МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Дорофеева Александра Владимировна

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ ПРИ ОСЛАБЛЕННЫХ МОМЕНТНЫХ УСЛОВИЯХ

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Королев Виктор Юрьевич

Москва — 2023

Оглавление

Введение 5

1. Равномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях 25

1.1. Равномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для неслучайных сумм 26

1.1.1. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых случайных величин 29

1.1.2. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин 33

1.1.3. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых случайных величин с симметричными распределениями . 34

1.1.4. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с симметричными распределениями 35

1.2. Равномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для некоторых случайных сумм 35

1.2.1. Равномерные оценки для пуассон-биномиальных и биномиальных случайных сумм 35

1.2.2. Равномерные оценки для пуассоновских случайных сумм . 40

1.3. Равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответствующим предельным законам 42

1.3.1. Равномерные оценки для смешанных пуассоновских случайных сумм в общем случае 42

1.3.2. Равномерные оценки для геометрических случайных сумм 44

1.3.3. Равномерные оценки для отрицательных биномиальных случайных сумм 45

1.3.4. Равномерные оценки для зихелевых случайных сумм . . . 46

2. Неравномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при ослабленных моментных условиях . . 49

2.1. Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для неслучайных сумм 50

2.2. Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для некоторых случайных сумм 59

2.2.1. Неравномерные оценки для биномиальных случайных сумм 59

2.2.2. Неравномерные оценки для пуассоновских случайных сумм 64

3. Равномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для функций концентрации сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях . . 67

3.1. Равномерные оценки отклонений функций концентрации сумм независимых случайных величин от функции распределения полунормального закона 67

3.2. Равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации некоторых случайных сумм 70

3.2.1. Равномерные оценки для функций концентрации пуассон-биномиальных и биномиальных случайных сумм . 70

3.2.2. Равномерные оценки для функций концентрации пуассоновских случайных сумм 72

3.3. Равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм 73

3.3.1. Равномерные оценки для функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм в общем случае 73

3.3.2. Равномерные оценки для функций концентрации геометрических случайных сумм 75

3.3.3. Равномерные оценки для функций концентрации отрицательных биномиальных случайных сумм 76

3.3.4. Равномерные оценки для функций концентрации зихелевых случайных сумм 77

4. Точность нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости 80

4.1. Точность нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин в случае, когда ее применение некорректно . 85
4.2. Точность нормальной аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в случае, когда ее применение некорректно 88

Заключение 93

Список терминов 95

Список литературы 96

Введение

Актуальность темы исследования

Сегодня, в эпоху больших данных и стремительно развивающихся компьютерных технологий, особенно остро стоит вопрос обработки информации и поиска закономерностей в ней. В настоящий момент существует большое количество задач в физике, биологии, экономике, клиентской аналитике, медицине и других областях, для которых характерно наличие стохастических ситуациий, хорошо описываемых математическими моделями, базирующимися на схемах суммирования. В связи с этим при решении данных задач может возникнуть вопрос об использовании функции распределения суммы независимых случайных величин, вычисление которой в явном виде, к сожалению, затруднительно, а иногда и вовсе невозможно. Это связно с тем, что операции сложения независимых случайных величин соответствует операция свертки их распределений. Даже в ситуациях, когда удается получить явное представление функции распределения суммы независимых случайных величин, она оказывается малопригодной для практического использования в силу того, что ее сложность увеличивается с ростом числа слагаемых, в то время как в современных исследованиях приходится оперировать очень большим числом факторов.

Описанные выше обстоятельства приводят к необходимости использования аппроксимаций функций распределения сумм независимых случайных величин, которые должны быть удобны для практического применения, а также должны обеспечивать хорошую точность. В такой ситуации наиболее популярным подходом является использование асимптотических аппроксимаций, основанных на соответствующих предельных теоремах, самой известной из которых является центральная предельная теорема (ЦПТ), описывающая сближение функции распределения суммы независимых случайных величин с функцией распределения стандартного нормального закона

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Классическая ЦПТ устанавливает, что при некоторых условиях, например, при выполнении условия Линдеберга, распределение суммы независимых случайных величин сходится к нормальному закону при неограниченном возрастании числа слагаемых.

Задача изучения скорости сходимости в ЦПТ имеет богатую историю, и множество именитых ученых внесли свой вклад в ее развитие. В свое время над ней работали А. М. Ляпунов, А. Я. Хинчин, П. Леви, А. Н. Колмогоров, Г. Крамер, С. Н. Бернштейн, Я. Линдеберг, В. Феллер, Б. В. Гнеденко, Ю В. Прохоров, К.-Г. Эссеен, И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, С. В. Нагаев, В. М. Золотарев, В. В. Сазонов, В. В. Петров, Л. В. Осипов, К. Хейди, Х. Правитц, Р. Михель, П. Холл, А. В. Булинский. Такие выдающиеся ученые как А. Н. Колмогоров и Б. В. Гнеденко, В. В. Петров, В. М. Золотарев посвятили этой теме отдельные главы в своих ставших классическими книгах, а В. В. Сенатов, П. Холл, Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао и И. Г. Шевцова — целые монографии. Существенный прогресс достигнут и в распространении оценок на более сложные объекты. В частности, в работах В. В. Сазонова и В. В. Сенатова рассматривался многомерный случай, а А. В. Булинский и его ученики рассматривали оценки скорости сходимости в ЦПТ для векторных случайных полей [1].

В 1901 г. А. М. Ляпунов [2] установил первую оценку скорости сходимости в ЦПТ. Данная оценка была представлена в терминах Ляпуновской дроби (функции числа слагаемых и их первых моментов). Подобные оценки стали называться моментными, а необходимые условия существования моментов определенных порядков — моментными условиями.

Моментные оценки являются наиболее простыми и удобными оценками точности аппроксимации в ЦПТ, несмотря на то, что они не лишены некоторых недостатков. Например, в них отсутствует информация о близости исходного распределения и предельного закона, поэтому в некоторых случаях такие оценки могут быть довольно грубыми. Тем не менее, описываемые в литературе альтернативы моментным оценкам, как правило, непросто вычисляются и имеют сложный вид. Этот факт приводит к возникновению трудностей при практическом применении, в то время как моменты случайных величин достаточно просто оценить по выборкам.

Рассмотрим класс функций $\mathcal{G}$ в который входят функции со следующими характеристиками

- функция $g(x)$ четна;

- функция $g(x)$ неотрицательна при всех x и $g(x) > 0$ при $x > 0$;
- функция $g(x)$ не убывает при $x > 0$;
- функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

Основными типами моментных условий, при выполнении которых исторически рассматриваются оценки скорости сходимости являются

1. $\mathsf{E}\exp\{a|X_i|\} < \infty,\ a > 0,\ i = 1, \dots n,\ n \in \mathbb{N}$;
2. $\mathsf{E}|X_i|^3 < \infty,\ i = 1, \dots n,\ n \in \mathbb{N}$;
3. $\mathsf{E}|X_i|^{2+\delta} < \infty,\ \delta \in (0{,}1),\ i = 1, \dots n,\ n \in \mathbb{N}$;
4. $\mathsf{E}X_i^2 g(X_i) < \infty,\ i = 1, \dots n,\ n \in \mathbb{N}$;
5. $\mathsf{E}X_i^2 < \infty,\ i = 1, \dots n,\ n \in \mathbb{N}$.

Наибольший прогресс в исследовании оценок скорости сходимости в ЦПТ достигнут при требовании существования третьих абсолютных моментов у слагаемых. Это обстоятельство обусловлено тем, что одна из самых простых и удобных оценок точности нормальной аппроксимации устанавливается неравенством Эссеена, которое справедливо при требованиях типов 2 и 3 (при $\delta = 1$ Берри–Эссеена), и доказано что скорость сходимости возрастает с ростом δ лишь до тех пор, пока $\delta \leqslant 1$ (более подробно см., например, [3]).

Четвертый класс составляют оценки, для использования которых требуется наличие моментов вида $\mathsf{E}X_i^2 g(X) < \infty$, $g \in \mathcal{G}$. Данные оценки описаны, например, в [4], [5]. Более того, в работах [6] и [7] были введены подклассы $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1$ класса $\mathcal{G}$.

$\mathcal{G}_0$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x) \in \mathcal{G}$;
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{g(x^2)}{xg(x)} = 0$.

$\mathcal{G}_1$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x) \in \mathcal{G}$;
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{g(x)} = \infty$.

В упомянутых выше работах рассмотрены оценки при выполнении условий вида $\mathsf{E}X_i^2 g(X) < \infty$, $g \in \mathcal{G}_0$, и $\mathsf{E}X_i^2 g(X) < \infty$, $g \in \mathcal{G}_1$.

Требования третьего и четвертого типов являются промежуточными между требованиями наличия вторых и третьих моментов, причем требования четвертого типа обобщают условия третьего типа на функции, возрастающие медленнее степенных.

Оценки скорости сходимости, которые получаются при требовании наличия нескольких первых моментов слагаемых, принято называть оценками скорости сходимости при ослабленных моментных условиях. Так, например, требования 1–5 есть не что иное, как ослабленные моментные условия.

Также важно подчеркнуть, что требование наличия абсолютного второго момента нельзя ослабить, поскольку это приведет к невыполнению условия Линдеберга, критерия сходимости в ЦПТ. Очевидно, более удобными, с практической точки зрения, будут оценки, справедливые при минимальных моментных условиях.

Важным примером случаев, когда оценки скорости сходимости при ослабленных моментных условиях 2–5 типов особенно полезны, являются ситуации, в которых распределения слагаемых имеют так называемые тяжелые хвосты. Примерами могут служить распределения Стьюдента и Парето. Именно распределения с тяжелыми хвостами часто встречаются в задачах физики, геологии, страхования, в задачах анализа финансовых и экономических данных, поскольку они хорошо описывают ситуации, когда нельзя пренебрегать редкими, но важными событиями, такми как землетрясения, аварии, различного рода сбои функционирования систем и т.д. Задачи, рассматриваемые в настоящей работе, соответствуют ситуациям, когда хвосты могут быть довольно тяжелыми при условии адекватности нормальной аппроксимации.

Также важно подчеркнуть, что при построении математических моделей порой приходится иметь дело со случайным числом факторов, что делает задачу об аппроксимации функций распределения случайных сумм особенно актуальной. Всюду далее под случайной суммой независимых случайных величин будет подразумеваться сумма, в которой число слагаемых есть ни что иное, как случайная величина. Суммы независимых случайных величин с детерминированным числом слагаемых $n \in \mathbb{N}$ будут называться неслучайными суммами или же просто суммами независимых случайных величин.

