

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА**

На правах рукописи

Цыбров Евгений Германович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ
ДИФРАКТОМЕТРИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕДИЦИНСКОЙ
ДИАГНОСТИКЕ**

Специальность 1.2.2. – «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2023

Общая характеристика работы

Актуальность работы

В настоящее время быстро развивается большая область теоретических и прикладных исследований, связанная с определением неизвестных характеристик физических и искусственных неоднородных сред по наблюдениям за распространением в таких средах зондирующих естественных или специально организованных полей.

Физический смысл определяемых характеристик может быть различным:

- определение формы отдельной частицы или нескольких частиц;
- распределение частиц по размерам в заданной области;
- распределение частиц по деформируемости, т.е. оценка количества частиц определенной формы, определение статистических моментов этого распределения в рассеивателе, форма которого известна априори.

Основную роль в получении информации о структуре среды играет обработка поступающих входных данных и организация проведения измерений полей, а также расположение источников излучения и приемников.

В диссертации рассматриваются прямые и обратные задачи дифрактометрии. В обратной задаче по дифракционной картине или индикатрисе рассеяния электромагнитного излучения с заданной длиной волны восстанавливаются неизвестные характеристики неоднородной среды или структура рассеивателя. Рассмотренные в диссертационной работе постановки обратных задач получили широкое распространение в дефектоскопии, инженерной геофизике, медицине и многих других областях. Особое внимание уделено применению предложенных математических методов и разработанного программного комплекса в медицинской диагностике, приведен целый ряд результатов исследования образцов крови.

При решении задачи дифракции, когда длина падающей волны сопоставима с размером облучаемого тела, использовался метод интегральных уравнений, который позволяет решить задачу дифракции волн на поверхности произвольной формы. В работе рассмотрена задача дифракции на поверхностях вращения, которой также занимались В.Д. Купрадзе, Е.Н. Васильев, Е.В. Захаров, В.И. Дмитриев, Ю.В. Пименов и др., предложен итерационный численный метод, основанный на регуляризованном методе Ньютона-Гаусса. Новый метод позволяет существенно снизить размерность используемых массивов данных и увеличить скорость вычислений.

Когда электромагнитное излучение оптического (светового) диапазона, обратная задача определения формы и распределения частиц по

индикатрисе рассеяния или дифракционной картине сводится к задачам лазерной дифракции. Основные результаты в области лазерной дифракции были получены К.С. Шифриным, Ю.А. Ерёмным, В.Н. Лопатиным, В.В. Тучиным, А.В. Приезжевым и др. В диссертационной работе предложены новые математические модели для дифракции лазерного пучка на наборе тел, выписаны дифрактометрические уравнения, связывающие характеристики тел с дифракционной картиной, предложены численные методы, на основе которых разработан комплекс программ, который протестирован на дифракционных картинах образцов крови.

Цель работы

Целью данной работы является разработка новых математических методов моделирования дифракции на диэлектрическом теле и наборе частиц. Определение возможности идентификации форм и размеров тел по характеристикам дифракционной картины. Определение функции распределения частиц по размерам. Разработка и тестирование программных комплексов решения поставленных задач. Интерпретация данных натурального эксперимента на примере дифрактометрии образца крови.

Для достижения указанной цели были решены следующие **задачи**:

- Построение математической модели рассеяния электромагнитных волн на одиночном диэлектрическом теле для восстановления границ диэлектрика: постановка задачи, вывод интегральных уравнений, разработка численных методов решения соответствующих уравнений, разработка комплекса программ.
- Построение математической модели рассеяния электромагнитных волн на наборе частиц для восстановления функции распределения частиц по размерам: постановка задачи, вывод интегрального уравнения, доказательство существования и единственности решения, разработка численных методов решения уравнения и оценка устойчивости решения, написание комплекса программ.
- Разработка методов приближённой оценки первых трёх статистических моментов распределения частиц по размерам и формам, по удлинению, используя характерные особенности дифракционной картины, анализ формы линии изоинтенсивности: постановка задач, вывод дифрактометрических уравнений, проверка алгоритма измерения методом численного моделирования, определение пределов применимости каждого из предлагаемых методов, программная реализация предложенных методов.

Методы исследования

Основными математическими методами, используемыми в данной работе, является метод интегральных уравнений в первой и второй главах и метод выделения малых параметров для решения обратной задачи рассеяния излучения на клетках крови в третьей и четвертой главах, метод регуляризации, методы вычислительной математики и численного моделирования.

Научная новизна

- Найдена зависимость индикатрисы рассеяния от формы исследуемого диэлектрика и получены условия, при которых в результате решения обратной задачи рассеяния определяется форма рассеивающего тела.
- В результате численных экспериментов установлено, что распределение частиц, имеющих проекцию на экран в виде эллипса, может быть восстановлено по дифракционной картине. Разработан метод восстановления распределения двумерных частиц по размерам, основанный на выводе двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода для неизвестного распределения и решении этого уравнения с применением метода регуляризации Тихонова.
- Предложена и изучена аналитическая модель рассеяния лазерного пучка на неоднородном ансамбле эритроцитов, учитывающая разброс эритроцитов по размерам, формам и ориентациям в пространстве. Установлена связь экспериментально рассчитываемой контрастности дифракционной картины с мерой неоднородности образца крови по размерам и формам эритроцитов.
- Предложен и разработан алгоритм измерения параметров распределения эритроцитов по размерам, использующий данные лазерной дифрактометрии мазка крови. Алгоритм предназначен для измерения среднего размера, а также ширины и асимметрии распределения эритроцитов по размерам в образце крови. В случае слабо неоднородного ансамбля эритроцитов получены явные аналитические представления для первых статистических моментов распределения эритроцитов по размерам.
- Получено калибровочное уравнение для вычисления интенсивности света на линии изоинтенсивности дифракционной картины по её геометрическим параметрам: характеристическим точкам, координатам центра, кругам кривизны. На основе калибровочного уравнения предложен новый алгоритм обработки данных лазерного анализа

крови, предназначенного для измерения деформируемости эритроцитов (эктацитометрии эритроцитов), который будем называть комбинированным алгоритмом, входными данными для которого являются только геометрические параметры дифракционной картины. Алгоритм предназначен для определения распределения эритроцитов по деформируемости в исследуемом образце крови в условиях, когда функция распределения эритроцитов в условиях деформируемости симметрична.

- Проведен теоретический анализ рассеяния лазерного пучка на неоднородном ансамбле частиц, моделирующих эритроциты в сдвиговом потоке лазерного эктацитометра. Выведены новые дифрактометрические уравнения, которые связывают характеристики ансамбля эритроцитов с параметрами наблюдаемой дифракционной картины. Представлен новый алгоритм обработки данных, позволяющий измерять среднюю деформируемость, а также ширину и асимметрию распределения эритроцитов по деформируемости в исследуемом образце крови. Работа нового алгоритма проверена методом численного моделирования на примере бимодального ансамбля эритроцитов по деформируемости.

Научная и практическая значимость работы

Ценность результатов проведённых исследований заключается в разработанном подходе анализа индикатрисы рассеяния или дифракционной картины для получения информации о размерах, форме тел, распределении тел. Разработан программный комплекс для анализа реальных образцов крови при проведении медицинской диагностики. В результате практического применения комплекса программ оценена точность и определена область применимости разработанных математических моделей.

Реализация результатов работы

Создано программное обеспечение, которое применяется для целей лазерной дифрактометрии эритроцитов в лаборатории биомедицинской фотоники Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова. Программный комплекс используется в лазерном эктацитометре эритроцитов, предназначенном для измерения характеристик распределения эритроцитов по деформируемости.

Достоверность

Достоверность результатов проведённых исследований подтверждена теоретической базой, математическим обоснованием разработанных алгоритмов, сравнением результатов вычислительного эксперимента с ранее опубликованными, полученными другими математическими методами, проверкой разработанных методов с использованием дифракционных картин образцов крови.

