

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Колотов Игорь Иванович

**Регуляризирующие алгоритмы восстановления
магнитных полей по экспериментальным данным.**

Специальность 1.3.3. — «Теоретическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Ягола Анатолий Григорьевич

Научный консультант:

к.ф.-м.н., доцент

Лукьяненко Дмитрий Витальевич

Москва — 2023

Содержание

Введение	5
1 Обзор подходов к решению обратных задач магниторазведки.	14
1.1 Обратные задачи магниторазведки	14
1.2 Намагниченность в коре планет	19
1.3 Тонкие структуры	24
2 Задача восстановления параметров намагниченности в коре планет по данным спутниковых наблюдений и магнитной восприимчивости в Земной коре.	26
2.1 Математическая модель.	26
2.2 Восстановления магнитной восприимчивости с использованием полных тензорных магнитно-градиентных данных.	30
2.3 Восстановление эквивалентного распределения намагниченности в приповерхностном слое (коре) планет.	31
2.4 Исследование единственности решения задачи восстановления распределения магнитной интенсивности для $n = 2$ диполей. . .	32
3 Локализация магнитных масс в приповерхностном слое Меркурия	40
3.1 Постановка задачи	40
3.2 Выделение высокочастотной компоненты внутреннего поля . . .	41
3.3 Восстановление приповерхностного магнитного изображения Меркурия	43
3.4 Выделение высокочастотной составляющей внутреннего магнитного поля Меркурия	43
3.5 Восстановление приповерхностного магнитного изображения Меркурия	48
4 Регуляризирующие алгоритмы и численные методы	49

4.1	Методы решения обратных некорректно поставленных задач . . .	49
4.1.1	Метод сопряжённых градиентов	51
4.1.2	Метод проекции сопряженных градиентов	52
4.1.3	Метод проекций сопряженных градиентов с проецирова- нием на множество векторов с неотрицательными ком- понентами.	56
4.1.4	Метод итерационной регуляризации с фейеровскими опе- раторами	57
4.1.5	Метод итерационной регуляризации, сохраняющий неот- рицательность решения.	60
4.2	Метод решения задачи восстановления магнитной восприимчи- вости	62
4.2.1	Конечно-разностные аппроксимации	65
4.3	Метод решения задачи восстановления параметров намагни- ченности в коре планет	66
4.3.1	Конечно-разностная аппроксимация	67
5	Численное моделирование основных характеристик магнит- ных сред	70
5.1	Результаты восстановления магнитной восприимчивости на мо- дельных данных	70
5.2	Оценка погрешностей входных данных	72
5.3	Восстановления магнитной восприимчивости по измеренным значениям градиента магнитного поля на поверхности Земли с применением различных алгоритмов	73
5.3.1	Результаты работы метода проекции сопряжённых гра- диентов на множество неотрицательных координат в про- странстве Соболева	74
5.3.2	Результаты работы алгоритма итерационной регуляри- зации с фейеровскими операторами	77

5.3.3	Результаты работы алгоритма итерационной регуляризации, сохраняющего неотрицательность.	79
5.3.4	Результаты работы метода проекции сопряжённых градиентов в пространстве функций ограниченных вариаций типа Харди	80
5.3.5	Сравнение результатов работы алгоритмов	81
5.4	Определение намагниченности породы в коре по данным космических миссий	83
5.4.1	Результаты восстановления намагниченности в коре Меркурий по данным миссии MESSENGER	84
5.4.2	Результаты восстановления намагниченности в коре Марса по данным миссии MAVEN	88
5.5	Математический эксперимент по локализации ”тонких структур”	90
6	Программный комплекс	95
6.1	Программы для предварительной обработки данных	95
6.2	Программы, решающие интегральное уравнение	96
6.3	Программа, выделяющая “высокочастотную” составляющую внутреннего магнитного поля	98
6.4	Программы для построения графиков	98
	Заключение	100
	Список литературы	102

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию проблем решения задачи восстановления параметров намагниченности в коре планет и магнитной восприимчивости в Земной коре по измеренным значениям магнитного поля и/или градиента магнитного поля. Для решения этих задач, в зависимости от известной априорной информации об изучаемом объекте, предлагаются различные численные алгоритмы, которые могут быть реализованы как на обычных компьютерах, так и на многопроцессорных системах. Техника распараллеливания позволяет производить обработку больших объемов данных, что даёт достаточно подробное описание исследуемого объекта. Разработанные алгоритмы также могут быть успешно применены для решения очень широкого класса прикладных физических задач, сводящихся как к трёхмерным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, так и к задачам меньшей размерности (в том числе для случая, когда необходимо восстановить скалярную функцию).

Актуальность темы. Решение задач по восстановлению параметров намагниченности и магнитной восприимчивости в земной коре и не только является важным для изучения глубинного строения строения планет, выявления слабых магнитных аномалий для поиска полезных, уточнения моделей магнитного поля в настоящем и проверки гипотез о существовании магнитного динамо в прошлом. Последнее особенно важно для Меркурия, у которого есть магнитное динамо. Также важна задача уточнения модели магнитного поля планет. Для ее решения необходимо выделять так называемую “коровую” составляющую магнитного поля, которая обусловлена наличием близко залегающих к поверхности плотностных магнитных неоднородностей.

Во всех реальных задачах входные данные задаются с погрешностью. Оказывается, что абсолютное большинство обратных задач, к которым сводятся прикладные задачи, являются некорректно поставленными [1, 2].

Академиком А. Н. Тихоновым в 60-х годах прошлого века была заложена

теория решения некорректных задач, основанная на понятии регуляризирующего алгоритма [1, 2]. После основополагающих работ А. Н. Тихонова [1–6], М. М. Лаврентьева [7, 8] и В. К. Иванова [9–12] теория некорректных задач была развита многими учеными в применении к разным областям науки и техники. Некоторые результаты работы отечественных и зарубежных ученых представлены в [13–38].

При решении многих современных прикладных обратных задач часто необходимо восстанавливать характеристики исследуемых объектов в пространстве, при этом эти характеристики могут являться векторными функциями. Это зачастую приводит к необходимости решать трёхмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для векторных или скалярных функций, что невозможно сделать с использованием обычных персональных компьютеров. В таких случаях обычно используются различные упрощения и допущения, которые понижают размерность решаемой задачи, но при этом дают ограниченную информацию об исследуемом объекте либо приводят к существенным ошибкам в восстанавливаемых данных исследуемых характеристик. В связи с этим наибольший интерес представляют эффективные методы решения прикладных трёхмерных обратных задач.

Прежде всего, указанные выше подходы применялись для изучения прикладных задач геофизики. Геофизика представляет собой комплекс наук, охватывающий широкий круг исследований - от изучения физических свойств вещества планеты и их пространственного распределения, до моделирования и реконструкции реальных физико-химических процессов, протекающих в недрах Земли. Выводы о глубинном строении земных недр возможны благодаря тому, что наблюдаемые на поверхности Земли поля зависят от пространственного распределения свойств вещества в глубинных ее частях. По заданному распределению тех или иных физических свойств вещества Земли и/или по заданным характеристикам источника можно теоретически предсказать ожидаемые значения соответствующих физических полей. Такие задачи, называемые прямыми задачами геофизики, имеют свою специфику в

зависимости от природы полей. Построение же распределения физических параметров вещества Земли и/или параметров источника по значениям поля в некоторой части среды представляет собой обратную задачу геофизики. На ранних этапах развития геофизики обратные задачи ставились и решались весьма примитивно. По сути, они сводились к выбору одной из двух или из небольшого числа моделей среды, для которой рассчитанные значения характеристик поля лучше, чем для других, согласовывались с соответствующими наблюдаемыми значениями. Недостатки такого подхода очевидны. Прежде всего, нет никакой гарантии, что среди альтернативных моделей среды окажется именно та, которая отражает истинное строение Земли. Далее, остаются неразрешенными вопросы: достаточна ли разрешающая способность исходных данных, чтобы различить выбранные модели; позволяют ли наблюдения произвести большую детализацию структуры; в каком смысле понимать лучшее или худшее согласие теоретических данных с наблюдениями; как погрешность наблюдений скажется на погрешности искомой модели среды; как наиболее оптимальным образом организовать поиск модели, отвечающей наблюдениям, и т.д [39].

Необходимость ответа на эти и другие вопросы и привела к разработке методов решения обратных задач. Этому же способствовала возможность использования в геофизике быстродействующих ЭВМ, ибо решение обратных задач требует чрезвычайно большого объема вычислений. Развитие методов решения обратных задач происходило по разным направлениям в зависимости от того, какому из аспектов придавалось большее значение. К настоящему времени можно уже сформулировать общие принципы постановки обратных задач и требования, предъявляемые к их решению, определить место каждого из существующих методов и указать их взаимосвязь [39].

Цель работы. Разработка моделей численных методов и комплексов программ для восстановления эквивалентных по внешнему полю параметров намагниченности в коре планет и магнитной восприимчивости в Земной коре, опираясь на измеренные с помощью спутников значения магнитного поля,

либо градиентов магнитного поля, измеренных с помощью сверхпроводящих квантовых интерференционных устройств (SQUIDS).

Для выполнения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

1. Реализован и распараллелен метод минимизации функционала Тихонова для поиска значений скалярной функции в задаче магниторазведки.
2. Для решения задачи восстановления магнитной восприимчивости на реальных данных были реализованы и распараллелены три метода: проекции сопряжённых градиентов на множество неотрицательных координат, алгоритма итерационной регуляризации с фейеровскими операторами и итерационный алгоритм с сохранением неотрицательности компонент.
3. С помощью реализованных алгоритмов решена задача восстановления магнитной восприимчивости на реальных данных. Благодаря априорно известному диапазону значений магнитной восприимчивости были проинтерпретированы полученные результаты.
4. На основе метода сопряжённых градиентов предложен алгоритм решения задачи по восстановлению намагниченности в коре планет.
5. На основе восстановленных параметров намагниченности была решена прямая задача и восстановлены значеная магнитной индукции на сфере, окружающей Меркурий.
6. С помощью разложения Гаусса—Ми из восстановленных при решении прямой задачи значений магнитного поля была выделена высокочастотная внутренняя составляющая магнитного поля.
7. Благодаря восстановлению внутренней составляющей магнитного поля в качестве входных данных, была решена задача по локализации “тонких структур”.

Методы исследования. Работа выполнена с применением методов математической геофизики, функционального анализа, теории обратных и некор-

ректных задач, методов математического моделирования и прикладного программирования.

Научная новизна. Разработаны новые методы и подходы для обработки и интерпретации реальных геофизических данных, а также межпланетных миссий.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен и реализован в виде комплекса программ алгоритм решения прикладных трёхмерных обратных задач восстановления параметров намагниченности и магнитной восприимчивости в коре планет по измеренным значениям магнитного поля, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной и скалярной функций с использованием многопроцессорных систем.
2. Для частного случая доказана единственность решения задачи восстановления распределения интенсивностей магнитных диполей.
3. Разработанные алгоритмы решения обратной задачи магниторазведки апробированы на модельных и реальных задачах в трёхмерных областях и показали свою эффективность.

Практическая значимость. Описанные в работе методы решения применимы к линейным обратным задачам, встречающимся как при исследовании магнитного поля Земли, так и для изучения магнитных полей других планет. Разработанные в данной работе комплексы программ позволяют решать реальные прикладные трёхмерные обратные задачи.

Публикации Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях [40–42] в рецензируемых журналах из баз данных Scopus и Web of Science и четыре тезиса конференций [43–46].

Личный вклад автора.

1. Для решения задачи восстановления магнитной восприимчивости исходное уравнение математической модели была выписана система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода для магнитных и градиентных данных. Получены выражения для ядер этих уравнений.
2. Автором сформулирована и доказана теорема единственности решения задачи восстановления распределения интенсивностей магнитных диполей для случая двух диполей и произвольного расположения сенсоров в пространстве.
3. Разложение Гаусса—Ми для каждой фиксированной точки пространства выражено через скалярные потенциалы в сферической системе координат.
4. Программы, решающие интегральные уравнения математической модели, реализованы автором на языке C и распараллелены с помощью библиотеки MPI.
5. Реализован скрипт на языке Python3, который находит коэффициенты разложения Гауссу—Ми.
6. На языке Python3 реализованы скрипты для подготовки данных для передачи в основные программы-решатели и скрипты для построения графиков.
7. Присущие каждой из решаемых задач априорные ограничения, такие как неотрицательность магнитной восприимчивости парамагнетиков и равенство значений параметров намагниченности по меридиану и на полюсах в задаче восстановления параметров намагниченности, выписаны автором в виде математических выражений и встроены в программный комплекс.
8. Проведена обработка экспериментальных данных, включая спутниковые.

В работах, опубликованных в соавторстве, основополагающий вклад принадлежит соискателю.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференциях:

1. Марчуковские научные чтения-2021 (Новосибирск, 2021);
2. IX международная научная конференция «современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова (Стерлитамак, 2021);
3. Всероссийская научно-практическая конференция “Обратные задачи и математические модели” (Бирск, 2021);
4. Международная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А.Г.Костюченко (Уфа, 2021);
5. Евразийская конференция по прикладной математике (Новосибирск, 2021);
6. The 6th International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications (CIPA), Шеньчжень, Китай, 22-26 июля 2022;
7. Вычислительная математика и приложения, Сочи, Россия, 1-5 августа 2022;
8. 8-я Международная конференция “Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения” (QIPA 2022), Сочи, Сириус, Россия, 22-26 августа 2022;
9. Всероссийская научно-практическая конференция, посвященная памяти профессора Усманова Салават Мударисовича “Обратные задачи и математические модели”, Бирск, Башкортостан, Россия, 16 сентября 2022;

Краткое содержание работы. В первой главе представлен краткий обзор результатов предыдущих лет, на основе которых написана данная работа.

Во **второй главе** подробно описана постановка задачи восстановления параметров намагниченности, которая заключается в восстановлении вектора намагниченности и следующая из неё задача восстановления магнитной восприимчивости, распределённых в коре планеты, по измеренным значениям магнитного поля или градиентов магнитного поля на некотором расстоянии от поверхности. Приведена система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода для векторной функции и скалярной функции. Сформулирована и доказана теорема о единственности решения задачи восстановления распределения интенсивностей магнитных диполей для случая двух диполей и произвольного расположения сенсоров в пространстве.

В **третьей главе** подробно изложен метод локализации “тонких структур” в коре Меркурия на основе решённой ранее задачи восстановления эквивалентного распределения намагниченности.

В **четвёртой главе** рассмотрены методы регуляризации решения поставленной некорректной задачи. Первый метод основан на минимизации функционала Тихонова с последующим выбором параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки с учетом априорных ограничений. Минимизация функционала Тихонова осуществлялась сначала с помощью метода сопряженных градиентов на модельных данных, затем, уже на реальных данных, методом сопряженных градиентов с проекцией на множество неотрицательных координат. В обоих случаях задача решалась в пространстве Соболева. В целях численного эксперимента задача была решена методом сопряженных градиентов с проекцией на множество неотрицательных координат в пространстве функций ограниченных вариаций типа Харди [47, 48]. Для решения задачи восстановления эквивалентного распределения намагниченности в коре планет применялся обычный метод сопряженных градиентов. Также в работе рассмотрены ещё два итерационных алгоритма решения некорректно поставленных задач: алгоритм итерационной регуляризации с фейеровскими операторами и метод итерационной регуляризации, сохраняющий неотрицательность. Демонстрируются результаты модельных расчётов и обработки

экспериментальных данных.

В **пятой главе** приведены результаты работы алгоритмов и описаны процессы отбора приближённых решений на основе априорной информации. Восстановлены магнитные портреты Марса и Меркурия.

В **шестой главе** представлено описание программного комплекса.

1 Обзор подходов к решению обратных задач магнито-разведки.

1.1 Обратные задачи магниторазведки

Магниторазведка является одним из наиболее эффективных методов интерпретации геофизических данных. Высокочувствительные приборы позволяют выявлять очень слабые магнитные аномалии районов развития осадочных пород, что дает возможность применять этот метод для решения задач поиска нефти и газа. Однако с увеличением точности измерений возрастает влияние помех и осложнений, затрудняющих геологическое истолкование результатов магнитной съемки.

Напомним некоторые понятия, известные из курса общей физики. Магнитное поле обнаруживается по действию на электрические токи и постоянные магниты. В свою очередь, проводники с током создают в окружающем пространстве магнитное поле. Магнитное поле можно характеризовать вектором магнитной индукции \mathbf{B} или вектором напряженности магнитного поля \mathbf{H} . В системе СИ магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H},$$

где μ_0 — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды.

Но, как известно, всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает магнитное поле \mathbf{B}' , которое налагается на обусловленное токами поле \mathbf{B}_0 . Оба поля дают в сумме результирующее поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}_0.$$

Намагничение магнетика естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью. Мы будем обозначать ее через \mathbf{M} . Магнитный момент контура с током выражается по

формуле

$$j = S \mathbf{i} \mathbf{n},$$

где S — площадь фигуры, ограниченной контуром с током, \mathbf{i} — сила тока в контуре, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости контура. Понятно, что для одной и той же плоскости можно выбрать два противоположных вектора, нормальных к этой плоскости. Для контура с током направление нормали находится по правилу буравчика (винта): при вращении буравчика в направлении тока вектор \mathbf{n} совпадает с направлением поступательного движения буравчика.

В прикладной геофизике обычно имеют дело с относительными магнитными измерениями. При этом значения одного или более элементов магнитного поля в любой точке выражаются в виде их разностей со значениями в опорных точках, выбранных подходящим образом.

Для определения аномалии земного магнитного поля необходимо знать его характер в невозмущенном состоянии. С весьма хорошим приближением регулярное геомагнитное поле можно представить как поле диполя, расположенного в центре Земли и имеющего магнитный момент, направленный в сторону Южного географического полюса. В настоящее время считается, что магнитное поле Земли вызывается токами в жидком ядре Земли. Значения магнитного поля измеряются в А/м ($2000 * 10^{-6}$ ед. СГС). На поверхности Земли напряженность магнитного поля составляет 40 А/м, но сильно зависит от географического положения и наличия различных магнитных аномалий, которые могут в разы изменять силу поля. Проекции силовых линий геомагнитного поля на поверхность Земли образуют магнитные меридианы. В любой точке на земной поверхности вектор магнитного поля, как любой трехмерный вектор, полностью определяется своей длиной и двумя углами. Конечно, эти два угла можно ввести различными способами. Обычно используются склонение D (угол между магнитным и географическим меридианами) и наклонение I (угол между вектором и его горизонтальной проекцией). Таким образом, если вектор \mathbf{F} в декартовой системе координат может быть

записан как (X, Y, Z) , то горизонтальная компонента H , склонение D и наклонение I таковы:

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad D = \arctan\left(\frac{Z}{H}\right), \quad I = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Вертикальная компонента Z считается положительной, если направлена вниз, как в Северном полушарии, и отрицательной, если направлена вверх, как в Южном полушарии. Точки на земной поверхности, в которых $I = \pm 90^\circ$, называются Северным и Южным магнитными полюсами [49].

Математические модели в магниторазведки, связывающие плотность магнитного момента ограниченного тела и его магнитную индукцию достаточно хорошо известны [50–53]. Менее распространены математические модели магниторазведки, связывающие объёмную (или поверхностную) плотность магнитного момента тела с полным тензором градиентов компонент магнитного поля (ГКМП), измеряемым в некоторой удаленной от тела области [54–59]. Китайские коллеги автора вместе со своими коллегами из Института геологии и геофизики Китайской академии наук установили [60, 61], что тензор градиентов компонент магнитного поля в таких моделях обладает большей чувствительностью к тонкой структуре распределения магнитного момента, чем сама магнитная индукция. Поэтому измерения компонент тензора ГКМП представляются более перспективными для интерпретации магнитных полей с помощью решения обратных задач.

Модели, включающие тензор ГКМП, могут быть рассмотрены в различных вариантах: линейных и нелинейных, непрерывных и дискретных, для двумерных и трехмерных магнитных полей. Все эти модели порождают обратные задачи нахождения плотности магнитного момента по тензору ГКМП в различных постановках задачи. Одной из наиболее перспективных для интерпретации постановок является следующая: необходимо обратить полные магнитно-градиентные данные в трёхмерной области с целью восстановления объёмной намагниченности [62]. Подобная обратная задачи магнитостатики описывается операторным уравнением первого рода, которое в общем случае представляет собой некорректно поставленную задачу. Она может как иметь

неединственное решение, так и не иметь классического решения вообще. При этом она, как правило, неустойчива по отношению к ошибкам измерения входных данных (компонент тензора ГКМП). Эти трудности преодолеваются с помощью применения специальных методов решения таких некорректно поставленных задач — регуляризирующих алгоритмов (РА). Важнейшим классом регуляризирующих алгоритмов является семейство вариационных РА. Наиболее известен из них метод метод, основанный на минимизации функционала А. Н. Тихонова. Параметр регуляризации может быть выбран по обобщенному принципу невязки.

Основная особенность постановки задачи, рассмотренной в [62], заключается в том, что рассматриваемая обратная задача является физически переопределённой. Классическая постановка задачи, заключающаяся в восстановлении магнитного момента тела по результатам измерения индуцированного им поля на некотором удалении от этого тела является определённой, так как предполагает восстановление одной векторной функции по результатам измерений также одной векторной функции. Либо, принимая во внимание факт, что каждая компонента векторной функции является скалярной функцией, требуется восстановить три скалярные функции по результатам измерения трёх скалярных функций (данная постановка приводит к системе из трёх уравнений с тремя неизвестными функциями). Учет установленных соотношений между плотностью магнитного момента и полным тензором ГКМП позволяет нам вывести дополнительные уравнения, связывающие компоненты неизвестной векторной функции с полным тензором градиентного магнитного поля. В итоге получаем 5 дополнительных уравнений. В результате мы получаем физически переопределённую задачу, заключающуюся в восстановлении 3-х неизвестных скалярных функций по результатам экспериментальных измерений других 8-ми скалярных функций (подробности данной постановки рассмотрены в [62]).

Однако, если имеется априорная информация об индуцированном Землёй магнитном поле в области расположения исследуемого в задаче тела, обрат-

ную задачу поиска векторной функции магнитного момента можно заменить на обратную задачу поиска скалярной функции магнитной восприимчивости. Намагниченные материалы характеризуются вектором намагничивания \mathbf{M} , линейно зависящим от приложенного магнитного поля \mathbf{H}_0 , если отсутствуют ферромагнитные материалы:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_0,$$

где χ — магнитная восприимчивость.

В случае восстановления магнитной восприимчивости физическая перепределённость модели будет более высокой, чем в модели, рассмотренной в работе [62]: необходимо найти одну скалярную функцию по результатам экспериментальных измерений 8-ми других скалярных функций.

Отметим, что магнитная восприимчивость чисто диамагнитных материалов отрицательна, а для парамагнитных материалов χ положительна. Другими словами, в диамагнитных материалах индуцированное магнитное поле стремится уменьшить наложенное поле, в то время как в парамагнитных материалах индуцированное поле стремится увеличить наложенное поле.

Большинство минералов ведут себя, как диамагнитные или парамагнитные материалы. Это свойство зависит от поведения электронов, вращающихся внутри атомов различных минералов. При этом электроны выстраиваются вдоль или против наложенного магнитного поля. Таким полем может быть собственное магнитное поле Земли. Редкие материалы проявляют свойство ферромагнетизма — сильной магнитной поляризации, которая появляется в случаях, когда большие группы атомов, называемые магнитными доменами, согласованно самоориентируются, вызывая значительное усиление магнитного поля. Самым распространённым ферромагнитным материалом является магнетит, поэтому в большинстве случаев магнитная восприимчивость горной породы определяется содержащимся в ней магнетитом. Восприимчивость ферромагнитных материалов может достигать 10^6 , из-за этого в ферромагнитных материалах наложенное поле может драматически возрасти. Такие материалы часто ассоциируют с рудными залежами. Поэтому магнитные ано-

малии являются хорошими индикаторами рудных месторождений [63].

В данной работе не рассматриваются ферромагнитные среды и осуществляется локализация парамагнитных веществ.

1.2 Намагниченность в коре планет

Применимость описанного в предыдущем пункте подхода не ограничивается только лишь обратными задачами геофизики. Исследование магнитных полей планет является одним из способов получения информации о внутренней структуре планеты и её эволюции. Доступ к информации о магнитных полях планет стал возможен благодаря появлению и развитию межпланетных миссий. Первые результаты измерения магнитного поля Марса были получены в 1965 году US mission Mariner 4, который обнаружил отсутствие глобальной магнитосферы Марса. В 1970-х годах Марс 2, 3, 5 и позже Фобос 2 обнаружили достаточно малое магнитное поле величиной примерно 60 нТ в окрестности экватора и 120 нТ в окрестности полюса [64]. В 1996 году к Марсу был отправлен аппарат миссии MGS (Mars Global Surveyor) с магнетометром-рефлектометром на борту [65]. Благодаря этому аппарату были получены данные о магнитном поле Марса на различных высотах над поверхностью Марса. Эти данные позволили решать обратные задачи по восстановлению таких физических параметров как намагниченность [66, 67]. Было обнаружено, что кора Марса местами достаточно сильно намагничена. Из этого был сделан вывод, что, хотя Марс сейчас и не имеет глобального магнитного поля, возможно он имел активное магнитное динамо ранее [68]. В связи с этим моделирование остаточного магнитного поля является важной задачей для изучения глубинного строения Марса и для проверки моделей магнитного динамо Марса в прошлом. В последнем случае это даёт возможность создателям моделей магнитного динамо верифицировать свои модели и проверить что будет после того, как оно исчезнет, — совпадёт ли предсказанное этими моделями распределение остаточной намагниченности в коре Марса с наблюдаемыми в наши дни значениями. Экспериментальные данные миссии MGS

позволили получить первичную оценку глобального распределения источников магнитного поля в коре планеты [69, 70].

Самые свежие исследования базируются на данных экспериментальных наблюдений [71] миссии MAVEN (NASA's Mars MAVEN orbiter [72] приступил к работе в 2014 году). Множество методов, разработанных для исследования магнитного поля Земли, могут быть применены и для исследования магнитного поля Марса (см., например, [66, 67]). Широко распространённые ранее подходы к моделированию локальных (сильно намагниченные южные высокогорья с сильными магнитными аномалиями, достигающими 1500 нТл на высоте 200 км) [73–75] и глобальных областей распределения магнитного поля, индуцированных остаточный магнетизм Марсианской коры, разделялись на модели “spherical harmonic expansions” [76, 77] и модели “equivalent source” [78, 79]. Современные модели магнитного поля коры [80, 81] учитывают набор данных магнитометра MAVEN на высоте около 135 км [65]. Это связано с тем, что данные полученные уже упомянутым выше магнитометром MGS в основном распределены на орбите высотой 370-430 km, некоторые данные доступны на высоте 90-170 km. Поэтому в указанных работах использовалась только часть данных миссии MAVEN с целью сопоставления результатов, полученных на основе данных магнитометра MAVEN, с результатами, полученными ранее на основе данных магнитометра MGS.

В разделе 2 мы описываем модель, основанную на восстановлении параметров намагниченности по традиционным магнитным данным, которые представляют собой напряженность магнитного поля (MI) [66, 67]. Далее, в разделе 2.3 мы используем эту модель для восстановления эквивалентного распределения параметров намагниченности в приповерхностном слое (коре) Марса. Этот подход аналогичен подходу Д. Зидарова [82] — методикой “выметания” источников полей из многомерной области пространства на её границу. На примере исследования гравитационного поля Марса было показано [83, 84], что распределение двумерных носителей на плоскости под поверхностью Марса напоминает очертаниями само поле. Поэтому рассматри-

ваемый нами подход к восстановлению эквивалентного распределения источников магнитного поля является обнадеживающим. Предложенный алгоритм применяется для обработки магнитных данных миссии MAVEN на всех высотах. Полученные результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Приложения предложенного в данной работе метода не ограничиваются одним лишь Марсом. За последние 40 лет объем информации об объектах Солнечной системы значительно увеличился. Произошло это благодаря межпланетным миссиям, таким как Mariner-10, Messenger и BepiColombo. В частности, Маринер-10 позволил исследователям сделать вывод о внутреннем происхождении магнитного поля Меркурия [85–91].