Пуассон-биномиальные, биномиальные и смешанные пуассоновские (особенно геометрические) случайные суммы используются в теории страхования (динамические и статические модели коллективного риска [8], представление Беекмана–Поллачека–Хинчина для вероятности разорения в рамках классического процесса риска), в финансовой математике при описании остановленных случайных блужданий (модель Кокса–Росса–Рубинштейна [9]), теории надежности (моделирование редких событий [10]) и т.д.

При решении практических задач зачастую пренебрегают проверкой условий применимости нормальной аппроксимации, из-за чего становится важным вопрос, какой может быть реальная точность нормальной аппроксимации, когда теоретически она не применима, но используется в практических вычислениях. В настоящей работе также рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости.

Более того, иногда стоит задача получить числовые характеристики распределения какой-либо случайной величины. Так, например, традиционной мерой разброса является дисперсия, представляющая собой число, однако в дисперсии отсутсвует информация о том, какие отклонения от ожидаемого значения случайной величины являются наиболее вероятными. Данная информация содержится в функциях концентрации.

Степень разработанности темы

Получение оценок точности нормальной аппроксимации является фундаментальной задачей теории вероятностей, имеющей богатую историю, часть которой будет рассмотрена далее.

Пусть $X_1,X_2,...$ — независимые случайные величины, причем

$$\mathsf{E}X_i = a_i \quad \text{и} \quad 0 < \mathsf{D}X_i^2 \equiv \sigma_i^2 < \infty, \qquad i = 1, 2, ...$$

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_n = X_1 + ... + X_n, \quad B_n^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2.$$

Также пусть $\Phi(x)$, как и ранее, обозначает стандартную нормальную функцию распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x \left| \mathsf{P}(S_n - \mathsf{E}S_n < xB_n) - \Phi(x) \right|.$$

Пусть $\mathcal{G}$ — класс вещественных функций $g(x)$ аргумента $x \in \mathbb{R}$ таких, что

- функция $g(x)$ четна;
- функция $g(x)$ неотрицательна при всех x и $g(x) > 0$ при $x > 0$;
- функция $g(x)$ не убывает при $x > 0$;
- функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

В 1963 г. М. Кац [4] доказал, что для любой функции $g \in \mathcal{G}$, если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены, а $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, то существует конечная положительная абсолютная константа C_1 такая, что

$$\Delta_n \leqslant C_1 \cdot \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma_1^2 g\big(\sigma_1\sqrt{n}\big)}. \tag{1}$$

В 1965 г. результат (1) был обобщен В. В. Петровым [11] на случай не обязательно одинаково распределенных случайных величин (также см. [5]). Он показал, что какой бы ни была функции $g \in \mathcal{G}$, если $\mathsf{E}X_i^2 g(X_i) < \infty$, $i = 1, \ldots n$, то существует конечная положительная абсолютная постоянная C_2 такая, что

$$\Delta_n \leqslant \frac{C_2}{B_n^2 g(B_n)} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i^2 g(X_i). \tag{2}$$

Всюду далее символ $\mathbb{I}(A)$ будет обозначать индикаторную функцию события A. Для $\varepsilon \in (0,\infty)$ обозначим

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| \geqslant \varepsilon B_n), \quad M_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}(|X_i| < \varepsilon B_n).$$

В 1966 г. Л. В. Осипов [12] доказал, что существует такая конечная положительная абсолютная постоянная C_3, что для любого $\varepsilon \in (0,\infty)$

$$\Delta_n \leqslant C_3\big[L_n(\varepsilon) + M_n(\varepsilon)\big] \tag{3}$$

(также см. [13], глава V, § 3, теорема 7).

Частным случаем (3) является неравенство

$$\Delta_n \leqslant C_3'\big[L_n(1) + M_n(1)\big]. \tag{4}$$

В работе [5] показано, что $C_3 \leqslant 2C_3'$.

Для одинаково распределенных случайных величин неравенство (4) имеет вид

$$\Delta_n \leqslant \frac{C_4}{\sigma_1^3\sqrt{n}} \mathsf{E}X_1^2 \min\big\{\sigma_1\sqrt{n}, |X_1|\big\}. \tag{5}$$

В 1968 г. неравенство (3) было обобщено В. Феллером [14]. При помощи метода характеристических функций было показано, что $C_3 \leqslant 6$.

В работах Л. Падитца [15, 16] была опубликована оценка константы $C_4 < 4.77$. Позднее, в 1986 г, он же уточнил данную оценку в работе [17] и показал, что $C_4 < 3.51$. Это удалось сделать с помощью техники, ранее использованной в работах [15, 16] с учетом леммы 12.2 из монографии [18].

А. Барбур и П. Холл в 1984 г. в своей работе [19] доказали, ссылаясь на упомянутый выше результат Феллера, неравенство (4) методом Стейна и представили оценку $C_3' \leqslant 22$.

В 2001 г. Л. Чен и К. Шао опубликовали работу [20], не содержащую ссылок на упомянутые выше работы Л. Падитца [15, 16, 17], в которой при помощи метода Стейна было доказано, что неравенство (4) справедливо с константой $C_3' = 4.1$.

В 2011 г. В. Ю. Королев и С. В. Попов в работе [21] показали, что существуют универсальные константы C_1 и C_2, не зависящие от конкретного вида функции $g \in \mathcal{G}$, такие, что неравенства (1), (2), (4) и (5) справедливы соответственно с $C_1 = C_4 \leqslant 3.0466$ и $C_2 = C_3' \leqslant 3.1905$. Этот результат затем был уточнен теми же авторами в работах [22, 23], где было показано, что $C_1 = C_2 = C_4 = C_3' \leqslant 2.011$.

Кроме того, в упомянутой выше работе [23] представлены нижние оценки универсальных констант C_1 и C_2. А именно, пусть g – произвольная функция из класса $\mathcal{G}$. Пусть также $\mathcal{H}_g$ – множество всех случайных величин X, для которых выполнено условие $\mathsf{E}X^2g(X) < \infty$. Обозначим

$$C^* = \sup_{g\in\mathcal{G}} \sup_{\substack{X_i\in\mathcal{H}_g,\\ i=1,\dots,n}} \frac{\Delta_n B_n^2 g(B_n)}{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}X_i^2 g(X_i)}.$$

Несложно видеть, что C^* – это наименьшее возможное значение абсолютной константы C_2, гарантирующее справедливость неравенства (2) сразу для всех функций $g \in \mathcal{G}$.

В работе [23] показано, что справедливо неравенство

$$C^* \geqslant \sup_{z>0} \left| \frac{1}{1+z^2} - \Phi(-z) \right| = 0.54093\ldots$$

Важно отметить, что неравенство (3) имеет особое значение. Несложно видеть, что

$$M_n(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| < \varepsilon B_n) \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому из (3) вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0,\infty)$

$$\Delta_n \leqslant C_3\big(\varepsilon + L_n(\varepsilon)\big). \tag{6}$$

В то же время условие Линдеберга

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$$

для любого $\varepsilon \in (0,\infty)$ является критерием сходимости в ЦПТ. Таким образом, оценка (6) связывает скорость сходимости с критерием сходимости, и ее правая и левая части стремятся или не стремятся к нулю одновременно. По терминологии В. М. Золотарева [24], данная оценка называется естественной.

Приведенные выше оценки скорости сходимости распределений сумм независимых случайных величин в ЦПТ равномерны по x. Однако в силу того, что предельная и аппроксимируемая функции являются функциями распределения, должно выполняться соотношение

$$\Delta_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$$

при каждом фиксированном n. Это обстоятельство не отражается в равномерных оценках. Тем не менее, точность нормальной аппроксимации для функций распределения сумм независимых случайных величин при больших значениях аргумента представляет большой интерес, и в данном случае полезными оказываются неравномерные оценки скорости сходимости.

Задачу зависимости остаточного члена в ЦПТ от x рассматривал еще в 1938 г. Г. Крамер [25] для распределений с экспоненциально убывающими хвостами ($\mathsf{E}\exp\{a|X_i|\} < \infty$ для некоторого $a > 0$).

Пусть далее

$$\mathsf{E}|X_i - a_i|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta,i} < \infty, \quad \mathsf{E}X_i = a_i, \quad \delta \in (0;\, 1], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Также обозначим

$$l_{2+\delta,n} = \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \beta_{2+\delta,i},$$

$l_{2+\delta,n}$ есть ни что иное, как ляпуновское сотношение порядка $2+\delta$.

Для одинаково распределенных случайных величин с существующим третьим абсолютным центральным моментом в 1945 г. К.–Г. Эссееном [26] была получена оценка

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{C_5(\beta_{3,1})}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\ln(2+|x|)}{1+|x|^3},$$

где $C_5(\beta_{3,1})$ – постоянная, зависящая только от $\beta_{3,1}$. Данная оценка, по-видимому, является первой неравномерной оценкой скорости сходимости при ослабленных моментных условиях.

В работе Л. Д. Мешалкина и Б. А. Рогозина [27] было доказано существование абсолютной постоянной C_6 такой, что при всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \geqslant 1$

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{C_6\beta_{3,1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\max\{\ln n,\, \ln(2+|x|)\}}{1+|x|^3},$$

а также существование абсолютной постоянной C_7 такой, что при всех $n \geqslant 1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\Delta_n(x) \leqslant C_7 \cdot l_{3,n}.$$

Упомянутые выше результаты были улучшены и обобщены С. В. Нагаевым [28] и А. Бикялисом [29] для случая одинаково распределенных случайных величин и $\delta = 1$ и для случая необязательно одинаково распределенных случайных величин и $0 < \delta \leqslant 1$ соответственно. Было показано, что существуют такие положительные конечные числа $C(\delta)$, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(1+|x|^{2+\delta}\right)\Delta_n(x) \leqslant C(\delta) l_{2+\delta,n}. \tag{7}$$

Вопрос точности устанавливаемого оценкой (7) порядка по n и x изучался в работах А. Бикялиса [30], Р. Михеля [31], Т. Накаты [32], Л. В. Осипова и В. В. Петрова [33], В. В. Петрова [6], Л. В. Розовского [7], К. Хейди [34].