Положения, выносимые на защиту:

- Математическая модель рассеяния лазерного пучка на неоднородном ансамбле эритроцитов, учитывающая разброс эритроцитов по формам и ориентациям в пространстве, устанавливающая связь экспериментально измеряемой контрастности дифракционной картины с дисперсией распределения эритроцитов по формам. Новые дифрактометрические уравнения, связывающие характеристики ансамбля эритроцитов с параметрами наблюдаемой дифракционной картины.
- Численный метод решения обратной задачи рассеяния электромагнитного поля на теле вращения, установлена зависимость диаграммы направленности от формы исследуемого диэлектрика.
- Численный метод восстановления функции распределения эллиптических частиц по размерам, показавший высокую эффективность и устойчивость к погрешностям входных данных.
- Программная реализация разработанных численных методов и алгоритмов в виде комплекса программ для определения неизвестных характеристик отдельной частицы или нескольких частиц, распределения частиц по дифракционной картине или индикатрисе рассеяния, его тестирование и практическое использование в медицинской диагностике.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на:

1. Научно-исследовательском семинаре кафедры математической физики факультета ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова;
2. 17 Международной научно-технической конференции «Оптические методы исследования потоков - ОМИП 2023», Москва, Россия, 26 - 30 июня 2023;

3. Международном симпозиуме «Fundamentals of Laser Assisted Micro- & Nanotechnologies (FLAMN-22)», Санкт-Петербург, Россия, 27-30 июня 2022;
4. Международном симпозиуме «Микроциркуляция, реология крови и кислородный гемостаз», Ярославль, Россия, 10 марта 2022;
5. Научной конференции «Тихоновские чтения 2021», Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Россия, 25-30 октября 2021;
6. 16 Международной научно-технической конференции «Оптические методы исследования потоков - ОМИП 2021», Москва, Россия, 28 июня - 2 июля 2021;
7. Научной конференции «Mathematical models and methods in electromagnetics for particles simulations, characterization and synthesis», факультет Вычислительной математики и кибернетики, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 16-17 декабря 2020;
8. Научной конференции Ломоносовские чтения-2018, секция «Вычислительная математика и кибернетика», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-27 апреля 2018;
9. XI международной конференции «Микроциркуляция и гемореология», Ярославль, Россия, 3 – 5 июля 2017 года;
10. XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2017», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 20 апреля 2017.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных работах, в том числе в 7 работах, изданных в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора

Все результаты работы получены автором лично под научным руководством к.ф.-м.н., доцента С.Г. Головиной и при научном консультировании д.ф.-м.н., доцента С.Ю. Никитина. В работе [1] автором предложен численный метод восстановления формы тела по индикатрисе рассеяния. В работе [2] автор предложил численные методы восстановления распределения эллиптических частиц по дифракционной картине. В работе [3] автором предложено разложение функций в ряд по степеням аргумента, что позволило

вычислить распределение интенсивности света дифракционной картины вблизи первого минимума интенсивности, разработаны математические методы расчёта трех статистических моментов функции распределения эритроцитов по размерам. В работе [4] автором предложен метод определения параметров ансамбля эритроцитов на основе сравнения характеристик дифракционной картины с данными, рассчитанными теоретически. В работе [5] автором предложен метод моделирования эритроцитов, которые в мазке крови имеют вид хаотически ориентированных эллиптических дисков, что позволяет учесть асимметрию формы эритроцитов и оценить её влияние на параметры наблюдаемой дифракционной картины. В работе [6] автором предложен метод калибровки дифракционной картины, основанный на применении сразу двух алгоритмов обработки – алгоритма характеристической точки и алгоритма кривизны линии, которые дают возможность оценки уровня интенсивности света на линии изоинтенсивности, выбранной для измерений. В работе [7] предложена теоретическая модель дифракционной картины, получены точные дифрактометрические уравнения для измерения параметров эритроцитов. Во всех работах автор осуществлял компьютерное моделирование, основанное на численных методах, разработанных автором.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, 4 глав, в которых отражены основные результаты, полученные в результатах исследований, заключения и списка литературы. Общий объем составляет 153 страницы основного текста, включая 42 рисунка, 10 таблиц и список литературы из 76 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, излагается научная новизна и практическая значимость.

В **первой главе** поставлена задача рассеяния осесимметричного поля на одиночном диэлектрическом теле вращения. В однородной среде магнитным диполем возбуждается гармоническое во времени электромагнитное поле с электрической напряженностью E и магнитной напряженностью H . Вводится цилиндрическая система координат (ρ, φ, z) , начало которой совпадает с центром магнитного диполя, момент которого ориентирован вдоль оси Oz , ось z направлена вдоль оси вращения тела. Пусть Ω_0 – область трехмерного пространства вне рассматриваемого тела и областей источников и приёмников. Рассматриваемая неоднородность задается об-

ластью Ω_1 . Коэффициенты $k_0(P)$ и $k_1(M)$ – параметры, характеризующие среды в точках $P \in \Omega_0$ и $M \in \Omega_1$. Ω_p – область расположения приёмников, Ω_f – область расположения источников, которые рассматриваются как области в пространстве R^3 и не имеют общих точек с Ω_1 .

Рассмотрена граничная задача, в которой требуется вычислить азимутальную компоненту E_φ электрического поля E в области расположения приёмников Ω_p . Предполагается, что Ω_0 и Ω_1 магнитооднородны.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi(P)) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_\varphi(P)}{\partial z} \right) + k_0^2(P) E_\varphi(P) = E_\varphi^0(P), P \in \Omega_0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi(P)) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_\varphi(P)}{\partial z} \right) + k_1^2(P) E_\varphi(P) = 0, P \in \Omega_1; \\ E_\varphi \sim O(1/r); \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - ik_0 E_\varphi \sim o(1/r), r \rightarrow \infty; \\ [E_\varphi] = 0; \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right] = - \left[\frac{1}{\mu} \right] \frac{E_\varphi}{\rho} \cos(\widehat{n, \rho}), r \in \partial\Omega_1, \end{array} \right. \quad (1)$$

где E_φ^0 – азимутальная компонента электрического поля источника, n – внешняя нормаль к границе неоднородности, $[\cdot]$ – разрыв функции на границе неоднородности.

В первой главе осуществлён переход от дифференциальных уравнений (1) к интегральным:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\varphi(M) - \int_{\Omega_1} \frac{k_1^2(P) - k_0^2(P)}{4\pi} G(M, P) E_\varphi(P) d\Omega_{1P} = E_{\varphi_0}(M), M \in \Omega_1; \\ E_\varphi^p(M) = E_{\varphi_0}(M) + \int_{\Omega_1} \frac{k_1^2(P) - k_0^2(P)}{4\pi} G(M, P) E_\varphi(P) d\Omega_{1P}, M \in \Omega_p, \end{array} \right. \quad (2)$$

где $G(M, P) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cos \varphi d\varphi$ – функция Грина, имеющая логарифмическую особенность при $M \rightarrow P$, r – расстояние между точками M и P .

Обратная задача состоит в определении границы неоднородности из вышеуказанной системы уравнений (2) по индикатрисе рассеяния поля, измеренного в области расположения приемников Ω_p .

Используя априорную информацию о расположении исследуемой неоднородности вводится область $\overline{\Omega}$ достаточно большого размера. Обратная задача является нелинейной, неизвестными являются функции $k_1(P)$ и вторичное поле $E_\varphi(P)$, $P \in \overline{\Omega}$.

Для решения поставленной обратной задачи предложен следующий итерационный метод:

1. Задается начальное приближение $k_1^0(P) = k_0(P)$. Из первого уравнения системы находим функцию $E_\varphi(P) = E_\varphi^0(P)$ – первичному полю, $P \in \overline{\Omega}$;

2. Из второго уравнения системы с использованием регуляризованного метода Ньютона-Гаусса, находим $k_1^1(P)$ в области $\bar{\Omega}$;
3. Из первого уравнения системы находим $E_\varphi^1(P)$, $P \in \bar{\Omega}$;
4. Из второго уравнения системы находим $k_1^2(P)$ и т.д.

Следует заметить, что первый шаг итерационного процесса совпадает с решением обратной задачи в борновском приближении.