Меркурий — ближайшая к Солнцу планета, обладающая целым рядом особенностей. Одной из таких особенностей является достаточно сильное магнитное поле, которое в то же время похоже на земное из-за наличия динамо. Миссия Messenger позволила изучить поверхность Меркурия, историю геологического развития, химический состав и магнитосферу [92–94]. Роль этого космического аппарата в изучении Меркурия очень велика: данные, присланные Messenger на Землю, свидетельствуют о существовании жидкой части ядра планеты [95–98], в отличие от существовавшей до 1970-1990-х годов гипотезы о наличии в ядре Меркурия только твердой фазы [99]. Токи во внешнем (жидком) ядре создают внутреннее магнитное поле Меркурия. Выяснилось [97], что магнитный экватор находится в северном полушарии планеты, и этот факт послужил основой для моделирования внутреннего поля Меркурия как единичного дипольного поля. Значение дипольного момента Меркурия приведено в [97]. Оказалось, что угол наклона диполя по отношению к оси вращения планеты невелик: он составляет около 0,8 градуса. Также изучались временные вариации магнитного поля Меркурия [100].

Магнитное поле ближайшей к Солнцу планеты имеет очень сложную структуру: есть составляющая, создаваемая движением горячей проводящей жидкости внутри ядра, а также составляющая плазменного поля в окружающем

Меркурий пространстве. Однако рассматривать эти “составляющие” по отдельности нельзя: поле ядра активно взаимодействует с солнечным ветром. Магнитосфера Меркурия содержит области пересоединения, ударные волны и так называемые “магнитопаузы”. Удивительным свойством магнитосферы Меркурия можно считать наличие своеобразных вихрей, которые образуются за счет взаимодействия внутреннего поля с солнечным ветром.

Многие исследователи пытаются построить аналитические модели как “суммарного” магнитного поля, включающего поле жидкого ядра [101] и поле магнитных масс, находящихся в коре Меркурия, так и отдельных компонентов магнитной индукции [102]. Подход, основанный на разложении физических полей в ряд сферических гармоник [103], продуктивен, когда измерения охватывают планету в глобальном масштабе [104, 105]. Если измерения более разбросаны и доступны только для определенных регионов планеты, то сферические гармоники тоже могут быть полезны, но при наложении дополнительных условий на коэффициенты разложения и проведении процедуры регуляризации [106–108].

Так называемые локальные методы используются и при построении аналитических моделей планетарных полей [109–111]. Если рассматривать компоненты поля литосферного происхождения, то можно применить метод дискретных дипольных моментов [79, 111–114]. Этот метод очень популярен уже около 40 лет [115]. Некоторые авторы [116] находят мультипольные моменты при разложении в ряд по сферическим гармоникам магнитного поля, создаваемого произвольным распределением токов в среде. Предполагается, что магнитных масс вне токов нет. Отдельно стоит отметить, что соленоидальные поля, к которым относится внешнее магнитное поле Меркурия, можно представить как суперпозицию полоидальной и тороидальной составляющих [116, 117].

Некоторые исследователи пытаются описать магнитное поле Меркурия как поле дипольных, квадрупольных и октупольных моментов. Сигнал, соответствующий компоненте магнитного поля, сначала пропускают через узко-

полосный фильтр по методу Сарона'а. Таким образом, выделяются отдельные компоненты спектра магнитного поля.

Выявленные особенности в структуре магнитного поля Меркурия накладывают ряд ограничений на построение модели магнитного динамо этой планеты, по сравнению с известными моделями палеодинамо Марса [104, 118–125].

В начале 2000-х был предложен весьма конструктивный подход, основанный на методе линейных интегральных представлений [126–129], что является в некотором смысле обобщением метода интегральных уравнений. С использованием различных вариантов метода линейных интегральных представлений получены аналитические аппроксимации различных физических полей Земли и Марса [83, 84, 130–132]. Метод линейных интегральных представлений позволяет находить устойчивые приближенные решения обратных задач геофизики даже при ограниченной информации об изучаемых элементах глобального или аномального поля, при наличии в исходных данных помех различной природы. Основная идея метода состоит в представлении поля в виде простого и двойного слоев, распределенных на некоторых носителях (размерность носителей может принимать значения от одного до четырех), а также в виде интегралов Радона и Фурье.

Метод интегральных представлений весьма эффективен при решении различных линейных, а в ряде случаев и нелинейных обратных задач геофизики. В рамках этого метода по конечному набору линейных функционалов восстанавливаются распределения источников магнитных, гравитационных, электрических и других физических полей планет. *Априорная* информация об аномальных геофизических полях используется максимально полно. Высокая точность приближенных решений достигается даже при обработке разнородных приповерхностных и спутниковых данных, измеренных с разной точностью. Следует подчеркнуть, что функции, зависящие от бесконечного числа параметров, могут быть определены путем решения некоторой (в общем случае плохо обусловленной) конечной системы линейных алгебраиче-

ских уравнений. Таким образом, реальные геофизические постановки сводятся к семейству положительно-полуопределенных систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной одной или несколькими правыми частями.

В данной работе для восстановления параметров намагниченности Меркурия мы будем использовать подход [53,62,133–135], апробированный авторами ранее в статье [41] при реконструкции магнитного изображения Марса.

1.3 Тонкие структуры

За последние 10-20 лет объем информации о физических полях Меркурия увеличился на несколько порядков. Благодаря различным автоматическим спутниковым миссиям (таким как Mariner and MESSENGER, [85, 86, 88–90, 93, 95–97, 100, 136]) исследователи смогли получить высококачественные данные спутниковых наблюдений. Качество данных было обусловлено в первую очередь тем, что специфика орбит космических аппаратов обеспечила получение экспериментальных данных, распределённых в трёхмерном пространстве. Это позволило решать достаточно сложные задачи по определению различных физических параметров планеты.

Как уже было отмечено в работе автора [41], результаты обработки данных дистанционного зондирования небесных тел используются при уточнении моделей внутреннего строения планет Солнечной системы. Запущенный в рамках совместной японо-европейской программы космический аппарат BepiColombo должен достигнуть Меркурия в 2025 году, и тогда знания о ближайшей к Солнцу планете будут дополнены качественно новой информацией [94]. В наше время исследователи считают, что Меркурий “устроен” приблизительно так, как это описано, например, в работах [91,99]. Однако новые космические миссии могут подтолкнуть ученых к пересмотру устоявшихся моделей относительно внутренней структуры этой загадочной планеты. Это связано с тем, что модели физических полей корректируются при появлении новых массивов данных после запуска каждой очередной межпланетной

миссии. На данный момент основной акцент в исследованиях делается на различных подходах к интерпретации основных составляющих полей и их высокочастотных компонент.

Магнитное поле Меркурия не является стационарным. Наличие у планеты магнитного динамо (как это было установлено благодаря данным MESSENGER [137]) обуславливает весьма сложный характер взаимодействия внутреннего магнитного поля с солнечным ветром, представляющим собой потоки заряженных частиц. При построении аналитических моделей магнитного поля планет, в том числе и Меркурия, применяются как “изолированные” разложения сигналов в ряд по сферическим гармоникам [79,113], так и комбинированные представления компонент магнитного поля в виде суммы полоидальной и тороидальной составляющих — так называемое представление Mie [137]. Для построения уточненных моделей магнитного поля планет необходимо выделить так называемую “коровую” составляющую, которая обусловлена наличием близко залегающих к поверхности плотностных магнитных неоднородностей [79,84,111,114,116,129,130,132,138–140]. Таким образом восстановление приповерхностного магнитного изображения Меркурия является актуальной задачей. При этом отдельно следует отметить важность разделения полей, создаваемых носителями, залегающими на разных глубинах. Вдали от поверхности планеты “коровая” составляющая магнитного поля выглядит как помеха, имеющая малую амплитуду по сравнению с зависящей от времени трендовой компонентой. Поэтому столь актуальными представляются новые эффективные регуляризирующие алгоритмы, которые позволяют получать устойчивое к случайным помехам во входных данных приближенное решение обратной задачи магниторазведки [40, 53, 62, 133–135].

2 Задача восстановления параметров намагниченности в коре планет по данным спутниковых наблюдений и магнитной восприимчивости в Земной коре.

В данной главе излагаются результаты, описанные в публикациях автора [40–42].

В работе рассмотрены три метода решения обратной задачи восстановления магнитной восприимчивости с использованием полных тензорных магнитно-градиентных реальных данных. Один из них является вариационным, остальные два итерационными. Данная задача сводится к решению системы трёхмерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, которое связывает магнитную восприимчивость ограниченного тела с полным тензором градиентов компонент магнитного поля.

2.1 Математическая модель.

Уравнение, определяющее напряжённость магнитного поля \mathbf{H}_{field} , индуцированного объектом с распределением намагниченности $\mathbf{M}(x, y, z)$ и локализацией в области V , имеет вид [63, 141]:

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \nabla_s \iiint_V \left(\nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) dv. \quad (1)$$

Здесь $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ — расстояние между точкой $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$, в которой расположен измеряющий поле \mathbf{H}_{field} сенсор s , и точкой $\mathbf{r} = (x, y, z)$ области V , в которой расположен магнитный источник с суммарным магнитным моментом на единицу объёма вещества $\mathbf{M}(\mathbf{r})$; $\nabla_s \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial z_s} \right)$ — оператор вычисления градиента по переменным с индексом s .

Представим намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ области V в следующем виде

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = |\mathbf{M}(\mathbf{r})| \mathbf{l}, \quad (2)$$

где $\mathbf{l} \equiv (l_x, l_y, l_z)$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ в точке \mathbf{r} , $|\mathbf{M}(\mathbf{r})|$ — величина этого поля в точке \mathbf{r} .

Подставив (2) в (1), получим

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \nabla_s \iiint_V \left(\nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, |\mathbf{M}(\mathbf{r})| \mathbf{l} \right) dv. \quad (3)$$

Учитывая, что $(\nabla_s u, \mathbf{l}_s) \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}_s}$, перепишем (3) в виде

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \nabla_s \iiint_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_s} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv. \quad (4)$$

Поменяв местами операторы ∇_s и $\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_s}$, перепишем (4):

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_s} \nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv.$$

Принимая в расчёт, что

$$\nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3},$$

получим

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_s} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_s} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} = \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3},$$

получим интегральное уравнение

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{field}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv$$

с ядром \mathbf{K}_{field} имеющим вид

$$\mathbf{K}_{field}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) = \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3}.$$

Преобразовав $\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s)$ к виду

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) &= H_x(\mathbf{r}_s)\mathbf{i} + H_y(\mathbf{r}_s)\mathbf{j} + H_z(\mathbf{r}_s)\mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv \right) \mathbf{k},\end{aligned}$$

и переобозначив переменные как $i = x, y, z$ и $p = (p_x, p_y, p_z) = (x_s, y_s, z_s)$, мы можем записать выражения для компонент вектора $\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s)$ в следующем виде:

$$H_i(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(i - p_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv.$$

Вычисляя производные от H_i по пространственным переменным $i = x, y, z$ и $j = x, y, z \neq i$, можно прийти к следующим выражениям для диагональных и недиагональных элементов тензора градиентов компонент напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_{tensor} :

$$\begin{aligned}H_{ii}(\mathbf{r}_s) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(i - p_i)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_x(i - p_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv, \\ H_{ij}(\mathbf{r}_s) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(i - p_i)(j - p_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_x(j - p_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3l_y(i - p_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv.\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что мы определили полный тензор градиентов компонент напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_{tensor} , который в отличие от напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_{field} (характеризующейся 3-мя компонента-

ми) имеет 9 компонент и может быть записан в следующей матричной форме:

$$\mathbf{H}_{tensor} = [H_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} & \frac{\partial H_y}{\partial y} & \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{\partial H_z}{\partial y} & \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} & H_{xz} \\ H_{yx} & H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zx} & H_{zy} & H_{zz} \end{bmatrix},$$

где $\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x}$, $\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$ и $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$. Это приводит к тому, что мы имеем 5 различных компонент матрицы тензора.

В результате мы приходим к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv, \\ \mathbf{H}_{tensor}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv, \end{cases} \quad (5)$$

где $\mathbf{H}_{field} = [H_x \ H_y \ H_z]^T$ и $\mathbf{H}_{tensor} = [H_{xx} \ H_{xy} \ H_{xz} \ H_{yz} \ H_{zz}]^T$, а ядра интегральных уравнений \mathbf{K}_{MI} и \mathbf{K}_{MGT} имеют вид

$$\mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_x(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_x(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_x(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_z(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \end{bmatrix}.$$

2.2 Восстановления магнитной восприимчивости с использованием полных тензорных магнитно-градиентных данных.

Если имеется априорная информация об индуцированном Землёй магнитном поле в области расположения исследуемого в задаче тела, обратную задачу поиска векторной функции магнитного момента можно заменить на обратную задачу поиска скалярной функции магнитной восприимчивости. Запишем зависимость вектора намагниченности \mathbf{M} от вектора напряжённости внешнего магнитного поля \mathbf{H}^0 и преобразуем это выражение в зависимость вектора намагниченности от вектора магнитной индукции внешнего поля \mathbf{B}^0 :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \frac{\chi}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) = \frac{\chi}{\mu_0(1 + \chi)} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где χ - магнитная восприимчивость и $|\chi| \ll 1$ для диа- и парамагнетиков, μ_0 - магнитная постоянная, а $\mu = 1 + \chi$ - магнитная проницаемость в системе СИ.

Разложим функцию

$$f(\chi) = \frac{1}{1 + \chi}$$

из выражения (6) в ряд Маклорена по переменной $|\chi| \ll 1$. Получим

$$\frac{1}{1 + \chi} = 1 - \chi + 2\chi^2 - 6\chi^3 + \dots$$

Подставив разложение выше в формулу (6) и, отбросив все члены разложения выше первого, приходим к соотношению

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \approx \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Измерения внешнего магнитного поля проводятся над поверхностью Земли. Магнитная проницаемость воздуха близка по своему значению к единице, поэтому для нашего случая выполнено следующее соотношение $\mathbf{H}_{field} \approx \mathbf{B}_{field}/\mu_0$ согласно (7) и выражение (1) можно переписать для магнитной индукции:

$$\frac{\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s)}{\mu_0} = \nabla_s \iiint_V \left(\nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, \frac{\mathbf{B}^0(\mathbf{r})}{\mu_0} \right) dv. \quad (8)$$

Таким образом, систему (5) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s) = \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) \chi(\mathbf{r}) dv, \\ \mathbf{B}_{tensor}(\mathbf{r}_s) = \iiint_V \mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) \chi(\mathbf{r}) dv, \end{cases} \quad (9)$$

где $\mathbf{B}_{field} = [B_x \ B_y \ B_z]^T$ и $\mathbf{B}_{tensor} = [B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$, а ядра интегральных уравнений \mathbf{K}_{MI} и \mathbf{K}_{MGT} имеют вид

$$\mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) = |\mathbf{B}^0| \begin{bmatrix} \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) = |\mathbf{B}^0| \begin{bmatrix} \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_x(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_x(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_x(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_z(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \end{bmatrix}.$$

2.3 Восстановление эквивалентного распределения намагниченности в приповерхностном слое (коре) планет.

Для удобства перепишем уравнение (1) в виде

$$\mathbf{B}_{field}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dv, \quad (10)$$

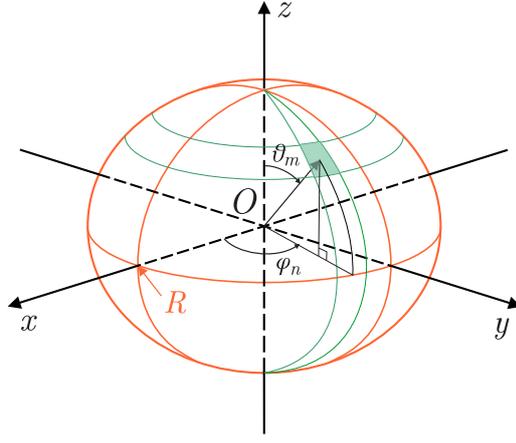


Рис. 1: Рассматриваемые при решении задачи системы координат.

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{MI}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) &= \\
 &= \frac{1}{r^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - r^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - r^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - r^2 \end{bmatrix}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Здесь, для сокращения записи, мы используем обозначение:

$$r \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}.$$

В дополнение к используемой по умолчанию декартовой системе координат рассмотрим также и сферическую систему координат (см. рис. 1):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases} \quad (12)$$

где $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Здесь R — средний радиус планеты.

2.4 Исследование единственности решения задачи восстановления распределения магнитной интенсивности для $n = 2$ диполей.

В данном пункте автор анализирует возможность нахождения единственного решения задачи восстановления распределения магнитной интенсивности для системы из n диполей в зависимости от пространственного распреде-

ления сенсоров, с помощью которых осуществляются измерения магнитного поля. К сожалению, исследовать такую задачу в самом общем случае достаточно сложно, поэтому автор ограничился случаем количества диполей $n = 2$, при условии, что расположение сенсоров известно.

Запишем уравнение поля одного диполя

$$\mathbf{B}_{field\ dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{r} &= (x - x_s) \mathbf{i} + (y - y_s) \mathbf{j} + (z - z_s) \mathbf{k}, \\ r &= \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2} \end{aligned}$$

Величина r — расстояние между точкой (x_s, y_s, z_s) , соответствующей расположению сенсора, который измеряет магнитное поле $\mathbf{B}_{field\ dipole}$, и точкой (x, y, z) , где расположен диполь \mathbf{m} , μ_0 — магнитная восприимчивость вакуума.

Выражение (13) можно переписать в следующем виде

$$\mathbf{B}_{field\ dipole} = \mathbf{K}_{MI}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) \mathbf{m}.$$

Далее, переобозначим $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$, где $\bar{\mathbf{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m}$.

Рассмотрим сначала более простой случай из двух сенсоров и двух диполей

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, y_s^1, z_s^1, x^1, y^1, z^1) \mathbf{m}^1 + \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, y_s^1, z_s^1, x^2, y^2, z^2) \mathbf{m}^2 = \mathbf{B}_{field}(x_s^1, y_s^1, z_s^1), \\ \mathbf{K}_{MI}(x_s^2, y_s^2, z_s^2, x^1, y^1, z^1) \mathbf{m}^1 + \mathbf{K}_{MI}(x_s^2, y_s^2, z_s^2, x^2, y^2, z^2) \mathbf{m}^2 = \mathbf{B}_{field}(x_s^2, y_s^2, z_s^2). \end{cases} \quad (14)$$

Предположим, что в некоторой декартовой системе (см. рис. 2) пусть диполи и сенсоры расположены на оси X следующим образом: координаты первого диполя $(x^1 = x_0 > 0, y^1 = 0, z^1 = 0)$, координаты второго диполя $(x^2 = -x_0, y^2 = 0, z^2 = 0)$, координаты первого сенсора $(x_s^1 = x_s^1, y_s^1 = 0, z_s^1 = 0)$, координаты второго сенсора $(x_s^2 = x_s^2, y_s^2 = 0, z_s^2 = 0)$, где для определённости $x_s^2 > x_s^1$ и $x_s^1 > x_0$.

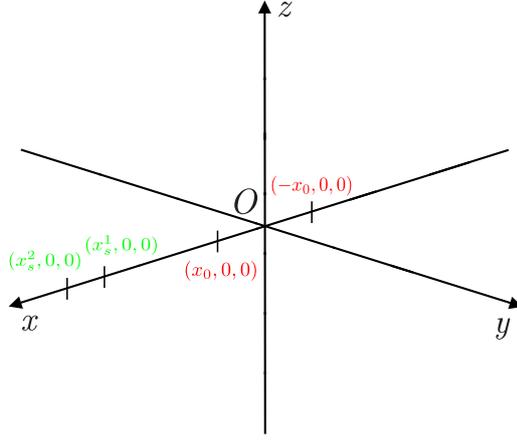


Рис. 2: Расположение диполей и сенсоров в рассматриваемой задаче.

Выпишем матрицу системы (14). Сначала введём следующие обозначения

$$\mathbf{K}_{1,1} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, 0, 0, x_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2(|x_0 - x_s^1|)^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -(|x_0 - x_s^1|)^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -(|x_0 - x_s^1|)^{-3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{1,2} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, 0, 0, -x_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2(x_0 + x_s^1)^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -(x_0 + x_s^1)^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -(x_0 + x_s^1)^{-3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{2,1} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^2, 0, 0, x_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2(|x_0 - x_s^2|)^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -(|x_0 - x_s^2|)^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -(|x_0 - x_s^2|)^{-3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{2,2} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^2, 0, 0, -x_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2(x_0 + x_s^2)^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -(x_0 + x_s^2)^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -(x_0 + x_s^2)^{-3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица системы (14) имеет вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для исследования системы (14) на единственность решения необходимо определить ранг матрицы (15). Введём следующие обозначения: $a = (|x_0 -$

$x_s^1)^{-3}$, $b = (x_0 + x_s^1)^{-3}$, $c = (|x_0 - x_s^2|)^{-3}$ и $d = (x_0 + x_s^2)^{-3}$. Тогда матрица (15) равна

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -b \\ 2c & 0 & 0 & 2d & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & -d \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Методом исключения Гаусса приведём матрицу (16) к верхнетреугольному виду

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 2(d - \frac{c}{a}b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d + \frac{c}{a}b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d + \frac{c}{a}b \end{bmatrix}.$$

Легко доказать, что равенство $-d + \frac{c}{a}b = 0$ имеет место только если $x_s^1 = x_s^2$, а это противоречит заданным условиям. Таким образом ранг матрицы (15) равен шести, то есть система (14) имеет единственное решение.

Теперь перейдём к исследованию более общего случая с произвольным количеством сенсоров. Пусть l — количество сенсоров и $l > 2$. В этом случае получаем следующую переопределённую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, y_s^1, z_s^1, x^1, y^1, z^1)\mathbf{m}^1 + \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, y_s^1, z_s^1, x^2, y^2, z^2)\mathbf{m}^2 = \mathbf{B}_{field}(x_s^1, y_s^1, z_s^1), \\ \dots \\ \mathbf{K}_{MI}(x_s^l, y_s^l, z_s^l, x^1, y^1, z^1)\mathbf{m}^1 + \mathbf{K}_{MI}(x_s^l, y_s^l, z_s^l, x^2, y^2, z^2)\mathbf{m}^2 = \mathbf{B}_{field}(x_s^l, y_s^l, z_s^l). \end{cases} \quad (17)$$

Матрица системы (17) имеет вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, y_s^1, z_s^1, x^1, y^1, z^1) & \mathbf{K}_{1,2} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^1, y_s^1, z_s^1, x^2, y^2, z^2) \\ \mathbf{K}_{2,1} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^2, y_s^2, z_s^2, x^1, y^1, z^1) & \mathbf{K}_{2,2} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^2, y_s^2, z_s^2, x^2, y^2, z^2) \\ \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{l,1} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^l, y_s^l, z_s^l, x^1, y^1, z^1) & \mathbf{K}_{l,2} = \mathbf{K}_{MI}(x_s^l, y_s^l, z_s^l, x^2, y^2, z^2) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

Система (17) исследуется на единственность псевдорешения. Псевдорешением системы (17) является решение системы нормальных уравнений, которое всегда существует для конечномерного случая, но может быть не единственным [49]. Введём следующие обозначения: $\mathbf{m} = [(\mathbf{m}^1)^T, (\mathbf{m}^2)^T]^T$ и $\mathbf{B}_{field} = [\mathbf{B}_{field}(x_s^1, y_s^1, z_s^1)^T, \dots, \mathbf{B}_{field}(x_s^l, y_s^l, z_s^l)^T]^T$. Тогда система нормальных уравнений будет иметь следующий вид

$$\hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{m} = \hat{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}_{field}. \quad (19)$$

Исследуем систему (19) на единственность решения. Для этого необходимо найти ранг матрицы $\hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{K}}$. Как уже отмечалось выше исследовать матрицу $\hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{K}}$ при произвольном расположении сенсоров и диполей достаточно трудно. Более того, автором даже для простейшего случая $n = 2$, $l = 2$ были найдены конфигурации расположения сенсоров и диполей, при которых система (14) имеет не единственное решение. Например, в некоторой декартовой системе координат пусть диполи расположены на оси X следующим образом: координаты первого диполя ($x^1 = x_0 > 0, y^1 = 0, z^1 = 0$), координаты второго диполя ($x^2 = -x_0, y^2 = 0, z^2 = 0$), а сенсоры расположены на оси Z так: координаты первого сенсора ($x_s^1 = 0, y_s^1 = 0, z_s^1 = z_1$), координаты второго сенсора ($x_s^2 = 0, y_s^2 = 0, z_s^2 = z_2$). Этот случай будет рассмотрен ниже.

Докажем следующую теорему

Теорема 2.1. Пусть:

1. В некоторая декартовой системе координат задана система из $n = 2$ диполей с координатами первого диполя ($x^1 = x_0 > 0, y^1 = 0, z^1 = 0$), второго диполя ($x^2 = -x_0, y^2 = 0, z^2 = 0$) и $l > 2$ сенсоров.

2. Координаты сенсоров не совпадают с координатами диполей.

3. У двух из l сенсоров координаты равны $(x_s^1 = x_s^1 > 0, y_s^1 = 0, z_s^1 = 0)$ и $(x_s^2 = x_s^2 > 0, y_s^2 = 0, z_s^1 = 0)$ и $x_s^2 > x_s^1 > x_0$.

Тогда нормальная система (19) будет иметь единственное решение для любого расположения оставшихся $(l - 2)$ -х сенсоров при выполнении условия 2).

Доказательство. С учётом условий теоремы рассмотрим систему уравнений (17) с матрицей (18). Переставим блоки матрицы (18) так чтобы блокам $\mathbf{K}_{1,1}, \mathbf{K}_{1,2}, \mathbf{K}_{2,1}, \mathbf{K}_{2,2}$ соответствовали указанные в условии теоремы сенсоры. Как уже было доказано ранее составленная из блоков $\mathbf{K}_{1,1}, \mathbf{K}_{1,2}, \mathbf{K}_{2,1}, \mathbf{K}_{2,2}$ матрица является невырожденной и имеет ранг 6. Так как матрица (18) имеет размер $3l \times 6$ и $l > 2$, то матрица из блоков $\mathbf{K}_{1,1}, \mathbf{K}_{1,2}, \mathbf{K}_{2,1}, \mathbf{K}_{2,2}$ является базисным минором матрицы (18). Следовательно матрица $\hat{\mathbf{K}}$ (18) также имеет ранг 6. Поскольку $\ker \hat{\mathbf{K}} = \ker \hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{K}}$ [49], то ранг матрицы $\hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{K}}$ равен 6. Таким образом, система (19) имеет единственное решение независимо от расположения остальных $(l - 2)$ -х сенсоров. \square

В заключение этого параграфа рассмотрим указанную выше конфигурацию с неединственным распределением интенсивностей магнитных диполей. Пусть в некоторой декартовой системе координат пусть диполи расположены на оси X следующим образом: координаты первого диполя $(x^1 = x_0 > 0, y^1 = 0, z^1 = 0)$, координаты второго диполя $(x^2 = -x_0, y^2 = 0, z^2 = 0)$, а сенсоры расположены на оси Z так: координаты первого сенсора $(x_s^1 = 0, y_s^1 = 0, z_s^1 = z_1)$, координаты второго сенсора $(x_s^2 = 0, y_s^2 = 0, z_s^1 = z_2)$ (см. рис. 3).

Матрица $\hat{\mathbf{K}}$ для этой конфигурации будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{bmatrix},$$

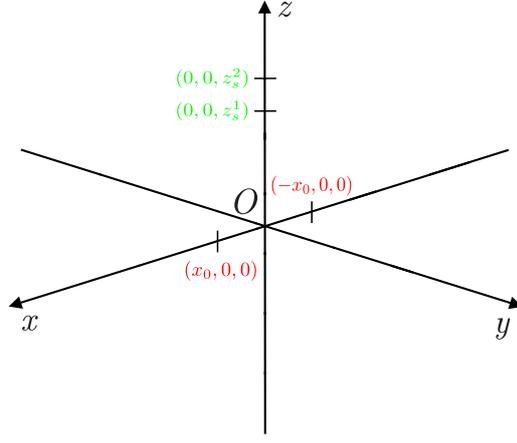


Рис. 3: Расположение диполей и сенсоров в рассматриваемой задаче.