Первым верхние оценки для $C(\delta)$ для разнораспределенных случайных величин в серии своих работ получил Л. Падитц [35, 36, 37, 38]. Первая работа из данного цикла содержала оценку для $C(1) > 1955$. Затем были приведены численные оценки для $C(\delta)$ при $0.1 \leqslant \delta \leqslant 0.9$, и было показано, что $C(\delta) \leqslant 820.4$. Затем было показано, что $C(1) \leqslant 114.7$.

В работе Р. Михеля [39] для случая одинаково распределенных случайных величин было показано, что $C(1) \leqslant C_0(1) + 8(1+e)$, где $C_0(1)$ есть ни что иное, как константа из широко известного неравенства Берри–Эссеена

$$\Delta_n \leqslant C_0(1) l_{3,n}.$$

С учетом наилучшей на сегодняшний день оценки константы в неравенстве Берри–Эссеена, полученной И. Г. Шевцовой в [3], $C(1) \leqslant 30.22$.

В работе В. Тысиака [40] для случая $0 < \delta \leqslant 1$ и разнораспределенных случайных величин было установлено, что $C(\delta) \leqslant 32.88$.

В [41] Л. Падитц и Ш. А. Мирахмедов получили оценку $C(1) \leqslant 32.153$ для разнораспределенных случайных величин. В 1986 г. Л. Падитц [17] показал, что $C(1) \leqslant 31.935$. В 2012 г. для случая одинаково распределенных случайных величин авторы статьи [42] показали, что $C(1) \leqslant 18.12$. Также $C(1) \leqslant 22.25$ для случая разнораспределенных случайных величин [43, 44].

Также для случая $\delta = 0$ в 1979 г. В. В. Петров в своей статье [45] показал, что при выполнении условия существования вторых моментов существует конечная положительная постоянная C_7 такая, что

$$\Delta_n(x) \leqslant C_7 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}\big(|X_i| \geqslant (1+|x|)B_n\big)}{(1+|x|)^2 B_n^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathsf{E} |X_i|^3 \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+|x|)B_n\big)}{(1+|x|)^3 B_n^3} \right\}.$$

В 2001 г. Л. Чен и К. Шао [20] методом Стейна передоказали приведенное выше неравенство. Верхним оценкам константы C_7 посвящены работы [46, 47, 48]. Важно отметить, что эти оценки зависят от x. В [48] приведена оценка $C_7 \leqslant 76.17$. В работе С. В. Попова [49] было показано, что $C_7 \leqslant 47.62$ в общем случае и $C_7 \leqslant 39.25$ в случае одинаково распределенных случайных величин.

В 1979 г. В. В. Петров [45] также доказал неравномерный аналог неравенства (1)

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{C_8}{B_n^2 (1+|x|)^2 g\big(B_n(1+|x|)\big)} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E} X_k^2 g(X_k).$$

Введем следующие обозначения

$$\tau_{2+\delta,n} = B_n^{-(2+\delta)} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(2+\delta)}, \quad \sigma_i^2 = \mathsf{D} X_i, \quad \delta \in (0;\, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Также в 2011 г. Ю. С. Нефедовой и И. Г. Шевцовой [50] для случая одинаково распределенных случайных величин и произвольного $0 < \delta \leqslant 1$ была объявлена оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^3)\Delta_n(x) \leqslant 15.77(l_{3,n}+\tau_{3,n}), \quad x\in\mathbb{R}, \quad n\geqslant 1.$$

Позднее в работе И. Г. Шевцовой [3] были доказаны следующие соотношения

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^3)\Delta_n(x) \leqslant min\{21.82 l_{2+\delta,n}, 18.19(l_{2+\delta,n}+\tau_{2+\delta,n})\} \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 21.82 l_{2+\delta,n}, & l_{2+\delta,n}/\tau_{2+\delta,n} < 5.01; \\ 18.19(l_{2+\delta,n}+\tau_{2+\delta,n}), & l_n/\tau_{2+\delta,n} \geqslant 5.01. \end{cases}$$

для разнораспределенных случайных величин и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^3)\Delta_n(x) \leqslant min\{17.37 l_{2+\delta,n}, 15.70(l_{2+\delta,n}+\tau_{2+\delta,n})\} \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 17.37 l_{2+\delta,n}, & l_{2+\delta,n}/\tau_{2+\delta,n} < 6.07; \\ 15.70(l_{2+\delta,n}+\tau_{2+\delta,n}), & l_{2+\delta,n}/\tau_{2+\delta,n} \geqslant 6.07. \end{cases}$$

для одинаково распределенных случайных величин.

В 1967 г. в статье Л. В. Осипова и В. В. Петрова [33] было доказано, что если $\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta \in (0,1)$, то

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{Q\big(\sqrt{n}(1+|x|)\big)}{n^{\delta/2}(1+|x|)^{2+\delta}},$$

где $Q(y)$ – ограниченная функция, такая что $Q(y) \to 0$ при $y \to \infty$. Другими словами, если $\mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ при $0 < \delta < 1$, то $\Delta_n(x) = o\big(n^{-\delta/2}(1+|x|)^{-(2+\delta)}\big)$. Условие $\delta < 1$ существенно, при $\delta = 1$ этот результат не имеет места.

Позднее в работе В. В. Петрова [6] указанная выше оценка была обобщена. А именно, был рассмотрен уже упомянутый ранее класс $\mathcal{G}_0$, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x) \in \mathcal{G}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x^2)}{xg(x)} = 0.$

Примерами функций из данного класса могут служить $g_\delta(x) = |x|^\delta$, $0 < \delta < 1$, и $g(x) = \exp\left\{\left(\log(e+|x|)\right)^p\right\}$, $0 < p < 1$ (см. [6]). Очевидно, что класс $\mathcal{G}_0$ является подмножеством класса $\mathcal{G}$. Еще одним полезным примером является функция $g_1(x) \equiv |x|$, которая принадлежит классу $\mathcal{G}$, но не входит в класс $\mathcal{G}_0$.

В той же работе [6] было показано, что если $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции $g(x) \in \mathcal{G}_0$, то существует ограниченная функция $Q(y)$ такая, что $Q(y) \to 0$ при $y \to \infty$, и

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{Q\left(\sqrt{n}(1+|x|)\right)}{(1+|x|)^2 g\left(\sigma\sqrt{n}(1+|x|)\right)} \tag{8}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Неравенство (8) было уточнено Л. В. Розовским [7]. Он показал, что оно справедливо для функций из более широкого класса, нежели $\mathcal{G}_0$. А именно для $g \in \mathcal{G}_1$, где $\mathcal{G}_1$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x) \in \mathcal{G}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{g(x)} = \infty$.

Далее рассмотрим функцию концентрации $Q_\xi(z)$ случайной величины ξ следующим образом

$$Q_\xi(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathsf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x+z), \quad z \geqslant 0.$$

Данное понятие было введено П. Леви в 1937 г. [51]. Оценки скорости убывания функций концентрации сумм независимых случайных величин с ростом числа слагаемых рассматривались достаточно давно, например, в [13], однако они не учитывали изменения формы функций концентрации. Впервые оценки функций концентрации, описывающие асимптотические изменения их формы, были получены В. Е. Бенингом, Н. К. Галиевой, В. Ю. Королевым в [52]. В вышеуказанной работе результаты получены при предположении о существовании третьих абсолютных моментов у слагаемых.

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является уточнение существующих и получение новых оценок скорости сходимости в ЦПТ и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях, а также изучение точности нормальной аппроксимации в случае, когда она не применима.

Объектом исследования являются оценки скорости сходимости в ЦПТ и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях.

Предметом исследования являются доказательства предельных теорем при ослабленных моментных условиях, алгоритмы получения численных оценок констант в данных теоремах, а также условия применения данных теорем.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих **задач**:

1) уточнение равномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ для неслучайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях;
2) перенесение полученных в п.1 результатов на некоторые случайные суммы;
3) уточнение неравномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при ослабленных моментных условиях;
4) пренесение полученных в п.3 результатов на некоторые случайные суммы;
5) получение оценок точности аппроксимации функций концентрации как неслучайных, так и некоторых случайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях;
6) рассмотрение оценок точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы заключается в:

- уточнении как равномерных, так и неравномерных оценок точности нормальной аппроксимации распределений сумм независимых (одинаково распределенных для неравномерных оценок) случайных величин при ослабленных моментных условиях за счет актуализации констант в промежуточных неравенствах и улучшения промежуточных результатов;
- переносе полученных равномерных и неравномерных оценок на некоторые случайные суммы;
- получении равномерных оценок точности аппроксимации функций концентрации как неслучайных, так и некоторых случайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях;
- получении оценок точности нормальной аппроксимации в случае, когда ее применение некорректно.

Теоретическая и практичекая значимость работы

Результаты диссертационной работы имеют теоретическую значимость и допускают применение при решении практических задач в одной из самых перспективных областей прикладных наук – анализе данных. Задача аппроксимации как случайных, так и неслучайных сумм независимых случайных величин актуальна для финансовой математики, клиентской аналитики, физики, геологии и т.д. Также важно отметить, что полученные оценки справедливы в задачах, когда хвосты могут быть сколь угодно тяжелыми при условии адекватности нормальной аппроксимации. Также известно, что при решении практических задач зачастую пренебрегают проверками условий, в которых справедлива нормальная аппроксимация. Результаты работы позволяют оценить адекватность применения нормальной аппроксимации в случаях, когда ее использование, вообще говоря, некорректно. Более того, в работе особое внимание уделено оценкам функций концентрации сумм независимых случайных величин. Функции концентрации, в свою очередь, могут применяться в качестве информативной характеристики волатильности и дают возможность напрямую сравнить информативность функций концентрации и дисперсии как мер разброса.

Методология и методы исследования

При получении основных результатов диссертационной работы применялись классические методы математического анализа и теории вероятностей, например, метод характеристических функций. В части промежуточных результатов улучшения удалось достичь посредством актуализации констант в неравенстве Берри–Эссеена или с помощью получения более точных новых неравенств.

Численные расчеты были проведены на языках программирования R и Python.

Положения, выносимые на защиту

1. Улучшены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Оценки констант выписаны в явном виде: $C \leqslant 1.8627$ в случае независимых случайных величин, $C \leqslant 1.8546$ в случае независимых одинаково распределенных случайных величин, $C \leqslant 1.5769$ в случае независимых симметричных случайных величин, $C \leqslant 1.5645$ в случае независимых симметричных одинаково распределенных случайных величин.
2. Получены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм:
    2.1. пуассон-биномиальных случайных сумм;
    2.2. биномиальных случайных сумм;
    2.3. пуассоновских случайных сумм.