Прямая и обратная задачи были решены, когда неоднородность имела форму сферы, конечного цилиндра и тороида.

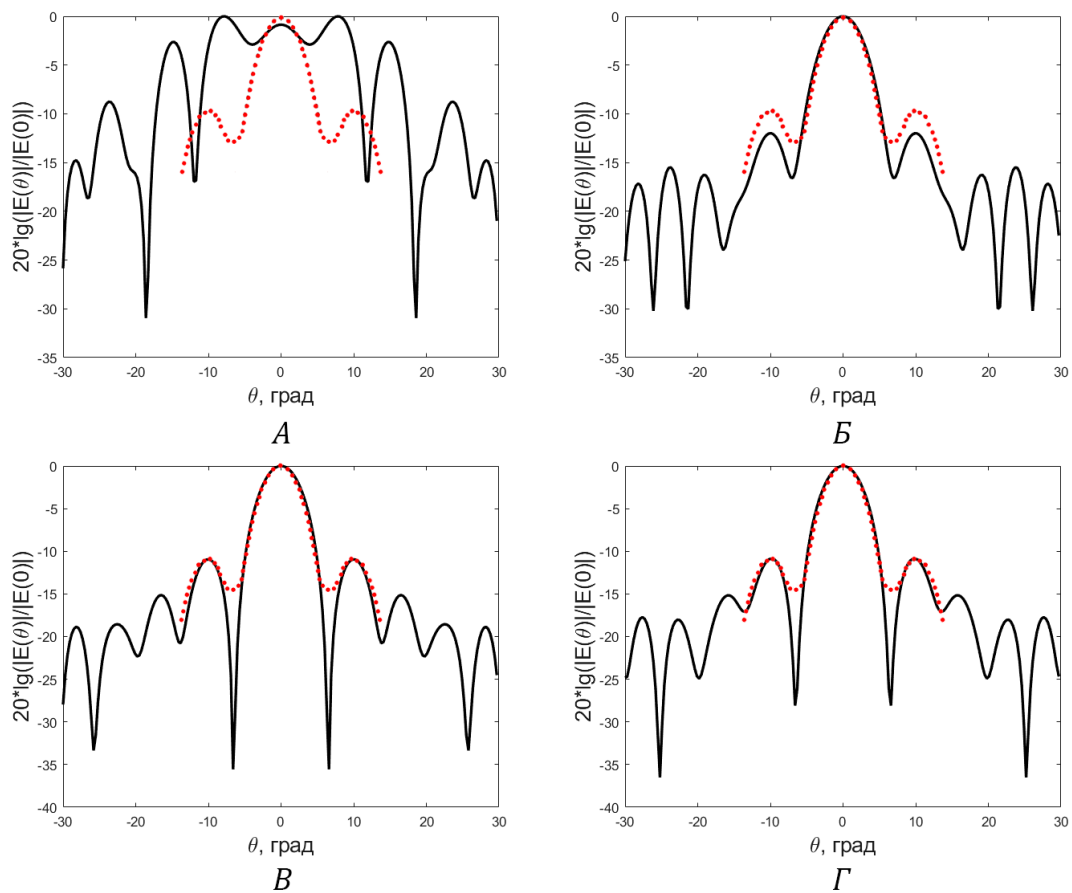


Рис. 1: Диаграмма направленности диэлектрического тора при различном количестве точек на длину волны: А – 5 точек на длину волны, Б – 10 точек на длину волны, В – 15 точек на длину волны, Г – 20 точек на длину волны. Сплошной линией обозначена расчетная диаграмма направленности, пунктирной линией – полученная в эксперименте.

Для тестирования метода в качестве источника использовался диполь, расположенный в центре антенны, имеющей форму тороида из полиэтилена ($\epsilon_T = 2.3$; $tg\delta = 4 \cdot 10^{-4}$) с диаметром образующей окружности 76.1 мм и внутренним диаметром 20.2 мм, были использованы экспериментальные

данные. Измерения проводились на частоте 35.5 ГГц. Ширина диаграммы направленности в плоскости H равна 6.6 градусов.

Результаты решения прямой задачи совпали с экспериментальными данными: ширина главных лепестков диаграммы направленности отличается на 0.1 градуса (6.5 градусов – в вычислительном эксперименте, 6.6 градусов – в физическом эксперименте), уровни первых боковых лепестков совпадают с точностью до 10^{-3} (-11 дБ в обоих случаях).

На рисунках 2–3 приведены результаты работы программы для случая, когда локальная неоднородность представляет собой цилиндр (в сечении прямоугольник) с радиусом основания 3 мкм и высотой 6 мкм, цилиндр находится на расстоянии 5 мкм от магнитного диполя, область приемников находится на расстоянии 15 мкм от диполя, относительный показатель преломления $n=1.1$. Область $\bar{\Omega}$ имела размеры 9 мкм на 18 мкм, параметр регуляризации $\alpha=0.1$, длина волны источника 600 нм. Параметры области $\bar{\Omega}$ выбирались похожими на размеры эритроцитов в крови.

Во **второй** главе рассмотрены прямая и обратная задачи рассеяния плоской монохроматической волны видимого спектра на наборе диэлектрических частиц, имеющих форму эллиптического диска с размерами полуосей a и b .



Рис. 2

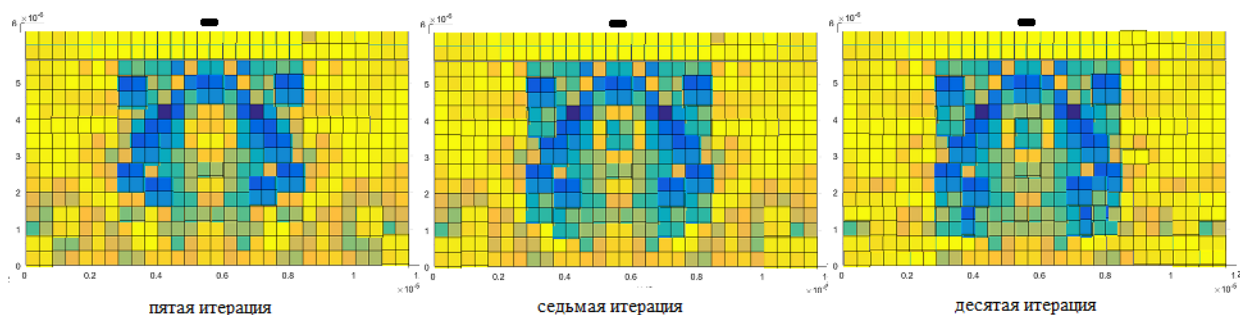


Рис. 3

В прямой задаче дана непрерывная функция $I(x, y)$, которая задаёт распределение интенсивности света в области наблюдения, и имеет вид:

$$I(x, y) = \int_{b'}^{b''} \int_{a'}^{a''} a^2 b^2 \left(\frac{J_1\left(\frac{k}{z} \sqrt{x^2 a^2 + y^2 b^2}\right)}{\frac{k}{z} \sqrt{x^2 a^2 + y^2 b^2}} \right)^2 \omega(a, b) da db,$$

$$x \in [x', x''], y \in [y', y''],$$

где $\omega(a, b)$ – функция распределения частиц по размерам; $J_1(\cdot)$ – функция Бесселя первого порядка; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число падающей волны; λ – длина падающей волны; z – расстояние от области нахождения частиц до области наблюдения; a', a'', b', b'' – нижние и верхние границы размеров полуосей рассматриваемых частиц; x', x'', y', y'' – границы области наблюдения.

Задачу можно записать в операторном виде:

$$A\omega = I,$$

где

$$A\omega = \int_{b'}^{b''} \int_{a'}^{a''} a^2 b^2 \left(\frac{J_1\left(\frac{k}{z} \sqrt{x^2 a^2 + y^2 b^2}\right)}{\frac{k}{z} \sqrt{x^2 a^2 + y^2 b^2}} \right)^2 \omega(a, b) da db.$$

Обратная задача рассеяния состоит в вычислении функции распределения частиц $\omega(a, b)$, по известной функции распределения интенсивности света $I_\delta(x, y)$, где δ – погрешность измерений.

