образом, следствие 1 установлено в случае $N \geq 1$ и стартовой точки $x \in W$.

Остается доказать следствие 1 в случае $N \geq 1$ и $x \notin W$. Случай стартовой точки $x \notin W$ сводится к случаю $N + 1$ катализатора благодаря тому, что мы полагаем $w_{N+1} = x$, $\alpha_{N+1} = 0$, $m_{N+1} = 0$, $G_{N+1}(t) = 1 - e^{-qt}$, $t \geq 0$. Согласно лемме 3 раздела 1.4 новое КВСБ со множеством катализаторов $\{w_1, \dots, w_{N+1}\}$ является надкритическим, если первоначальное КВСБ надкритическое, и мальтусовские параметры в этих КВСБ совпадают. Поэтому мы можем воспользоваться доказанной частью следствия 1 для случая $N + 1$ катализатора и стартовой точки из множества W . Следствие 1 полностью доказано. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. При $d = 1$ и $N \in \mathbb{N}$ утверждение теоремы 12 совпадает с утверждением следствия 1. Рассмотрим случай $d > 1$ и $N \in \mathbb{N}$. Основные черты доказательства теоремы 12 такие же, как у следствия 1. Поэтому обсудим лишь главные различия. Во-первых, аналог интегрального уравнения в лемме 9 в случае КВСБ по \mathbb{Z}^d с N катализаторами имеет следующий вид:

$$E_{\mathbf{w}_i}^{\mathbf{r}}(t; u) = \alpha_i \int_0^t (1 - f_i(1 - E_{\mathbf{w}_i}^{\mathbf{r}}(t - s; u))) dG_i(s) \\ + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^N \int_0^t E_{\mathbf{w}_j}^{\mathbf{r}}(t - s; u) d(G_i * w_j \bar{F}_{w_i, w_j}(s)) + I_i^{\mathbf{r}, N}(t; u),$$

где

$$E_{\mathbf{w}_i}^{\mathbf{r}}(t; u) := P_{\mathbf{w}_i}(\exists v \in Z(t) : \langle \mathbf{X}^v(t), \mathbf{r} \rangle > u) = P_{\mathbf{w}_i}(M_t(\mathbf{r}) > u),$$

$t \geq 0$, $u \geq \max\{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{r} \rangle : j = 1, \dots, N\}$, $i = 1, \dots, N$, а функция $I_i^{\mathbf{r}, N}$ совпадает с функцией $I_i^{(N)}$ с точностью до замены выражения $S(t)$ на $\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle$ в ее определении.

Во-вторых, в аналоге леммы 10 вместо случайного блуждания $\{S(t), t \geq 0\}$ теперь рассматривается случайное блуждание $\{\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle, t \geq 0\}$. Как отмечалось в разделе 2, случайные величины $S(t)$ имеют решетчатое (арифметическое) распределение при каждом $t \geq 0$, в то время как все случайные величины в наборе $\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle, t \geq 0$, могут иметь как решетчатое, так и нерешетчатое распределение. Поэтому вместо формулы (6.1.17) из следствия 6.1.7 книги [112], гл. 6, раздел 1, для нерешетчатых распределений мы используем формулу (6.1.16) из того же следствия. А именно, аналогом соотношения (2.50) в лемме 10 в случае нерешетчатого распределения при $d > 1$ и $N \in \mathbb{N}$ является следующее соотношение:

$$P_0(\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle \geq x) \sim \frac{e^{-t\Lambda_{\mathbf{r}}(\theta)}}{\lambda_{\mathbf{r}}(\theta) \sqrt{2\pi t D_{\mathbf{r}}(\theta)}}$$

при $x, t \rightarrow \infty$, равномерно по $\theta = x/t \in [q\langle \mathbf{E}\mathbf{Y}^1, \mathbf{r} \rangle + \varepsilon_1, \Theta_1]$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Здесь

$$\Lambda_{\mathbf{r}}(\vartheta) := \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \ln E e^{s\langle \mathbf{S}(1), \mathbf{r} \rangle}) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \Psi_{\mathbf{r}}(s)),$$

$\lambda_{\mathbf{r}}(\vartheta) := \Lambda'_{\mathbf{r}}(\vartheta)$, $D_{\mathbf{r}}(\vartheta) := \Psi''_{\mathbf{r}}(s)|_{s=\lambda_{\mathbf{r}}(\vartheta)}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, а $\Psi_{\mathbf{r}}(s) := \Psi(s\mathbf{r})$, $s \in \mathbb{R}$. Далее аргументация доказательства следствия 1 легко переносится на общий случай, если дополнительно заменить μ на ν и r на 1. Очевидно, теперь $E e^{s\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle} = e^{t\Psi_{\mathbf{r}}(s)}$, $\theta_0 = \Psi'_{\mathbf{r}}(1)$, $\theta_0 > \Psi_{\mathbf{r}}(1) = \nu$. Дальнейшие подробности можно опустить.

Таким образом, теорема 12 полностью доказана. \square

2.5 Случай правильно меняющихся хвостов скачка блуждания

В разделе 2.5 мы продолжаем исследование распространения фронта КВСБ по \mathbb{Z}^d . В отличие от предыдущего раздела 2.4, где хвосты распределения скачка блуждания предполагаются легкими, теперь мы рассматриваем типичный случай “тяжелых” хвостов, а именно правильно меняющихся.

Как и ранее, мы предполагаем, что случайное блуждание, лежащее в основе КВСБ, однородно по пространству. Однако в данном разделе наши рассуждения не будут зависеть от величин параметров экспоненциального распределения времен ожидания в катализаторах, в отличие от подразделов 2.4.1–2.4.3. Поэтому мы считаем выполненным условие (2.1), являющееся более широким, чем предположение (2.22). Подчеркнем, что, в отличие, например, от работ [122] и [137], мы не ограничиваемся рассмотрением только симметричного генератора Q . Как и в подразделе 2.4.4, мы предполагаем, что верно условие $L \log L$ для числа потомков в каждом катализаторе, т.е. справедливо предположение (2.41).

2.5.1 Предельная теорема для максимума КВСБ по \mathbb{Z}

В подразделе 2.5.1 мы будем изучать асимптотическое поведение самой правой частицы в момент времени t в КВСБ по \mathbb{Z} при $t \rightarrow \infty$, т.е. максимума КВСБ, определенного формулой $M_t = \max\{X^v(t) : v \in Z(t)\}$. Как обычно, положим $M_t := -\infty$, если $Z(t) = \emptyset$. Основным результатом подраздела 2.5.1 теорема 13 показывает, что нормированный максимум M_t сходится по распределению к нетривиальному пределу при $t \rightarrow \infty$ и нормирующий множитель зависит от скорости убывания хвостов случайного блуждания S . Предположим, что

$$\mathbb{P}(Y^1 > y) = y^{-\gamma} L_1(y) =: R(y), \quad (2.79)$$

где $\mathbb{P}(Y^1 > y) = q^{-1} \sum_{x=y+1}^{\infty} q(0, x)$, а $L_1(y)$, $y \in \mathbb{Z}_+$, – медленно меняющаяся функция. Другими словами, пусть правый хвост случайного блуждания представляет собой правильно меняющуюся функцию с индексом $-\gamma$, где $\gamma \in (0, \infty)$. Напомним, что функция $L(t)$, $t \geq 0$, медленно меняется на бесконечности, если

$L(ct)/L(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ для любой постоянной $c > 0$. Аналогично функция $R(t)$, $t \geq 0$, называется правильно меняющейся (на бесконечности) с индексом $\gamma \in (-\infty, \infty)$, если $R(ct)/R(t) \rightarrow c^\gamma$ при $t \rightarrow \infty$ для любой постоянной c (см., например, [138], гл. 1, раздел 1). Положим

$$R^{inv}(s) := \inf\{y \in \mathbb{Z}_+ : 1/R(y) \geq s\}, \quad s \geq 0,$$

т.е. R^{inv} – это обобщенная обратная функция к функции $1/R$. Тогда согласно свойству 5° и лемме 1.8 в [138], гл. 1, раздел 5, эта функция – асимптотически однозначно определенная обратная функция в том смысле, что $1/R(R^{inv}(y)) \sim y$, $R^{inv}(1/R(y)) \sim y$, при $y \rightarrow \infty$, $y \in \mathbb{Z}_+$, и $R^{inv}(s) = s^{1/\gamma} L_2(s)$, где $L_2(s)$, $s \geq 0$, – медленно меняющаяся функция. Таким образом, упомянутый нормирующий множитель для M_t выбирается следующим образом

$$L_t := R^{inv}(e^{vt}) = e^{vt/\gamma} L_2(e^{vt}), \quad t \geq 0.$$

Более того, мы предполагаем, что при $\lambda > 0$ имеет место “принцип большого скачка” (см., например, [113], с. 40), т.е.

$$P_0(S(u) \geq \lambda L_t) = quP(Y_1 \geq \lambda L_t) (1 + \delta(u, t; \lambda)). \quad (2.80)$$

Здесь функция $\delta(u, t; \lambda) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u/t \in [0, 1]$ и $\lambda \geq \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$. Широкие достаточные условия для справедливости соотношения (2.80) представлены, например, в теореме 15.2.1 в [112]. Примеры, в которых условие (2.80) проверяется в результате применения общей теории больших уклонений для случайных блужданий с правильно меняющимися хвостами, можно найти, например, в подразделе 2.5.4.

Напомним определение вероятности локального вырождения

$$Q(x, y) := P_x \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu(t; y) = 0 \right), \quad x, y \in \mathbb{Z},$$

где $\mu(t; y)$ – это число частиц в КВСБ в точке y в момент t (локальные численности частиц). Теорема 6 раздела 1.6 утверждает, что функция $Q(x, y)$ зависит только от x , т.е. $Q(x, y) = Q(x)$, и удовлетворяет системе алгебраических уравнений (1.71) и (1.72).

Теорема 13. Пусть для надкритического КВСБ по \mathbb{Z} с мальтусовским параметром ν условия (2.1), (2.41), (2.79) и (2.80) выполнены. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$P_x \left(M_t/L_t \leq \lambda^{-1/\gamma} \right) \rightarrow \varphi(\lambda; x) \in (0, 1), \quad t \rightarrow \infty,$$

в котором функция $\varphi(\lambda; x)$, $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$, является решением системы уравнений (1.76) и (1.77), причем для каждого $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{Z}$ имеем $\varphi(\lambda; x) \rightarrow Q(x)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Функция φ уже появлялась в теореме 8 в разделе 1.6 в качестве преобразования Лапласа предельного распределения, возникающего в предельной теореме для общих и локальных численностей частиц в КВСБ. Поэтому чтобы получить известный предел в теореме 13, мы используем переменную $\lambda^{-1/\gamma}$ вместо λ (а M_t/L_t – вместо $(M_t/L_t)^{-\gamma}$, поскольку последнее выражение не определено, когда $M_t < 0$).

Более того, как утверждается в теореме 8 раздела 1.6, и общие, и локальные численности частиц, нормированные своими средними, сходятся по распределению к невырожденному случайному пределу, который обращается в ноль с вероятностью $Q(x)$ локального вырождения популяции в КВСБ, стартовавшем в точке x . Аналогично, как показывает теорема 13, тривиальное соотношение $M_t/L_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ реализуется в точности с той же вероятностью $Q(x)$ локального вырождения популяции в КВСБ со стартовой точкой x . Это означает, что нормирующий множитель L_t подобран соответствующим образом.

Заметим, что далее в лемме 21 и ее аналоге в случае нескольких катализаторов находится значение $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^{-1} P_{w_j}(M_t/L_t > \lambda^{-1/\gamma})$, которое мы обозначим $\theta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. Следовательно, согласно теореме 13 и пункту (iii) теоремы 8 предел $P_{w_j}(M_t/L_t \leq \lambda^{-1/\gamma})$, $j = 1, \dots, N$, при $t \rightarrow \infty$ однозначно определен как j -я компонента решения $(\varphi(\cdot; w_1), \dots, \varphi(\cdot; w_N))$ системы (1.77) в классе \mathcal{C}_θ , введенном в разделе 1.6.

2.5.2 Доказательство предельной теоремы для максимума

С помощью лемм 6–22 мы установим теорему 13 в случае, когда имеется один катализатор w_1 , расположенный, без ограничения общности, в начале координат, т.е. $W = \{w_1\}$ при $w_1 = 0$, и когда стартовая точка КВСБ также находится в 0. Затем мы обратимся к общему случаю.

Лемма 17. Если выполнены предположения (2.1), (2.79) и (2.80), то для каждой $\lambda > 0$ и $r \geq 0$ верно соотношение

$$\int_0^t I(t-u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \sim K \lambda e^{-\nu r}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.81)$$

где постоянная K имеет вид

$$K = \frac{(1 - \alpha_1) \beta_1 (\nu + q)}{\nu + \beta_1} (1 - \check{F}_{0,0}(\nu)) \int_0^{\infty} s e^{-\nu s} ds \left(\int_0^{\infty} s e^{-\nu s} dG(s) \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, для каждого $\lambda > 0$, $r \geq 0$, изучим асимптотическое поведение функции $I(u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r})$ при $t \rightarrow \infty$, $0 \leq u \leq t$. Предположение (2.80) означает, что

$$P_0 \left(S(u) > \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right) \sim quR \left(\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right) \sim qu \lambda e^{-\nu(t+r)}$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u/t \in [0,1]$, если $\lambda > 0$ и $r \geq 0$. Следовательно, тождество (2.5) влечет, что

$$(1 - \alpha_1)^{-1} \beta_1^{-1} q I(u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) \sim \lambda e^{-\nu(t+r)} q \quad (2.82)$$

$$\times \left(u - \int_0^u (u-s) dF_{0,0}(s) - \frac{\beta_1 - q}{\beta_1} \int_0^u (u-s) d(G_1(s) - G_1 * F_{0,0}(s)) \right)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u/t \in [0,1]$. В силу теоремы 25 в [121], с. 30, отсюда следует, что

$$\int_0^t I(t-u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \sim \frac{(1 - \alpha_1) \beta_1 \lambda e^{-\nu(t+r)} e^{\nu t}}{\int_0^{\infty} s e^{-\nu s} dG(s)}$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-\nu s} \left(s - \int_0^s (s-u) dF_{0,0}(u) - \frac{\beta_1 - q}{\beta_1} \int_0^s (s-u) d(G_1(u) - G_1 * F_{0,0}(u)) \right) ds$$

$$= K \lambda e^{-\nu r}$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь мы используем свойство преобразования Лапласа свертки распределений и формулу $\int_0^{\infty} e^{-\nu s} dG_1(s) = \beta_1 / (\nu + \beta_1)$. Лемма 17 полностью доказана. \square

В лемме 17 мы нашли асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ интеграла $\int_0^t I(t-u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u)$ для каждого фиксированного $\lambda > 0$ и $r \geq 0$. В следующей лемме мы получаем верхнюю оценку для интеграла при всех $r, t \geq 0$ и при произвольных конечных положительных λ .

Лемма 18. Пусть выполнены условия (2.1), (2.79) и (2.80). Тогда для любого $\Lambda > 0$ существует положительная постоянная $C = C(\Lambda)$ такая, что

$$\int_0^t I(t-u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq C \frac{R(\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r})}{R(L_{t+r})} e^{-\nu r} \quad (2.83)$$

при всех $\lambda \in (0, \Lambda]$ и $r, t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (2.80) следует, что для любого $\Lambda > 0$ существует положительная постоянная $c_1 = c_1(\Lambda)$ такая, что при всех $u \in [0, t]$, $r, t \geq 0$ и $\lambda \in (0, \Lambda]$ имеем

$$P_0 \left(S(u) > \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right) \leq c_1 u R \left(\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right).$$

Следовательно, из равенства (2.5) вытекает, что

$$I(u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) \leq c_2 u R \left(\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right)$$

для таких u, r, t, λ и, возможно, новой положительной постоянной $c_2 = c_2(\Lambda)$. Поэтому мы получаем оценку

$$\int_0^t I(t-u; \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq c_2 c_3 \frac{R(\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r})}{R(L_{t+r})} e^{-\nu r},$$

так как $R(L_{t+r}) = e^{-\nu(t+r)} = R(L_t) e^{-\nu r}$, $t, r \geq 0$, согласно определению функции L_t , $t \geq 0$, и в силу теоремы 25 в [121], с. 30, выполняющемуся для некоторой постоянной $c_3 > 0$ неравенству

$$e^{-\nu t} \int_0^t (t-u) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq c_3.$$

Лемма 18 доказана, если положить $C = c_2 c_3$. \square

Далее мы выводим верхнюю оценку для вероятности $P_0 \left(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right)$.

Лемма 19. Если условия (2.1), (2.79) и (2.80) справедливы, то для всех $r, t \geq 0$, $\lambda \in (0, \Lambda]$, следующее неравенство имеет место:

$$P_0 \left(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r} \right) \leq \min \left\{ C \frac{R(\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r})}{R(L_{t+r})} e^{-\nu r}, 1 \right\} =: g(\lambda; t+r, r). \quad (2.84)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $u = \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}$ в неравенстве 2.9 леммы 8 и используя лемму 18, приходим к утверждению леммы 19. \square

При $t \geq 0$ и $u \geq 0$ обозначим

$$J(t; u) := m_1 \int_0^t P_0(M_{t-s} > u) dG_1(s) - \int_0^t (1 - f_1(1 - P_0(M_{t-s} > u))) dG_1(s).$$

Лемма 20. Если условия (2.1), (2.41), (2.79) и (2.80) выполнены, то справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^t J(t-s; \lambda^{-1/\gamma} L_t) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нетривиальный случай, когда $g(\lambda; t, 0) < 1$. Это всегда верно для достаточно больших t и достаточно малых λ . Формула Лагранжа конечных приращений для f_1 и лемма 19 гарантируют, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^t J(t-s; \lambda^{-1/\gamma} L_t) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \\ &\leq C \frac{R(\lambda^{-1/\gamma} L_t)}{\lambda R(L_t)} \int_0^t (m_1 - f'_1(1 - g(\lambda; t, s))) e^{-\nu s} d \left(G_1 * \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \right). \end{aligned}$$

Согласно определению мальтусовского параметра ν , в соответствии с теоремой 25 в [121], с. 30, при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$G_1 * \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(t) \sim e^{\nu t} \frac{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\beta_1 s}) e^{-\nu s} ds}{\int_0^{\infty} s e^{-\nu s} dG(s)}.$$

Возвращаясь к предыдущей цепочке неравенств, мы видим, что

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^t J(t-s; \lambda^{-1/\gamma} L_t) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \leq \frac{C_1 R(\lambda^{-1/\gamma} L_t)}{\lambda R(L_t)} \int_0^t (m_1 - f'_1(1 - g(\lambda; t, s))) ds \quad (2.85)$$

для некоторой положительной постоянной $C_1 = C_1(\Lambda)$. Покажем, что последний интеграл сходится при $t \rightarrow \infty$, когда $E \xi_1 \ln \xi_1 < \infty$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^t (m_1 - f'_1(1 - g(\lambda; t, s))) ds &= \int_0^t \left(E \xi_1 - E \left(\xi_1 (1 - g(\lambda; t, s))^{\xi_1 - 1} \right) \right) ds \\ &= \nu^{-1} E \left(\xi_1 \int_{1-g(\lambda; t, 0)}^{1-g(\lambda; t, t)} \frac{1 - u^{\xi_1 - 1}}{1 - u} du \right) = \nu^{-1} E \left(\xi_1 \int_{1-g(\lambda; t, 0)}^{1-g(\lambda; t, t)} \sum_{k=1}^{\xi_1 - 1} u^{k-1} du \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\xi_1 \sum_{k=1}^{\xi_1-1} \frac{(1-g(\lambda; t, t))^k - (1-g(\lambda; t, 0))^k}{\nu k} \right) \leq \mathbb{E} \left(\xi_1 \sum_{k=1}^{\xi_1-1} \frac{1 - (1-g(\lambda; t, 0))^k}{\nu k} \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\xi_1 \left(1 - (1-g(\lambda; t, 0))^{\xi_1} \right) \sum_{k=1}^{\xi_1-1} \frac{1}{\nu k} \right) \leq \nu^{-1} \mathbb{E} \left(\xi_1 \ln \xi_1 \left(1 - (1-g(\lambda; t, 0))^{\xi_1} \right) \right).
\end{aligned}$$

Здесь мы произвели замену переменных $u = 1 - g(\lambda; t, s)$, $du = \nu g(\lambda; t, s) ds$, т.е. $ds = du / (\nu(1-u))$. Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, убеждаемся, что

$$\mathbb{E} \left(\xi_1 \ln \xi_1 \left(1 - (1-g(\lambda; t, 0))^{\xi_1} \right) \right) \rightarrow 0,$$

когда вначале $t \rightarrow \infty$, а затем $\lambda \rightarrow 0+$, поскольку $g(\lambda; t, 0) = CR(\lambda^{-1/\gamma} L_t) / R(L_t) \rightarrow C\lambda$ для каждого $\lambda > 0$ при $t \rightarrow \infty$. Вспоминая соотношение (2.85), заключаем, что лемма 20 полностью доказана. \square

Из леммы 19 следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) = 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \mathbb{P}_0(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}) \leq C e^{-\nu r}, \quad \lambda \in (0, \Lambda], \quad r \geq 0.$$

Следующий результат уточняет последнее утверждение, когда $\lambda \rightarrow 0+$.

Лемма 21. *Если условия (2.1), (2.41), (2.79) и (2.80) выполнены, то верно соотношение:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_0(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_t)}{\lambda} = K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.4) для любого $u \geq 0$ имеем

$$\mathbb{P}_0(M_t > u) = \int_0^t \mathbb{P}_0(M_{t-s} > u) dG(s) + I(t; u) - J(t; u).$$

Итерация этого соотношения k раз приводит к равенству

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(M_t > u) &= \int_0^t \mathbb{P}_0(M_{t-s} > u) dG^{*(k+1)}(s) \\
&+ \int_0^t I(t-s; u) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(s) - \int_0^t J(t-s; u) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(s).
\end{aligned}$$

Для любого фиксированного t , снова в силу леммы 22 в [121], имеем $G^{*k}(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, член $\int_0^t \mathbb{P}_0(M_{t-s} > u) dG^{*(k+1)}(s)$ пренебрежимо

мал при больших k . Поэтому последнее уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0 \left(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) &= \int_0^t I \left(t-s; \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s) \\ &\quad - \int_0^t J \left(t-s; \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(s). \end{aligned}$$

Разделив на λ обе части полученного уравнения, устремив к бесконечности t и затем λ к 0 справа, мы выводим утверждение леммы 21 в силу лемм 17 и 20. \square

Утверждения следующей леммы и теоремы 13 совпадают, когда $N = 1$, $w_1 = 0$ и стартовая точка КВСБ есть $x = 0$.

Лемма 22. Пусть справедливы условия (2.1), (2.41), (2.79) и (2.80). Тогда для каждого $\lambda > 0$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_0 \left(M_t \leq \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - \varphi(\lambda; 0)}{\lambda} = 0,$$

где $\varphi(\cdot; 0) \in \mathcal{C}_K$, а функциональный класс \mathcal{C}_θ определен в формуле (1.78).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K(t; \lambda)$ есть $\lambda^{-1} \left(1 - \mathbb{P}_0 \left(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - \varphi(\lambda; 0) \right)$. Вначале заметим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow \infty} |K(t; \lambda)| = 0. \quad (2.86)$$

Это верно в силу леммы 21, пункта (iii) теоремы 8 и неравенства треугольника. Действительно,

$$|K(t; \lambda)| \leq \left| \frac{\mathbb{P}_0 \left(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right)}{\lambda} - K \right| + \left| \frac{1 - \varphi(\lambda; 0)}{\lambda} - K \right|.$$

Чтобы доказать искомое утверждение, достаточно проверить, что $K(\lambda) := \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(\lambda) = 0$, где $K_T(\lambda) := \sup_{t \geq T} |K(t; \lambda)|$. Из уравнений (1.77) (при $N = 1$ и $w_1 = x = 0$) и (2.4) вытекает, что

$$\frac{\mathbb{P}_0 \left(M_t > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - 1 + \varphi(\lambda; 0)}{\lambda} = I_{11}(t, T; \lambda) + I_{12}(t, T; \lambda) + I_2(t; \lambda), \quad (2.87)$$

где при $T < t$ мы положили функцию $I_{11}(t, T; \lambda)$ равной

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{\lambda} \int_0^T \left(f_1(\varphi(\lambda e^{-\gamma s}; 0)) - f_1 \left(1 - \mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) \right) \right) dG_1(s) \\ &+ \frac{1 - \alpha_1}{\lambda} \int_0^T \left(\mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - 1 + \varphi(\lambda e^{-\gamma s}; 0) \right) d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(s)), \end{aligned}$$

причем функция $I_{12}(t, T; \lambda)$ отличается от $I_{11}(t, T; \lambda)$ только пределами интегрирования, т.е. \int_T^t появляется вместо \int_0^T , и, наконец,

$$I_2(t; \lambda) := \lambda^{-1} I\left(t; \lambda^{-1/\gamma} L_t\right) - \frac{\alpha_1}{\lambda} \int_t^\infty (1 - f_1(\varphi(\lambda e^{-\nu s}; 0))) dG_1(s) \\ - \frac{1 - \alpha_1}{\lambda} \int_t^\infty (1 - \varphi(\lambda e^{-\nu s}; 0)) d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(s)).$$

Из соотношения (2.82) следует, что $\lambda^{-1} I(t; \lambda^{-1/\gamma} L_t) \leq C_2 t e^{-\nu t}$ для некоторой положительной постоянной C_2 . Следовательно, в силу формулы Лагранжа конечных приращений для f_1 и ограниченности функции $(1 - \varphi(\lambda; 0)) / \lambda$, $\lambda \geq 0$, некоторой постоянной $C_3 \geq K$, мы имеем

$$|I_2(t; \lambda)| \leq C_2 t e^{-\nu t} + \alpha_1 m_1 \int_t^\infty \frac{1 - \varphi(\lambda e^{-\nu s}; 0)}{\lambda e^{-\nu s}} e^{-\nu s} dG_1(s) \quad (2.88) \\ + (1 - \alpha_1) \int_t^\infty \frac{1 - \varphi(\lambda e^{-\nu s}; 0)}{\lambda e^{-\nu s}} e^{-\nu s} d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(s)) \leq C_2 t e^{-\nu t} + C_3 (1 - \tilde{G}(t)).$$

Здесь \tilde{G} – это функция распределения такая, что $d\tilde{G}(s) = e^{-\nu s} dG(s)$, $s \geq 0$.

С помощью формулы Лагранжа конечных приращений для f_1 получаем соотношение

$$|I_{12}(t, T; \lambda)| \leq \lambda^{-1} \int_T^t \left| P_0(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t) - 1 + \varphi(\lambda e^{-\nu s}; 0) \right| dG(s) \\ \leq \lambda^{-1} (G(t) - G(T)) \leq \lambda^{-1} (G(\infty) - G(T)), \quad (2.89)$$

где $G(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) \in (1, +\infty)$.

Из леммы 19 и ее доказательства следует, что для любого $\Lambda > 0$ найдется положительная постоянная $C_4 = C_4(\Lambda)$ такая, что для всех $s \in [0, t]$, $t \geq 0$ и $\lambda \in [0, \Lambda]$ имеем

$$\left| P_0(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t) - P_0(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} e^{\nu s/\gamma} L_{t-s}) \right| \\ \leq C_4 e^{\nu(t-s)} \left| R(\lambda^{-1/\gamma} L_t) - R(\lambda^{-1/\gamma} e^{\nu s/\gamma} L_{t-s}) \right|. \quad (2.90)$$

Согласно теореме о равномерной сходимости правильно меняющихся функций (см., например, теорему 1.1 в [138]), $R(\lambda^{-1/\gamma} e^{\nu s/\gamma} L_{t-s}) / R(L_{t-s}) \rightarrow \lambda e^{-\nu s}$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\lambda \in [0, \Lambda]$ и $s \in [0, T]$ для каждого фиксированного $\Lambda > 0$ и $T \in (0, t]$. Поэтому

$$\left| R(\lambda^{-1/\gamma} L_t) - R(\lambda^{-1/\gamma} e^{\nu s/\gamma} L_{t-s}) \right| \leq \varepsilon_0 \lambda e^{-\nu t}$$

для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и всех $t \geq t_0 = t_0(\Lambda, T, \varepsilon_0)$, $\lambda \in [0, \Lambda]$, $s \in [0, T]$. Возвращаясь к неравенству (2.90), мы видим, что

$$\left| \mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - \mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} e^{\nu s/\gamma} L_{t-s} \right) \right| \leq \varepsilon_0 C_4 \lambda e^{-\nu s} \quad (2.91)$$

для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и всех $t \geq t_0 = t_0(\Lambda, T, \varepsilon_0)$, $\lambda \in [0, \Lambda]$, $s \in [0, T]$.

Следовательно, при $t > 2T$ согласно формуле Лагранжа конечных приращений для f_1 и неравенству (2.91) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} |I_{11}(t, T; \lambda)| &\leq \lambda^{-1} \int_0^T \left| \mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - 1 + \varphi(\lambda e^{-\nu s}; 0) \right| dG(s) \\ &\leq \lambda^{-1} \int_0^T \left| \mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} L_t \right) - \mathbb{P}_0 \left(M_{t-s} > \lambda^{-1/\gamma} e^{\nu s/\gamma} L_{t-s} \right) \right| dG(s) \\ &+ \int_0^T |K(t-s; \lambda e^{-\nu s})| e^{-\nu s} dG(s) \leq \varepsilon_0 C_4 \tilde{G}(T) \\ &+ \int_0^T K_T(\lambda e^{-\nu s}) d\tilde{G}(s) \leq \varepsilon_0 C_4 + \mathbb{E}K_T(\lambda e^{-\nu \zeta}) \end{aligned} \quad (2.92)$$

для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и всех $t \geq t_0 = t_0(\Lambda, T, \varepsilon_0)$, $\lambda \in [0, \Lambda]$, где ζ – это случайная величина с функцией распределения \tilde{G} .

Сочетание соотношений (2.87)–(2.89) и (2.92) при $t > 2T$ приводит к неравенству

$$|K(t; \lambda)| \leq C_2 t e^{-\nu t} + C_3 \left(1 - \tilde{G}(t) \right) + \frac{G(\infty) - G(T)}{\lambda} + \varepsilon_0 C_4 + \mathbb{E}K_T(\lambda e^{-\nu \zeta})$$

для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и всех $t \geq t_0 = t_0(\Lambda, T, \varepsilon_0)$, $\lambda \in [0, \Lambda]$. Для $t_1 := \max \{2T, t_0(\Lambda, T, \varepsilon_0)\}$ это означает, что

$$K_{t_1}(\lambda) \leq \mathbb{E}K_T(\lambda e^{-\nu \zeta}) + \varepsilon_0 C_4 + C_2 t_1 e^{-\nu t_1} + C_3 \left(1 - \tilde{G}(t_1) \right) + \frac{G(\infty) - G(T)}{\lambda}.$$

При $T \rightarrow \infty$ с учетом произвольности выбора ε_0 последнее соотношение в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости влечет следующее неравенство:

$$K(\lambda) \leq \mathbb{E}K(\lambda e^{-\nu \zeta}).$$

Применение n раз последнего неравенства приводит к формуле

$$K(\lambda) \leq \mathbb{E}K\left(\lambda e^{-\nu Z(n)}\right), \quad (2.93)$$

где $Z(n) := \sum_{k=1}^n \zeta_k$ и ζ_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, – независимые одинаково распределенные случайные величины с таким же распределением, как у ζ . Согласно усиленному закону больших чисел и теореме Лебега о мажорированной сходимости из

неравенства (2.93) вытекает, что

$$0 \leq K(\lambda) \leq K(0+).$$

Однако $K(0+) = 0$ в силу (2.86). Таким образом, лемма 22 доказана. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 13. При $N = 1$ и $x = w_1 = 0$ утверждение теоремы 13 является следствием лемм 6–22. Теперь мы имеем дело с $N > 1$ и $x \in W$, скажем, $x = w_i$. Обсудим здесь основные различия между случаями одного и нескольких катализаторов и сделаем набросок последующего доказательства, опуская громоздкие детали. В случае нескольких катализаторов аналог интегрального уравнения (2.4) в лемме 6 – это система интегральных уравнений (2.75), в которой функции $I_i^{(N)}(t; u)$, $t \geq 0$, $u \geq \max\{w_1, \dots, w_N\}$, имеют следующие представления:

$$(1 - \alpha_i) \sum_{y \notin W} \frac{q(w_i, y)}{q} \int_0^t P_y(S(t-s) > u, W_k \tau_{y, w_k} > t-s, k=1, \dots, N) dG_i(s).$$

Аналогично лемме 7 каждая функция при $t \geq 0$ и $u \geq \max\{w_1, \dots, w_N\}$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \frac{qI_i^{(N)}(t; u)}{(1 - \alpha_i)\beta_i} &= P_{w_i}(S(t) > u) - \sum_{k=1}^N \int_0^t P_{w_k}(S(t-s) > u) d_{W_k} F_{w_i, w_k}(s) \\ &- \frac{\beta_i - q}{\beta_i} \int_0^t P_{w_i}(S(t-s) > u) dG_i(s) \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_i - q}{\beta_i} \int_0^t P_{w_k}(S(t-s) > u) dG_i *_{W_k} F_{w_i, w_k}(s). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Теперь следующий шаг – это ввести аналог функции G из леммы 17 в случае многих катализаторов, а именно матрицу $\mathcal{G}(t) = (G_{i,j}^{(N)}(t))_{i,j=1}^N$, в которой

$$G_{i,j}^{(N)}(t) = \delta_{i,j} \alpha_i m_i G_i(t) + (1 - \alpha_i) G_i *_{W_j} \bar{F}_{w_i, w_j}(t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что элемент $d_{i,j}(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, – это преобразование Лапласа функции $G_{i,j}^{(N)}$.

В силу неравенства (2.78) (вывод которого не зависит от предположений о скорости убывания хвостов распределения скачка блуждания), как и в лемме 17 при $N = 1$, в случае $N > 1$ мы исследуем асимптотическое поведение функции $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{I}(t; u)$, когда $u = \lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}$ и $t \rightarrow \infty$. Здесь

$\mathcal{I}(t; u) = \left(I_1^{(N)}(t; u), \dots, I_N^{(N)}(t; u) \right)$, $t \geq 0$, $u \geq \max\{w_1, \dots, w_N\}$. Полностью аналогично лемме 17, пользуясь следствием 3.1, пункт (i), в [56], выводим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{I}(t; u) \Big|_{u=\lambda^{-1/\gamma} L_{t+r}} \sim \lambda e^{-\nu r} \left(K_1^{(N)}, \dots, K_N^{(N)} \right)^\top, \quad t \rightarrow \infty.$$

Постоянные $K_i^{(N)} > 0$, $i = 1, \dots, N$, могут быть выписаны в явном виде, который является громоздким и потому опускается. Более того, леммы 18 и 19 также остаются неизменными в случае $N > 1$ (с, возможно, другой постоянной C' вместо C).

Обобщение функции $J(t; u)$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, на случай $N > 1$ – это векторная функция $\mathcal{J}(t; u)$, $t \geq 0$, $u \geq \max\{w_1, \dots, w_N\}$, с координатами $J_i^{(N)}(t; u)$, $i = 1, \dots, N$, вида

$$m_i \int_0^t P_{w_i}(M_{t-s} > u) dG_i(s) - \int_0^t (1 - f_i(1 - P_{w_i}(M_{t-s} > u))) dG_i(s).$$

Аналог леммы 20 в случае нескольких катализаторов утверждает, что при тех же условиях имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{J}(t; u) \Big|_{u=\lambda^{-1/\gamma} L_t} = (0, \dots, 0)^\top.$$

Доказательство повторяет аргументы леммы 20, хотя теперь мы применяем следствие 3.1, пункт (i), из [56] вместо теоремы 25 в [121], с. 30.

Различия как между утверждениями, так и между доказательствами лемм 21, 22 и их аналогов незначительны. Поэтому мы только заметим, что доказательство аналога леммы 22 следует аргументам теоремы 3.3 в [116]. Таким образом, теорема 13 установлена в случае $N \geq 1$ и стартовой точки $x \in W$.

Остается только доказать теорему 13 в случае $N \geq 1$ и $x \notin W$. Случай стартовой точки $x \notin W$ сводится к случаю $N + 1$ катализатора, если положить $w_{N+1} = x$, $\alpha_{N+1} = 0$, $m_{N+1} = 0$, $G_{N+1}(t) = 1 - e^{-qt}$, $t \geq 0$. Согласно лемме 3 в разделе 1.4 новое КВСБ со множеством катализаторов $\{w_1, \dots, w_{N+1}\}$ надкритическое, если изначальное КВСБ надкритическое и мальтусовские параметры в этих КВСБ совпадают. Так что мы можем воспользоваться доказанной частью теоремы 13 для случая $N + 1$ катализатора и стартовой точки из W . Теорема 13 полностью доказана. \square

2.5.3 Случай независимых координат в многомерном КВСБ

Наше основное предположение в подразделе 2.5.3 состоит в том, что хвосты распределения координат скачка блуждания являются правильно меняющимися. Другими словами, пусть компоненты скачка случайного блуждания таковы, что

$$\mathbb{P}(Y_i^1 \geq y) = y^{-\gamma_i^+} L_i^{(1,+)}(y) =: R_i^+(y), \quad (2.95)$$

$$\mathbb{P}(Y_i^1 \leq -y) = y^{-\gamma_i^-} L_i^{(1,-)}(y) =: R_i^-(y), \quad (2.96)$$

для каждого $y \in \mathbb{N}$, где функция $L_i^{(1,\kappa)}$ медленно меняющаяся, а функция R_i^κ правильно меняющаяся с индексом $-\gamma_i^\kappa$ таким, что $\gamma_i^\kappa \in (0, +\infty)$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$. Положительное значение символа κ соответствует правому концу случайного блуждания, в то время как отрицательное значение символа κ относится к левому концу. Согласно свойству 5 в монографии [138], гл. 1, раздел 5, существует асимптотически однозначно определенная обратная функция $R_i^{-1,\kappa}(s)$, $s \geq 0$, в таком смысле, что $1/R_i^\kappa(R_i^{-1,\kappa}(y)) \sim y$, $R_i^{-1,\kappa}(1/R_i^\kappa(y)) \sim y$ при $y \rightarrow \infty$, $y \in \mathbb{Z}_+$, и $R_i^{-1,\kappa}(s) = s^{1/\gamma_i^\kappa} L_i^{(2,\kappa)}(s)$, $s \geq 0$, где $L_i^{(2,\kappa)}$ медленно меняется на бесконечности.

Чтобы изучить скорость распространения популяции частиц, мы делим координаты частиц, расположенных в каждом органте, на указанные далее нормирующие функции. Правильный выбор функций приводит к существованию нетривиального предела масштабированных положений частиц “фронта”, когда время стремится к бесконечности. Соответствующее предельное множество в \mathbb{R}^d называется *предельной формой фронта*. Наш нормирующий множитель для i -й компоненты $X_i^v(t)$, $i = 1, \dots, d$, положения $\mathbf{X}^v(t)$ частицы $v \in Z(t)$ в случае, когда знак у $X_i^v(t)$ есть κ , $\kappa \in \{+, -\}$, имеет вид:

$$N_i^\kappa(t) := R_i^{-1,\kappa}(e^{vt}) = e^{vt/\gamma_i^\kappa} L_i^{(2,\kappa)}(e^{vt}), \quad t \geq 0.$$

Следующее предположение фактически содержит два условия. Во-первых, мы предполагаем, что компоненты скачка случайного блуждания независимы (или близки к независимым). Во-вторых, нормирующие коэффициенты относятся к зоне аппроксимации максимального скачка (см., например, [112], гл. 5, раздел 4) соответствующих координат случайного блуждания \mathbf{S} . Эти условия объединены в одно: для каждого фиксированного $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, имеем

$$\begin{aligned} & P_0 \left(\operatorname{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{N}^{\kappa(\mathbf{x})}(t) \in [|\mathbf{x}|, +\infty) \right) \\ &= h(u)(1 + \delta(u,t)) \prod_{i=1}^d P \left(\operatorname{sgn}(x_i)Y_i^1 \geq |x_i|N_i^{\kappa(x_i)} \right), \end{aligned} \quad (2.97)$$

где $h(u) = h(u, \mathbf{x})$, $u \geq 0$, – это положительная неубывающая функция такая, что $h(u) \sim cu^{d-n_0(\mathbf{x})}$, $u \rightarrow \infty$, для $c(\mathbf{x}) > 0$ и числа $n_0(\mathbf{x})$, равного количеству нулевых координат вектора \mathbf{x} . Функция $\delta(u,t) = \delta(u,t,\mathbf{x})$ стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u/t \in [0,1]$. Выражение $\operatorname{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{N}^{\kappa(\mathbf{x})}(t)$ обозначает вектор в \mathbb{R}^d с i -й координатой $\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u)/N_i^{\kappa(x_i)}(t)$, $i = 1, \dots, d$, и $[|\mathbf{x}|, +\infty) := [x_1, +\infty) \times \dots \times [x_d, +\infty)$. Здесь $\kappa(x_i) = “+”$, если $x_i \geq 0$, и $\kappa(x_i) = “-”$, если $x_i < 0$. Положим $\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u)/N_i^{\kappa(x_i)}(t) := 0$, если $N_i^{\kappa(x_i)}(t) = 0$. Напомним, что $\operatorname{sgn}(y) = 1$ при $y > 0$, $\operatorname{sgn}(y) = -1$ при $y < 0$ и $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Если компоненты скачка случайного блуждания независимы, то широкие достаточные условия для справедливости соотношения (2.97) представлены, например, в теореме 15.2.1 из [112].