3. Получены равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответствующим предельным законам при ослабленных моментных условиях:
   3.1. общий случай;
   3.2. случай сходимости распределений геометрических случайных сумм к распределению Лапласа;
   3.3. случай сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм к дисперсионному гамма-распределению;
   3.4. случай сходимости распределений зихелевых случайных сумм к распределению Стьюдента.
4. Улучшены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что константы в данных оценках не превосходят 37.9.
5. Получены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм:
   5.1. биномиальных случайных сумм;
   5.2. пуассоновских случайных сумм.
6. Получены равномерные оценки отклонений функций концентрации сумм независимых случайных величин от функции распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях.
7. Получены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации некоторых случайных сумм функцией распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях:
   7.1. пуассон-биномиальных случайных сумм;
   7.2. биномиальных случайных сумм;
   7.3. пуассоновских случайных сумм.
8. Получены равномерные оценки скорости сходимости функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм к соответсвующим предельным законам при ослабленных моментных условиях:
   8.1. общий случай;
   8.2. случай сходимости функций концентрации геометрических случайных сумм к экспоненциальному распределению;

8.3. случай сходимости функций концентрации отрицательных биномиальных случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей симметричное дисперсионное гамма-распределение;
8.4. случай сходимости функций концентрации зихелевых случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей распределение Стьюдента.

9. Рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима.

Личный вклад

Личный вклад автора заключается в выполнении теоретических исследований и численных расчетов, в то время как вклад научного руководителя заключается в постановке задач и общем подходе к их решению. Полученные результаты диссертационной работы были представлены автором в виде научных публикаций и докладывались на научных конференциях, семинарах и рабочих столах. Подготовка части материалов к публикациям проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты работы докладывались:

- на конференции «Ломоносов – 2015», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 13 – 17 апреля 2015;
- на конференции «Тихоновские чтения – 2015», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 26 октября – 2 ноября 2015;
- на конференции «Задачи современной информатики – 2015», Институт проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН), Москва, Россия, 29 – 30 октября 2015;

- на 4 международном воркшопе «Analysis, Geometry and Probability», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 28 сентября – 2 октября 2016;
- на XXXVI Международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей, Петрозаводск, Карелия, Россия, 21 – 25 июня 2021;
- неоднократно на научно-исследовательском семинаре «Теория риска и смежные вопросы», кафедра математической статистики, факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ имени М. В. Ломоносова.

По итогам конференций были выполнены публикации в сборниках тезисов.

Основные результаты данной работы также представлены в 9 статьях:

- Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Оценки точности нормального приближения для распределений случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2015. — Вып. 26. — С. 106–133 / 1.75 п. л.
- Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Об абсолютной константе в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго // Вестник Карагандинского университета. — 2015. — Т. 78. — № 2. — С. 48–56 / 0.56 п. л.
- Korolev V., Dorofeeva A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment conditions // Lithuanian Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 57. — № 1. — P. 38–58 / 1.31 п. л. (Scopus, Web of Science, IF WoS = 0.78).
- Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Оценки функций концентрации случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Теория вероятностей и ее применения. — Москва. — 2017. — Т. 62. — № 1. — С. 104–121 / 1.13 п. л. (RSCI, ВАК, РИНЦ).

  Версия на английском языке: Korolev V., Dorofeeva A. Bounds for the concentration functions of random sums under relaxed moment conditions // Theory of Probability and its Applications. — 2018. — Vol. 62. — № 1. — P. 84–97 / 0.88 п. л. (Scopus, Web of Science, IF WoS = 0.56).
- Королев В. Ю., Дорофеева А. В. О неравномерных оценках точности нормальной аппроксимации для распределений некоторых случайных сумм при

ослабленных моментных условиях // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН. — Москва. — 2018. — Т. 12. — № 4. — С. 86–91 / 0.38 п. л.(Scopus, RSCI, ВАК, РИНЦ, IF = 0.604).

- Дорофеева А. В. Неравенства типа Каца – Петрова для некоторых случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2018. — Вып. 28. — С. 66–75 / 0.63 п. л.
- Дорофеева А. В. О неравенствах типа Каца – Петрова – Розовского для некоторых случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2019. — Вып. 29. — С. 11–18 / 0.5 п. л.
- Королев В. Ю., Дорофеева А. В. О точности нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН. — Москва. — 2021. — Т. 15. — № 1. — С. 116–121 / 0.38 п. л. (Scopus, RSCI, ВАК, РИНЦ, IF = 0.604).
- Dorofeeva A., Korolev V., Zeifman A. Bounds for the accuracy of invalid normal approximation // Colloquium Mathematicum. — 2022. — Vol. 169. — P. 243–253 / 0.69 п. л. (Scopus, Web of Science, IF WoS = 0.633).

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка терминов и списка литературы. Используется сквозная нумерация формул, теорем, лемм, следствий и замечаний. Общий объём работы составляет 103 страницы. Далее излагается краткое содержание работы.

Первая глава посвящена уточнению равномерных оценок скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Первыми рассматриваются оценки точности нормальной аппроксимации. Сначала излагаются вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов. Затем приводятся основные результаты для неслучайных сумм независимых случайных величин и рассматриваются частные случаи: независимые одинаково распределенные случайные величины, независимые симметричные случайные величины, независимые симметричные одинаково распределенные случайные величины. Оценки констант для каждого случая представляются в явном виде. Далее описываются равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для пуассон-биномиальных, биномиальных и пуассоновских случайных сумм. Затем излагаются равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответствующим предельным законам. Рассматривается как общий случай, так и случаи геометрических, отрицательных биномиальных и зихелевых случайных сумм.

Вторая глава посвящена неравномерным оценкам скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В начале главы так же представлены вспомогательные утверждения, а затем приводятся основные результаты. Верхняя оценка константы выписана в явном виде. Также в данной главе описаны неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для биномиальных и пуассоновских случайных сумм.

В третьей главе представлены оценки точности аппроксимации функций концентрации сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Сначала рассматриваются оценки отклонений функций концентрации сумм независимых случайных величин от функции распределения полунормального закона. Далее представлены оценки точности аппроксимации функций концентрации пуассон-биномиальных, биномиальных и пуассоновских случайных сумм от функции распределения полунормального закона. Затем рассматриваются оценки точности аппроксимации функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм соответствующими предельными законами. Рассмотрен не только общий случай, но и случаи геометрических, отрицательных биномиальных и зихелевых случайных сумм.

В четвертой главе рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима. Традиционно основные результаты представлены после необходимых для их доказательства вспомогательных утверждений. Сначала рассматривается общий случай, а затем случай независимых одинаково распределенных случайных величин.

1. Равномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях

На протяжении данной главы будем считать, что все случайные величины определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathsf{E}X_i = 0 \ \text{ и } \ 0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma_i^2 < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Причем

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Также пусть $\Phi(x)$, как и ранее, обозначает стандартную нормальную функцию распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \qquad x \in \mathbb{R},$$

в то время как

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \Delta_n(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathsf{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i < xB_n) - \Phi(x)|.$$

Всюду далее символ $\mathbb{I}(A) \equiv \mathbb{I}_A \equiv \mathbb{I}_A(\omega)$, $A \in \mathfrak{A}$, $\omega \in \Omega$, будет обозначать индикаторную функцию события A

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Для $\varepsilon \in (0,\infty)$ обозначим

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| \geqslant \varepsilon B_n), \quad M_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}(|X_i| < \varepsilon B_n).$$

Пусть также $\mathcal{G}$ — класс, в который входят функции $g \in \mathcal{G}$ со следующими характеристиками

- функция $g(x)$ четна;
- функция $g(x)$ неотрицательна при всех x и $g(x) > 0$ при $x > 0$;

- функция $g(x)$ не убывает при $x > 0$;
- функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

В данной главе описываются оценки скорости сходимости в ЦПТ и ее обобщениях при существовании моментов не выше третьего. Будет показано, что константа в неравенствах (1)–(5) не превосходит 1.8627, в то время как наилучшая ранее известная оценка составляет 2.011 и была посчитана В. Ю. Королевым и С. В. Поповым в [21]. Полученные результаты будут перенесены на некоторые случайные суммы.

Результаты, описанные в данной главе, были опубликованы в статьях [53]–[55].

1.1. Равномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для неслучайных сумм

Далее будут рассмотрены вспомогательные результаты, необходимые для доказательства основных утверждений.

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon \in (0,\infty)$

$$L_n(1) + M_n(1) \leqslant L_n(\varepsilon) + M_n(\varepsilon). \tag{9}$$

Доказательство. Для $\varepsilon = 1$ утверждение очевидно.
Пусть $\varepsilon < 1$. Тогда

$$L_n(1) + M_n(1) = L_n(\varepsilon) + M_n(\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}|X_j|^3\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) - \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n).$$

Но

$$\frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}|X_j|^3\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) - \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) =$$

$$= \frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}X_j^2|X_j|\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) - \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) - \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(\varepsilon B_n \leqslant |X_j| < B_n) = 0,$$

поэтому в случае $\varepsilon < 1$ неравенство (9) доказано.
Пусть теперь $\varepsilon > 1$. Тогда

$$L_n(1) + M_n(1) = L_n(\varepsilon) + M_n(\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) - \frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^{n}|X_j|^3\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n).$$

Но

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) - \frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^{n}|X_j|^3\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) =$$

$$= \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) - \frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2|X_j|\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) - \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}(B_n \leqslant |X_j| < \varepsilon B_n) = 0.$$

Отсюда следует, что утверждение леммы справедливо и для $\varepsilon > 1$. □

Следствие 1. *В неравенствах* (3), (4), (5) *абсолютные константы можно брать одинаковыми, то есть если неравенство* (4) *справедливо с* $C_3' \leqslant C_0$, *то неравенства* (3) *и* (5) *справедливы с* $C_3 \leqslant C_0$ *и* $C_4 \leqslant C_0$.

Замечание 1. *В работе [23] было показано, что если неравенство* (4) *справедливо с* $C_3' \leqslant C_0$, *то неравенства* (1) *и* (2) *справедливы с* $C_i \leqslant C_0$, $i = 1{,}2$.