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{1,1} &= \mathbf{K}_{MI}(0, 0, z_s^1 = z_1, x_0, 0, 0) = [r_{1,1}^2 = x_0^2 + z_1^2] = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(3x_0^2 - r_{1,1}^2)}{r_{1,1}^5} & 0 & \frac{-3z_1 x_0}{r_{1,2}^5} \\ 0 & \frac{-1}{r_{1,1}^3} & 0 \\ \frac{-3z_1 x_0}{r_{1,2}^5} & 0 & \frac{(3z_1^2 - r_{1,1}^2)}{r_{1,1}^5} \end{bmatrix}, \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{1,2} &= \mathbf{K}_{MI}(0, 0, z_s^1 = z_1, -x_0, 0, 0) = [r_{1,2}^2 = x_0^2 + z_1^2] = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(3x_0^2 - r_{1,2}^2)}{r_{1,2}^5} & 0 & \frac{3z_1 x_0}{r_{1,2}^5} \\ 0 & \frac{-1}{r_{1,2}^3} & 0 \\ \frac{3z_1 x_0}{r_{1,2}^5} & 0 & \frac{(3z_1^2 - r_{1,2}^2)}{r_{1,2}^5} \end{bmatrix}, \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{2,1} &= \mathbf{K}_{MI}(0, 0, z_s^2 = z_2, x_0, 0, 0) = [r_{2,1}^2 = x_0^2 + z_2^2] = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(3x_0^2 - r_{2,1}^2)}{r_{2,1}^5} & 0 & \frac{-3z_2 x_0}{r_{2,1}^5} \\ 0 & \frac{-1}{r_{2,1}^3} & 0 \\ \frac{-3z_2 x_0}{r_{2,1}^5} & 0 & \frac{(3z_2^2 - r_{2,1}^2)}{r_{2,1}^5} \end{bmatrix}, \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{2,2} &= \mathbf{K}_{MI}(0, 0, z_s^2 = z_2, -x_0, 0, 0) = [r_{2,2}^2 = x_0^2 + z_2^2] = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(3x_0^2 - r_{2,2}^2)}{r_{2,2}^5} & 0 & \frac{3z_2x_0}{r_{2,2}^5} \\ 0 & \frac{-1}{r_{2,2}^3} & 0 \\ \frac{3z_2x_0}{r_{2,2}^5} & 0 & \frac{(3z_2^2 - r_{2,2}^2)}{r_{2,2}^5} \end{bmatrix}. \tag{23}
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что для представленного расположения диполей и сенсоров строки $[0, \frac{-1}{r_{1,1}^3}, 0, 0, \frac{-1}{r_{1,2}^3}, 0]$ и $[0, \frac{-1}{r_{2,1}^3}, 0, 0, \frac{-1}{r_{2,2}^3}, 0]$ матрицы $\hat{\mathbf{K}}$ линейно зависимы, поэтому её ранг меньше 6. Таким образом, при таком расположении двух сенсоров и двух диполей распределение интенсивностей намагниченности не будет единственным.

Обобщим последнюю конфигурацию на случай $l > 2$ сенсоров, произвольно расположенных на оси Z . Полученная таким образом матрица будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{l,1} & \mathbf{K}_{l,2} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

а её блоки будут иметь структуру, аналогичную блокам (20,21,22,23). Очевидно, что при любых перестановках её строк и/или столбцов ранг будет меньше 6. Поэтому система нормальных уравнений для такой конфигурации будет иметь неединственное решение.

3 Локализация магнитных масс в приповерхностном слое Меркурия

Данная глава диссертации посвящена новой методике аналитического описания магнитного поля Меркурия на основе спутниковых данных. Обратная задача по нахождению источников поля редуцируется к решению плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью. Приводятся результаты математического эксперимента по нахождению компонент вектора магнитной индукции в сферической системе координат, центр которой совпадает с центром масс Меркурия.

В разделе 2 формулируется общая постановка задачи и её разделение на две подзадачи. Первая подзадача состоит в выделении из наблюдаемых данных только той компоненты магнитного поля, которая непосредственно связана с источниками магнитного поля, сосредоточенными в коре Меркурия. Вторая подзадача заключается в нахождении по полученным данным самих локальных источников магнитного поля. Далее, в пункте 3.4, описан способ определения необходимых нам компонент магнитного поля. В пункте 2.3 упоминается метод решения второй подзадачи. В пункте 5.5 приведены результаты обработки реальных экспериментальных данных, полученных межпланетной миссией MESSENGER.

3.1 Постановка задачи

Целью этой главы является определение плотности магнитного момента (намагниченности) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, только в приповерхностном слое V Меркурия по данным измерения индукции магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}_s)$ в точках \mathbf{r}_s , $s = \overline{1, S}$, расположенных на значительном удалении от планеты. На поясняющем рис. 4 зелёными точками отмечены точки \mathbf{r}_s экспериментального наблюдения магнитного поля \mathbf{B} спутниковой миссией MESSENGER.

В статье автора [42] использовались аналогичные данные для прямого восстановления параметров намагниченности в узком “коровом” слое V Меркурия без какой-либо предварительной обработки. В результате была решена

задача по восстановлению магнитного изображения Меркурия в “нулевом” приближении. Фактически было найдено одно из эквивалентных распределений источников магнитного поля. В данной главе мы пытаемся построить аналитическую модель распределения слабоинтенсивных источников магнитного поля в приповерхностном слое коры Меркурия, наиболее адекватную реальным данным дистанционного зондирования.

Для этого необходимо из данных экспериментальных наблюдений выделить внутреннее магнитное поле, а из него выделить ту часть поля, которая порождается магнитными массами в коре Меркурия. Для решения этой задачи были использованы экспериментальные наблюдения магнитного поля \mathbf{B} спутниковой миссией MESSENGER (см. рис. 4), которые содержат информацию о внутреннем магнитном поле Меркурия. На основе результатов статьи [42] была решена прямая задача, и в результате найдены значения магнитного поля в некотором окружающем Меркурий шаровом слое. Фактически, мы строим аналитическое продолжение заданного на нерегулярной сети точек магнитное поле (см. рис. 4) в некоторую область трехмерного пространства (тонкий шаровой слой на некотором удалении от поверхности Меркурия), удобную для дальнейшей обработки. Данная предварительная обработка данных помогает существенно упростить решение первой подзадачи по выделению интересующей нас компоненты магнитного поля (подробности будут изложены в разделе 3.4). После чего мы сможем, используя результаты из наших работ [41, 42], решить вторую подзадачу по восстановлению интересующего нас приповерхностного магнитного изображения Меркурия.

Ниже приводятся формулировки двух описанных выше подзадач.

3.2 Выделение высокочастотной компоненты внутреннего поля

Рассмотрим окружающий Меркурий шаровой слой $S(a, c) = \{r : a < r < c\}$. Внутренний радиус этого шарового слоя равен a , внешний c . Разложение Гаусса-Ми внутри этого шарового слоя, согласно принципу суперпозиции,

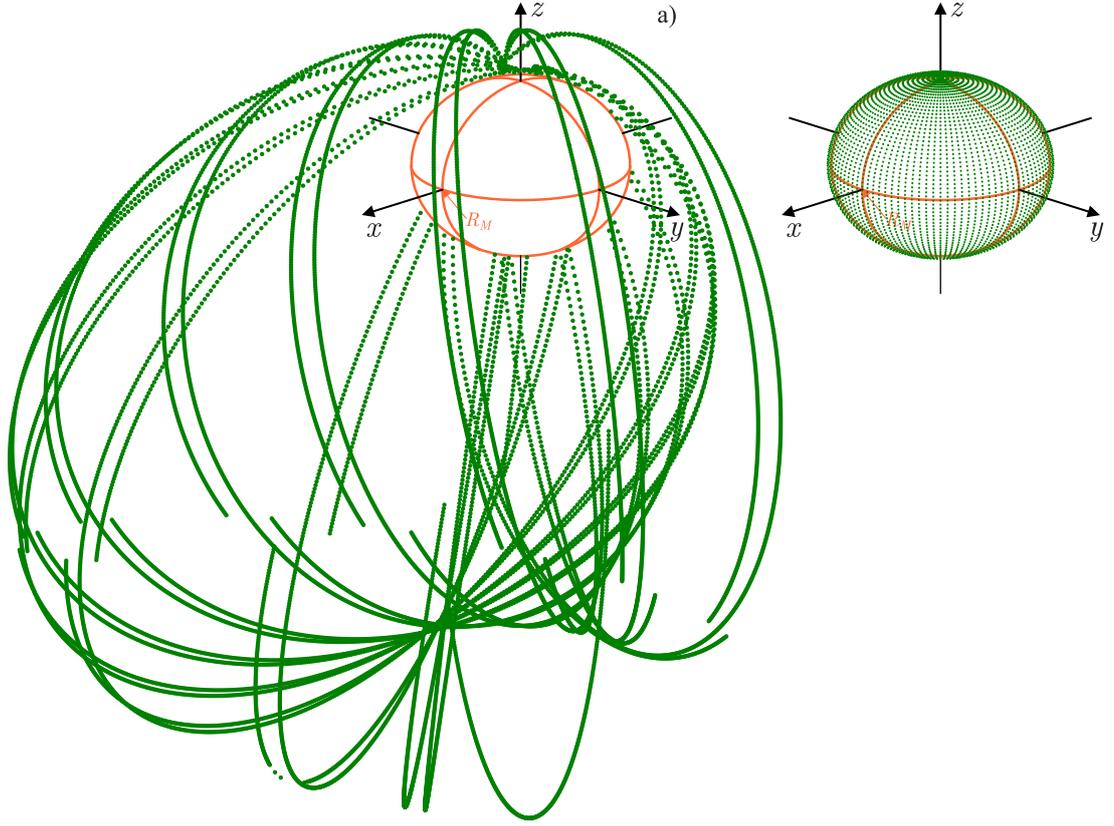


Рис. 4: (а) Расположение относительно Меркурия точек измерения магнитного поля миссией MESSENGER, используемых в расчетах (левая картинка); (б) расположение точек в тонком шаровом слое (правая картинка), в которых было пересчитано магнитное поле.

имеет вид [137, 142]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{int} + \mathbf{B}^{ext} + \mathbf{B}_T^{sh} + \mathbf{B}_P^{sh}. \quad (25)$$

Здесь $\mathbf{B}_T^{sh} + \mathbf{B}_P^{sh}$ — разложение Ми на тороидальную и полоидальную компоненты (T — toroidal, P — poloidal, sh — shell); $\mathbf{B}^{int} = -\nabla\Phi^i$ — внутреннее поле (int — internal), порождённое токами в области $r < a$; $\mathbf{B}^{ext} = -\nabla\Phi^{ext}$ — внешнее поле (ext — external), порождённое токами в области $r > c$; $\mathbf{B}_T^{sh} = [\nabla, \mathbf{r}\Psi_T^{sh}]$ — поле в области $a < r < c$, порождённое полоидальными токами; $\mathbf{B}_P^{sh} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{r}\Psi_P^{sh}]]$ — поле в области $a < r < c$, порождённое тороидальными токами; $\mathbf{r} = r \mathbf{i}_r$ (\mathbf{i}_r — единичный вектор в сферической системе координат, см. рис. 5); функции Φ^{int} , Φ^{ext} , Ψ_T^{sh} , Ψ_P^{sh} — скалярные потенциалы.

Для восстановления “тонких структур” необходимо из поля \mathbf{B}^{int} выделить “высокочастотную” составляющую \mathbf{B}_{high}^{int} . Как это сделать, детально будет изложено в разделе 3.4. В следующем пункте изложена постановка подзадачи определения магнитного изображения в коре Меркурия по полю \mathbf{B}_{high}^{int} .

3.3 Восстановление приповерхностного магнитного изображения Меркурия

Уравнение, описывающее индукцию магнитного поля \mathbf{B}_{high}^{int} , создаваемого объектом с распределением намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ и локализованного в области V , имеет вид [63]

$$\mathbf{B}_{high}^{int}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) dv, \quad (26)$$

где $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ — расстояние между точкой $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$, в которой трехосный датчик s измеряет индукцию магнитного поля \mathbf{B}_{high}^{int} , а точка $\mathbf{r} = (x, y, z)$ области V , в которой размещен магнитный источник с суммарным магнитным моментом на единицу объема $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, μ_0 проницаемость в вакууме.

В результате, для восстановления вектор-функции $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, определяющей приповерхностное магнитное изображение Меркурия, необходимо решить следующую обратную задачу.

Обратная задача состоит в определении плотности магнитного момента (намагниченности) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, по данным измерения индукции магнитного поля $\mathbf{B}_{high}^{int}(\mathbf{r}_s)$ в точках \mathbf{r}_s , $s = \overline{1, S}$. Таким образом, восстанавливается приповерхностное магнитное изображение Меркурия.

Найденная намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ позволит идентифицировать “тонкие структуры” Меркурия в виде локальных максимумов модуля намагниченности.

3.4 Выделение высокочастотной составляющей внутреннего магнитного поля Меркурия

Для выделения высокочастотной составляющей внутреннего магнитного поля Меркурия необходимо параметризовать поле (25) через коэффициенты разложения по сферическим гармоникам потенциалов соответствующих полей в разложении Гаусса-Ми. Будем использовать планетарно-центрированную сферическую систему координат (the body-fixed, planetary-centered spherical

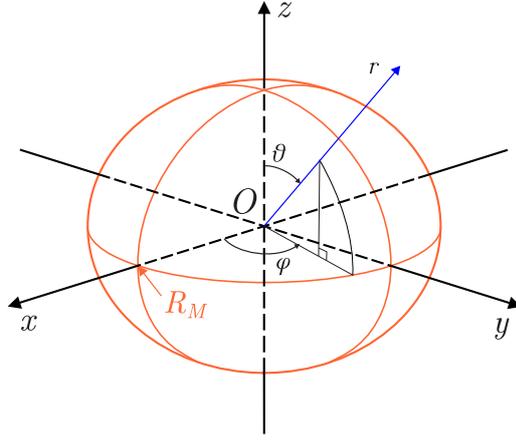


Рис. 5: Планетарная система координат, рассматриваемая при решении задачи.

coordinates) (см. рис. 5) с $r \in [R_M, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [0, \pi]$. Здесь R_M — средний радиус Меркурия. В этой системе координат скалярные потенциалы можно представить следующим образом [137, 142]:

$$\Phi^{int}(r, \varphi, \theta) = R_M \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+1} [g_l^m \cos(m\varphi) + h_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)),$$

$$\Phi^{ext}(r, \varphi, \theta) = R_M \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r}{R_M} \right)^l [q_l^m \cos(m\varphi) + s_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)),$$

$$\begin{aligned} \Psi_T^{sh}(r, \varphi, \theta) = & \left(\frac{R_M}{r} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l [a_l^m \cos(m\varphi) + b_l^m \sin(m\varphi) + \\ & + \frac{r-b}{R_M} \bar{a}_l^m \cos(m\varphi) + \frac{r-b}{R_M} \bar{b}_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_P^{sh}(r, \varphi, \theta) = & \left(\frac{R_M^2}{r} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l [c_l^m \cos(m\varphi) + d_l^m \sin(m\varphi) + \\ & + \frac{r-b}{R_M} \bar{c}_l^m \cos(m\varphi) + \frac{r-b}{R_M} \bar{d}_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Здесь $b = \frac{a+c}{2}$, а $g_l^m, h_l^m, q_l^m, s_l^m, a_l^m, b_l^m, \bar{a}_l^m, \bar{b}_l^m$ — искомые коэффициенты, $P_l^m(\cos(\theta))$ — присоединенные полиномы Лежандра (с нормировкой по Шмидту) степени l и порядка m .

Запишем уравнение (25) через потенциалы. Для этого сразу отметим, что в рассматриваемой задаче толщина шарового слоя $S(a, c) = \{r : a < r < c\}$ считается достаточно малой, чтобы можно было использовать приближение тонкой оболочки (the thin shell approximation), т.е. не учитывать \mathbf{B}_P^{sh} [137, 142].

Поэтому уравнение (25) примет вид

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi^{int} - \nabla\Phi^{ext} + [\nabla, \mathbf{r}\Psi_T^{sh}]. \quad (27)$$

Для вычисления градиентов и векторных произведений введём следующие обозначения.

$$1. K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) := [g_l^m \cos(m\varphi) + h_l^m \sin(m\varphi)].$$

$$2. R_1^l(r) := \left(\frac{R_M}{r}\right)^{l+1}, \quad R_2^l(r) := \left(\frac{r}{R_M}\right)^l.$$

$$3. \nabla(\cdot) := \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi.$$

Используя введённые обозначения, перепишем выражения для потенциалов:

$$\Phi^{int}(r, \varphi, \theta) = R_M \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_1^l(r) K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) P_l^m(\cos(\theta)),$$

$$\Phi^{ext}(r, \varphi, \theta) = R_M \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_2^l(r) K_l^m(\varphi; q_l^m, s_l^m) P_l^m(\cos(\theta)),$$

$$\begin{aligned} \Psi_T^{sh}(r, \varphi, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{R_M}{r} K_l^m(\varphi; a_l^m, b_l^m) P_l^m(\cos(\theta)) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{r-b}{r} K_l^m(\varphi; \bar{a}_l^m, \bar{b}_l^m) P_l^m(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Замечание. В рассматриваемой задаче для потенциалов внутреннего и внешнего поля $l = 3$, для потенциала тороидального поля $l = 2$.

Тороидальное магнитное поле в шаровом слое $S(a, c) = \{r : a < r < c\}$ перепишем в следующем виде [137, 142]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_T^{sh} = [\nabla, \mathbf{r}\Psi_T^{sh}] &= [\nabla, \Psi_T^{sh} r \mathbf{i}_r] = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_r & r \mathbf{i}_\theta & r \sin(\theta) \mathbf{i}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ r \Psi_T^{sh} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \mathbf{i}_r + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi_T^{sh}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\theta - \frac{\partial \Psi_T^{sh}}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, в сферической системе координат в каждой фиксированной точке (r, φ, θ) внутри шарового слоя $S(a, c) = \{r : a < r < c\}$ поле будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
B_r(r, \varphi, \theta) &= -R_M \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l \frac{\partial R_1^l(r)}{\partial r} K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) P_l^m(\cos(\theta)) - \\
&\quad - R_M \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l \frac{\partial R_2^l(r)}{\partial r} K_l^m(\varphi; q_l^m, s_l^m) P_l^m(\cos(\theta)), \\
B_\varphi(r, \varphi, \theta) &= -\frac{R_M}{r \sin(\theta)} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_1^l(r) \frac{\partial K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m)}{\partial \varphi} P_l^m(\cos(\theta)) - \\
&\quad - \frac{R_M}{r \sin(\theta)} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_2^l(r) \frac{\partial K_l^m(\varphi; q_l^m, s_l^m)}{\partial \varphi} P_l^m(\cos(\theta)) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^l \frac{R_M}{r} K_l^m(\varphi; a_l^m, b_l^m) \frac{\partial P_l^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} - \\
&\quad - \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^l \frac{r-b}{r} K_l^m(\varphi; \bar{a}_l^m, \bar{b}_l^m) \frac{\partial P_l^m(\cos(\theta))}{\partial \theta}, \\
B_\theta(r, \varphi, \theta) &= -\frac{R_M}{r} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_1^l(r) K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) \frac{\partial P_l^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} - \\
&\quad - \frac{R_M}{r} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_2^l(r) K_l^m(\varphi; q_l^m, s_l^m) \frac{\partial P_l^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} - \\
&\quad - \frac{1}{r \sin(\theta)} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^l \frac{R_M}{r} K_l^m(\varphi; a_l^m, b_l^m) P_l^m(\cos(\theta)) - \\
&\quad - \frac{1}{r \sin(\theta)} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^l \frac{r-b}{r} K_l^m(\varphi; \bar{a}_l^m, \bar{b}_l^m) P_l^m(\cos(\theta)).
\end{aligned} \tag{28}$$

Полное поле параметризуется коэффициентами внутреннего Гауссова диполя $[g_1^0 \ h_1^0 \ g_1^1 \ h_1^1]^T$, коэффициентами внутреннего Гауссова квадруполя $[g_2^0 \ h_2^0 \ g_2^1 \ h_2^1 \ g_2^2 \ h_2^2]^T$, коэффициентами внутреннего Гауссова октуполя $[g_3^0 \ h_3^0 \ g_3^1 \ h_3^1 \ g_3^2 \ h_3^2 \ g_3^3 \ h_3^3]^T$, коэффициентами внешнего Гауссова диполя $[q_1^0 \ s_1^0 \ q_1^1 \ s_1^1]^T$, коэффициентами внешнего Гауссова квадруполя $[q_2^0 \ s_2^0 \ q_2^1 \ s_2^1 \ q_2^2 \ s_2^2]^T$, коэффициентами внешнего Гауссова октуполя $[q_3^0 \ s_3^0 \ q_3^1 \ s_3^1 \ q_3^2 \ s_3^2 \ q_3^3 \ s_3^3]^T$ и тороидальными коэффициентами $[a_1^0 \ b_1^0 \ a_1^1 \ b_1^1 \ a_2^0 \ b_2^0 \ a_2^1 \ b_2^1 \ a_2^2 \ b_2^2]^T$.

Запишем все эти параметры в один вектор коэффициентов разложения

Гаусса-Ми:

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} g_1^0 & h_1^0 & g_1^1 & h_1^1 & g_2^0 & h_2^0 & g_2^1 & h_2^1 & g_2^2 & h_2^2 & g_3^0 & h_3^0 & g_3^1 & h_3^1 & g_3^2 & h_3^2 & g_3^3 & h_3^3 \\ q_1^0 & s_1^0 & q_1^1 & s_1^1 & q_2^0 & s_2^0 & q_2^1 & s_2^1 & q_2^2 & s_2^2 & q_3^0 & s_3^0 & q_3^1 & s_3^1 & q_3^2 & s_3^2 & q_3^3 & s_3^3 \\ a_1^0 & b_1^0 & a_1^1 & b_1^1 & a_2^0 & b_2^0 & a_2^1 & b_2^1 & a_2^2 & b_2^2 \end{bmatrix}^T. \quad (29)$$

Отметим, что мы считаем, что все точки измерения магнитного поля \mathbf{B} располагаются на сфере радиуса b и их количество равно S , поэтому в системе (28) в выражениях для B_θ и B_φ можно не рассматривать последнюю группу слагаемых. Напомним, мы предполагаем, что магнитные поля в S точках измерений получены в ходе решения прямой задачи на основе результатов статьи [42].

Для перехода от (28) к полной системе линейных алгебраических уравнений введём сетки $\Phi_{N_\varphi^s} = \{\varphi_n, 1 \leq n \leq N_\varphi^s : \varphi_n = \frac{h_\varphi^s}{2} + h_\varphi^s(n-1), h_\varphi^s = \frac{2\pi}{N_\varphi^s}\}$, $\Theta_{N_\theta^s} = \{\theta_m^s, 1 \leq m \leq N_\theta^s : \theta_m^s = \frac{h_\theta^s}{2} + h_\theta^s(m-1), h_\theta^s = \frac{\pi}{N_\theta^s}\}$ и $R_{N_r^s} = \{r_k, 1 \leq k \leq N_r^s : r_k = a + \frac{h_r^s}{2} + h_r^s(k-1), h_r^s = \frac{c-a}{N_r^s}\}$ и запишем конечно-разностные аппроксимации уравнений системы (28). Таким образом, для выделения внутренней составляющей магнитной индукции \mathbf{B}^{int} мы получаем систему состоящую из $3S = 3N_r^s N_\theta^s N_\varphi^s$ линейных алгебраических уравнений:

$$A\hat{g} = B. \quad (30)$$

Здесь вектор правой части B содержит измеренные в узлах сетки компоненты магнитного поля (левые части системы (28)), а матрица A состоит из элементов, определяемых конечно-разностной аппроксимацией правых частей системы (28).

Для поиска коэффициентов разложения Гаусса-Ми \hat{g} необходимо численно решить систему линейных алгебраических уравнений (30). Это может быть сделано с помощью метода наименьших квадратов. Таким образом решение системы может быть найдено по формуле

$$\hat{g} = (A^T A)^{-1} A^T B.$$

Внутреннему магнитному полю соответствует вектор

$$\hat{g}_{int} = [g_1^0 \ h_1^0 \ g_1^1 \ h_1^1 \ g_2^0 \ h_2^0 \ g_2^1 \ h_2^1 \ g_2^2 \ h_2^2 \ g_3^0 \ h_3^0 \ g_3^1 \ h_3^1 \ g_3^2 \ h_3^2 \ g_3^3 \ h_3^3]^T. \quad (31)$$

Затем из поля \mathbf{B}^{int} необходимо выделить “высокочастотную” составляющую \mathbf{B}_{high}^{int} , которая отвечает за магнитные массы в приповерхностном слое Меркурия и позволяет нам локализовать “тонкие структуры”.

Для получения высокочастотной составляющей из вектора \hat{g}_{int} необходимо взять компоненты разложения, начиная с шестого. Таким образом, мы “отбрасываем” дипольную часть внутреннего магнитного поля, которая может заглушить все прочие компоненты поля, и получаем возможность локализовать “тонкие структуры”. Поэтому коэффициенты Гаусса высокочастотной составляющей магнитного поля определяются следующим образом:

$$\hat{g}_{int}^{high} := [g_1^0 = 0 \ h_1^0 = 0 \ g_1^1 = 0 \ h_1^1 = 0 \ g_2^0 = 0 \ h_2^0 \ g_2^1 \ h_2^1 \ g_2^2 \ h_2^2 \ g_3^0 \ h_3^0 \ g_3^1 \ h_3^1 \ g_3^2 \ h_3^2 \ g_3^3 \ h_3^3]^T. \quad (32)$$

Эти коэффициенты используются для вычисления высокочастотной составляющей \mathbf{B}_{high}^{int} , компоненты которой определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} B_r(r, \varphi, \theta) &= -R_M \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l \frac{\partial R_1^l(r)}{\partial r} K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) P_l^m(\cos(\theta)), \\ B_\varphi(r, \varphi, \theta) &= -\frac{R_M}{r \sin(\theta)} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_1^l(r) \frac{\partial K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m)}{\partial \varphi} P_l^m(\cos(\theta)), \\ B_\theta(r, \varphi, \theta) &= -\frac{R_M}{r} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_1^l(r) K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) \frac{\partial P_l^m(\cos(\theta))}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (33)$$

Переход к декартовым координатам осуществляется стандартным преобразованием поворота. Полученное магнитное поле \mathbf{B}_{high}^{int} используется при решении обратной задачи для локализации “тонких структур” в следующем разделе.

3.5 Восстановление приповерхностного магнитного изображения Меркурия

Численный алгоритм решения задачи (26) — поиск $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$ по известным значениям $\mathbf{B}_{high}^{int}(\mathbf{r}_s)$ в точности повторяет алгоритм, который будет подробно описан в разделе (4.3).

4 Регуляризирующие алгоритмы и численные методы

В этой главе описываются основные регуляризирующие алгоритмы и численные методы решения некорректно поставленных обратных задач, рассмотренных в главах 2, 3.

4.1 Методы решения обратных некорректно поставленных задач

Сформулированная в главе 2 обратная задача восстановления параметров намагниченности и магнитной восприимчивости сводится к уравнению

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (34)$$

где Z, U – метрические пространства [143–146].

Это уравнение является типичным примером некорректно поставленной задачи в случае, когда оператор A вполне непрерывен [24, 28, 29, 35, 37, 147]. Для вполне непрерывного оператора нарушаются оба условия корректности задачи по Адамару (во-первых, что уравнение разрешимо для любого $u \in U$ единственным образом, и, во-вторых, что решение уравнения устойчиво относительно возмущения правой части уравнения, т.е. оператор A^{-1} определен на всем U и является непрерывным). Если Z – бесконечномерное пространство, то

1. оператор A^{-1} определен не на всем U ($AZ \neq U$).
2. A^{-1} (определенный на $AZ \subset U$) не является непрерывным.

Т.е. при заданных условиях задача является некорректной, и для ее решения требуется строить регуляризирующий алгоритм [148]. В работе автором используется алгоритм, основанный на минимизации функционала Тихонова, для выбора параметра регуляризации применяется алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки [148].

Для минимизации функционала Тихонова могут применяться следующие методы: метод условного градиента, метод сопряженных градиентов, метод

сингулярного разложения матрицы [149, 150], метод проекции сопряженных градиентов на множество векторов с неотрицательными компонентами [148].