При $\varepsilon > 0$ введем множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \prod_{i=1}^d |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} > \varepsilon \right\}.$$

Для $\lambda^\kappa = (\lambda_1^\kappa, \dots, \lambda_d^\kappa)$, $\lambda_i^\kappa \geq 0$, $\kappa \in \{+, -\}$, определим параллелепипед вида

$$V(\lambda^+, \lambda^-) := [-(\lambda_1^-)^{-1/\gamma_1^-}, (\lambda_1^+)^{-1/\gamma_1^+}] \times \dots \times [-(\lambda_d^-)^{-1/\gamma_d^-}, (\lambda_d^+)^{-1/\gamma_d^+}] \subset \mathbb{R}^d.$$

Обозначим

$$\Lambda(\lambda^+, \lambda^-) := \bigcup_{i=1}^d \{x_j = 0, j \neq i, j = 1, \dots, d, x_i \in [-(\lambda_i^-)^{-1/\gamma_i^-}, (\lambda_i^+)^{-1/\gamma_i^+}]\}.$$

Здесь параметры λ^+ и λ^- характеризуют размер множества $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$, которое имеет форму креста при $d = 2$ и форму естественного обобщения креста при $d > 2$.

Всюду далее $\mathbf{X}^v(u)/\mathbf{N}^\kappa(t)$ обозначает вектор в \mathbb{R}^d с i -й координатой, равной $X_i^v(u)/N_i^{\kappa(X_i^v(u))}(t)$, $u, t \geq 0$, $i = 1, \dots, d$. Поскольку в подразделах 2.5.1 и 2.5.2 уже изучено асимптотическое поведение фронта популяции в КВСБ по одномерной решетке, в подразделах 2.5.3 и 2.5.4 мы рассматриваем случай $d \geq 2$, хотя некоторые выводы справедливы при $d \in \mathbb{N}$. Теперь мы готовы сформулировать основные результаты.

Теорема 14. Пусть для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d с мальтусовским параметром $\nu > 0$ справедливы условия (2.1), (2.95)–(2.97). Тогда при любой стартовой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ имеем

$$P_{\mathbf{x}}(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_1 = t_1(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_1, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^{\kappa}(t) \notin \mathcal{O}_{\varepsilon}) = 1.$$

Утверждение теоремы 14 означает, что в пределе по времени п.н. нет частиц вне осей координат. Следующий результат показывает, что для каждого вектора λ^+ и λ^- вероятность того, что нормированное случайное облако частиц содержится в параллелепипеде $V(\lambda^+, \lambda^-)$, стремится к пределу, заданному с помощью распределения, найденного в главе 1.

Теорема 15. Пусть для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d с мальтусовским параметром $\nu > 0$ выполнены условия (2.1), (2.41), (2.95)–(2.97). Тогда для любых $\lambda_i^{\kappa} \geq 0$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$, и $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$P_{\mathbf{x}}(\forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^{\kappa}(t) \in V(\lambda^+, \lambda^-)) \rightarrow \varphi\left(\sum_{i, \kappa} \lambda_i^{\kappa}; \mathbf{x}\right),$$

где функция $\varphi(\cdot; \mathbf{x})$ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений (1.76) и (1.77), причем решение системы единственно в определенном функциональном классе (см. пункт (iii) теоремы 8 в разделе 1.6). Здесь $\varphi(\lambda; \mathbf{x}) \in (0, 1)$, $\varphi(0; \mathbf{x}) = 1$ и $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$ стремится к вероятности локального вырождения популяции в КВСБ при $\lambda \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$.

Из теорем 14 и 15 следует, что предельная форма фронта популяции частиц в КВСБ случайна и содержится во множестве $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$ с вероятностью $\varphi\left(\sum_{i, \kappa} \lambda_i^{\kappa}; \mathbf{x}\right)$.

Перейдем к установлению теорем 14 и 15. Для этого вначале рассмотрим КВСБ с одним катализатором, расположенным без ограничения общности в начале координат, т.е. $W = \{\mathbf{w}_1\}$ при $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, и со стартовой точкой, также находящейся в $\mathbf{0}$.

Напомним, что $E(t; \mathcal{U}) = P_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$, $t \geq 0$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$.

Лемма 23. Пусть имеют место условия (2.1), (2.95) и (2.97). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и

$$\mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_{\varepsilon} \cap \mathbb{R}_+^d = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d : \prod_{i=1}^d x_i^{\gamma_i^+} = \varepsilon \right\} =: \partial \mathcal{O}_{\varepsilon}^+.$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$E(t; \Delta(\mathbf{x}; t)) \leq C \varepsilon^{-1} e^{-\nu t(d-1)}, \quad t \geq 0,$$

где $\Delta(\mathbf{x}; t) := [x_1 N_1^+(t), +\infty) \times \dots \times [x_d N_d^+(t), +\infty) \subset \mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (2.14) следует, что

$$I(t; \mathcal{U}) \leq \frac{(1 - \alpha_1) \beta_1}{q} P_0(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}) + \frac{(1 - \alpha_1) |\beta_1 - q|}{q} \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}) dG_1(s). \quad (2.98)$$

Учитывая это неравенство и соотношение (2.15), мы убеждаемся в том, что для любого $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{0} \notin \mathcal{U}$, имеем

$$\begin{aligned} E(t; \mathcal{U}) &\leq \frac{(1 - \alpha_1) \beta_1}{q} \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(s) \\ &+ \frac{(1 - \alpha_1) |\beta_1 - q|}{q} \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}) dG_1 * \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(s). \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathcal{U} = \Delta(\mathbf{x}; t)$, где $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_\varepsilon^+$. Тогда в силу предположений (2.95), (2.97) и теоремы 25 в [121], с. 30, при всех достаточно больших t справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} E(t; \Delta(\mathbf{x}; t)) &\leq C_1 \int_0^t h(t-s) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(s) \prod_{i=1}^d P(Y_i^1 \geq x_i N_i^+(t)) \\ &\leq C_2 e^{\nu t} \frac{\int_0^\infty h(s) e^{-\nu s} ds}{\int_0^\infty s e^{-\nu s} dG(s)} \prod_{i=1}^d R_i^+(x_i N_i^+(t)) \\ &\leq C_3 e^{\nu t} \prod_{i=1}^d x_i^{-\gamma_i^+} \prod_{i=1}^d R_i^+(N_i^+(t)) \leq C_4 \varepsilon^{-1} e^{-\nu t(d-1)} \end{aligned}$$

для некоторых положительных постоянных C_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Лемма 23 доказана. \square

Лемма 24. Пусть имеют место соотношения (2.1), (2.95) и (2.97). Тогда справедливо равенство:

$$P_0(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_2 = t_2(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_2, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) / \mathbf{N}^k(t) \notin \mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_\varepsilon^+$. Для $t \geq 0$ введем событие $A_t := \{\omega : \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t)\}$. Согласно лемме Бореля-Кантелли, из леммы 23 вытекает, что $P_0\left(A_{n/2^m}^c \text{ б.ч.}\right) = 0$ для любого фиксированного

$m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $P_0 \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_{n/2^m} \right) = 1$. Это означает, что для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует положительное число $k_1 = k_1(m, \omega)$ такое, что для любого $n \geq k_1$ и каждого $v \in Z(n/2^m)$ имеем $\mathbf{X}^v(n/2^m) \notin \Delta(\mathbf{x}; n/2^m)$. Поскольку множество двоично-рациональных чисел плотно в \mathbb{R} и время пребывания частицы $v \in Z(t)$ во множестве $\Delta(\mathbf{x}; t)$ (при условии, что частица достигла этого множества) содержит ненулевой интервал с вероятностью 1, мы заключаем, что

$$P_0 \left(\omega : \exists t_3(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_3(\omega), \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t) \right) = 1. \quad (2.99)$$

Перестанем фиксировать $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$. Пусть Υ есть всюду плотное множество в $\partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$. Например, пусть Υ – это множество векторов \mathbf{x} из $\partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$ с рациональными координатами x_i , $i = 1, \dots, d$, $i \neq l$, для каждого $l = 1, \dots, d$. Рассмотрим область $\mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d = \bigcup_{\mathbf{x} \in \Upsilon} (x_1, +\infty) \times \dots \times (x_d, +\infty)$. Заметим, что соотношение $\mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t)$ эквивалентно $\mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^\kappa(t) \notin [x_1, +\infty) \times \dots \times [x_d, +\infty)$. Тогда формула (2.99) гарантирует, что для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$P_0 \left(\omega : \exists t_4(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_4(\omega), \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^\kappa(t) \notin \mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d \right) = 1,$$

что влечет искомое утверждение. Лемма 24 доказана. \square

В установленной лемме 24 рассматривается распространение популяции частиц в положительном ортанте \mathbb{R}_+^d . Аналогично проследим распространение популяции в других направлениях, когда время неограниченно растет, и переформулируем утверждение леммы 24 для других ортантов в \mathbb{R}^d . Сочетание леммы 24 и ее аналогов для остальных ортантов доказывает теорему 14 в случае одного катализатора в $\mathbf{0}$ и стартовой точки в $\mathbf{0}$.

При тех же предположениях о катализаторе и стартовой точке проверим утверждение теоремы 15.

Лемма 25. Пусть справедливы условия (2.1), (2.41) и (2.95)–(2.97). Тогда для $\lambda_i^\kappa > 0$, $i = 1, \dots, d$, $\kappa \in \{+, -\}$, имеем

$$P_0 \left(\forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^\kappa(t) \in V(\lambda^+, \lambda^-) \right) \rightarrow \varphi \left(\sum_{i, \kappa} \lambda_i^\kappa; \mathbf{0} \right)$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь сумма $\sum_{i, \kappa}$ берется по всем $i = 1, \dots, d$ и $\kappa \in \{+, -\}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 25 устанавливается в соответствии со схемой анализа в подразделе 2.5.2 асимптотического поведения максимума КВСБ по

\mathbb{Z} в случае правильно меняющихся хвостов распределения скачка блуждания. Отметим два ключевых отличия. 1) Здесь мы изучаем асимптотическое поведение вероятности $P_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^\kappa(t) \notin V(\lambda^+, \lambda^-))$ вместо $P_0(\exists v \in Z(t) : X^v(t)/N^+(t) \geq \lambda^+)$. 2) Теперь в силу (2.97) в рамках случайного блуждания (без ветвления) при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u/t \in [0, 1]$ имеем

$$\frac{P_0\left(\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u) > |x_i|N_i^{\kappa(x_i)}(t), i = j, k\right)}{P_0\left(\operatorname{sgn}(x_j)S_j(u) > |x_j|N_j^{\kappa(x_j)}(t)\right)} = o(1)$$

для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $x_j, x_k \neq 0$, и каждых $j, k = 1, \dots, d$, $j \neq k$. Следовательно, применяя соотношение (2.97) еще раз, получаем

$$\begin{aligned} & P_0(\mathbf{S}(u)/\mathbf{N}^\kappa(t) \notin V(\lambda^+, \lambda^-)) \\ & \sim \sum_{i=1}^d P_0\left(S_i(u) > (\lambda_i^+)^{-1/\gamma_i^+} N_i^+(t)\right) + \sum_{i=1}^d P_0\left(S_i(u) < -(\lambda_i^-)^{-1/\gamma_i^-} N_i^-(t)\right) \\ & \sim h(u) \sum_{i, \kappa} R_i^\kappa \left((\lambda_i^\kappa)^{-1/\gamma_i^\kappa} N_i^\kappa(t) \right) \sim h(u) e^{-\nu t} \sum_{i, \kappa} \lambda_i^\kappa \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u/t \in [0, 1]$. Последнее соотношение отличается от своего одномерного аналога множителем $\sum_{i, \kappa} \lambda_i^\kappa$. В анализе максимума КВСБ по \mathbb{Z} в подразделе 2.5.2 соответствующий множитель равен λ_1^+ . Оставшаяся часть доказательства леммы 25 повторяет аргументы лемм 17–22 в подразделе 2.5.2 и потому опускается. \square

Если множество W состоит из катализаторов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N \in \mathbb{Z}^d$ и $N > 1$, то доказательства теорем 14 и 15 следуют аргументации лемм 23–25. Однако теперь мы должны рассматривать несколько вероятностей $E_{\mathbf{w}_j}(t; \mathcal{U}) := P_{\mathbf{w}_j}(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$, $j = 1, \dots, N$, вместо одной вероятности $E(t; \mathcal{U})$, как в лемме 23. Соответственно уравнение (2.12) в лемме 9 должно быть заменено на систему уравнений (2.16), см. раздел 2.3. Вместо функции $G(\cdot)$ возникает матрица $\mathcal{G}(t) = (G_{i,j}^{(N)}(t))_{i,j=1}^N$, $t \geq 0$, с элементами

$$G_{i,j}^{(N)}(t) := \delta_{ij} \alpha_i m_i G_i(t) + (1 - \alpha_i) G_i *_{W_j} \bar{F}_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(t).$$

Далее пользуемся многомерной теорией восстановления в рамках статьи [56] и анализируем предел по времени решения системы нелинейных интегральных уравнений в соответствии с подходом работы [116]. Детали доказательства могут быть восстановлены по аналогии с доказательством теоремы 13 подраздела 2.5.1. Таким образом, доказательства теорем 14 и 15 завершены. \square

2.5.4 Примеры

Согласно формуле (2.2) случайное блуждание \mathbf{S} – это скачкообразный процесс с величинами скачков \mathbf{Y}^j . Предположим, что координаты каждого скачка $\mathbf{Y}^j = (Y_1^j, \dots, Y_d^j)$, $j \in \mathbb{N}$, независимы. Без потери общности рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Тогда

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{S}(u) \in \Delta(\mathbf{x}; t)) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\Pi(u) = k) P\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{Y}^j \in \Delta(\mathbf{x}; t)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d P\left(\sum_{j=1}^k Y_i^j \geq x_i N_i^+(t)\right). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Запишем $Y = Y^+ - Y^-$, где $Y^+ := Y \mathbb{I}\{Y \geq 0\}$ и $Y^- := Y \mathbb{I}\{Y \leq 0\}$. Рассмотрим $Y_i^j = Y_i^{(j,+)} - Y_i^{(j,-)}$, где случайные величины $Y_i^{(j,+)}, Y_i^{(j,-)} \geq 0$ определены упомянутым образом. Пусть $P(Y_i^{(j,\kappa)} = 0) = 1 - L_i^{(1,\kappa)} > 0$ и $L_i^{(1,+)} + L_i^{(1,-)} = 1$, $\kappa \in \{+, -\}$, $j = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, d$. Пусть также распределение $Y_i^{(j,\kappa)}$ при условии, что $Y_i^{(j,\kappa)} > 0$, есть дискретное распределение Парето с параметрами 1 и $\gamma_i^\kappa > 0$. Другими словами,

$$P(Y_i^{(j,\kappa)} \geq y) = L_i^{(1,\kappa)} y^{-\gamma_i^\kappa}, \quad y \in \mathbb{N}. \quad (2.101)$$

Эти предположения являются частными случаями формул (2.95) и (2.96) с функциями $L_i^{(1,\kappa)}(y) = L_i^{(1,\kappa)}$ для любого $y \in \mathbb{N}$ и каждого $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$.

Для удобства изложения мы воспроизведем некоторые достаточные условия справедливости “принципа большого скачка” (см., например, [113], с. 40), т.е. асимптотического соотношения

$$P\left(\sum_{j=1}^k Y_i^j \geq x_i N_i^+(t)\right) = k P(Y_i^1 \geq x_i N_i^+(t)) (1 + \delta_i(k, t)),$$

в котором $\sup_{1 \leq k \leq K_i(t)} \delta_i(k, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторой целочисленной функции $K_i(t)$, $t \geq 0$, и любого $i = 1, \dots, d$. Пусть компоненты скачка случайного блуждания независимы и удовлетворяют дискретному распределению Парето (2.101). Тогда для каждого $i = 1, \dots, d$ предположим, что *один* из следующих вариантов имеет место.

- а) $\gamma_i^+ \in (0,1)$ и $\gamma_i^- \geq \gamma_i^+$. Тогда теорема 2.6.1 в [112], гл. 2, раздел 6, применима для любой функции $K_i(\cdot)$ такой, что $K_i(t) = o(e^{\nu t})$, $t \rightarrow \infty$.
- б) $0 < \gamma_i^- < \gamma_i^+ < 1$. Тогда используем теорему 2.6.5 в [112], гл. 2, раздел 6, для любой функции $K_i(t) = o\left(e^{\nu \gamma_i^- t / \gamma_i^+}\right)$, $t \rightarrow \infty$, (см. также следствие 2.2.4 и теорему 2.5.2 там же).
- в) $\gamma_i^+ \in (1,2)$ и $E Y_i^j = 0$. Тогда см. теорему 3.4.1 в [112], гл. 4, раздел 4, с любой функцией $K_i(t) = o\left(e^{\nu \gamma_i^- t / \gamma_i^+} / t^{\gamma_i^-}\right)$, $t \rightarrow \infty$.
- г) $\gamma_i^+ > 2$ и также $E Y_i^j = 0$, $E\left(Y_i^j\right)^2 < \infty$. Тогда пользуемся теоремой 4.4.1 в [112], гл. 4, раздел 4, для любой функции $K_i(t) = o\left(e^{2\nu t / \gamma_i^+}\right)$, $t \rightarrow \infty$.

Перечисленные достаточные условия не содержат пограничные случаи такие, как $\gamma_i^+ = 1$ ($\gamma_i^+ = 2$), “чтобы избежать необходимости нетривиального центрирования сумм $\sum_{j=1}^k Y_i^j$, когда либо $E Y_i^j = \pm \infty$ ($E(Y_i^j)^2 = +\infty$), либо математическое ожидание (дисперсия) не существует”, как указано в книге [112], с. xvii. Положим $K(t) := \min_{i=1, \dots, d} K_i(t)$. Достаточные условия а)-г) и соотношение (2.100) влекут, что

$$\begin{aligned} & P_0(\mathbf{S}(u) \in \Delta(\mathbf{x}; t)) \\ &= \sum_{k=1}^{K(t)} P(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d k P(Y_i^1 \geq x_i N_i^+(t)) (1 + \delta_i(k, t)) + H(u, t) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{K(t)} k^d P(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d (1 + \delta_i(k, t)) \right) \prod_{i=1}^d P(Y_i^1 \geq x_i N_i^+(t)) + H(u, t), \end{aligned}$$

где

$$H(u, t) \leq P(\Pi(u) \geq K(t)) \leq \frac{E(\Pi(u))^D}{K^D(t)} \leq \varepsilon(t) e^{-\nu dt},$$

поскольку $u \leq t$, а значение $D > 0$ выбирается таким образом, что $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что мы получили искомую формулу (2.97) (без потери общности при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), так как

$$e^{-qu} \sum_{k=1}^{K(t)} k^d \frac{(qu)^k}{k!} \prod_{i=1}^d (1 + \delta_i(k, t)) \rightarrow E(\Pi(u))^d$$

при $t \rightarrow \infty$ и $E(\Pi(u))^d \sim (qu)^d$ при $u \rightarrow \infty$.

Итак, пусть для надкритического КВСБ, удовлетворяющего условию (2.41), справедливо предположение о независимости компонент вектора

скачка блуждания. Кроме того, пусть каждая компонента имеет дискретное распределение Парето согласно формуле (2.101) и для каждого $i = 1, \dots, d$ одно из достаточных условий а)-г) имеет место. Тогда все условия теорем 14 и 15 выполнены. Как упомянуто выше, мы предполагаем, что $L_i^{(1,+)} + L_i^{(1,-)} = 1$ и, дополнительно в случаях в) и г), что $EY_i^j = 0$. Так что в последних случаях параметры $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} L_i^{(1,+)} + L_i^{(1,-)} = 1, \\ L_i^{(1,+)} \sum_{y=1}^{\infty} y^{-\gamma_i^+} - L_i^{(1,-)} \sum_{y=1}^{\infty} y^{-\gamma_i^-} = 0. \end{cases} \quad (2.102)$$

Другими словами, если достаточное условие а) или б) справедливо для некоторого $i = 1, \dots, d$, то у нас есть два неизвестных $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, и только одно (первое) соотношение в системе (2.102), содержащее эти неизвестные. Наоборот, если достаточное условие в) или г) выполнено для некоторого $i = 1, \dots, d$, то мы имеем два неизвестных $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, и два соотношения в системе (2.102), содержащие эти неизвестные. Например, сосредоточившись на случае $d = 3$ и положив $\gamma_1^+ = 1/3$, $\gamma_1^- = 2/3$, $\gamma_2^+ = 1.25$, $\gamma_2^- = 1.75$, $\gamma_3^+ = 3$, $\gamma_3^- = 5$, мы решаем систему (2.102) с помощью приложения Mathematica и находим $L_2^{(1,+)} \approx 0.299251$, $L_2^{(1,-)} \approx 0.700749$, $L_3^{(1,+)} \approx 0.463124$, $L_3^{(1,-)} \approx 0.536876$, в то время как величина $L_1^{(1,+)}$ может быть выбрана произвольно, например, $L_1^{(1,+)} = 0.5$, что влечет $L_1^{(1,-)} = 0.5$.

Тем не менее, предельная форма фронта $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$, $\lambda_i^+ > 0$, $\lambda_i^- > 0$, $i = 1, \dots, d$, популяции частиц определяется исключительно параметрами γ_i^κ , $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$. Другие характеристики КВСБ влияют на *распределение* предельной формы фронта. Таким образом, чтобы сравнить различные формы фронта $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$, нет необходимости задавать параметры такие, как $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$.

Пример 1. При $d = 2$ положим $\gamma_1^+ = 0.5$, $\gamma_1^- = 0.25$, $\gamma_2^+ = 3$, $\gamma_2^- = 4$. Рассмотрим $\lambda_1^+ = 0.7$, $\lambda_1^- = 1$, $\lambda_2^+ = 0.125$, $\lambda_2^- = 1$. Тогда график предельной формы фронта $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$ изображен на рисунке 2.3 слева.

Пример 2. При $d = 3$, $\gamma_i^\kappa = 1.3$, $\lambda_i^\kappa = 0.4$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, 2, 3$, график $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$ изображен на рисунке 2.3 справа.

Таким образом, в подразделах 2.5.3 и 2.5.4 мы предполагали, что компоненты вектора скачка случайного блуждания независимы (возможно, близки к независимым), см. условие (2.97). Противоположным предположением является

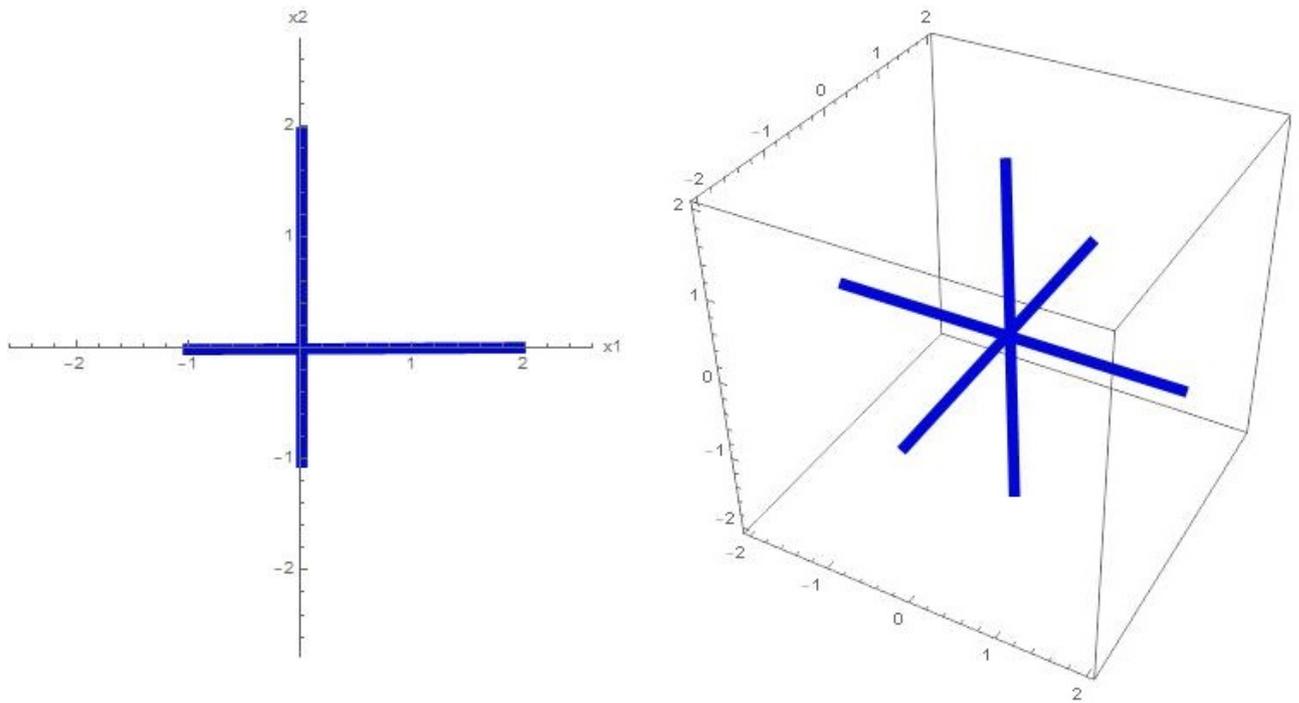


Рисунок 2.3 — Слева и справа соответствующие графики множества $\Lambda(\lambda^+, \lambda^-)$ для примеров 1 и 2.

их сильная зависимость. Следующий подраздел 2.5.5 будет посвящен изучению предельной формы фронта в КВСБ с правильно меняющимися хвостами в изотропном случае. Изотропия означает одинаковую скорость убывания хвостов распределения во всех направлениях. Мы убедимся в том, что в последнем случае предельная форма фронта представляет собой случайную нетривиальную поверхность, а не многомерный крест, как в подразделах 2.5.3 и 2.5.4.

2.5.5 Изотропный случай

Наше основное предположение при исследовании изотропного КВСБ с правильно меняющимися хвостами состоит в том (см., например, [112], гл. 9, раздел 3), что для множества $A \subset \mathbb{R}^d$, отделенного от начала координат шаром радиуса $b > 0$, выполнено соотношение

$$P(Y^1 \in uA) \sim V(u)F(A) \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad (2.103)$$

где $V(u) = u^{-\gamma}L_1(u)$, $u \geq 0$, — это правильно меняющаяся функция с индексом $-\gamma$, $\gamma \in (0, +\infty)$, $L_1(u)$, $u \geq 0$, — медленно меняющаяся на бесконечности функция, а $F(A)$ — функционал, определенный на некотором классе множеств.

Этот функционал, множество A и вектор \mathbf{Y}^1 таковы, что

$$\mathbb{P}(\mathbf{Y}^1 \in \mathbf{s} + uA) \sim \mathbb{P}(\mathbf{Y}^1 \in uA) \quad \text{для} \quad \|\mathbf{s}\| = o(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Последнее свойство просто выражает непрерывность функционала F : мы имеем $F(\mathbf{v} + A) \sim F(A)$ при $\|\mathbf{v}\| \rightarrow 0$, где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. Заметим, что дополнение множества A – это множество $B = A^c \subset \mathbb{R}^d$, содержащее начало координат вместе с шаром радиуса $b > 0$. Согласно свойству 5° монографии [138], гл. 1, раздел 5, существует асимптотически однозначно определенная обратная функция $V^{-1}(u)$, $u \geq 0$, в том смысле, что $1/V(V^{-1}(u)) \sim u$, $V^{-1}(1/V(u)) \sim u$ при $u \rightarrow \infty$ и $V^{-1}(u) = u^{1/\gamma} L_2(u)$, $u \geq 0$, где функция L_2 медленно меняется на бесконечности.

Для изучения скорости распространения популяции частиц по \mathbb{Z}^d мы делим их координаты на определенные нормирующие коэффициенты. Правильный выбор коэффициентов приводит к существованию нетривиального предела у масштабированных положений частиц “на фронте” в момент t при $t \rightarrow \infty$. В рассматриваемом случае нормирующий множитель имеет вид

$$N(t) := V^{-1}(e^{\nu t}) = e^{\nu t/\gamma} L_2(e^{\nu t}), \quad t \geq 0.$$

Мы также предполагаем, что нормирующий множитель $N(t)$, $t \geq 0$, принадлежит зоне аппроксимации максимального скачка (см., например, [112], гл. 5, раздел 4) случайного блуждания \mathbf{S} , т.е.

$$\mathbb{P}(\mathbf{S}(u)/N(t) \in A) \sim qu\mathbb{P}(\mathbf{Y}^1 \in N(t)A), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.104)$$

равномерно по $u/t \in [0,1]$. Широкие достаточные условия для справедливости соотношения (2.104) могут быть найдены, например, в теореме 9.3.1 в [112].

Теорема 16. Пусть предположения (2.1) и (2.41) выполнены для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d с мальтусовским параметром ν . Пусть также условия (2.103) и (2.104) справедливы для множества $A \subset \mathbb{R}^d$, отделенного от начала координат шаром радиуса $b > 0$. Тогда существует функция $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$, $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, такая, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ имеем

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\forall v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t)/N(t) \notin A) \rightarrow \varphi(F(A); \mathbf{x}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь $\varphi(\lambda; \mathbf{x}) \in (0,1)$, $\varphi(0; \mathbf{x}) = 1$ и $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$ стремится к вероятности локального вырождения популяции в КВСБ при $\lambda \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Функции $\varphi(\cdot; \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяют системе нелинейных

интегральных уравнений, возникающих в соотношениях (1.76) и (1.77) раздела 1.6, а ее решение единственно в определенном функциональном классе (см. пункт (iii) теоремы 8 в разделе 1.6).

Использование различных множеств A при выполнении условий, налагаемых на совместное распределение компонент вектора \mathbf{Y}^1 , приводит к более детальному описанию предельной формы фронта популяции частиц.

Перейдем к доказательству теоремы 16. Вначале рассмотрим КВСБ с одним катализатором \mathbf{w}_1 , расположенным без ограничения общности в начале координат, т.е. $W = \{\mathbf{w}_1\}$ при $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, и со стартовой точкой тоже $\mathbf{0}$.

Лемма 26. Пусть предположения (2.1) и (2.41) справедливы для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d с одним катализатором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ и мальтусовским параметром ν . Пусть также условия (2.103) и (2.104) выполнены для множества $A \subset \mathbb{R}^d$, отделенного от начала координат шаром радиуса $b > 0$. Тогда имеем

$$P_0(\forall v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t)/N(t) \notin A) \rightarrow \varphi(F(A); \mathbf{0}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Функция $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$, $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, фигурирует в теореме 16.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы 26 проводится аналогично анализу в подразделе 2.5.2 асимптотического поведения максимума КВСБ по \mathbb{Z} с правильно меняющимися хвостами. Два ключевых различия состоят в следующем. 1) Здесь мы изучаем асимптотическое поведение вероятности $P_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t)/N(t) \in A)$ для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ вместо вероятности $P_0(\exists v \in Z(t) : X^v(t)/N(t) \geq \lambda)$ при $\lambda > 0$. 2) Предположение (2.104) влечет, что

$$P_0(\mathbf{S}(t-s)/N(t) \in A) \sim q(t-s)V(N(t))F(A) \sim q(t-s)e^{-\nu t}F(A)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $s/t \in [0,1]$. Последнее соотношение отличается от его одномерного аналога множителем $F(A)$. При изучении максимума КВСБ по \mathbb{Z} в подразделе 2.5.2 соответствующий множитель есть просто λ . Оставшаяся часть доказательства леммы 26 повторяет доказательства лемм 17–22 раздела 2.5.2 и потому опускается. \square

Если множество катализаторов W состоит из $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N \in \mathbb{Z}^d$, причем $N > 1$, то доказательство теоремы 16 следует схеме доказательства леммы 26. Однако теперь мы вынуждены рассматривать несколько вероятностей

$E_{\mathbf{w}_j}(t; \mathcal{U}) := P_{\mathbf{w}_i}(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$, $j = 1, \dots, N$, вместо одной вероятности $E(t; \mathcal{U}) = P_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$. Соответственно уравнение (2.12) в лемме 9 надо заменить на систему уравнений (2.16), см. раздел 2.3. Вместо функции $G(t)$ рассматривается матричная функция $\mathcal{G}(t) = (G_{i,j}^{(N)}(t))_{i,j=1}^N$, $t \geq 0$, с элементами $G_{i,j}^{(N)}(t) = \delta_{i,j} \alpha_i m_i G_i(t) + (1 - \alpha_i) G_i *_{W_j} \bar{F}_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(t)$. Далее мы используем многомерную теорию восстановления в рамках статьи [56] и анализируем предел по времени решения системы нелинейных интегральных уравнений с помощью подхода в статье [116]. Детали доказательства могут быть восстановлены аналогично доказательству теоремы 13 подраздела 2.5.1. Таким образом, теорема 16 установлена. \square

2.6 Промежуточный случай: умеренно тяжелые хвосты скачка блуждания

В данном разделе мы рассмотрим промежуточный случай между легкими и тяжелыми хвостами скачка блуждания. Типичным представителем семейства распределений с умеренно тяжелыми хвостами является класс семиэкспоненциальных распределений.

В разделе 2.6 мы предполагаем, что координаты скачка случайного блуждания имеют семиэкспоненциальное распределение, т.е. (см., например, [112], гл. 5, раздел 4) для любых $i = 1, \dots, d$ и $y \in \mathbb{Z}_+$ справедливы соотношения

$$P(Y_i > y) = L_i^{(1,+)}(y) \exp\left(-y^{\gamma_i^+} L_i^{(2,+)}(y)\right) =: R_i^+(y), \quad (2.105)$$

$$P(Y_i < -y) = L_i^{(1,-)}(y) \exp\left(-y^{\gamma_i^-} L_i^{(2,-)}(y)\right) =: R_i^-(y), \quad (2.106)$$

где случайная величина \mathbf{Y} имеет такое же распределение, как $\mathbf{Y}^1, \mathbf{Y}^2, \dots$. Символ “+” относится к правому хвосту распределения, а символ “−” – к левому. Здесь

$$P(Y_i > y) = q^{-1} \sum_{\mathbf{x}: x_i > y} q(\mathbf{0}, \mathbf{x}), \quad (2.107)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$. Для каждого $i = 1, \dots, d$ и $\kappa \in \{+, -\}$ функции $L_i^{(1,\kappa)}(y)$ и $L_i^{(2,\kappa)}(y)$, $y \in \mathbb{Z}_+$, медленно меняются, в то время как параметры γ_i^κ лежат в промежутке $(0, 1)$.

В силу формул (2.105) и (2.106) функция $-\ln(R_i^\kappa(y))$, $y \in \mathbb{Z}_+$, правильно меняется с индексом γ_i^κ . Свойство 5° в монографии [138], гл. 1, раздел 5, влечет существование асимптотически однозначно определенной обратной функции $R_i^{-1,\kappa}$ на \mathbb{R}_+ такой, что

$$-\ln\left(R_i^\kappa\left(R_i^{-1,\kappa}(y)\right)\right) \sim y, \quad R_i^{-1,\kappa}\left(-\ln R_i^\kappa(y)\right) \sim y$$

при $y \rightarrow \infty$, $y \in \mathbb{Z}_+$, и

$$R_i^{-1,\kappa}(s) = s^{1/\gamma_i^\kappa} L_i^{(3,\kappa)}(s), \quad (2.108)$$

где $L_i^{(3,\kappa)}(s)$, $s \geq 0$, медленно меняется на бесконечности.

Функции $R_i^{-1,\kappa}(\cdot)$, $i = 1, \dots, d$, нам понадобятся для нормировки координат частиц из случайного множества $Z(t)$. Индекс κ означает, что нормировка зависит от ортанта κ (одного из 2^d) в \mathbb{R}^d , в котором частица расположена в момент времени t .

2.6.1 Предельная форма фронта КВСБ в случае семиэкспоненциального распределения скачка блуждания

В отличие от случайных блужданий, у которых хвосты распределения скачка либо легкие, либо правильно меняющиеся, блуждания с семиэкспоненциальным распределением скачков имеют зоны, для которых вероятности больших уклонений существенным образом отличаются. Эти зоны следующие: зона *уклонений Крамера*, *промежуточная зона* и зона *аппроксимации максимальным скачком* (см., например, [112], гл. 5, раздел 4). В разделе 2.6 мы имеем дело с двумя последними, поскольку они играют определяющую роль в асимптотическом поведении фронта популяции. Если $n, x \rightarrow \infty$ и n, x принадлежат зоне аппроксимации максимальным скачком, то $P_0\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \geq x\right) \sim n P_0(\eta_1 \geq x)$, $n, x \rightarrow \infty$, для последовательности независимых и одинаково семиэкспоненциально распределенных случайных величин η_i , $i = 1, 2, \dots$. Если $n, x \rightarrow \infty$ и n, x находятся в зоне уклонений Крамера, то

$$P_0\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \geq x\right) \sim \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) e^{-n\Lambda_\kappa^0(x/n)}, \quad n, x \rightarrow \infty, \quad (2.109)$$

где Φ – это функция стандартного нормального распределения, а значение $\Lambda_{\kappa}^0(x/n)$ выражается через “усеченный ряд Крамера”, т.е. разложение усеченного ряда, соответствующего функции уклонений случайной величины η_1 , который формально определен только, когда условие Крамера $Ee^{\lambda\eta_1} < \infty$ выполнено для некоторого $\lambda > 0$ (см., например, [112], гл. 5, раздел 1). В промежуточной зоне больших уклонений асимптотическое поведение вероятности $P_0(\sum_{i=1}^n \eta_i \geq x)$ занимает промежуточное место между аппроксимацией Крамера и аппроксимацией $nP_0(\eta_1 \geq x)$ максимальным скачком.

Предположим, что для каждого фиксированного $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, имеем

$$\begin{aligned} & P_0 \left(\text{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{R}^{-1, \kappa(\mathbf{x})}(t) \in [|\mathbf{x}|, +\infty) \right) \\ &= h(u) (1 + \delta(u, t)) \prod_{i=1}^d \left(P \left(\text{sgn}(x_i)Y_i \geq |x_i|R_i^{-1, \kappa(x_i)}(t) \right) \right)^{(1 - \varepsilon_i(u, t))}, \quad (2.110) \end{aligned}$$

где $h(u) = h(u, \mathbf{x})$, $u \geq 0$, – это положительная неубывающая функция такая, что $h(u) \sim c(\mathbf{x})u^{d-n_0(\mathbf{x})}$, $u \rightarrow \infty$, для постоянной $c(\mathbf{x}) > 0$ и числа $n_0(\mathbf{x})$, равного количеству нулевых координат вектора \mathbf{x} . Для каждого $i = 1, \dots, d$ неотрицательная функция $\varepsilon_i(u, t) = \varepsilon_i(u, t, \mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\vartheta = u/t \in [0, 1]$, а для всех достаточно больших t верно, что $\varepsilon_i(u_1, t) \leq \varepsilon_i(u_2, t)$ при $u_1 \leq u_2$, $u_1, u_2 \in [0, t]$. Функция $\delta(u, t) = \delta(u, t, \mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\vartheta = u/t \in [0, 1]$. Мы пишем $\delta(u, t)$ вместо $\delta(u, t, \mathbf{x})$ для краткости, поскольку переменная \mathbf{x} фиксирована. В формуле (2.110) выражение $\text{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{R}^{-1, \kappa(\mathbf{x})}(t)$ обозначает вектор в \mathbb{R}^d , у которого i -я координата есть $\text{sgn}(x_i)S_i(u)/R_i^{-1, \kappa(x_i)}(t)$, $i = 1, \dots, d$, а $[|\mathbf{x}|, +\infty) := [|x_1|, +\infty) \times \dots \times [|x_d|, +\infty)$. Положим $\text{sgn}(x_i)S_i(u)/R_i^{-1, \kappa(x_i)}(t) := 0$, если $R_i^{-1, \kappa(x_i)}(t) = 0$.