Из указанных выше утверждений можно сделать вывод, что если известна верхняя оценка $C_3' \leqslant C_0$, то все остальные неравенства (1)–(3) и (5) справедливы с $C_i \leqslant C_0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Дальнейшее повествование будет посвящено уточнению константы C_3'.

Лемма 2. *Пусть* X *— случайная величина с* $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$ *и* $\mathsf{E}X = a$. *Обозначим*

$$K = \frac{17 + 7\sqrt{7}}{27} < 1.3156.$$

Тогда

$$\mathsf{E}|X-a|^3 \leqslant \min\left\{K\mathsf{E}|X|^3,\ \mathsf{E}|X|^3 + 3|a|\mathsf{E}X^2 + a^2\mathsf{E}|X|\right\}.$$

Доказательство. Доказательство, основанное на результатах работ [56], [57] и [50], приведено в [22]. □

Для $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $i = 1, \ldots, n$ обозначим

$$Y_i(x) = B_n^{-1} X_i \mathbb{I}\big(|X_i| < (1{+}x)B_n\big), \;\; Y_i = Y_i(0), \;\; W_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i(x), \quad W_n = W_n(0).$$

Так как $\mathsf{E}X_i = 0$,

$$|\mathsf{E}X_i \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+x)B_n\big)| = |\mathsf{E}X_i \mathbb{I}\big(|X_i| \geqslant (1+x)B_n\big)|. \tag{10}$$

В силу определения случайных величин $Y_i(x)$ имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^n \mathsf{E}Y_i^2(x) \leqslant \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \mathsf{E}X_i^2 = 1.$$

Лемма 3. 1°. *Пусть K — число из леммы 2. При любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \geqslant 0$ для любого $p \in [1, K]$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 \leqslant \min\Big\{K M_n(1+x), p M_n(1+x) + \frac{(5-p)\, L_n(1+x)}{1+x}\Big\}.$$

2°. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \geqslant 0$ справедливы неравенства*

$$1 - 2L_n(1+x) \leqslant \mathsf{D}W_n(x) \leqslant 1.$$

3°. *Пусть $M_n(1) = \gamma L_n(1)$, $\gamma \geqslant 0$. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \mathsf{E}|Y_i - \mathsf{E}Y_i|^3 \leqslant L_n(1) \min\{K\gamma, \gamma + 4\}.$$

Доказательство. Доказательство см. в [22]. □

Лемма 4. 1°. *Пусть $q > 0$. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi(qx) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \Big(\max\Big\{q, \frac{1}{q}\Big\} - 1\Big).$$

2°. *Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi(x+a) - \Phi(x)| = 2\Phi\Big(\frac{|a|}{2}\Big) - 1 \leqslant \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}}.$$

Доказательство. Доказательство данного утверждения основано на формуле Лагранжа и том факте, что если $F(x)$ и $G(x)$ — две дифференцируемые функции распределения, то $\sup_x |F(x) - G(x)|$ достигается в тех точках x, где $F'(x) = G'(x)$ (см. [5] с. 143 и [13] с. 161). □

Лемма 5. *Предположим, что* $L_n(1) \leqslant A$ *для некоторого* $A \in (0, \frac{1}{2})$. *Пусть*

$$B(A) = \frac{2}{(1+\sqrt{1-2A})\sqrt{1-2A}}.$$

Тогда

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}} \leqslant 1 + B(A)L_n(1).$$

Доказательство. Доказательство см. в [22]. □

Лемма 6. *Пусть* X *— случайная величина с* $\mathsf{E}X^2 < \infty$. *Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left(\frac{X - \mathsf{E}X}{\sqrt{\mathsf{D}X}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant 0.541.$$

Доказательство. См., например, лемму 12.2 в книге [18]. □

1.1.1. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых случайных величин

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *случайные величины* $X_1, \ldots, X_n$ *независимы,* $\mathsf{E}X_i = 0$ *и* $0 < \mathsf{E}X_i^2 < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. *Пусть* $\gamma = M_n(1)/L_n(1)$. *Тогда существует зависящее только от* γ *положительное конечное число* $C_1(\gamma)$ *такое, что*

$$\Delta_n \leqslant (1+\gamma)C_1(\gamma)L_n(1).$$

При этом для $C_1(\gamma)$ *справедливы верхние оценки, приведенные в таблице* 1.

γ	$C_1(\gamma) \leqslant$	γ	$C_1(\gamma) \leqslant$	γ	$C_1(\gamma) \leqslant$
$\gamma \geqslant 0$	1.8627	$\gamma \geqslant 1$	1.5605	$\gamma \geqslant 10$	0.9393
$\gamma \geqslant 0.1$	1.8587	$\gamma \geqslant 2$	1.3488	$\gamma \geqslant 100$	0.6067
$\gamma \geqslant 0.5$	1.7244	$\gamma \geqslant 5$	1.0836	$\gamma \to \infty$	0.5583

Таблица 1 — Верхние оценки $C_1(\gamma)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 неравенства* (2)–(4) *имеют место с* $C_2 = C_3 = C_3' \leqslant 1.8627$.

Доказательство. Для каждого $y \in \mathbb{R}$ событие $\{S_n < yB_n\}$ влечет событие

$$\{W_n < y\} \cup \{|X_1| \geqslant B_n\} \cup \ldots \cup \{|X_n| \geqslant B_n\},$$

тогда как событие $\{W_n < y\}$ влечет событие

$$\{S_n < yB_n\} \cup \{|X_1| \geqslant B_n\} \cup \ldots \cup \{|X_n| \geqslant B_n\}.$$

Поэтому

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < yB_n) - \mathsf{P}(W_n < y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(|X_i| \geqslant B_n).$$

Следовательно, для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < yB_n) - \Phi(y)| = \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < yB_n) - \Phi(y) + \mathsf{P}(W_n < y) - \mathsf{P}(W_n < y)| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < yB_n) - \mathsf{P}(W_n < y)| + \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(W_n < y) - \Phi(y)| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < yB_n) - \mathsf{P}(W_n < y)| + \\
&+ \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}(W_n < y) - \Phi(y) + \Phi\left(\frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) - \Phi\left(\frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < yB_n) - \mathsf{P}(W_n < y)| + \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}(W_n < y) - \Phi\left(\frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) \right| + \\
&+ \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) - \Phi(y) \right| \leqslant \\
&\leqslant Q_1 + Q_2 + Q_3
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$Q_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left(\frac{W_n - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}} < \frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}} \right) - \Phi\left(\frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) \right|,$$

$$Q_2 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{y - \mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) - \Phi(y) \right|, \quad Q_3 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(|X_i| \geqslant B_n).$$

Рассмотрим Q_1. В силу неравенства Берри – Эссеена с наилучшей известной на сегодняшний день оценкой абсолютной константы (см. [58]) имеем

$$Q_1 \leqslant \frac{0.5583}{\left(\mathsf{D}W_n\right)^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i - \mathsf{E}Y_i|^3.$$

Предположим, что $L_n(1) \leqslant A < \frac{1}{2}$. Тогда согласно п. 2° и 3° леммы 3

$$Q_1 \leqslant \frac{0.5583 \cdot \min\{K\gamma, \gamma+4\}\, L_n(1)}{(1-2A)^{3/2}}. \tag{12}$$

Рассмотрим Q_2. Очевидно, имеем

$$Q_2 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{y-\mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) - \Phi(y-\mathsf{E}W_n) + \Phi(y-\mathsf{E}W_n) - \Phi(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{y-\mathsf{E}W_n}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) - \Phi(y-\mathsf{E}W_n) \right| + \sup_{y\in\mathbb{R}} |\, \Phi(y-\mathsf{E}W_n) - \Phi(y)| =$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}}\right) - \Phi(y) \right| + \sup_{y\in\mathbb{R}} |\, \Phi(y-\mathsf{E}W_n) - \Phi(y)| \equiv Q_{21} + Q_{22}.$$

Согласно п. 2° леммы 3 $\mathsf{D}W_n \leqslant 1$. Поэтому в соответствии с п. 1° леммы 4 и леммой 5 справедливо неравенство

$$Q_{21} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}} - 1\right) \leqslant \frac{2L_n(1)}{\sqrt{2\pi e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})}. \tag{13}$$

Рассмотрим Q_{22}. В силу соотношения (10) имеем

$$|\mathsf{E}W_n| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}Y_i\Big| \leqslant \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} |\mathsf{E}X_i\mathbb{I}(|X_i|<B_n)| = \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} |\mathsf{E}X_i\mathbb{I}(|X_i|\geqslant B_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|X_i|\mathbb{I}(|X_i|\geqslant B_n) \leqslant \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i^2\mathbb{I}(|X_i|\geqslant B_n) = L_n(1).$$

Поэтому в силу п. 2° леммы 4

$$Q_{22} \leqslant \frac{L_n(1)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) вытекает, что

$$Q_2 \leqslant \frac{L_n(1)}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})}\right). \tag{15}$$

Наконец, по неравенству Маркова

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(|X_i|\geqslant B_n) \leqslant \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i^2\mathbb{I}(|X_i|\geqslant B_n) = L_n(1). \tag{16}$$

Таким образом, из (11), (12), (15) и (16) получаем

$$\Delta_n \leqslant L_n(1)\Big[1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})}\right)+ \\ +\frac{0.5583\cdot\min\{K\gamma,\gamma+4\}}{(1-2A)^{3/2}}\Big].$$

Введем функцию

$$H_1(\gamma,A)=1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})}\right)+ \\ +\frac{0.5583\cdot\min\{K\gamma,\gamma+4\}}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Для любого $0\leqslant A<\frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\Delta_n \leqslant L_n(1)\cdot\max\left\{H_1(\gamma,A),\frac{0.541}{A}\right\}.$$

Это следует из неравенства (16) в случае $L_n(1)\leqslant A$ и из леммы 6 в противном случае.