Для решения обратной задачи для минимизации функционала использовался метод внутренней точки:

$$\omega_\alpha = \underset{[a', a''] \times [b', b'']}{\operatorname{argmin}} \|A\omega - I_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\omega\|_{L_2}^2.$$

Расчёты проводились, когда

$$\lambda = 0.63, a' = b' = 0, a'' = b'' = 15, x' = y' = 0, \frac{x''}{z} = \frac{y''}{z} = \frac{\pi}{10}, z = 5 \cdot 10^3,$$

величины указаны в микронах. В численных экспериментах были смоделированы распределения, соответствующие случаю бимодального ансамбля эритроцитов, состоящего из двух групп клеток с разными размерами полуосей. Функция распределения имеет вид:

$$\omega_s(a, b) = p_{s1} \cdot e^{-\frac{(a-A_1)^2 + (b-B_1)^2}{\sigma_1^2}} + p_{s2} \cdot e^{-\frac{(a-A_2)^2 + (b-B_2)^2}{\sigma_2^2}},$$

где средние значения полуосей первой и второй группы: $A_1 = 4, B_1 = 4, A_2 = 6.3, B_2 = 2.5$, среднеквадратическое отклонение каждой группы

эритроцитов $\sigma_1 = 0.8$, $\sigma_2 = 0.8$, p_{s1} и p_{s2} – соотношения количества эритроцитов первой и второй группы к общему числу эритроцитов соответственно.

На рисунке 4 изображена точная функция распределения интенсивности. Для проверки устойчивости решения обратной задачи были внесены погрешности $\delta = 1\%$ и $\delta = 10\%$ (рис. 4). Параметр регуляризации в случае $\delta = 1\%$ был равен $\alpha = 0.01$, в случае $\delta = 10\%$ равен $\alpha = 0.1$. Расчёты показали, что даже при значительной погрешности входных данных удастся хорошо восстановить функцию распределения частиц по размерам.

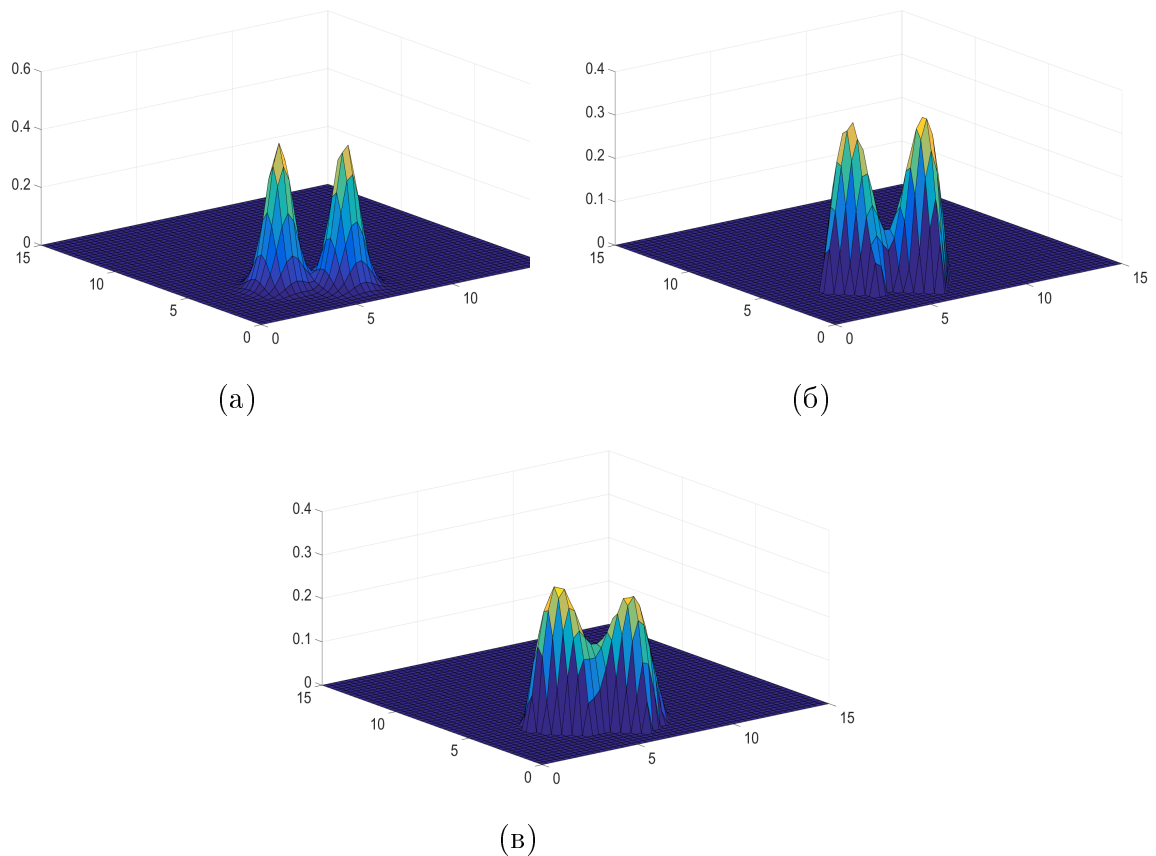


Рис. 4: Истинное решение (а) и результат применения минимизации с добавлением 1% (б) и 10% шума (в).

Помимо численных экспериментов были проведены натурные эксперименты с кровью пациентов, полученных на лазерном эритроцитарном эктацитометре Rheoscan, расположенном в лаборатории биофотоники физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. На рисунке 5 приведён снимок с прибора, по которому была восстановлена функция распределения частиц по размерам с использованием предложенного метода. В устройстве создается сдвиговой поток, ориентирующий и удлиняющий эритроциты. Лазерный луч освещает удлиненные ячейки, а свет, рассеян-

ный под небольшими углами, записывается на ПЗС-матрицу. Разрешение камеры — 640 на 480, динамический диапазон — около 1:100.

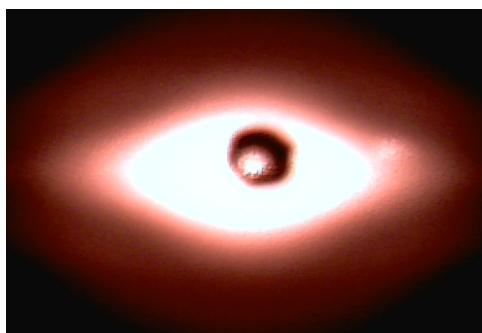


Рис. 5: Дифракционная картина с прибора Rheoscan, соответствующая суспензии жестких и нормальных эритроцитов в соотношении 1 к 1.

На рисунке 6 приведено сравнение результатов восстановления среднего соотношения полуосей методом регуляризации и стандартным методом эктацитометрии. По оси абсцисс отражено процентное соотношение жестких клеток, по оси ординат — среднее соотношение полуосей. Пунктирная линия показывает среднее значение (a/b) , полученное путем регуляризации. Сплошная линия показывает то же значение, полученное с помощью стандартного метода эктацитометрии. Случай слева соответствует нормальным клеткам. Случай справа соответствует смешению нормальных и жестких клеток в пропорции 1 к 1.

Предложенный метод восстановления функции распределения показал хорошую устойчивость к погрешности измерений.

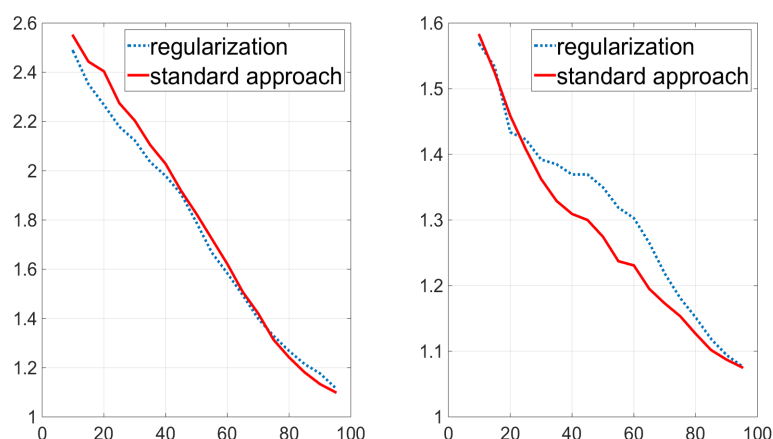


Рис. 6: Сравнение результатов методом регуляризации и стандартным методом эктацитометрии.