В случае, когда координаты вектора скачка случайного блуждания независимы, важное соотношение (2.110) может вытекать из других предположений о хвостах распределения скачков (см. подраздел 2.6.3). Например, для случая, когда координаты вектора скачка случайного блуждания независимы, в монографии [112], теорема 5.4.1, установлены достаточные условия справедливости соотношения (2.110). В частности, если абсолютные значения как строго положительных, так и строго отрицательных компонент каждой координаты вектора скачка удовлетворяют дискретному распределению Вейбулла, соотношение (2.110) выполнено (см. раздел 2.6.3). Таким образом, чтобы избежать

перечисления достаточных условий справедливости формулы (2.110), мы просто требуем, чтобы она выполнялась.

Определим множества в \mathbb{R}^d :

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} > \nu + \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \mathcal{O} := \mathcal{O}_0, \quad (2.111)$$

$$\mathcal{Q}_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} < \nu - \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon \in [0, \nu), \quad \mathcal{Q} := \mathcal{Q}_0, \quad (2.112)$$

$$\mathcal{P} := \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} = \nu \right\}. \quad (2.113)$$

Обозначим $\mathbf{X}^v(u)/\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)$ вектор в \mathbb{R}^d , у которого i -я координата равняется $X_i^v(u)/R_i^{-1, \kappa(X_i^v(u))}(t)$, $u, t \geq 0$, $i = 1, \dots, d$.

Теорема 17. Пусть для надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d с мальтусовским параметром ν выполнены соотношения (2.1), (2.105), (2.106) и (2.110). Тогда для каждой стартовой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ имеют место следующие равенства:

$$P_{\mathbf{z}} \left(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_1 = t_1(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_1, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \frac{\mathbf{X}^v(t)}{\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)} \notin \mathcal{O}_\varepsilon \right) = 1, \quad (2.114)$$

$$P_{\mathbf{z}} \left(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \nu) \exists t_2 = t_2(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_2 \exists v \in Z(t), \frac{\mathbf{X}^v(t)}{\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)} \notin \mathcal{Q}_\varepsilon \Big| \mathcal{I} \right) = 1, \quad (2.115)$$

где событие \mathcal{I} определено в соотношении (2.3), а множества \mathcal{O}_ε и \mathcal{Q}_ε – в формулах (2.111) и (2.112).

Из теоремы 17 следует, что для почти всех ω и для любого $\varepsilon > 0$ через достаточно большое время не существует частиц с нормированными координатами снаружи поверхности $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$, и для почти всех $\omega \in \mathcal{I}$ всегда есть такие частицы снаружи поверхности $\partial\mathcal{Q}_\varepsilon$. Для $\omega \in \mathcal{I}$ наиболее удаленные частицы (образующие “фронт” распространения популяции) в результате нормировки расположены через достаточно большое время между $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$ и $\partial\mathcal{Q}_\varepsilon$ для достаточно малого ε . Для почти всех $\omega \notin \mathcal{I}$ предел нормированных положений частиц есть $\mathbf{0}$.

Согласно теореме 5 раздела 1.6 равенство $P(\mathcal{I}) = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда случайное блуждание $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ возвратно и $f_i(0) = 0$

для всех $i = 1, \dots, N$. Когда скачок случайного блуждания имеет по крайней мере одну координату i с ненулевым средним, случайное блуждание неозвратно, поскольку в силу закона больших чисел либо $S_i(t) \rightarrow +\infty$, либо $S_i(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$ п.н., откуда следует, что $S_i(t)$ не может обращаться в ноль бесконечное число раз с вероятностью 1. Когда все координаты скачка случайного блуждания имеют нулевое среднее, вопрос о возвратности и транзиентности становится более сложным (см., например, монографию [81], гл. 13, разделы 3.1–3.2, и статью [139] для симметричных случайных блужданий).

Назовем поверхность $\mathcal{P} = \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{Q}$ “предельной формой фронта”. Можно эквивалентно переформулировать теорему 17, описывая окрестности множеств \mathcal{P} и \mathcal{Q} в терминах евклидовых метрик (вместо рассмотрения \mathcal{O}_ε и \mathcal{Q}_ε при $\varepsilon > 0$).

Теорема 18 ниже утверждает, что каждая точка множества \mathcal{P} представляет собой предельную точку для нормированных положений частиц в КВСБ, т.е. поверхность \mathcal{P} в некотором смысле минимальна.

Теорема 18. *При справедливости условий теоремы 17 для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$ имеем*

$$P_{\mathbf{z}} \left(\omega : \forall t \geq 0 \exists v_{\mathbf{y}} = v_{\mathbf{y}}(t, \omega) \in Z(t) \text{ т.ч. } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{X}^{v_{\mathbf{y}}}(t)}{\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)} = \mathbf{y} \mid \mathcal{I} \right) = 1. \quad (2.116)$$

В формулировках теорем 17 и 18 особо выделим случай $d = 1$, в котором не встает вопрос о независимости координат скачка, а исследование фронта распространения сводится к изучению максимума и минимума популяции. Как следствие теорем 17 и 18, выпишем соответствующее утверждение для максимума $M_t = \max\{X^v(t) : v \in Z(t)\}$ среди всех частиц, существующих в КВСБ в момент времени t .

Следствие 2. *Если выполнены условия (2.1), (2.105), (2.106) и (2.110) для надкритического КВСБ по \mathbb{Z} с мальтусовским параметром ν , то для каждой стартовой точки $z \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение*

$$\frac{M_t}{t^{1/\gamma_1^+} L_1^{(3,+)}(t)} \rightarrow \nu^{1/\gamma_1^+} \quad \text{п.н. на событии } \mathcal{I}.$$

Мы ограничимся определением только предельной формы фронта. Например, в рамках решаемой в данном разделе задачи мы могли бы определить сам фронт распространения популяции как слой частиц в момент t такой, что после нормировки положений частиц как в теореме 17 и устремлении $t \rightarrow \infty$ почти

все предельные точки слоя частиц образовывали бы поверхность \mathcal{P} из соотношения (2.113), называемую предельной формой фронта. Однако в подразделе 2.5.3 возникает случайный предел у должным образом нормированных положений самых удаленных от начала координат частиц в смысле сходимости по распределению. Таким образом, наше определение фронта не подходило бы в случае, рассмотренном в подразделе 2.5.3. Под фронтом распространения КВСБ по \mathbb{Z}^d мы подразумеваем обобщение на многомерный случай максимальной и минимальной границ популяции по каждой из d осей. Тем не менее, определение фронта как множества частиц в момент t , находящихся дальше остальных на каждом луче из начала координат, также выглядит неподходящим, поскольку в силу дискретной структуры целочисленной решетки континуум лучей не будет содержать ни одной частицы.

2.6.2 Доказательства предельных теорем для случая семиэкспоненциального распределения

Чтобы установить теоремы 17 и 18, мы выводим систему нелинейных интегральных уравнений и оцениваем ее решение, используя теорию восстановления, преобразование Лапласа, метод каплинга и теорию больших уклонений для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями скачков. Мы разбиваем доказательство теоремы 17 на 5 шагов. На шагах 1, 2 и 3 рассматриваем случай одного катализатора \mathbf{w}_1 , расположенного, без ограничения общности, в начале координат, т.е. $W = \{\mathbf{w}_1\}$ с $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, и стартовой точки КВСБ, также находящейся в $\mathbf{0}$. На шагах 4 и 5 обращаемся к общему случаю. При этом, доказывая теорему 17, мы также выводим теорему 18.

Шаг 1. Докажем формулу (2.114) в случае, когда один катализатор и стартовая точка расположены в $\mathbf{0}$.

Лемма 27. Пусть имеют место соотношения (2.1), (2.105) и (2.110). Зафиксируем $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ из множества $\partial\mathcal{O}_\varepsilon \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0, i = 1, \dots, d\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{i=1}^d x_i^{\gamma_i^+} = \mathbf{v} + \varepsilon\} =: \partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$. Тогда существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathbf{v}, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$E(t; \Delta(\mathbf{x}; t)) \leq C e^{-\varepsilon_0 t}, \quad t \geq 0, \quad (2.117)$$

где $\Delta(\mathbf{x}; t) := [x_1 R_1^{-1,+}(t), +\infty) \times \dots \times [x_d R_d^{-1,+}(t), +\infty) \subset \mathbb{R}^d$ и C – положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии с доказательством леммы 23 из раздела 2.5.3 формула (2.14) влечет, что

$$I(t; \mathcal{U}) \leq \frac{(1 - \alpha_1)\beta_1}{q} P_0(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}) + \frac{(1 - \alpha_1)|\beta_1 - q|}{q} \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}) dG_1(s). \quad (2.118)$$

Учитывая это неравенство и соотношение (2.15), мы убеждаемся в том, что функция $E(t; \mathcal{U})$ мажорируется следующим образом:

$$\int_0^t P_0(\mathbf{S}(t - s) \in \mathcal{U}) d \left(\frac{(1 - \alpha_1)\beta_1}{q} \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(s) + \frac{(1 - \alpha_1)|\beta_1 - q|}{q} G_1 * \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(s) \right).$$

Рассмотрим $\mathcal{U} = \Delta(\mathbf{x}; t)$, где $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$. Тогда в силу предположений (2.105) и (2.110), а также теоремы 2 в [123], гл. 11, раздел 1, или теоремы 25 в [121], с. 30, при любых δ_1 и δ_2 из промежутка $(0,1)$ найдется $T = T(\delta_1, \delta_2)$ такое, что для любого $t \geq T$ имеем

$$\begin{aligned} E(t; \Delta(\mathbf{x}; t)) &\leq C_1 \int_0^t h(t - s) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(s) \prod_{i=1}^d P \left(Y_i^1 \geq x_i R_i^{-1,+}(t) \right)^{1 - \delta_1} \\ &\leq C_2 e^{\nu t} \frac{\int_0^\infty h(s) e^{-\nu s} ds}{\int_0^\infty s e^{-\nu s} dG(s)} \prod_{i=1}^d R_i^+ \left(x_i R_i^{-1,+}(t) \right)^{1 - \delta_1} \\ &\leq C_3 e^{\nu t} \prod_{i=1}^d \exp \left(-(1 - \delta_1) x_i^{\gamma_i^+} t (1 + o(1)) \right) \\ &\leq C_3 \exp \left(\nu t - (1 - \delta_1) t \sum_{i=1}^d x_i^{\gamma_i^+} + \delta_2 t \right) \\ &\leq C_3 \exp \left(-((1 - \delta_1)(\nu + \varepsilon) - \nu - \delta_2) t \right) \end{aligned}$$

для некоторых положительных постоянных C_1, C_2 и C_3 . Можно выбрать $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$ таким образом, что $(1 - \delta_1)(\nu + \varepsilon) - \nu - \delta_2 = \varepsilon_0 > 0$. Лемма 27 доказана. \square

Лемма 28. Пусть выполнены условия (2.1), (2.105) и (2.110). Тогда

$$P_0(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_3 = t_3(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_3, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \frac{\mathbf{X}^v(t)}{\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)} \notin \mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d) = 1. \quad (2.119)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$ и положим

$$A_t := \{\omega : \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t)\}, \quad t \geq 0.$$

Согласно лемме Бореля-Кантелли неравенство (2.117) показывает, что $P_0(A_{n/2^m}^c \text{ б.ч.}) = 0$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $P_0(\bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty A_{n/2^m}) = 1$, поэтому для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует положительное целое число $k_1 = k_1(m, \omega)$ такое, что для любого $n \geq k_1$ и каждого $v \in Z(n/2^m)$ имеем $\mathbf{X}^v(n/2^m) \notin \Delta(\mathbf{x}; n/2^m)$. Поскольку множество двоично-рациональных чисел плотно в \mathbb{R} , а время пребывания частицей $v \in Z(t)$ во множестве $\Delta(\mathbf{x}; t)$ (при условии события, что частица достигла множества $\Delta(\mathbf{x}; t)$) содержит ненулевой интервал с вероятностью 1, мы заключаем, что

$$P_0(\omega : \exists t_4(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_4(\omega) \text{ и } \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t)) = 1. \quad (2.120)$$

Перестанем теперь фиксировать \mathbf{x} из множества $\partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$. Если множество $\partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$ конечно (что имеет место при $d = 1$), положим $\Upsilon = \partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$. Иначе рассмотрим Υ , счетное всюду плотное множество в $\partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$, содержащее также точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ с координатами $x_i = 0$, $i = 1, \dots, d$, $i \neq l$, для каждого $l = 1, \dots, d$. Например, пусть Υ – это множество точек \mathbf{x} из $\partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$ с рациональными координатами x_i , $i = 1, \dots, d$, $i \neq l$, для каждого $l = 1, \dots, d$.

Рассмотрим область $\mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d = \bigcup_{\mathbf{x} \in \Upsilon} ([x_1, +\infty) \times \dots \times [x_d, +\infty) \setminus \{\mathbf{x}\})$. Соотношение $\mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t)$ эквивалентно соотношению $\mathbf{X}^v(t)/\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t) \notin [x_1, +\infty) \times \dots \times [x_d, +\infty)$. Равенство (2.120) влечет, что

$$P_0(\omega : \exists t_5(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_5(\omega) \text{ и } \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t) \notin \mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d) = 1 \quad (2.121)$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Следовательно, из соотношения (2.121) вытекает формула (2.119). Лемма 28 доказана. \square

Если $d = 1$, лемма 28 утверждает, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M_t / \left(t^{1/\gamma_1^+} L_1^{(3,+)}(t) \right) \leq \nu^{1/\gamma_1^+} \text{ п.н.}$$

Таким образом, мы получили верхнюю оценку для максимума M_t КВСБ с одним катализатором и стартовой точкой, расположенными в $\mathbf{0}$ (см. утверждение следствия 2).

Пусть $d \in \mathbb{N}$. В лемме 28 мы рассмотрели распространение популяции частиц в положительном ортанте \mathbb{R}_+^d . Исследуем распространение частиц с ростом времени в разных направлениях, что мы формализуем без ограничения общности для $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^{d-1}$. Для каждого $\omega \in \Omega$ любая частица $v \in Z(t)$, расположенная в точке $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t), \dots, X_d^v(t))$ в КВСБ, соответствует новой частице $v' \in Z'(t)$, расположенной в $\mathbf{X}^{v'}(t) = (-X_1^v(t), X_2^v(t), \dots, X_d^v(t))$ в новом КВСБ по \mathbb{Z}^d . $Z'(t)$ – это случайное множество частиц, находящихся в момент t в новом КВСБ, к которому мы применяем лемму 28, чтобы получить

$$\begin{aligned} P_0(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_6 = t_6(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_6 \text{ и } \forall v \in Z(t) \text{ верно} \\ \mathbf{X}^v(t) / \mathbf{R}^{-1, \kappa}(t) \notin \mathcal{O}_\varepsilon \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^{d-1})) = 1. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Аналогичным образом мы можем переформулировать лемму 28 для других ортантов в \mathbb{R}^d . В сочетании с равенствами (2.119) и (2.122) это ведет к первому утверждению теоремы 17 в случае КВСБ с одним катализатором в $\mathbf{0}$ и стартовой точкой $\mathbf{0}$.

Шаг 2. Установим соотношение (2.115), когда имеется один катализатор в $\mathbf{0}$, а стартовая точка тоже есть $\mathbf{0}$. Мы временно предположим, что $E\xi_1^2 < \infty$ и будем следовать схеме доказательства, предложенной в разделе 5.2 статьи [18].

Лемма 29. Пусть справедливы соотношения (2.1), (2.105) и (2.110). Рассмотрим функцию $r(t)$, $t \geq 0$, такую, что $r(t) \leq t$, $r(t) \nearrow +\infty$, $t - r(t) \nearrow +\infty$ и $t - r(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$ (например, $r(t) = t - \ln t$). Фиксируем $\varepsilon \in (0, \nu)$ и $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{Q}_\varepsilon^+ := \partial \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d$. Тогда для некоторой положительной постоянной C_4 имеем

$$P_0\left(\mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t) \text{ для любого } v \in Z(t), \mu(r(t); \mathbf{0}) \geq C_4 e^{\nu r(t)}\right) \leq \exp\left(-e^{\varepsilon t + o(t)}\right) \quad (2.123)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\mu(r(t); \mathbf{0})$ – это число частиц в КВСБ, находящихся в начале координат $\mathbf{0}$ в момент $r(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 7 из раздела 1.6, которая справедлива при выполнении условия $E\xi_1^2 < \infty$, на множестве \mathcal{I} в момент $r(t)$, $0 < r(t) < t$, (с учетом рассуждений, проведенных на шаге 2 доказательств теорем 9 и 10) существует по крайней мере $[C_4 e^{\nu r(t)}]$ частиц в начале координат $\mathbf{0}$ для некоторой положительной постоянной C_4 ($[x]$ означает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$). Если эти частицы перемещаются в соответствии со случайным блужданием

$\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ так, что $\mathbf{S}(u) \neq \mathbf{0}$ для каждого $u \in [\tau_0, t - r(t)]$, то расстояние от $\mathbf{0}$ до самых удаленных от $\mathbf{0}$ частиц в КВСБ в момент t превосходит каждую из $[C_4 e^{\nu r(t)}]$ независимых и одинаково распределенных копий $\mathbf{S}(t - r(t))$, для которых $\mathbf{S}(u) \neq \mathbf{0}$ при каждом $u \in [\tau_0, t - r(t)]$.

Для множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{0} \notin \mathcal{U}$, и $t \geq 0$ имеет место тождество

$$P_0(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}, \tau_{0,0} > t) = P_0(\mathbf{S}(t) \in \mathcal{U}) - \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t-s) \in \mathcal{U}) dF_{0,0}(s). \quad (2.124)$$

Тогда из формул (2.105) и (2.110) вытекает, что

$$\begin{aligned} & P_0(\mathbf{S}(t - r(t)) \in \Delta(\mathbf{x}; t), \tau_{0,0} > t - r(t)) \\ &= P_0(\mathbf{S}(t - r(t)) \in \Delta(\mathbf{x}; t)) - \int_0^{t-r(t)} P_0(\mathbf{S}(t - r(t) - s) \in \Delta(\mathbf{x}; t)) dF_{0,0}(s) \\ &= \prod_{i=1}^d P\left(Y_i \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{1-\varepsilon_i(t-r(t),t)} \left(h(t - r(t))(1 + \delta(t - r(t), t)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-r(t)} h(t - r(t) - s)(1 + \delta(t - r(t) - s, t)) \prod_{i=1}^d \frac{R_i^+(x_i R_i^{-1,+}(t))^{\varepsilon_i(t-r(t),t)}}{R_i^+(x_i R_i^{-1,+}(t))^{\varepsilon_i(t-r(t)-s,t}}} dF_{0,0}(s) \right) \\ &\geq \prod_{i=1}^d P\left(Y_i \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{1-\varepsilon_i(t-r(t),t)} \left(h(t - r(t))(1 + \delta(t - r(t), t)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-r(t)} h(t - r(t) - s)(1 + \delta(t - r(t) - s, t)) dF_{0,0}(s) \right) \\ &= \prod_{i=1}^d R_i^+(x_i R_i^{-1,+}(t))^{1-\varepsilon_i(t-r(t),t)} \left(h(t - r(t))(1 - F_{0,0}(t - r(t))) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t-r(t)} (h(t - r(t)) - h(t - r(t) - s)) dF_{0,0}(s) + o(h(t - r(t))) \right) \\ &= \exp\left(-t \sum_{i=1}^d x_i^{\gamma_i^+} + o(t)\right) = \exp(-(\nu - \varepsilon)t + o(t)), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где неравенство \geq справедливо для достаточно больших t . Здесь мы опираемся на предположение, что $r(t) \in [0, t]$ и $t - r(t) \nearrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Последние

соотношения приводят к оценке

$$\begin{aligned} & P_0 \left(\mathbf{X}^v(t) \notin \Delta(\mathbf{x}; t) \text{ для любого } v \in Z(t), \mu(r(t); \mathbf{0}) \geq C_4 e^{\nu r(t)} \right) \quad (2.125) \\ & \leq (1 - P_0(\mathbf{S}(t - r(t)) \in \Delta(\mathbf{x}; t), \tau_{\mathbf{0}, \mathbf{0}} > t - r(t)))^{[C_4 e^{\nu r(t)}]} \\ & \leq \exp \left(- \left[C e^{\nu r(t)} \right] e^{-(\nu - \varepsilon)t + o(t)} \right) = \exp \left(- e^{\nu r(t) - (\nu - \varepsilon)t + o(t)} \right), \quad \text{когда } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Утверждение леммы 29 теперь следует из предположения $t - r(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма 29 доказана. \square

Лемма 30. Если имеют место предположения (2.1), (2.105) и (2.110), то

$$\begin{aligned} & P_0(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \nu) \exists t_7 = t_7(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_7 \exists v \in Z(t), \\ & \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t) \notin \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d | \mathcal{I}) = 1. \quad (2.126) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{Q}_\varepsilon^+$. Введем событие

$$B_t = \{ \omega : \exists v \in Z(t) \text{ т.ч. } \mathbf{X}^v(t) \in \Delta(\mathbf{x}; t) \}.$$

В силу леммы Бореля-Кантелли и теоремы 8 в разделе 1.6 из равенства (2.123) следует, что $P_0 \left(B_{n/2^m}^c \text{ б.ч.} | \mathcal{I} \right) = 0$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $P_0 \left(\bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty B_{n/2^m} | \mathcal{I} \right) = 1$. Это означает, что для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется положительное целое число $k_2 = k_2(m, \omega)$ такое, что для любого $n \geq k_2$ существует частица $v \in Z(n/2^m)$ такая, что $\mathbf{X}^v(n/2^m) \in \Delta(\mathbf{x}; n/2^m)$. Поскольку множество двоично-рациональных чисел всюду плотно в \mathbb{R} и время пребывания частицы $v \in Z(t)$ во множестве $\Delta(\mathbf{x}; t)$ (при условии, что частица достигла множества $\Delta(\mathbf{x}; t)$) содержит ненулевой интервал с вероятностью 1, мы заключаем, что

$$P_0(\omega : \exists t_8(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_8(\omega) \exists v \in Z(t), \mathbf{X}^v(t) \in \Delta(\mathbf{x}; t) | \mathcal{I}) = 1. \quad (2.127)$$

Используя соотношение $\mathcal{Q}_\varepsilon \cap \Delta(\mathbf{x}; t) = \emptyset$ и опираясь на формулу (2.127), приходим к выводу, что

$$P_0(\omega : \exists t_9(\omega) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_9(\omega) \exists v \in Z(t), \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t) \notin \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^d | \mathcal{I}) = 1 \quad (2.128)$$

для каждого $\varepsilon \in (0, \nu)$. Поскольку число ε произвольное из промежутка $(0, \nu)$, соотношение (2.128) влечет равенство (2.126). Лемма 30 доказана. \square

При $d = 1$ лемма 30 утверждает, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} M_t / \left(t^{1/\gamma_1^+} L_1^{(3,+)}(t) \right) \geq \nu^{1/\gamma_1^+} \quad \text{п.н. на событии } \mathcal{I}.$$

Таким образом, мы получили нижнюю оценку для максимума M_t в случае КВСБ с одним катализатором, расположенным в начале координат $\mathbf{0}$, и стартовой точкой $\mathbf{0}$ при дополнительном предположении, что $E\xi_1^2 < \infty$ (см. утверждение следствия 2).

Пусть $d \in \mathbb{N}$. В лемме 30 мы рассматривали распространение частиц в положительном ортанте \mathbb{R}_+^d . Как в конце шага 1, переформулируем лемму 30 для других ортантов в \mathbb{R}^d и учтем формулу (2.126). В результате получим второе утверждение теоремы 17 в случае КВСБ с одним катализатором в $\mathbf{0}$ и стартовой точкой $\mathbf{0}$, когда $E\xi_1^2 < \infty$.

Сочетание равенств (2.114) и (2.127), которые имеют место для каждого $\mathbf{x} \in \partial Q_\varepsilon$, доказывает теорему 18 в случае одного катализатора, расположенного в $\mathbf{0}$ и стартовой точки $\mathbf{0}$, когда $E\xi_1^2 < \infty$.

Шаг 3. Пусть теперь $W = \{\mathbf{w}_1\}$ с $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, стартовая точка КВСБ есть тоже $\mathbf{0}$, а $E\xi_1^2 = \infty$. Назовем это КВСБ I. Чтобы проверить соотношение (2.127) (и, как следствие, утверждение (2.115)), в отличие от доказательства, предложенного в разделе 5.3 статьи [18], мы используем теорему 7 раздела 1.6, устанавливающую сильную сходимость общих и локальных численностей частиц в надкритическом КВСБ. Число потомков ξ_1 имеет среднее m_1 . Обозначим $\xi_1(L) := \min(\xi_1, L)$ и $m_1(L) := E\xi_1(L)$, $L \in \mathbb{N}$. Выберем L достаточно большим так, чтобы $\alpha_1 m_1(L) + (1 - \alpha_1)F_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\infty) > 1$. Это возможно, поскольку $m_1(L) \rightarrow m_1$ при $L \rightarrow \infty$ и $\alpha_1 m_1 + (1 - \alpha_1)F_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\infty) > 1$ согласно определению надкритического режима КВСБ (см. определение 1). На основе КВСБ I рассмотрим КВСБ, которое мы назовем КВСБ II, $({}^{(L)}\mathbf{X}^v(t), v \in {}^{(L)}Z(t), t \geq 0)$ с числом потомков $\xi_1(L)$ одной частицы и тем же случайным блужданием $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$. КВСБ II отличается от КВСБ I тем, что теперь для каждого момента ветвления в $\mathbf{0}$ мы оставляем либо ξ_1 потомков, если $\xi_1 \leq L$, либо L потомков, если $\xi_1 > L$, и дублируем их перемещения в КВСБ I. Опираясь на формулу (2.115), для КВСБ II мы получаем

$$P_0 \left(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \nu(L)) \exists t_2(L) = t_2(L, \omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_2(L) \exists v \in {}^{(L)}Z(t), \right. \\ \left. \text{для которых } ({}^{(L)}\mathbf{X}^v(t) / \mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)) \notin Q_\varepsilon(L) \mid \mathcal{I}(L) \right) = 1, \quad (2.129)$$

где

$$\mathcal{I}(L) := \left\{ \omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \{v \in {}^{(L)}Z(t) : ({}^{(L)}\mathbf{X}^v(t) = 0\} \neq \emptyset \right\} \in \mathcal{F}, \quad (2.130)$$

$\nu(L)$ – это мальтусовский параметр для КВСБ II, а множество $\mathcal{Q}_\varepsilon(L)$ определяется таким же образом, как \mathcal{Q}_ε , с заменой ν на $\nu(L)$. По непрерывности мальтусовский параметр $\nu(L)$ существует, монотонен по L , причем $\nu(L) > 0$ для достаточно больших L , скажем $L \geq L_0$. Более того, $\nu(L) \rightarrow \nu$ при $L \rightarrow \infty$ и $\mathcal{I}(L) \subset \mathcal{I}(L+1)$ для любого $L \geq 1$. Тогда из определения КВСБ II и соотношения (2.129) вытекает, что

$$P_0 \left(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \nu) \exists t_2 = t_2(\omega, \varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_2 \exists v \in Z(t), \frac{\mathbf{X}^v(t)}{\mathbf{R}^{-1, \kappa}(t)} \notin \mathcal{Q}_\varepsilon \Big| \tilde{\mathcal{I}} \right) = 1,$$

где $\tilde{\mathcal{I}} := \cup_{L=1}^{\infty} \mathcal{I}(L)$. Отсюда следует утверждение (2.115) теоремы 17, если мы проверим, что

$$\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}} \quad \text{п.н.} \quad (2.131)$$

Имеем $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$. Чтобы доказать обратное включение, мы выводим из теоремы 7 в разделе 1.6, посвященной сильной сходимости общих и локальных численностей частиц в надкритическом КВСБ, что $\mathcal{I}(L) \neq \emptyset$ для достаточно больших L . Следовательно, мы также делаем вывод, что $\tilde{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.

Определим $\sigma := P_0(\mathcal{I}^c)$ и $\tilde{\sigma} := P_0(\tilde{\mathcal{I}}^c)$. Тогда $\sigma \leq \tilde{\sigma} < 1$. Учитывая возможные траектории начальной частицы, убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} P_0(\xi_1 = k) (\tilde{\sigma})^k + (1 - \alpha_1) F_{0,0}(\infty) \tilde{\sigma} + (1 - \alpha_1)(1 - F_{0,0}(\infty)) \\ &= \alpha_1 f_1(\tilde{\sigma}) + (1 - \alpha_1) F_{0,0}(\infty) \tilde{\sigma} + (1 - \alpha_1)(1 - F_{0,0}(\infty)). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Величина σ также удовлетворяет уравнению (2.132) (см. теорему 6 в разделе 1.6). Для выпуклой функции

$$g(u) := \alpha_1 f_1(u) + (1 - \alpha_1) F_{0,0}(\infty) u + (1 - \alpha_1)(1 - F_{0,0}(\infty)), \quad u \in [0, 1],$$

возникающей в правой части уравнения (2.132), справедливо равенство $g(1) = 1$. Поскольку уравнение (2.132) имеет единственное решение в промежутке $[0, 1]$, то $\sigma = \tilde{\sigma}$. Таким образом, тождество (2.131) проверено, что завершает доказательство теоремы 17 для случая единственного катализатора, расположенного в $\mathbf{0}$, и стартовой точки $\mathbf{0}$.

Шаг 4. Теперь мы имеем дело со случаем $N > 1$ и $\mathbf{x} \in W$, скажем $\mathbf{x} = \mathbf{w}_i$. Согласно неравенству (2.19), чтобы убедиться в справедливости леммы 27 в случае $N > 1$, мы исследуем асимптотическое поведение $\sum_{k=0}^{\infty} G^{*k} * \mathbf{K}(t; \mathcal{U})$,

когда $\mathcal{U} = \Delta(\mathbf{x}; t)$ при $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon^+$ и $t \rightarrow \infty$. Здесь вектор-функция $\mathbf{K}(t; \mathcal{U})$, где $t \geq 0$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, задается формулой (2.18). Опираясь на следствие 3.1, пункт (i), в статье [56], устанавливающее асимптотическое поведение векторов вида $\sum_{k=0}^{\infty} G^{*k} * \mathbf{K}(t; \mathcal{U})$, мы выводим такую же оценку, как оценка в соотношении (2.117), если в последней заменить $E(t; \Delta(\mathbf{x}; t))$ на $E_{\mathbf{w}_i}(t; \Delta(\mathbf{x}; t))$. Оставшаяся часть доказательств теорем 17 и 18 в случае КВСБ со множеством катализаторов W и стартовой точкой, принадлежащей множеству W , проводится по схеме Шагов 1–3.

Шаг 5. Обращаясь к надкритическому КВСБ по \mathbb{Z}^d с конечным множеством катализаторов W и стартовой точкой $\mathbf{z} \notin W$, мы дополняем множество катализаторов W элементом $\mathbf{w}_{N+1} = \mathbf{z}$ и полагаем $\alpha_{N+1} = 0$, $m_{N+1} = 0$, $G_{N+1}(t) = 1 - e^{-qt}$, $t \geq 0$. В силу леммы 3 в разделе 1.4 КВСБ со множеством катализаторов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N+1}$ является надкритическим, если изначальное КВСБ является надкритическим, причем мальтусовские параметры в этих КВСБ совпадают. Тогда можно применить те части теорем 17 и 18, которые установлены на шаге 4 для КВСБ с $N + 1$ катализатором и стартовой точкой, принадлежащей множеству катализаторов, и тем самым доказать эти теоремы для КВСБ с произвольными стартовыми точками.

Доказательства теорем 17 и 18 завершены. \square

Проследим эволюцию частиц, образующих фронт распространения популяции. Из аргументов подраздела 2.6.2 следует, что, как и для КВСБ с правильно меняющимися хвостами (см. раздел 2.5), для КВСБ с семиэкспоненциальным распределением скачков блуждания частица, находящаяся на фронте распространения популяции в момент t , родилась в момент $t - o(t)$ в одном из катализаторов и затем достигла фронта за время $o(t)$, что существенно отличается от случая “легких” хвостов. А именно, опираясь на доказательства теоремы 1.1 в статье [18] и теоремы 9 в разделе 2.4, посвященные КВСБ с легкими хвостами, мы можем заключить, что частица, находящаяся на фронте распространения в момент t , была произведена в момент θt для определенного $\theta \in (0, 1)$ в одном из катализаторов, а затем блуждала в течение времени $(1 - \theta)t$ без ветвления.

2.6.3 Примеры

Согласно формуле (2.2) случайное блуждание $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ представляет собой скачкообразный процесс со скачками \mathbf{Y}^j . В разделе 2.6.3 мы предполагаем, что координаты скачка $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$ независимы. Без ограничения общности рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Тогда

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{S}(u) \in \Delta(\mathbf{x}; t)) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\Pi(u) = k) P\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{Y}^j \in \Delta(\mathbf{x}; t)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d P\left(\sum_{j=1}^k Y_i^j \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Для случайной величины Z запишем $Z = Z^+ - Z^-$, где $Z^+ := Z\mathbb{I}_{\{Z \geq 0\}}$ и $Z^- := -Z\mathbb{I}_{\{Z < 0\}}$. Рассмотрим $Y_i = Y_i^+ - Y_i^-$, где случайные величины Y_i^+ и Y_i^- неотрицательны. Положим $P(Y_i^\kappa = 0) = 1 - L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$. Тогда $L_i^{(1,+)} + L_i^{(1,-)} = 1$, $i = 1, \dots, d$. Пусть случайные величины $Y_i^+ > 0$ и $Y_i^- > 0$ имеют дискретное распределение Вейбулла (см., например, [113], с. 10) с параметрами γ_i^κ и $(L_i^{(2,\kappa)})^{-1/\gamma_i^\kappa}$, где $\gamma_i^\kappa \in (0, 1)$, а $L_i^{(1,\kappa)}$ и $L_i^{(2,\kappa)}$ – положительные постоянные. Другими словами, для $y = 1, 2, \dots$ имеем

$$P(Y_i^\kappa = y) = L_i^{(1,\kappa)} \left(\exp\left(-L_i^{(2,\kappa)}(y-1)^{\gamma_i^\kappa}\right) - \exp\left(-L_i^{(2,\kappa)}y^{\gamma_i^\kappa}\right) \right), \quad (2.134)$$

что эквивалентно

$$P(Y_i^\kappa > y) = L_i^{(1,\kappa)} \exp\left(-L_i^{(2,\kappa)}y^{\gamma_i^\kappa}\right), \quad y \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.135)$$

Соотношения (2.134) и (2.135) – это частные случаи предположений (2.105) и (2.106) при $L_i^{(1,\kappa)}(y) = L_i^{(1,\kappa)}$ и $L_i^{(2,\kappa)}(y) = L_i^{(2,\kappa)}$ для всех $y \in \mathbb{Z}_+$, $\kappa \in \{+, -\}$ и $i = 1, \dots, d$.

Без ограничения общности проверим, что для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ и $n_0(\mathbf{x}) = 0$ имеет место соотношение (2.110). Из формул (2.108) и (2.135) следует, что $R_i^{-1,+}(t) = \left(t/L_i^{(2,+)}\right)^{1/\gamma_i^+}$, $t \geq 0$. Выберем параметры $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, для каждого фиксированного $i = 1, \dots, d$ так, что $EY_i = 0$. Тогда теорема 5.4.1, пункт (i), в монографии [112], гл. 5, раздел 5.9, примененная к случайному блужданию с дискретным временем $\left\{\sum_{j=1}^k Y_i^j, k \in \mathbb{Z}_+\right\}$ для каждого $i = 1, \dots, d$, влечет, что

$$P\left(\sum_{j=1}^k Y_i^j \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right) = k(1 + \delta_i(k, t)) P\left(Y_i \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{1 - \varepsilon_i(k, t)}, \quad (2.136)$$

где $\sup_{1 \leq k \leq K_i(t)} \delta_i(k, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любой целочисленнозначной функции K_i такой, что $K_i(t) = o\left(t^{2/\gamma_i^+ - 1}\right)$ при $t \rightarrow \infty$ и для каждого $i = 1, \dots, d$. Неотрицательная функция $k, t \mapsto \varepsilon_i(k, t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, равна 0 в области “большого скачка” (см., например, [113], с. 4) значений k и t , т.е. в зоне аппроксимации максимальным скачком, о котором мы упоминали перед предположением (2.110). В силу теоремы 5.4.1, пункт (ii), в книге [112] и предположения (2.135) значения k и t принадлежат области большого скачка, если k зависит от t , $k = k(t)$, и $k(t) \left(x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{2\gamma_i^+ - 2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Последнее соотношение эквивалентно следующему: $k(t)t^{2-2/\gamma_i^+} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Функция $(k, t) \mapsto \varepsilon_i(k, t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, не совпадает тождественно с нулем, когда значения k и t принадлежат зоне промежуточной аппроксимации, о которой мы упоминали перед предположением (2.110). В этом случае $k(t) \left(x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{\gamma_i^+ - 2} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ (см., например, [112], теорема 5.4.1, пункт (i)), что эквивалентно соотношению $k(t)t^{1-2/\gamma_i^+} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Из формулы (5.4.28) в книге [112], гл. 5, раздел 4, следует, что

$$\varepsilon_i(k, t) \sim \frac{(\gamma_i^+)^2}{2} k L_i^{(2,+)} \left(x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{\gamma_i^+ - 2} = \frac{(\gamma_i^+)^2}{2} (x_i)^{\gamma_i^+ - 2} \left(L_i^{(2,+)}\right)^{2/\gamma_i^+} k t^{1-2/\gamma_i^+} \quad (2.137)$$

при $k \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ в указанной зоне $k(t)t^{1-2/\gamma_i^+} \rightarrow 0$.

Сочетание соотношений (2.133) и (2.136) приводит к равенству

$$\mathbb{P}_0(\mathbf{S}(u) \in \Delta(\mathbf{x}; t)) = (J_1(u; t) + J_2(u; t)) \prod_{i=1}^d \mathbb{P}\left(Y_i \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right) + J_3(u; t), \quad (2.138)$$

где

$$J_1(u; t) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq K^{(1)}(t), \\ k \in \mathbb{N}}} k^d \mathbb{P}(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d (1 + \delta_i(k, t)), \quad (2.139)$$

$$J_2(u; t) := \sum_{\substack{K^{(1)}(t) < k \leq K^{(2)}(t), \\ k \in \mathbb{N}}} k^d \mathbb{P}(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d \frac{(1 + \delta_i(k, t))}{\mathbb{P}\left(Y_i \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right)^{\varepsilon_i(k, t)}}, \quad (2.140)$$

$$J_3(u; t) := \sum_{\substack{k > K^{(2)}(t), \\ k \in \mathbb{N}}} \mathbb{P}(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k Y_i^j \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right), \quad (2.141)$$

$t \geq 0$, $u \in [0, t]$. Неотрицательные функции $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ на \mathbb{R}_+ могут быть выбраны произвольно при условии, что $K^{(1)}(t) = o(t^{2/\gamma^+ - 2})$ и $K^{(2)}(t) = o(t^{2/\gamma^+ - 1})$ при $t \rightarrow \infty$, $\gamma^+ := \max\{\gamma_i^+, i = 1, \dots, d\}$ и $K^{(1)}(t) \leq K^{(2)}(t)$, $t \geq 0$.

Теперь изучим асимптотическое поведение функций $J_i(u; t)$, $i = 1, 2, 3$, при $t \rightarrow \infty$ и $u \in [0, t]$. Когда $u = u(t) = o(t^{2/\gamma^+ - 2})$ при $t \rightarrow \infty$, выберем $K^{(1)}(t)$ так, что $u/K^{(1)}(t) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$, например, $K^{(1)}(t) = \sqrt{u(t)t^{2/\gamma^+ - 2}}$ при $t \geq 0$. Тогда согласно неравенству Коши–Буняковского–Шварца (см., например, [81], с. 87) и неравенству Маркова (см., например, [81], теорема 4.7.4) мы имеем

$$\sum_{k > K^{(1)}(t), k \in \mathbb{N}} k^d \mathbb{P}(\Pi(u) = k) \leq (\mathbb{E}\Pi(u)^{2d})^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{P}(\Pi(u) > K^{(1)}(t)) \right)^{\frac{1}{2}} = u^d o(1) \quad (2.142)$$

при $t \rightarrow \infty$ и, как следствие,

$$J_1(u; t) = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{\infty} k^d \mathbb{P}(\Pi(u) = k) = (1 + o(1))h(u) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (2.143)$$

где $h(u) = \mathbb{E}\Pi(u)^d \sim (qu)^d$ при $u \rightarrow \infty$. Иначе, когда $u \neq o(t^{2/\gamma^+ - 2})$ при $t \rightarrow \infty$, неравенство Чебышева (см., например, [81], следствие 4.7.3) влечет, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi(u) \leq K^{(1)}(t)) &\leq \mathbb{P}(|\Pi(u) - qu| \geq qu - K^{(1)}(t)) \\ &\leq \frac{\text{Var} \Pi(u)}{(qu - K^{(1)}(t))^2} \sim \frac{1}{qu} = o(1), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.144)$$

где “Var” обозначает дисперсию. Отсюда следует, что

$$J_1(u; t) = (1 + o(1))u^d o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.145)$$

когда $u \neq o(t^{2/\gamma^+ - 2})$ при $t \rightarrow \infty$ при любом выборе функции $K^{(1)}$ в \mathbb{R}_+ .