Таким образом, имея в виду равенство

$$L_n(1)=\frac{L_n(1)+\gamma L_n(1)}{1+\gamma}=\frac{L_n(1)+M_n(1)}{1+\gamma},$$

имеем

$$C_1(\gamma)\leqslant\min_{0\leqslant A<\frac{1}{2}}\max\left\{\frac{H_1(\gamma,A)}{1+\gamma},\frac{0.541}{A(1+\gamma)}\right\}.$$

Значения констант, указанные в таблице 1, получаются посредством вычислений по формуле, приведенной выше. Первая функция внутри минимакса является возрастающей по A , в то время как вторая — убывающей. Таким образом, значение минимакса получается через единственное решение уравнения

$$\frac{H_1(\gamma,A)}{1+\gamma}=\frac{0.541}{A(1+\gamma)}.$$

$\square$

1.1.2. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин

Используя лучшую известную на данный момент верхнюю оценку абсолютной константы в неравенстве Берри – Эссеена для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $C_0 \leqslant 0.4690$ (см. [58]), можно получить следующий результат

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 случайные величины одинаково распределены. Тогда существует зависящее только от* γ *положительное конечное число* $C_2(\gamma)$ *такое, что* $\Delta_n \leqslant (1+\gamma)C_2(\gamma)L_n(1)$. *При этом для* $C_2(\gamma)$ *справедливы верхние оценки, приведенные в таблице* 2.

γ	$C_2(\gamma) \leqslant$	γ	$C_2(\gamma) \leqslant$	γ	$C_2(\gamma) \leqslant$
$\gamma \geqslant 0$	1.8546	$\gamma \geqslant 1$	1.4793	$\gamma \geqslant 10$	0.8292
$\gamma \geqslant 0.1$	1.8338	$\gamma \geqslant 2$	1.2540	$\gamma \geqslant 100$	0.5147
$\gamma \geqslant 0.5$	1.6608	$\gamma \geqslant 5$	0.9781	$\gamma \to \infty$	0.4690

Таблица 2 — Верхние оценки $C_2(\gamma)$.

Следствие 3. *В условиях теоремы 2 неравенства* (1) *и* (5) *имеют место с* $C_1 = C_4 \leqslant 1.8546$.

Доказательство. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 1, несложно убедиться, что,

$$C_2(\gamma) \leqslant \min_{0\leqslant A<\frac{1}{2}} \max\left\{\frac{H_2(\gamma,A)}{1+\gamma}, \frac{0.541}{A(1+\gamma)}\right\},$$

где

$$H_2(\gamma,A) = 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})}\right)+\frac{0.4690\cdot\min\{K\gamma,\gamma+4\}}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Вычисления по указанным формулам приводят к оценкам $C_2(\gamma)$, упомянутым в формулировке теоремы. $\square$

1.1.3. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых случайных величин с симметричными распределениями

Теорема 3. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 случайные величины имеют симметричные распределения. Тогда существует зависящее только от* γ *положительное конечное число* $C_3(\gamma)$ *такое, что* $\Delta_n \leqslant (1+\gamma) C_3(\gamma)L_n(1)$. *При этом для* $C_3(\gamma)$ *справедливы верхние оценки, приведенные в таблице* 3.

γ	$C_3(\gamma) \leqslant$	γ	$C_3(\gamma) \leqslant$	γ	$C_3(\gamma) \leqslant$
$\gamma \geqslant 0$	1.5769	$\gamma \geqslant 1$	1.3033	$\gamma \geqslant 10$	0.7433
$\gamma \geqslant 0.1$	1.5749	$\gamma \geqslant 2$	1.1115	$\gamma \geqslant 100$	0.5808
$\gamma \geqslant 0.5$	1.4532	$\gamma \geqslant 5$	0.8729	$\gamma \to \infty$	0.5583

Таблица 3 — Верхние оценки $C_3(\gamma)$.

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 неравенства* (2)–(4) *имеют место с* $C_2 = C_3 = C_3' \leqslant 1.5769$.

Доказательство. В рассматриваемой ситуации вместо (12) имеет место неравенство

$$Q_1 \leqslant \frac{0.5583 M_n(1)}{(1-2A)^{3/2}},$$

поскольку $\mathsf{E}Y_i = 0$. В свою очередь $Q_{22} = 0$, поскольку $\mathsf{E}W_n = 0$. Поэтому справедлива оценка

$$\Delta_n \leqslant L_n(1)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})}\right) + \frac{0.5583 M_n(1)}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$C_3(\gamma) \leqslant \min_{0 \leqslant A < \frac{1}{2}} \max\left\{\frac{H_3(\gamma,A)}{1+\gamma}, \frac{0.541}{A(1+\gamma)}\right\},$$

где

$$H_3(\gamma,A) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})} + \frac{0.5583\gamma}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Вычисления по указанным формулам приводят к оценкам $C_3(\gamma)$, объявленным в формулировке теоремы. $\square$

1.1.4. Равномерные оценки для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с симметричными распределениями

Теорема 4. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 3 случайные величины одинаково распределены. Тогда существует зависящее только от* γ *положительное конечное число* $C_4(\gamma)$ *такое, что* $\Delta_n \leqslant (1+\gamma)C_4(\gamma)L_n(1)$. *При этом для* $C_4(\gamma)$ *справедливы верхние оценки, приведенные в таблице 4.*

γ	$C_4(\gamma) \leqslant$	γ	$C_4(\gamma) \leqslant$	γ	$C_4(\gamma) \leqslant$
$\gamma \geqslant 0$	1.5645	$\gamma \geqslant 1$	1.2388	$\gamma \geqslant 10$	0.6591
$\gamma \geqslant 0.1$	1.5534	$\gamma \geqslant 2$	1.0373	$\gamma \geqslant 100$	0.4923
$\gamma \geqslant 0.5$	1.4018	$\gamma \geqslant 5$	0.7915	$\gamma \to \infty$	0.4690

Таблица 4 — Верхние оценки $C_4(\gamma)$.

Следствие 5. *В условиях теоремы 4 неравенства* (1) *и* (5) *имеют место с* $C_1 = C_4 \leqslant 1.5645$.

Доказательство. В данном случае

$$C_4(\gamma) \leqslant \min_{0 \leqslant A < \frac{1}{2}} \max\left\{\frac{H_4(\gamma,A)}{1+\gamma}, \frac{0.541}{A(1+\gamma)}\right\},$$

где

$$H_4(\gamma,A) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi e(1-2A)}(1+\sqrt{1-2A})} + \frac{0.4690\gamma}{(1-2A)^{3/2}}.$$

Вычисления по указанным формулам приводят к оценкам $C_4(\gamma)$, представленным в формулировке теоремы. $\square$

1.2. Равномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для некоторых случайных сумм

1.2.1. Равномерные оценки для пуассон-биномиальных и биномиальных случайных сумм

Помимо того, что $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_i = 0$ и $0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma^2 < \infty$, пусть также $p_j \in (0,1]$ —

произвольные числа, $j = 1{,}2, \ldots$, а для $n \in \mathbb{N}$ введем число $\theta_n = p_1 + \ldots + p_n$ и вектор $\boldsymbol{p}_n = (p_1, \ldots, p_n)$.

Пуассон-биномиальным распределением с параметрами $n; \boldsymbol{p}_n$ будем называть распределение случайной величины

$$N_{n,\boldsymbol{p}_n} = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины такие, что

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p_j, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p_j, \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть также при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_{n,\boldsymbol{p}_n}, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Основным объектом, рассматриваемым в данной части работы, являются пуассон-биномиальные случайные суммы вида

$$S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} = X_1 + \ldots + X_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}.$$

При этом, если $N_{n,\boldsymbol{p}_n} = 0$, то $S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} = 0$.

Для $j \in \mathbb{N}$ введем случайные величины $\widetilde{X}_j$, полагая

$$\widetilde{X}_j = \begin{cases} X_j & \text{с вероятностью } p_j, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p_j. \end{cases}$$

Если функцию распределения случайных величин X_j обозначить $F(x)$, а функцию распределения с единственным единичным скачком в нуле обозначить $E_0(x)$, то

$$\mathsf{P}\big(\widetilde{X}_j < x\big) = p_j F(x) + (1 - p_j) E_0(x), \quad x \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $\mathsf{E}\widetilde{X}_j = 0$,

$$\mathsf{D}\widetilde{X}_j = \mathsf{E}\widetilde{X}_j^2 = p_j \sigma^2. \tag{17}$$

В дальнейшем символ $\stackrel{d}{=}$ будет обозначать совпадение распределений.

Лемма 7. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_j \in (0{,}1]$*

$$S_{N_{n,\mathbf{p}_n}} \stackrel{d}{=} \widetilde{X}_1 + \ldots + \widetilde{X}_n, \tag{18}$$

причем случайные величины в правой части (18) независимы.

Доказательство. Достаточно убедиться, что характеристические функции левой и правой частей (18) совпадают. Характеристическую функцию случайной величины ξ обозначим $\varphi_\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда характеристические функции левой и правой частей (18) имеют вид

$$\varphi_{S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}}(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{X_1+\ldots+X_k}(t)\mathsf{P}(N_{n,\boldsymbol{p}_n} = k)$$

и

$$\varphi_{\tilde{X}_1+\ldots+\tilde{X}_n}(t) = \prod_{j=1}^{n}[p_j\varphi_{X_j}(t) + (1-p_j)].$$

Для любого ограниченного z справеливо

$$\mathsf{E}z^{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} = \sum_{k=0}^{n} z^k\mathsf{P}(N_{n,\boldsymbol{p}_n} = k) = \prod_{j=1}^{n}\mathsf{E}z^{\xi_j} = \prod_{j=1}^{n}[p_j z + 1 - p_j].$$

Таким образом

$$\varphi_{S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}}(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{X_1+\ldots+X_k}(t)\mathsf{P}(N_{n,\boldsymbol{p}_n} = k) = \sum_{k=0}^{n}[\varphi_{X_1}(t)]^k\mathsf{P}(N_{n,\boldsymbol{p}_n} = k) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}[p_j\varphi_{X_1}(t) + 1 - p_j] = \varphi_{\tilde{X}_1+\ldots+\tilde{X}_n}(t).$$

Лемма доказана. □

С учетом (17) и (18) легко заметить, что

$$\mathsf{D}S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} = \theta_n\sigma^2.$$

Пусть $\Phi(x)$ тардиционно — стандартная нормальная функция распределения. Обозначим

$$\Delta_{n,\boldsymbol{p}_n} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} < x\sigma\sqrt{\theta_n}\right) - \Phi(x)\right|.$$

Теорема 5. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_j \in (0,1]$, $j \in \mathbb{N}$*

$$\Delta_{n,\mathbf{p}_n} \leqslant \frac{1.8627}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\left\{\sigma\sqrt{\theta_n}, |X_1|\right\}.$$

Доказательство. В силу леммы 7 и соотношения (17)

$$\Delta_{n,\boldsymbol{p}_n} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\widetilde{X}_1 + \ldots + \widetilde{X}_n < x\sigma\sqrt{\theta_n}\right) - \Phi(x)\right|,$$