В **третьей главе** рассмотрена обратная задача рассеяния монохроматической плоской волны на наборе эллиптических дисков (эритроцитов). Необходимо по известному угловому распределению интенсивности восстановить основные статистические моменты распределения эритроцитов

по размерам: средний размер частицы, ширина распределения частиц по размерам и формам, асимметрия распределения частиц по размерам и формам.

Была рассмотрена функция углового распределения интенсивности света вблизи первого минимума дифракционной картины, эритроциты на мазке крови имеют форму круглых дисков с радиусами $R=R_0 \cdot (1 + \varepsilon)$, R_0 – средний радиус эритроцита на мазке крови, ε – неизвестный случайный параметр, $|\varepsilon| \ll 1$ – что соответствует слабо неоднородному ансамблю эритроцитов, $\langle \varepsilon \rangle = 0$ – среднее значение. Распределение эритроцитов по размерам имеет параметры: $\mu = \langle \varepsilon^2 \rangle$ – характеризует ширину распределения частиц по размерам, $\nu = \langle \varepsilon^3 \rangle$ – асимметрию распределения эритроцитов по размерам. Рассеяние лазерного пучка на плоских эллиптических дисках описывается формулой:

$$I(\theta) = \frac{1}{4} I_0 N |\alpha|^2 \left(\frac{k}{z} \right)^2 \langle R^4 G(kR\theta) \rangle,$$

где I – интенсивность света в области измерения; R – радиус эритроцита; θ – угол рассеяния; I_0 – интенсивность падающего лазерного пучка; N – число эритроцитов на мазке крови, облучаемых лазером; z – расстояние от мазка крови до экрана наблюдения; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина световой волны, параметр $|\alpha|^2$ характеризует толщину и оптическую плотность эритроцита;

$$G(kR\theta) = \left(\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta} \right)^2,$$

где $J_1(\cdot)$ – функция Бесселя первого порядка.

Обозначим $f(\theta) = I(\theta)/I(0)$ – нормированное угловое распределение интенсивности, где $I(0)$ – интенсивность центрального максимума. Разложим функцию $f(\theta)$ вблизи первого минимума ($f'(\theta_0) = 0$):

$$f(\theta) = f(\theta_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0)^2, \quad (3)$$

где θ_0 – угловая координата первого минимума. Обозначим: $f_0 = f(\theta_0)$, $f_2 = f''(\theta_0) \cdot \theta_0^2$.

Нормированное распределение интенсивности света в дифракционной картине $f(\theta)$ представлено в виде: $\langle \rho^4 \rangle f(\theta) = \langle \rho^4 G(\rho\theta) \rangle$, $\rho = kR = 2\pi \frac{R}{\lambda}$, где ρ – волновой параметр размера эритроцита.

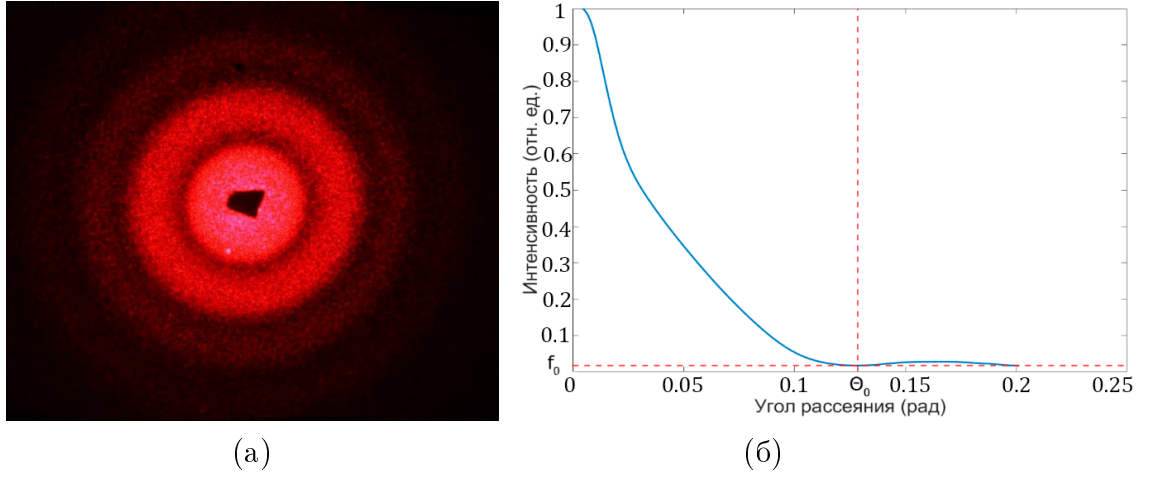


Рис. 7: Слева (а)- дифракционная картина на влажном мазке эритроцитов, справа (б)- угловое распределение интенсивности света.

Рассмотрена часть дифракционной картины, лежащей вблизи первого минимума интенсивности $\rho\theta \approx x_0$, где величина x_0 — первый ноль функции Бесселя первого порядка: $J_1(x_0) = 0$. Раскладывая функцию Бесселя в ряд Тэйлора в окрестности точки x_0 до третьего порядка включительно, получены уравнения, связывающие параметры μ , ν и ρ_0 , с известными параметрами f_0 , f_2 , θ_0 , x_0 . Введены параметры $p_{1\mu}$, $p_{1\nu}$, $q_{2\mu}$, $q_{2\nu}$, $q_{3\mu}$, $q_{3\nu}$, зависящие только от входных параметров f_0 , f_2 , θ_0 , x_0 , тогда:

$$p_{1\mu}\mu + p_{1\nu}\nu = \alpha; \quad q_{2\mu}\mu + q_{2\nu}\nu = f_0; \quad q_{3\mu}\mu + q_{3\nu}\nu = 8\beta^2 - f_2;$$

$$\alpha = \frac{\theta_0}{x_0}\rho_0 - 1; \quad \beta = -J_0(x_0).$$

Формулы для вычисления параметров μ , ν и ρ_0 получены в явном виде:

$$\mu = \frac{(8\beta^2 - f_2)q_{2\nu} - f_0q_{3\nu}}{q_{3\mu}q_{2\nu} - q_{3\nu}q_{2\mu}}; \quad \nu = \frac{1}{q_{2\nu}}(f_0 - q_{2\mu}\mu); \quad \rho_0 = (1 + p_{1\mu}\mu + p_{1\nu}\nu)\frac{x_0}{\theta_0}. \quad (4)$$

Данные формулы были проверены для случая, когда эритроциты делятся на два типа по размерам (бимодальный ансамбль эритроцитов), p_1, p_2 — процентное содержание эритроцитов первого и второго типов; ρ_1, ρ_2 — параметры размеров эритроцитов; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные параметры каждого типа эритроцитов, тогда:

$$\rho_0 = \langle \rho \rangle = p_1\rho_1 + p_2\rho_2; \quad \rho_1 = \rho_0(1 + \varepsilon_1); \quad \rho_2 = \rho_0(1 + \varepsilon_2);$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1; \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho_2}{\rho_0} - 1;$$

$$\mu = \langle \varepsilon^2 \rangle = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2; \quad \nu = \langle \varepsilon^3 \rangle = p_1\varepsilon_1^3 + p_2\varepsilon_2^3; \quad (5)$$

$$f(\theta) = \frac{p_1 \rho_1^4 G(\rho_1 \theta) + p_2 \rho_2^4 G(\rho_2 \theta)}{p_1 \rho_1^4 + p_2 \rho_2^4}.$$

Была оценена погрешность предложенного метода, используя бимодальный ансамбль эритроцитов. Характеристики бимодальных ансамблей (БМА) и результаты расчетов параметров дифракционных картин представлены в таблице 1. Всего рассмотрено пять бимодальных ансамблей, отличающихся, главным образом, шириной распределения эритроцитов по размерам. Численные значения параметров размера эритроцитов выбраны для длины волны лазерного излучения $\lambda = 0.63$ мкм. Найденные значения параметров θ_0 , f_0 и f_2 используются в качестве входных данных для формулы (3). Вычислены параметры ансамбля эритроцитов ρ_0 , μ' , ν' по формулам (4) и полученные значения сравнивались с точными значениями параметров ρ_{0c} , μ'_c , ν'_c , найденными по формулам (5). Результаты расчетов представлены в таблице 1. Погрешности определения параметров ансамбля эритроцитов с помощью алгоритма обозначены $\delta\rho_0$, $\delta\mu'$, $\delta\nu'$. Эти погрешности указаны в процентах.