Опираясь на соотношение (2.137), получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} J_2(u; t) &\leq (1 + \varepsilon_0) \sum_{k=K^{(1)}(t)+1}^{K^{(2)}(t)} k^d \mathbb{P}(\Pi(u) = k) \prod_{i=1}^d \exp(c_i(1 + \varepsilon_i)kt^{2-2/\gamma_i^+}) \\ &= (1 + \varepsilon_0)e^{-qu} \sum_{k=K^{(1)}(t)+1}^{K^{(2)}(t)} \frac{k^d}{k!} \left(qu \prod_{i=1}^d \exp(c_i(1 + \varepsilon_i)t^{2-2/\gamma_i^+}) \right)^k \\ &= (1 + \varepsilon_0) \exp \left(qu \left(\prod_{i=1}^d \exp(c_i(1 + \varepsilon_i)t^{2-2/\gamma_i^+}) - 1 \right) \right) \\ &\times \mathbb{E} \left(\zeta_+^d \mathbb{I} \left\{ K^{(1)}(t) < \zeta_+ \leq K^{(2)}(t) \right\} \right), \end{aligned} \quad (2.146)$$

где $c_i := \frac{(\gamma_i^+)^2}{2} (x_i)^{2\gamma_i^+-2} \left(L_i^{(2,+)} \right)^{2/\gamma_i^+}$, $i = 1, \dots, d$, значения $\varepsilon_0, \varepsilon_i, i = 1, \dots, d$, сколь угодно малы для достаточно больших t , а случайная величина ζ_+ имеет распределение Пуассона с параметром $qu \prod_{i=1}^d \exp\left(c_i(1 + \varepsilon_i)t^{2-2/\gamma_i^+}\right)$. Аналогичная нижняя оценка верна для $J_2(u; t)$ при достаточно больших t , а именно,

$$J_2(u; t) \geq (1 - \varepsilon_0) \exp\left(qu \left(\prod_{i=1}^d \exp\left(c_i(1 - \varepsilon_i)t^{2-2/\gamma_i^+}\right) - 1\right)\right) \times \mathbb{E}\left(\zeta_-^d \mathbb{I}\left\{K^{(1)}(t) < \zeta_- \leq K^{(2)}(t)\right\}\right), \quad (2.147)$$

где случайная величина ζ_- имеет распределение Пуассона с параметром $qu \prod_{i=1}^d \exp\left(c_i(1 - \varepsilon_i)t^{2-2/\gamma_i^+}\right)$. Поскольку $\mathbb{E}\Pi(u)^d \sim (qu)^d$ при $u \rightarrow \infty$, мы выводим, что $\mathbb{E}\zeta_+^d \sim (qu)^d$ и $\mathbb{E}\zeta_-^d \sim (qu)^d$ при $u \rightarrow \infty$ (и, следовательно, $t \rightarrow \infty$). Как при доказательстве соотношения (2.142), имеем $\mathbb{E}\left(\zeta_+^d \mathbb{I}\left\{K^{(1)}(t) < \zeta_+ \leq K^{(2)}(t)\right\}\right) = u^d o(1)$ и $\mathbb{E}\left(\zeta_-^d \mathbb{I}\left\{K^{(1)}(t) < \zeta_- \leq K^{(2)}(t)\right\}\right) = u^d o(1)$ при $u = u(t) = o(t^{2/\gamma^+-2})$, когда $t \rightarrow \infty$. Тогда неравенства (2.146) и (2.147) при $u = u(t) = o(t^{2/\gamma^+-2})$, когда $t \rightarrow \infty$, приводят к соотношению

$$J_2(u; t) = (1 + o(1))e^{o(1)}u^d o(1) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.148)$$

Когда $u \neq o(t^{2/\gamma^+-2})$ при $t \rightarrow \infty$, $u \leq t$, из таких же оценок, как в формулах (2.142) и (2.144), вытекает, что $\mathbb{E}\left(\zeta_+^d \mathbb{I}\left\{K^{(1)}(t) < \zeta_+ \leq K^{(2)}(t)\right\}\right) \sim (qu)^d$ и $\mathbb{E}\left(\zeta_-^d \mathbb{I}\left\{K^{(1)}(t) < \zeta_- \leq K^{(2)}(t)\right\}\right) \sim (qu)^d$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда, учитывая неравенства (2.146) и (2.147), при $u \neq o(t^{2/\gamma^+-2})$, $t \rightarrow \infty$, $u \leq t$, получаем

$$J_2(u; t) = (1 + o(1))e^{o(t)}(qu)^d \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.149)$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева (см., например, [81], следствие 4.7.2), называемого также неравенством Маркова,

$$J_3(u, t) \leq \mathbb{P}\left(\Pi(u) > K^{(2)}(t)\right) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\Pi(u)}}{e^{K^{(2)}(t)}} \quad (2.150)$$

$$\leq \exp\left(qt(e-1) - \frac{t^{2/\gamma^+-1}}{\ln t}\right) = o\left(\exp(-t^{1+\varepsilon_{d+1}})\right) \quad (2.151)$$

при $t \rightarrow \infty$ с $K^{(2)}(t) = t^{2/\gamma^+-1}/\ln t$, $t \geq 1$, для некоторого $\varepsilon_{d+1} > 0$.

Асимптотическое равенство

$$\prod_{i=1}^d \mathbb{P}\left(Y_i \geq x_i R_i^{-1,+}(t)\right) \sim e^{-t \sum_{i=1}^d x_i^{\gamma_i^+}} \quad t \rightarrow \infty$$

в сочетании с формулами (2.138)–(2.141), (2.143), (2.145)–(2.151) влекут соотношение (2.110).

Таким образом, когда предположение (2.135) справедливо для надкритического КВСБ, все условия теоремы 17 выполнены. Как упоминалось перед соотношением (2.136), в таком случае мы предполагаем, что $L_i^{(1,+)} + L_i^{(1,-)} = 1$ и $EY_i = 0$. Это означает, что параметры $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, для каждого $i = 1, 2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} L_i^{(1,+)} + L_i^{(1,-)} = 1, \\ L_i^{(1,+)} \sum_{y=0}^{\infty} \exp(-L_i^{(2,+)} y \gamma_i^+) - L_i^{(1,-)} \sum_{y=0}^{\infty} \exp(-L_i^{(2,-)} y \gamma_i^-) = 0. \end{cases} \quad (2.152)$$

Для каждого $i = 1, \dots, d$ имеем два неизвестных $L_i^{(1,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, и два уравнения (2.152) с этими неизвестными. Например, в случае $d = 2$ полагая $\gamma_1^+ = \frac{3}{4}$, $\gamma_2^+ = \frac{1}{2}$, $\gamma_1^- = \frac{1}{3}$, $\gamma_2^- = \frac{1}{4}$, $L_1^{(2,+)} = 1$, $L_2^{(2,+)} = 2$, $L_1^{(2,-)} = 3$, и $L_2^{(2,-)} = 4$, мы решаем систему уравнений (2.152) с помощью приложения Wolfram Mathematica и находим $L_1^{(1,+)} \approx 0.38$, $L_1^{(1,-)} \approx 0.62$, $L_2^{(1,+)} \approx 0.45$ и $L_2^{(1,-)} \approx 0.55$.

Однако предельная форма фронта \mathcal{P} популяции частиц, описанная в равенстве (2.113), определяется исключительно параметрами γ_i^κ , $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$, и мальтусовским параметром ν . Поэтому, чтобы сравнить различные формы поверхности \mathcal{P} , нам не требуется определять другие параметры такие, как $L_i^{(1,\kappa)}$ и $L_i^{(2,\kappa)}$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, d$.

Пример 1. Пусть $d = 2$ и $\gamma_1^+ = \gamma_2^+ = \gamma_1^- = \gamma_2^- = \frac{1}{2}$, $\nu = 2$. Для этого случая предельная форма \mathcal{P} фронта распространения КВСБ по \mathbb{Z}^2 изображена на рисунке 2.4 слева.

Пример 2. Рассмотрим теперь несимметричную предельную форму \mathcal{P} фронта распространения КВСБ по \mathbb{Z}^2 . На рисунке 2.4 справа представлено множество \mathcal{P} в случае, когда $\gamma_1^+ = \frac{3}{4}$, $\gamma_2^+ = \frac{1}{2}$, $\gamma_1^- = \frac{1}{3}$, $\gamma_2^- = \frac{1}{4}$ и $\nu = 1$. Заметим, что “тяжесть” хвостов распределения координат скачка блуждания $Y = (Y_1, Y_2)$ меняется от самого тяжелого левого хвоста координаты Y_2 через левый хвост у Y_1 и правый хвост у Y_2 к самому легкому правому хвосту координаты Y_1 .

Пример 3. Для $d = 3$ и $\gamma_i^\kappa = \frac{3}{4}$, $\kappa \in \{+, -\}$, $i = 1, 2, 3$, $\nu = 1$, на рисунке 2.5 слева изображена предельная форма \mathcal{P} фронта распространения КВСБ по \mathbb{Z}^3 , т.е. в этом случае хвосты распределения координат скачка блуждания убывают с одной и той же скоростью.

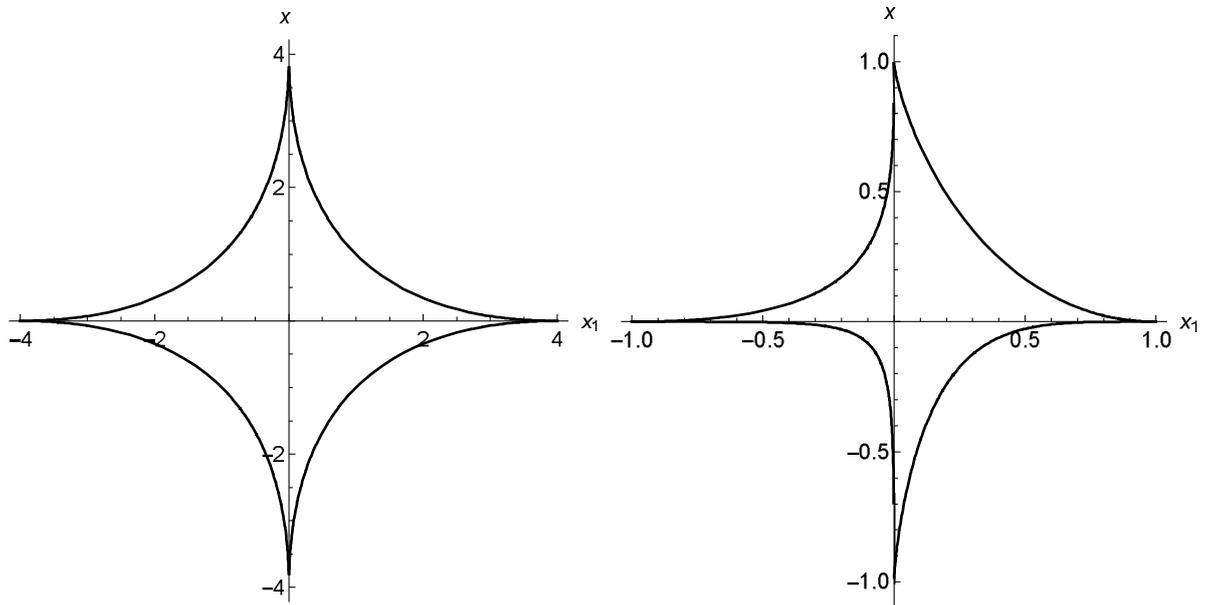


Рисунок 2.4 — Слева предельная форма \mathcal{P} фронта распространения КВСБ по \mathbb{Z}^2 в случае, когда хвосты распределения координат скачка блуждания убывают с одной и той же скоростью (Пример 1 в подразделе 2.6.3). Справа множество \mathcal{P} для КВСБ по \mathbb{Z}^2 в случае, когда хвосты распределения координат скачка имеют различную “тяжесть” (Пример 2 в подразделе 2.6.3).

Пример 4. Пусть $d = 3$, $\gamma_1^+ = \gamma_1^- = \frac{3}{8}$, $\gamma_2^+ = \gamma_2^- = \frac{1}{2}$, $\gamma_3^+ = \gamma_3^- = \frac{3}{4}$ и $\nu = 1$. На рисунке 2.5 справа изображено множество \mathcal{P} для КВСБ по \mathbb{Z}^3 , причем “тяжесть” хвостов распределения координат скачка блуждания $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ меняется от самых тяжелых хвостов координаты Y_1 через хвосты у Y_2 к самым легким хвостам координаты Y_3 .

В примерах 1–4 предельная форма фронта \mathcal{P} описывает при $t \rightarrow \infty$ только распространение популяции на событии \mathcal{I} , означающем бесконечное число посещений катализаторов. Событие \mathcal{I} может иметь вероятность строго меньше 1, если частица может погибнуть в катализаторе с положительной вероятностью и тогда $P(\mathcal{I}) < 1$. Более того, возвратность и транзиентность случайного блуждания в примерах 1–4 также влияет на значение $P(\mathcal{I})$, как отмечается сразу после теоремы 17. При этом на дополнительном событии $\bar{\mathcal{I}}$ для достаточ-

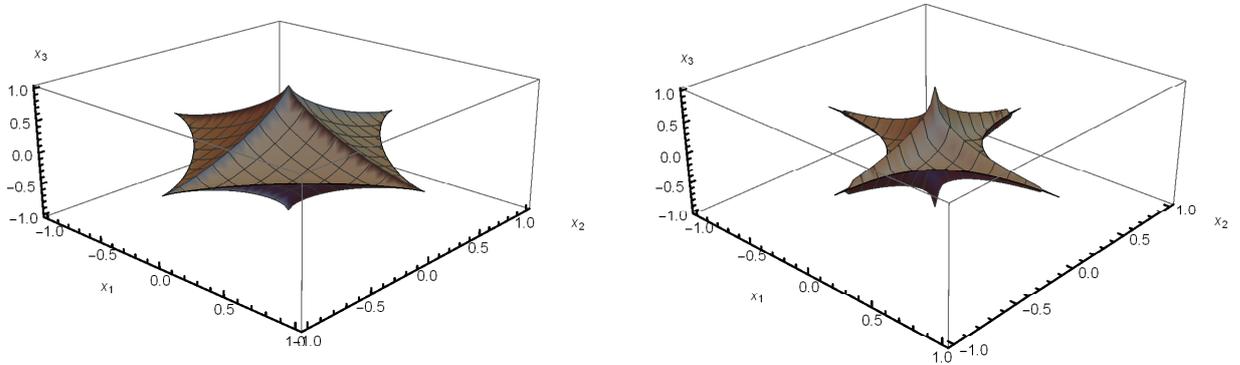


Рисунок 2.5 — Слева предельная форма \mathcal{P} фронта распространения КВСБ по \mathbb{Z}^3 в том случае, когда хвосты распределения координат скачка блуждания убывают с одной и той же скоростью (Пример 3 в подразделе 2.6.3). Справа предельная форма \mathcal{P} фронта распространения КВСБ по \mathbb{Z}^3 , когда хвосты распределения координат скачка блуждания имеют различную “тяжесть” (Пример 4 в подразделе 2.6.3).

но больших $t \geq t_0(\omega)$ существует только конечное число частиц на решетке, которые совершают случайное блуждание без ветвления, как указано сразу после определения (2.3). В этом и заключается причина, почему мы не изучаем фронт популяции на множестве $\bar{\mathcal{L}}$.

Рисунки 2.4–2.5 отражают тот факт, что для КВСБ по \mathbb{Z}^d с семиэкспоненциальным распределением скачков поверхность \mathcal{P} , определенная формулой (2.113), представляет собой границу *звездообразного множества* в \mathbb{R}^d с центром в точке $\mathbf{0}$. Это множество не является выпуклым по причине предположения (2.110), которое неявно включает условие независимости координат вектора скачка случайного блуждания. Согласно [112], с. XX, в случае семиэкспоненциального распределения, когда x_i растет достаточно быстро при

$t \rightarrow \infty$, основной вклад в асимптотическое поведение вероятности $P_0(S_i(t) \geq x_i)$ больших уклонений вносится одним большим скачком случайного блуждания. Следовательно, когда координаты вектора скачка независимы, вероятность $P_0(S_i(t) \geq x_i, S_j(t) \geq x_j)$ убывает так же быстро, как $P_0(S_i(t) \geq x_i)P_0(S_j(t) \geq x_j) = o(P_0(S_i(t) \geq x_i))$, т.е. эта вероятность определяется двумя большими скачками и убывает быстрее, чем $P_0(S_i(t) \geq x_i)$ при x_i, x_j и $t \rightarrow \infty$. Совершить большой скачок вдоль любой координатной оси более вероятно, чем совершить большой скачок, например, по диагонали. В этом заключается причина, почему предельная форма фронта распространения не является выпуклым множеством, а является звездообразным множеством для КВСБ с семиэкспоненциальным распределением скачков, удовлетворяющих предположению (2.110). Однако для случайного блуждания с легкими хвостами вклад в асимптотическое поведение вероятности больших уклонений вносится всеми скачками, произошедшими на протяжении всей траектории случайного блуждания (см., например, [112], с. XX), а не одним единственным большим скачком, и поэтому предельная форма фронта распространения КВСБ с легкими хвостами распределения скачка блуждания – это выпуклая поверхность вне зависимости от того, координаты скачка зависимые или нет (см. раздел 2.4).

2.7 Сопоставление доказанных результатов

Таким образом, в разделах 2.4, 2.5 и 2.6 мы нашли предельную форму фронта распространения популяции для должным образом нормированных положений частиц в КВСБ по \mathbb{Z}^d соответственно с легкими, тяжелыми и умеренно тяжелыми хвостами распределения скачков блуждания. В итоге мы пришли к следующим выводам.

1. В разделах 2.5 и 2.6 нормировка вектора $\mathbf{X}^v(t)$, приводящая к нетривиальной предельной форме фронта, определяется по координатно. Она явно зависит как от знака координаты, так и от распределения скачка случайного блуждания, тогда как в разделе 2.4 нормирующий коэффициент равен t для всех компонент вектора $\mathbf{X}^v(t)$.

2. Что касается асимптотического поведения нормирующих коэффициентов для фронта распространения, то КВСБ по \mathbb{Z}^d с семиэкспоненциальными

распределениями скачков блуждания является промежуточным между КВСБ с легкими хвостами и КВСБ с правильно меняющимися хвостами, поскольку нормирующий коэффициент для каждой координаты растет как функция, правильно меняющаяся с индексом, превышающим 1. Следовательно, нормирующий коэффициент растет быстрее, чем линейно (для легких хвостов коэффициент растет линейно). В случае правильного изменения хвостов нормирующий коэффициент растет экспоненциально быстро, как показано в разделе 2.5. Причина заключается в том, что хвосты семиэкспоненциальных распределений лежат между легкими и правильно меняющимися хвостами.

3. Предельная форма фронта распространения КВСБ может представлять собой поверхность детерминированного выпуклого множества (в случае легких хвостов, как показано в разделе 2.4), детерминированного невыпуклого звездообразного множества (в случае умеренно тяжелых хвостов, см. раздел 2.6) или может быть случайным множеством с определенной структурой (например, “многомерный крест” в случае тяжелых хвостов и независимых координат, см. подраздел 2.5.3) и без нее (в изотропном случае см. подраздел 2.5.5).

4. Предельная форма \mathcal{P} определяется значениями мальтусовского параметра и экспонент, управляющих хвостами семиэкспоненциальных распределений координат скачка. Она не зависит от общего количества катализаторов и их расположения на решетке. То же самое справедливо для предельной формы фронта КВСБ с легкими хвостами распределения скачка (см. статью [18] и раздел 2.4), но уже не для КВСБ с правильно меняющимися хвостами (см. раздел 2.5).

5. В случае $d = 1$ при “утяжелении” хвоста распределения скачка блуждания рост максимума КВСБ меняется от линейного через степенной к экспоненциальному. В случаях легких и умеренно тяжелых хвостов результаты не зависят от количества катализаторов и их расположения, а определяются только мальтусовским параметром и распределением скачка блуждания. Исследование максимума ВСБ в такой полноте проводилось ранее лишь для пространственно однородного ВСБ мартингальными методами (см., например, обзор [2]), в то время как КВСБ – пространственно неоднородное ВСБ, и методы его исследования иные. Они используют вспомогательные процессы Беллмана–Харриса, времена достижения с запретами, теорию восстановления, теорию больших уклонений и др.

Глава 3. Новые модели и результаты анализа динамики популяций

В данной главе мы рассмотрим несколько задач, относящихся к анализу различных аспектов распространения популяции в КВСБ, не охваченных в главе 2, а затем изучим динамику распространения популяций для новых моделей ВСБ. Результаты главы 3 опубликованы в статьях автора [156], [165] и [168]–[170].

3.1 Время первого достижения высокого уровня каталитическим ветвящимся случайным блужданием

Мы сохраним все обозначения разделов 2.1–2.4, поскольку в разделе 3.1 продолжают и дополняются исследования раздела 2.4, а условие пространственной однородности случайного блуждания будем считать выполненным в виде (2.1). Точнее говоря, в модели надкритического КВСБ по целочисленной прямой \mathbb{Z} рассматривается случай легких хвостов скачка блуждания, т.е. налагается условие Крамера. Доказывается предельная теорема в смысле сходимости почти наверное для времени первого достижения частицами высокого уровня, растущего линейно по времени. При этом в пределе возникает та же постоянная, что и в предельной теореме для максимума КВСБ.

Напомним, что $M_t = \max\{X^v(t) : v \in Z(t)\}$ – максимум КВСБ в момент времени $t \geq 0$, т.е. координата самой правой частицы на целочисленной прямой в этот момент. Обозначим $T_R := \inf\{t \geq 0 : M_t \geq R\}$ – момент первого выхода популяции частиц в КВСБ на уровень $R > 0$. Ясно, что $T_R > t$ тогда и только тогда, когда $M_s < R$ при всех $s \in [0, t]$.

В статье [18] доказано, что на событии \mathcal{I} почти наверное $M_t/t \rightarrow \mu := \nu/r$ при $t \rightarrow \infty$, где r таково, что $\Psi(r) = \nu$. Отсюда следует, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} T_{\mu t}/t \leq 1$ на событии \mathcal{I} (очевидно, на дополнительном событии $\bar{\mathcal{I}}$ имеем $T_u = \infty$ для всех достаточно больших u). Теперь можно уточнить, что решаемая нами задача – вывести аналогичную оценку снизу для $T_{\mu t}/t$, и тем самым установить сильную предельную теорему для времени T_u первого достижения уровня u , когда $u \rightarrow \infty$. Иначе говоря, будет доказан асимптотический результат для всех точек

ω определенного подмножества в Ω . В этом смысле мы говорим о сильных теоремах, чтобы подчеркнуть отличие от других типов сходимости.

Теорема 19. Пусть выполнены условия (2.22) и (2.20) для надкритического КВСБ по \mathbb{Z} с мальтусовским параметром ν . Тогда для любой стартовой точки $x \in \mathbb{Z}$ имеют место следующие соотношения:

$$\frac{T_u}{u} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad u \rightarrow \infty, \quad \text{на событии } \mathcal{I}, \quad (3.1)$$

причем для почти всех $\omega \in \Omega$ справедливо соотношение

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{T_u}{u} \geq \frac{1}{\mu}. \quad (3.2)$$

На первом этапе доказательства теоремы 19 предполагаем, что множество W состоит из одного катализатора w_1 , расположенного в начале координат, а также, что стартовая точка КВСБ тоже находится в 0. В следующей лемме выведем интегральное уравнение типа свертки для вероятности $P_0(T_R \leq t)$, $t \geq 0$, при каждом $R > 0$.

Лемма 31. Пусть выполнено условие (2.22). Тогда при всех $t \geq 0$ и $R > 0$ функция $P_0(T_R \leq t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} P_0(T_R \leq t) = & \alpha_1 \int_0^t (1 - f_1(1 - P_0(T_R \leq t - u))) dG_1(u) \\ & + (1 - \alpha_1)\beta_1 q^{-1} J(t; R) + (1 - \alpha_1) \\ & \times \int_0^t \int_0^{t-u_1} P_0(T_R \leq t - u_1 - u_2) P_0(S(s) < R, 0 \leq s \leq \tau_0 + u_2 | \bar{\tau}_{0,0} = u_2) d\bar{F}_{0,0}(u_2) dG_1(u_1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned} J(t; R) := & P_0(\exists s \in [0, \min\{\tau_{0,0}, t\}] : S(s) \geq R) \\ & - \frac{(\beta_1 - q)}{\beta_1} \int_0^t P_0(\exists s \in [0, \min\{\tau_{0,0}, t - u\}] : S(s) \geq R) dG_1(u). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 6 в подразделе 2.5.2 рассмотрим все возможные варианты эволюции родительской частицы в КВСБ. А именно, после случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром β_1 , частица может либо произвести $k \in \mathbb{Z}_+$ потомков с вероятностью $\alpha_1 P(\xi_1 = k)$, либо перейти в точку $y \neq 0$ с вероятностью

$(1 - \alpha_1)q(0, y)/q$ и затем в первый раз вернуться в начало координат через время $\tau_{y,0}$. Если родительская частица не вернется в начало координат до момента t , то она совершает только случайное блуждание S , стартовавшее из точки y . Наконец, может случиться, что родительская частица не претерпела изменений к моменту t . Принимая во внимание все изложенное выше и учитывая свойство марковской цепи, согласно которому при условии настоящего будущее и прошлое независимы, мы можем записать следующую формулу:

$$\begin{aligned} P_0(M_s < R, 0 \leq s \leq t) &= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 = k) \int_0^t (P_0(M_s < R, 0 \leq s \leq t - u))^k dG_1(u) \\ &+ \sum_{y \neq 0, y < R} (1 - \alpha_1) \frac{q(0, y)}{q} \int_0^t P_y(S(s) < R, 0 \leq s \leq t - u, \tau_{y,0} > t - u) dG_1(u) \\ &+ 1 - G_1(t) + \sum_{y \neq 0, y < R} (1 - \alpha_1) \frac{q(0, y)}{q} \int_0^t \int_0^{t-u_1} P_0(M_s < R, 0 \leq s \leq t - u_1 - u_2) \\ &\times P_y(S(s) < R, 0 \leq s \leq u_2 | \tau_{y,0} = u_2) dF_{y,0}(u_2) dG_1(u_1) \end{aligned}$$

при всех $R > 0$ и $t \geq 0$. Переписывая последнее уравнение относительно неизвестной функции $P_0(T_R \leq t) = 1 - P_0(M_s < R, 0 \leq s \leq t)$ и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{0,0} &= \sum_{y \neq 0} \tau_{y,0} \mathbb{I}(S(\tau_0) = y), \quad \tau_{0,0} = \tau_0 + \bar{\tau}_{0,0}, \\ &\sum_{y \neq 0} \frac{q(0, y)}{q} \int_0^t P_y(\exists s \in [0, \min\{\tau_{y,0}, t - u\}] : S(s) \geq R) dG_1(u) \\ &= \beta_1 q^{-1} P_0(\exists s \in [0, \min\{\tau_{0,0}, t\}] : S(s) \geq R) \\ &\quad - \frac{(\beta_1 - q)}{q} \int_0^t P_0(\exists s \in [0, \min\{\tau_{0,0}, t - u\}] : S(s) \geq R) dG_1(u), \end{aligned}$$

мы приходим к утверждению (3.3). Заметим, что последнее тождество проверяется с помощью применения к его обеим частям преобразования Лапласа аналогично доказательству леммы 7 в подразделе 2.5.2. Лемма 31 полностью доказана. \square

Положим $G(t) = \alpha_1 m_1 G_1(t) + (1 - \alpha_1) G_1 * \bar{F}_{0,0}(t)$, $t \geq 0$. В силу определения надкритического режима (см. определение 1 в разделе 1.3) имеем $G(\infty) = \alpha_1 m_1 + (1 - \alpha_1) \bar{F}_{0,0}(\infty) > 1$ и $\check{G}(\nu) = 1$, где $\nu > 0$ – мальтусовский параметр.

Теперь мы получим полезное неравенство для вероятности $P_0(T_R \leq t)$.

Лемма 32. Если имеет место условие (2.22), то для всех $R > 0$ и $t \geq 0$ справедливо следующее соотношение:

$$P_0(T_R \leq t) \leq (1 - \alpha_1) \beta_1 q^{-1} \int_0^t J(t - u; R) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(u). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка $1 - f(1 - u) \leq f'(1)u$, $u \in [0, 1]$ следует из выпуклости функции f и формулы Лагранжа для конечных приращений. Поэтому из уравнения (3.3) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} P_0(T_R \leq t) &\leq \alpha_1 m_1 \int_0^t P_0(T_R \leq t - u) dG_1(u) + (1 - \alpha_1) \beta_1 q^{-1} J(t; R) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_0^t \int_0^{t-u_1} P_0(T_R \leq t - u_1 - u_2) d\bar{F}_{0,0}(u_2) dG_1(u_1), \end{aligned}$$

которое равносильно следующему:

$$P_0(T_R \leq t) \leq \int_0^t P_0(T_R \leq t - u) dG(u) + (1 - \alpha_1) \beta_1 q^{-1} J(t; R). \quad (3.5)$$

Применяя неравенство (3.5) k раз, получаем соотношение

$$\begin{aligned} P_0(T_R \leq t) &\leq \int_0^t P_0(T_R \leq t - u) dG^{*(k+1)}(u) \\ &+ (1 - \alpha_1) \beta_1 q^{-1} \int_0^t J(t - u; R) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(u). \end{aligned}$$

Для каждого фиксированного t имеем $G^{*k}(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Например, это справедливо в силу леммы 22 из [121]. Следовательно, член $\int_0^t P_0(T_R \leq t - u) dG^{*(k+1)}(u)$ пренебрежимо мал для больших k . Поэтому последнее неравенство может быть переписано в искомом виде (3.4). Лемма 32 доказана. \square

Для дальнейшего изложения нам потребуется ряд базовых утверждений из подраздела 2.4.5. А именно, при выполнении условий (2.22) и (2.20) для случайного блуждания S справедливо неравенство

$$P_0 \left(\max_{0 \leq s \leq t} S(s) \geq x \right) \leq e^{-t\Lambda(\theta)}, \quad t \geq 0, \quad \theta := \frac{x}{t} \geq qEY, \quad (3.6)$$

где функция

$$\Lambda(\vartheta) := \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\vartheta s - \ln E_0 e^{sS(1)} \right) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \Psi(s)), \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$

есть функция уклонений случайной величины $S(1)$ (см., например, [112], гл. 6, раздел 1). Этот результат устанавливается так же, как неравенство (2.49) в подразделе 2.4.5 выводится из соотношения (1.1.24) в монографии [81], относящегося к случайному блужданию с дискретным временем.

Заметим, что функция $\Lambda(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, является преобразованием Лежандра–Фенхеля функции $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, (см., например, [112], гл. 6, раздел 1). Как отмечалось при доказательстве леммы 11 в подразделе 2.4.5, функция $\Lambda(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, достигает своего минимального значения, равного 0, в точке $\vartheta = E_0 S(1) = qEY$.

Следующий вспомогательный результат содержит верхнюю оценку для выражения, стоящего в правой части неравенства (3.4), при каждом $\varepsilon > 0$, когда $R = R(t) = (\mu + \varepsilon)t$, $t > 0$.

Лемма 33. Пусть выполнены условия (2.22) и (2.20). Для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $t \geq 0$ найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$\int_0^t J(t-u; R(t)) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(u) \leq C e^{-\varepsilon_0 t}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рассуждениями, близкими к тем, которые применялись при получении леммы 11 в подразделе 2.4.5. Учитывая свойство (2.22) однородности случайного блуждания и определение функции Λ , для оценки рассматриваемого интеграла применяем неравенство (3.6) к подинтегральному выражению, в результате чего получаем

$$\begin{aligned} J(t-u; R(t)) &\leq P_0(\exists s \in [0, \min\{\tau_{0,0}, t-u\}] : S(s) \geq R) \\ &\leq P_0\left(\max_{0 \leq s \leq t-u} S(s) \geq (\mu + \varepsilon)t\right) \leq \exp\left\{-(t-u)\Lambda\left(\frac{(\mu + \varepsilon)t}{t-u}\right)\right\} \\ &\leq \exp\left\{-(t-u)\left(r \cdot \frac{(\mu + \varepsilon)t}{t-u} - \nu\right)\right\} = \exp\{-r\varepsilon t - \nu u\}. \end{aligned}$$

С учетом этой формулы приходим к оценке

$$\int_0^t J(t-u; R(t)) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(u) \leq e^{-r\varepsilon t} \int_0^t e^{-\nu u} d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \leq C e^{-\varepsilon_0 t}$$

для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ и постоянных $C, C' > 0$, поскольку

$$d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(u) du, \quad e^{-\nu t} \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(t) \rightarrow C', \quad t \rightarrow \infty,$$

в силу [135], с. 55. Лемма 33 доказана. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 19. С помощью леммы 33 и рассуждений, использующих лемму Бореля–Кантелли и приведенных, например, в конце 1-го шага доказательства теорем 9 и 10 в подразделе 2.4.2, получаем оценку снизу для $T_{(\mu+\varepsilon)t}/t$, а именно,

$$\mathbb{P}(T_{(\mu+\varepsilon)t} \leq t \text{ б.ч.}) = 0, \quad \text{что равносильно} \quad \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{T_u}{u} \geq \frac{1}{\mu} - \varepsilon' \quad (3.8)$$

для сколь угодно малого $\varepsilon' > 0$.

При этом соответствующая оценка сверху для $T_{(\mu-\varepsilon)t}/t$ следует, например, из теоремы 9 в подразделе 2.4.1 или теоремы 1 из [18] (в последней статье рассматривается случайное блуждание с дискретным временем):

$$\mathbb{P}(T_{(\mu-\varepsilon)t} > t \text{ б.ч.} | \mathcal{I}) \leq \mathbb{P}(M_t < (\mu - \varepsilon)t \text{ б.ч.} | \mathcal{I}) = 0,$$

$$\text{что равносильно} \quad \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{T_u}{u} \leq \frac{1}{\mu} + \varepsilon' \quad \text{на множестве } \mathcal{I} \quad (3.9)$$

для сколь угодно малого $\varepsilon' > 0$.

Сочетание неравенств (3.8) и (3.9) влечет утверждение теоремы 19 в предположении, что $W = \{0\}$ и стартовая точка КВСБ есть также 0. Представленное доказательство теоремы 19 в рассмотренном случае переносится на общий случай произвольного конечного числа катализаторов и произвольной стартовой точки по схеме, примененной нами ранее в подразделах 2.4.2, 2.4.5, 2.5.2 и 2.6.2. Теорема 19 доказана. \square

3.2 О максимальном отклонении каталитического ветвящегося случайного блуждания

До сих пор вопросы распространения популяции частиц поднимались в случае надкритического КВСБ по \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, см., например, статьи [106], [18] и разделы 2.4–2.6. В надкритическом режиме популяция частиц в КВСБ выживает с положительной вероятностью, и в случае выживания общие и локальные численности частиц растут экспоненциально быстро с течением времени (см. разделы 1.4 и 1.6). В то же время, как следует из раздела 1.6, в критическом и докритическом режимах популяция локально вырождается

с вероятностью единица, хотя при этом глобально в некоторых случаях она может выжить с положительной вероятностью (в отношении глобального и локального вырождения см., например, статью [129]). Поэтому в надкритическом КВСБ основной интерес представляет скорость распространения популяции, когда время неограниченно растет, а в критическом или докритическом режимах – максимальное положение частиц за все время существования популяции.

Оказалось, что скорость распространения популяции частиц в КВСБ существенно зависит от “тяжести” хвостов распределения скачка блуждания. Тем самым в разделах 2.4–2.6 пришлось рассматривать в отдельности случаи “легких хвостов”, правильно меняющихся хвостов и семиэкспоненциального распределения скачка блуждания. В разделе 3.2 нас интересует критическое и докритическое КВСБ по \mathbb{Z} . Поэтому в контексте исследования распространения популяции цель работы состоит в изучении максимального положения частиц за все время существования популяции.

Описание модели КВСБ по \mathbb{Z} с N катализаторами, образующими множество $W = \{w_1, \dots, w_N\} \subset \mathbb{Z}$, приводится в разделе 2.1 и потому здесь не воспроизводится. Мы также сохраняем обозначения раздела 2.2. Следует только добавить, что в разделе 3.2 мы исключаем детерминированный случай, когда $f_k(s) = s$, $s \in [0,1]$, для всех $k = 1, \dots, N$.

Напомним, что $M_t = \max\{X^v(t), v \in Z(t)\}$ – максимум КВСБ в момент $t \geq 0$, т.е. положение самой правой частицы, существующей в КВСБ в момент t . Нас будет интересовать случайная величина $M := \max\{M_t, t \geq 0\}$ – максимальное отклонение (вправо от начала координат) КВСБ за всю историю существования популяции частиц. Ясно, что $M \geq z$, где z – стартовая точка КВСБ.

В формулировках теорем 20–23 мы рассматриваем простое случайное блуждание S по решетке \mathbb{Z} . Это означает, что

$$\frac{q(x, x+1)}{-q(x, x)} = p, \quad \frac{q(x, x-1)}{-q(x, x)} = q, \quad q(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad |x - y| \geq 2,$$

где $p + q = 1$ и $p, q \in (0,1)$. Такое случайное блуждание называется симметричным, если $p = q$, и несимметричным иначе. Другими словами, за один скачок частица, совершающая простое случайное блуждание по \mathbb{Z} , переходит в соседнюю точку справа с вероятностью p и в соседнюю точку слева с вероятностью q . Простое случайное блуждание по \mathbb{Z} возвратно тогда и только тогда, когда оно симметрично (см., например, [81], теорема 13.3.1).

При доказательствах теорем 20–23 мы выводим уравнения (3.17)–(3.20) для интересующих нас вероятностей. Эти уравнения справедливы для произвольного числа катализаторов и любого случайного блуждания, удовлетворяющего условию (2.22) (не только для простого случайного блуждания). Однако для дальнейшего изучения решений уравнений требуется знать такие свойства случайных блужданий, которые легко устанавливаются в случае простого блуждания и требуют отдельного исследования в ином случае. Поэтому в данном разделе наши основные результаты опираются на предположение о простоте случайного блуждания.

В теоремах 20–23 также считается, что множество W состоит из одного катализатора, расположенного в начале координат 0 , а стартовая точка тоже находится в 0 . Асимптотические результаты в теоремах 20–23 справедливы и при более широких предположениях о любом конечном числе катализаторов и произвольной стартовой точке. Отличие состоит лишь в константах, фигурирующих в асимптотических формулах. Однако вид этих констант существенно зависит от взаимного расположения стартовой точки и катализаторов, а также расстояний между ними, поэтому соответствующие громоздкие результаты не приводятся.

В следующей теореме устанавливается асимптотическое поведение хвоста распределения случайной величины M для критического КВСБ по \mathbb{Z} , в котором случайное блуждание является простым и симметричным. Здесь и далее, если речь идет об одном катализаторе, то предполагается, что, без ограничения общности, он расположен в 0 , и индекс 1 у символов α_1 , ξ_1 , f_1 и m_1 опускается. Поскольку, как отмечалось ранее, простое симметричное случайное блуждание является возвратным, то вероятность возвращения из 0 в 0 , обозначаемая $F_{0,0}(\infty)$, есть 1 . Поэтому определение критического КВСБ (см. определение 1) приводит к равенству $\alpha t + (1 - \alpha)F_{0,0}(\infty) = 1$, что равносильно $t = 1$. Другими словами, при возвратном случайном блуждании КВСБ с одним катализатором будет критическим тогда и только тогда, когда ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с числом ξ потомков одной частицы является критическим.