Также можно эффективно использовать априорные ограничения на неизвестное решение. В этом случае математическую постановку задачи можно переформулировать в следующем виде. Пусть Z, U – гильбертовы пространства; D – такое замкнутое выпуклое множество априорных ограничений задачи ($D \subseteq Z$) [151–155], что A, A_h – линейные операторы, действующие из Z в U , причем $\|A - A_h\| \leq h, h \geq 0$. Построим приближенное решение уравнения

$$Az = u,$$

принадлежащее множеству D , по заданному набору данных $\{A_h, u_\delta, \eta\}$, $\eta = (\delta, h)$, где $\delta > 0$ – погрешность задания правой части u_δ исходного уравнения, т.е. $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta, \bar{u} = A\bar{z}$. Здесь \bar{z} – точное решение задачи, $\bar{z} \in D$, соответствующее правой части \bar{u} . Введем сглаживающий функционал [148]:

$$F^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2,$$

($\alpha > 0$ – параметр регуляризации) и рассмотрим экстремальную задачу нахождения $\inf_{z \in D} F^\alpha[z]$. Идея построения регуляризирующего алгоритма на основе экстремальной задачи для функционала $F^\alpha[z]$ заключается в построении такой функции $\alpha = \alpha(\eta)$, что $z_\eta^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$, т.е. в согласовании параметра регуляризации α с погрешностью задания входных данных η . Функционал $F^\alpha[z]$ является сильно выпуклым функционалом в гильбертовом пространстве. Для отыскания экстремали $z_\eta^{\alpha(\eta)} \in D$ при фиксированном $\alpha > 0$ достаточно применить, например, градиентные методы минимизации функционалов с ограничениями. Численные аспекты реализации этого подхода будут рассмотрены ниже.

При наличии ограничений на решение уравнения (34) можно с успехом применять и итерационные алгоритмы регуляризации, которые также будут рассмотрены ниже.

4.1.1 Метод сопряжённых градиентов

В данном пункте рассматривается применение метода сопряжённых градиентов для решения некорректно поставленных задач без ограничений.

Рассмотрим задачу

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (35)$$

при условии, что оператор A из Z в U непрерывен, линеен, инъективен и известен точно ($h = 0$). Будем полагать, что U гильбертово пространство. За приближенное решение задачи (35) можно принять произвольный элемент z , для которого $\|Az - u_\delta\|_U \leq \delta$.

В результате конечно-разностной аппроксимации уравнения (35), при выполненном условии аппроксимации $\|u - u_\delta\| \leq \delta$, получается СЛАУ

$$Az = u_\delta, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u_\delta \in \mathbb{R}^m. \quad (36)$$

Решение системы (36) сводится к минимизации сглаживающего функционала $F^\alpha[z] = \|Az - u_\delta\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \alpha \|Rz\|_{\mathbb{R}^n}^2$, минимум которого может быть найден как решение системы

$$(A^T A + \alpha R^T R) z = A^T u_\delta, \quad (37)$$

где R - единичная матрица размера $(n \times n)$.

Для минимизации конечно-разностной аппроксимации функционала Тихонова мы будем использовать реализацию метода сопряжённых градиентов, предложенную в работе [156].

Пусть $z^{(s)}$ — минимизирующая последовательность, $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ — вспомогательные вектора, $p^{(0)} = 0$, $z^{(1)}$ — любая допустимая точка. Тогда формулы метода сопряжённых градиентов для поиска решения $z^{(N)}$ системы (37) могут

быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 r^{(s)} &= \begin{cases} A_h^T (A_h z^{(s)} - u_\delta) + \alpha R^T (R z^{(s)}), & \text{если } s = 1, \\ r^{(s-1)} - q^{(s-1)} / (p^{(s-1)}, q^{(s-1)}), & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \\
 p^{(s)} &= p^{(s-1)} + \frac{r^{(s)}}{(r^{(s)}, r^{(s)})}, \\
 q^{(s)} &= A^T (A p^{(s)}) + \alpha R^T (R p^{(s)}), \\
 z^{(s+1)} &= z^{(s)} - \frac{p^{(s)}}{(p^{(s)}, q^{(s)})}.
 \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что при проведении численных экспериментов мы можем определить $\alpha = 0$, $z^{(1)} = 0$ и использовать номер итерации s в качестве параметра регуляризации. В этом случае критерий прекращения итерационного процесса согласуется с погрешностью задания входных данных посредством условия [27]

$$\|A z^{(s+1)} - u_\delta\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \delta^2.$$

При численном решении системы (37) возможно эффективное применение многопроцессорных систем, особенности работы с которыми указаны в [53, 135].

4.1.2 Метод проекции сопряженных градиентов

В данном разделе рассматривается применение метода проекции сопряженных градиентов для решения некорректно поставленных задач с ограничениями [148].

Подобно методу, описанному в предыдущем пункте, остановимся на решении задачи

$$Az = u, \quad z \in D \subseteq Z, \quad u \in U, \quad (38)$$

при условии, что оператор A из Z в U непрерывен, линеен, инъективен и известен точно ($h = 0$). Будем полагать, что U – гильбертово пространство. За приближенное решение задачи (38) в случае, когда D представляет собой ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в Z , можно принять произвольный элемент z_δ , для которого $\|Az_\delta - u_\delta\| \leq \delta$.

Так как мы рассматриваем задачи, в которых в качестве множества ограничений D в результате конечно-разностной аппроксимации выступает многогранник, то функционал $F^\alpha[z] = \|Az - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2$ переходит в квадратичную функцию $\varphi(z)$. Таким образом, приходим к следующей задаче: построить минимизирующую последовательность для функционала $F^\alpha[z]$ на выпуклом множестве D . Заметим, что ограничение, представляющее собой ограниченный, замкнутый, выпуклый многогранник в пространстве R^n , может быть записано в виде

$$Gz \leq g, \quad (39)$$

где G – матрица размера $m_0 \times n$, m_0 – количество условий, определяющих множество, g – вектор ограничений длины m_0 . Неравенство (39) понимается в смысле покомпонентных неравенств.

Если z находится на границе множества, то одно или несколько неравенств в (39) могут обращаться в равенства. Множеством активных ограничений $I(z)$ (в точке z) будем называть множество индексов (быть может, не всех), для которых в точке z выполнены равенства

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} z_j = g_i. \quad (40)$$

Через $\dim I$ будем обозначать число элементов в множестве I . Назовем матрицей активных элементов матрицу G_I размера $\dim I \times n$, строками которой являются строки матрицы G , номера которых принадлежат $I(z)$.

Квадратичную функцию $\varphi(z)$ представим в виде

$$\varphi(z) = (z, (A^T A + \alpha R^T R)z) + (2A^T u, z) + (u, u), \quad (41)$$

где R – конечно-разностная аппроксимация оператора \mathbf{R} : $\|\chi\|_{W_2^2} = \|\mathbf{R}\chi\|_{L_2}$. Метод проекции сопряженных градиентов для минимизации функции (58) при ограничениях (39) проще всего записывается в алгоритмическом виде.

Шаг 1. Минимизация начинается с произвольной допустимой точки $z^{(0)} \in Q$ и проводится в R^n методом сопряженных градиентов. Положим число активных ограничений $m := 0$. Значение счетчика итераций метода проекции

сопряженных градиентов без изменения матрицы активных ограничений при этом равно: $k := 0$.

Шаг 1.1. Поскольку метод сопряженных градиентов находит минимум в R^n за n шагов, если $k = n$, то решение найдено. В этом случае переходим на шаг 6.

Шаг 1.2. Вычисляется направление спуска $p^{(k)}$: если $k = 0$, то $p^{(k)} = -\nabla\varphi(z^{(k)})$, иначе $p^{(k)} = -\nabla\varphi|_{z=z^{(k)}} + \frac{\|\nabla\varphi(z^{(k)})\|^2}{\|\nabla\varphi(z^{(k-1)})\|^2}p^{(k-1)}$.

Шаг 1.3. Вычисляется a_k – величина оптимального шага вдоль этого направления по формуле

$$a_k = \frac{1}{2} \frac{(\nabla\varphi(z^{(k)}), p^{(k)})}{(A^T A p^{(k)}, p^{(k)}) + \alpha \|R p^{(k)}\|^2},$$

где выбор нормы $\|R p^{(k)}\|$ связан с априорной информацией о неизвестном решении.

Шаг 1.4. Вычисляется a_{max} – величина максимально возможного шага вдоль этого направления $p^{(k)}$, не выводящего за пределы множества Q .

Шаг 1.5. Если $a_k \leq a_{max}$, то $z^{(k+1)} := z^{(k)} + a_k p^{(k)}$, $k := k + 1$ и переходим на шаг 1.1.; иначе $z^{(k+1)} := z^{(k)} + a_{max} p^{(k)}$ и переходим на шаг 2.

Шаг 2. Появились новые активные ограничения. Находим одно из новых активных ограничений и включаем его в множество активных ограничений $I(z)$. В соответствии с этим изменяем матрицу активных ограничений; $m := m + 1$.

Шаг 3. Вычисляем проектор P_I на подпространство R^{n-m} , определяемое условиями $G_I z = 0$, по формуле

$$P_I = E - G_I^T (G_I G_I^T)^{-1} G_I.$$

Шаг 4. Повторяем шаг 1, только в качестве начальной точки берется $z^{(k)}$, а всюду вместо $\nabla\varphi(z^{(k)})$ берутся их проекции $P_I \nabla\varphi(z^{(k)})$. Точный минимум на $(n - m)$ -мерном линейном многообразии находится методом сопряженных градиентов за $n - m$ шагов. Поэтому выход из шага 4 проводится по сравнению $k = n - m$.

Если минимум на многообразии найден и $m = 0$, то переходим на *шаг 6*. Если минимум найден и $m \neq 0$, то переходим на *шаг 5*. Если минимум не найден (т.е. $a_k > a_{max}$), то переходим на *шаг 2*.

Шаг 5. Сюда мы попадаем лишь в том случае, если на соответствующем многообразии найден точный минимум. Дальнейшее перемещение в этом многообразии или в более узких, получаемых добавлением новых ограничений, не позволяет уменьшить значение $\varphi(z)$. Необходимо выбросить одно из ограничений так, чтобы при движении по направлению, ставшему теперь возможным, функционал $\varphi(z)$ убывал, а точка не выходила за пределы допустимого множества M . Для этого поступим следующим образом.

Шаг 5.1. Вычисляем набор из m теневых параметров по формуле

$$u^0 = (G_I G_I^T)^{-1} G_I \nabla \varphi.$$

Шаг 5.2. Если все $u_i^0 \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то найдено решение задачи (ни одного ограничения нельзя выбросить из множества активных ограничений). Переходим на *шаг 6*.

Шаг 5.3. Если $u_i^0 < 0$ для каждого i , то i -е активное ограничение исключаем из $I(z)$ и переходим на *шаг 3*, положив $m := m - 1$.

Шаг 6. Если в соответствии с обобщённым принципом невязки экстремаль функционала Тихонова $F^\alpha[\chi]$ найдена, то переходим на *шаг 7*. В противном случае задаём следующее значение параметра регуляризации α , полагаем число активных ограничений $m := 0$, счетчик итераций метода проекции сопряженных градиентов без изменения матрицы активных ограничений $k := 0$ и переходим на *шаг 1.2*.

Шаг 7. Конец.

Как видно из алгоритма, при каждом переходе к новому подпространству необходимо вычислять оператор проектирования P_I , а для этого в алгоритме необходимо обращать матрицу $G_I G_I^T$. Та же проблема возникает при вычислении теневых параметров u^0 . Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда строки матрицы G_I линейно независимы. Приведенный алгоритм в случае, если строки матрицы активных ограничений независимы, решает

задачу минимизации квадратичной функции $\varphi(z)$ на множестве (??) за конечное число шагов.

Параметр регуляризации α выбирается в соответствии с обобщённым принципом невязки [148].

4.1.3 Метод проекций сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами.

В начале этого раздела был описан алгоритм построения приближенного решения задачи (57) для линейного оператора A за конечное число шагов. Однако при реализации этого алгоритма необходимо обращать матрицу $G_I G_I^T$, что при достаточно большом числе активных ограничений приводит к значительным затратам машинного времени. В данном пункте также описан алгоритм, основанный на методе проекции сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами [148]. В этом случае проектор вычисляется элементарно.

Рассмотрим сначала задачу построения минимизирующей последовательности для квадратичного функционала $\varphi(z)$, $z \in R^n$ на выпуклом множестве Q . Мы должны заметить, что для $z \in Q$ справедливо единственное представление

$$z = \sum_{j=1}^n a_j T^{(j)}, \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим оператор T из R^n в R^n , определенный по формуле

$$Tx = \sum_{j=1}^n x_j T^{(j)}, \quad x \in R^n.$$

Поскольку $T^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) образуют базис в R^n , то существует обратный оператор T^{-1} , определенный на всем R^n . Рассмотрим множество векторов $\Pi^+ \subset R^n$, имеющих все неотрицательные координаты: $x \in \Pi^+$, если $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, что $T\Pi^+ = D$ и $T^{-1}D = \Pi^+$. Рассмотрим функцию $f(x) = \varphi(Tx)$, определенную на множестве Π^+ . Тогда вместо задачи минимизации $\varphi(z)$ на Q можно решать задачу минимизации $f(x)$ на Π^+ ,

поскольку между Q и Π^+ оператор T^{-1} осуществляет взаимно однозначное соответствие.

В силу линейности оператора T функция $f(x)$ – квадратичная, так же как и функция $\varphi(z)$. Таким образом, задача отыскания приближенного решения некорректно поставленной задачи (57) на множестве Q сводится к построению последовательности, минимизирующей квадратичную функцию $f(x)$ на множестве векторов с неотрицательными компонентами.

Остается заметить, что метод проекции сопряженных градиентов в Π^+ сравнительно легко реализуется, поскольку проектор на Π^+ строится тривиально. Напомним, что нам необходимо найти такой элемент $x_\delta \in \Pi^+$, что $f(x) \leq \delta^2$. Приближенное решение z_δ задачи (57) определяется после этого по формуле $z_\delta = Tx_\delta$. В нашем случае T – единичная матрица.

4.1.4 Метод итерационной регуляризации с фейеровскими операторами

В данном разделе рассматривается применение метода итерационной регуляризации с фейеровскими операторами [157] для решения некорректно поставленных задач на множествах с ограничениями.

Подобно методу, описанному в предыдущем пункте, остановимся на решении задачи

$$Az = u, \quad z \in M \subset Z, \quad u \in U, \quad (42)$$

при условии, что оператор A из Z в U непрерывен, линеен, инъективен и известен точно ($h = 0$). Будем полагать, что U гильбертово пространство. За приближенное решение задачи (42) в случае, когда M представляет собой ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в Z , можно принять результат итерационного процесса

$$z^{k+1} = T_2(T_1(z^k)), \quad (43)$$

где T_1 – Z –сильно фейеровский оператор и T_2 – M –сильно фейеровский оператор.

Определение 4.1 ([157]). Оператор T , действующий в нормированном пространстве Z , называется сильно M -фейеровским, если $M = \text{Fix}(T) \neq \emptyset$ и для некоторого $\nu > 0$ выполнено неравенство

$$\|T(x) - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \nu\|x - T(x)\|^2, \quad \forall x \in \text{Fix}(T), z \in \text{Fix}(T),$$

где $\text{Fix}(T)$ - множество неподвижных точек оператора T .

Класс таких операторов обозначается как P_M^ν .

Определение 4.2 ([157]). Множество линейного нормированного пространства называется ограниченно компактным, если любое его ограниченное подмножество предкомпактно.

Сформулируем теорему, на которой основаны результаты данного пункта [157].

Теорема 4.1. [157] Пусть в методе (43) T_1 — оператор шага в итерационном процессе

$$z^{k+1} = T_1(z^k) = (A^*A + \alpha I)^{-1}(\alpha z^k + A^*u) = T_1(z^k), \quad (44)$$

а $T_2 = P_M$ — метрическая проекция на ограниченно компактное замкнутое подмножество M гильбертова пространства Z . Тогда последовательность $\{z^k\}$, определяемая процессом, образованным из (44) и P_M сходится сильно по норме пространства Z к некоторому элементу $\bar{z} \in M$, т.е. решению задачи (42).

В результате конечно-разностной аппроксимации уравнения (42) получается СЛАУ

$$Az = u, \quad z \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (45)$$

где Q - конечно-разностная аппроксимация множества M . Множество Q представляет собой априорную информацию об искомом решении, которая касается некоторых его дополнительных свойств, вытекающих из физического смысла задачи.

Определение 4.3 ([157]). Оператор T , действующий в нормированном пространстве Z , называется M -фейеровским, если $M = \text{Fix}(T) \neq \emptyset$ и выполнено неравенство

$$\|T(x) - z\| < \|x - z\|, \quad \forall x \notin \text{Fix}(T), z \in \text{Fix}(T),$$

где $\text{Fix}(T)$ - множество неподвижных точек оператора T .

Класс таких операторов обозначается как F_M . Важно отметить, что $P_M^\nu \subset F_M$.

Представим некоторые свойства фейеровских операторов [157].

Теорема 4.2 ([157]). Пусть T_1 и T_2 - M_1 и M_2 -фейеровские операторы, соответственно и $M = M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Тогда $T = T_1 T_2$ - M -фейеровский оператор с $\text{Fix}(T) = M$.

Теорема 4.3 ([157]). Пусть T - непрерывный оператор, действующий в конечномерном нормированном пространстве \mathbb{R}^n и являющийся M -фейеровским оператором. Тогда метод последовательных приближений

$$z^{k+1} = T(z^k)$$

порождает последовательность $\{z^k\}$, сходящуюся к неподвижной точке $\hat{z} \in \text{Fix}(T)$.

Теорема 4.4 ([157]). Пусть задан итерационный процесс

$$z^{k+1} = T_2(T_1(z^k)) \tag{46}$$

с M_1 -фейеровским оператором T_1 и M_2 -фейеровским оператором T_2 , где T_1, T_2 - непрерывные операторы, действующие в конечномерном пространстве \mathbb{R}^n . Тогда для любого начального приближения z итерационный процесс (46) порождает последовательность $\{z^k\}$, сходящуюся к некоторому элементу $\bar{z} \in M_1 \cap M_2$.

В качестве оператора T_1 для нашей задачи возьмем

$$z^{k+1} = T_1(z^k) = \arg \min \{ \|Az - u\|^2 + \alpha \|z - z^k\|^2 : z \in \mathbb{R}^n \}, \tag{47}$$

который может быть переписан в следующем виде

$$z^{k+1} = T_1(z^k) = (A^T A + \alpha I)^{-1}(\alpha z^k + A^T u). \quad (48)$$

Для решения задачи минимизации (47) нами был использован вариант метода сопряженных градиентов, изложенный в статье [156].

В нашем случае, в результате конечно-разностной аппроксимации множества D , получаем $Q = \{z : z \in \mathbb{R}^n, z_i \geq 0, i = 1 \leq i \leq n\}$. Очевидно, что множество Q является ограниченно компактным. В качестве оператора T_2 можно принять метрическую проекцию на множество Q , которая вычисляется простой явной формулой

$$P_Q(z) = z^+, \quad (49)$$

где $z_i^+ = z_i$, если $z_i > 0$ и $z_i^+ = 0$, если $z_i \leq 0$.

Основная теорема данного пункта [157]:

Теорема 4.5 ([157]). Пусть выполнены условия аппроксимации $\|A - A_h\| < h$, $\|u - u_\delta\| < \delta$, и в итерационном процессе

$$z^{k+1} = P_Q[(A_h^T A_h + \alpha I)^{-1}(\alpha z^k + A_h^T u_\delta)], \quad (50)$$

где P_Q - метрическая проекция (49). Тогда при выборе числа итераций в соответствии с правилом

$$k(\delta, h) : k(\delta, h)(\delta + h) \rightarrow 0, \quad \delta, h \rightarrow 0,$$

имеет место сходимость

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \|z^{k(\delta, h)} - \bar{z}\| = 0,$$

где $\bar{z} \in Q$, т.е \bar{z} - решение задачи (57).

4.1.5 Метод итерационной регуляризации, сохраняющий неотрицательность решения.

Рассмотрим ещё один метод решения уравнения

$$Az = u, \quad z \in M \subset Z, \quad u \in U, \quad (51)$$

взятого из статьи [158], при условии, что оператор A из Z в U непрерывен, линеен, инъективен. Будем полагать, что U гильбертово пространство. В текущем случае будем считать, что $Z = L_2(P)$, $M = L_2^+(P) = \{z : z \in L_2(P), z \geq 0\}$, $U = L_2(O)$, где $P, O \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченные множества.

Сформулируем теоремы, на которых основан данный метод.

Теорема 4.6 ([158]). Для компактных и инъективных оператора прямой задачи A , A_h и для μI с некоторой константой $\mu > 0$, пусть $\{z_{\delta,h}^k\} \subset L_2^+(P)$ — последовательность, порождённая процессом

$$z_{\delta}^{(k+1)} = |(\mu I + A_h^* A_h)^{-1}[(\mu I - A_h^* A_h)|x_{\delta}^{(k)}| + 2A_h^* u_{\delta}]|, \quad (52)$$

где операция $|\cdot|$ — модуль функции.

Если номер последней итерации $k^* = k^*(h, \delta)$ выбран так что

$$k^* \rightarrow \infty, \quad k^*(h, \delta)(h + \delta) \rightarrow 0 \quad h, \delta \rightarrow 0,$$

тогда приближённое решение $z_{\delta,h}^{k^*}$ сходится решению задачи \bar{z} в норме $L_2(P)$ при $h, \delta \rightarrow 0$.

Теорема 4.7 ([158]). Пусть $z_{\delta,h}^{k^*} \in L_2^+(P)$ — приближённое решение, полученное с помощью алгоритма (52) с правилом остановки

$$\|(\mu I + A_h A_h^*)^{-1}(u - A_h |x^{(k)}|)\| \leq \tau(\delta + hC) \leq \|(\mu I + A_h A_h^*)^{-1}(u - A_h |x^{(k-1)}|)\|.$$

Тогда $z_{\delta,h}^{k^*}$ сходится \bar{z} при $h, \delta \rightarrow 0$.

В результате конечно-разностной аппроксимации уравнения (51) получается СЛАУ

$$Az = u, \quad z \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (53)$$

где Q - конечно-разностная аппроксимация множества M . Множество Q представляет собой априорную информацию об искомом решении, которая касается некоторых его дополнительных свойств, вытекающих из физического смысла задачи.

Перепишем алгоритм (52) в конечно-разностной форме.

Шаг 1. Итерационный процесс начинается с произвольной допустимой точки $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Положим счетчик итераций процесса: $k := 0$.

Шаг 1.1. $x^{(k+1)} = (\mu I + A^T A)^{-1}[(\mu I - A^T A)|x^{(k)}| + 2A^T u]$. Для реализации этого шага алгоритма автором был использован вариант метода сопряжённых градиентов, изложенный в статье [156].

Шаг 1.2 Если правило остановки

$$\|(\mu I + AA^T)^{-1}(u - A|x^{(k)}|)\| \leq \tau(\delta + hC) \leq \|(\mu I + AA^T)^{-1}(u - A|x^{(k-1)}|)\|,$$

где τ и C два фиксированных числа таких что $\tau > \frac{1}{\mu}$ и $C \geq \|\bar{z}\|$, а \bar{z} - точное решение (57), не выполнено, то $k:=k+1$ и переходим на *шаг 1.1.*; иначе $z^{(k+1)} = |x^{(k+1)}|$, где операция модуль $|\cdot|$ применяется к вектору $z^{(k+1)}$ покомпонентно. Переход на шаг 2.

Шаг 2. Вектор $z^{(k+1)}$ берётся в качестве решения уравнения (57). Конец.

Параметр μ можно рассматривать как параметр регуляризации, который можно выбирать в соответствии с обобщённым принципом невязки [148] при $k := 0$.

4.2 Метод решения задачи восстановления магнитной восприимчивости

Если предположить, что $V \subset P = \{(x, y, z) : L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y, L_z \leq z \leq R_z\}$ и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом $O = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t, L_r \leq r \leq R_r\}$, то уравнение (5) можно переписать в следующем операторном виде

$$\mathbf{A}\chi \equiv \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s, t, r, x, y, z)\chi(x, y, z)dx dy dz = \mathbf{B}(s, t, r), \quad (54)$$

где $\mathbf{B} = [B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{MGT}$. В дальнейшем соответствующую модель будем называть как MGT-модель (Тензор градиентов компонент магнитного поля).

Замечание. Отметим, что постановка задачи (54) является физически переопределённой. В этой постановке необходимо найти 1 скалярную функцию

по результатам экспериментальных значений 8-ми других скалярных функций. В предыдущей работе автора [40] было показано, что для решения этой задачи достаточно знания градиентов компонент магнитного поля (ГКМП) без значений самого магнитного поля, поэтому потребуется найти 1 скалярную функцию по результатам экспериментальных измерений только 5-ти скалярных функций.

Далее, будем предполагать, что $\chi \in D = \{\chi : \chi \in W_2^2(P), \chi \geq 0\}$, $\mathbf{B} \in L_2(O)$, а оператор \mathbf{A} с ядром \mathbf{K} непрерывен и однозначен. Норма правой части уравнения (54) вводится следующим образом:

$$\|\mathbf{B}\|_{L_2} = \sqrt{\|B_{xx}\|_{L_2}^2 + \|B_{xy}\|_{L_2}^2 + \|B_{xz}\|_{L_2}^2 + \|B_{yz}\|_{L_2}^2 + \|B_{zz}\|_{L_2}^2}.$$

Пусть вместо точно известных $\bar{\mathbf{B}}$ и оператора \mathbf{A} известны их приближенные значения \mathbf{B}_δ и \mathbf{A}_h , такие, что $\|\mathbf{B}_\delta - \bar{\mathbf{B}}\|_{L_2} \leq \delta$, $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h$. При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала А. Н. Тихонова

$$F^\alpha[\chi] = \|\mathbf{A}_h \chi - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\chi\|_{W_2^2}^2. \quad (55)$$

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова χ_η^α , $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[\chi]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки [148]. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) \equiv \|\mathbf{A}_h \chi_\eta^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 - (\delta + h \|\chi_\eta^\alpha\|_{W_2^2})^2 = 0$$

χ_η^α стремится при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению задачи в норме W_2^2 , а, следовательно, и равномерно на P .

Отдельно стоит отметить методы, изложенные в пунктах (4.1.4), (4.1.5). В данных методах предполагается, что $\chi \in D = L_2^+(P) = \{\chi : \chi \in L_2(P), \chi \geq 0\}$, на оператор \mathbf{A} будет теперь наложено условие $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq h$. Другие условия остаются без изменения. Данные алгоритмы в силу своих свойств не

могут нам дать равномерную сходимость, однако довольно просты в реализации.

Также при решении задачи предполагалось, что $\chi \in D = \{\chi : \chi \in V_H(P), \chi \geq 0\}$, где $V_H(P)$ - банахово пространство функций ограниченной вариации типа Харди $VH(\chi, P)$ в области P [47, 48]. На оператор \mathbf{A} будет теперь наложено условие $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{V_H(P) \rightarrow L_2} \leq h$. Преимущество рассмотрения данного пространства в том, что такие функции могут быть разрывными или же иметь изломы, в то время как при решении задачи в пространстве Соболева решение может слишком сильно сгладиться. Сходимость в данном пространстве даёт нам кусочно-равномерную сходимость. В результате функционал Тихонова примет вид

$$F^\alpha[\chi] = \|\mathbf{A}_h \chi - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\chi\|_{V_H}, \quad (56)$$

где стабилизирующий функционал $\|\chi\|_{V_H} = VH(\chi, P)$.

Конечно-разностный аналог уравнения (54) и множестве ограничений D , после введения сеток в областях P и O , может быть записан в виде СЛАУ

$$Az = u, \quad z \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (57)$$

где Q - конечно-разностная аппроксимация множества D . Множество Q представляет собой априорную информацию об искомом решении, которая касается некоторых его дополнительных свойств, вытекающих из физического смысла задачи. Функционал (55) в результате конечно-разностной аппроксимации переходит в квадратичную функцию

$$\varphi(z) = (z, (A^T A + \alpha R^T R)z) + (2A^T u, z) + (u, u), \quad (58)$$

где вид матрицы R будет зависеть от рассматриваемого пространства решений.

В качестве метода минимизации функционала А. Н. Тихонова применяется метод проекции сопряжённых градиентов на множество неотрицательных координат. Для решения уравнения (57) рассматривался итерационный процесс с фейрдовскими операторами и итерационный процесс с сохранением неотрицательности компонент решения.