а для последнего выражения справедлива оценка, приведенная в теореме 1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\mathsf{P}\big(\widetilde{X}_1+\ldots+\widetilde{X}_n<x\sigma\sqrt{\theta_n}\big)-\Phi(x)\big|\leqslant$$

$$\leqslant 1.8627\Bigg[\frac{1}{\sigma^2\theta_n}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}\widetilde{X}_j^2\mathbb{I}\big(|\widetilde{X}_j|>\sigma\sqrt{\theta_n}\big)+$$

$$+\frac{1}{\sigma^3\theta_n^{3/2}}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}|\widetilde{X}_j|^3\mathbb{I}\big(|\widetilde{X}_j|\leqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\Bigg]=$$

$$=1.8627\Bigg[\frac{1}{\sigma^2\theta_n}\sum_{j=1}^{n}p_j\mathsf{E}X_j^2\mathbb{I}\big(|X_j|>\sigma\sqrt{\theta_n}\big)+$$

$$+\frac{1}{\sigma^3\theta_n^{3/2}}\sum_{j=1}^{n}p_j\mathsf{E}|X_j|^3\mathbb{I}\big(|X_j|\leqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\Bigg]=$$

$$=1.8627\Bigg[\frac{\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1|>\sigma\sqrt{\theta_n}\big)}{\sigma^2\theta_n}\sum_{j=1}^{n}p_j+\frac{\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1|\leqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)}{\sigma^3\theta_n^{3/2}}\sum_{j=1}^{n}p_j\Bigg]=$$

$$=1.8627\Bigg[\frac{1}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1|>\sigma\sqrt{\theta_n}\big)+\frac{1}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1|\leqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\Bigg]=$$

$$=\frac{1.8627}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{\theta_n},|X_1|\big\},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 6. *В условиях теоремы 5, какой бы ни была функция $g\in\mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2g(X_1)<\infty$, справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,\mathbf{p}_n}\leqslant 1.8627\frac{EX_1^2g(X_1)}{\sigma^2g(\sigma\sqrt{\theta_n})}.$$

Доказательство. Пусть g — произвольная функция из класса $\mathcal{G}$. С учетом свойств функции $g\in\mathcal{G}$ (неубывание $g(x)$ при $x>0$) легко видеть, что

$$\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)=\mathsf{E}X_1^2\frac{g(X_1)}{g(X_1)}\mathbb{I}\big(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{g(\sigma\sqrt{\theta_n})}\mathsf{E}X_1^2g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)$$

и

$$\mathsf{E}X_1^3\mathbb{I}\big(|X_1|<\sigma\sqrt{\theta_n}\big)=\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\frac{|X_1|}{g(X_1)}\mathbb{I}\big(|X_1|<\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\sigma\sqrt{\theta_n}}{g(\sigma\sqrt{\theta_n})}\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1|<\sigma\sqrt{\theta_n}\big).$$

Подставляя эти оценки в неравенство

$$\Delta_{n,\boldsymbol{p}_n}\leqslant 1.8627\bigg[\frac{1}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1|>\sigma\sqrt{\theta_n}\big)+$$
$$+\frac{1}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1|\leqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\bigg],$$

полученное при доказательстве теоремы 5, получаем

$$\Delta_{n,\boldsymbol{p}_n}\leqslant\frac{1.8627}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{\theta_n})}\big[\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{\theta_n}\big)+\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1|<\sigma\sqrt{\theta_n}\big)\big]=$$
$$=1.8627\frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{\theta_n})}.$$

Теорема доказана. □

Если $p_1=p_2=\ldots=p$, то пуассон-биномиальное распределение с параметрами $n\in\mathbb{N}$ и $\boldsymbol{p}_n$ становится классическим биномиальным распределением с параметрами n и p:

$$N_{n,\boldsymbol{p}_n}\stackrel{d}{=}N_{n,p},\qquad P(N_{n,p}=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,\ldots,n.$$

При этом легко видеть, что $\theta_n=np$, так что $DS_{N_{n,p}}=np\sigma^2$. Обозначим

$$\Delta_{n,p}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\mathsf{P}\big(S_{N_{n,p}}<x\sigma\sqrt{np}\big)-\Phi(x)\Big|.$$

В работе [59] также были рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации для распределений биномиальных случайных сумм. Данные оценки имеют несколько несовершенную структуру и содержащат лишние слагаемые. Это связано с тем, что они были выведены при помощи формулы полной вероятности, в то время как получение оценок в данной главе базируется на использовании леммы 7.

Из теорем 2 и 5 вытекает

Следствие 6. *При любых $n\in\mathbb{N}$ и $p\in(0,1)$*

$$\Delta_{n,p}\leqslant\frac{1.8546}{\sigma^3\sqrt{np}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{np},|X_1|\big\}.$$

Из теорем 2 и 6 вытекает

Следствие 7. *В условиях теоремы 5, какой бы ни была функция* $g \in \mathcal{G}$ *такая, что* $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $p \in (0{,}1)$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,\mathbf{p}_n} \leqslant 1.8546 \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{np})}.$$

1.2.2. Равномерные оценки для пуассоновских случайных сумм

В дополнение к обозначениям, введенным выше, пусть $\lambda > 0$ и N_λ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Предположим, что при любом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму вида

$$S_{N_\lambda} = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}.$$

При этом, если $N_\lambda = 0$, то полагаем $S_{N_\lambda} = 0$.

Несложно видеть, что $\mathsf{E}S_{N_\lambda} = 0$, а

$$\mathsf{D}S_{N_\lambda} = \mathsf{D}(X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{D}(X_1 + \ldots + X_k)\mathsf{P}(N_\lambda = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\sigma^2 \mathsf{P}(N_\lambda = k) = \lambda\sigma^2.$$

Точность нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм изучалась многими учеными (см., например, исторические обзоры в [60, 61]).

Получим оценку величины

$$\Delta_\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\big(S_\lambda < x\sigma\sqrt{\lambda}\big) - \Phi(x) \right|.$$

Теорема 7. *Для любого* $\lambda > 0$

$$\Delta_\lambda \leqslant \frac{1.8546}{\sigma^3\sqrt{\lambda}} \mathsf{E}X_1^2 \min\left\{\sigma\sqrt{\lambda}, |X_1|\right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем λ и наряду с N_λ рассмотрим случайную величину $N_{n,p}$, имеющую биномиальное распределение с произвольными параметрами n и p такими, что $np = \lambda$. При этом из рассуждений, приведенных выше, вытекает, что

$$\mathsf{D}S_{N_\lambda} = \mathsf{D}S_{N_{n,p}} = \sigma^2\lambda = \sigma^2 np.$$

Поэтому по неравенству треугольника согласно следствию 6 имеем

$$\Delta_\lambda = \sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\mathsf{P}\big(S_{N_\lambda} < x\sigma\sqrt{\lambda}\big) - \Phi(x)\Big| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\mathsf{P}\big(S_{N_\lambda} < x\sigma\sqrt{\lambda}\big) - \Phi(x) + \mathsf{P}(S_{N_{n,p}} < x) - \mathsf{P}(S_{N_{n,p}} < x)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_{n,p} + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\mathsf{P}(S_{N_\lambda} < x) - \mathsf{P}(S_{N_{n,p}} < x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1.8546}{\sigma^3\sqrt{np}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{np}, |X_1|\big\} +$$

$$+ \sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\bigg(\sum_{j=1}^{k}X_j < x\bigg)\Big|\mathsf{P}(N_{n,p} = k) - \mathsf{P}(N_\lambda = k)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1.8546}{\sigma^3\sqrt{\lambda}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{\lambda}, |X_1|\big\} + \sum_{k=0}^{\infty}\Big|\mathsf{P}(N_{n,p} = k) - \mathsf{P}(N_\lambda = k)\Big|. \tag{19}$$

Второе слагаемое в правой части (19) оценим с помощью неравенства Ю. В. Прохорова [62] (также см. [63], с. 76), согласно которому

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\mathsf{P}(N_{n,p} = k) - \mathsf{P}(N_\lambda = k)\Big| \leqslant 2p\min\{2,\lambda\},$$

и получим, что для любых n и p таких, что $np = \lambda$, справедливо неравенство

$$\Delta_\lambda \leqslant \frac{1.8546}{\sigma^3\sqrt{\lambda}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{\lambda}, |X_1|\big\} + 2p\min\{2,\lambda\}. \tag{20}$$

Теперь, полагая в (20) $p = \lambda/n$ и устремляя $n \to \infty$, получим окончательный результат. $\square$

Теорема 8. *Какой бы ни была функция $g \in \mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda \leqslant 1.8546\frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{\lambda})}.$$

Доказательство. Используя результат теоремы 6 для оценки величины $\Delta_{n,p}$ в (19), получим утверждение теоремы.

$\square$

1.3. Равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответствующим предельным законам

1.3.1. Равномерные оценки для смешанных пуассоновских случайных сумм в общем случае

В данной части работы будут описаны результаты в случае, когда случайное число слагаемых имеет смешанное пуассоновское распределение. Введем «бесконечно большой» параметр $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим случайную величину $N_n^\star$, такую что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{21}$$

для некоторой положительной случайной величины Λ_n.

Для простоты n можно считать масштабным параметром распределения Λ_n, так что $\Lambda_n = n\Lambda$, где Λ некоторая положительная «стандартная» случайная величина в том смысле, что $\mathsf{E}\Lambda = 1$ (если последнее существует).

Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_n^\star$ и $X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Как и ранее, пусть $S_{N_n^\star} = X_1 + \ldots + X_{N_n^\star}$, и если $N_n^\star = 0$, то полагаем $S_{N_n^\star} = 0$.

Нетрудно видеть, что из (21) следует, что если $\mathsf{E}\Lambda_n < \infty$, то $\mathsf{E}N_n^\star = \mathsf{E}\Lambda_n$, так что $DS_n = \sigma^2\mathsf{E}\Lambda_n$.