Теорема 20. Пусть $f'(1) = 1$ и $f''(1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ для КВСБ по \mathbb{Z} , в котором случайное блуждание S является простым и симметричным. Тогда

$$P_0(M > x) \sim \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{\alpha \sigma^2 \sqrt{x}}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Результат теоремы 20 является аналогом основного результата статьи [118], полученного для модели критического ВСБ по \mathbb{Z} . Однако в последней модели скорость убывания вероятности $P_0(M > x)$ имеет порядок $1/x^2$ при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, частицы в критическом КВСБ успевают значительно дальше уйти от катализатора, прежде чем вернуться в него и возможно погибнуть, чем в модели ВСБ, в которой частицы могут погибнуть в любой точке.

Теорема 21 дает решение такой же задачи, как в теореме 20, с той лишь разницей, что теперь рассматривается докритическое КВСБ по \mathbb{Z} .

Теорема 21. Пусть $t = f'(1) < 1$ для КВСБ по \mathbb{Z} , в котором случайное блуждание S является простым и симметричным. Тогда

$$P_0(M > x) \sim \frac{1 - \alpha}{2\alpha(1 - t)x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Результат теоремы 21 является аналогом основного результата статьи [119], посвященной докритическому ВСБ по \mathbb{Z} . Однако в последнем случае вероятность $P_0(M > x)$ убывает экспоненциально быстро. Поэтому наш результат принципиально отличается от указанного. Это отличие опять же связано с возможной гибелью частиц в каждой точке решетки в модели ВСБ.

Теоремы 20 и 21 охватывают случай простого симметричного случайного блуждания по \mathbb{Z} . Две следующие теоремы относятся к исследованию критического и докритического КВСБ, в котором случайное блуждание простое и несимметричное, т.е. имеет место снос вправо, если $p > q$, или влево, если $p < q$. Из-за сноса случайное блуждание перестает быть возвратным. Соответственно меняется и условие критичности КВСБ. Теперь $r := 1 - F_{0,0}(\infty) \in (0,1)$, и согласно определению 1 критичность КВСБ означает $\alpha t + (1 - \alpha)(1 - r) = 1$, что равносильно $t = 1 + r\alpha^{-1}(1 - \alpha)$.

В следующей теореме оценивается хвост распределения случайной величины M для критического КВСБ по \mathbb{Z} , в котором порождающее случайное блуждание простое и несимметричное.

Теорема 22. Пусть $t = 1 + r\alpha^{-1}(1 - \alpha)$ и $f''(1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ для КВСБ по \mathbb{Z} , в котором случайное блуждание является простым и несимметричным. Тогда справедливы соотношения

$$P_0(M > x) \sim \frac{\sqrt{2(1 - \alpha)(q - p)}}{\sqrt{\alpha\sigma^2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{x+1}{2}}, \quad \text{если } p < q, \quad (3.12)$$

$$P_0(M > x) \rightarrow s_0, \quad \text{если } p > q, \quad (3.13)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $s_0 \in (0,1)$ – единственный корень уравнения

$$\alpha(1 - f(1 - s)) + (2q(1 - \alpha) - 1)s + (1 - \alpha)(p - q) = 0 \quad (3.14)$$

относительно неизвестного s , $s \in [0,1]$.

Следующий результат содержит решение такой же задачи, какой посвящена теорема 22, но теперь для докритического КВСБ по \mathbb{Z} .

Теорема 23. Пусть $t < 1 + r\alpha^{-1}(1 - \alpha)$ для КВСБ по \mathbb{Z} , в котором случайное блуждание является простым и несимметричным. Тогда

$$P_0(M > x) \sim \frac{(1 - \alpha)(q - p)}{1 - 2p(1 - \alpha) - \alpha t} \left(\frac{p}{q}\right)^{x+1}, \quad \text{если } p < q, \quad (3.15)$$

$$P_0(M > x) \rightarrow s_0, \quad \text{если } p > q, \quad (3.16)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $s_0 \in (0,1)$ – единственный корень уравнения (3.14) относительно неизвестного s , $s \in [0,1]$.

Результаты теорем 22 и 23 являются ожидаемыми. А именно, если случайное блуждание S имеет снос влево ($p < q$), то частицы в КВСБ не успевают уйти далеко вправо – их “сносит” влево. Наоборот, если случайное блуждание S имеет снос вправо ($p > q$), то найдутся частицы в КВСБ, которые уйдут направо в “бесконечность”, и поэтому $M = \infty$ с положительной вероятностью s_0 .

Таким образом, в случае простого случайного блуждания найдено асимптотическое поведение вероятности $P_0(M > x)$ при $x \rightarrow \infty$ в критическом и докритическом КВСБ по \mathbb{Z} с одним катализатором в 0. Сформулированные теоремы 22 и 23 в случае несимметричного простого случайного блуждания не являются неожиданными и приведены для полноты картины. Результаты теорем 20 и 21 описывают новые эффекты и представляют основной интерес. Действительно, они кардинально отличаются от соответствующих утверждений для ВСБ по \mathbb{Z} , изученных в [118] и [119]. Полученные нами результаты являются первым исследованием в области описания эволюции популяции в критическом и докритическом КВСБ. Стоит отметить, что заметные различия в распространении популяции частиц в надкритическом КВСБ и надкритическом ВСБ обнаружались только во втором члене асимптотического разложения для их соответствующих максимумов (см., например, статьи [18] и [6], а также

подраздел 2.4.4). При этом, как показали наши исследования, в критических и докритических КВСБ и соответствующих критических и докритических ВСБ различия видны уже в первом асимптотическом приближении вероятности $P_0(M > x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Прежде, чем перейти к доказательству теорем, установим вспомогательные утверждения. Следующая лемма посвящена выводу уравнений относительно интересующей нас вероятности $P_z(M > x)$, $z \in \mathbb{Z}$.

Лемма 34. *Справедлива следующая система уравнений относительно вероятностей $P_{w_i}(M > x)$, $x \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, N$:*

$$\begin{aligned} P_{w_i}(M > x) &= \alpha_i (1 - f_i(1 - P_{w_i}(M > x))) & (3.17) \\ &+ (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^N P_{w_i}(\max \{S(t), 0 \leq t \leq w_j \tau_{w_i, w_j}\} \leq x, w_j \tau_{w_i, w_j} < \infty) P_{w_j}(M > x) \\ &+ (1 - \alpha_i) P_{w_i} \left(\max \left\{ S(t), 0 \leq t \leq \min_{j=1, \dots, N} w_j \tau_{w_i, w_j} \right\} > x \right), \end{aligned}$$

где $W_j = W \setminus \{w_j\}$, $j = 1, \dots, N$.

Случай старта КВСБ в произвольной точке $z \in \mathbb{Z} \setminus W$ сводится к предыдущему случаю:

$$\begin{aligned} P_z(M > x) &= P_z \left(\max \left\{ S(t), 0 \leq t \leq \min_{i=1, \dots, N} w_i \tau_{z, w_i} \right\} > x \right) & (3.18) \\ &+ \sum_{i=1}^N P_z(\max \{S(t), 0 \leq t \leq w_i \tau_{z, w_i}\} \leq x, w_i \tau_{z, w_i} < \infty) P_{w_i}(M > x), \end{aligned}$$

где, очевидно, $P_z(M > x) = 1$ при $x < z$.

В частности, если $W = \{0\}$, то система уравнений (3.17) превращается в следующее уравнение относительно $P_0(M > x)$:

$$\begin{aligned} P_0(M > x) &= \alpha (1 - f(1 - P_0(M > x))) & (3.19) \\ &+ (1 - \alpha) P_0(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) P_0(M > x) \\ &+ (1 - \alpha) P_0(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x). \end{aligned}$$

Случай старта из точки $z \neq 0$, $z \in \mathbb{Z}$, также сводится к предыдущему случаю:

$$\begin{aligned} P_z(M > x) &= P_z(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{z,0}\} > x) & (3.20) \\ &+ P_z(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{z,0}\} \leq x, \tau_{z,0} < \infty) P_0(M > x). \end{aligned}$$

Система (3.17) и, в частности, уравнение (3.19) имеют единственное решение, соответственно, на промежутках $[0,1]^N$ и $[0,1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения объема работы рассмотрим только наиболее наглядный случай $W = \{0\}$ и $z = 0$. Остальная часть доказательства леммы 34 проводится на основе тех же идей, что и этот основной случай. По формуле полной вероятности и согласно описанию модели КВСБ имеем

$$\begin{aligned} P_0(M \leq x) &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) (P_0(M \leq x))^k \\ &+ (1 - \alpha) P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) P_0(M \leq x) \\ &+ (1 - \alpha) P_0(\tau_{0,0} = \infty, S(t) \leq x, t \geq 0), \end{aligned}$$

что равносильно (3.19).

Решение уравнения (3.19) относительно $P_0(M > x)$ всегда существует и единственно, поскольку существует и единственно решение уравнения

$$\alpha(1 - f(1 - s)) = s(1 - (1 - \alpha)p_1) - (1 - \alpha)p_2$$

для $s \in [0,1]$, где

$$\begin{aligned} p_1 &:= P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty), \\ p_2 &:= P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x), \end{aligned}$$

причем, очевидно, $p_1 + p_2 \leq 1$. Действительно, имеем $0 = \alpha(1 - f(1)) > -(1 - \alpha)p_2$ при $s = 0$, а $\alpha(1 - f(0)) \leq \alpha \leq 1 - (1 - \alpha)p_1 - (1 - \alpha)p_2$ при $s = 1$. Поэтому если в последнем соотношении хоть одно неравенство строгое, то графики функций $\alpha(1 - f(1 - s))$ и $s(1 - (1 - \alpha)p_1) - (1 - \alpha)p_2$ для $s \in [0,1]$ имеют единственную (в силу выпуклости функции f) точку пересечения на интервале $(0,1)$. Если же $\alpha(1 - f(0)) = \alpha = 1 - (1 - \alpha)p_1 - (1 - \alpha)p_2$ (что возможно только в случае возвратного случайного блуждания и нулевой вероятности гибели частицы без потомков), то пересечение упомянутых графиков приходится на точку $s = 1$ и других точек пересечения нет, так как

$$\frac{d}{ds} (\alpha(1 - f(1 - s)))|_{s=1} < \alpha < \frac{d}{ds} (s(1 - (1 - \alpha)p_1) - (1 - \alpha)p_2)|_{s=1}.$$

Лемма 34 доказана. \square

Из вида уравнения (3.19) следует, что асимптотическое поведение вероятности $P_0(M > x)$ при $x \rightarrow \infty$ определяется асимптотическим

поведением вероятностей $P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty)$ и $P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x)$. При общих предположениях о случайном блуждании эти вероятности не исследовались. Однако в частном, но важном случае простого случайного блуждания изучение этих вероятностей можно свести к уже решенной классической задаче о “разорении игрока”. В двух следующих леммах выводятся формулы для этих вероятностей отдельно для случаев простого симметричного и простого несимметричного случайного блуждания.

Лемма 35. *Для простого симметричного случайного блуждания S по \mathbb{Z} и $x \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) = \frac{2x + 1}{2(x + 1)}, \quad (3.21)$$

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x) = \frac{1}{2(x + 1)}. \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простое симметричное случайное блуждание по \mathbb{Z} является возвратным (см., например, [81], теорема 13.3.1). Поэтому $\tau_{0,0} = \infty$ с вероятностью 0 и

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) = 1 - P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x).$$

Выведем формулу для $P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x)$ в случае простого симметричного случайного блуждания. Поскольку скачки случайного блуждания могут происходить только в соседние точки, то в случайное событие $\{\omega : \max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x\}$ входят только траектории S , которые из стартовой точки 0 переходят в точку 1 и далее достигают точки $x + 1$ раньше, чем точки 0. Поэтому, учитывая результаты классической “задачи о разорении игрока” (см., например, [140], гл. 1, §9, формула (14)), приходим к соотношению (3.22), а, следовательно, и к соотношению (3.21). Лемма 35 полностью доказана. \square

Лемма 36. *Для простого несимметричного случайного блуждания по \mathbb{Z} справедливы следующие формулы:*

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) = p \frac{(q/p)^{x+1} - (q/p)}{(q/p)^{x+1} - 1} + \min\{p, q\}, \quad (3.23)$$

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x) = \frac{q - p}{(q/p)^{x+1} - 1} \quad (3.24)$$

для каждого $x \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned}
& P_0(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) = P_0(S(t) < 0, \tau_0 \leq t < \tau_{0,0}, \tau_{0,0} < \infty) \\
& + P_0(S(t) \in (0, x], \tau_0 \leq t < \tau_{0,0}, \tau_{0,0} < \infty) \\
& = q P_{-1}(\exists t_2 : S(t_2) = 0, S(t) \neq 0, 0 \leq t < t_2) \\
& + p P_1(\exists t_1 : S(t_1) = 0, S(t) \neq 0, S(t) \neq x + 1, 0 \leq t < t_1). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Здесь $P_1(\exists t_1 : S(t_1) = 0, S(t) \neq 0, S(t) \neq x + 1, 0 \leq t < t_1)$ есть вероятность выхода случайного блуждания S из полосы $(0, x + 1)$ через нижнюю границу, когда стартовая точка находится в 1 , см. [140], гл. 1, §9, формула (13). Аналогично $P_{-1}(\exists t_2 : S(t_2) = 0, S(t) \neq 0, 0 \leq t < t_2)$ – вероятность выхода случайного блуждания S из полосы $(-\infty, 0)$ через верхнюю границу, когда стартовая точка находится в -1 . Последняя вероятность находится также с помощью формулы (13) в [140], гл. 1, §9, однако теперь вероятности p и q следует поменять местами, а верхнюю границу B устремить к бесконечности. Возвращаясь к представлению (3.25) и подставляя найденные выражения для вероятностей, получаем

$$P_0(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) = p \frac{(q/p)^{x+1} - (q/p)}{(q/p)^{x+1} - 1} + q \min \left\{ \frac{p}{q}, 1 \right\},$$

что совпадает с соотношением (3.23).

Аналогично с помощью формулы (10) в [140], гл. 1, §9, получаем

$$\begin{aligned}
& P_0(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x) \\
& = p P_1(\exists t_3 : S(t_3) = x + 1, S(t) \neq 0, S(t) \neq x + 1, 0 \leq t < t_3) = p \frac{(q/p) - 1}{(q/p)^{x+1} - 1}.
\end{aligned}$$

Лемма 36 полностью доказана. \square

Перейдем к доказательству теоремы 20.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (3.19), леммы 35 и равенства $1 - f(1 - s) = f'(c)s$, справедливого при $s \in [0, 1]$ и некотором $c \in (1 - s, 1)$, вытекает, что

$$P_0(M > x) \leq (\alpha f'(c) + (1 - \alpha)) P_0(M > x) + P_0(\max \{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x).$$

При больших $x \in \mathbb{Z}$ последнее неравенство возможно только в том случае, когда $P_0(M > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда согласно формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned}
& 1 - f(1 - P_0(M > x)) \\
& = f'(1)P_0(M > x) - \frac{f''(1)}{2} (P_0(M > x))^2 + o\left((P_0(M > x))^2\right). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Поэтому из уравнения (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha\sigma^2}{2} (\mathbb{P}_0(M > x))^2 (1 + o(1)) \\ &= (1 - \alpha)\mathbb{P}_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Соотношения (3.22) и (3.27) влекут утверждение теоремы 20. \square

Теперь перейдем к доказательству теоремы 21.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью тех же соображений, что в доказательстве теоремы 20, заключаем, что $\mathbb{P}_0(M > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Однако в докритическом случае формулу Тейлора записываем в виде

$$1 - f(1 - \mathbb{P}_0(M > x)) = f'(1)\mathbb{P}_0(M > x) + o(\mathbb{P}_0(M > x)) \quad (3.28)$$

и, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 20, получаем

$$\alpha(1 - m)\mathbb{P}_0(M > x)(1 + o(1)) = (1 - \alpha)\mathbb{P}_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x)(1 + o(1))$$

при $x \rightarrow \infty$. Отсюда следует утверждение теоремы 21. \square

Напомним, что r – вероятность невозвращения в точку 0 случайного блуждания S , стартующего из 0. Докажем теорему 22.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p < q$, то в силу леммы 36 справедливы соотношения

$$\mathbb{P}_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) \rightarrow 2p, \quad (3.29)$$

$$\mathbb{P}_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x) \sim (q - p) \left(\frac{p}{q}\right)^{x+1}, \quad (3.30)$$

когда $x \rightarrow \infty$. При этом

$$\mathbb{P}_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) \rightarrow \mathbb{P}_0(\tau_{0,0} < \infty) = 1 - r, \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $r = 1 - 2p$ при $p < q$. В силу уравнения (3.19), формул (3.29), (3.30) и равенства $1 - f(1 - s) = f'(c)s$, справедливого при $s \in [0, 1]$ и некотором $c \in (1 - s, 1)$, имеем

$$\mathbb{P}_0(M > x) \leq (\alpha f'(c) + (1 - \alpha)(1 - r))\mathbb{P}_0(M > x) + \mathbb{P}_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x).$$

Это показывает, что $\mathbb{P}_0(M > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Используя вновь уравнение (3.19), соотношения (3.29), (3.30) и формулу Тейлора в виде (3.26), приходим к утверждению (3.12).

Если же $p > q$, то из леммы 36 вытекает, что

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} \leq x, \tau_{0,0} < \infty) \rightarrow 2q \quad (3.31)$$

и

$$P_0(\max\{S(t), 0 \leq t \leq \tau_{0,0}\} > x) \rightarrow p - q \quad (3.32)$$

при $x \rightarrow \infty$. Тогда утверждение (3.13) следует из уравнения (3.19) и рассуждений о существовании и единственности решения этого уравнения, приведенных в доказательстве леммы 34. Теорема 22 полностью доказана. \square

Нам осталось привести доказательство теоремы 23.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя те же рассуждения, что в начале доказательства теоремы 22, приходим к выводу, что $P_0(M > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда применяя соотношения (3.19), (3.28), (3.29) и (3.30), получаем формулу (3.15).

Утверждение (3.16) следует из соотношений (3.19), (3.31), (3.32) и рассуждений о существовании и единственности решения уравнения (3.19), приведенных в доказательстве леммы 34. Теорема 23 полностью доказана. \square

В заключительной части раздела сделаем замечание об общем случае произвольного конечного множества катализаторов в критическом КВСБ по \mathbb{Z} . При исследовании асимптотического поведения решения системы уравнений (3.17) нам бы пришлось совершать эквивалентные преобразования по правилам Крамера (см., например, [141], гл. 1, §7) над системой, в результате чего коэффициент перед $P_{w_i}(M > x)$ для каждого $i = 1, \dots, N$ стал бы равен определителю матрицы $D - I$, где матрица D задана в определении критического режима, а I – единичная матрица. Однако в критическом случае $\det(D - I) = 0$. Поэтому, как и в случае одного катализатора, все линейные члены сократились бы и остались только квадратичные, содержащие $(P_{w_i}(M > x))^2$. Остальные отличия в исследовании решения уравнения (3.19) и системы уравнений (3.17) незначительные и мы их поэтому не обсуждаем.

3.3 Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков

Цель данного раздела 3.3 заключается в том, чтобы завершить исследование общих и локальных численностей частиц в КВСБ по \mathbb{Z}^d с одним

катализатором, начатое еще в работах [53] и [33], поскольку результаты для *надкритического* КВСБ с одним источником ветвления уже были известны благодаря статье [99], а для *критического* установлены ранее в [45]. Следует отметить, что теоремы для локальных численностей частиц в критическом КВСБ верны при условии конечной дисперсии числа потомков каждой частицы, в то время как в рамках *докритического* КВСБ нам удалось обойтись существованием момента порядка $1 + \delta$, где $\delta \in (0,1]$. Для этого потребовалось учитывать тонкую взаимосвязь между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа. В результате найдено асимптотическое по времени поведение средних локальных численностей и вероятностей их невырождения, а также доказаны соответствующие предельные теоремы ягломовского типа. Нормирующие множители для локальных численностей и предельные распределения существенно отличаются в зависимости от размерности решетки.

Рассматриваемая в разделе 3.3 модификация КВСБ по целочисленной решетке \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, с одним источником ветвления предложена в статье [33], где авторам удалось охватить изучавшееся ранее симметричное ВСБ (см., например, [53]). Тем самым, мы считаем, что для модели КВСБ, описанной в разделе 2.1, дополнительно предполагается, что множество катализаторов W состоит из одной точки $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, а также $\beta_1 = 1$, случайное блуждание $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ симметрично и имеет конечную дисперсию скачков, т.е.

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \quad \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} \|\mathbf{y}\|^2 q(\mathbf{0}, \mathbf{y}) < \infty, \quad (3.33)$$

а условие пространственной однородности случайного блуждания выполнено в виде (2.1). Для краткости мы будем опускать индекс 1 у обозначений α_1 , ξ_1 , f_1 и m_1 .

Напомним, что $\mu(t)$ – это число частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$, локальные численности $\mu(t; \mathbf{y})$ – это количества частиц, находящихся в момент времени t в отдельных точках $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$.

Согласно определению 1 (см. также раздел 3.2) для КВСБ с одним катализатором условие критичности имеет вид $\alpha m + (1 - \alpha)(1 - h_d) = 1$, где $h_d := 1 - F_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(\infty)$ – это вероятность того, что частица, покинувшая начало координат, никогда не вернется обратно. Таким образом, значение $m = 1 + h_d \alpha^{-1} (1 - \alpha)$ является критическим, и, как для многих разновидностей ветвящихся процессов

(см., например, [46]), КВСБ классифицируется как *надкритическое*, *критическое* или *докритическое*, если среднее число m потомков каждой частицы соответственно больше, равно или меньше $1 + h_d \alpha^{-1}(1 - \alpha)$. В силу свойств возвратности и транзиентности рассматриваемого случайного блуждания (см., например, [139]) величины $h_1 = h_2 = 0$, в то время как $0 < h_d < 1$ при $d \geq 3$. Напомним, что $m = f'(1)$ и для классических процессов Гальтона–Ватсона критическое значение производной $f'(1)$ равно 1.

Наибольший интерес представляют критическое и докритическое КВСБ по \mathbb{Z}^d , поскольку в этих случаях возникает разнообразие предельных (по времени) поведений общих и локальных численностей частиц в зависимости от размерности d . Например, при $d = 1$ и $d = 2$ вероятность $P_{\mathbf{x}}(\mu(t) > 0)$ невырождения популяции частиц стремится к нулю с ростом времени (индекс $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ обозначает точку старта КВСБ), а для $d \geq 3$ эта вероятность имеет положительный предел. Такой эффект объясняется тем, что на решетке \mathbb{Z}^d при $d \geq 3$ с положительной вероятностью найдутся ”вечно живущие“ частицы, которые никогда не попадут в источник ветвления. Общие численности частиц в критическом КВСБ по целочисленной прямой \mathbb{Z} , т.е. при $d = 1$, были изучены в основополагающей работе [33]. В статьях [142], [143], [144] и [145] это исследование было продолжено для критического и докритического КВСБ по \mathbb{Z}^d , где $d \in \mathbb{N}$.

Анализ локальных численностей в критическом и докритическом КВСБ вызывает значительно бóльшие трудности, чем в надкритическом КВСБ. В критическом КВСБ по \mathbb{Z}^d предельные распределения локальных численностей частиц были изучены в серии статей В.А. Ватутина, В.А. Топчия, Ю. Ху, Е.Б. Яровой (см., например, [142], [16] и [100]), а также в наших работах, например, [146] и [44]. Необходимо отметить, что в этих статьях предполагалось существование конечного второго момента $E\xi^2$ числа потомков каждой частицы. В данном разделе 3.3 изучаются предельные распределения локальных численностей частиц в *докритическом* КВСБ по \mathbb{Z}^d , причем при менее ограничительных условиях на моменты числа потомков ξ , чем в критическом случае. А именно, нами найдено асимптотическое поведение средних локальных численностей $m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := E_{\mathbf{x}}\mu(t; \mathbf{y})$ при фиксированных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ и $t \rightarrow \infty$. В предположении, что $E\xi^{1+\delta} < \infty$ при некотором $\delta \in (0, 1]$, решена аналогичная задача для вероятности невырождения $q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := P_{\mathbf{x}}(\mu(t; \mathbf{y}) > 0)$ локальных

численностей частиц. Более того, при том же ограничении на момент $E\xi^{1+\delta}$ доказаны условные предельные теоремы для $\mu(t; \mathbf{y})$, когда $t \rightarrow \infty$.

Чтобы сформулировать основные результаты, введем дополнительные обозначения. Пусть

$$q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := 1 - E_{\mathbf{x}} s^{\mu(t; \mathbf{y})} \quad \text{и} \quad J(s; \mathbf{y}) := \int_0^\infty \Phi(q(s, t; \mathbf{0}, \mathbf{y})) dt,$$

где

$$\Phi(s) := \alpha(f(1-s) - 1 + f'(1)s), \quad s \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$. Рассмотрим *переходные вероятности* $p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $t \geq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, случайного блуждания, порожденного генератором Q . Согласно [16] и теореме 2.1.1 из [147], для фиксированных \mathbf{x} и \mathbf{y} при $t \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства:

$$p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}}, \quad p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \sim -\frac{d\gamma_d}{2t^{d/2+1}}, \quad p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{\tilde{\gamma}_d(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{t^{d/2+1}}, \quad (3.34)$$

где $\gamma_d := ((2\pi)^d |\det \varphi''_{\theta\theta}(\mathbf{0})|)^{-1/2}$, $\varphi(\theta) := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} q(\mathbf{0}, \mathbf{z}) \cos(\mathbf{z}, \theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]^d$,

$$\varphi''_{\theta\theta}(\mathbf{0}) := \left(\frac{\partial^2 \varphi(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta=\mathbf{0}} \right)_{i, j \in \{1, \dots, d\}}, \quad \tilde{\gamma}_d(\mathbf{z}) := \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle^2 e^{\frac{1}{2} \langle \varphi''_{\theta\theta}(\mathbf{0}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} d\mathbf{v},$$

$\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$. Положим $G_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) dt$, $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $G_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть преобразование Лапласа переходной вероятности $p(\cdot; \mathbf{x}, \mathbf{y})$. В силу (3.34) при $d \geq 3$ функция Грина $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ конечна для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, что означает транзиентность случайного блуждания. Однако при $d = 1$ или $d = 2$ мы имеем дело с возвратным блужданием, поскольку $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} G_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \infty$. При этом ввиду той же формулы (3.34) функция $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - G_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ конечна для всех $d \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$. Поэтому мы можем ввести функцию

$$\rho_d(\mathbf{z}) := \begin{cases} (1 - \alpha)q^{-1} - \beta \int_0^\infty (p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(t; \mathbf{0}, \mathbf{z})) dt, & \text{если } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \text{если } \mathbf{z} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

где для удобства мы обозначили $q = -q(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ и $\beta := \alpha(f'(1) - 1)$. В статье [16] показано, что $h_d = (qG_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^{-1}$. Отсюда вытекает, что в докритическом режиме $\beta < (1 - \alpha)(qG_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^{-1}$ и, следовательно, функция $\rho_d(\cdot)$ строго положительна при всех $d \in \mathbb{N}$. Заметим также, что согласно представлению (2.1.15) в [147] справедливо неравенство $p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \geq p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $t \geq 0$, причем функция $p(\cdot; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ симметрична и однородна по $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$.

При $d = 1$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ определим функцию

$$C_1(\mathbf{0}, \mathbf{y}) := \frac{1 - \alpha}{2q\gamma_1\pi\beta^2} \rho_1(\mathbf{y}),$$

$$C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2\gamma_1\pi\beta^2} \rho_1(\mathbf{x}) \rho_1(\mathbf{y}) + \tilde{\gamma}_1(\mathbf{x}) + \tilde{\gamma}_1(\mathbf{y}) - \tilde{\gamma}_1(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Аналогично при $d = 2$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$C_2(\mathbf{0}, \mathbf{y}) := \frac{1 - \alpha}{q\gamma_2\beta^2} \rho_2(\mathbf{y}), \quad C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{\gamma_2\beta^2} \rho_2(\mathbf{x}) \rho_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Наконец, при $d \geq 3$ зададим функции $C_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, следующим образом:

$$C_d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) := \frac{(1 - \alpha) q \gamma_d}{(1 - \alpha - q \beta G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^2} \rho_d(\mathbf{y}),$$

$$C_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{q^2 \gamma_d}{(1 - \alpha - q \beta G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^2} \rho_d(\mathbf{x}) \rho_d(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Теорема 24. Пусть $m < 1 + h_d \alpha^{-1} (1 - \alpha)$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ для каждой $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ справедливы соотношения:

$$m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{t^{3/2}}, \quad d = 1,$$

$$m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{t \ln^2 t}, \quad d = 2,$$

$$m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{C_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{t^{d/2}}, \quad d \geq 3,$$

причем определенные выше функции $C_d(\cdot, \cdot)$, $d \in \mathbb{N}$, являются строго положительными.

Утверждение теоремы 24 обобщает соответствующие результаты главы 5 из [147], относящиеся к асимптотическому поведению первых моментов локальных численностей частиц в докритическом симметричном ВСБ по \mathbb{Z}^d . При этом в отличие от [147] нами использованы такие подходы, как представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр (см. [16]) и тауберовы теоремы для производных преобразований Лапласа (см. раздел 7.3 в [121]).

Теорема 25. Если $m < 1 + h_d \alpha^{-1} (1 - \alpha)$ и существует $E\xi^{1+\delta}$ при некотором $\delta \in (0, 1]$, то при фиксированных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ и $t \rightarrow \infty$ имеем

$$q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - C_1(\mathbf{x}, \mathbf{0})J(0; \mathbf{y})}{t^{3/2}}, \quad d = 1,$$

$$q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{C_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})(\rho_2(\mathbf{y}) - J(0; \mathbf{y}))}{t \ln^2 t}, \quad d = 2,$$

$$q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{C_d(\mathbf{x}, \mathbf{0})(\rho_d(\mathbf{y}) - J(0; \mathbf{y}))}{t^{d/2}}, \quad d \geq 3,$$

где $C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - C_1(\mathbf{x}, \mathbf{0})J(0; \mathbf{y}) > 0$ при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$, а $J(0; \mathbf{y}) < \rho_d(\mathbf{y})$ при $d \geq 2$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$.

При доказательстве теоремы 25 неравенство Гельдера применяется в сочетании с результатами о связи между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа (см., например, [148]). Теорема 26 может рассматриваться как следствие теоремы 25.

Теорема 26. Пусть $t < 1 + h_d \alpha^{-1}(1 - \alpha)$ и существует $E\xi^{1+\delta}$ при некотором $\delta \in (0, 1]$. Тогда при фиксированных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ и каждом $s \in [0, 1]$ верны равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\mathbf{x}} \left(s^{\mu(t; \mathbf{y})} \mid \mu(t; \mathbf{y}) > 0 \right) = \frac{s C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - C_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}) (J(0; \mathbf{y}) - J(s; \mathbf{y}))}{C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - C_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}) J(0; \mathbf{y})}, \quad d = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\mathbf{x}} \left(s^{\mu(t; \mathbf{y})} \mid \mu(t; \mathbf{y}) > 0 \right) = \frac{s \rho_d(\mathbf{y}) - (J(0; \mathbf{y}) - J(s; \mathbf{y}))}{\rho_d(\mathbf{y}) - J(0; \mathbf{y})}, \quad d \geq 2.$$

Заметим, что после сравнения формулировок теорем 24–26 и результатов исследования локальных численностей частиц в критическом КВСБ по \mathbb{Z}^2 (см., например, [149] и [45]) напрашивается следующий вывод. Локальные численности частиц в критическом КВСБ проявляют “докритическое” поведение в случае блуждания по целочисленной плоскости. Кроме того, схема доказательства теорем 24–26 легко переносится на случай критического КВСБ по \mathbb{Z}^2 . Поэтому можно утверждать, что результаты статей [149] и [45], относящиеся к локальным численностям в критическом КВСБ по \mathbb{Z}^2 , верны и при менее ограничительных условиях на моменты числа потомков каждой частицы, а именно, достаточно потребовать конечности $E\xi^{1+\delta}$ для некоторого $\delta \in (0, 1]$ вместо условия $E\xi^2 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 24. Как и при доказательстве теоремы 1 в [45], используем обратные и прямые интегральные уравнения для семейства функций $\{m(\cdot; \mathbf{x}, \mathbf{y})\}_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d}$. Эти уравнения совпадают с уравнениями (8) и (9) в [45] для средних локальных численностей частиц в критическом КВСБ по \mathbb{Z}^d с точностью до замены критического значения $\beta_c = (1 - \alpha)q^{-1}G_0^{-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ на значение β , т.е.

$$m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \left(1 - \frac{q}{1 - \alpha}\right) \int_0^t p(t - u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) m'(u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) du + \frac{q\beta}{1 - \alpha} \int_0^t p(t - u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) m(u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) du, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &+ \left(\frac{1 - \alpha}{q} - 1 \right) \int_0^t m(u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) p'(t - u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) du \\
&+ \beta \int_0^t m(u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) p(t - u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) du.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Соотношения (3.35) и (3.36), как и уравнения (8) и (9) в [45], выводятся с помощью формулы вариации постоянной из обратных и прямых дифференциальных уравнений (5) и (6) в [45], установленных в банаховом пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$.

Нам также понадобится следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого аналогично доказательствам леммы 3.3.5 в [147] и леммы 1 в [45].

Лемма 37. *Для каждого $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ функция $m(t; \mathbf{y}, \mathbf{y})$ не возрастает по переменной t .*

Теперь перейдем непосредственно к установлению теоремы 24. Вначале рассмотрим случай $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (3.36) и выразим из полученного соотношения функцию $\widehat{m}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} m(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) dt$, $\lambda \geq 0$:

$$\widehat{m}(\lambda) = \frac{G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{1 - ((1 - \alpha)q^{-1} - 1) \int_0^\infty e^{-\lambda t} p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) dt - \beta G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})}. \tag{3.37}$$

Продифференцируем по λ каждую часть последнего соотношения. В результате, учитывая тождество

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) dt = \lambda G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - 1,$$

имеем

$$\widehat{m}'(\lambda) = \frac{(1 - \alpha)q^{-1} G'_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + ((1 - \alpha)q^{-1} - 1) G_\lambda^2(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{((1 - \alpha)q^{-1} - ((1 - \alpha)q^{-1} - 1) \lambda G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - \beta G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^2}. \tag{3.38}$$

Согласно тауберовой теореме 2 из §5 главы XIII книги [123] и следствию 43 из [121] соотношение (3.34) влечет

$$\begin{aligned}
G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &\sim \frac{\gamma_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}, & G'_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &\sim -\frac{\gamma_1 \sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}}, & d &= 1, \\
G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &\sim \gamma_2 \ln \frac{1}{\lambda}, & G'_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &\sim -\frac{\gamma_2}{\lambda}, & d &= 2,
\end{aligned}$$

когда $\lambda \rightarrow 0+$. Подставляя эти асимптотические равенства соответственно при $d = 1$ и $d = 2$ в (3.38), находим

$$\begin{aligned}\widehat{m}'(\lambda) &\sim -\frac{1-\alpha}{2q\gamma_1\sqrt{\pi}\beta^2\sqrt{\lambda}}, & d=1, \\ \widehat{m}'(\lambda) &\sim -\frac{1-\alpha}{q\gamma_2\beta^2\lambda\ln^2\lambda}, & d=2,\end{aligned}$$

если $\lambda \rightarrow 0+$. Применяя к последним соотношениям следствие 43 из [121], приходим к утверждению теоремы 24 при $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ и $d = 1$ или $d = 2$.

При $d \geq 3$ воспользуемся иным подходом, а именно представлением комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр. В силу (3.34) функции распределения, преобразованиями Лапласа которых являются $G_\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ и $\int_0^\infty e^{-\lambda t} p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) dt$, имеют хвосты, эквивалентные постоянным (вторая из них равна нулю), умноженным на одну и ту же функцию $t^{1-d/2}$. Поэтому благодаря лемме 6 из [16] и формуле (3.37) имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\int_t^\infty m(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du \sim \frac{2(1-\alpha)q\gamma_d}{(d-2)(1-\alpha-q\beta G_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^2 t^{d/2-1}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда с помощью леммы 37 и классических результатов о дифференцировании асимптотических формул (см., например, [150], гл. 7, раздел 3) получаем утверждение теоремы 24 при $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ и $d \geq 3$.

Перейдем к рассмотрению случая $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Для этого согласно формуле интегрирования по частям перепишем семейство уравнений (3.35) следующим образом:

$$\begin{aligned}m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) &= \frac{q}{1-\alpha} p(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) + \left(1 - \frac{q}{1-\alpha}\right) \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) p'(u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) du \\ &\quad + \frac{q\beta}{1-\alpha} \int_0^t p(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) m(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du, \quad (3.39)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{q}{1-\alpha} m(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \frac{q}{1-\alpha} p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) + \left(1 - \frac{q}{1-\alpha}\right) \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) p'(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du \\ &\quad + \frac{q\beta}{1-\alpha} \int_0^t p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) m(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du. \quad (3.40)\end{aligned}$$

Вычитая уравнение (3.39) из (3.40), получаем

$$\frac{q}{1-\alpha} m(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{q}{1-\alpha} (p(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}))$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \frac{q}{1-\alpha}\right) \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) (p'(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p'(u; \mathbf{x}, \mathbf{0})) du \\
& + \frac{q\beta}{1-\alpha} \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) (p(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(u; \mathbf{x}, \mathbf{0})) du. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Вновь используя результаты о дифференцировании асимптотических формул (см., например, [150], гл. 7, раздел 3), а также соотношение (3.34) и неравенство $p''(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \geq p''(t; \mathbf{x}, \mathbf{0})$, $t \geq 0$, вытекающее из представления (2.1.15) в [147], находим, что

$$p'(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p'(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \sim -\frac{(d+2)\tilde{\gamma}_d(\mathbf{x})}{2t^{d/2+2}}, \quad t \rightarrow \infty. \tag{3.42}$$

Поэтому с учетом леммы 5.1.2 (“леммы о свертках”) из [147], формулы (3.34) и доказанной части теоремы 24 выводим из (3.41):

$$\begin{aligned}
m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) & \sim m(t; \mathbf{0}, \mathbf{0}) \left(1 - \frac{q\beta}{1-\alpha} \int_0^\infty (p(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(u; \mathbf{x}, \mathbf{0})) du\right) \\
& - \frac{q\tilde{\gamma}_d(\mathbf{x})}{(1-\alpha)t^{d/2+1}} \left(1 + \beta \int_0^\infty m(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du\right), \quad t \rightarrow \infty. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Однако в силу уже установленной части теоремы 24 видим, что $\int_0^\infty m(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du < \infty$ для всех $d \in \mathbb{N}$, причем согласно (3.37) при $\lambda = 0$

$$\int_0^\infty m(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) du = -\beta^{-1}, \quad \text{если } d = 1 \text{ или } d = 2. \tag{3.44}$$

Отсюда делаем вывод, что только первое слагаемое в правой части (3.43) вносит вклад в асимптотическое поведение $m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0})$. Таким образом, утверждение теоремы 24 при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ следует из соотношения (3.43) и доказанной части этой теоремы при $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Пусть теперь $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, а $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. В силу (3.36) имеем

$$\begin{aligned}
m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) - m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) & = p(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) - p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& + \left(\frac{1-\alpha}{q} - 1\right) \int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) (p'(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p'(u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du \\
& + \beta \int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) (p(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом формул (3.34) и (3.42), а также леммы 5.1.2 из [147] и доказанной части теоремы 24, находим, что

$$\begin{aligned}
m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sim m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \left(\frac{1-\alpha}{q} - \beta \int_0^\infty (p(u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du\right) \\
& + \frac{\tilde{\gamma}_d(\mathbf{x}) - \tilde{\gamma}_d(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{t^{d/2+1}} - \frac{\beta \tilde{\gamma}_d(\mathbf{y})}{t^{d/2+1}} \int_0^\infty m(u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) du, \quad t \rightarrow \infty. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Опять же в силу установленной части теоремы 24 приходим к неравенству $\int_0^\infty m(u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) du < \infty$. Более того, аналогично выводу равенства (3.44) проверяется, что $\int_0^\infty m(u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) du = -\beta^{-1}$ при $d = 1$ или $d = 2$. Поэтому утверждение теоремы 24 для $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ теперь вытекает из соотношения (3.45) и доказанной части теоремы 24 при $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Для завершения доказательства теоремы 24 осталось убедиться только в том, что функции $C_d(\cdot, \cdot)$, $d \in \mathbb{N}$, являются строго положительными. Это элементарно, за исключением случая $d = 1$, когда $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Покажем, что и в этом случае $C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$. С этой целью воспользуемся функцией $F_{\mathbf{x}, \mathbf{0}}(t)$, $t \geq 0$, которая есть функция распределения времени до первого попадания в точку $\mathbf{0}$ при старте из точки \mathbf{x} в рамках случайного блуждания, порожденного генератором Q . Ясно, что

$$p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_0^t p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) dF_{\mathbf{x}, \mathbf{0}}(u) \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (3.46)$$

Тогда в силу очевидного тождества

$$p(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) = \int_0^t p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) dF_{\mathbf{x}, \mathbf{0}}(u)$$

имеем

$$\begin{aligned} p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_0^t p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) dF_{\mathbf{x}, \mathbf{0}}(u) &= p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - p(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \\ &+ \int_0^t (p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{0}) - p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) dF_{\mathbf{x}, \mathbf{0}}(u). \end{aligned}$$

Поскольку с помощью соотношения (3.34), леммы 5.1.2 в [147] и леммы 3 в [146] можно установить асимптотическое поведение правой части в последнем равенстве, то при $t \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_0^t p(t-u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) dF_{\mathbf{x}, \mathbf{0}}(u) &\sim \frac{\tilde{\gamma}_1(\mathbf{x}) + \tilde{\gamma}_1(\mathbf{y}) - \tilde{\gamma}_1(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{t^{3/2}} \\ &+ \frac{(1 - \alpha - q \rho_1(\mathbf{x}))(1 - \alpha - q \rho_1(\mathbf{y}))}{2 q^2 \gamma_1 \pi \beta^2 t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.46) следует, что

$$\frac{\rho_1(\mathbf{x})\rho_1(\mathbf{y})}{2 \gamma_1 \pi \beta^2} + \tilde{\gamma}_1(\mathbf{x}) + \tilde{\gamma}_1(\mathbf{y}) - \tilde{\gamma}_1(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq \frac{1 - \alpha}{2 q \gamma_1 \pi \beta^2} \left(\rho_1(\mathbf{x}) + \rho_1(\mathbf{y}) - \frac{1 - \alpha}{q} \right).$$

Однако левая часть неравенства есть $C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а правая часть строго положительна, так как $\rho_1(\mathbf{z}) > (1 - \alpha)q^{-1}$ при $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. В свою очередь, последнее

соотношение справедливо ввиду определения функции $\rho_1(\cdot)$ и отрицательности β в докритическом случае при $d = 1$.