4.2.1 Конечно-разностные аппроксимации

1) Запишем конечно-разностную аппроксимацию уравнения (54). Введём сетки $X_{N_x} = \{x_n, 1 \leq n \leq N_x : x_n = L_x + \frac{h_x}{2} + h_x(n-1), h_x = \frac{R_x - L_x}{N_x}\}$, $Y_{N_y} = \{y_m, 1 \leq m \leq N_y : y_m = L_y + \frac{h_y}{2} + h_y(m-1), h_y = \frac{R_y - L_y}{N_y}\}$, $Z_{N_z} = \{z_k, 1 \leq k \leq N_z : z_k = L_z + \frac{h_z}{2} + h_z(k-1), h_z = \frac{R_z - L_z}{N_z}\}$ для области интегрирования P и $S_{N_s} = \{s_i, 1 \leq i \leq N_s : s_i = L_s + \frac{h_s}{2} + h_s(i-1), h_s = \frac{R_s - L_s}{N_s}\}$, $T_{N_t} = \{t_j, 1 \leq j \leq N_t : y_j = L_y + \frac{h_t}{2} + h_t(j-1), h_t = \frac{R_t - L_t}{N_t}\}$, $R_{N_r} = \{r_l, 1 \leq l \leq N_r : r_l = L_r + \frac{h_r}{2} + h_r(l-1), h_r = \frac{R_r - L_r}{N_r}\}$ для системы сенсорных плоскостей O . В результате, аппроксимируя интегралы в (54) по формуле средних, получим

$$\mathbf{B}(s_i, t_j, r_l) = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \mathbf{K}(s_i, t_j, r_l, x_n, y_m, z_k) \chi(x_n, y_m, z_k) h_x h_y h_z.$$

2) Запишем конечно-разностную аппроксимацию стабилизирующего функционала $\|\chi\|_{VH} = VH(\chi, P)$. Следует отметить, что поскольку рассматриваемая задача решается в одном слое, то фактически мы решаем двумерную обратную задачу. Используя уже введённые выше сетки X_{N_x} и Y_{N_y} , выпишем формулу вычисления вариации [47, 48]

$$\|\chi\|_{VH} \approx \sum_{i_x=1}^{N_x-1} \sum_{i_y=1}^{N_y-1} |\chi(x_{i_x+1}, y_{i_y+1}) - \chi(x_{i_x+1}, y_{i_y}) - \chi(x_{i_x}, y_{i_y+1}) + \chi(x_{i_x}, y_{i_y})|, \quad (59)$$

Легко заметить, что в правой части выражения (59) находится негладкий функционал, который обычно аппроксимируют гладким [47, 48]

$$\|\chi\|_{VH} \approx \sum_{i_x=1}^{N_x-1} \sum_{i_y=1}^{N_y-1} f(\chi(x_{i_x+1}, y_{i_y+1}) - \chi(x_{i_x+1}, y_{i_y}) - \chi(x_{i_x}, y_{i_y+1}) + \chi(x_{i_x}, y_{i_y})), \quad (60)$$

где $f(t) = \sqrt{t^2 + \epsilon^2}$, $0 < \epsilon \ll 1$.

Перепишем выражение в формуле (60) для одномерного случая

$$\|\chi\|_{VH} \approx \sum_{k=N_y+2}^{N_x N_y} f(z_k - z_{k-1} - z_{k-(N_y+1)} + z_{k-(N_y+2)}). \quad (61)$$

Запишем градиент выражения (61)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\chi\|_{VH}}{\partial z_l} &= \sum_{k=N_y+2}^K \frac{\partial f(t_k)}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial z_l} = \\ &= \sum_{k=N_y+2}^K \frac{(z_k - z_{k-1} - z_{k-(N_y+1)} + z_{k-(N_y+2)})}{\sqrt{(z_k - z_{k-1} - z_{k-(N_y+1)} + z_{k-(N_y+2)})^2 + \epsilon^2}} [\delta_{k,l} - \delta_{k-1,l} - \delta_{k-N_y,l} + \delta_{k-(N_y+1),l}], \end{aligned}$$

$$K = N_x N_y, \quad t_k = z_k - z_{k-1} - z_{k-(N_y+1)} + z_{k-(N_y+2)}, \quad 1 \leq l \leq K.$$

Задача минимизации функционала (56) решалась методом проекции сопряжённых градиентов на множество неотрицательных координат. Строго говоря, применяя данный метод, нельзя говорить о единственности решения задачи в пространстве функций ограниченных вариаций, так как стабилизирующий функционал теперь не является квадратичным. Поэтому вычисления методом проекции сопряжённых градиентов для этого пространства проводились в качестве эксперимента.

4.3 Метод решения задачи восстановления параметров намагниченности в коре планет

Исходя из предположения, что область V является приповерхностным шаровым слоем планеты глубины h , уравнение (10) с учётом (12) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R-h}^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \cdot \\ &\cdot \mathbf{M}(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (62)$$

Замечание. Здесь $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_{field}$ и $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_{MI}$. Введение дополнительных обозначения связано с тем, что матрица \mathbf{K} (и соответственно вектор-функция \mathbf{B}) может быть расширена при учёте дополнительной физической информации в постановке задачи.

Замечание. Отметим, постановка задачи (62) является физически определённой. В этой постановке необходимо восстановить одну векторную функцию по результатам измерений также одной векторной функции. Принимая

во внимание тот факт, что каждая компонента векторной функции является скалярной функцией, требуется восстановить три скалярные функции по результатам измерения трёх скалярных функций. Такая постановка приводит к системе из трёх скалярных уравнений с тремя неизвестными функциями.

При обработке экспериментальных данных вместо точно известных вектора B и матрицы A обычно известны их приближенные значения B_δ и A_h , такие, что $\|B_\delta - B\|_E \leq \delta$, $\|A - A_h\|_{E \rightarrow E} \leq h$. Это связано как с ошибками измерений индукции магнитного поля (они вносят ошибку в значения компонент вектора B), так и с ошибками в точности определения позиционирования спутника относительно планеты (они вносят ошибку в значения компонент матрицы A). При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала А. Н. Тихонова [148]

$$F^\alpha[M] = \|A_h M - B_\delta\|_E^2 + \alpha \|M\|_E^2. \quad (63)$$

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова M_η^α , $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[M]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки [148]. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) \equiv \|A_h M_\eta^\alpha - B_\delta\|_E^2 - (\delta + h \|M_\eta^\alpha\|_E)^2 = 0,$$

M_η^α стремится при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению.

4.3.1 Конечно-разностная аппроксимация

Введём сетки $\Phi_{N_\varphi} = \{\varphi_n, 1 \leq n \leq N_\varphi : \varphi_n = \frac{h_\varphi}{2} + h_\varphi(n-1), h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}\}$ и $\Theta_{N_\theta} = \{\theta_m, 1 \leq m \leq N_\theta : \theta_m = \frac{h_\theta}{2} + h_\theta(m-1), h_\theta = \frac{\pi}{N_\theta}\}$. Также, для простоты, будем исходить из предположения, что шаровой слой достаточно тонкий. Как следствие, по переменной ρ введём сетку только с одним узлом $\rho_h = R - \frac{h}{2}$. В

результате, аппроксимируя интегралы в (62) по формуле средних, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_\varphi} \sum_{m=1}^{N_\theta} \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, \rho_h \cos \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \sin \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \cos \theta_m) \cdot \\ & \cdot \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \sin \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \cos \theta_m) \cdot \rho_h^2 \sin \theta_m \cdot h h_\varphi h_\theta. \end{aligned}$$

Учтём, что 1) измерения сделаны для всех $s = \overline{1, S}$, 2) \mathbf{B} и \mathbf{M} являются векторными функциями (в частности $\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$). Таким образом, мы получаем систему с $3 \times S$ уравнениями (которые соответствуют измерению трёх компонент вектор-функции \mathbf{B} в S точках) с $3 \times N_\varphi \times N_\theta$ неизвестными (которые соответствуют сеточным значениям трёх компонент вектор-функции \mathbf{M} на введённой сетке $\Phi_{N_\varphi} \times \Theta_{N_\theta}$).

К этим уравнениям добавим следующие естественные физические ограничения.

1. Условие сшивки вдоль одного из меридианов. Это условие означает, что магнитное изображение должно быть 2π -периодическим по переменной φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_1 \sin \theta_m, \rho_h \sin \varphi_1 \sin \theta_m, \rho_h \cos \theta_m) = \\ = \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_{N_\varphi} \sin \theta_m, \rho_h \sin \varphi_{N_\varphi} \sin \theta_m, \rho_h \cos \theta_m), \\ m = \overline{1, N_\theta}. \end{aligned}$$

Эти условия дают дополнительные $3 \times N_\theta$ уравнений.

2. Условие сшивки на южном полюсе. Оно означает, что все сеточные значения компонент вектор-функции \mathbf{M} должны совпадать при $\theta = \theta_{N_\theta}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_n \sin \theta_{N_\theta}, \rho_h \sin \varphi_n \sin \theta_{N_\theta}, \rho_h \cos \theta_{N_\theta}) = \\ = \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_{n+1} \sin \theta_{N_\theta}, \rho_h \sin \varphi_{n+1} \sin \theta_{N_\theta}, \rho_h \cos \theta_{N_\theta}), \\ n = \overline{1, N_\varphi - 1}. \end{aligned}$$

Эти условия дают дополнительные $3 \times (N_\varphi - 1)$ уравнений.

3. Условие сшивки на северном полюсе.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_n \sin \theta_1, \rho_h \sin \varphi_n \sin \theta_1, \rho_h \cos \theta_1) = \\ = \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_{n+1} \sin \theta_1, \rho_h \sin \varphi_{n+1} \sin \theta_1, \rho_h \cos \theta_1), \\ n = \overline{1, N_\varphi - 1}. \end{aligned}$$

Эти условия дают дополнительные $3 \times (N_\varphi - 1)$ уравнений.

Замечание. Отметим, что при выбранном способе введения сеток, формально $\varphi_1 \neq \varphi_{N_\varphi}$, $\theta_{N_\theta} \neq \frac{\pi}{2}$, а $\theta_1 \neq 0$. Однако, при $N_\varphi \rightarrow \infty$ и $N_\theta \rightarrow \infty$: $\varphi_1 \rightarrow \varphi_{N_\varphi}$, $\theta_{N_\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а $\theta_1 \rightarrow 0$. Поэтому выписанные условия сшивки являются адекватными в случае достаточно густых сеток с большим числом интервалов N_φ и N_θ .

Таким образом, с учётом дополнительных физических ограничений, мы получаем систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из $3S + 3N_\theta + 6N_\varphi - 6$ уравнений, каждое из которых содержит $3N_\varphi N_\theta$ неизвестных (сеточные значения компонент вектор-функции \mathbf{M}). Отметим, что полученная система при достаточно большом S является переопределённой лишь с математической точки зрения. С физической точки зрения полученная система по-прежнему является определённой.

Эта система линейных алгебраических уравнений может быть записана в матричном виде

$$AM = B. \tag{64}$$

Здесь вектор M содержит сеточные значения трёх компонент неизвестной вектор-функции \mathbf{M} , первые $3S$ компоненты вектора правой части B содержат результаты экспериментальных измерений трёх компонент вектор-функции \mathbf{B} , последующие компоненты вектора B являются нулями.

5 Численное моделирование основных характеристик магнитных сред

В данной главе рассмотрены результаты численных решений модельных и прикладных задач. Результаты главы представлены в работах [40–42].

5.1 Результаты восстановления магнитной восприимчивости на модельных данных

В данном параграфе представлены результаты восстановления магнитной восприимчивости по трём различным моделям данных и проведено их сравнение. Магнитную восприимчивость можно восстанавливать как по измеренным значениям магнитного поля, так и по измеренным значениям полного тензора градиентов компонент магнитного поля. Также можно использовать обе модели сразу. В статье [40] была на модельном примере исследована задача восстановления магнитной восприимчивости для трёх случаев: 1) значения только магнитного поля (MI—модель), 2) значения полного тензора градиентов компонент магнитного поля (MGT—модель), 3) значения только магнитного поля вместе со значениями полного тензора градиентов компонент магнитного поля (MI+MGT—модель). Целью данной работы было сравнение трёх указанных моделей. Исследования такой же задачи для восстановления параметров намагниченности для модельных и реальных данных представлены в работе [62].

Для сравнения трёх моделей (MI, MI+MGT и MGT—модели) была проведена симуляция экспериментальных данных с относительной ошибкой $\delta \sim 4\%$ (как для MI-данных, так и для MGT-данных). Тестовые данные моделировались в области $P = \{(x, y, z) : -5000 \leq x \leq 5000, -5000 \leq y \leq 5000, -105 \leq z \leq -95\}$ (что соответствует восстановлению распределения магнитной восприимчивости на глубине $z = -100$) с сеткой $(N_x, N_y, N_z) = (80, 80, 1)$ и области $O = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : -4000 \leq s \leq 4000, -4000 \leq t \leq 4000, L_r \leq r \leq 2000\}$ с сеткой $(N_s, N_t, N_r) = (350, 20, 1)$. Модельная функция χ представлена на рис. 6(а). Результаты вычислений с использованием MI, MI+MGT и

MGT-моделей представлены на рис. 6(b,c,d). Рис. 6(c) демонстрирует, что MGT-модель даёт результат с наилучшей детализацией решения.

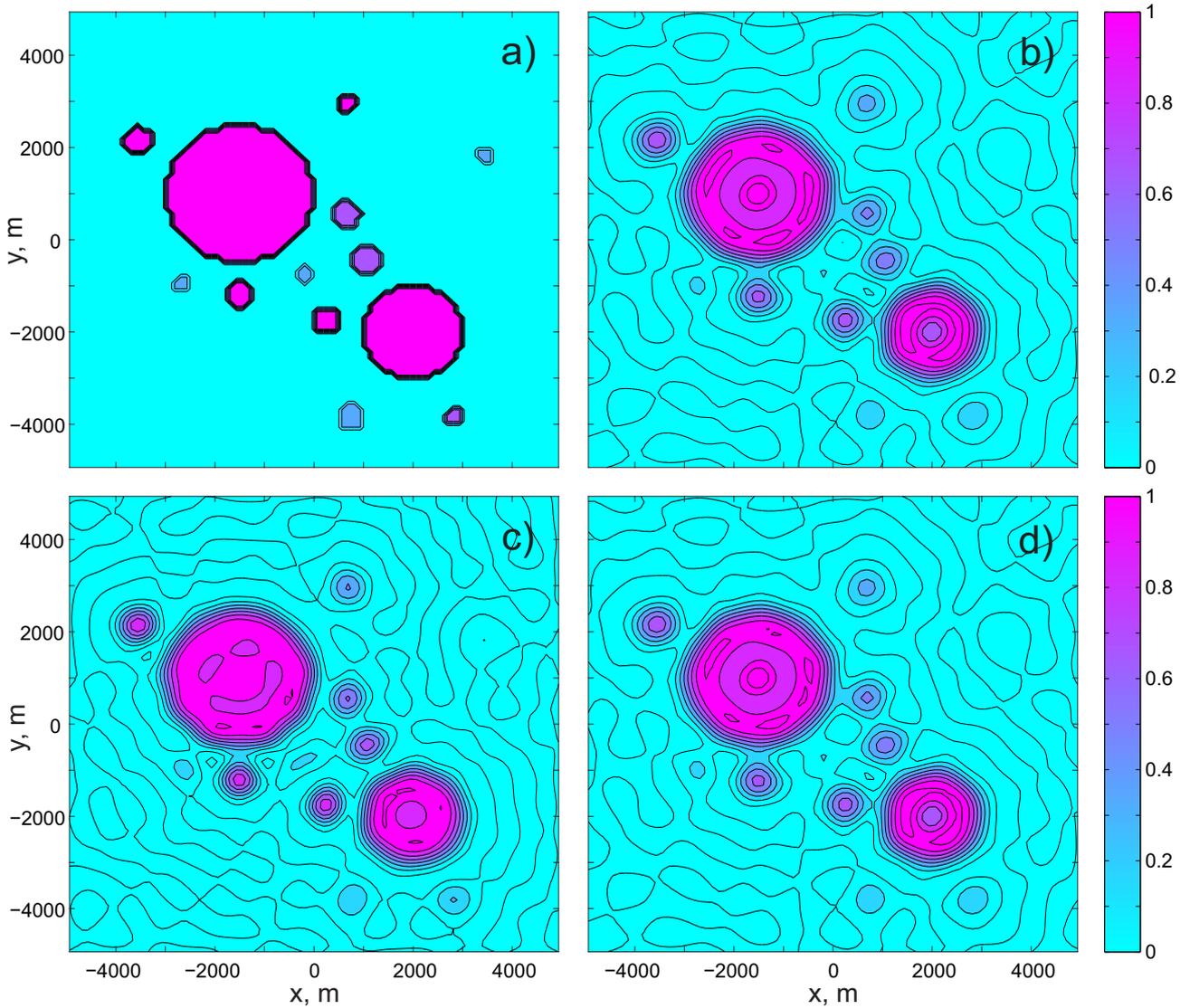


Рис. 6: Результаты вычислений: а) модельное решение — функция $\chi(x, y)$, б) восстановленное решение при использовании MI-модели, в) восстановленное решение при использовании MGT-модели, г) восстановленное решение при использовании MI+MGT-модели.

Объяснением того почему MGT-модель дала наилучший результат является то, что $\mathbf{B}_{field\ dipole} \sim \frac{1}{r^3}$, $\mathbf{B}_{tensor\ dipole} \sim \frac{1}{r^4}$, то есть полевая составляющая полностью “заглушает” тензорную, поэтому применение MI+MGT-модели не даёт никаких улучшений результата по сравнению MI-моделью.

Таким образом, анализ результатов, полученных на модельных данных, позволяет нам сделать вывод о том, что при решении задачи с реальными данными MGT-модель даст нам наилучший результат и в дальнейшей работе уже с реальными данными по восстановлению магнитной восприимчивости, используются только значения полного тензора градиентов компонент магнитного поля (MGT-модель).

5.2 Оценка погрешностей входных данных

Уровень помехи во входных данных, к сожалению, известен далеко не всегда. В отсутствие такого рода информации об изучаемом сигнале оценить качество приближенного решения обратной задачи практически невозможно. Поэтому нам представляется целесообразным предварительный статистический анализ данных. Ниже предлагается один из возможных подходов к получению оценки погрешности.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор с произвольными вещественными координатами x_1, x_2, x_3 , а $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор с целочисленными координатами n_1, n_2, n_3 . Частичная сумма порядка N кратного ряда Фурье будет иметь вид [159]:

$$T_N(\mathbf{x}) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \sum_{n_3=-N}^N \hat{t}_{\mathbf{n}} \exp^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{n})}, \quad (65)$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3$, $\hat{t}_{\mathbf{n}}$ — комплекснозначный коэффициент разложения, который подлежит оценке. Указанный многочлен можно переписать в вещественную форму.

Величины \mathbf{B}_{field} и \mathbf{B}_{tensor} (далее просто \mathbf{B}) представляют собой вектор-функции, зависящие от положения точки \mathbf{x} в трехмерном пространстве: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$; где x_1, x_2, x_3 - либо декартовы, либо сферические координаты. Приближим каждую компоненту вектор-функции $\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3)$ в точке изме-

рений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ тригонометрическим многочленом (65). Тригонометрический многочлен был выбран в силу наличия явно выраженных осцилляций в значениях правой части. Коэффициенты этого многочлена можно оценить с помощью модели линейной регрессии и метода наименьших квадратов.

Для каждой точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где проводились измерения, находим отклонения от полученной модели. Все эти значения суммируются с усреднением для получения оценки погрешности модели регрессии, которую автор взял в качестве оценки погрешности правой части

$$\delta^2 = \sum_{m=1}^M \frac{(B(\mathbf{x}_i) - T_N(\mathbf{x}_i))^2}{M},$$

где M — общее количество точек измерений, $B(\mathbf{x}_i)$ - измеренное в i -ой точке значение компоненты вектора правой части.

Приведём оценки погрешностей правой части. Для задачи по восстановлению магнитной восприимчивости в земной коре $\delta^2 = 429.37$, для задачи по восстановлению намагниченности в коре Меркурия $\delta^2 = 8.466 * 10^{-12}$.

5.3 Восстановления магнитной восприимчивости по измеренным значениям градиента магнитного поля на поверхности Земли с применением различных алгоритмов

По результатам измерений градиента магнитного поля была восстановлена магнитная восприимчивость в двух областях. Для решения реальной задачи была использована MGT-модель.

1) Область восстановления $P = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 9000, 0 \leq y \leq 7000, -205 \leq z \leq -195\}$ (что соответствует нахождению распределения магнитной восприимчивости на глубине $z = -200$) с сеткой $(N_x, N_y, N_z) = (50, 50, 1)$ и область наблюдений $O = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : 55 \leq s \leq 8788, 170 \leq t \leq 6910, -1 \leq r \leq 1\}$ с сеткой $(N_s, N_t, N_r) = (100, 77, 1)$.

2) Рассмотрим также решения для другой глубины. Область $P = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 9000, 0 \leq y \leq 7000, -505 \leq z \leq -495\}$ определяется для нахождения распределения магнитной восприимчивости на глубине $z = -500$) с сеткой

$(N_x, N_y, N_z) = (50, 50, 1)$ и область наблюдений $O = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : 55 \leq s \leq 8788, 170 \leq t \leq 6910, -1 \leq r \leq 1\}$ с сеткой $(N_s, N_t, N_r) = (100, 77, 1)$.

5.3.1 Результаты работы метода проекции сопряжённых градиентов на множество неотрицательных координат в пространстве Соболева

В первом расчёте параметр регуляризации $\alpha = 0.0$.

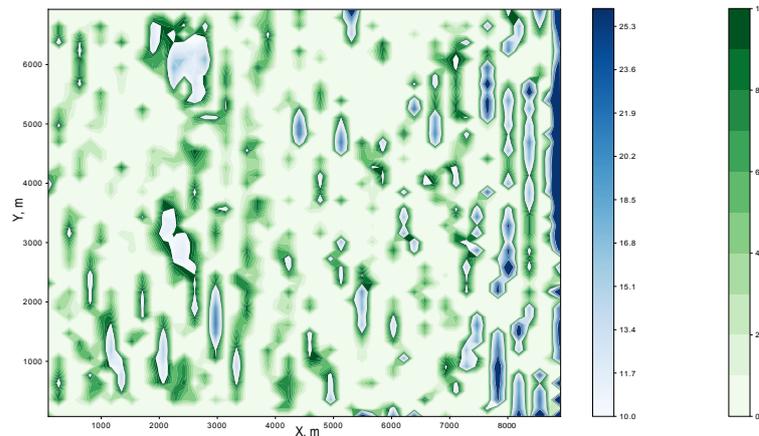


Рис. 7: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^3$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Параметр регуляризации $\alpha = 0.0$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.56381 * 10^4$. Время счёта ~ 5 минут.

Далее увеличиваем параметр регуляризации.

На предыдущих двух графиках (7) и (8) легко видеть эффект сглаживания решения при увеличении параметра регуляризации. Также важно отметить, что не меняются и положения локальных максимумов полученных решений.

Так как диапазон значений магнитной восприимчивости многих известных в природе парамагнетиков составляет $10^{-6} - 10^{-4}$ [160], то найденное приближённое решение χ^α следует искать именно в пределах этого диапазона, а значения магнитной восприимчивости большие 10^{-4} рассматривать как слишком высокие и подозрительные.

В качестве решения примем представленный на рис. 9 результат, соответствующий параметру регуляризации $\alpha = 10^7$ и относительной погрешности $\delta = 18\%$.

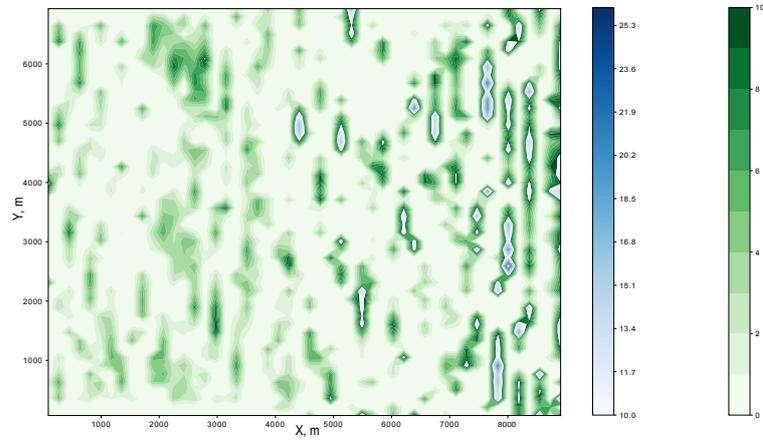


Рис. 8: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^3$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Параметр регуляризации $\alpha = 2.5 * 10^3$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.575709 * 10^4$. Время счёта ~ 4 минут.

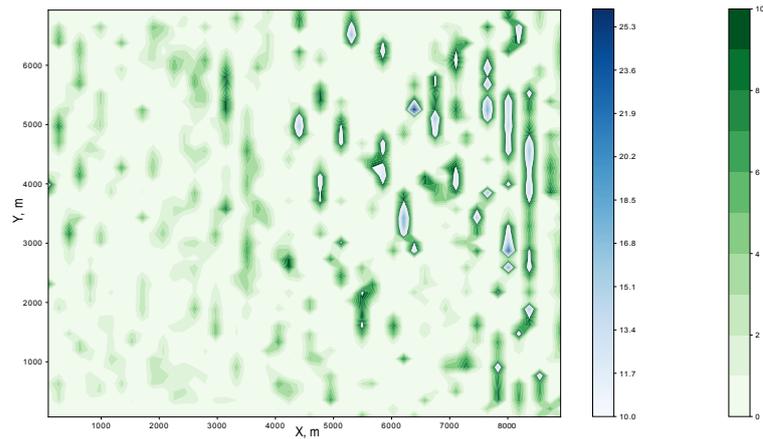


Рис. 9: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Параметр регуляризации $\alpha = 10^7$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618646 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

Следующая серия расчётов проведена для глубины 500 м для трёх значений параметра регуляризации.

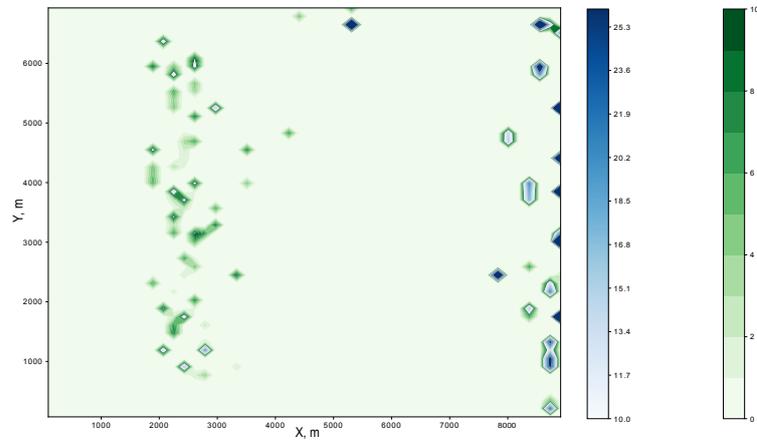


Рис. 10: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^2$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Параметр регуляризации $\alpha = 0.0$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.595917 * 10^4$. Время счёта ~ 5 минут.

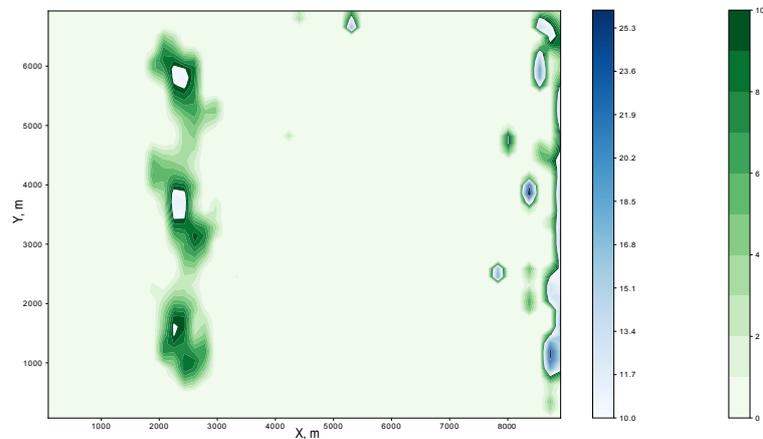


Рис. 11: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^5$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Параметр регуляризации $\alpha = 10^5$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618157 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

В качестве решения для глубины 500 м выберем результат представленный на рис. (12). Относительная погрешность результата $\delta = 11\%$.