	БМА1	БМА2	БМА3	БМА4	БМА5
ρ_{0c}	38	38.4	38.6	38.8	39
ρ_0	38	38.5	38.8	39.2	39.8
$\delta\rho_0, \%$	0	0.3	0.5	1	2
$\mu'_c, \%$	6.45	11.5	14.0	16.4	18.8
$\mu', \%$	6.34	10.9	12.9	14.6	15.9
$\delta\mu', \%$	1.7	5.2	7.9	11	15
ν'_c	-0.0478	-0.085	-0.104	-0.122	-0.140
ν'	-0.0458	-0.081	-0.103	-0.124	-0.144
$\delta\nu', \%$	4.2	4.7	1.0	1.6	2.9
p_c	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
p	0.41	0.40	0.37	0.35	0.33
$\delta p, \%$	2.5	0	7.5	12.5	17.5
ρ_{1c}	35	33	32	31	30
ρ_1	35.1	34.1	33.6	33.2	33.0
$\delta\rho_1, \%$	0.3	3.3	5.0	7.1	10
ρ_{2c}	40	42	43	44	45
ρ_2	40	42.6	43.9	45.1	46.5
$\delta\rho_2, \%$	0	1.4	2.1	2.5	3.3

Таблица 1

В **четвертой главе** рассмотрена задача рассеяния монохроматической плоской волны на наборе диэлектрических частиц, деформированных в сдвиговом потоке.

В прямой задаче построена дифракционная картина по известным характеристикам набора частиц, в частности, по средней деформируемости частиц, ширине и асимметрии распределения частиц по деформируемости.

В обратной задаче восстановлены параметры распределения частиц по деформируемости с использованием линии изоинтенсивности дифракционной картины и её характерных особенностей.

Совокупность точек дифракционной картины, в которых интенсивность света имеет одно и то же значение $\tilde{I} = const$ называется линией изоинтенсивности.

Полярными называются точки $P(x, y)$, лежащие на осях симметрии линии изоинтенсивности с координатами $(\pm x_p, 0)$, $(0, \pm y_p)$. Рассмотрен прямоугольник, вершины которого имеют координаты $(\pm x_p, \pm y_p)$, линия изоинтенсивности вписана в прямоугольник, характеристические точки которой $C(x, y)$, лежат на диагоналях прямоугольника и имеют координаты $(\pm x_c, \pm y_c)$. Введены радиусы кривизны линии изоинтенсивности $R(x_p)$ и $R(y_p)$ в полярных точках.

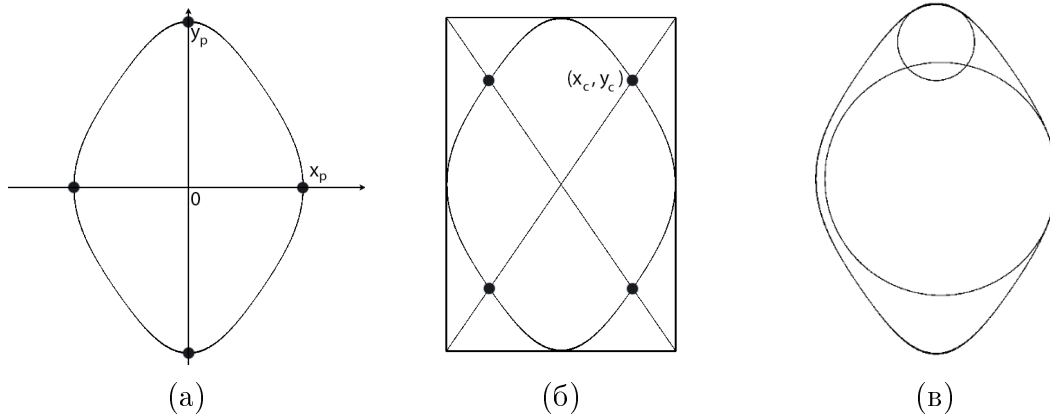


Рис. 8: Характеристики линии изоинтенсивности дифракционной картины – полярные точки (а), характеристические точки (б), окружности кривизны линии в полярных точках (в).

Рассмотрены методы восстановления распределения эритроцитов по деформируемости методом “характеристических точек”, методом “кругов кривизны” и методом построения базы данных смоделированных дифракционных картин.

Линия изоинтенсивности характеризуется параметрами: $D = y_p / x_p$ – мера вытянутости линии изоинтенсивности, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_c/x_p + y_c/y_p)$ – мера “ромбовидности” линии изоинтенсивности. Параметры D и Q имеют связь с характеристиками ансамбля эритроцитов s – средней деформируемостью и μ – шириной распределения эритроцитов по деформируемости:

$$s = D, \quad \mu_p = \frac{2(1-Q)}{5 + (F_0 - 1)Q}, \quad (6)$$

где

$$D = \frac{y_p}{x_p}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_c}{x_p} + \frac{y_c}{y_p} \right), \quad (7)$$

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{f_0}}, \quad f_0 = \frac{1}{4\beta^2} \cdot \tilde{I}, \quad \beta = -0.4. \quad (8)$$

На рисунке 9 изображены результаты корректного применения предложенного метода восстановления распределения эритроцитов по деформируемости в зависимости от интенсивности, измеренной на линии изоинтенсивности, и жесткости клеток крови. Жирным шрифтом выделены участки, для которых погрешность измерения параметра μ (дисперсия деформируемости эритроцитов) с использованием алгоритма (6) не превышает 10% (в медицинской диагностике погрешность должна быть не более 15%). Абсцисса показывает нормализованную интенсивность света на линии изоинтенсивности, выбранной для измерений. Ордината показывает соотношение сторон мягкого (деформируемого) компонента ансамбля эритроцитов в сдвиговом потоке лазерного эктацитометра.

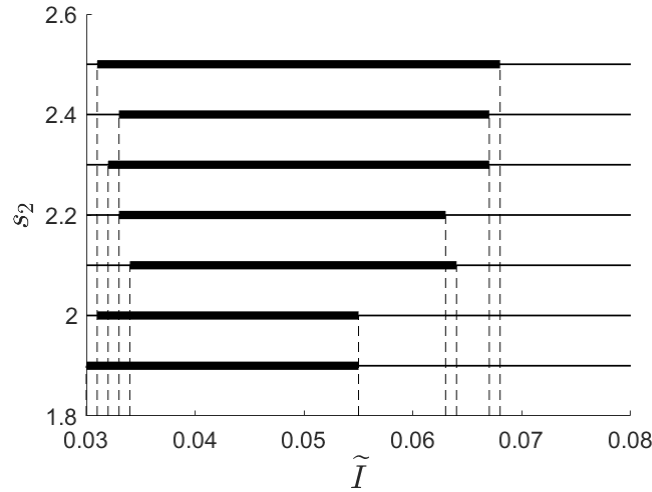


Рис. 9: Область применения алгоритма характеристической точки.