Таким образом, теорема 24 полностью доказана. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 25. Нетрудно проверить (следуя схеме из [45]), что в докритическом КВСБ по \mathbb{Z}^d , как и в критическом КВСБ, для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, $s \in [0, 1]$ и $t \geq 0$ справедливы нелинейные интегральные уравнения

$$q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 - s)m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_0^t m(t - u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \Phi(q(s, u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du. \quad (3.47)$$

В силу неотрицательности функций $m(\cdot; \mathbf{x}, \mathbf{0})$ и $\Phi(\cdot)$ отсюда вытекает следующая верхняя оценка для $q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq (1 - s)m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.48)$$

Лемма 38. Если $m < 1 + h_d \alpha^{-1}(1 - \alpha)$ и $E\xi^{1+\delta} < \infty$ при $\delta \in (0, 1]$, то для некоторых положительных постоянных K_1 и K_2 верны неравенства

$$\Phi(s) \leq K_1 s^{1+\delta}, \quad s \in [0, 1], \quad (3.49)$$

$$E_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y})^{1+\delta} \leq K_2 m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad t \geq t_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \quad (3.50)$$

где $t_0(\cdot, \cdot)$ – некоторая неотрицательная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим случай $0 < \delta < 1$. Воспользуемся связью между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа. Впервые такого рода результаты были получены в [148], где фигурировало традиционное понятие дробной производной по Риману–Лиувиллю. Однако нам удобнее обратиться к более современному аналогу этих результатов, а именно к лемме 2.1 в [120], согласно которой имеем

$$E\xi^{1+\delta} = \frac{\delta(1 + \delta)}{\Gamma(1 - \delta)} \int_0^\infty \frac{\Phi(1 - e^{-v}) + \alpha f'(1)(e^{-v} - 1 + v)}{\alpha v^{2+\delta}} dv. \quad (3.51)$$

В силу конечности $E\xi^{1+\delta}$ из последнего равенства вытекает, что $\int_0^1 v^{-2-\delta} \Phi(v) dv < \infty$. С помощью формулы интегрирования по частям и неравенства $\Phi'(s) \geq 0$, $s \in [0, 1]$, отсюда выводим соотношение (3.49) при $\delta \in (0, 1)$.

Перейдем к проверке (3.50) в случае $0 < \delta < 1$. Снова воспользуемся леммой 2.1 из [120], в результате чего приходим к следующему равенству:

$$E_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y})^{1+\delta} = \frac{\delta(1 + \delta)}{\Gamma(1 - \delta)} \int_0^\infty \frac{v m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - q(e^{-v}, t; \mathbf{x}, \mathbf{y})}{v^{2+\delta}} dv.$$

Подставляя формулу (3.47) в последнее соотношение, получаем

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{x}}\mu(t; \mathbf{y})^{1+\delta} &= m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\delta(1+\delta)}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^\infty \frac{e^{-v} - 1 + v}{v^{2+\delta}} dv \\ &+ \frac{\delta(1+\delta)}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^\infty \frac{1}{v^{2+\delta}} \int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \Phi(q(e^{-v}, u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du dv. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Очевидно, первый интеграл в равенстве (3.52) сходится. Оценим теперь двойной интеграл. Согласно (3.48) и неравенству $\Phi(\kappa s) \leq \kappa \Phi(s)$, $\kappa, s \in [0, 1]$, вытекающему из выпуклости функции $\Phi(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{1}{v^{2+\delta}} \int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \Phi(q(e^{-v}, u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du dv \\ &\leq \int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) m(u; \mathbf{0}, \mathbf{y}) du \int_0^\infty \frac{\Phi(1-e^{-v})}{v^{2+\delta}} dv. \end{aligned}$$

В правой части последнего неравенства интеграл по переменной u при $t \rightarrow \infty$ эквивалентен (с точностью до постоянного множителя) функции $m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ в силу теоремы 24 и леммы 5.1.2 из [147]. При этом интеграл по переменной v в том же неравенстве сходится ввиду представления (3.51) и конечности $E\xi^{1+\delta}$. Поэтому, учитывая эти рассуждения и соотношение (3.52), приходим к (3.50) при $0 < \delta < 1$.

Теперь рассмотрим случай $\delta = 1$. Из тождества $f''(1) = E\xi(\xi - 1)$ и условия леммы вытекает существование $f''(1)$, а, следовательно, и $\Phi''(0)$. Более того, так как $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(0) = 0$, то неравенство (3.49) при $\delta = 1$ доказано. Продифференцируем каждую часть равенства (3.47) дважды по s в точке $s = 1$ слева. Используя соотношения $m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_s q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y})|_{s=1}$ и

$$E_{\mathbf{x}}\mu(t; \mathbf{y})(\mu(t; \mathbf{y}) - 1) = -\partial_{ss}^2 q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y})|_{s=1},$$

получим

$$E_{\mathbf{x}}\mu(t; \mathbf{y})(\mu(t; \mathbf{y}) - 1) = \alpha f''(1) \int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) (m(u; \mathbf{0}, \mathbf{y}))^2 du.$$

Согласно теореме 24 и лемме 5.1.2 из [147] интеграл в последнем равенстве ведет себя с точностью до постоянного множителя, как $m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0})$, когда $t \rightarrow \infty$. Поэтому с учетом теоремы 24 отсюда следует искомое неравенство (3.50) при $\delta = 1$. Лемма 38 полностью доказана. \square

Нетрудно проверить с помощью формул (3.48) и (3.49), а также теоремы 24 и схемы доказательства леммы 4 из [149], что

$$\int_0^t m(t-u; \mathbf{x}, \mathbf{0}) \Phi(q(s, u; \mathbf{0}, \mathbf{y})) du \sim m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) J(s; \mathbf{y}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.53)$$

где функция $J(\cdot; \cdot)$, введенная выше, корректно определена ввиду верхней оценки (3.48) для $q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Получим нижнюю оценку для $q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y}) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y}) \mathbb{I} \{ \mu(t; \mathbf{y}) > 0 \} \\ &\leq (\mathbb{E}_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y})^{1+\delta})^{1/(1+\delta)} \left(\mathbb{E}_{\mathbf{x}} \mathbb{I} \{ \mu(t; \mathbf{y}) > 0 \}^{(1+\delta)/\delta} \right)^{\delta/(1+\delta)}. \end{aligned}$$

Перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \frac{(m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}))^{(1+\delta)/\delta}}{(\mathbb{E}_{\mathbf{x}} \mu(t; \mathbf{y})^{1+\delta})^{1/\delta}}, \quad t > 0.$$

Воспользовавшись теперь (3.50), приходим к нижней оценке для $q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq K_2^{-1/\delta} m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad t \geq t_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d. \quad (3.54)$$

Объединяя формулы (3.47) и (3.53) при $s = 0$ с оценкой (3.54), заключаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) J(0; \mathbf{y}), \quad \text{причем} \quad J(0; \mathbf{y}) < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})}{m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0})}$$

при фиксированных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$. Однако эти соотношения и означают справедливость теоремы 25. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 26. Снова согласно формулам (3.47) и (3.53) имеем

$$q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim (1-s)m(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - m(t; \mathbf{x}, \mathbf{0}) J(s; \mathbf{y}), \quad t \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d.$$

Тогда с помощью представления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \left(s^{\mu(t; \mathbf{y})} \mid \mu(t; \mathbf{y}) > 0 \right) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q(s, t; \mathbf{x}, \mathbf{y})}{q(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

и теоремы 25 получаем утверждение теоремы 26. \square

3.4 Распространение фронта ветвящегося случайного блуждания с периодическими источниками ветвления

В разделе 3.4 мы изучаем новую модель ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) с периодическими источниками ветвления, впервые рассмотренную в статьях [122] и [151], в которых установлено асимптотическое разложение для средних локальных численностей частиц в момент времени t при $t \rightarrow \infty$. В данном разделе 3.4 наша задача другая – исследовать фронт распространения надкритического ВСБ с периодическими источниками ветвления, когда хвосты распределения скачка случайного блуждания удовлетворяют условию Крамера, т.е. являются легкими.

Дадим описание модели. Исследуемая модель сочетает блуждание частиц по решетке \mathbb{Z}^d и их возможное размножение (и гибель) в множестве $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$, имеющем определенную структуру. Вначале опишем процесс блуждания частицы по решетке \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$. Блуждание задается марковской цепью $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем и инфинитезимальной матрицей $A = (a(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d}$ (см., например, [130], гл. 8, раздел 2). Здесь $a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – интенсивность перехода марковской цепи \mathbf{S} из состояния \mathbf{x} в состояние \mathbf{y} . Предполагаем, что матрица A консервативна, т.е. $\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, $a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in (-\infty, 0)$, а марковская цепь \mathbf{S} неприводима, т.е. случайное блуждание \mathbf{S} с положительной вероятностью может перейти из любой вершины \mathbb{Z}^d в любую другую. Будем рассматривать однородное случайное блуждание \mathbf{S} , т.е.

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}) = a(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{и} \quad a := -a(\mathbf{0}, \mathbf{0}). \quad (3.55)$$

Теперь опишем множество источников размножения и гибели частиц. Пусть $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d$ – набор линейно независимых (не обязательно ортогональных) векторов в \mathbb{Z}^d . Будем называть решеткой (бесконечное) множество

$$\Gamma := \left\{ \mathbf{g} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{g} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{g}_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, d \right\}, \quad (3.56)$$

а множество $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1}^d$ – базисом решетки Γ . Заметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку. Предполагается, что только в узлах решетки Γ частицы могут давать потомков и затем мгновенно гибнуть. Механизм

ветвления задается инфинитезимальной производящей функцией

$$b(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k, \quad s \in [0,1], \quad \text{где } b_k \geq 0 \text{ при } k \neq 1, \quad b := -b_1 \in (0,\infty) \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 0. \quad (3.57)$$

Это означает, что вероятность $p_k(t)$ превращения частицы в k частиц за время t есть

$$p_k(t) = b_k t + o(t), \quad k \neq 1, \quad \text{и} \quad p_1(t) = 1 + b_1 t + o(t), \quad t \rightarrow 0+. \quad (3.58)$$

В начальный момент времени $t = 0$ на решетке имеется одна частица, находящаяся в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Новые частицы эволюционируют согласно тем же вероятностным законам, что и родительская частица, независимо друг от друга и от предыстории процесса.

Подытожим данное описание модели. Если стартовая точка \mathbf{x} начальной частицы не принадлежит решетке Γ , то родительская частица совершает случайное блуждание согласно марковской цепи \mathbf{S} до первого попадания в множество Γ , т.е. в некоторую точку $\mathbf{y} \in \Gamma$. В точке \mathbf{y} частица может с заданными интенсивностями либо ее покинуть и продолжить совершать случайное блуждание до очередного попадания в Γ , либо оставить в точке \mathbf{y} вместо себя k потомков, $k = 0, 1, 2, \dots$, и мгновенно погибнуть. Новые частицы ведут себя таким же образом, независимо друг от друга и от родительской частицы.

Мы рассматриваем надкритический режим (см., например, [46], гл. 1, раздел 6]), т.е. популяция частиц выживает с положительной вероятностью, что в терминах производящей функции записывается в виде соотношения

$$\beta := b'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \in (0,\infty). \quad (3.59)$$

Другие режимы не представляют интереса с точки зрения поставленной задачи, поскольку критическое и докритическое ВСБ вырождаются с вероятностью единица и в таких случаях изучаемая задача о “распространении” популяции теряет смысл. Обозначим через $N(t)$ случайное множество частиц в ВСБ, существующих на решетке в момент $t \geq 0$, а через $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t), \dots, X_d^v(t))$ положение частицы v из множества $N(t)$ в момент времени t . Введем событие $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$, на котором популяция частиц не вырождается. В силу условия (3.59) имеем $P(\mathcal{I}) \in (0,1]$.

Будем считать, что скачки случайного блуждания имеют легкие хвосты. Это означает, что выполнено условие Крамера. Точнее говоря, пусть для всех θ из некоторой окрестности точки $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ конечно следующее математическое ожидание:

$$\mathbb{E}e^{\langle \theta, \mathbf{Y} \rangle} < \infty, \quad (3.60)$$

где вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$ описывает скачок случайного блуждания \mathbf{S} .

Введем функцию

$$m(\theta, \varphi) := \frac{(\beta + b) \mathbb{E}e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(\tau_\Gamma^{(0)}) - \mathbf{S}(0) \rangle - \varphi \tau_\Gamma^{(0)}}}{\varphi + a + b - (\varphi + a) \mathbb{E}e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(\tau_\Gamma^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_\Gamma^{(1)}}} \quad (3.61)$$

для тех значений $\theta \in \mathbb{R}^d$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, для которых она корректно определена и неотрицательна, т.е. конечны математические ожидания, фигурирующие в формуле (3.61), и

$$(\varphi + a) \mathbb{E}e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(\tau_\Gamma^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_\Gamma^{(1)}} < \varphi + a + b, \quad \varphi > -a, \quad (3.62)$$

где a и b определены соответственно в формулах (3.55) и (3.57). Здесь $\tau_\Gamma^{(0)}$ — время первого достижения множества Γ частицей, совершающей случайное блуждание \mathbf{S} , а $\tau_\Gamma^{(1)}$ — время ее первого возвращения в Γ . В лемме 2, приведенной ниже, устанавливается, что область определения неотрицательной функции $m(\cdot, \cdot)$ отлична от пустого множества.

Пусть $\mathcal{P}_t := \{\mathbf{X}^v(t)/t : v \in N(t)\} \subset \mathbb{R}^d$ — случайное множество нормированных положений всех частиц, существующих в ВСБ в момент времени t . Положим

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \Theta_1(\mathbf{z}) \supset \Theta_2(\mathbf{z})\}, \quad (3.63)$$

где

$$\Theta_1(\mathbf{z}) := \{\theta \in \mathbb{R}^d : m(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle) \geq 1\},$$

$$\Theta_2(\mathbf{z}) := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d : (a - \langle \mathbf{z}, \theta \rangle) \mathbb{E}e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(\tau_\Gamma^{(1)}) \rangle + \langle \theta, \mathbf{z} \rangle \tau_\Gamma^{(1)}} < a + b - \langle \mathbf{z}, \theta \rangle, a - \langle \mathbf{z}, \theta \rangle > 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что согласно формуле (3.62) множество $\Theta_2(\mathbf{z})$ — это область возможных значений переменной θ , при которых неотрицательная функция $m(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle)$ определена для фиксированной переменной \mathbf{z} .

Основной результат настоящей работы показывает, что \mathcal{P} — это выпуклое множество, представляющее собой *асимптотическую форму* рассматриваемого нами ВСБ. Напомним, что, согласно статье [152], *асимптотическая форма*

ВСБ — это выпуклое множество, к которому в смысле метрики Хаусдорфа стремится выпуклая оболочка всех положений частиц в ВСБ в момент t , нормированных множителем t , при $t \rightarrow \infty$. Хорошо известно, что для множеств $D, F \subset \mathbb{R}^d$ расстояние Хаусдорфа между ними задается формулой

$$\Delta(D, F) := \inf\{\varepsilon \geq 0 : D \subset F_\varepsilon, F \subset D_\varepsilon\}, \quad (3.64)$$

где $D_\varepsilon := \cup_{\mathbf{x} \in D} \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \varepsilon\}$. Естественно назвать границу множества \mathcal{P} в \mathbb{R}^d *предельной формой фронта распространения* ВСБ.

Теорема 27. Пусть выполнены условия (3.55), (3.59) и (3.60). Тогда множество \mathcal{P} компактно, выпукло и справедливо соотношение

$$\Delta(\mathcal{P}_t, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \quad \text{н.н. на событии } \mathcal{I} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (3.65)$$

Из этой теоремы вытекает важное следствие при размерности решетки $d = 1$. В таком случае вся популяция частиц в момент t заключена между максимумом и минимумом среди координат всех частиц, существующих на целочисленной прямой в момент t . Выпишем, например, утверждение для максимума, который определяется как $M_t := \max\{\mathbf{X}^v(t) : v \in N(t)\}$, $t \geq 0$.

Следствие 3. Если при $d = 1$ имеют место соотношения (3.55), (3.59) и (3.60), то

$$\frac{M_t}{t} \rightarrow r \quad \text{н.н. на событии } \mathcal{I} \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где конечен предел $r := \sup\{z \in \mathbb{R} : \Theta_1(z) \supset \Theta_2(z)\}$.

Таким образом, для ВСБ с периодическими источниками ветвления нами установлена теорема, являющаяся аналогом основных результатов статей [106], [18] и раздела 2.4 данной диссертации, демонстрирующих асимптотически линейное распространение популяции частиц в надкритическом ВСБ с конечным числом источников размножения и гибели частиц в случае, когда хвосты распределения скачка случайного блуждания легкие. Одним из методов исследования ВСБ с конечным числом катализаторов в статье [18] и разделе 2.4 является анализ системы интегральных уравнений типа уравнений восстановления, в которой число уравнений равнялось числу источников. Для ВСБ с периодическими катализаторами этот подход представляется бесперспективным, поскольку возникает сложная система бесконечного числа уравнений.

Однако благодаря периодическому расположению источников ветвления в настоящей работе удалось рассмотреть ВСБ с периодическими катализаторами как в некотором смысле однородное ВСБ и применить к нему известные результаты, установленные для общего однородного ВСБ. Нами впервые доказаны результаты, описывающие пространственное распространение популяции частиц для ВСБ с бесконечным числом источников ветвления в случае, когда эти источники расположены периодически.

Прежде чем перейти к доказательству основного результата, введем ряд дополнительных обозначений и установим две леммы. Напомним, что в силу [130], гл. 8, раздел 2, случайное блуждание \mathbf{S} с непрерывным временем, удовлетворяющее условию (3.55), представляет собой сложный пуассоновский процесс, т.е. имеет место (уже использованная ранее в главе 2) формула

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(0) + \sum_{i=1}^{\Pi(t)} \mathbf{Y}^{(i)}, \quad t \geq 0, \quad (3.66)$$

где $\{\Pi(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности a и $\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, имеющие такое же распределение, как \mathbf{Y} . Обозначим $\tau^{(i)}$ длину промежутка времени между $(i-1)$ -м и i -м скачками пуассоновского процесса Π , где $i \in \mathbb{N}$. Известно, что $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\tau^{(i)} \sim \text{Exp}(a)$, $i \in \mathbb{N}$.

Введем массив событий

$$B(n, m) := \left\{ \sum_{j=n}^m \mathbf{Y}^{(j)} \in \Gamma, \sum_{j=n}^l \mathbf{Y}^{(j)} \notin \Gamma, l = 1, \dots, m-1 \right\}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \geq n, \quad (3.67)$$

где множество Γ определено в (3.56).

Лемма 39. *Существуют постоянные $c > 0$ и $q \in (0, 1)$, при которых справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}(B(1, k)) \leq cq^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы построить вспомогательную марковскую цепь, напомним ряд необходимых обозначений из статьи [20]. Определим на \mathbb{Z}^d следующее отношение эквивалентности: точки $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ называются эквивалентными, если $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство обозначается

$\Upsilon := \mathbb{Z}^d/\Gamma$ и называется фундаментальным множеством вершин. Это множество всегда может быть сопоставлено некоторому множеству $\{\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(p)}\}$ попарно неэквивалентных элементов из \mathbb{Z}^d . При фиксированном выборе $\Upsilon = \{\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(p)}\}$ любая точка $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ может быть однозначно представлена в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}_\mathbf{y} + \gamma_\mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{u}_\mathbf{y} \in \Upsilon \text{ и } \gamma_\mathbf{y} \in \Gamma. \quad (3.69)$$

Число вершин p в фундаментальном множестве вершин Υ может быть найдено следующим образом. Рассмотрим множество

$$\mathcal{C} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{y} = \sum_{j=1}^d x_j \mathbf{g}_j, \quad 0 \leq x_j < 1, \quad j = 1, \dots, d \right\}.$$

Тогда p — это число точек в пересечении $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^d$. В дальнейшем остановимся на выборе $\Upsilon = \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^d = \{\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(p)}\}$ (о других вариантах выбора множества Υ см. лемму 5 в [20]), где без потери общности положим $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{0}$.

Теперь на основе случайного блуждания $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ построим вспомогательную конечную марковскую цепь $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}(t), t \geq 0\}$ со значениями в Υ , положив $\mathbf{V}(t) = \mathbf{u}_{\mathbf{S}(t)}$ для каждого $t \geq 0$ (величины $\mathbf{u}_\mathbf{y}$ определены в (3.69) для $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$). По построению марковской цепи \mathbf{V} время первого достижения множества Γ случайным блужданием \mathbf{S} равняется времени первого достижения состояния $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{0}$ марковской цепью \mathbf{V} . Поэтому согласно теореме 13.4.2 из [134], гл. 13, примененной к вспомогательной марковской цепи, существуют постоянные $c > 0$ и $q \in (0, 1)$, такие, что имеет место искомое соотношение (3.68). Заметим, что здесь существенную роль играет периодичность множества Γ , позволившая редуцировать изучение марковской цепи \mathbf{S} со счетным пространством состояний к рассмотрению конечной марковской цепи \mathbf{V} . Лемма 39 доказана. \square

Лемма 40. *Если выполнены соотношения (3.55), (3.59) и (3.60), то для каждого единичного вектора $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^d$, т.е. $\|\mathbf{U}\| = 1$, функция $m(\theta \mathbf{U}, \varphi)$ принимает конечные значения при всех θ из некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}$ и всех достаточно больших φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца и соотношения (3.68), установленного в лемме 39, при $\varphi > -a$ имеем

$$\mathbb{E} e^{-\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{S}(\tau_\Gamma^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_\Gamma^{(1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{E} e^{-\varphi \tau^{(1)}} \right)^k \mathbb{E} \exp \left\{ -\theta \left\langle \mathbf{U}, \sum_{j=1}^k \mathbf{Y}^{(j)} \right\rangle \right\} \mathbb{I}\{B(1, k)\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\varphi + a} \right)^k \left(\mathbb{E} \exp \left\{ -2\theta \left\langle \mathbf{U}, \sum_{j=1}^k \mathbf{Y}^{(j)} \right\rangle \right\} \right)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{P}(B(1,k)))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{c} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\varphi + a} \right)^k \left(\mathbb{E} e^{-2\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{Y} \rangle} \right)^{k/2} q^{k/2} = \frac{a\sqrt{c}\sqrt{q\mathbb{E}e^{-2\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{Y} \rangle}}}{\varphi + a - a\sqrt{q\mathbb{E}e^{-2\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{Y} \rangle}}} < \infty, \quad (3.70)
\end{aligned}$$

если $\frac{a}{\varphi+a}\sqrt{q\mathbb{E}e^{-2\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{Y} \rangle}} < 1$. Последнее неравенство верно при выборе φ достаточно большим, а θ близким к нулю, поскольку тогда выражение $\mathbb{E}e^{-2\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{Y} \rangle}$ конечно в силу (3.60). Более того, из соотношения (3.70) следует, что такой выбор θ и, возможно, еще большее увеличение φ ведут к справедливости неравенства

$$(\varphi + a)\mathbb{E}e^{-\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{s}(\tau_{\Gamma}^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_{\Gamma}^{(1)}} < \varphi + a + b.$$

Аналогично выводу соотношения (3.70) устанавливается конечность и среднего значения $\mathbb{E}e^{-\theta \langle \mathbf{U}, \mathbf{s}(\tau_{\Gamma}^{(0)}) - \mathbf{s}(0) \rangle - \varphi \tau_{\Gamma}^{(0)}}$ для тех же значений θ и φ . Этот факт влечет конечность функции $m(\theta \mathbf{U}, \varphi)$ при всех θ из некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}$ и всех достаточно больших φ . Лемма 40 доказана. \square

Таким образом, согласно (3.66) если в нашем ВСБ частица попала в источник ветвления, то до возможного выхода из него она ожидает время $\tau_w \sim \text{Exp}(a)$. Аналогично в силу (3.58) (см., например, [123], гл. 1, §1) время ожидания до возможного ветвления есть $\tau_{br} \sim \text{Exp}(b)$. Если $\tau_w < \tau_{br}$, что происходит с вероятностью $a/(a+b)$, то частица уйдет из источника ветвления, не оставив потомков. Если же $\tau_w > \tau_{br}$ (с вероятностью $b/(a+b)$), то в этом источнике ветвления частица произведет случайное число потомков и сразу погибнет.

Напомним, что $\tau_{\Gamma}^{(0)}$ — время первого достижения множества Γ , а $\tau_{\Gamma}^{(1)}$ — время первого возвращения в Γ частицы, совершающей случайное блуждание \mathbf{S} . Считаем, что если случайное блуждание \mathbf{S} стартует в точке из множества Γ , то $\tau_{\Gamma}^{(0)} = 0$ и $\tau_{\Gamma}^{(1)} \geq \tau^{(1)}$. Если же оно стартует в точке, не входящей в множество Γ , то $\tau_{\Gamma}^{(0)} \geq \tau^{(1)}$ и отсчет $\tau_{\Gamma}^{(1)}$ начинается в момент $\tau_{\Gamma}^{(0)}$. Обозначая промежутки времени между последующими возвращениями в Γ через $\tau_{\Gamma}^{(2)}, \tau_{\Gamma}^{(3)}, \dots$, получаем, что случайное блуждание \mathbf{S} попадает в Γ в моменты времени $\tau_{\Gamma}^{(0)}, \tau_{\Gamma}^{(0)} + \tau_{\Gamma}^{(1)}, \dots$. В отличие от нумерации $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots$ времен ожидания в точках решетки, в которые совершало скачки случайное блуждание \mathbf{S} , введем отдельную нумерацию для времен ожидания только в точках из множества Γ , в которые попадало случайное блуждание \mathbf{S} , и обозначим их $\tau_w^{(1)}, \tau_w^{(2)}, \dots$. В нашем ВСБ этим случайным величинам соответствует не зависящая от них последовательность независимых

одинаково распределенных случайных величин $\tau_{br}^{(1)}, \tau_{br}^{(2)}, \dots$. Очевидно, что траектории случайного блуждания \mathbf{S} и траектории ВСБ, если они стартовали в одной и той же точке, совпадают, пока $\tau_w^{(k)} < \tau_{br}^{(k)}$ при всех $k = 1, 2, \dots, \nu - 1$. Как только для некоторого ν будем иметь $\tau_w^{(\nu)} > \tau_{br}^{(\nu)}$, поведение ВСБ станет отличаться от поведения случайного блуждания. В ВСБ родительская частица погибает, оставляя после себя случайное число потомков, а в случайном блуждании частица продолжает перемещение по решетке \mathbb{Z}^d . Положим L равным продолжительности жизни родительской частицы в ВСБ. Тогда ясно, что

$$L = \sum_{k=0}^{\nu-1} \tau_{\Gamma}^{(k)} + \tau_{br}^{(\nu)}, \quad (3.71)$$

где $\nu := \min\{k \in \mathbb{N} : \tau_w^{(k)} > \tau_{br}^{(k)}\}$. Легко видеть, что $\nu < \infty$ с вероятностью 1. Действительно, вероятность противоположного события, т.е. когда $\tau_w^{(k)} \leq \tau_{br}^{(k)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, равна нулю, поскольку $\tau_w^{(k)}$ и $\tau_{br}^{(k)}$ независимы при любых $k \in \mathbb{N}$ и имеют экспоненциальное распределение соответственно с параметрами a и b . **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 27.** Доказательство основывается на применении теоремы А и ее следствия из статьи [85], а также их обобщений в [152], разд. 4.2. Эти утверждения формулируются для так называемого общего ВСБ по \mathbb{R}^d , описание которого мы напомним.

Общее ВСБ задается тройкой (Z, \mathbf{M}, χ) , в которой для каждой частицы процесс Z отвечает за размножение, процесс \mathbf{M} — за перемещение в пространстве, а процесс χ — за ее значимость в зависимости от возраста этой частицы при подсчете численности популяции или субпопуляции. У точечного процесса Z на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ каждая точка соответствует потомку. Первые d координат точки — это отклонение потомка в момент рождения от начального положения родительской частицы, а последняя координата — это возраст родительской частицы в момент появления данного потомка. Движение родительской частицы в пространстве описывается случайным процессом \mathbf{M} . Частица, появившаяся на свет в точке \mathbf{z} , через время t будет в точке $\mathbf{z} + \mathbf{M}(t)$. Случайная характеристика χ есть неотрицательный случайный процесс, присваивающий значимость частице в популяции в зависимости от возраста. Другими словами, $\chi(t)$ — это “вес” частицы, имеющей возраст t . Например, если мы хотим узнать численность популяции в текущий момент времени t , то нам следует использовать стандартную случайную характеристику $\chi(t) = \mathbb{I}\{0 \leq t < \ell\}$, где ℓ — продолжительность жизни

частицы, и затем по всем частицам v просуммировать случайные характеристики в точках $t - \sigma_v$, где σ_v — момент рождения частицы v . Тем самым мы получим число частиц, существующих в момент t .

Покажем, что наше ВСБ с периодически расположенными источниками ветвления может быть рассмотрено в рамках описанного общего ВСБ. Например, положим $\mathbf{M} = \mathbf{S}$, т.е. перемещение частицы происходит согласно случайному блужданию с инфинитезимальной матрицей A . Зададим точечный процесс Z . Каждая его точка имеет координаты $(\mathbf{S}(L) - \mathbf{S}(0), L)$, где продолжительность L жизни родительской частицы в нашем ВСБ удовлетворяет равенству (3.71). Число ξ таких точек случайно и имеет вероятностную производящую функцию

$$b_0(s) := \mathbb{E}s^\xi = \sum_{k=0, k \neq 1}^{\infty} \frac{b_k}{b} s^k, \quad s \in [0, 1].$$

Осталось определить случайную характеристику χ , которая в нашем случае задается стандартным образом как $\chi(t) = \mathbb{I}\{0 \leq t < L\}$, $t \geq 0$.

К так заданному общему ВСБ применим рассуждения из [152], раздел 4.2, которые являются обобщениями теоремы A и ее следствия из статьи [85]. Если мы убедимся в том, что верно равенство

$$m(\theta, \varphi) = \mathbb{E} \int e^{-\langle \theta, \mathbf{z} \rangle} e^{-\varphi t} Z(d\mathbf{z}, dt) \quad (3.72)$$

для всех $\theta \in \mathbb{R}^d$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, при которых обе части равенства определены, то указанные рассуждения влекут вывод: *асимптотическая форма* так заданного нами общего ВСБ определяется формулой

$$\left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \inf_{\theta} \{ \ln m(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle) \} \geq 0 \right\}.$$

Однако нетрудно видеть, что последнее множество и есть введенное ранее в (3.63) множество \mathcal{P} . Таким образом, мы получим результат (3.65) нашей теоремы, если проверим равенство (3.72). Заметим, что в силу леммы 40 для каждого единичного вектора \mathbf{U} существуют некоторые $\theta > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, такие, что $m(\theta \mathbf{U}, \varphi) < \infty$. Оставшаяся часть доказательства теоремы будет посвящена установлению формулы (3.72).

Как было показано выше, изучаемое ВСБ с периодически расположенными источниками ветвления может быть рассмотрено в рамках общего ВСБ, если мы зададим

тройку (Z, \mathbf{M}, χ) должным образом. Учитывая явные формулы для заданного точечного процесса Z , приходим к соотношению

$$\mathbb{E} \int e^{-\langle \theta, \mathbf{z} \rangle} e^{-\varphi t} Z(d\mathbf{z}, dt) = \mathbb{E} \xi \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(L) - \mathbf{S}(0) \rangle} e^{-\varphi L}, \quad (3.73)$$

где $\mathbb{E} \xi = 1 + \beta/b$. Согласно определению времени L имеем

$$\mathbf{S}(L) = \mathbf{S} \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} \tau_{\Gamma}^{(k)} + \tau_{br}^{(\nu)} \right) = \mathbf{S} \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} \tau_{\Gamma}^{(k)} \right).$$

Для сокращения записи будем считать, что стартовая точка ВСБ \mathbf{x} принадлежит множеству Γ . Иначе в приводимых ниже формулах возникает дополнительный индикатор

$$\mathbb{I} \left\{ \mathbf{x} + \sum_{j=1}^{k_0} \mathbf{Y}^{(j)} \in \Gamma, \mathbf{x} + \sum_{j=1}^{l_0} \mathbf{Y}^{(j)} \notin \Gamma, l_0 = 1, \dots, k_0 - 1 \right\}.$$

С ним вычисления проводятся так же, как с индикатором $\mathbb{I}\{B(1, k_1)\}$, где множество $B(1, k_1)$ введено в (3.67). Кроме того, без ограничения общности полагаем $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (напомним, что $\mathbf{0} \in \Gamma$). Рассматривая индексы $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, для $u = 1, \dots, n$ положим $K(u) := k_1 + \dots + k_u$. Следовательно, в силу (3.66) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(L) - \mathbf{S}(0) \rangle - \varphi L} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \exp \left\{ - \left\langle \theta, \mathbf{S} \left(\sum_{k=0}^n \tau_{\Gamma}^{(k)} \right) \right\rangle - \varphi \left(\sum_{k=0}^n \tau_{\Gamma}^{(k)} + \tau_{br}^{(n+1)} \right) \right\} \mathbb{I} \{ \nu = n + 1 \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{u=1}^n \left\langle \theta, \sum_{j=K(u-1)+1}^{K(u)} \mathbf{Y}^{(j)} \right\rangle - \varphi \left(\sum_{u=1}^n \sum_{j=K(u-1)+1}^{K(u)} \tau^{(j)} + \tau_{br}^{(n+1)} \right) \right\} \\ &\times \prod_{u=1}^n \mathbb{I} \{ B(K(u-1) + 1, K(u)) \} \prod_{u=1}^n \mathbb{I} \left\{ \tau^{(K(u-1)+1)} < \tau_{br}^{(u)} \right\} \mathbb{I} \left\{ \tau^{(K(n)+1)} > \tau_{br}^{(n+1)} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(\mathbb{E} e^{-\varphi \tau^{(1)}} \right)^{K(n)-n} \mathbb{E} e^{-\varphi \tau_{br}^{(n+1)}} \mathbb{I} \left\{ \tau^{(K(n)+1)} > \tau_{br}^{(n+1)} \right\} \\ &\times \prod_{u=1}^n \mathbb{E} \exp \left\{ - \left\langle \theta, \sum_{j=K(u-1)+1}^{K(u)} \mathbf{Y}^{(j)} \right\rangle \right\} \mathbb{I} \{ B(K(u-1) + 1, K(u)) \} \\ &\times \prod_{u=1}^n \mathbb{E} e^{-\varphi \tau^{(K(u-1)+1)}} \mathbb{I} \left\{ \tau^{(K(u-1)+1)} < \tau_{br}^{(u)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b}{\varphi + a + b} \left(\frac{\varphi + a}{\varphi + a + b} \right)^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(\mathbb{E} e^{-\varphi \tau^{(1)}} \right)^{K(n)} \\
&\times \prod_{u=1}^n \mathbb{E} \exp \left\{ - \left\langle \theta, \sum_{j=1}^{k_u} \mathbf{Y}^{(j)} \right\rangle \right\} \mathbb{I}\{B(1, k_u)\} \\
&= \frac{b}{\varphi + a + b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi + a}{\varphi + a + b} \right)^n \prod_{u=1}^n \sum_{k_u=1}^{\infty} \left(\mathbb{E} e^{-\varphi \tau^{(1)}} \right)^{k_u} \\
&\times \mathbb{E} \exp \left\{ - \left\langle \theta, \sum_{j=1}^{k_u} \mathbf{Y}^{(j)} \right\rangle \right\} \mathbb{I}\{B(1, k_u)\} \\
&= \frac{b}{\varphi + a + b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi + a}{\varphi + a + b} \right)^n \left(\mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{s}(\tau_{\Gamma}^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_{\Gamma}^{(1)}} \right)^n \\
&= b \left(\varphi + a + b - (\varphi + a) \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{s}(\tau_{\Gamma}^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_{\Gamma}^{(1)}} \right)^{-1}, \tag{3.74}
\end{aligned}$$

где события $B(n, m)$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, введены в (3.67) и $\varphi > -a$. Здесь мы существенно опирались на то, что множество Γ замкнуто относительно сложения и вычитания его элементов. Действительно, из этих свойств Γ следует, что $\sum_{j=1}^{K(u)} \mathbf{Y}^{(j)} \in \Gamma$, $u = 1, \dots, n$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=K(u-1)+1}^{K(u)} \mathbf{Y}^{(j)} \in \Gamma, \quad u = 1, \dots, n.$$

Более того, при установлении формулы (3.74) мы учитывали, что скачки $\mathbf{Y}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, независимы, значит, независимы и непересекающиеся наборы таких случайных скачков (см., например, лемму о группировке в [153], гл. 3, следствие 3.7). Наконец, использовалась независимость случайных векторов $\mathbf{Y}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, и времен ожидания $\tau^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$. Последнее равенство в (3.74) верно при условии

$$\frac{\varphi + a}{\varphi + a + b} \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{s}(\tau_{\Gamma}^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_{\Gamma}^{(1)}} < 1.$$

Однако это неравенство уже было установлено в лемме 40. Теперь справедливость соотношения (3.72) вытекает из формул (3.73) и (3.74). Теорема 27 полностью доказана. \square

Пример 1. Пусть $d = 1$, $g_1 = 2$, т.е. $\Gamma = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$. Предполагаем, что A представляет собой дискретный оператор Лапласа, т.е. $a(x, y)/a = 1/2$, если $|x - y| = 1$, и $a(x, y) = 0$ во всех остальных случаях. Пусть, например,

стартовая точка x есть начало координат 0. Тогда $\tau_{\Gamma}^{(1)} = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}$, а значение $S\left(\tau_{\Gamma}^{(1)}\right)$ может равняться -2 , 0 или 2 соответственно с вероятностями $1/4$, $1/2$ и $1/4$. Поэтому

$$m(\theta, \varphi) = \frac{\beta + b}{\varphi + a + b - (\varphi + a)^{-1} a^2 \operatorname{ch}^2 \theta},$$

$$\Theta_2(z) = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : a^2 \operatorname{ch}^2 \theta < (a - z\theta)^2 + b(a - z\theta), a - z\theta > 0 \right\},$$

где, как обычно, ch обозначает гиперболический косинус. Положим

$$\Theta_1^*(z) := \left\{ \theta \in \mathbb{R} : a^2 \operatorname{ch}^2 \theta \geq (a - z\theta)^2 - \beta(a - z\theta) \right\}.$$

Легко видеть, что точка $z \in \mathbb{R}$ содержится в множестве \mathcal{P} , представляющем собой асимптотическую форму ВСБ в силу установленной теоремы, тогда и только тогда, когда справедливо включение $\Theta_1^*(z) \supset \Theta_2(z)$. Заметим, что $0 \in \mathcal{P}$, поскольку $\Theta_1^*(0) = \mathbb{R}$. Пусть, например, $a = b = \beta = 1$. Существует несколько способов, чтобы с помощью системы Wolfram Mathematica найти левый и правый концы отрезка \mathcal{P} . Один из способов — рассмотрение дискретных значений z с шагом, например, 0.001 и для каждого из них проверка включения $\Theta_1^*(z) \supset \Theta_2(z)$. Тогда мы найдем левую и правую границы множества \mathcal{P} с точностью до 0.001 . Другой способ — графическое изображение на плоскости множества $\{(z, \theta) : z \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta_1^*(z)\}$, $\{(z, \theta) : z \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta_2(z)\}$ и выяснение, как соотносятся их сечения при различных фиксированных z . В итоге получаем $\mathcal{P} \approx [-1.122, 1.122]$. В терминах следствия доказанной нами теоремы имеем $r \approx 1.122$ (с точностью до 0.001).

