

Отзыв научного руководителя на диссертационную работу
Промыслова Валентина Валерьевича
«Графы и алгебраические конструкции»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 - математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика (01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел)

Промыслов Валентин Валерьевич поступил в очную аспирантуру, окончив механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова в 2018г. Перед диссертантом была поставлена задача описания автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полем, в процессе решения которой также были получены характеристики отображений матриц над полями, сохраняющих различные матричные инварианты и отношения. Исследование отображений, сохраняющих различные матричные свойства, является активно разрабатываемой областью математики еще со времен Фробениуса. Эта область очень перспективна и является приоритетным направлением научных исследований для множества ученых по всему миру.

Диссертационная работа посвящена изучению тотального и регулярного графов матричной алгебры над полем, а также тотального и регулярного графов множеств. Исследование алгебраических структур и отношений, построенных на основе заданных в них операций, также является с помощью теории графов активно разрабатываемой в последние несколько десятилетий областью математики, которая и в настоящий момент остаётся в центре внимания исследователей. Несмотря на имеющийся прогресс, в этом направлении исследований остаётся много интересных нерешённых проблем и гипотез.

Отметим, что множество имеющихся результатов относится к графам, связанным с мультипликативной полугруппой кольца или алгебры, а именно, к графам делителей нуля и графу отношения ортогональности. При этом для матричной алгебры вершинами этих графов оказываются в точности вырожденные матрицы. В то время как относительно операции произведения свойства определителя матрицы и условия вырожденности хорошо известны и входят в базовый курс алгебры, для операции сложения задача нахождения связи определителя суммы матриц с определителями и другими числовыми характеристиками слагаемых остаётся нерешённой. Диссертанту было предложено рассмотреть граф на матричной алгебре, сочетающий в себе условие вырожденности матриц и операцию сложения, так называемый *тотальный граф* кольца матриц, вершинами которого являются все матрицы, а рёбрами соединены в точности те матрицы, сумма которых вырождена. Если множество вершин ограничено множеством невырожденных матриц, то аналогичный граф называется *регулярным*. Перед диссертантом были поставлены задачи изучения тотального графа кольца

матриц, его свойств, числовых характеристик и автоморфизмов, а также тотального и регулярного графов множеств, в том числе множеств нулей многочленов.

В процессе исследования поставленного вопроса описания автоморфизмов тотального графа матричной алгебры была выявлена взаимосвязь с ещё одним значимым направлением в теории матриц — задачей описания отображений, сохраняющих матричные отношения и инварианты. Отметим, что классический результат Фробениуса об описании линейных отображений кольца матриц над полем комплексных чисел, сохраняющих определитель, лёг в основу доказательства теорем о виде отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковые условия вырожденности. В свою очередь с помощью этих теорем диссертанту удалось получить описание автоморфизмов тотального графа матричной алгебры.

В ходе исследования для доказательств утверждений В.В. Промыслов использовал методы линейной и общей алгебры, комбинаторики и теории графов. Ему удалось успешно решить поставленные перед ним проблемы и разработать новые методы. В частности, была разработана техника построения базисов матричной алгебры, основанная на оперировании многочленами, удовлетворяющими специальному условию сбалансированности по степени, над областью целостности и их дискриминантами.

Диссертация В.В. Промыслова состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Первая глава диссертации является вводной и содержит основные определения, обозначения и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена описанию отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковое условие на вырожденность. В ней описана техника построения базиса матричной алгебры с заданными свойствами, основанная на оперировании многочленами, удовлетворяющими специальному условию сбалансированности по степени, над областью целостности и их дискриминантами. Использование этого метода позволило доказать, что при условии наличия невырожденной матрицы с невырожденным образом в паре отображений матричной алгебры над алгебраически замкнутым полем, сохраняющих одностороннее пучковое условие для вырожденности, на множестве ненулевых матриц, содержащем все обратимые матрицы, отображения совпадают и имеют *стандартный вид*, а именно заданное отображение может быть представлено в виде композиции операции транспонирования и умножения справа и слева на матрицы с единичным определителем.

В третьей главе диссертации получено описание автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полями мощности три и выше. Доказана общая теорема описания автоморфизмов тотального графа, ориентированного параметром λ : показано, что такие автоморфизмы являются композициями стандартных отображений, отображений поэлементного применения автоморфизмов поля к элементам матрицы, и при $\lambda = -1$, дополнительно возможен аддитивный сдвиг

указанных выше отображений на произвольную матрицу R . Описание автоморфизмов тотального графа получается как частный случай данного результата для $\lambda = 1$.

Четвёртая глава диссертации посвящена исследованию свойств тотального и регулярного графов многочленов. Отметим, что поскольку определитель матрицы является многочленом от её элементов, результаты данной главы справедливы и для соответствующих графов кольца матриц. Диссертантом найдены следующие особенности. Получены критерии связности тотального и регулярного графов однородного многочлена в терминах размерности линейной оболочки множества нулей многочлена. В случае связности графов, получены верхние оценки их диаметров. Получены условия конечности кликового числа тотального графа многочлена от двух переменных. Известно, что хроматическое число регулярного графа многочлена первой степени всегда конечно, однако уже для многочленов второй степени вопрос становится на порядок сложнее. В диссертации В.В. Промысловым исследованы свойства регулярных графов кривых второго порядка и значений хроматических чисел указанных графов. Показана связь со значением хроматического числа регулярного графа кольца матриц.

В пятой главе диссертации получена классификация с точностью до изоморфизма регулярных и тотальных графов для наименьшего по мощности нетривиального множества — трёхточечного.

В диссертации видны заслуживающие внимания значительные результаты, находящиеся в русле самых передовых исследований в вышеозначенной области алгебры. Считаю, что В.В. Промысловым проделана большая, важная и актуальная работа. Полученные результаты корректно доказаны и хорошо оформлены. Диссертация демонстрирует высокий уровень научных способностей, широту познаний и большой творческий потенциал её автора. При выполнении данной диссертации Валентин Валерьевич проявил себя исключительно добросовестным и вдумчивым исследователем, способным чётко определить и сформулировать цели и задачи, глубоко осмысливать и анализировать полученные результаты, определять необходимые методы исследования. Диссертант провел полное и всеобъемлющее исследование каждой поставленной задачи и развил новые перспективные методы исследования, которые могут применяться также и для решения других задач.

Работа В.В. Промыслова имеет большое теоретическое и практическое значение и является серьёзным вкладом в современную алгебру. Рассматриваемая диссертация представляет собой законченное научное исследование. Все включенные в неё результаты получены лично автором и прошли всестороннюю квалифицированную апробацию, опубликованы в ведущих научных журналах.

Основные результаты диссертации В.В. Промыслова изложены в пяти статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Представленные публикации полно и правильно отражают

результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре В.В. Проmysлов неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах диссертации.

Считаю, что диссертация Проmysлова Валентина Валерьевича полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.5 - математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел) (физико-математические науки).

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент

О.В. Маркова

15 мая 2023 г.