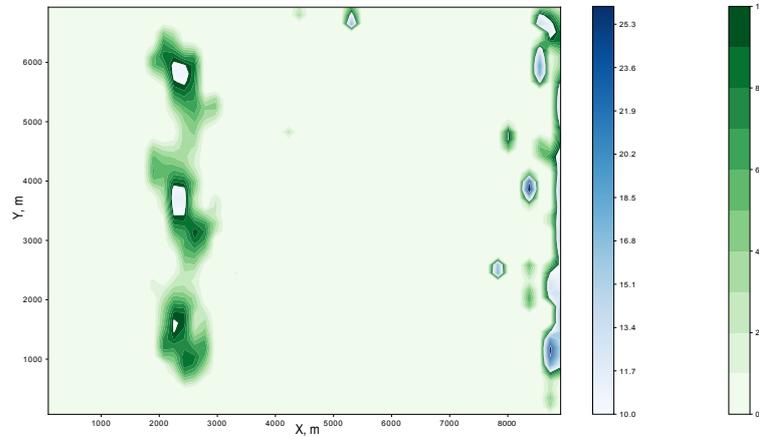


Рис. 12: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Параметр регуляризации $\alpha = 10^6$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618496 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

5.3.2 Результаты работы алгоритма итерационной регуляризации с фейеровскими операторами

Теперь проведём вычисления с помощью алгоритма из раздела 4.1.4. В отличие от предыдущего, рассматриваемый регуляризирующий алгоритм с фейеровскими операторами является итерационным, поэтому регуляризирующим параметром является количество итераций алгоритма.

Далее, примем $\alpha = 10^8$. Для этого алгоритма отсутствует апостериорный способ оценки параметра регуляризации, поэтому предлагается действовать следующим образом. Увеличиваем число итераций, пока не начнут проявляться значения магнитной восприимчивости, соответствующие характерному для парамагнетиков диапазону. В данном случае в качестве решения был выбран рис. 13 с количеством итераций $k^* = 10$.

Аналогичным образом были проведены вычисления для глубины 500 м. Легко видеть, что результаты, представленные на рис. (14), в смысле положений локальных максимумов решения, совпадают с аналогичными результатами, полученными методом проекции сопряжённых градиентов.

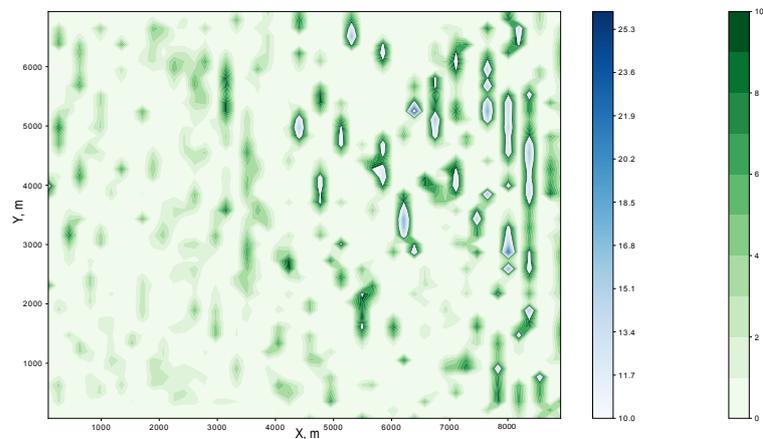


Рис. 13: Результаты вычислений алгоритма итерационной регуляризации с фейеровскими операторами: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Параметр $\alpha = 10^8$. Число итераций $k^* = 10$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618644 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

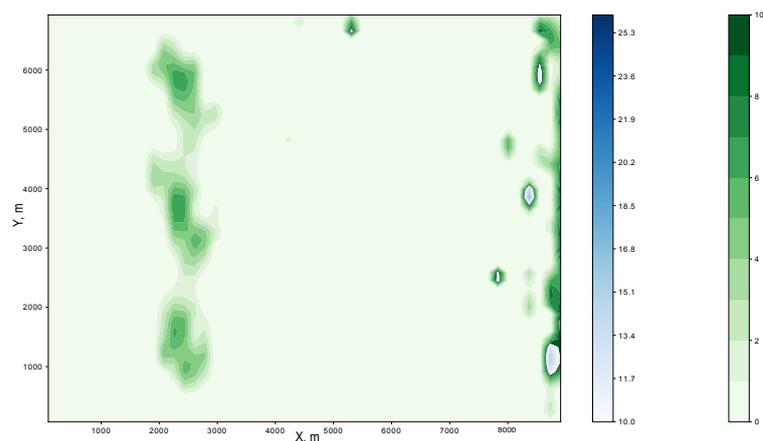


Рис. 14: Результаты вычислений алгоритма итерационной регуляризации с фейеровскими операторами: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Параметр $\alpha = 10^6$. Число итераций $k^* = 5$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618614 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

5.3.3 Результаты работы алгоритма итерационной регуляризации, сохраняющего неотрицательность.

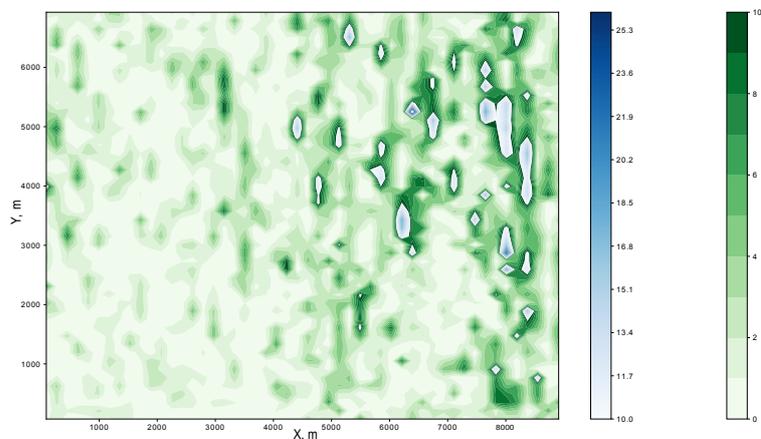


Рис. 15: Результаты вычислений алгоритма из статьи [158]: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Параметр $\mu = 10^6$. Число итераций $k^* = 2$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618577 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

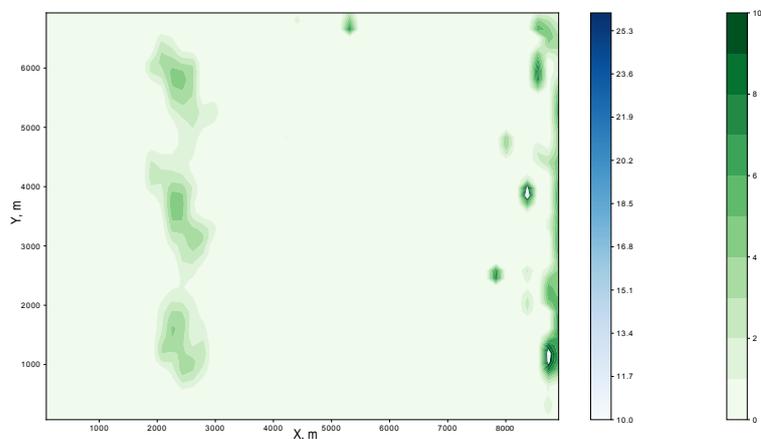


Рис. 16: Результаты вычислений алгоритма из статьи [158]: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Параметр $\mu = 10^6$. Число итераций $k^* = 2$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618704 * 10^4$. Время счёта ~ 2 минут.

5.3.4 Результаты работы метода проекции сопряжённых градиентов в пространстве функций ограниченных вариаций типа Харди

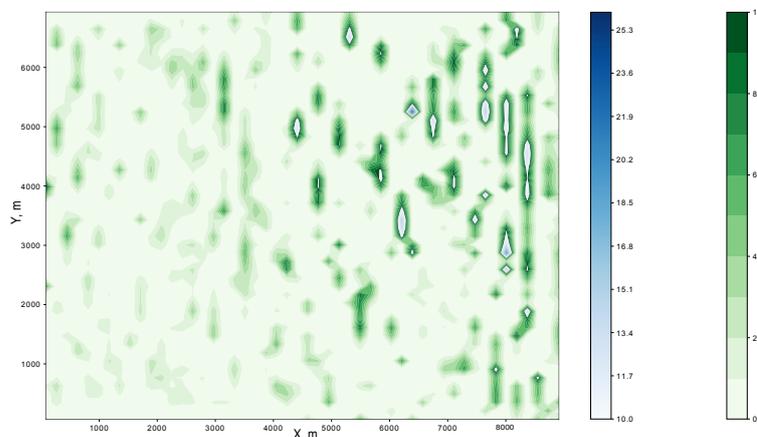


Рис. 17: Восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Параметр $\alpha = 10^6$. Параметр $\epsilon = 10^{-6}$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618659 * 10^4$. Время счёта ~ 1 минут.

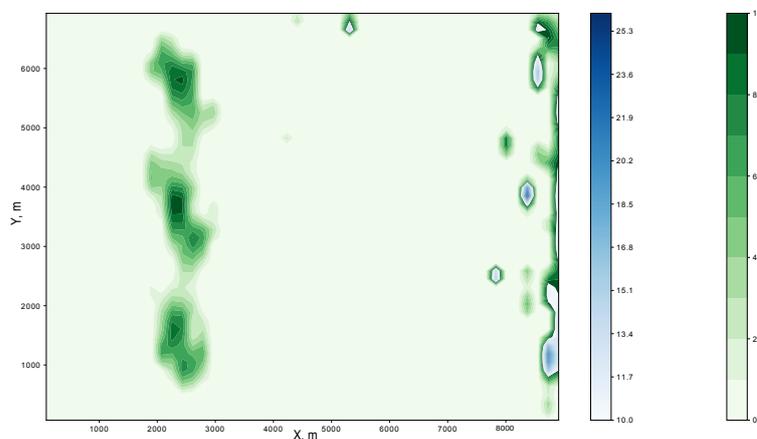


Рис. 18: Восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Параметр $\alpha = 10^6$. Параметр $\epsilon = 10^{-6}$. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618514 * 10^4$. Время счёта ~ 1 минут.

Во всех приведённых результатах важно, что примерно сохраняются положения неоднородностей магнитной восприимчивости.

5.3.5 Сравнение результатов работы алгоритмов

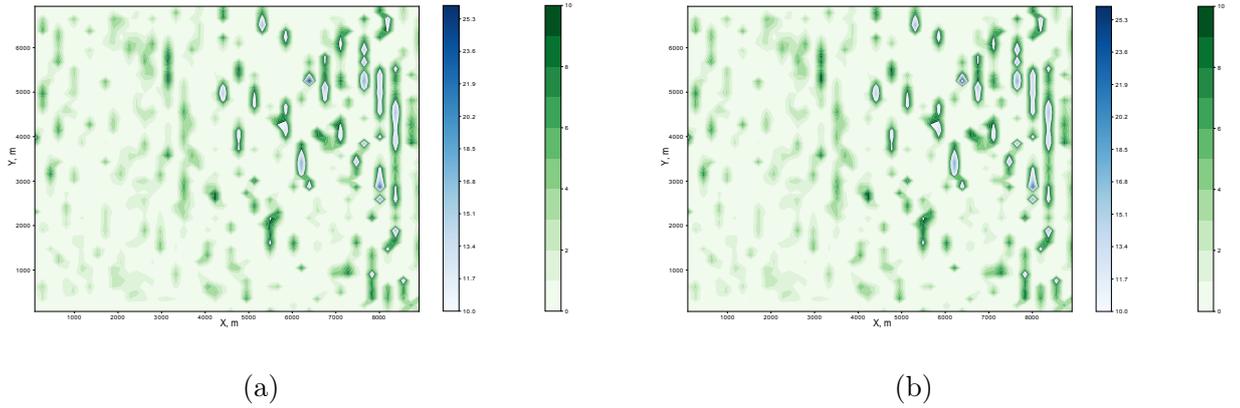


Рис. 19: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов **(a)** и итерационным процессом с фейровскими операторами **(b)**: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618646 * 10^4$ для **(a)**. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618644 * 10^4$ для **(b)**.

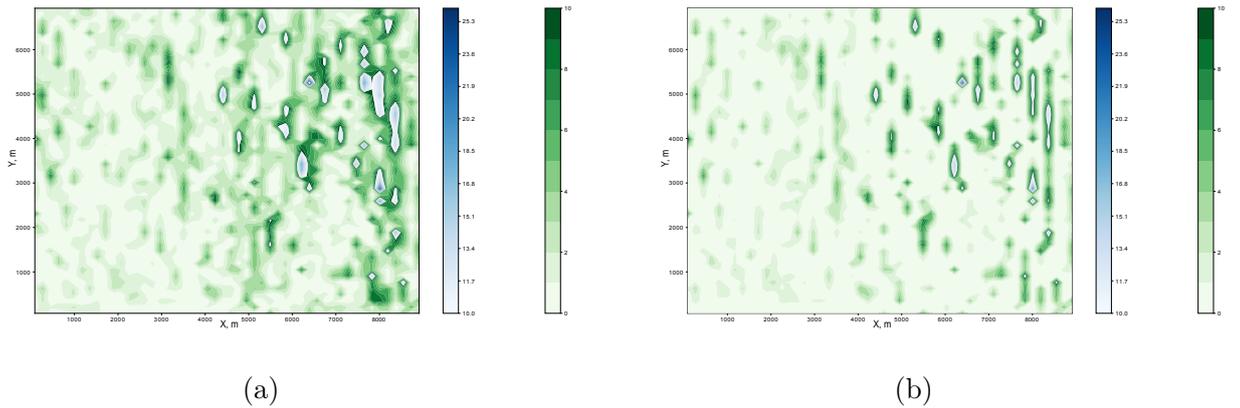


Рис. 20: Результаты вычислений итерационным процессом с сохранением неотрицательности компонент решения из статьи [158] **(a)** и методом проекции сопряженных градиентов на множество неотрицательных координат в пространстве функций ограниченной вариации типа Харди **(b)**: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618577 * 10^4$ для **(a)**. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618659 * 10^4$ для **(b)**.

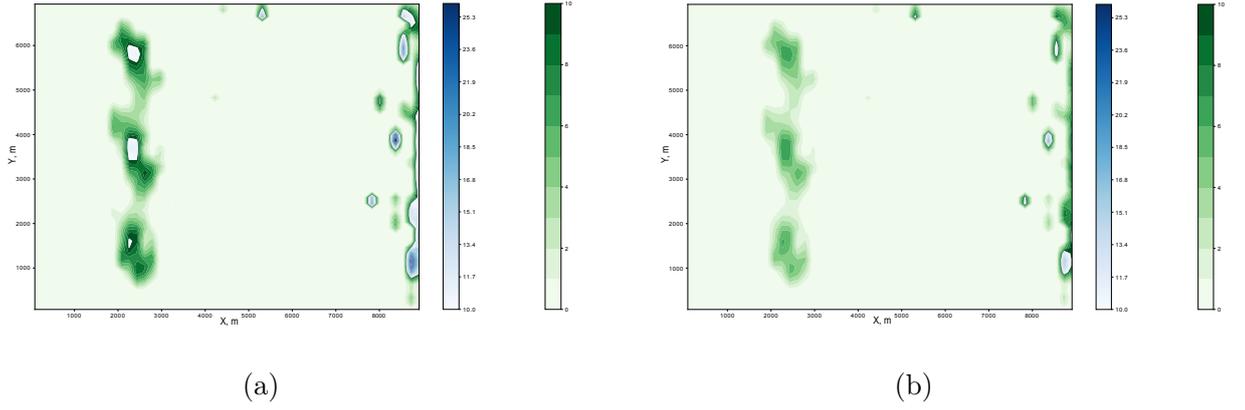


Рис. 21: Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов **(a)** и итерационным процессом с фейрвскими операторами **(b)**: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618496 * 10^4$ для **(a)**. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618614 * 10^4$ для **(b)**.

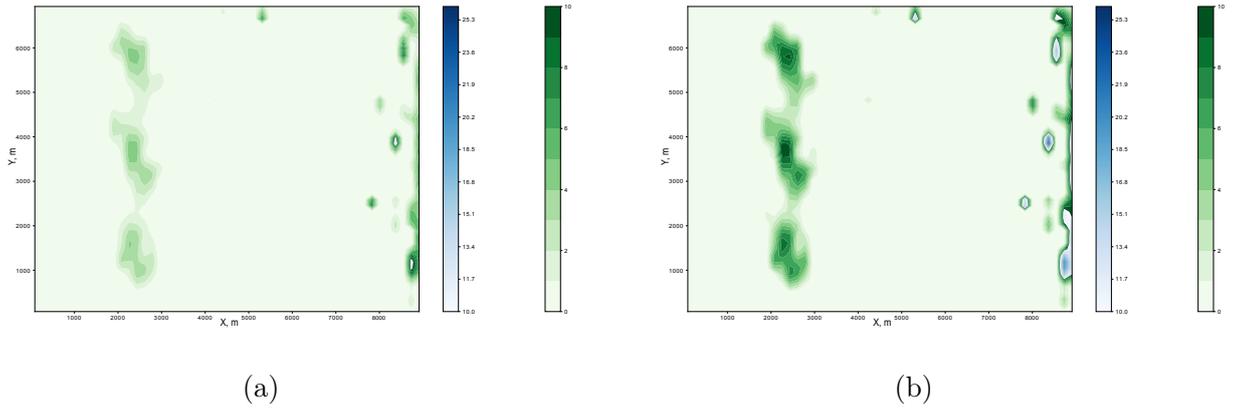


Рис. 22: Результаты вычислений итерационным процессом с сохранением неотрицательности компонент решения из статьи [158] **(a)** и методом проекции сопряженных градиентов на множество неотрицательных координат в пространстве функций ограниченной вариации типа Харди **(b)**: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 500 м. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618704 * 10^4$ для **(a)**. Невязка $\|\mathbf{A}\chi^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|^2 = 1.618514 * 10^4$ для **(b)**.

Из представленных рисунков видно, что все алгоритмы дали схожие результаты, что позволяет уверенно локализовать неоднородности в парамагнитной среде, так как на всех графиках положения пиков не претерпевают серьёзных изменений. Стоит отметить, что хотя применённые в данной работе итерационные алгоритмы и не показали лучших результатов по сравнению с вариационным алгоритмом, но они достаточно просты в реализации. В этом их главное преимущество по сравнению с вариационным алгоритмом на основе метода проекции сопряжённых градиентов на множество векторов

с неотрицательными компонентами.

При восстановлении применялись метод проекции сопряженных градиентов на множество неотрицательных координат, алгоритм итерационной регуляризации с фейеровскими операторами и алгоритм итерационной регуляризации, сохраняющий неотрицательность. Все алгоритмы описаны в главе 2. Для выбора параметра регуляризации, в случае метода проекции сопряженных градиентов, можно использовать алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки [148]. В случае алгоритма с фейеровскими операторами и алгоритма из статьи [158] параметром регуляризации выступает номер итерации в соответствующем итерационном процессе. Наличие априорной физической информации о полученном решении позволяет нам быть уверенными в результатах обработки. Важно отметить, что описанная выше методология должна быть дополнена тщательным анализом специалистов геофизиков и геологов, а также сравнением с результатами, полученными с помощью других методов исследования, поскольку важна не только обработка экспериментальных данных, но и всесторонний анализ и интерпретация полученных результатов.

5.4 Определение намагниченности породы в коре по данным космических миссий

По результатам космических миссий мы можем попытаться восстанавливать параметры намагниченности в коре планеты. Как и при решении предыдущих задач мы не располагаем ни точным значением оператора задачи, ни точными значениями входных данных, но имеем представление об уровне их погрешностей, поэтому для определения параметра регуляризации можно с успехом применять ОПН. Также автор для определения приближенного решения опирался на имеющиеся в данной задаче априорные ограничения. Так как в решаемой задаче получить приемлемые решения довольно непросто в силу того, что замеры происходят на серьезном удалении от поверхности планеты, то наличие таких ограничений позволяет с большей уверенностью определить, насколько адекватно полученное приближенное решение. Оче-

видно, что если взять сетку Φ_{N_φ} с разными сдвигами (путем изменения параметра φ_{shift}), то решение задачи не должно измениться. Однако изменение параметра φ_{shift} приводит к изменению компонент плохо обусловленной матрицы A в системе (64), поэтому меняется и решение задачи (см. рис. 24–25). Вследствие этого, при выборе приближённого решения, применяя ОПН для выбора соответствующего параметра регуляризации, автор исходил из следующих соображений: норма разности решений при различных значениях параметра φ_{shift} должна быть минимальной.

5.4.1 Результаты восстановления намагниченности в коре Меркурий по данным миссии MESSENGER

В этом пункте приведены результаты восстановления намагниченности в коре Меркурий по данным миссии MESSENGER [161]. Область наблюдения представляет собой совокупность точек, в которых измерялась магнитная индукция Меркурия с 23 по 29 марта и с 3 по 28 апреля 2011 года с интервалом в три дня. Было взято двенадцать файлов с данными, и каждый файл соответствовал одному дню измерения. В каждом таком файле берется каждая 6-я точка [161], начиная с первой и заканчивая 60-тысячной (см. рис. 23). Таким образом, $S = 12184$. Для расчетов использовались сетки с числом интервалов $N_\varphi = 40$ и $N_\theta = 40$. Сеточные данные позволили восстановить качественное распределение параметров намагниченности на поверхности Меркурия. В расчетах использовались значения среднего радиуса Меркурия $R = 2439700$ (м) и толщины приповерхностного слоя $h = 100000$ (м).

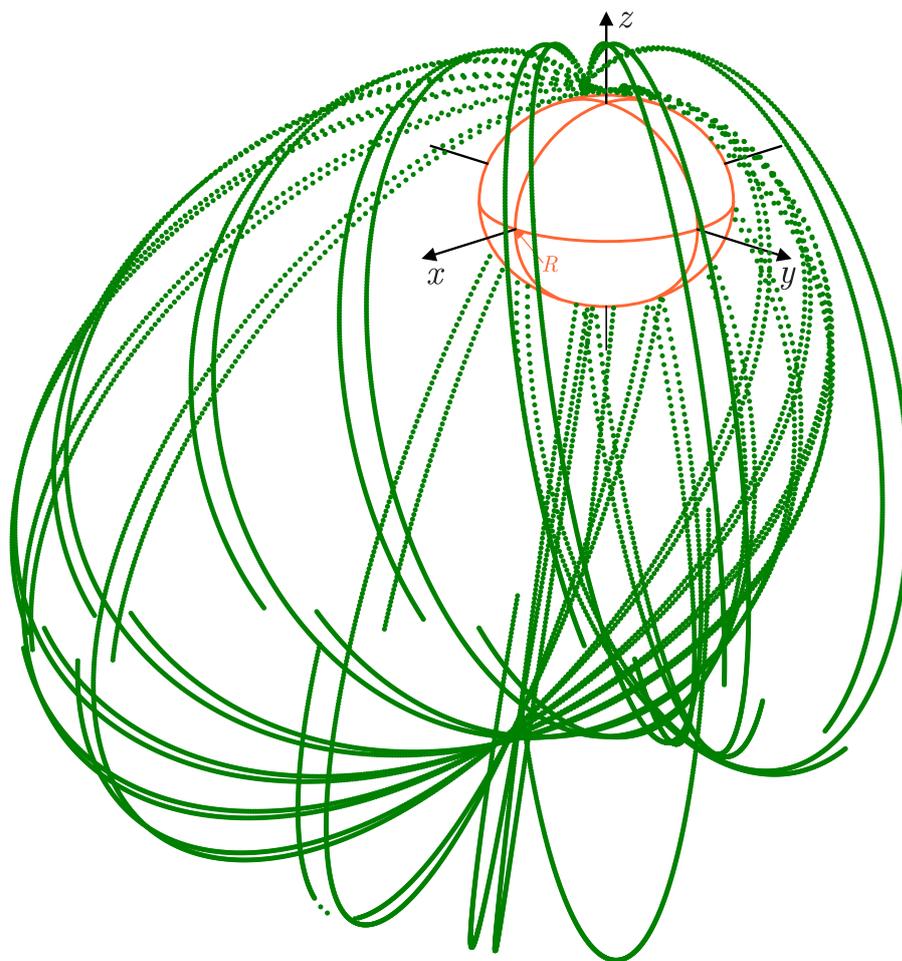


Рис. 23: Расположение точек, в которых спутник проводил измерения.

Первая серия расчётов, как обычно, проведена для параметра регуляризации $\alpha = 0.0$.

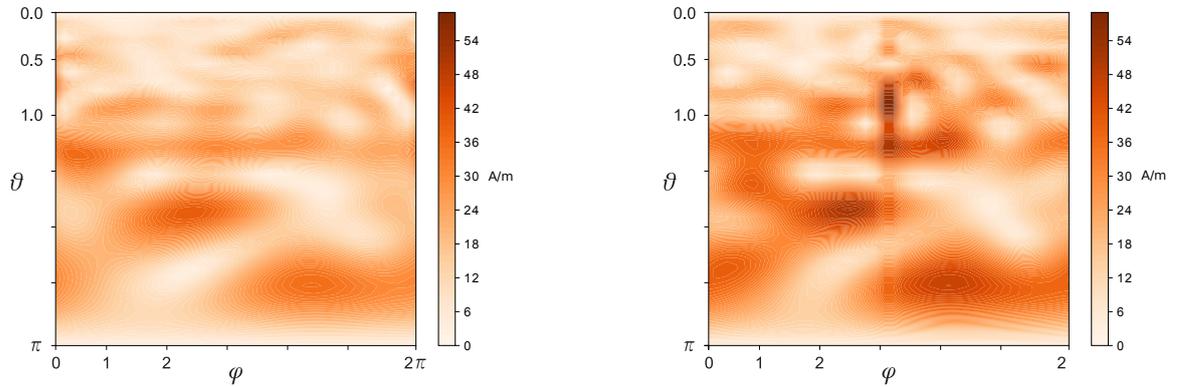


Рис. 24: Значение модуля намагниченности $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$ для $\varphi_{shift} = 0$ (левая картинка) и $\varphi_{shift} = \pi$ (правая картинка). Параметр регуляризации $\alpha = 0.0$. Норма разности решений $\|M_{shifted} - M\| = 1.243 * 10^3$. Время счёта ~ 2 минут.

Далее параметр регуляризации увеличивается до значения $\alpha = 10^{-20}$.

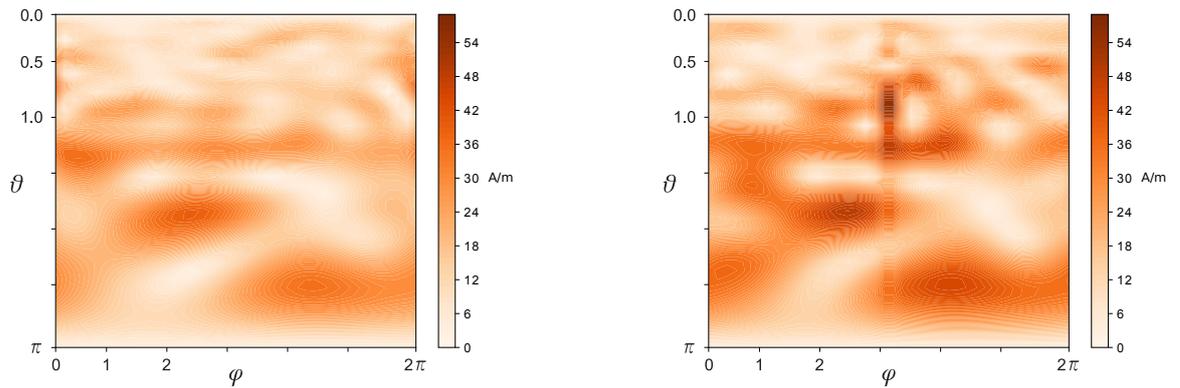


Рис. 25: Значение модуля намагниченности $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$ для $\varphi_{shift} = 0$ (левая картинка) и $\varphi_{shift} = \pi$ (правая картинка). Параметр регуляризации $\alpha = 10^{-20}$. Норма разности решений $\|M_{shifted} - M\| = 1.197 * 10^3$. Время счёта ~ 2 минут.

На приведённых выше графиках видна разница между решением со сдвигом по φ и решением без сдвига. На представленных ниже графиках был подобран такой параметр регуляризации, что эта разница сведена к минимуму.

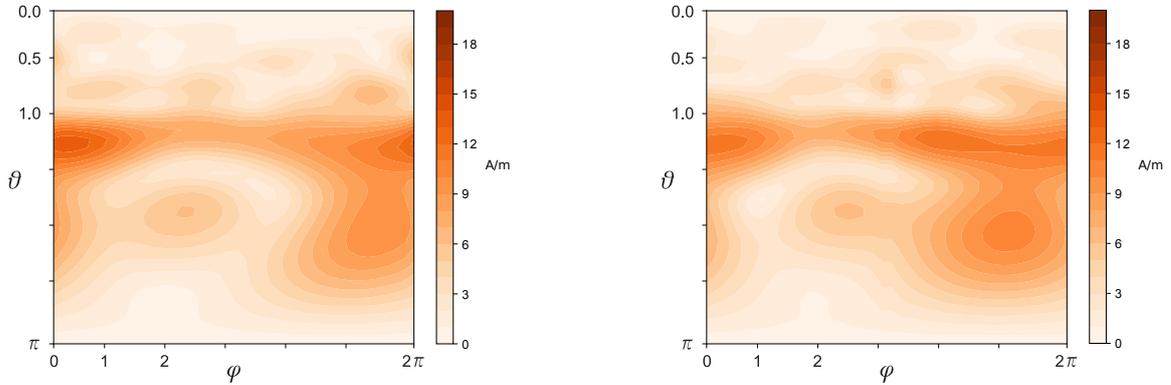


Рис. 26: Значение модуля намагниченности $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$ для $\varphi_{shift} = 0$ (левая картинка) и $\varphi_{shift} = \pi$ (правая картинка). Параметр регуляризации $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-18}$. Норма разности решений $\|M_{shifted} - M\| = 3.127 \cdot 10^2$. Время счёта ~ 2 минут.