В методе “кругов кривизны” доказана связь между параметрами ансамбля эритроцитов и кругами кривизны в окрестности полярных точек. Введены следующие характеристики:

$$f_0 = \frac{1}{4\beta^2} \cdot \frac{I}{I(0)}, \quad D = \frac{y_p}{x_p}, \quad C_1 = \sqrt{\frac{x_p}{R(x_p)}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{y_p}{R(y_p)}}. \quad (9)$$

В работе использовано уравнение, описывающее форму линии изоинтенсивности:

$$fr^2 = (1 - r)^2 + \mu [H^2 + (r - 1) (-2r + 3(1 - H^2))] + \nu H [-2r + 3(1 - H^2) - 5(r - 1)(1 - H^2)], \quad (10)$$

где $f = f_0 \cdot (1 - 2\mu)$ и $H = \cos 2\varphi$. Введены координаты r и φ :

$$x = \text{Arcos } \varphi, y = Br \sin \varphi, A = \frac{q_1 z}{ka_0}, B = \frac{q_1 z}{kb_0}. \quad (11)$$

В работе доказано, что уравнения (9) – (11) позволяют связать между собой характеристики ансамбля эритроцитов с параметрами дифракционной картины следующими дифрактометрическими уравнениями:

$$\frac{D}{s} = 1 + \nu \cdot q_0, \quad C_1 s = 1 + \mu \cdot q_1 - \nu \cdot q_2, \quad \frac{C_2}{s} = 1 + \mu \cdot q_1 + \nu \cdot q_2, \quad (12)$$

где

$$q_0 = \frac{2}{\sqrt{f_0}}, \quad q_1 = 8 + \frac{2}{\sqrt{f_0}}, \quad q_2 = 16 + \frac{8}{\sqrt{f_0}}. \quad (13)$$

Полученные формулы были успешно использованы при проведении анализа крови.

Для проверки работы нового алгоритма проведено численное моделирование рассеяния лазерного пучка на бимодальном ансамбле эритроцитов. Ансамбль представляет собой смесь недеформируемых и деформируемых эритроцитов, находящихся под определенным сдвиговым напряжением. Форма клеток первой компоненты ансамбля характеризуется числом s_1 , второй компоненты – числом s_2 , а доля клеток первого типа – числом p . На основе этих данных вычислены характеристики ансамбля s, μ, ν по формулам:

$$s = M + \sqrt{M^2 + s_1 s_2}, \quad \mu = p \varepsilon_1^2 + (1 - p) \varepsilon_2^2, \quad \nu = p \varepsilon_1^3 + (1 - p) \varepsilon_2^3, \quad (14)$$

где

$$M = (s_2 - s_1) \cdot \left(p - \frac{1}{2} \right), \quad s = M + \sqrt{M^2 + s_1 s_2}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{s_1 - s}{s_1 + s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{s_2 - s}{s_2 + s}.$$

Далее строилась дифракционная картина, выбиралась линия изоинтенсивности, соответствующая определенному числу f_0 , и определялись параметры этой линии D, C_1, C_2 . После этого числа s, μ, ν вычисляются по формулам (12) – (13). Сравнивая результаты, полученные этими двумя способами, была оценена точность работы алгоритма.

На рисунке 10 изображены зависимости параметра μ , характеризующего разброс эритроцитов по деформируемости, от относительной интенсивности света на линии изоинтенсивности. Эти зависимости построены путем анализа дифракционных картин для модельного (бимодального) ансамбля эритроцитов, характеризуемого параметрами

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 2.5, \quad p = 0.2. \quad (16)$$

Пунктирная кривая на рис. 10 построена с использованием формул (15). Горизонтальная линия на этом рисунке - истинное значение параметра μ , полученное по формулам (12) – (13).

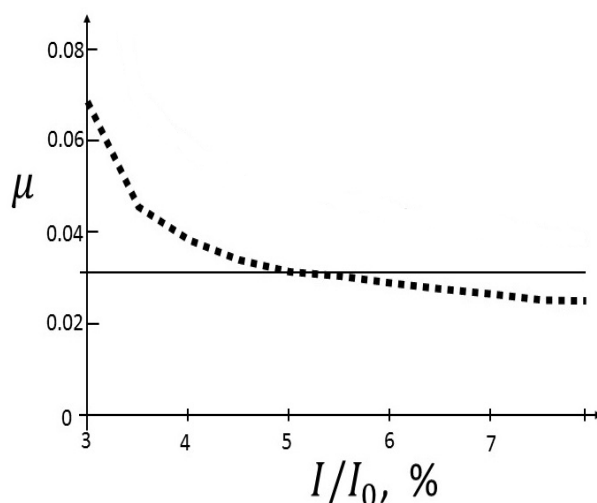


Рис. 10

Следующий подход к решению обратной задачи восстановления функции распределения эритроцитов по деформируемости заключался в разработке базы данных смоделированных дифракционных картин. База данных представляет собой набор решений прямой задачи рассеяния, когда по известным параметрам ансамбля эритроцитов находят характеристики дифракционной картины, возникающей при рассеянии лазерного пучка на образце крови. При построении базы данных считались известными параметры ансамбля эритроцитов s_1 , s_2 , p , а также уровень интенсивности света \tilde{I} на линии изоинтенсивности, выбранной для измерений. В работе вычислены геометрические параметры линии изоинтенсивности – параметр полярных точек D и параметр характеристической точки Q . При заданном значении параметра \tilde{I} база данных представляет собой функции двух переменных $D = D(p, s_2)$ и $Q = Q(p, s_2)$, заданные в виде таблиц.

При фиксированном значении параметра s_2 величины D и Q становятся функциями одной переменной – параметра p : $D_{s_2}(p)$ и $Q_{s_2}(p)$. Анализ таблиц показал, что обе эти функции являются монотонно убывающими. С хорошей точностью они были аппроксимированы непрерывными кусочно-линейными функциями. Это дало возможность каждому числу s_2 из базы данных поставить в соответствие число p_D , такое что $D_{s_2}(p_D) = D_e$, и число p_Q , такое что $Q_{s_2}(p_Q) = Q_e$. В качестве примера на рис. 11 показаны графики функций $D_{s_2}(p)$ и $Q_{s_2}(p)$, построенные для $s_2 = 2$ и $\tilde{I} = 0.05$.

Повторяя такие расчеты для разных значений числа s_2 , получены функции $p_D(s_2)$ и $p_Q(s_2)$, заданные в виде таблиц. В интересующей нас области изменения параметров одна из этих функций является монотонно возрастающей, а вторая – монотонно убывающей. Эти функции также

можно с хорошей точностью аппроксимировать непрерывными кусочно-линейными функциями.

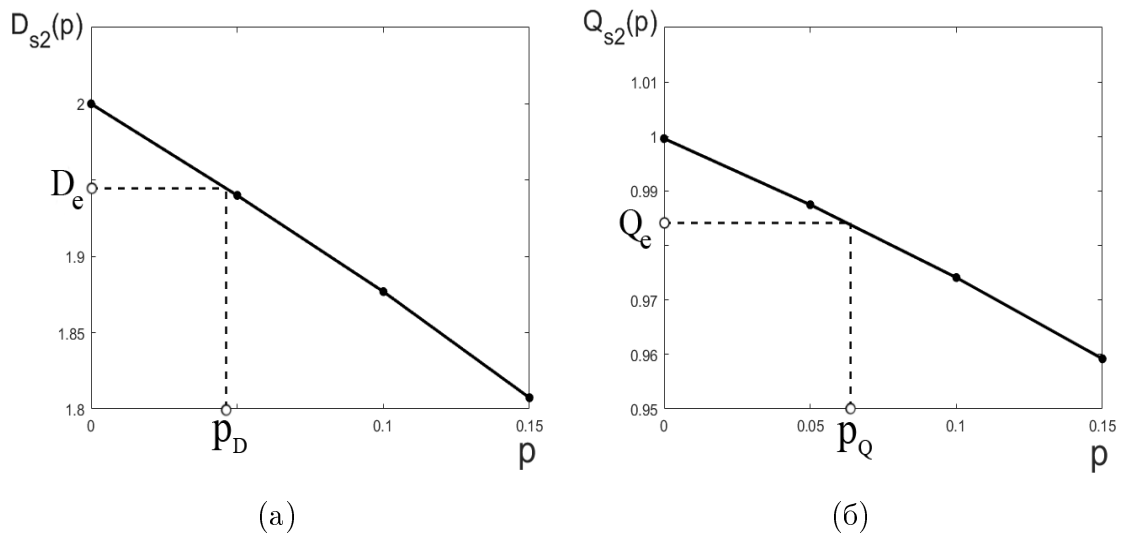


Рис. 11: Графики функций $D_{s_2}(p)$ (а) и $Q_{s_2}(p)$ (б), построенные для $s_2 = 2$ и $\tilde{I} = 0.05$.