Пример 2. Рассмотрим аналог примера 1 в двумерном пространстве ($d = 2$). Пусть $\mathbf{g}_1 = (2, 0)$ и $\mathbf{g}_2 = (0, 2)$, т.е. $\Gamma = \{(2k, 2m) : k, m \in \mathbb{Z}\}$. Считаем, что координаты вектора скачка $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ независимы и

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = 1/2, \quad i = 1, 2.$$

Стартовая точка ВСБ находится в начале координат. Тогда опять $\tau_{\Gamma}^{(1)} = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}$. Случайная величина $\mathbf{S}\left(\tau_{\Gamma}^{(1)}\right)$ принимает значения $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, -2)$ с вероятностью $1/16$, значения $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ — с вероятностью $1/8$ и значение $(0, 0)$ — с вероятностью $1/4$. Поэтому

$$E e^{-\langle \theta, \mathbf{S}(\tau_{\Gamma}^{(1)}) \rangle - \varphi \tau_{\Gamma}^{(1)}} = \frac{a^2 \operatorname{ch}^2 \theta_1 \operatorname{ch}^2 \theta_2}{(\varphi + a)^2},$$

и функция $\Theta_2(\mathbf{z})$ равна

$$\left\{ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \operatorname{ch}^2 \theta_1 \operatorname{ch}^2 \theta_2 < (a - \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} \rangle)^2 + b(a - \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} \rangle), a - \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} \rangle > 0 \right\}.$$

Пусть

$$\Theta_1^*(\mathbf{z}) := \left\{ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \operatorname{ch}^2 \theta_1 \operatorname{ch}^2 \theta_2 \geq (a - \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} \rangle)^2 - \beta(a - \langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} \rangle) \right\}.$$

Тогда из доказанной теоремы следует, что для нашего ВСБ асимптотическая форма \mathcal{P} содержит точку $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда для нее имеет место включение $\Theta_1^*(\mathbf{z}) \supset \Theta_2(\mathbf{z})$. Ясно, что $\mathbf{0} \in \mathcal{P}$, так как $\Theta_1^*(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^2$. Положим $a = b = \beta = 1$. Далее с помощью системы Wolfram Mathematica можно дискретизировать значения z_1 и z_2 с шагом, например, 0.1 и для каждой пары значений z_1 и z_2 проверять включение $\Theta_1^*(\mathbf{z}) \supset \Theta_2(\mathbf{z})$. Если оно справедливо, то помещаем точку \mathbf{z} с такими координатами в множество \mathcal{P} . Иначе следует перейти к следующей паре значений z_1 и z_2 . На основе такого алгоритма нам удалось изобразить графически множество \mathcal{P} на плоскости (см. рис. 3.1 слева).

Пример 3. Рассмотрим случай, когда в каждой точке решетки частицы могут оставлять потомство, т.е. $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Тогда $\boldsymbol{\tau}_\Gamma^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(1)}$ и $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_\Gamma^{(1)}) = \mathbf{Y}^{(1)}$. Поэтому справедливо представление

$$m(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{\beta + b}{\boldsymbol{\varphi} + b - \Psi(-\boldsymbol{\theta})},$$

где

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y} \rangle} a(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = a\left(\mathbb{E}e^{\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}^{(1)} \rangle} - 1\right), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d.$$

Заметим, что с помощью равенства (3.66) нетрудно проверить, что $\mathbb{E}e^{\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{S}(t) \rangle} = e^{t\Psi(\boldsymbol{\theta})}$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. По этой причине функцию Ψ называют логарифмической производящей функцией моментов для случайной величины $\mathbf{S}(1)$. Функция

$$\Lambda(\mathbf{z}) := \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d} (\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \Psi(\boldsymbol{\theta})), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d,$$

всегда неотрицательна и называется функцией уклонений случайной величины $\mathbf{S}(1)$ (см. [134], гл. 9, раздел 1.2). Таким образом, из нашей теоремы вытекает, что в рамках рассматриваемого примера асимптотическая форма популяции имеет вид $\mathcal{P} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \Lambda(\mathbf{z}) \leq \beta\}$. Рассмотрим частный случай, когда $d = 3$,

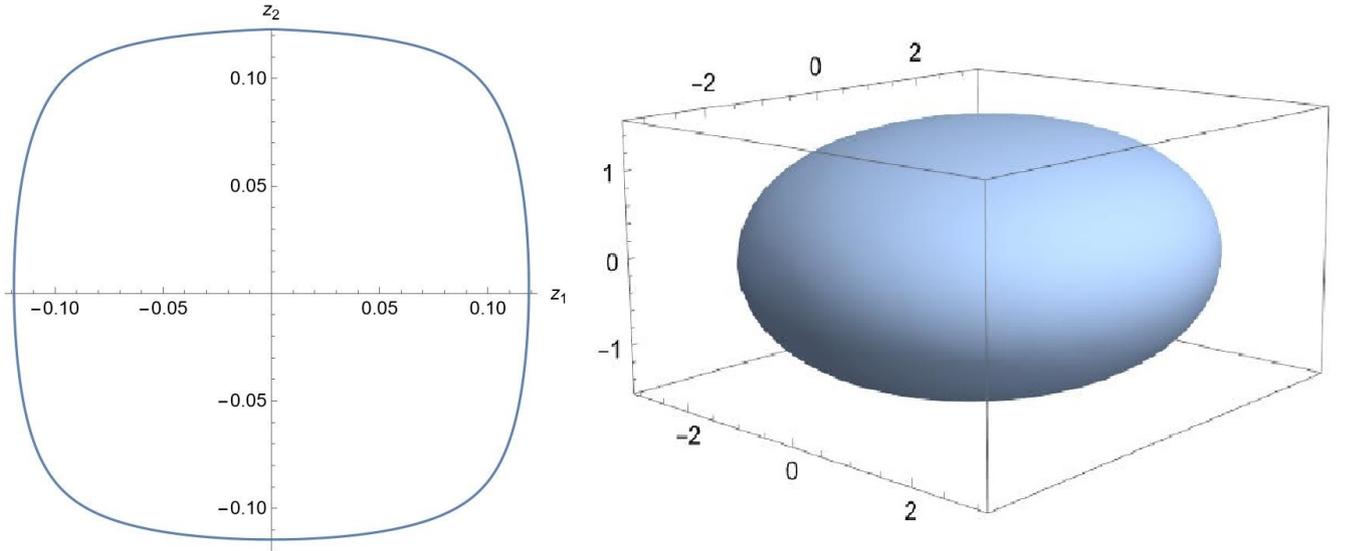


Рисунок 3.1 — Слева предельная форма фронта $\partial\mathcal{P}$ в примере 2. Справа множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ в примере 3.

а координаты вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ независимы и имеют следующие распределения:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = n) &= P(Y_1 = -n) = \frac{\rho_1^{n-1} e^{-\rho_1}}{2(n-1)!}, \\ P(Y_2 = n) &= P(Y_2 = -n) = \frac{\rho_2^{n-1} e^{-\rho_2}}{2(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ P(Y_3 = 1) &= P(Y_3 = -1) = 1/2. \end{aligned}$$

Тогда верна формула

$$\Psi(\theta) = a \frac{R(\rho_1, \theta_1)}{2} \cdot \frac{R(\rho_2, \theta_2)}{2} \cdot \text{ch } \theta_3 - a, \quad \theta \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$R(\rho, s) := e^{\rho(e^s - 1) + s} + e^{\rho(e^{-s} - 1) - s}, \quad \rho > 0 \quad \text{и} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Согласно [134], гл. 9, раздел 1.2, верхняя грань в определении функции Λ достигается в точке $\theta^* \in \mathbb{R}^d$ (т.е. справедливо соотношение $\Lambda(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \theta^* \rangle - \Psi(\theta^*)$) тогда и только тогда, когда $\mathbf{z} = \nabla \Psi(\theta^*)$. Положим $a = \beta = 1$, $\rho_1 = 0.7$ и $\rho_2 = 0.8$. График множества $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ построен нами (см. рис. 3.1 справа) на основе системы Wolfram Mathematica и с помощью описания множества \mathcal{P} параметрами $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) \in \mathbb{R}^3$.

Таким образом, в настоящей работе удалось впервые исследовать пространство популяции частиц в надкритическом ВСБ с периодическими источниками ветвления в случае, когда хвосты скачка блуждания удовлетворяют условию Крамера. Благодаря введению вспомогательного процесса стало

возможным рассмотрение указанного ВСБ как в некотором смысле однородного в пространстве процесса. Это позволило свести поставленную задачу к уже решенной для общего ВСБ. В результате доказана теорема, утверждающая асимптотически линейное (во времени) распространение популяции частиц в пространстве, и найден предельный вид облака частиц с линейно нормированными координатами. Это предельное множество \mathcal{P} называется асимптотической формой ВСБ и выражается, в частности, через совместное преобразование Лапласа времени и места первого возвращения частицы в периодическое множество Γ . В примерах 1–3 продемонстрировано, как практически можно найти \mathcal{P} для $d = 1$, $d = 2$ и $d = 3$. Соответствующие результаты представлены на рис. 3.1.

3.5 Распространение ветвящегося случайного блуждания на периодических графах

В диссертации мы также исследуем распространение популяции частиц в модели ВСБ с бесконечным множеством катализаторов, имеющим периодическую структуру, причем интенсивности катализаторов могут быть различными. Такая модель с периодически расположенными источниками ветвления была предложена в [20] и названа ВСБ на периодических графах. В отличие от статей [20; 154; 155] мы будем ставить и решать задачи не об асимптотическом по времени поведении локальных численностей частиц в ВСБ на периодических графах, а о пространственном распространении облака этих частиц с ростом времени. При этом мы не используем методы спектральной теории операторов, как в [20; 154; 155], и поэтому не предполагаем симметричности случайного блуждания.

Перейдем к точному описанию исследуемой модели. Для этого напомним необходимые обозначения. Считаем, что все рассматриваемые случайные величины определены на одном и том же полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d$ – семейство линейно независимых, не обязательно ортогональных векторов из \mathbb{R}^d с целочисленными координатами. Решетка Γ определяется как множество вида (3.56).

Считаем, что случайное блуждание $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ представляет собой марковскую цепь с непрерывным временем, которая задается инфинитезимальной матрицей $A = (a(\mathbf{y}, \mathbf{z}))_{\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d}$, обладающей следующими свойствами:

- (i) $a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq 0$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$;
- (ii) $a(\mathbf{y}, \mathbf{y}) < 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$;
- (iii) $\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$;
- (iv) $a(\mathbf{y} + \mathbf{g}, \mathbf{z} + \mathbf{g}) = a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \forall \mathbf{g} \in \Gamma$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$;
- (v) $\sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} e^{(\theta, \mathbf{g})} a(\mathbf{y}, \mathbf{z} + \mathbf{g}) < \infty$ для всех θ из некоторой окрестности точки $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ при всех $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$;
- (vi) для всех $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ существует путь $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{z}$ такой, что при каждом $i = 1, \dots, m$ верно неравенство $a(\mathbf{y}^{(i-1)}, \mathbf{y}^{(i)}) > 0$.

Свойство (iv) означает, что элементы матрицы A инвариантны относительно сдвига на любой вектор из Γ . Стоит отметить, что условие (iv) является более слабым предположением, чем требование пространственной однородности случайного блуждания, фигурирующее, например, в работах [15; 17; 20; 53; 100; 154; 155], а также в разделах 2.1–2.6 и 3.4. Согласно (v) скачок случайного блуждания \mathbf{S} удовлетворяет условию Крамера в некоторой окрестности $\mathbf{0}$, т.е. хвосты распределения скачка случайного блуждания предполагаются “легкими”. Свойство (vi) влечет неразложимость матрицы A и неприводимость марковской цепи \mathbf{S} , т.е. каждая точка из \mathbb{Z}^d достижима для случайного блуждания \mathbf{S} .

Теперь, как в доказательстве леммы 39, введем на \mathbb{Z}^d отношение эквивалентности. А именно, точки $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ эквивалентны, если $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство, которое мы обозначим $\Upsilon := \mathbb{Z}^d / \Gamma$, назовем фундаментальным множеством вершин. Этому множеству всегда можно взаимно однозначно поставить в соответствие некоторое множество $\{\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(p)}\}$ попарно неэквивалентных точек из \mathbb{Z}^d . Для фиксированного выбора $\Upsilon = \{\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(p)}\}$ любой элемент $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ может быть представлен в виде (3.69). Без ограничения общности можем считать, что $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{0}$.

Источник ветвления в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ описывается набором коэффициентов $b_k(\mathbf{y})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию

$$b_1(\mathbf{y}) \leq 0, \quad b_k(\mathbf{y}) \geq 0 \quad \text{при} \quad k \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\mathbf{y}) = 0.$$

Эта последовательность коэффициентов однозначно определяется производящей функцией

$$B(\mathbf{y}, s) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\mathbf{y}) s^k, \quad s \in [0, 1], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d.$$

Таким образом, вероятность того, что частица, попавшая в источник ветвления $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, превратится за время t в $k = 0, 1, 2, \dots$ дочерних частиц ($k = 0$ означает гибель частицы без производства потомства) есть

$$p_k(\mathbf{y}, t) = b_k(\mathbf{y})t + o(t), \quad k \neq 1, \quad \text{и} \quad p_1(\mathbf{y}, t) = 1 + b_1(\mathbf{y})t + o(t), \quad t \rightarrow 0+. \quad (3.75)$$

Далее мы предполагаем, что для каждого $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ конечна величина

$$\beta(\mathbf{y}) := B'(\mathbf{y}, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k(\mathbf{y}) < \infty. \quad (3.76)$$

Иначе говоря, считаем, что среднее число потомков одной частицы конечно. Более того, мы предполагаем, что функции $b_k(\mathbf{y})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и, следовательно, производящая функция $B(\mathbf{y}, s)$, $s \in [0, 1]$, являются Γ -периодичными по переменной $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $B(\mathbf{y} + \mathbf{g}, \cdot) = B(\mathbf{y}, \cdot)$ для любого $\mathbf{g} \in \Gamma$. Тем самым, мы имеем p различных видов источников ветвления на всей решетке \mathbb{Z}^d . При выборе $\Upsilon = \{\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(p)}\}$ положим $b_{jk} := b_k(\mathbf{z}^{(j)})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $\beta_j := \beta(\mathbf{z}^{(j)})$, $j = 1, \dots, p$. Заметим, что если в точке $\mathbf{z}^{(j)}$ нет источника ветвления, то $b_{jk} = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $B(\mathbf{z}^{(j)}, s) = 0$ при всех $s \in [0, 1]$.

Подводя итог сказанному, видим, что каждая частица, находящаяся в момент времени t в точке $\mathbf{y} = \mathbf{u}_y + \gamma_y$, где, например, $\mathbf{u}_y = \mathbf{z}^{(j)}$ для некоторого $j = 1, \dots, p$, независимо от остальных частиц может в промежутке времени $[t, t + h)$ эволюционировать следующим образом. Она может перейти в точку $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$ с вероятностью $a(\mathbf{y}, \mathbf{z})h + o(h)$, а может погибнуть или разделиться на $k > 1$ дочерних частиц, расположенных в точке \mathbf{y} , соответственно с вероятностью $b_{jk}h + o(h)$, $k \neq 1$. Также допускается, что она не претерпит никаких изменений с вероятностью

$$1 + a(\mathbf{y}, \mathbf{y})h + b_{j1}h + o(h) = 1 - \sum_{\mathbf{z} \neq \mathbf{y}} a(\mathbf{y}, \mathbf{z})h - \sum_{k \neq 1} b_{jk}h + o(h).$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется одна частица на решетке, расположенная в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Новые частицы ведут себя

согласно тем же вероятностным законам, что и родительская частица, независимо друг от друга и от предыстории процесса.

Аналогично классическим ветвящимся процессам введем случайное событие из \mathcal{F} , на котором популяция частиц выживает, и обозначим его \mathcal{I} . Согласно [20] ВСБ на периодических графах называется *надкритическим*, если положителен перронов корень ρ матрицы $M = (m_{ij})_{i,j=1}^p$, где

$$m_{ij} := \delta_{i,j} \beta_i + \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(j)} + \mathbf{g}), \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (3.77)$$

Такое определение надкритичности рассматриваемого ВСБ согласуется с приводимой ниже леммой, в которой устанавливается, что вероятность выживания $P(\mathcal{I})$ строго положительна тогда и только тогда, когда ВСБ надкритическое. Определение, данное в [20], базируется на подходе, связанном со спектральной теорией операторов, и предполагает симметричность матрицы A . Наша лемма справедлива без таких дополнительных ограничений. Заметим, что в предложении 1 в [20] даны два достаточных условия положительности перронова корня ρ матрицы M .

Далее мы будем исследовать только надкритическое ВСБ на периодических графах, поскольку вопрос о пространственном распространении облака частиц при неограниченном росте времени имеет смысл лишь для популяции, которая не вырождается.

Пусть $N(t) \subset \mathbb{Z}^d$ – случайное множество частиц в рассматриваемом ВСБ, существующих в момент времени $t \geq 0$, а $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t), \dots, X_d^v(t))$ – положение частицы v из множества $N(t)$ в момент t . Обозначим $\mathcal{P}_t := \{\mathbf{X}^v(t)/t : v \in N(t)\} \subset \mathbb{R}^d$ – случайное множество нормированных положений всех частиц, существующих в ВСБ в момент времени t .

Рассмотрим семейство неотрицательных матриц $R(\boldsymbol{\theta}, \varphi) = (R_{ij}(\boldsymbol{\theta}, \varphi))_{i,j=1}^p$ для всех значений $\boldsymbol{\theta}$, удовлетворяющих условию (\mathbf{v}) случайного блуждания, и всех значений φ таких, что $\varphi > -\min\{a^{(i)} + b^{(i)} : i = 1, \dots, p\}$. А именно, положим

$$R_{ij}(\boldsymbol{\theta}, \varphi) := \delta_{i,j} \frac{\beta_i + b^{(i)}}{\varphi + a^{(i)} + b^{(i)}} + \frac{e^{-\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}^{(j)} - \mathbf{z}^{(i)} \rangle}}{\varphi + a^{(i)} + b^{(i)}} \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma, \mathbf{g} \neq \mathbf{0}} e^{-\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g} \rangle} a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(j)} + \mathbf{g}), \quad (3.78)$$

где $a^{(i)} := -a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)})$ и $b^{(i)} := -b_{i1}$, $i = 1, \dots, p$.

Введем множество \mathcal{P} следующим образом:

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \Theta_1(\mathbf{z}) \supset \Theta_2(\mathbf{z})\}, \quad (3.79)$$

где

$$\Theta_1(\mathbf{z}) := \{\theta \in \mathbb{R}^d : r(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle) \geq 1\},$$

и пусть множества $\Theta_2(\mathbf{z})$ для $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ задаются следующим образом:

$$\left\{ \theta \in \mathbb{R}^d : \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} e^{\langle \theta, \mathbf{g} \rangle} a(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{g}) < \infty \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \{a^{(i)} + b^{(i)}\} > \langle \mathbf{z}, \theta \rangle \right\},$$

а $r(\theta, \varphi)$ – перронов корень матрицы $R(\theta, \varphi)$. Обратим внимание, что множество $\Theta_2(\mathbf{z})$ – это область определения матрицы $R(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle)$, следовательно, и ее перронова корня $r(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle)$.

Напомним, что расстояние Хаусдорфа $\Delta(D, F)$ между множествами $D, F \subset \mathbb{R}^d$ задается формулой (3.64). Теорема, формулируемая ниже, – основной результат данного раздела, показывающий, что после нормирования положений всех частиц в ВСБ на периодических графах в момент t множителем t^{-1} случайное облако частиц “стягивается” с ростом времени к предельному множеству \mathcal{P} в \mathbb{R}^d на событии выживания популяции. Мерой близости допредельного случайного нормированного облака частиц \mathcal{P}_t и так называемой *асимптотической формы* \mathcal{P} нашего ВСБ служит расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое для всех элементарных исходов $\omega \in \mathcal{I}$, кроме, возможно, подмножества события \mathcal{I} нулевой вероятности.

Теорема 28. *Пусть выполнены условия (i)–(vi) для надкритического ВСБ на периодических графах. Тогда множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ компактно, выпукло и имеет место соотношение*

$$\Delta(\mathcal{P}_t, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \quad \text{п.н. на событии } \mathcal{I} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Из этой теоремы вытекает важное следствие при $d = 1$. Согласно теореме 28 в одномерном случае множество \mathcal{P} представляет собой отрезок, а популяция частиц в ВСБ на периодических графах в момент t заключена между максимумом среди всех положений частиц в этот момент времени и соответствующим минимумом. Достаточно выписать следствие, например, для максимума $M_t := \max \{X^v(t) : v \in N(t)\}$, $t \geq 0$.

Следствие 4. *Пусть при $d = 1$ выполнены условия (i)–(vi) для надкритического ВСБ на периодическом графе. Тогда справедливо соотношение*

$$\frac{M_t}{t} \rightarrow \alpha \quad \text{п.н. на событии } \mathcal{I} \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где конечен предел $\alpha := \sup \{z \in \mathbb{R} : \Theta_1(z) \supset \Theta_2(z)\}$.

Таким образом, нами изучено распространение популяции частиц в ВСБ с бесконечным числом источников ветвления, вообще говоря, различной интенсивности, расположенных периодически. Установлено, что при надкритическом режиме в случае легких хвостов распределения скачка случайного блуждания облако частиц распространяется асимптотически линейно по времени, когда время стремится к бесконечности. Другими словами, после нормировки всех положений частиц в момент t множителем t^{-1} нормированное облако частиц стремится с ростом времени к предельному множеству \mathcal{P} , называемому асимптотической формой ВСБ (см., например, [85]). Нами найдена явная формула для описания множества \mathcal{P} , а все результаты справедливы в смысле сходимости почти наверное. Выполненное исследование дополняет результаты статей [18] и [160], доказанные для ВСБ с любым конечным числом произвольно расположенных источников ветвления. Доказательства указанных новых результатов основаны на рассмотрении ВСБ на периодических графах в рамках модели общего ВСБ с p типами частиц и применении результатов статей [85] и [152]. При этом понадобилось использовать аппарат преобразования Лапласа, вспомогательные марковские ветвящиеся процессы с p типами частиц, теорию неотрицательных и квазиотрицательных матриц, в том числе теорему Перрона–Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 28. Введем ряд дополнительных обозначений. Согласно, например, [123], гл. 1, § 1, если в нашем ВСБ частица попала в точку \mathbf{y} , для которой $\mathbf{u}_y = \mathbf{z}^{(i)}$ при некотором $i = 1, \dots, p$ (см. обозначения в (3.69)), то до возможного выхода из \mathbf{y} частица ожидает экспоненциально распределенное время $\tau_w^{(i)} \sim \text{Exp}(a^{(i)})$. Аналогично в силу (3.75) (см., например, также [123], гл. 1, § 1) время ожидания до возможного ветвления есть $\tau_{br}^{(i)} \sim \text{Exp}(b^{(i)})$. Если $\tau_w^{(i)} < \tau_{br}^{(i)}$, что происходит с вероятностью $a^{(i)} / (a^{(i)} + b^{(i)})$, то частица покидает точку \mathbf{y} , не оставив потомков. Если же $\tau_w^{(i)} > \tau_{br}^{(i)}$ (с вероятностью $b^{(i)} / (a^{(i)} + b^{(i)})$), то в точке \mathbf{y} частица произведет случайное число потомков в соответствии с вероятностной производящей функцией

$$B^{(i)}(s) := \sum_{k \neq 1} \frac{b_{ik}}{b^{(i)}} s^k, \quad s \in [0,1], \quad (3.80)$$

и сразу погибнет. Для определенности положим $B^{(i)}(s) = 0$, $s \in [0,1]$, если $b^{(i)} = 0$.

Как для классического ветвящегося процесса Бьенеме–Гальтона–Ватсона, найдем условия, при которых популяции частиц в изучаемом ВСБ выживает с положительной вероятностью.

Лемма 41. Пусть выполнены условия (i)–(vi) и (3.76). Тогда популяция частиц в ВСБ на периодических графах выживает тогда и только тогда, когда перрон корень ρ матрицы M , определенной в формуле (3.77), положителен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основе матрицы A введем новую матрицу $\tilde{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^p$ с элементами

$$a_{ij} := \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{u}_{\mathbf{y}} = \mathbf{z}^{(j)}} a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(j)} + \mathbf{g}). \quad (3.81)$$

Матричный элемент a_{ij} есть интенсивность скачка случайного блуждания \mathbf{S} из точки $\mathbf{z}^{(i)} \in \Upsilon$ в точки на \mathbb{Z}^d , эквивалентные точке $\mathbf{z}^{(j)} \in \Upsilon$.

Введем вспомогательный марковский ветвящийся процесс (с непрерывным временем) с p типами частиц. Обозначим $f_i(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in [0,1]^p$, производящую функцию числа потомков частицы типа $i = 1, \dots, p$. Положим

$$f_i(\mathbf{s}) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{ik} s_i^k + \sum_{j=1}^p a_{ij} s_j, \quad \mathbf{s} \in [0,1]^p, \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.82)$$

Ветвящийся процесс стартует с одной частицы типа $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$, если ВСБ иницировано одной частицей в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Из явного вида функции $f_i(\cdot)$ (см., например, замечание 1 в [46], гл. 1, § 5) следует, что каждая частица типа i живет случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $a^{(i)} + b^{(i)}$, затем либо погибает бездетной, либо перед гибелью производит двух и более потомков типа i , либо превращается в одну частицу типа j , если $a_{ij} > 0$, $j = 1, \dots, p$.

Согласно построению нового ветвящегося процесса мы можем трактовать частицы в ВСБ, находящиеся в момент времени t во множестве Γ , как частицы 1-го типа в многотипном ветвящемся процессе, а частицы в ВСБ, находящиеся в момент времени t в точке $\mathbf{z}^{(i)}$ и ей эквивалентных точках, как частицы типа i в построенном процессе, $i = 2, \dots, p$.

Из формул (3.82) следует, что

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right|_{\mathbf{s}=(1,\dots,1)} = \delta_{i,j} \beta_i + a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Правая часть последнего равенства совпадает с выражением (3.77) элемента матрицы M , как показывает формула (3.81). Отсюда заключаем, что M – инфинитезимальный оператор матричной полугруппы средних (см., например, [46], гл. 4, § 4) построенного марковского ветвящегося процесса с p типами частиц. Явный вид матрицы M влечет вывод, что M – матрица с неотрицательными внедиагональными элементами. Согласно определению 5 в [46], гл. 4, § 5, такие матрицы называются квазинеотрицательными. Более того, в силу неприводимости марковской цепи \mathbf{S} (см. условие (vi)) матрица M неразложима и поэтому имеет наибольшее (по действительной части) вещественное собственное значение ρ (см., например, теорему 4 в [46], гл. 4, § 6), которое называется ее перроновым корнем. Теперь, применив теорему 7 из [46], гл. 5, § 1, к построенному марковскому ветвящемуся процессу, приходим к утверждению доказываемой леммы. \square

Эквивалентная формулировка леммы 41 гласит, что популяция частиц в ВСБ на периодических графах выживает с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда рассматриваемое ВСБ является надкритическим.

Доказательство теоремы 28 основывается на применении теоремы А и ее следствия из статьи [85], а также их обобщений в разделах 4.1 и 4.2 работы [152]. Эти утверждения формулируются для так называемого общего ВСБ по \mathbb{R}^d с несколькими типами частиц. Напомним описание такой модели.

Общее ВСБ по \mathbb{R}^d с n типами частиц задается тройками $(\mathbf{Z}^{(i)}, \mathbf{M}^{(i)}, \chi^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$. Распределение тройки $(\mathbf{Z}^{(i)}, \mathbf{M}^{(i)}, \chi^{(i)})$ зависит от типа i родительской частицы. Для каждой частицы типа i векторный процесс $\mathbf{Z}^{(i)} = (Z_1^{(i)}, \dots, Z_n^{(i)})$ отвечает за размножение, $\mathbf{M}^{(i)}$ – за перемещение в пространстве, а $\chi^{(i)}$ – за ее значимость в зависимости от возраста этой частицы при подсчете численности популяции или субпопуляции. У точечного процесса $Z_j^{(i)}$ на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ каждая точка соответствует потомку, причем потомок имеет тип $j = 1, \dots, n$. Первые d координат точки – это отклонение потомка в момент рождения от начального положения родительской частицы, а последняя координата – это возраст родительской частицы в момент появления данного потомка. Движение родительской частицы в пространстве описывается случайным процессом $\mathbf{M}^{(i)}$. Частица типа j , появившаяся на свет в точке \mathbf{z} , через время t будет в точке $\mathbf{z} + \mathbf{M}^{(j)}(t)$. Случайная характеристика $\chi^{(i)}$ есть неотрицательный случайный процесс, присваивающий значимость частице типа i в популяции в зависимости от возраста. Иными словами, $\chi^{(i)}(t)$ – это “вес” частицы типа i , имеющей

возраст t . Например, если мы хотим узнать численность популяции типа i в текущий момент времени t , то нам следует использовать стандартную случайную характеристику $\chi^{(i)}(t) = \mathbb{I}\{0 \leq t < \ell^{(i)}\}$, где $\ell^{(i)}$ – продолжительность жизни частицы типа i , и затем по всем частицам v типа i просуммировать случайные характеристики в точках $t - \sigma_v^{(i)}$, где $\sigma_v^{(i)}$ – момент рождения частицы v типа i . Тем самым мы получим число частиц типа i , существующих в момент t .

Покажем, что наше ВСБ на периодических графах может быть рассмотрено в рамках описанного общего ВСБ по \mathbb{Z}^d с p типами частиц. Как и при доказательстве леммы, присваиваем частице в ВСБ на периодических графах тип i в момент времени t , если в этот момент времени она находится в точке $\mathbf{z}^{(i)}$ или ей эквивалентных точках, где $i = 1, \dots, p$. Положим $\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)}$, где $\mathbf{S}^{(i)}$ – случайное блуждание с инфинитезимальной матрицей A и стартовой точкой $\mathbf{S}^{(i)}(0)$, эквивалентной $\mathbf{z}^{(i)}$. Зададим точечный процесс $Z_j^{(i)}$. Каждая его точка имеет координаты $(\mathbf{S}^{(i)}(\ell^{(i)}) - \mathbf{S}^{(i)}(0), \ell^{(i)})$, где продолжительность $\ell^{(i)}$ жизни родительской частицы типа i в нашем ВСБ удовлетворяет равенству $\ell^{(i)} = \min\{\tau_w^{(i)}, \tau_{br}^{(i)}\}$. Если $\ell^{(i)} = \tau_w^{(i)}$ и $j \neq i$, то у родительской частицы типа i либо всего один потомок типа j с вероятностью $a_{ij}/a^{(i)}$, либо нет потомков этого типа с дополнительной вероятностью $1 - a_{ij}/a^{(i)}$. Если $\ell^{(i)} = \tau_w^{(i)}$ и $j = i$, то у родительской частицы типа i либо всего один потомок типа i с вероятностью $1 - \sum_{j \neq i} a_{ij}/a^{(i)}$, либо нет потомков типа i с противоположной вероятностью. Если же $\ell^{(i)} = \tau_{br}^{(i)}$, то родительская частица типа i дает случайное число потомков $\xi^{(i)}$ только типа i в соответствии с вероятностной производящей функцией $B^{(i)}(\cdot)$, заданной формулой (3.80). Осталось определить случайную характеристику $\chi^{(i)}$, которая в нашем случае задается стандартным образом, как $\chi^{(i)}(t) = \mathbb{I}\{0 \leq t < \ell^{(i)}\}$, $t \geq 0$, $i = 1, \dots, p$.

Введем семейство матриц

$$\tilde{R}(\theta, \varphi) = \left(\tilde{R}_{ij}(\theta, \varphi) \right)_{i,j=1}^p$$

для тех значений переменных $\theta \in \mathbb{R}^d$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, для которых элементы матриц конечны, причем каждый элемент

$$\tilde{R}_{ij}(\theta, \varphi) := \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} e^{-\langle \theta, \mathbf{z} \rangle - \varphi t} Z_j^{(i)}(d\mathbf{z}, dt)$$

представляет собой преобразование Лапласа меры интенсивности точечного процесса $Z_j^{(i)}$ (времен рождения и мест рождения потомков типа j , оставленных родительской частицей типа i).

В силу построения общего ВСБ с p типами частиц, при $i \neq j$ имеем

$$\tilde{R}_{ij}(\theta, \varphi) = \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{S}^{(i)}(\ell^{(i)}) - \mathbf{S}^{(i)}(0) \rangle - \varphi \ell^{(i)}} \mathbb{I} \left\{ \ell^{(i)} = \tau_w^{(i)}, E_{ij} \right\},$$

где $E_{ij} := \left\{ \text{точка } \mathbf{S}^{(i)}(\ell^{(i)}) \text{ эквивалентна } \mathbf{z}^{(j)} \right\}$ – случайное событие из \mathcal{F} . Заметим, что

$$\mathbb{P} \left(E_{ij} \mid \ell^{(i)} = \tau_w^{(i)} \right) = a_{ij}/a^{(i)}.$$

Случайная величина $\mathbf{S}^{(i)}(\ell^{(i)}) - \mathbf{S}^{(i)}(0)$ на событии $\{\ell^{(i)} = \tau_w^{(i)}\}$ представляет собой первый скачок случайного блуждания $\mathbf{S}^{(i)}$, который мы обозначим случайным вектором $\mathbf{Y}^{(i)}$. Поскольку у случайного блуждания величина скачка из заданной точки и время ожидания в этой точке до момента скачка независимы между собой, то в силу определения $\ell^{(i)}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij}(\theta, \varphi) &= \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{Y}^{(i)} \rangle} \mathbb{I} \left\{ \text{точка } \mathbf{z}^{(i)} + \mathbf{Y}^{(i)} \text{ эквивалентна } \mathbf{z}^{(j)} \right\} \mathbb{E} e^{-\varphi \tau_w^{(i)}} \mathbb{I} \left\{ \tau_w^{(i)} < \tau_{br}^{(i)} \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{u}_{\mathbf{y}} = \mathbf{z}^{(k)}} e^{-\langle \theta, \mathbf{y} \rangle} \mathbb{P} \left(\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{y} \right) \int_0^\infty e^{-\varphi s} a^{(i)} e^{-a^{(i)} s} e^{-b^{(i)} s} ds = \frac{a^{(i)}}{\varphi + a^{(i)} + b^{(i)}} \\ &\times \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{u}_{\mathbf{y}} = \mathbf{z}^{(k)}} e^{-\langle \theta, \mathbf{y} \rangle} \frac{a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)} + \mathbf{y})}{a^{(i)}} = \frac{e^{-\langle \theta, \mathbf{z}^{(j)} - \mathbf{z}^{(i)} \rangle}}{\varphi + a^{(i)} + b^{(i)}} \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} e^{-\langle \theta, \mathbf{g} \rangle} a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(j)} + \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (3.83)$$

где точка $\mathbf{z}^{(k)} \in \Upsilon$ эквивалентна $\mathbf{z}^{(j)} - \mathbf{z}^{(i)}$.

Диагональные (при $i = j$) элементы матрицы $\tilde{R}(\theta, \varphi)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ii}(\theta, \varphi) &= \mathbb{E} e^{-\langle \theta, \mathbf{S}^{(i)}(\ell^{(i)}) - \mathbf{S}^{(i)}(0) \rangle - \varphi \ell^{(i)}} \mathbb{I} \left\{ \ell^{(i)} = \tau_w^{(i)}, E_{ii} \right\} + \mathbb{E} \xi^{(i)} \mathbb{E} e^{-\varphi \ell^{(i)}} \mathbb{I} \left\{ \ell^{(i)} = \tau_{br}^{(i)} \right\} \\ &= \frac{1}{\varphi + a^{(i)} + b^{(i)}} \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma, \mathbf{g} \neq \mathbf{0}} e^{-\langle \theta, \mathbf{g} \rangle} a(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)} + \mathbf{g}) + \frac{\beta_i + b^{(i)}}{\varphi + a^{(i)} + b^{(i)}}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Из формул (3.83) и (3.84), а также определения (3.78) матрицы R следует, что элементы матриц $R(\theta, \varphi)$ и $\tilde{R}(\theta, \varphi)$ совпадают и конечны для всех θ , удовлетворяющих условию (\mathbf{v}) случайного блуждания, и всех $\varphi >$

– $\min \{a^{(i)} + b^{(i)} : i = 1, \dots, p\}$. Более того, свойство **(vi)** случайного блуждания, означающее неразложимость матрицы A , влечет неразложимость матриц $R(\theta, \varphi)$ при указанных θ и φ . Следовательно, согласно, например, теореме 2 в [46], гл. 4, § 5, матрица $R(\theta, \varphi)$ имеет простое положительное собственное значение $r(\theta, \varphi)$ – перронов корень, который является наибольшим по модулю среди всех собственных значений этой матрицы. В силу теоремы А и ее следствия в статье [85], а также их обобщений в разделах 4.1 и 4.2 статьи [152], мы получаем, что асимптотическая форма введенного нами общего ВСБ с p типами частиц, а, значит, и ВСБ на периодических графах, задается формулой

$$\left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \inf_{\theta} \{ \ln r(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle) \} \leq 0 \right\}.$$

Учитывая область определения перронова корня $r(\theta, \varphi)$, можем привести последнее выражение к виду определения (3.79) множества \mathcal{P} . Теорема 28 полностью доказана. \square

Завершая этот раздел, отметим, что удалось исследовать скорость распространения популяции частиц с ростом времени для модели ВСБ с бесконечным множеством периодически расположенных источников размножения и гибели частиц, причем когда интенсивности источников не обязаны совпадать. Например, в одном источнике размножения и гибели частицы могут только погибать, а в другом – только давать потомков. Учесть все различные варианты поведения частицы в зависимости от источника ветвления удалось благодаря классификации частиц на разные типы и введению вспомогательных случайных процессов: многотипного марковского ветвящегося процесса и многотипного общего ВСБ. В итоге вся информация об интенсивностях различных источников и необходимая информация о случайном блуждании аккумулирована в определенных неразложимых матрицах: квазинеотрицательной матрице M и семействе неотрицательных матриц $R(\theta, \varphi)$. Значение перронова корня ρ матрицы M характеризует режим рассматриваемого ВСБ (надкритический, критический или докритический). Через множества уровней перроновых корней $r(\theta, \varphi)$ матриц $R(\theta, \varphi)$ описывается искомое множество \mathcal{P} , представляющее собой асимптотическую форму ВСБ на периодических графах. Соответствующее \mathcal{P} оказывается пределом в смысле метрики Хаусдорфа при сходимости почти наверное (на событии невырождения популяции) линейно нормированного случайного облака частиц, когда время стремится к бесконечности. Подчеркнем, что тем самым нормированное случайное облако стремится плотно

заполнить все множество \mathcal{P} , а не только асимптотически концентрируется у его границы. Поскольку \mathcal{P} компактно и выпукло, то оно не содержит лакун, и, следовательно, лакуны не возникают в пределе и у нормированного облака частиц.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Установлены новые результаты о моментах достижения некоторых множеств марковскими цепями с непрерывным временем при наложении запретов на попадание в другие множества. Эти результаты используются в диссертации, но представляют и самостоятельный интерес.
2. Впервые введена полная классификация каталитических ветвящихся процессов, перемещение частиц в которых управляется марковской цепью с произвольным пространством состояний, а число катализаторов – любое конечное. Новая классификация обобщает предыдущие в работах В.А.Ватутина, С.А.Молчанова, В.А.Топчия и Е.Б.Яровой. Она согласуется с выполненным нами моментным анализом общих и локальных численностей частиц.
3. В наибольшей общности доказаны слабые и сильные предельные теоремы для нормированных общих и локальных численностей частиц. Обобщены, например, результаты Е.Б.Яровой, L.Doering, M.Roberts, Ph.Carmona, Y.Hu.
4. Впервые рассмотрены вероятностно-геометрические аспекты формирования фронта распространения должным образом нормированного случайного облака частиц. Показано, что в зависимости от характеристик случайного блуждания частиц асимптотическое разделение пространства на зоны, содержащую частицы (координаты которых должным образом нормируются) и свободную от них, может происходить как в смысле сильной, так и слабой сходимости. Исследованы случаи легких, умеренно тяжелых и тяжелых хвостов распределения скачка случайного блуждания по решетке \mathbb{Z}^d произвольной размерности. Наш подход отличается от предложенного в случае легких хвостов С.А.Молчановым и Е.Б.Яровой, где определение фронта дается в терминах ограниченности моментов некоторых численностей частиц.
5. Показано, что предельной формой фронта является нетривиальная поверхность в \mathbb{R}^d . Она оказывается детерминированной в случае легких хвостов и семиэкспоненциального распределения скачка блуждания, но случайной, когда хвосты правильно меняются.