В качестве результата для Меркурия по ОПН выбрано решение при $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-18}$, а сравнение решений со сдвигом по φ и без него позволяет быть уверенными в правильности полученного результата. Относительная погрешность решения $\delta = 7\%$. Изображение решения представлено на рис. 27.

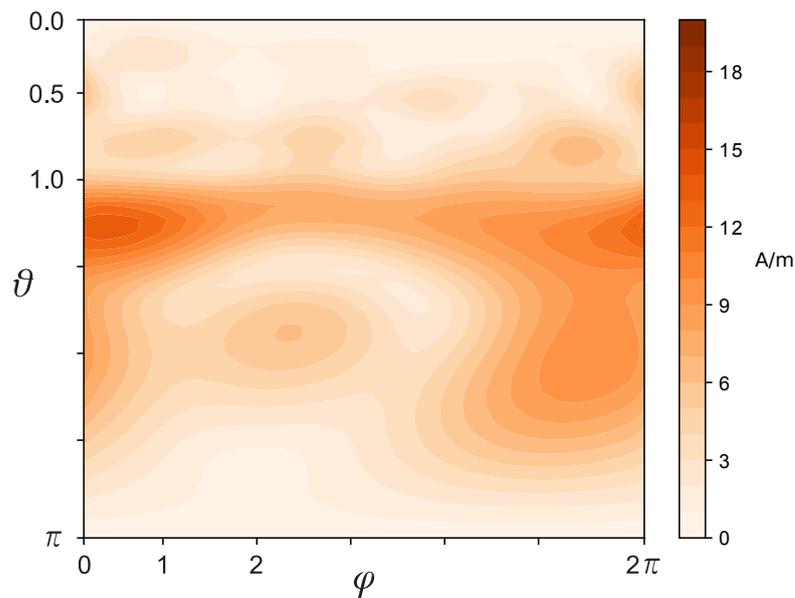


Рис. 27: Значение модуля намагниченности $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$.

5.4.2 Результаты восстановления намагниченности в коре Марса по данным миссии MAVEN

По аналогии с описанной в предыдущем разделе методикой была определена намагниченность коры Марса по данным миссии MAVEN. В качестве экспериментальных данных были взяты данные [71] наблюдений NASA's Mars MAVEN orbiter [72]. Сеть наблюдений представляет из себя набор точек, в которых измерялась индукция магнитного поля Марса в 135-й день 2020-го года. Из файла с данными [71] взята каждая 32-я точка, начиная с первой и заканчивая 86400-ой (см. рис. 28). Таким образом, $S = 2700$. Для расчётов использовались сетки с числом интервалов $N_\varphi = 20$ и $N_\theta = 20$. Данные сетки позволили восстановить качественное распределение параметров намагниченности по поверхности Марса. При расчётах использовались значения для среднего радиуса Марса $R = 3389500$ (м) и толщины приповерхностного слоя $h = 1000$ (м). Результаты представлены на рис. 29 в полярной системе координат.

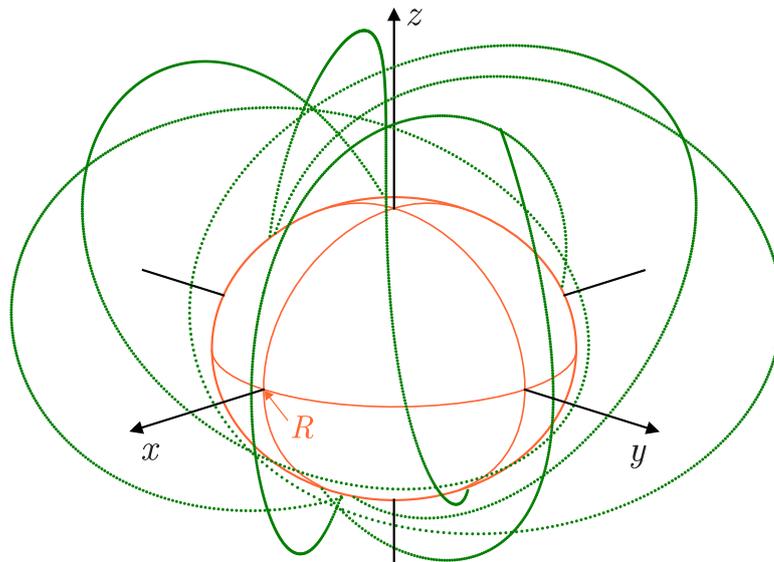


Рис. 28: Расположение точек, в которых выполнялись спутниковые измерения.

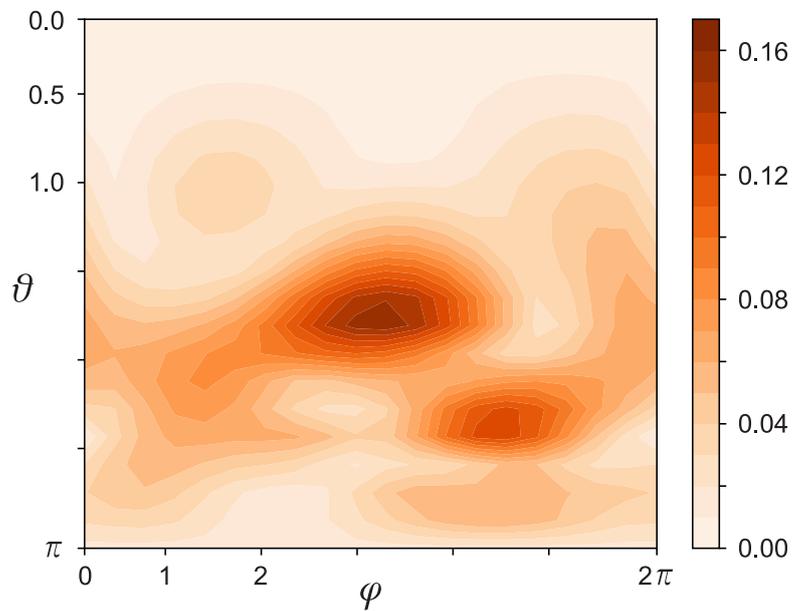


Рис. 29: Значения модуля намагниченности $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$. Значения нормализованы. Параметр регуляризации $\alpha = 1.7 * 10^{-17}$. Время счёта ~ 0.5 минут.

5.5 Математический эксперимент по локализации ”тонких структур”

Для выделения высокочастотной компоненты внутреннего магнитного поля метод из раздела 3.4 был применён для трёх шаровых слоёв, окружающих Меркурий (см. рис. 4). Для этого была предварительно решена прямая задача на основе результатов статьи [42]. При решении прямой задачи использовались сетки с числом интервалов $N_r^s = 1$, $N_\varphi^s = 100$ и $N_\theta^s = 70$. $S = N_r^s N_\varphi^s N_\theta^s = 7000$.

Ниже приводится описание шаровых слоев, в которые были пересчитаны значения магнитного поля:

1. Точки измерения магнитного поля расположены на высоте 10 (км) относительно поверхности Меркурия. $S_1 = \{r : a_1 < r < c_1\}$, где $a_1 = R_M + h_{bottom}^1$, $c_1 = R_M + h_{up}^1$, $h_{bottom}^1 = 9999$ (м), $h_{up}^1 = 10001$ (м). Значение параметра $b = R_M + 10000$ (м).
2. Точки измерения магнитного поля расположены на высоте 50 (км) относительно поверхности Меркурия. $S_2 = \{r : a_2 < r < c_2\}$, где $a_2 = R_M + h_{bottom}^2$, $c_2 = R_M + h_{up}^2$, $h_{bottom}^2 = 49999$ (м), $h_{up}^2 = 50001$ (м). Значение параметра $b = R_M + 50000$ (м).
3. Точки измерения магнитного поля расположены на высоте 100 (км) относительно поверхности Меркурия. $S_3 = \{r : a_3 < r < c_3\}$, где $a_3 = R_M + h_{bottom}^3$, $c_3 = R_M + h_{up}^3$, $h_{bottom}^3 = 99999$ (м), $h_{up}^3 = 100001$ (м). Значение параметра $b = R_M + 100000$ (м).

Следует отметить, что во всех трех случаях нами был выбран с целью шаровой слой толщиной в два метра. Такой тонкий шаровой слой взят с целью удовлетворить условию приближения тонкой оболочки, которое позволяет значительно упростить задачу по выделению внутреннего поля (см. раздел 3.4).

Для локализации “тонких структур” в коре Меркурия применяется подход, опробованный нами в работах [41, 42]. Мы предполагаем, что магнит-

ные массы находятся в шаровом слое, целиком погруженном в кору планеты. Толщина шарового слоя, в котором, по предположению, находятся магнитные массы, выбиралась нами исходя из физических условий задачи: если источники поля располагаются в коре, то внешний радиус слоя должен быть близок к среднему радиусу Меркурия, а внутренний должен быть на 10-15 километров меньше, чем внешний. Однако такой подход не ограничивает общности: можно задавать носители магнитных масс на различных поверхностях, ограничивающих объемные образования внутри Меркурия. При этом требования к такого рода объемным источникам магнитного поля должны предъявляться исходя из априорной информации о геологическом строении планеты. Есть надежда, что после 2025 (когда аппарат *VeriColombo* выйдет на стационарную орбиту вокруг Меркурия [94]) объем данных в режиме реального времени о ближайшей к Солнцу планете существенно возрастет.

Во всех трёх случаях для решения обратной задачи (напомним, что подробный алгоритм решения описан в работе [42]) использовались сетки с числом интервалов $N_\varphi = 40$ и $N_\theta = 40$. Для расчётов были взяты значения для среднего радиуса Меркурия $R_M = 2439700$ (m) и толщины приповерхностного слоя $h = 15000$ (m).

Первая серия расчётов была проведена для точек с пересчитанными значениями магнитных полей, расположенных в шаровом слое S_2 , для нескольких различных значений параметров регуляризации (см. описание алгоритма в [42]). Ниже, на рис. 30 и 31, представлены два наиболее характерных результата при $\alpha = 10^{-14}$ и $\alpha = 10^{-12}$.

Поскольку обратная задача решается в отсутствие знаний о погрешности задания входных данных, то ты мы не можем применить обобщенный принцип невязки [148] для обоснованного выбора параметра регуляризации α . Поэтому при поиске решения были выполнены еще две серии расчетов для шаровых слоев S_1 и S_3 с разными значениями параметра регуляризации. Результаты этих расчётов приведены на рис. 32 и 33.

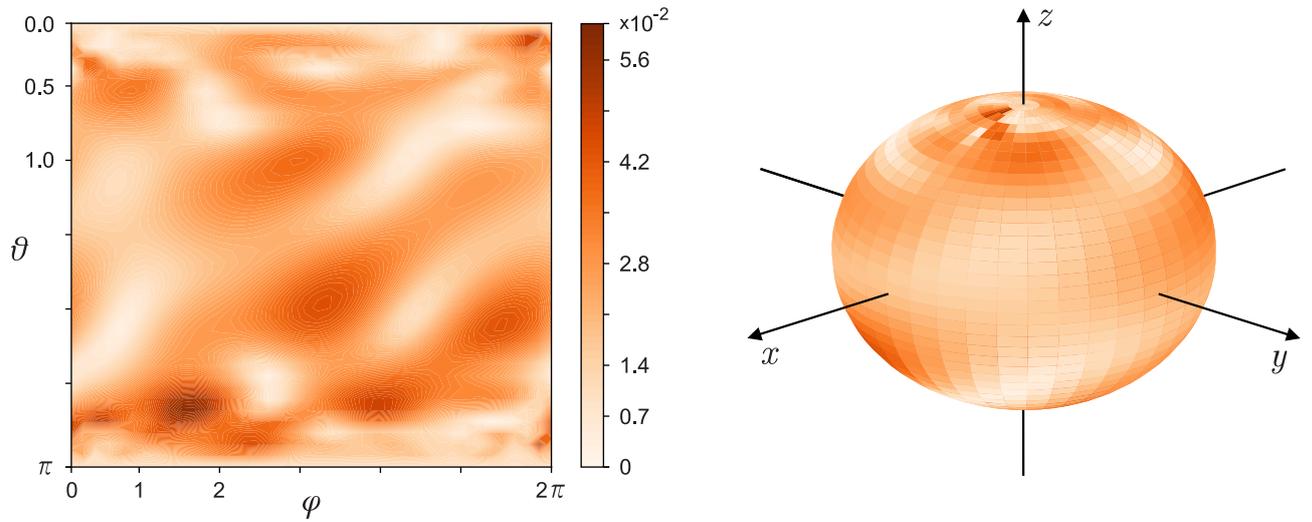


Рис. 30: Нормализованное значение величины полученной плотности магнитного момента $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$. Расчёты проведены для данных, локализованных в шаровом слое S_2 . Параметр регуляризации $\alpha = 10^{-14}$. Время счёта ~ 1 минут.

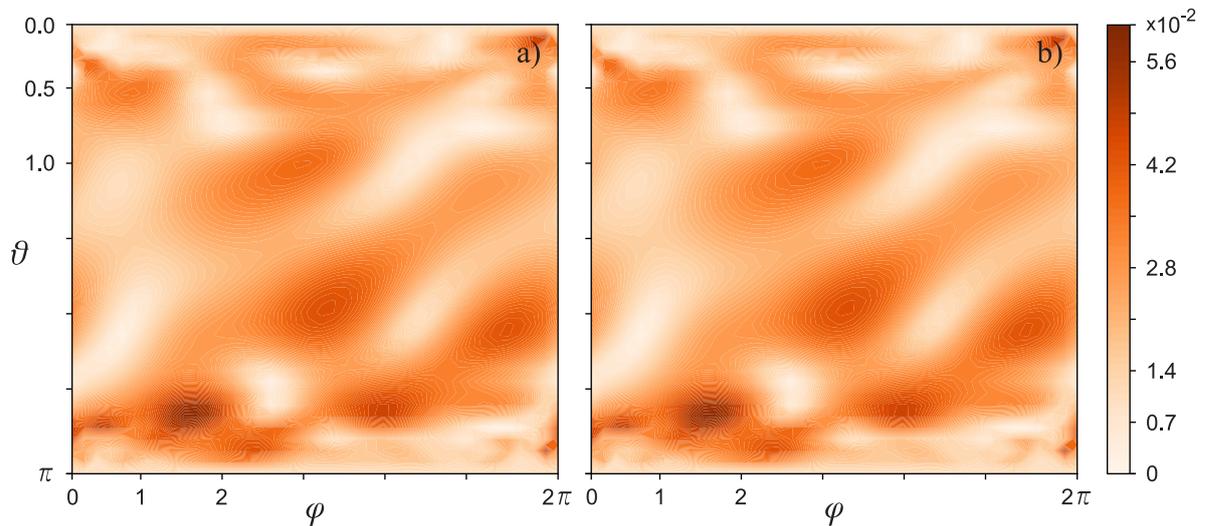


Рис. 31: Нормализованное значение величины полученной плотности магнитного момента $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$. Расчёты проведены для данных, локализованных в шаровом слое S_2 . Параметр регуляризации: (a) $\alpha = 10^{-12}$, (b) $\alpha = 10^{-14}$. Время счёта ~ 1 минут в обоих случаях.

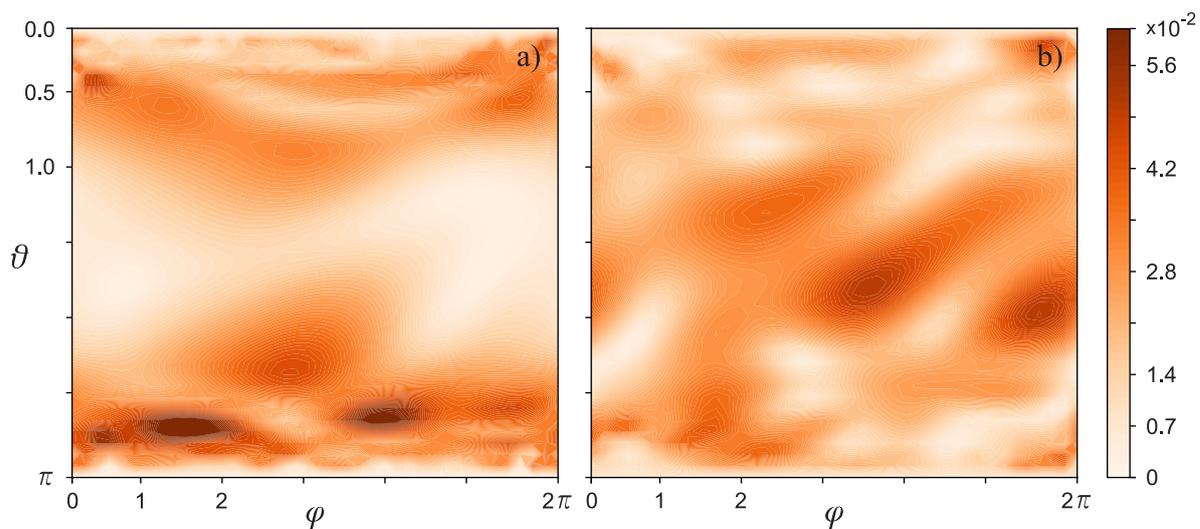


Рис. 32: Нормализованное значение величины полученной плотности магнитного момента $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$. Расчёты проведены для данных, локализованных в шаровом слое: (a) S_1 , (b) S_3 . Параметр регуляризации: $\alpha = 10^{-15}$. Время счёта ~ 1 минут в обоих случаях.

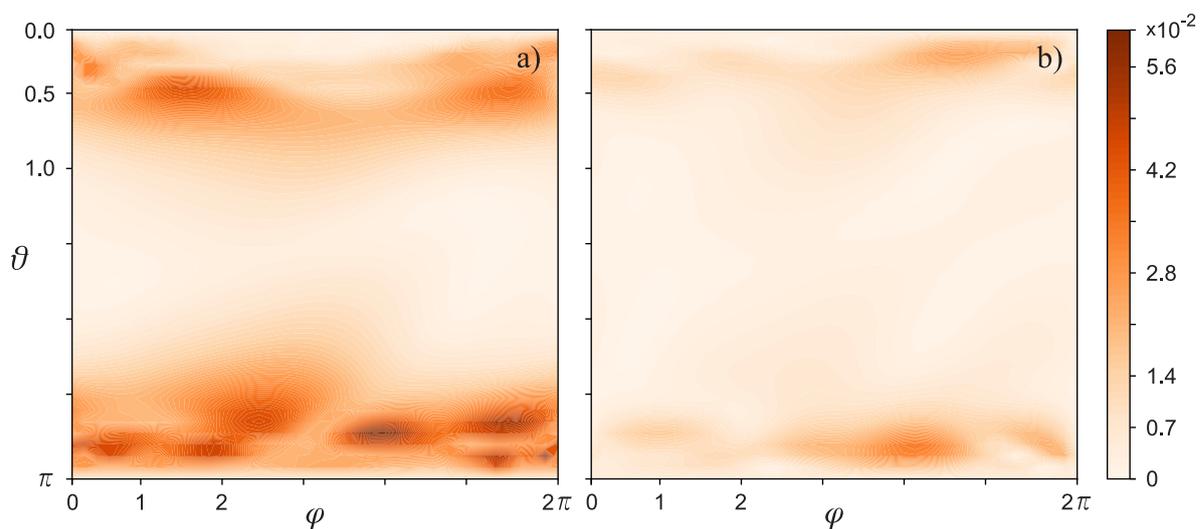


Рис. 33: Нормализованное значение величины полученной плотности магнитного момента $M(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$. Расчёты проведены для данных, локализованных в шаровом слое: (a) S_1 , (b) S_3 . Параметр регуляризации: $\alpha = 10^{-12}$. Время счёта ~ 1 минут в обоих случаях.

Из рис. 31 и 32 видно, что морфологические особенности распределения плотности носителей магнитных масс не меняются при значениях параметра регуляризации $\alpha = 10^{-14}$ и 10^{-15} . При значении параметра регуляризации $\alpha = 10^{-12}$ морфология магнитного изображения в коре Меркурия претерпевает существенные изменения: восстанавливаются источники магнитного поля, расположенные в высоких широтах (в областях, близких к географическим полюсам Меркурия, см. рис. 31). Магнитные массы, распределенные в остальной части планеты, идентифицируются с трудом. При этом стоит отметить, что на всех трех изображениях присутствуют источники в приполярных областях. Отсюда можно сделать вывод о некоторой инвариантности, если можно так выразиться, эквивалентных по внешнему полю распределений “коровых” магнитных масс относительно преобразований, осуществляемых с помощью регуляризирующих операторов. Или, иными словами, мы находим устойчивое к помехам в наблюдаемом сигнале приближенное решение обратной задачи по восстановлению источников магнитного поля.

При сравнении полученных результатов нами было замечено, что для трёх различных высот распределения данных восстановилась схожая конфигурация максимумов нормализованных значений намагниченности. Причём конфигурации максимумов нормализованных значений намагниченности на рисунках 30 и 31 не воспроизводятся для шарового слоя S_1 при любых параметрах регуляризации. Таким образом, наиболее вероятные кандидаты на решение — изображения на рисунке 33. В качестве искомого распределения магнитных масс были выбраны изображения для шарового слоя S_1 при $\alpha = 10^{-12}$ (см. рис. 33, а), в силу: а) более близкого расположения к коре Меркурия и б) расположенного на расстоянии, гарантирующем отсутствие сильной неустойчивости приближенного решения при изменении параметра регуляризации. А сравнение всех полученных результатов даёт основания считать оптимальным значением параметра регуляризации значение, равное $\alpha = 10^{-12}$.

6 Программный комплекс

В данной главе описаны программы, предназначенные для обработки магнитных данных и последующей интерпретации результатов.

Программный комплекс каждой из решаемых задач можно разделить на следующие общие компоненты:

1. предобработка входных данных с целью приведения их в более удобный для передачи в основную программу вид;
2. основные рабочие программы, решающие систему уравнений (5), отражающую математическую модель физического явления (1);
3. программы для построения графиков;

Решаемые в данной работе задачи можно разбить на три типа:

1. восстановление магнитной восприимчивости (скалярной функции) с помощью решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода;
2. восстановление параметров намагниченности (векторная функция), решая интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода;
3. выделение высокочастотной компоненты внутреннего магнитного поля в разложении Гаусса-Ми;

Программный код может меняться в зависимости от конкретного типа задачи.

6.1 Программы для предварительной обработки данных

Файлы с входными данными, которые предоставляют экспериментаторы, могут иметь самые разные форматы, поэтому для удобства расчётов необходимы программы для единообразного представления данных. Под приведением к единообразному виду автор понимает упаковку данных (значений компонент магнитного поля) в единый вектор-столбец, записанный в txt-файл,

который впоследствии будет передан программе, решающей поставленную задачу.

Программы предобработки написаны на языке Python3 версии 3.6.9 с использованием пакетов Numpy версии 1.19.5 и Pandas версии 0.22.0.

Задача по **восстановлению магнитной восприимчивости** решалась на входных данных, предоставленных китайскими коллегами. Эти данные представляют собой пять файлов с расширением .grd с измеренными градиентами компонент магнитного поля. Файлы с расширением .grd открываются с помощью функции loadtxt из пакета Numpy версии 1.19.5.

Задачи по **восстановлению параметров намагниченности** решалась на входных данных, размещенных на сайте NASA, для MAVEN [71] и MESSENGER [161]. Скачанные с этого сайта файлы общего доступа имеют расширение .csv и для работы с ними применяется пакет Pandas. В указанных csv-файлах содержатся столбцы с проекциями вектора магнитной индукции в нТл и три столбца с координатами точек расположения спутника, единицы измерения координат километры. При предобработке соответствующий скрипт переводит нТл в Тл и км в м. Так же, как и в предыдущем случае значения проекции вектора магнитной индукции упаковываются в вектор-столбец, который записывается в txt-файл. Столбцы с координатами также сохраняются в txt-файлы.

6.2 Программы, решающие интегральное уравнение

В данном пункте описаны реализованные автором программы-решатели систем линейных алгебраических уравнений, к которым сводятся интегральные уравнения. Во всех описанных в работе алгоритмах используются два базовых алгоритма: метод сопряжённых градиентов и метод проекции сопряжённых градиентов на множество векторов с неотрицательными компонентами. Перечисленные алгоритмы написаны на языке C и распараллелены с помощью пакета MPI.

Файловая структура программы метода сопряжённых градиентов [156] име-

ет следующий вид:

1. файл `./main.c` содержит функцию `main()` — точка входа программы. В функции `main()` определены основные числовые параметры, использующиеся в расчётах, которые передаются всем процессам, участвующим в расчётах;
2. в папке `./FinDimAppr` содержатся файлы с прототипами и определениями функций, которые требуются для задания сеток в области решения и области наблюдений, матрицы системы уравнений и её распределения между процессами, считывания из файла значений правой части и их распределения по процессам. Необходимые для работы динамические массивы упакованы в структуры языка C, поэтому в конце работы программы вызывается специальная функция `destructor` для освобождения выделенной памяти;
3. в папке `./ParalFuncs` содержатся распараллеленные варианты следующих функций: скалярное произведение, умножение матрицы на вектор, умножение транспонированной матрицы на вектор и метод сопряжённых градиентов;
4. в папке `./Memory` расположены файлы с функциями выделения и освобождения выделенной для матриц памяти;

Файловая структура программы метода проекции сопряжённых градиентов на множество векторов с неотрицательными компонентами [148] имеет схожий вид с программой для метода сопряжённых градиентов, кроме папки `./Auxelirable` в которой содержатся ряд вспомогательных функций.

Для распараллеливания каждому MPI процессу необходимо знать о том, с какой частью строк и столбцов итоговой системы линейных уравнений он работает. Для этого в программе вводятся по два массива для строк и столбцов решаемой системы. Первый массив — `rcounts`, который содержит размеры рабочих массивов на каждом из процессов. Второй массив — `displs`, который содержит смещения относительно начала исходного неразделённого

массива. Эти массивы необходимы для передачи в функции `MPI_Send/Recv`, `MPI_Scatterv`, `MPI_Allgatherv`.

6.3 Программа, выделяющая “высокочастотную” составляющую внутреннего магнитного поля

Автором реализован скрипт на языке Python3 версии 3.6.9. В скрипте определена функция `calculate_magnetic_field()`, которая, используя результаты восстановления параметров намагниченности в коре планет по экспериментальным данным, решает прямую задачу (26) и восстанавливает значения магнитного поля на окружающей планету сфере.

Далее, используя функцию `create_matrix()`, скрипт формирует матрицу системы (30). Результат работы функции `calculate_magnetic_field()` массив B и функции `create_matrix()` матрица A передаются функции `ConjugateGradient(A, Z, B)`, которая методом сопряженных градиентов, реализованном автором по статье [156], решает нормальную систему соответствующую системе (30) и заполняет массив Z . Массив Z содержит в себе значения коэффициентов разложения Гаусса—Ми (29).

С помощью Python-овских срезов можно легко отобрать коэффициенты, соответствующие внутреннему полю. Для получения высокочастотной компоненты внутреннего поля необходимо обнулить первые шесть компонент среза $Z[:18]$, получив Z_high , и передать эти коэффициенты в функцию `get_B_internal(Z_high)`, которая вычисляет “высокочастотную” компоненту магнитного поля по формулам (33).

Для реализации этого скрипта использовалась библиотека Numpy версии 1.19.5.

6.4 Программы для построения графиков

Программы для построения графиков представляют собой скрипт на языке Python3 с помощью библиотек Numpy версии 1.19.5 и Matplotlib версии 3.1.1. Каждый график строится на определенной глубине.

Сначала функции скрипта формируют сетку в области решения с помощью функции `meshgrid` из библиотеки `Numpy`. Полученные сетки представляют собой двумерные массивы.