Это дало возможность найти число s_2 , при котором $p_D(s_2) = p_Q(s_2)$, и определить соответствующее значение числа p такое, что $p = p_D(s_2) = p_Q(s_2)$. В качестве примера на рис. 12 показаны графики функций $p_D(s_2)$ и $p_Q(s_2)$, построенные для $\tilde{I} = 0.05$, $D_e = 1.945$ и $Q_e = 0.984$.

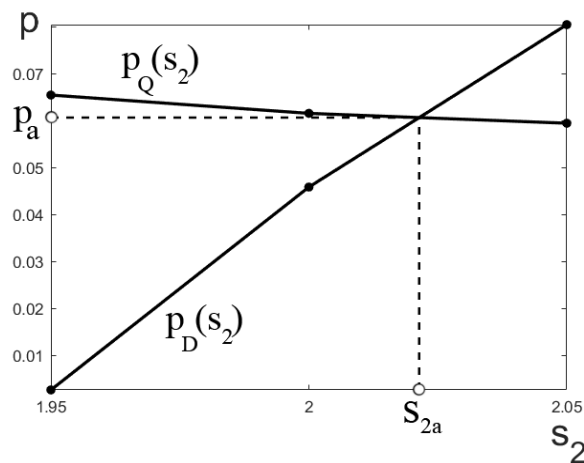


Рис. 12: Графики функций $p_D(s_2)$ и $p_Q(s_2)$, построенные для $\tilde{I} = 0.05$, $D_e = 1.945$ и $Q_e = 0.984$.

Точность алгоритма и область его применимости характеризуются данными, представленными в таблицах 2 и 3. В этих таблицах указана погрешность определения доли слабо деформируемых эритроцитов в бимодальном ансамбле, найденная путем численного моделирования дифракционных картин и их анализа с помощью алгоритма базы данных.

$\tilde{I} \backslash p$	0.015	0.031	0.062	0.125	0.25
0.03	6.6	5.5	1.8	0.7	1.0
0.05	0.7	9.1	1.4	0.5	0.8
0.07	1.3	4.3	4.5	1.5	0.0
0.09	13.7	2.6	1.5	4.0	2.4
0.15	10.0	39.5	8.2	0.7	0.9

Таблица 2: Погрешность определения доли слабо деформируемых эритроцитов в бимодальном ансамбле (в процентах) на основе алгоритма базы данных – численный эксперимент для $s_1 = 1$ и $s_2 = 2.02$.

$\tilde{I} \backslash p$	0.015	0.031	0.062	0.125	0.25
0.03	17.3	5.0	2.2	12.2	2.2
0.05	0.6	8.7	1.0	1.0	0.1
0.07	10.8	4.5	3.2	1.4	0.2
0.09	23.3	7.6	1.6	0.5	0.4
0.15	36.3	7.1	6.2	1.9	0.2

Таблица 3: Погрешность определения доли слабо деформируемых эритроцитов в бимодальном ансамбле (в процентах) на основе алгоритма базы данных – численный эксперимент для $s_1 = 1$ и $s_2 = 2.92$.

Из этих таблиц видно, что погрешность измерения числа p не превышает 10% в области значений параметров

$$0.03 \leq \tilde{I} \leq 0.09$$

и

$$0.03 \leq p \leq 0.25,$$

что соответствует разбросу эритроцитов по деформируемости

$$0.087 \leq \mu' \leq 0.23 \quad \text{при } s_2 = 3,$$

$$0.058 \leq \mu' \leq 0.15 \quad \text{при } s_2 = 2.$$

Здесь параметр μ' вычислялся по формуле

$$\mu' = \sqrt{p\varepsilon_1^2 + (1-p)\varepsilon_2^2}$$

и имеет смысл стандартного отклонения деформируемости эритроцитов в бимодальном ансамбле от ее среднего значения. Для уровней относительной интенсивности света $\tilde{I} = 0.25$ и $\tilde{I} = 0.40$ ошибка измерения параметра p с помощью алгоритма базы данных, как правило, превышает 10%. Что касается погрешности измерения параметра s_2 , то она во всех случаях не превысила 1%.

В **заключении** изложены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Диссертация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Golovina S. G., Zakharov E. V., Tsybrov E. G. The dependence of the antenna directional pattern on the body shape // Computational Mathematics and Modeling. — 2022. — Vol. 33, no. 2. — P. 115–120 [WoS, SJR 0.157].
2. Ustinov V., Tsybrov E. Numerical reconstruction of two-dimensional particle size distributions from laser diffraction data // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2020. — Vol. 28, no. 11. — P. 1633–1647 [WoS, SJR 0.426].
3. О возможности измерения асимметрии распределения эритроцитов по размерам методом лазерной дифрактометрии мазка крови / С. Ю. Никитин, Е. Г. Цыбров, М. С. Лебедева и др. // Квантовая электроника. — 2022. — Т. 52, № 7. — С. 664–670 [WoS, SJR 0.395].
4. Ustinov V. D., Tsybrov E. G., Nikitin S. Y. Estimating of fraction of weakly deformable erythrocytes in a blood sample based on the method of laser ektacytometry and a database of simulated diffraction patterns // Journal of Biomedical Photonics & Engineering. — 2023. — Vol. 9, no. 3. — P. 030303-1–030303-9 [WoS, SJR 0.390].
5. Рассеяние лазерного пучка на ансамбле асимметричных эритроцитов / С. Ю. Никитин, В. Д. Устинов, Е. Г. Цыбров, М. С. Лебедева // Оптика и спектроскопия. — 2021. — Т. 129, № 7. — С. 961–971 [WoS, SJR 0.288].
6. Evgeniy G. Tsybrov, Sergey Y. Nikitin, Maria S. Lebedeva. Calibration problem in laser ektacytometry of erythrocytes // Journal of Biomedical Photonics & Engineering. — 2022. — Vol. 8, no. 4. — P. 040503-1–040503-9 [WoS, SJR 0.390].
7. Улучшенный алгоритм обработки данных для лазерной эктацитометрии эритроцитов / С. Ю. Никитин, В. Д. Устинов, Е. Г. Цыбров, А.

В. Приезжев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 150–157 [WoS, SJR 0.217].

Иные публикации по теме диссертации

8. М. С. Лебедева, Е. Г. Цыбров, С. Ю. Никитин. Измерение ширины распределения эритроцитов по деформируемости методом лазерной эктацитометрии // Труды XVII международной научно-технической конференции “Оптические методы исследования потоков” — НИУ МЭИ Москва, 2023. — С. 595–600.
9. Головина С. Г., Захаров Е. В., Цыбров Е. Г. Исследование связи диаграммы направленности и формы тела // Прикладная Математика и информатика. — Т. 70 из Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. — МАКС Пресс Москва Москва: 2022. — С. 23–28.
10. Никитин С. Ю., Цыбров Е. Г., Лебедева М. С. Измерение асимметрии распределения эритроцитов по размерам методом лазерной дифрактометрии мазка крови // Сборник материалов международного интернет-симпозиума “Микроциркуляция, реология крови и кислородный гомеостаз” — Ярославль, 2022. — С. 212–220.
11. Никитин С. Ю., Лебедева М. С., Цыбров Е. Г. Калибровка лазерного эктацитометра эритроцитов // сборник материалов международного интернет-симпозиума Микроциркуляция, реология крови и кислородный гомеостаз. — Ярославль, 2022. — С. 150–157.
12. Лебедева М. С., Цыбров Е. Г., Никандрова А. Е. Эксперименты по лазерной дифрактометрии мазков крови // Оптические методы исследования потоков: Труды XVI Международной научно-технической конференции, 28 июня - 02 июля 2021. — Издательство Перо, Москва, 2021. — С. 175–182.