6. Мы не налагаем ограничений на симметричность случайного блуждания, предполагая только его однородность, а распределение числа потомков частицы в каждом катализаторе может быть произвольным.
7. Обобщены результаты Ph.Carmona, Y.Hu о порядке флуктуаций максимума КВСБ вокруг линейного тренда как на случай произвольного числа катализаторов, так и на многомерный случай.
8. Обнаружены новые эффекты при изучении максимального расстояния, которое преодолевают частицы в вырождающемся критическом или докритическом каталитическом ветвящемся случайном блуждании.
9. Решена задача, поставленная академиком РАН А.Н.Ширяевым, о предельном поведении времени первого выхода популяции на движущуюся границу.
10. Впервые исследовано распространение фронта популяции в модели ветвящегося случайного блуждания с бесконечным множеством источников ветвления, имеющим периодическую структуру. При этом доказаны предельные теоремы в смысле сходимости почти наверное для расстояния Хаусдорфа между случайным нормированным облаком частиц и предельным множеством, называемым асимптотической формой популяции.

Таким образом, проведено целостное исследование геометрических свойств распространения популяции в пространстве и времени. С помощью сочетания разнообразной техники получен ряд приоритетных результатов в современной области теории случайных процессов, которые имеют неулучшаемый характер.

Наметим также некоторые направления дальнейших исследований, которые тесно связаны с данной диссертацией. Интересно выяснить, как происходит концентрация частиц внутри фронта распространения популяции в каталитических ветвящихся случайных блужданиях при разнообразных условиях, налагаемых на характеристики блуждания и ветвления. Для некоторых моделей ветвящихся случайных блужданиях такая проблематика затрагивалась, например, в [15] и [31]. Заметим, что даже на одномерной целочисленной решетке результаты о концентрации частиц в ветвящемся случайном блуждании не получили окончательного завершения. Перспективным является применение расстояния Хаусдорфа для описания сгущений плотности (нормированных) положений частиц, составляющих популяцию. Кроме того, не только теоре-

тическое, но и прикладное значение будет иметь исследование длительности времени достижения облаком частиц определенных множеств. Для решения упомянутых задач представляется существенным использовать сочетание разнообразной вероятностно-аналитической техники, развитой в данной диссертации.

Благодарности

Автор пользуется возможностью выразить свою признательность заведующему кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова действительному члену академии криптографии РФ профессору А. М. Зубкову и всем коллегам за творческую атмосферу в коллективе.

Автор глубоко благодарен профессору Е. Б. Яровой за полезные обсуждения, внимание к работе и постоянную поддержку. Также хочется искренне поблагодарить профессора В. А. Ватутина и профессора С. Г. Фосса за возможность решать интересные задачи в рамках работы по грантам РФФИ и РНФ, которыми они руководили.

Список обозначений и сокращений

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов

$\| \cdot \|$ – норма вектора

∂A – граница множества $A \subset \mathbb{R}^d$

∇ – градиент

$*$ обозначает операцию свертки функций, т.е., например, $p_1 * p_2 := \int_{0-}^t p_1(t-u)p_2(u) du$ для неотрицательных функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $t \geq 0$, или, другой пример, $F_1 * F_2 := \int_{0-}^t F_1(t-u) dF_2(u)$ для функций распределения F_1 и F_2 некоторых мер на $[0, +\infty)$

жирный шрифт подчеркивает, что имеем дело с, вообще говоря, векторами в многомерном пространстве

α_k – вероятность выбора ветвления частицей, находящейся в k -м источнике ветвления, в модели КВП (см. раздел 1.2) или КВСБ (см. раздел 2.1)

β_k – параметр экспоненциального распределения времени ожидания частицей в k -м источнике ветвления до ветвления или блуждания в модели КВП (см. раздел 1.2) или КВСБ (см. раздел 2.1)

$\delta_{x,y}$ – символ Кронекера

$\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ – марковская цепь с непрерывным временем (см. раздел 1.1 или 1.2)

$\mu(t)$ – общее число частиц, существующих в момент $t \geq 0$ в модели КВП (см. раздел 1.2) или КВСБ (см. раздел 2.1)

$\mu(t; y)$ – количество частиц, расположенных в точке y в момент $t \geq 0$ в модели КВП (см. раздел 1.2) или КВСБ (см. раздел 2.1)

ν – мальтусовский параметр КВП (см. раздел 1.3) или КВСБ (см. раздел 2.2)

ξ_k – случайное число потомков частицы в k -м источнике ветвления при выборе ветвления в модели КВП (см. раздел 1.2) или КВСБ (см. раздел 2.1)

$m_k := E\xi_k$ – среднее число потомков одной частицы, оставленных в точке \mathbf{w}_k в модели КВСБ (см. раздел 2.1)

$\Psi(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$, – логарифмическая производящая функция моментов для случайной величины $\mathbf{S}(1)$ (см. раздел 2.4)

$\rho(A)$ – перронов корень неразложимой матрицы A (см. раздел 1.3 и подраздел 2.4.2)

τ_x – момент первого выхода из состояния x (см. раздел 1.1)

${}_H\tau_{x,y}$ – момент первого достижения состояния y при старте из состояния x с запретом на множество H , если $x \neq y$ (см. раздел 1.1)

${}_H\tau_{x,x}$ – момент первого возвращения в состояние x с запретом на множество H (см. раздел 1.1)

${}_H\bar{\tau}_{x,y}$ – время первого достижения состояния y с запретом на множество H после выхода из стартового состояния x (см. раздел 1.1)

$\tau_{x,y} := \varnothing\tau_{x,y}$ – см. раздел 1.1

$\bar{\tau}_{x,y} := \varnothing\bar{\tau}_{x,y}$ – см. подраздел 2.4.2

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство, на котором определены все рассматриваемые в данной работе случайные элементы; пространство элементарных исходов Ω состоит из точек ω

E – математическое ожидание, т.е. интеграл по мере \mathbb{P} (см. раздел 1.2)

A^c – дополнение события A

$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \{A_n \text{ бесконечно часто}\} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ для последовательности событий $A_n \in \mathcal{F}$

B^\top – транспонирование матрицы B

F^{*k} – свертка k -го порядка функции F

$\mathbb{I}\{A\}$ – индикатор события $A \in \mathcal{F}$

I – единичная матрица, размер которой ясен из контекста

\mathbb{P}_x – знак вероятности, в котором индекс x обозначает стартовую точку либо марковской цепи η (см. раздел 1.1), либо случайного блуждания \mathbf{S} (см. раздел 2.1), либо КВСБ (см. также раздел 2.1), в зависимости от контекста

E_x – знак математического ожидания, в котором индекс x обозначает стартовую точку либо КВП (см. раздел 1.2), либо случайного блуждания \mathbf{S} (см. раздел 2.1), либо КВСБ (см. также раздел 2.1), в зависимости от контекста

$D(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ – неразложимая матрица размера $N \times N$, введенная в формуле (1.19) в разделе 1.3, при $\lambda = 0$ отвечает за классификации КВП (см. определение 1) и КВСБ (см. раздел 2.2), используется для нахождения мальтузовских параметров КВП (см. раздел 1.4) и КВСБ (см., раздел 2.2)

$E(t; \mathcal{U}) := \mathbb{P}_0(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$, $t \geq 0$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ – см. раздел 2.3

${}_H F_{x,y}(t), t \geq 0$ – (несобственная) функция распределения случайной величины ${}_H\tau_{x,y}$ (см. раздел 1.1)

${}_H \bar{F}_{x,y}(t), t \geq 0$ – (несобственная) функция распределения случайной величины ${}_H\bar{\tau}_{x,y}$ (см. раздел 1.1)

$F_{x,y}(t), t \geq 0$ – (несобственная) функция распределения случайной величины $\tau_{x,y}$ (см. раздел 1.1)

$\bar{F}_{x,y}(t), t \geq 0$ – (несобственная) функция распределения случайной величины $\bar{\tau}_{x,y}$ (см. подраздел 2.4.2)

$f_k(s) := \mathbf{E}s^{\xi_k}, s \in [0,1]$, – вероятностная производящая функция случайной величины ξ_k (см. раздел 1.2 и раздел 2.1)

$\hat{p}(\lambda) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt, \lambda \geq 0$, – преобразование Лапласа функции $p(t), t \geq 0$, (см. раздел 1.1)

$\check{F}(\lambda) := \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t} dF(t), \lambda \geq 0$, – преобразование Лапласа–Стилтьеса меры на неотрицательной полуоси, имеющей функцию распределения $F(t), t \geq 0$, (см. раздел 1.1)

$G(t) := \alpha_1 m_1 G_1(t) + (1 - \alpha_1) G_1 * \bar{F}_{0,0}(t), t \geq 0$, – см. раздел 2.3

$G_0(t) := 1 - e^{-qt}, t \geq 0$, – см. подраздел 2.5.2

$G_i(t) := 1 - e^{-\beta_i t}, t \geq 0, i = 1, \dots, N$, – см. раздел 1.3

$G_{j,k}(t) := G_j * w_k \bar{F}_{w_j, w_k}(t), t \geq 0, j, k = 1, \dots, N$, – см. формулу (1.68)

в разделе 1.6

\mathcal{I} – событие бесконечного числа посещений катализаторов в модели КВСБ (см. формулу (2.3) в разделе 2.2)

$M_t := \max\{X^v(t) : v \in Z(t)\}$ – максимум КВСБ по \mathbb{Z} в момент времени $t \geq 0$

$Z(t) \subset \mathbb{Z}^d$ – (случайное) множество частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$ (см. раздел 2.2)

\mathcal{O}_ε – множество в \mathbb{R}^d , которое с уменьшением параметра $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится заполнить все множество точек, лежащих снаружи замкнутой поверхности \mathcal{P} (см. подраздел 2.4.1)

\mathcal{P} – поверхность в \mathbb{R}^d , которая, как доказывается в теоремах 9 и 10, представляет собой предельную форму фронта распространения популяции в КВСБ (см. подраздел 2.4.1)

\mathcal{Q}_ε – множество в \mathbb{R}^d , которое с уменьшением параметра $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится заполнить все множество точек, лежащих внутри замкнутой поверхности \mathcal{P} (см. подраздел 2.4.1)

$q := -q(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ – см. раздел 2.1

$Q = (q(x, y))_{x, y \in \mathcal{S}}$ – генератор (инфинитезимальная матрица или матрица интенсивностей) марковской цепи η (см. раздел 1.1)

$Q = (q(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d}$ – генератор (инфинитезимальная матрица или матрица интенсивностей) случайного блуждания \mathbf{S} (см. раздел 2.1)

$\mathcal{R} := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d : \Psi(\mathbf{r}) = \nu\}$ – множество уровня ν для функции Ψ (см. раздел 2.4)

\mathcal{S} – не более чем счетное множество, пространство состояний марковской цепи η (см. раздел 1.1)

$\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ – случайное блуждание по \mathbb{Z}^d с непрерывным временем (см. разделы 2.1 и 2.2)

$W = \{w_1, \dots, w_N\} \subset \mathcal{S}$ – конечное множество катализаторов (источников размножения и гибели частиц или просто источников ветвления) в модели КВП (см. раздел 1.2) или КВСБ (см. раздел 2.1)

$\mathbf{X}^v(t)$ – положение частицы $v \in Z(t)$ в момент времени t в КВСБ (см. раздел 2.2)

\mathbf{Y}_i – i -й скачок случайного блуждания, явную конструкцию которого см. в разделе 2.2

КВП – каталитический ветвящийся процесс (см. раздел 1.2)

КВСБ – каталитическое ветвящееся случайное блуждание по \mathbb{Z}^d (см. раздел 2.1)

ВСБ – ветвящееся случайное блуждание

п.н. – почти наверное

т.ч. – такой, что

Список литературы

1. *А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной био-логической проблеме // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–16.
2. *Z. Shi.* Branching Random Walks // *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLII - 2012.* — Cham: Springer, 2015. — Vol. 2151 of *Lecture Notes in Math.*
3. *E. Brunet et al.* How to generate the tip of branching random walks evolved to large times // *EPL.* — 2020. — Vol. 131, no. 4. — Pp. 1–5.
4. *R. Roy.* A branching random walk in the presence of a hard wall // *J. Appl. Probab.* — 2024. — Vol. 61, no. 1. — Pp. 1–17.
5. *М.А. Лифшиц.* Циклическое поведение максимума сумм независимых величин // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2013. — Т. 412. — С. 207–214.
6. *B. Mallein.* Asymptotic of the maximal displacement in a branching random walk // *Graduate J. Math.* — 2016. — Vol. 1. — Pp. 92–104.
7. *Н.В. Смородина, Е.Б. Яровая.* Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2023. — Т. 68, № 4. — С. 779–795.
8. *Y. Shiozawa.* Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions // *Illinois J. Math.* — 2019. — Vol. 63, no. 3. — Pp. 353–402.
9. *M. Öz.* On the density of branching Brownian motion // *Hacet. J. Math. Stat.* — 2023. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 229–247.
10. *Y. Nishimori, Y. Shiozawa.* Limiting distributions for the maximal displacement of branching Brownian motions // *J. Math. Soc. Japan.* — 2022. — Vol. 74, no. 1. — Pp. 177–216.
11. *A. Bovier, L. Hartung.* Branching Brownian motion with self repulsion // *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* — 2023. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 931–956.

12. *J. Berestycki et al.* The extremal point process of branching Brownian motion in \mathbb{R}^d // *Ann. Probab.* — 2024. — Vol. 52, no. 3. — Pp. 955–982.
13. *M. Cranston et al.* Continuous model for homopolymers // *J. Funct. Anal.* — 2009. — Vol. 256, no. 8. — Pp. 2656–2696.
14. *T. Bai, P. Roussel.* Branching random walks conditioned on particle numbers // *J. Stat. Phys.* — 2021. — Vol. 185, no. 3. — Pp. 1–15.
15. *E. Chernousova, O. Hryniv, S. Molchanov.* Branching random walk in a random time-independent environment // *Math. Popul. Stud.* — 2022. — Vol. 30, no. 2. — Pp. 73–94.
16. *В.А. Ватутин, В.А. Тончий.* Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на \mathbb{Z}^d с ветвлением в нуле // *Матем. тр.* — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 28–72.
17. *A. Rytova, E. Yarovaia.* Heavy-tailed branching random walks on multidimensional lattices. A moment approach // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 2021. — Vol. 151, no. 3. — Pp. 971–992.
18. *Ph. Carmona, Y. Hu.* The spread of a catalytic branching random walk // *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* — 2014. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 327–351.
19. *R. Liu.* The spread speed of multiple catalytic branching random walks // *Acta Math. Appl. Sin., Eng. Ser.* — 2023. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 262–292.
20. *М.В. Платонова, К.С. Рядовкин.* Ветвящиеся случайные блуждания на \mathbb{Z}^d с периодически расположенными источниками ветвления // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2019. — Т. 64, № 2. — С. 283–307.
21. *J.W. Harris, S.C. Harris.* Branching Brownian motion with an inhomogeneous breeding potential // *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* — 2009. — Vol. 45, no. 3. — Pp. 793–801.
22. *S. Bocharov, S.C. Harris.* Branching Brownian motion with catalytic branching at the origin // *Acta Appl. Math.* — 2014. — Vol. 134, no. 1. — Pp. 201–228.
23. *S. Bocharov, S. Harris.* Limiting distribution of the rightmost particle in catalytic branching Brownian motion // *Electron. Commun. Probab.* — 2016. — Vol. 21, no. 70. — Pp. 1–12.

24. *L. Wang, G.W. Zong.* Supercritical branching Brownian motion with catalytic branching at the origin // *Sci. China Math.* — 2020. — Vol. 63, no. 3. — Pp. 595–616.
25. *S. Bocharov, L. Wang.* Branching Brownian motion with spatially homogeneous and point-catalytic branching // *J. Appl. Probab.* — 2019. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 891–917.
26. *С.С. Бочаров.* Флуктуации крайней правой частицы каталитического ветвящегося броуновского движения // *Труды МИАН.* — 2022. — Т. 316. — С. 79–104.
27. *Y. Nishimori.* Limiting distributions for particles near the frontier of spatially inhomogeneous branching Brownian motions // *Acta Appl. Math.* — 2023. — Vol. 184, no. 1. — Pp. 1–31.
28. *P. Mörters, P. Vogt.* A construction of catalytic super-Brownian motion via collision local time // *Stoch. Proc. Appl.* — 2005. — Vol. 115, no. 1. — Pp. 77–90.
29. *L. Döring, L. Mytnik.* Mutually Catalytic Branching Processes and Voter Processes with Strength of Opinion // *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* — 2012. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 1–51.
30. *E. Neuman, A. Schied.* Optimal portfolio liquidation in target zone models and catalytic superprocesses // *Finance Stoch.* — 2016. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 495–509.
31. *A. Getan, S. Molchanov, B. Vainberg.* Intermittency for branching walks with heavy tails // *Stoch. Dyn.* — 2017. — Vol. 17, no. 6. — Pp. 1–14.
32. *L. Koralov, B. Vainberg.* Global limit theorem for parabolic equations with a potential // *SIAM J. Math. Anal.* — 2022. — Vol. 54, no. 2. — Pp. 2097–2113.
33. *V.A. Vatutin, V.A. Topchii, E.B. Yarovaya.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers // *Theory Probab. Math. Statist.* — 2004. — no. 69. — Pp. 1–15.
34. *L. Döring, M. Roberts.* Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory // *Séminaire de Probabilités XLV.* — Heidelberg: Springer,

2013. — Vol. 2078 of *Lecture Notes in Math.* — Pp. 305–322. — Donati-Martin, C., Lejay, A., Rouault, A. (eds).
35. *К.Л. Чжун.* Однородные цепи Маркова. — Москва: МИР, 1964. — 425 с.
36. *А.М. Зубков.* Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения // *Матем. сб.* — 1979. — Т. 151, № 4. — С. 491–532.
37. *G. Latouche, V. Ramaswami.* Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling. — Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1999. — 334 pp.
38. *J.G. Kemeny, J.L. Snell, A.W. Knapp.* Denumerable Markov Chains. — 2 edition. — New York: Springer, 1976. — 484 pp.
39. *X. Xiang et al.* Taboo rate and hitting time distribution of continuous-time reversible Markov chains // *Statist. Probab. Lett.* — 2021. — Vol. 169, no. 3. — Pp. 1–8.
40. *Е.Вл. Булинская.* Времена достижения с запретом для случайного блуждания // *Матем. труды.* — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 3–26.
41. *Е.Б. Яровая.* Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве // *Теорет. и мат. физ.* — 1991. — Т. 88, № 1. — С. 25–30.
42. *V.A. Topchii, V.A. Vatutin.* Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.* — 2003. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 325–332.
43. *В.А. Ватутин, В.А. Топчий.* Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2004. — Т. 49, № 3. — С. 461–484.
44. *Е.Вл. Булинская.* Предельные теоремы для локальных численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании // *Докл. РАН.* — 2012. — Т. 444, № 6. — С. 593–596.
45. *Е. Vl. Bulinskaya.* Local particles numbers in critical branching random walk // *J. Theoret. Probab.* — 2014. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 878–898.
46. *Б.А. Севастьянов.* Ветвящиеся процессы. — Москва: Наука, 1971. — 442 с.

47. *P. Haccou, P. Jagers, V.A. Vatutin.* Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 317 pp.
48. *M. Kimmel, D. Axelrod.* Branching Processes in Biology. — 2 edition. — New York: Springer, 2015. — 300 pp.
49. *G. Kersting, V. Vatutin.* Discrete Time Branching Processes in Random Environment. — London: Wiley-ISTE, 2017. — 286 pp.
50. *G.P. Yanev, M.G. Velasco, I.M. Del Puerto Garcia.* Controlled Branching Processes. — London: Wiley-ISTE, 2018. — 240 pp.
51. *Z. Li.* Measure-Valued Branching Markov Processes. — 2 edition. — Berlin: Springer, 2023. — 475 pp.
52. *E. Horton, A.E. Kyprianou.* Stochastic Neutron Transport and Non-Local Branching Markov Processes. — Cham: Springer, 2023. — 272 pp.
53. *S. Albeverio, L.V. Bogachev, E.B. Yarovaya.* Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* — 1998. — Vol. 326, no. 9. — Pp. 975–980.
54. *S. Albeverio, L.V. Bogachev.* Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations // *Positivity.* — 2000. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 41–100.
55. *E.B. Yarovaya.* Branching random walks with several sources // *Math. Popul. Stud.* — 2013. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 14–26.
56. *K.S. Crump.* On systems of renewal equations: the reducible case // *J. Math. Anal. Appl.* — 1970. — Vol. 31, no. 3. — Pp. 517–528.
57. *Ch. J. Mode.* A multidimensional age-dependent branching process with applications to natural selection. II // *Math. Biosci.* — 1968. — Vol. 3. — Pp. 231–247.
58. *A.Y. Yakovlev, N.M. Yanev.* Relative frequencies in multitype branching processes // *Ann. Appl. Probab.* — 2009. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 1–14.
59. *G. Jones.* Calculations for multi-type age-dependent binary branching processes // *J. Math. Biol.* — 2011. — Vol. 63, no. 1. — Pp. 33–56.

60. В.А. Ватутин, В.А. Топчий. Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с долго живущими частицами // *Труды МИАН*. — 2013. — Т. 282. — С. 257–287.
61. B. Li et al. Multitype Bellman–Harris branching model provides biological predictors of early stages of adult hippocampal neurogenesis // *BMC Syst. Biol.* — 2017. — Vol. 11, no. 90. — Pp. 87–102.
62. В.А. Ватутин, В. Хонг, Я. Джуи. Редуцированные критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса для малых популяций // *Дискрет. матем.* — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 25–39.
63. S.-T.C. Moy. Extensions of a limit theorem of Everett, Ulam and Harris on multi-type branching processes to a branching process with countably many types // *Ann. Math. Statist.* — 1967. — Vol. 38, no. 4. — Pp. 992–999.
64. D. Bertacchi, F. Zucca. Characterization of critical values of branching random walks on weighted graphs through infinite-type branching processes // *J. Stat. Phys.* — 2009. — Vol. 134, no. 1. — Pp. 53–65.
65. A.D. Barbour, M.J. Luczak. Central limit approximations for Markov population processes with countably many types // *Electron. J. Probab.* — 2012. — Vol. 17, no. 90. — Pp. 1–16.
66. S. Hautphenne, G. Latouche, G.T. Nguyen. Extinction probabilities of branching processes with countably infinitely many types // *Adv. Appl. Probab.* — 2013. — Vol. 45, no. 4. — Pp. 1068–1082.
67. S. Sagitov. Linear-fractional branching processes with countably many types // *Stoch. Proc. Appl.* — 2013. — Vol. 123, no. 8. — Pp. 2940–2956.
68. В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова, В.А. Топчий. Критические процессы Гальтона–Ватсона со счетным множеством типов частиц и бесконечными вторыми моментами // *Матем. сб.* — 2021. — Т. 212, № 1. — С. 3–27.
69. D. Bertacchi et al. Extinction probabilities in branching processes with countably many types: a general framework // *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* — 2022. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 311–338.

70. *F. Comets, S. Popov.* On multidimensional branching random walks in random environment // *Ann. Probab.* — 2007. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 68–114.
71. *D. Bertacchi, F. Zucca.* Branching random walks and multi-type contact-processes on the percolation cluster of \mathbb{Z}^d // *Ann. Appl. Probab.* — 2015. — Vol. 25, no. 4. — Pp. 1993–2012.
72. *J.-F. Le Gall, S. Lin.* The range of tree-indexed random walk in low dimensions // *Ann. Probab.* — 2015. — Vol. 43, no. 5. — Pp. 2701–2728.
73. *I. Bordeu et al.* Volume explored by a branching random walk on general graphs // *Sci. Rep.* — 2019. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 1–9.
74. *M. Bauer, P.L. Krapivsky, K. Mallick.* Random walk through a fertile site // *Phys. Rev. E.* — 2021. — Vol. 103, no. 2. — Pp. 1–21.
75. *Lv. You.* Asymptotic behavior of survival probability for a branching random walk with a barrier // *AIMS Math.* — 2023. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 5049–5059.
76. *C.C. Heyde, E. Seneta.* I.J. Bienayme. Statistical Theory Anticipated. — New York: Springer, 1977. — 186 pp.
77. *А.Н. Колмогоров, Н.А. Дмитриев.* Ветвящиеся случайные процессы // *Докл. АН СССР.* — 1947. — Т. 56, № 1. — С. 7–10.
78. *В.А. Ватутин.* Ветвящиеся процессы и их применения. — Москва: МИАН, 2008. — Т. 8 из *Лекц. курсы НОЦ.* — 108 с.
79. *Е.Б. Яровая.* Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // *Матем. заметки.* — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 123–140.
80. *G.F. Lawler, V. Limic.* Random Walk: A Modern Introduction. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 364 pp.
81. *А.А. Боровков.* Асимптотический анализ случайных блужданий. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 448 с.
82. *В.Ю. Королев, Л.М. Закс, А.И. Зейфман.* О сходимости случайных блужданий, порожденных обобщенными процессами Кокса, к процессам Леви // *Информ. и ее примен.* — 2013. — Т. 7, № 2. — С. 84–91.

83. *В.И. Лотов.* О некоторых неравенствах в граничных задачах для случайных блужданий // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2020. — Т. 17. — С. 661–671.
84. *В.И. Лотов.* О точных формулах в некоторых граничных задачах для целочисленных случайных блужданий // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2023. — Т. 87, № 1. — С. 49–64.
85. *J.D. Biggins.* The asymptotic shape of the branching random walk // *Adv. Appl. Probab.* — 1978. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 62–84.
86. *J.D. Biggins.* Convergence results on multitype, multivariate branching random walks // *Adv. Appl. Probab.* — 2005. — Vol. 37, no. 3. — Pp. 681–705.
87. *V. Vatutin, J. Xiong.* Some limit theorems for a particle system of single point catalytic branching random walks // *Acta Math. Sin.* — 2007. — Vol. 23, no. 6. — Pp. 997–1012.
88. *Y. Hu, Z. Shi.* Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees // *Ann. Probab.* — 2009. — Vol. 37, no. 2. — Pp. 742–789.
89. *J.D. Biggins.* Spreading speeds in reducible multitype branching random walk // *Ann. Appl. Probab.* — 2012. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 1778–1821.
90. *М.А. Луфшиц.* Циклическое поведение максимума в иерархической схеме суммирования // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2012. — Т. 408. — С. 268–284.
91. *B. Mallein.* Maximal displacement of d -dimensional branching Brownian motion // *Electron. Commun. Probab.* — 2015. — Vol. 20, no. 76. — Pp. 1–12.
92. *P. Maillard.* The maximum of a tree-indexed random walk in the big jump domain // *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* — 2016. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 545–561.
93. *N. Gantert, Th. Höfelsauer.* Large deviations for the maximum of a branching random walk // *Electron. Commun. Probab.* — 2018. — Vol. 23, no. 34. — P. 1–12.

94. *A. Bhattacharya, R.S. Hazra, P. Roy.* Branching random walks, stable point processes and regular variation // *Stoch. Proc. Appl.* — 2018. — Vol. 128, no. 1. — Pp. 182–210.
95. *S. Ray et al.* Branching random walk with infinite progeny mean: a tale of two tails // *Stoch. Proc. Appl.* — 2023. — Vol. 160, no. 1. — Pp. 120–160.
96. *D. Buraczewski, M. Maslanka.* Large deviation estimates for branching random walks // *ESAIM: PS.* — 2019. — Vol. 23. — Pp. 823–840.
97. *P. Dyszewski, N. Gantert, T. Hofelsauer.* Large deviations for the maximum of a branching random walk with stretched exponential tails // *Electron. Commun. Probab.* — 2020. — Vol. 25, no. 72. — Pp. 1–13.
98. *X. Chen, H. He.* Lower deviation and moderate deviation probabilities for maximum of a branching random walk // *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* — 2020. — Vol. 56, no. 4. — Pp. 2507–2539.
99. *Е.Б. Яровая.* Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2010. — Т. 55, № 4. — С. 705–731.
100. *В.А. Ватутин, В.А. Топчий, Ю. Ху.* Ветвящееся случайное блуждание по решетке с ветвлением лишь в начале координат // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2011. — Т. 56, № 2. — С. 224–247.
101. *И.И. Христолюбов, Е.Б. Яровая.* Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2019. — Т. 64, № 3. — С. 456–480.
102. *Д.М. Балашова.* Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными интенсивностями источников ветвления // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2020. — Т. 23, № 1. — С. 75–88.
103. *Y. Makarova, V. Kutsenko, E. Yarovaya.* On two-type branching random walks and their applications for genetic modelling // *Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. ICSM-5 2020.* — Cham: Springer, 2021. — Vol. 371 of *Springer Proc. Math. Stat.* — Pp. 255–268. — Shiryayev, A.N., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds).

104. *E. Filichkina, E. Yarovaya*. Branching Random Walks with One Particle Generation Center and Possible Absorption at Every Point // *Mathematics*. — 2023. — Vol. 11, no. 7. — Pp. 1–16.
105. *Г.А. Попов, Е.Б. Яровая*. Укрупнение состояний ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* — 2024. — № 1. — С. 54–64.
106. *С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая*. Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным множеством центров генерации частиц // *Докл. РАН*. — 2012. — Т. 446, № 3. — С. 259–262.
107. *С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая*. Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших отклонениях случайного блуждания // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2012. — Т. 76, № 6. — С. 123–152.
108. *С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая*. Большие отклонения для симметричного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке // *Труды МИАН*. — 2013. — Т. 282. — С. 195–211.
109. *S. Harris, M. Roberts*. The many-to-few lemma and multiple spines // *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* — 2017. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 226–242.
110. *E.B. Yarovaya*. Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // *Methodol. Comput. Appl. Probab.* — 2017. — Vol. 19, no. 4. — Pp. 1151–1167.
111. *R. Durrett*. Maxima of branching random walks // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete*. — 1983. — Vol. 62, no. 2. — Pp. 165–170.
112. *А.А. Боровков, К.А. Боровков*. Асимптотический анализ случайных блужданий. Т.1. Медленно убывающие распределения скачков. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 651 с.
113. *S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary*. An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions. — 2 edition. — New York: Springer, 2013. — 168 pp.
114. *S.I. Resnick*. Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling. — New York: Springer, 2007. — 404 pp.

115. *K.B. Athreya*. On the supercritical one-dimensional age-dependent branching process // *Ann. Math. Stat.* — 1969. — Vol. 40, no. 3. — Pp. 743–763.
116. *N. Kaplan*. The supercritical multitype age-dependent branching process // *J. Math. Anal. Appl.* — 1975. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 164–182.
117. *N. Gantert*. The maximum of a branching random walk with semiexponential increments // *Ann. Probab.* — 2000. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 1219–1229.
118. *S.P. Lalley, Y. Shao*. On the maximal displacement of critical branching random walk // *Probab. Theory Relat. Fields.* — 2015. — Vol. 162, no. 1. — Pp. 71–96.
119. *E. Neuman, X. Zheng*. On the maximal displacement of subcritical branching random walks // *Probab. Theory Relat. Fields.* — 2017. — Vol. 167, no. 4. — Pp. 1137–1164.
120. *B. Klar*. On a test for exponentiality against Laplace order dominance // *Statistics.* — 2003. — Vol. 37, no. 6. — Pp. 505–515.
121. *В.А. Ватутин*. Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса. — Москва: МИАН, 2009. — Т. 12 из *Лекц. курсы НОЦ*. — 112 с.
122. *М.В. Платонова, К.С. Рядовкин*. О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке \mathbb{Z}^d с периодическими источниками ветвления // *Докл. РАН*. — 2018. — Т. 479, № 3. — С. 250–253.
123. *В. Феллер*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — 2 изд. — Москва: Мир, 1984. — Т. 2. — 751 с.
124. *E. Seneta*. Non-negative Matrices and Markov Chains. — 2 edition. — New York: Springer, 2006. — 279 pp.
125. *Ch.J. Mode*. A multidimensional age-dependent branching process with applications to natural selection. I // *Math. Biosci.* — 1968. — Vol. 3. — Pp. 1–18.
126. *I.J. Good*. The multivariate saddlepoint method and chi-squared for the multinomial distribution // *Ann. Math. Statist.* — 1961. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 535–548.

127. *Ф.Р. Гантмахер*. Теория матриц. — 5 изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с.
128. *В.А. Ватутин*. Ветвящиеся процессы с финальными типами частиц и случайные деревья // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1994. — Т. 39, № 4. — С. 699–715.
129. *D. Bertacchi, F. Zucca*. Strong local survival of branching random walks is not monotone // *Adv. Appl. Probab.* — 2014. — Vol. 46, no. 2. — Pp. 400–421.
130. *P. Brémaud*. Markov chains: Gibbs Fields, Monte-Carlo Simulation, and Queues. — New York: Springer, 1999. — 445 pp.
131. *У. Рудин*. Основы математического анализа. — 2 изд. — Москва: Мир, 1976. — 319 с.
132. *Р. Рокафеллар*. Выпуклый анализ. — Москва: Мир, 1973. — 472 с.
133. *Г. Буземан*. Выпуклые поверхности. — Москва: Наука, 1964. — 240 с.
134. *А.А. Боровков*. Теория вероятностей. — Москва: URSS, 2023. — 656 с.
135. *D.R. Cox*. Renewal Theory. — New York: Wiley, 1962. — 142 pp.
136. *М.В. Федорюк*. Асимптотика: интегралы и ряды. — Москва: Наука, 1987. — 544 с.
137. *Е.В. Яровая*. Operator equations of branching random walks // *Methodol. Comput. Appl. Probab.* — 2019. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 1007–1021.
138. *E. Seneta*. Regularly Varying Functions. — Heidelberg: Springer, 1976. — 116 pp.
139. *Е.В. Яровая*. Branching random walks with heavy tails // *Commun. Stat. - Theory Methods*. — 2013. — Vol. 42, no. 16. — Pp. 3001–3010.
140. *А.Н. Ширяев*. Вероятность – 1. — 7 изд. — Москва: МЦНМО, 2021. — 552 с.
141. *А.Г. Курош*. Курс высшей алгебры. — 7 изд. — Москва: Наука, 1965. — 431 с.

142. *Е.Б. Яровая.* Критические ветвящиеся случайные блуждания по решеткам низких размерностей // *Дискр. матем.* — 2009. — Т. 21, № 1. — С. 117–138.
143. *Е.В. Yarovaia.* Critical and subcritical branching symmetric random walks on d -dimensional lattices // *Advances in Data Analysis: Theory and Applications to Reliability and Inference, Data Mining Bioinformatics, Lifetime Data, and Neural Networks.* — Boston: Birkhauser, 2010. — Pp. 157–170. — Skiadas, С.Н. (eds).
144. *Е.Вл. Bulinskaya.* Catalytic Branching Random Walk on Three-Dimensional Lattice // *Theory Stoch. Proc.* — 2010. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 23–32.
145. *Е.Вл. Булинская.* Предельные распределения численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании // *Матем. заметки.* — 2011. — Т. 90, № 6. — С. 845–859.
146. *Е.Вл. Bulinskaya.* Limit distributions arising in branching random walks on integer lattices // *Lithuanian Math. J.* — 2011. — Vol. 51, no. 3. — Pp. 310–321.
147. *Е.Б. Яровая.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. — Москва: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. — 104 с.
148. *S.J. Wolfe.* On moments of probability distribution functions // *Fractional Calculus and Its Applications.* — Berlin: Springer, 1975. — Vol. 457 of *Lecture Notes in Math.* — Pp. 306–316. — Ross, В. (eds).
149. *Е.Вл. Булинская.* Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2010. — Т. 55, № 1. — С. 142–148.
150. *Н.Г. Брейн.* Асимптотические методы в анализе. — Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. — 246 с.
151. *М.В. Платонова, К.С. Рядовкин.* Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке \mathbb{Z}^d с периодическими источниками ветвления // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2017. — Т. 466. — С. 234–256.

152. *J.D. Biggins*. How fast does a general branching random walk spread? // *Classical and Modern Branching Processes*. — New York: Springer, 1997. — Vol. 84 of *IMA Vol. Math. Appl.* — Pp. 19–39. — Athreya, K.B., Jagers, P. (eds).
153. *O. Kallenberg*. *Foundations of Modern Probability*. — 3 edition. — New York: Springer, 2021. — 946 pp.
154. *М.В. Платонова, К.С. Рядовкин*. О дисперсии численности частиц надкритического ветвящегося случайного блуждания на периодических графах // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2019. — Т. 486. — С. 233–253.
155. *М.В. Платонова, К.С. Рядовкин*. Об асимптотическом поведении средних значений некоторых функционалов от ветвящегося случайного блуждания // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2021. — Т. 505. — С. 185–206.

Публикации автора по теме диссертации

156. *Е.Вл. Булинская.* Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков // *Труды МИАН.* — 2013. — Т. 282, № 1. — С. 69–79.
157. *E. Vl. Bulinskaya.* Finiteness of hitting times under taboo // *Statist. Probab. Lett.* — 2014. — Vol. 85. — Pp. 15–19.
158. *Е.Вл. Булинская.* Полная классификация каталитических ветвящихся процессов // *Теория вероятн. и ее примен.*— 2014. — Т. 59, № 4. — С. 639–666.
159. *Е.Вл. Булинская.* Сильная и слабая сходимость размера популяции в надкритическом каталитическом ветвящемся процессе // *Докл. РАН.* — 2015. — Т. 465, № 4. — С. 398–402.
160. *E. Vl. Bulinskaya.* Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // *Stoch. Proc. Appl.* — 2018. — Vol. 128, no. 7. — Pp. 2325–2340.
161. *Е.Вл. Булинская.* Максимум каталитического ветвящегося случайного блуждания // *УМН.* — 2019. — Т. 74, № 3. — С. 187–188.
162. *Е.Вл. Булинская.* Флуктуации фронта распространения каталитического ветвящегося блуждания // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2019. — Т. 64, № 4. — С. 642–670.
163. *E. Vl. Bulinskaya.* Multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // *Proc. of 2nd Int. Conf. Math. and Stat., Prague, Czech Republic, July 8-10, 2019.* — *ACM Int. Conf. Proc. Series.* — New York: ACM, 2019. — Pp. 6–13.
164. *E. Vl. Bulinskaya.* Isotropic multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // *Comput. Res. Model.* — 2019. — Vol. 11, no. 6. — Pp. 1033–1039.

165. *E.Vl. Bulinskaya*. On the maximal displacement of catalytic branching random walk // *Суб. электрон. матем. изв.* — 2020. — Т. 17. — С. 1088–1099.
166. *E.Vl. Bulinskaya*. Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails // *J. Theoret. Probab.* — 2021. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 141–161.
167. *E.Vl. Bulinskaya*. Catalytic branching random walk with semiexponential increments // *Math. Popul. Stud.* — 2021. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 123–153.
168. *Е.Вл. Булинская*. Время первого достижения высокого уровня каталитическим ветвящимся блужданием // *Труды МИАН.* — 2022. — Т. 316. — С. 105–112.
169. *Е.Вл. Булинская*. Распространение фронта ветвящегося случайного блуждания с периодическими источниками ветвления // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* — 2024. — № 1. — С. 31–40.
170. *Е.Вл. Булинская*. Распространение ветвящегося случайного блуждания на периодических графах // *Труды МИАН.* — 2024. — Т. 324. — С. 73–82.