Далее, каждой точке сетки ставят в соответствие числовое значение в зависимости от решаемой задачи. В случае восстановления магнитной восприимчивости такими значениями будут элементы массива, содержащего решение задачи. При определении параметров намагниченности этим значением является норма вектора намагниченности, вычисленная для каждого узла сетки. Норма вектора вычисляется с помощью функции `linalg.norm` из библиотеки `Numpy`. В обоих случаях одномерные массивы решения трансформируются в 2D массив, соответствующий полученным на первом шаге сеткам.

Полученные три 2D массива передаются функции `contourf` из библиотеки `Matplotlib`. Результаты решения сохраняются в формате `.eps` с помощью функции `savefig` из библиотеки `Matplotlib`.

Заключение

В диссертационной работе исследуется проблема восстановления параметров намагниченности и магнитной восприимчивости в коре планет по измеренным значениям магнитного поля или градиентов магнитного поля. Результатом данной работы является восстановление эквивалентных распределений параметров намагниченности в коре Марса и Меркурия. На Меркурии удалось локализовать магнитные массы с помощью разложения Гаусса-Ми. Реализованы соответствующие программные комплексы. Для решения поставленной задачи, в зависимости от известной априорной информации об изучаемом объекте, предложены различные численные алгоритмы решения, запрограммированные для использования как на обычных компьютерах так и на многопроцессорных системах. Техника распараллеливания позволяет выполнять обработку больших объёмов данных, что даёт достаточно подробное описание исследуемого объекта. Разработанные алгоритмы также могут быть успешно применены для решения очень широкого класса прикладных физических задач, сводящихся как к трёхмерным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, так и к задачам меньшей размерности (в том числе для случая, когда необходимо восстановить скалярную функцию).

Сформулируем основные результаты данной работы.

1. С помощью измеренных градиентов компонент магнитного поля решена задача восстановления магнитной восприимчивости в локализованной области земной коры.
2. Восстановлены эквивалентные распределения параметров намагниченности в коре Марса и Меркурия.
3. С помощью разложения Гаусса-Ми проведена локализация “тонких структур” в коре Меркурии.
4. Предложен и реализован в виде комплекса программ алгоритм решения прикладных трёхмерных обратных задач, сводящихся к интегральным

уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, с использованием многопроцессорных систем.

5. Автором сформулирована и доказана теорема единственности решения задачи восстановления распределения интенсивностей магнитных диполей для случая двух диполей и произвольного распределения сенсоров в пространстве.

Автор хочет выразить свою огромную благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Григорьевичу Яголе, доктору физико-математических наук, профессору Инне Эдуардовне Степановой и кандидату физико-математических наук, доценту Дмитрию Витальевичу Лукьяненко за постоянное внимание к работе и совместное обсуждение полученных результатов.

Список литературы

- [1] *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. // *Доклады Академии наук СССР.* — 1963. — Т. 151. — С. 501–504.
- [2] *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач. // *Доклады Академии наук СССР.* — 1963. — Т. 153. — С. 49–52.
- [3] *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // *Доклады Академии наук СССР.* — 1943. — Т. 39. — С. 195–198.
- [4] *Тихонов А.Н.* О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода // *Доклады Академии наук СССР.* — 1964. — Т. 156. — С. 1296–1299.
- [5] *Тихонов А.Н.* О нелинейных уравнениях первого рода // *Доклады Академии наук СССР.* — 1965. — Т. 161. — С. 1023–1026.
- [6] *Тихонов А.Н.* О методах регуляризации задач оптимального управления // *Доклады Академии наук СССР.* — 1965. — Т. 162. — С. 763–765.
- [7] *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода // *Доклады Академии наук СССР.* — 1959. — Т. 127. — С. 31–33.
- [8] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Изд-во СО АН СССР, 1962.
- [9] *Иванов В.К.* О линейных некорректных задачах // *Доклады Академии наук СССР.* — 1962. — Т. 145. — С. 270–272.
- [10] *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // *Математический сборник.* — 1963. — Т. 61. — С. 211–223.
- [11] *Иванов В.К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1966. — Т. 6. — С. 1089–1094.

- [12] *Иванов В.К.* Некорректные задачи в топологических пространствах // *Сибирский математический журнал.* — 1969. — Т. 10. — С. 1065–1074.
- [13] *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
- [14] *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
- [15] *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. — М.: Наука, 1981.
- [16] *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. — Новосибирск: Наука, 1982.
- [17] *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. — Тарту: Изд-во Тарт. гос. ун-та, 1982.
- [18] *Федотов А.М.* Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. — Новосибирск: Наука, 1982.
- [19] *Бухгейм А.Л.* Операторные уравнения Вольтерра. — Новосибирск: Наука, 1983.
- [20] *Гласко В.Б.* Обратные задачи математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [21] *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
- [22] *Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г.* Некорректные задачи астрофизики. — М.: Наука, 1986.
- [23] *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.

- [24] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974.
- [25] *Гилязов С.Ф.* Методы решения линейных некорректных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [26] *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.
- [27] *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
- [28] *Бухгейм А.Л.* Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск: Наука, 1988.
- [29] *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [30] *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Наука, 1993.
- [31] *Groetsch C. W.* Inverse problems in the mathematical sciences. — Braunschweig: Vieweg, 1993.
- [32] Обратные задачи колебательной спектроскопии. / И.В. Кочкиков, Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, Ягола А.Г. — М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [33] *Денисов А.М.* Обратные задачи колебательной спектроскопии. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
- [34] *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филликов А.И.* Дифференциально операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Физматлит, 1995.
- [35] *Тихонов А.Н., Леонов А.С., А.Г. Ягола.* Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
- [36] *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.

- [37] *Лаврентьев М.М., Л.Я. Савельев.* Теория операторов и некорректные задачи. — Новосибирск: Издательство Института математики, 1999.
- [38] *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [39] *Яновская Т.Б., Прохоров Л.Н.* Обратные задачи геофизики: Учебное пособие. — СПб:Изд-во С.-Петербур. ун-та., 2004.
- [40] Восстановление магнитной восприимчивости с использованием полных магнито-градиентных данных / Я. Ван, И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 2020. — Т. 60, № 6. — С. 1027–1034.
- [41] Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations / I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, I.E. Stepanova et al. // *Journal of Imaging.* — 2021. — Vol. 7, no. 11. — P. 234.
- [42] Recovering the magnetic properties of Mercury from satellite observations / I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, I.E. Stepanova et al. // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.* — 2022. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 26–41.
- [43] Трехмерные обратные задачи восстановления магнитной восприимчивости по экспериментальным данным / И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, Я. Ван, А. Г. Ягола // *Современные проблемы математики и физики. Материалы Международной научной конференции (г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021 г.).* — РИЦ БашГУ Уфа, 2021. — С. 281–281.
- [44] Восстановление магнитных полей планет по спутниковым данным / И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, И.Э. Степанова и др. // *Сборник тезисов Евразийской конференции по прикладной математике. Новосибирск, Академгородок, 16-22 декабря 2021 года.* — Математический центр в Академгородке, опубликовано онлайн,

<http://conf.nsc.ru/files/conferences/ecam2021/678646/document.pdf> Новосибирск, Академгородок, 2021. — С. 88–88.

- [45] 3D inverse problems of magnetic susceptibility restoration from experimental data / I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, Y. Wang, A.G. Yagola // Марчуковские научные чтения-2021: Тезисы Междунар. конф., 4–8 октября 2021 г. /Ин-т вычислит. математики и матем. геофизики СО РАН. — Новосибирск: Новосибирск, 2021. — Pp. 136–136.
- [46] Methods of recovering of the magnetic fields using experimental data / Y. Wang, I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko et al. // Марчуковские научные чтения-2022 : Тезисы Междунар. конф., 3–7 октября 2021 г. — Ин-т вычислит. математики и матем. геофизики СО РАН Академгородок, Новосибирск, Россия, 2022. — Pp. 10–10.
- [47] *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — Москва: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2015.
- [48] *Leonov A.S.* Application of functions of several variables with limited variations for piecewise uniform regularization of ill-posed problems // *Inverse Ill-Posed Problems*. — 1998. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 67–93.
- [49] Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике / А.Г. Ягола, Я. Ван, И.Э. Степанова, Титаренко В.Н. — Лаборатория знаний, 2017.
- [50] *Lelievre P.G., Oldenburg D.W.* Magnetic forward modelling and inversion for high susceptibility // *Geophysical Journal International*. — 2006. — Vol. 166. — Pp. 76–90.
- [51] *Li Y.G., Oldenburg D.W.* 3-D inversion of magnetic data // *Geophysics*. — 1996. — Vol. 61. — Pp. 394–408.

- [52] *Pignatelli A., Nicolosi I., Chiappini M.* An alternative 3D inversion method for magnetic anomalies with depth resolution // *Annals of Geophysics*. — 2006. — Vol. 49. — Pp. 1021–1027.
- [53] *Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A.* Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2011. — Vol. 18, no. 9. — Pp. 1013–1029.
- [54] *Christensen A., Rajagopalan S.* The magnetic vector and gradient tensor in mineral and oil exploration // *Preview*. — 2000. — Vol. 84, no. 77.
- [55] *Heath P., Heinson G., Greenhalgh S.* Some comments on potential field tensor data // *Exploration Geophysics*. — 2003. — Vol. 34. — Pp. 57–62.
- [56] Calibration of SQUID vector magnetometers in full tensor gradiometry systems / M. Schiffler, M. Queitsch, R. Stolz et al. // *Geophysical Journal International*. — 2014. — Vol. 198. — Pp. 954–964.
- [57] *Schmidt P.W., Clark D.A.* Advantages of measuring the magnetic gradient tensor // *Preview*. — 2000. — Vol. 85. — Pp. 26–30.
- [58] GETMAG-a SQUID magnetic tensor gradiometer for mineral and oil exploration / P.W. Schmidt, D.A. Clark, K.E. Leslie et al. // *Exploration Geophysics*. — 2004. — Vol. 35. — Pp. 297–305.
- [59] *Zhdanov M.S., Abd G.A., Wilson H.Z., Cai.* GETMAG-a SQUID magnetic tensor gradiometer for mineral and oil exploration // *Geology and Geosciences*. — 2012. — Vol. 1. — Pp. 1–5.
- [60] Magnetic susceptibility inversion method with full tensor gradient data using low-temperature SQUIDS / Y. Wang, L. Rong, L. Qiu et al. // *Petroleum Science*. — 2019. — Vol. 16, no. 4. — Pp. 794–807.

- [61] *Ji S., Wang Y., Zou A.* Regularizing inversion of susceptibility with projection onto convex set using full tensor magnetic gradient data // *Inverse Problems in Science & Engineering*. — 2016. — Vol. 4. — Pp. 323–326.
- [62] *Wang Y., Lukyanenko D., Yagola A.* Magnetic parameters inversion method with full tensor gradient data // *Inverse Problems & Imaging*. — 2019. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 745–754.
- [63] *Zhdanov M.S.* Integral transforms in geophysics. — Springer Science & Business Media, 2012.
- [64] Magnetic fields near Mars: first results / W. Riedler, D. Mohlmann, V.N. Oraevsky et al. // *Nature*. — 1989. — Vol. 341. — Pp. 604–607.
- [65] *Connerney J.E.P.* Planetary Magnetism // *Treatise on Geophysics, 2nd Edition*. — 2015. — Vol. 10. — Pp. 195–237.
- [66] *Portniaguine O., Zhdanov M.S.* Focusing geophysical inversion images // *Geophysics*. — 1999. — Vol. 64. — Pp. 874–887.
- [67] *Portniaguine O., Zhdanov M.S.* 3-D magnetic inversion with data compression and image focusing // *Geophysics*. — 2002. — Vol. 67. — Pp. 1532–1541.
- [68] Magnetic field and plasma observations at Mars: Initial results of the Mars Global Surveyor Mission / M.H. Acuna, J.E.P. Connerney, P. Wasilewski et al. // *Science*. — 1998. — Vol. 279. — Pp. 1676–1680.
- [69] Global distribution of crustal magnetism discovered by the Mars Global SurveyorMAG/ER Experiment / M.H. Acuna, J.E. Connerney, N.F. Ness et al. // *Science*. — 1999. — Vol. 284. — Pp. 790–793.
- [70] Tectonic implications of Mars crustal magnetism / J.E.P. Connerney, M.H. Acuna, N.F. Ness et al. // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2005. — Vol. 102, no. 42. — Pp. 14970–14975.
- [71] MARS MAVEN Mission: Magnetometer (MAG) Instrument. — URL: <https://pds-ppi.igpp.ucla.edu/search/?sc=MAVEN&i=MAG>.

- [72] MARS MAVEN Mission. — URL: <https://mars.nasa.gov/maven/>.
- [73] Magnetic lineations in the ancient crust of Mars / J.E.P. Connerney, M.H. Acuna, P.J. Wasilewski et al. // *Science*. — 1999. — Vol. 284. — Pp. 794–798.
- [74] *Sprenke K.F., Baker L.L.* Magnetization, paleomagnetic poles, and polar wander on Mars // *Icarus*. — 2000. — Vol. 147. — Pp. 26–34.
- [75] *Jurdy D.M., Stefanick M.* Vertical extrapolation of Mars magnetic potentials // *Journal of Geophysical Research*. — 2004. — Vol. 109. — P. E10005.
- [76] *Arkani-Hamed J.* An improved 50-degree spherical harmonic model of the magnetic field of Mars derived from both high-altitude and low-altitude data // *Journal of Geophysical Research*. — 2002. — Vol. 107, no. E5.
- [77] *Cain J.C., Ferguson B., Mozzoni D.* An $n = 90$ internal potential function of the Martian crustal magnetic field // *Journal of Geophysical Research*. — 2003. — Vol. 108, no. E2. — P. 5008.
- [78] An altitude-normalized magnetic map of Mars and its interpretation / M. Purucker, D. Ravat, H. Frey et al. // *Geophysical Research Letters*. — 2000. — Vol. 27, no. 16. — Pp. 2449–2452.
- [79] *Langlais B., Purucker M.E., Manda M.* Crustal magnetic field of Mars // *Journal of Geophysical Research – Planets*. — 2004. — Vol. 109, no. E2. — P. E02008.
- [80] *Mittelholz A., Johnson C.L., Morschhauser A.* A new magnetic field activity proxy for Mars from MAVEN data // *Geophysical Research Letters*. — 2018. — Vol. 45. — Pp. 5899–5907.
- [81] A new model of the crustal magnetic field of Mars using MGS and MAVEN / B. Langlais, E. Thébaud, A. Houliez, M.E. Purucker // *Journal of Geophysical Research – Planets*. — 2019. — Vol. 124. — Pp. 1542–1569.

- [82] *Zidarov D.* On the solution of some inverse problems in the scope of potential fields and its application in geophysics. — Sofia: BAN, 1968.
- [83] Modified method S- and R-approximations in solving the problems of Mars's morphology / T.V. Gudkova, I.E. Stepanova, A.V. Batov, A.V. Shchepetilov // *Inverse Problems in Science and Engineering*. — 2021. — Vol. 29, no. 6. — Pp. 790–804.
- [84] *Gudkova T.V., Stepanova I.E., Batov A.V.* Density anomalies in subsurface layers of mars: model estimates for the site of the InSight mission seismometer // *Solar System Research volume*. — 2020. — Vol. 54. — Pp. 15–19.
- [85] Magnetic Field Observations near Mercury: Preliminary Results from Mariner 10 / N.F. Ness, K.W. Behannon, R.P. Lepping et al. // *Science*. — 1974. — Vol. 185, no. 2. — Pp. 151–160.
- [86] The magnetic field of Mercury, 1 / N.F. Ness, K.W. Behannon, R.P. Lepping, Y.C. Whang // *Journal of Geophysical Research*. — 1975. — Vol. 80, no. 19. — Pp. 2708–2716.
- [87] MESSENGER observations of Mercury's magnetic field structure / C.L. Johnson, M.E. Purucker, H. Korth et al. // *JGR: Planets*. — 2012. — Vol. 117, no. E12.
- [88] Mercury's magnetospheric magnetic field after the first two MESSENGER flybys / I.I. Alexeev, E.S. Belenkaya, J.A. Slavin et al. // *Icarus*. — 2010. — Vol. 209. — Pp. 23–39.
- [89] *Wicht J., Heyner D.* Planetary Geodesy and Remote Sensing. — CRC Press, 2014.
- [90] The MESSENGER mission to Mercury: Scientific objectives and implementation / S.C. Solomon, R.L. McNutt, R.E. Gold et al. // *Planetary and Space Science*. — 2001. — Vol. 49, no. 14–15. — Pp. 1445–1465.

- [91] Gravity Field and Internal Structure of Mercury from MESSENGER / D.E. Smith, M.T. Zuber, R.J. Phillips et al. // *Science*. — 2012. — Vol. 336, no. 6078. — Pp. 214–217.
- [92] *Anderson B.J., Johnson C.L., Korth H.* The magnetometer instrument on MESSENGER // *Space Science Reviews*. — 2007. — Vol. 131. — Pp. 417–450.
- [93] The structure of Mercury’s magnetic field from MESSENGER’s first flyby / B.J. Anderson, M.H. Acuna, H. Korth et al. // *Science*. — 2008. — Vol. 321. — Pp. 82–85.
- [94] Investigating Mercury’s Environment with the Two-Spacecraft BepiColombo Mission / A. Milillo, M. Fujimoto, G. Murakami et al. // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2020. — Vol. 216, no. 5.
- [95] The Magnetic Field of Mercury / B.J. Anderson, M.H. Acuna, H. Korth et al. // *Space Science Reviews*. — 2010. — Vol. 152, no. 1–4. — Pp. 307–339.
- [96] The Global Magnetic Field of Mercury from MESSENGER Orbital Observations / B.J. Anderson, C.L. Johnson, H. Korth et al. // *Science*. — 2011. — Vol. 333. — Pp. 1859–1862.
- [97] Low-degree structure in Mercury’s planetary magnetic field / B.J. Anderson, C.L. Johnson, H. Korth et al. // *Journal of Geophysical Research*. — 2012. — Vol. 117.
- [98] *Anderson B.J., Johnson C.L., Korth H.* A magnetic disturbance index for Mercury’s magnetic field derived from MESSENGER magnetometer data // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. — 2013. — Vol. 14. — Pp. 3875–3886.
- [99] *Plagemann S.* Model of the internal constitution and temperature of the planet Mercury // *Journal of Geophysical Research*. — 1965. — Vol. 70, no. 4. — Pp. 985–993.

- [100] Constraints on the secular variation of Mercury’s magnetic field from the combined analysis of MESSENGER and Mariner 10 data / L.C. Philpott, C.L. Johnson, R.M. Winslow et al. // *Geophysical Research Letters*. — 2014. — Vol. 41, no. 19. — Pp. 6627–6634.
- [101] Large longitude libration of Mercury reveals a molten core / J.L. Margot, S.J. Peale, R.F. Jurgens et al. // *Science*. — 2007. — Vol. 316, no. 5825. — Pp. 710–714.
- [102] International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation / P. Alken, E. Thebault, C.D. Beggan et al. // *Earth, Planets and Space*. — 2021. — Vol. 73, no. 1.
- [103] Derivation of a geomagnetic model to $N = 63$ / J.C. Cain, Z. Wang, C. Kluth, D.R. Schmitz // *Geophysical Journal*. — 1989. — Vol. 97, no. 3. — Pp. 431–441.
- [104] *Amit H., Christensen U.R., Langlais B.* The influence of degree-1 mantle heterogeneity on the past dynamo of Mars // *Physics Earth Planet Interiors*. — 2011. — Vol. 189, no. 1–2. — Pp. 63–79.
- [105] *Dietrich W., Wicht J.* A hemispherical dynamo model: Implications for the Martian crustal magnetization // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2013. — Vol. 217. — Pp. 10–21.
- [106] *Connerney J.E.P., Acuna M.H., Ness N.F.* The magnetic field of Uranus // *Journal Geophysical Research: Space Physics*. — 1987. — Vol. 92, no. A13. — Pp. 15329–15336.
- [107] *Connerney J.E.P., Acuna M.H., Ness N.F.* The magnetic field of Neptune // *Journal Geophysical Research: Space Physics*. — 1991. — Vol. 96, no. S01. — Pp. 19023–19042.
- [108] Modeling Mercury’s internal magnetic field with smooth inversions / H. Uno, B.J. Anderson, H. Korth et al. // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2009. — Vol. 285, no. 3–4. — Pp. 328–339.

- [109] *von Frese R.R.B., Hinze W.J., Braile L.W.* Spherical Earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent point source inversion // *Earth and Planetary Science Letters*. — 1981. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 69–83.
- [110] *Thebault E., Schott J.J., Mandeau M.* Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties // *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*. — 2006. — Vol. 111, no. B1.
- [111] Investigating sources of Mercury’s crustal magnetic field: further mapping of Messenger magnetometer data / L.L. Hood, J.S. Oliveira, V. Galluzzi, D.A. Rothery // *JGR Planets*. — 2018. — Vol. 123. — Pp. 2647–2666.
- [112] *Whaler K.A., Purucker M.E.* A spatially continuous magnetization model for Mars // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2005. — Vol. 110, no. E9.
- [113] A modified equivalent source dipole method to model partially distributed magnetic field measurements, with application to Mercury / J.S. Oliveira, B. Langlais, M.A. Pais, H. Amit // *Journal of Geophysical Research Planets*. — 2015. — Vol. 120. — Pp. 1075–1094.
- [114] Crustal and time-varying magnetic fields at the InSight landing site on Mars / C.L. Johnson, A. Mittelholz, B. Langlais et al. // *Nature Geoscience*. — 2020. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 199–204.
- [115] *Mayhew M.A.* Inversion of satellite magnetic anomaly data // *Journal Of Geophysics*. — 2007. — Vol. 45, no. 2. — Pp. 119–128.
- [116] *Lowes F.J., Duka B.* Magnetic multipole moments (Gauss coefficients) and vector potential given by an arbitrary current distribution // *Earth, Planets and Space*. — 2011. — Vol. 63, no. 1–4.
- [117] *Kazantsev S.G., Kardakov V.B.* Poloidal-Toroidal Decomposition of Solenoidal Vector Fields in the Ball // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. — 2019. — Vol. 13. — Pp. 480–499.

- [118] A dynamo explanation for Mercury's anomalous magnetic field / H. Cao, J.M. Aurnou, J. Wicht et al. // *Geophysical Research Letters*. — 2014. — Vol. 41, no. 12. — Pp. 4127–4134.
- [119] *Christensen U.R.* A deep dynamo generating Mercury's magnetic field // *Nature*. — 2006. — Vol. 444, no. 7122. — Pp. 1056–1058.
- [120] *Christensen U.R., Aubert J.* Scaling properties of convection driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields // *Geophysical Journal International*. — 2006. — Vol. 166, no. 1. — Pp. 97–114.
- [121] *Christensen U.R., Tilgner A.* Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos // *Nature*. — 2004. — Vol. 429, no. 6988. — Pp. 169–171.
- [122] *Christensen U.R., Wicht J.* Models of magnetic field generation in partly stable planetary cores: Applications to Mercury and Saturn // *Icarus*. — 2008. — Vol. 196, no. 1. — Pp. 16–34.
- [123] *Christensen U.R., Wardinski I., Lesur V.* Timescales of geomagnetic secular acceleration in satellite field models and geodynamo models // *Geophysical Journal International*. — 2012. — Vol. 190, no. 1. — Pp. 243–254.
- [124] Timing of the martian dynamo: New constraints for a core field 4.5 and 3.7 Ga ago / A. Mittelholz, C.L. Johnson, J.M. Feinberg et al. // *Science Advances*. — 2020. — Vol. 6, no. 18.
- [125] *Langlais B., Purucker M.* A polar magnetic paleopole associated with Apollinaris Patera, Mars // *Planetary and Space Science*. — 2007. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 270–279.
- [126] *Backus G., Gilbert F.* Numerical application of formalism for geophysical inverse problems // *Geophysical Journal International*. — 1967. — Vol. 13. — Pp. 247–276.

- [127] *Страхов В., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // *Физика Земли*. — 2002. — Т. 38, № 7. — С. 3–12.
- [128] *Stepanova I.E.* On the S-approximation of the Earth's gravity field // *Inverse Problems in Science and Engineering*. — 2008. — Vol. 16, no. 5. — Pp. 535–544.
- [129] *Stepanova I.E.* On the S-approximation of the Earth's gravity field. Regional version // *Inverse Problems in Science and Engineering*. — 2009. — Vol. 16, no. 5. — Pp. 1095–1111.
- [130] Analytical modeling of the magnetic field of Mars from satellite data using modified S-approximations / A.M. Salnikov, I.E. Stepanova, T.V. Gudkova, A.V. Batov // *Doklady Earth Sciences*. — 2021. — Vol. 499. — Pp. 575–579.
- [131] *Степанова И.Э., Раевский Д.Н.* О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // *Физика Земли*. — 2015. — Т. 51, № 2. — С. 55–66.
- [132] О совершенствовании методов обработки больших объемов данных в геофизике и геоморфологии на основе модифицированных S- и F-аппроксимаций / И.Э. Степанова, И.А. Керимов, Д.Н. Раевский, А.В. Щепетиллов // *Физика Земли*. — 2020. — № 3. — С. 82–97.
- [133] Magnetic susceptibility inversion method with full tensor gradient data using low temperature SQUIDS / Y.F. Wang, L.L. Rong, L.Q. Qiu et al. // *Petroleum Science*. — 2019. — Vol. 16, no. 4. — Pp. 794–807.
- [134] General Tikhonov regularization with applications in geoscience / Y. Wang, A.S. Leonov, D.V. Lukyanenko, A.G. Yagola // *CSIAM Transaction on Applied Mathematics*. — 2020. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 53–85.
- [135] *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. — 2016. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 4–14.

- [136] *Mayhew M.A.* Inversion of satellite magnetic anomaly data // *Journal Of Geophysics*. — 1979. — Vol. 45. — Pp. 119–128.
- [137] The Mie representation for Mercury’s magnetic field / S. Toepfer, Y. Narita, K-H. Glassmeier et al. // *Earth Planets and Space*. — 2021. — Vol. 73, no. 1.
- [138] Crust heterogeneities and structure at the dichotomy boundary in western Elysium Planitia and Implications for InSight lander / L. Pan, C. Quantin, B. Tauzin et al. // *Icarus*. — 2020. — Vol. 338.
- [139] *Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Mikhailov P. S.* Analytical Models of the Physical Fields of the Earth in Regional Version with Ellipticity // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — Vol. 58, no. 3. — Pp. 406–419.
- [140] Analysis of the magnetic field data of Mars / A.M. Salnikov, A.V. Batov, T.V. Gudkova, I.E. Stepanova. — The Eleventh Moscow Solar System Symposium (11M-S3), Moscow, Russia: 2020. — October.
- [141] *Ji S.X., Wang Y.F., Zou A.Q.* Regularizing inversion of susceptibility with projection onto convex set using full tensor magnetic gradient data // *Inverse Problems in Science and Engineering*. — 2017. — Vol. 25. — Pp. 202–217.
- [142] Reconstruction of Mercury’s internal magnetic field beyond the octupole / S. Toepfer, I. Oertel, V. Schiron et al. // *Annales Geophysicae*. — 2022. — Vol. 40. — Pp. 91–105.
- [143] *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т 1. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
- [144] *Садовничий В.А.* Теория операторов. — М.: Дрофа, 2001.
- [145] *Треногин В.А.* Функциональный Анализ. — М.: Наука, 1993.
- [146] *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004. — С. 552.

- [147] Приближённое решение операторных уравнений. / М.А. Красносельский, Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. — М: Наука, 1969. — С. 456.
- [148] Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. — Наука Москва, 1990.
- [149] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
- [150] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Р. Ривест.* Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2000. — С. 960.
- [151] *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
- [152] *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
- [153] *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [154] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. — Успехи матем. наук., 1958. — С. 51–116.
- [155] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
- [156] *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В.* Улучшенная форма метода сопряженных градиентов // *Математическое моделирование.* — 2011. — Т. 23, № 7. — С. 33–51.
- [157] *В.В. Васин.* Основы теории некорректных задач. — Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020.
- [158] *Zhang Y., Hofmann B.* Two new non-negativity preserving iterative regularization methods for ill-posed inverse problems // *Inverse Problems and Imaging.* — 2021. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 229–256.
- [159] *Ильин В.А, Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 2. — М.: Физматлит, 2002.

- [160] *С.В. Вонсовский*. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро-, и ферримагнетиков. — Москва: Наука, 1971.
- [161] MESSENGER Mission: Magnetometer (MAG) Instrument. — URL: <https://pds-ppi.igpp.ucla.edu/search/view/?f=yes&id=pds://PPI/mess-mag-calibrated/data/mbf/2011>.