Пусть N_λ — пуассоновская случайная величина с параметром λ , незаисимая с $X_1, X_2, \ldots$. Тогда для некоторого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n^\star} < x\sigma\sqrt{\mathsf{E}\Lambda_n}\big) = \sum_{k=0}^\infty \mathsf{P}(N_n^\star = k)\mathsf{P}\big(S_k < x\sigma\sqrt{\mathsf{E}\Lambda_n}\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \mathsf{P}\big(S_k < x\sigma\sqrt{\mathsf{E}\Lambda_n}\big)\int\limits_0^\infty \mathsf{P}(N_\lambda = k)d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\big(S_{N_\lambda} < x\sigma\sqrt{\mathsf{E}\Lambda_n}\big)d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\lambda}}{\sigma\sqrt{\lambda}} < x\sqrt{\frac{\mathsf{E}\Lambda_n}{\lambda}}\right)d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{\mathsf{E}\Lambda_n}{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) + \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\frac{S_{N_\lambda}}{\sigma\sqrt{\lambda}} < x\sqrt{\frac{E\Lambda_n}{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) -$$

$$- \int\limits_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{E\Lambda_n}{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda). \qquad (22)$$

Из (22) следует, что

$$\Delta_n^\star \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\mathsf{P}\big(S_{N_n^\star} < x\sigma\sqrt{\mathsf{E}\Lambda_n}\big) - \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}\big(\Lambda_n < \lambda \mathsf{E}\Lambda_n\big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\mathsf{P}\Big(\frac{S_{N_\lambda}}{\sigma\sqrt{\lambda}} < x\Big) - \Phi(x)\Big| d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) \leqslant \int\limits_0^\infty \Delta_\lambda d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda). \qquad (23)$$

Оценим подынтегральное выражение Δ_λ в (23), используя теорему 7, и вспоминая, что $F(x) = \mathsf{P}(X < x)$, тогда по теореме Фубини приходим к представлению

$$\Delta_n^\star \leqslant \frac{1.8546}{\sigma^2} \int\limits_0^\infty \mathsf{E}X_1^2 \min\Big\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}}\Big\} d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) =$$

$$= \frac{1.8546}{\sigma^2} \int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_{-\infty}^\infty x^2 \min\Big\{1, \frac{|x|}{\sigma\sqrt{\lambda}}\Big\} dF_1(x)\Big] d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) =$$

$$= \frac{1.8546}{\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^\infty x^2 \Big[\int\limits_0^\infty \min\Big\{1, \frac{|x|}{\sigma\sqrt{\lambda}}\Big\} d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda)\Big] dF_1(x). \qquad (24)$$

Для $x \in \mathbb{R}$ введем функцию

$$G_n(x) = \mathsf{E}\min\Big\{1, \frac{|x|}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\Big\} = \mathsf{P}\Big(\Lambda_n < \frac{x^2}{\sigma^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma}\mathsf{E}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\Big(\Lambda_n \geqslant \frac{x^2}{\sigma^2}\Big). \qquad (25)$$

Математическое ожидание в (25) существует, поскольку случайная величина под знаком математического ожидания ограничены 1. Конечно, конкретная форма $G_n(x)$ зависит от определенной формы распределения Λ_n. Из (23)-(25) получим следубщее утверждение.

Теорема 9. *Если* $\mathsf{E}\Lambda_n < \infty$, *то*

$$\Delta_n^\star \leqslant \frac{1.8546}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2 G_n(X_1) = \frac{1.8546}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2 \min\Big\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\Big\} =$$

$$= \frac{1.8546}{\sigma^2}\left[\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant \sigma\sqrt{\Lambda_n}\big) + \mathsf{E}\frac{|X_1|^3}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\big(|X_1| < \sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)\right],$$

где случаный величины X_1 and Λ_n предполагаются независимыми.

В следующих частях будут рассмотрены случаи, когда Λ_n имеет экспоненциальное, гамма и обраное гамма-рспределение.

1.3.2. Равномерные оценки для геометрических случайных сумм

В данной части работы будут рассмотрены случайные суммы независимых случайных величин, где количество слагаемых $N_n^\star$ имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{1+n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{26}$$

Как и ранее, предполагаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_n^\star, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Используем обозначение $S_{N_n^\star} = X_1 + \ldots + X_{N_n^\star}$. Если $N_n^\star = 0$, тогда положим $S_{N_n^\star} = 0$. Несложно видеть, что $\mathsf{E}N_n^\star = n$, $\mathsf{D}S_{N_n^\star} = n\sigma^2$. Для некторого $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \mathsf{P}(N_\lambda = k)\exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}\Big\}d\lambda,$$

где N_λ — пуассоновская случайная величина с параметром λ. Это означает, что для $N_n^\star$ представление (21) справедливо если Λ_n является экспоненциальной случайной величиной с параметром $\frac{1}{n}$.

Будем использовать традиционные обозначения

$$\Gamma(\alpha,z) \equiv \int\limits_z^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy, \quad \gamma(\alpha,z) \equiv \int\limits_0^z y^{\alpha-1}e^{-y}dy, \quad \text{и} \quad \Gamma(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha,0) = \gamma(\alpha,\infty)$$

для верхней неполной гамма-функции, нижней неполной гамма-функции и гамма-функции соответственно, где $\alpha > 0$, $z > 0$.

В рассматриваемом случае

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \Phi\bigg(x\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\bigg)\exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}\Big\}d\lambda = \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{y}}\Big)e^{-y}dy = \mathcal{L}(x),$$

где $\mathcal{L}(x)$ — функция распределения Лапласа с плотностью

$$\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(см., лемму 12.7.1 в [64]).

В то же время функция $G_n(x)$ из (25) имеет форму

$$G_n(x) = 1 - \exp\Big\{ -\frac{x^2}{n\sigma^2} \Big\} + \frac{|x|}{n\sigma} \int\limits_{x^2/\sigma^2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/n}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = \gamma\Big(1, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma\sqrt{n}} \Gamma\Big(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big).$$

Таким образом, из теоремы 8 получим результат.

Следствие 8. *Пусть $N_n^\star$ имеет геометрическое распределение (26). Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \mathsf{P}(S_{N_n^\star} < x\sigma\sqrt{n}) - \mathcal{L}(x) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1.8546}{\sigma^2} \Big\{ \mathsf{E}\Big[X_1^2 \gamma\Big(1, \frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big] + \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \mathsf{E}\Big[|X_1|^3 \Gamma\Big(\frac{1}{2}, \frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big] \Big\}.$$

1.3.3. Равномерные оценки для отрицательных биномиальных случайных сумм

Пусть $r > 0$ — произвольное число. Предположим, что представление (21) выполняется с Λ_n, являющейся гамма-распределенной случайной величиной с плотностью

$$p(\lambda) = \frac{\lambda^{r-1} e^{-\lambda/n}}{n^r \Gamma(r)} \ \ \lambda > 0.$$

Тогда случайная величина $N_n^\star$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и $\frac{1}{n+1}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \frac{1}{n^r\Gamma(r)} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \lambda^{r-1} e^{-\lambda/n} d\lambda = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\, k!} \Big(\frac{1}{1+n}\Big)^r \Big(\frac{n}{1+n}\Big)^k,$$
$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (27)$$

Пусть

$$\mathcal{V}_r(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_0^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big) \lambda^{r-1} e^{-\lambda} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

является симметричным дисперсионным гамма-распределением с параметром формы r.

В рассматриваемом случае $\mathsf{E}N_n^\star = E\Lambda_n = nr$, так что $DS_{N_n^\star} = nr\sigma^2$ и для некоторого $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{E\Lambda_n}{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda) = \frac{1}{n^r\Gamma(r)}\int_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{nr}{\lambda}}\Big)\lambda^{r-1}e^{-\lambda/n}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \Phi\Big(\frac{x\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda}}\Big)\lambda^{r-1}e^{-\lambda}d\lambda \equiv \mathcal{V}_r(x\sqrt{r}).$$

Таким образом, $G_n(x)$ (25) имеет форму

$$G_n(x) = \frac{1}{n^r\Gamma(r)}\int_0^{x^2/\sigma^2}\lambda^{r-1}e^{-\lambda/n}d\lambda + \frac{|x|}{\sigma n^r\Gamma(r)}\int_{x^2/\sigma^2}^\infty \lambda^{r-3/2}e^{-\lambda/n}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)}\Big[\gamma\Big(r, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma\sqrt{n}}\Gamma\Big(r-\frac{1}{2}, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big)\Big].$$

Из теоремы 7 получаем

Следствие 9. *Пусть $N_n^\star$ имеет отрицательное биномиальное распределение (27). Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\ P(S_{N_n^\star} < x\sigma\sqrt{n}) - \mathcal{V}_r(x)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1.8546}{\sigma^2\Gamma(r)}\Big\{\ E\Big[X_1^2\gamma\Big(r, \frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big] + \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\ E\Big[|X_1|^3\Gamma\Big(r-\frac{1}{2}, \frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big]\Big\}.$$

1.3.4. Равномерные оценки для зихелевых случайных сумм

Пусть $r > 1$ является произвольным числом. Предположим, что в представлении (21) Λ_n — случайная величина с обратным гамма-распределением с параметрами $\frac{r}{2}$ и $\frac{n}{2}$, имеющая плотность

$$p(\lambda) = \frac{n^{r/2}\lambda^{-r/2-1}}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\exp\Big\{-\frac{n}{2\lambda}\Big\}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда случайная величина $N_n^\star$ имеет так называемое пуассон-обратное гамма-распределение

$$P(N_n^\star = k) = \frac{n^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\lambda^{-r/2-1}\exp\Big\{-\frac{n}{2\lambda}\Big\}d\lambda, \qquad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad (28)$$

что является частным случаем так называемого распределения Зихеля (см. [65, 66]). В таком случае

$$\mathsf{E}\Lambda_n = \frac{n}{r-2},$$

так что

$$\mathsf{D}S_n^\star = \frac{n\sigma^2}{r-2}.$$

Тем не менее, будем проводить нормализацию случайных сумм не среднеквратратическим отклонением, а асимптотически эквивалентной величиной $\sigma\sqrt{n/r}$.

Как известно, если Λ_n имеет обратное гамма-распределение с параметрами $\frac{r}{2}$ и $\frac{n}{2}$, то Λ_n^{-1} имеет гамма-рапределение с теми же параметрами. Имеем

$$\frac{n^{r/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{n}{r\lambda}}\Big)\lambda^{-r/2-1}\exp\Big\{-\frac{n}{2\lambda}\Big\}d\lambda =$$

$$= \frac{n^{r/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{n\lambda}{r}}\Big)\lambda^{r/2-1}\exp\Big\{-\frac{n\lambda}{2}\Big\}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\Big)\lambda^{r/2-1}e^{-\lambda/2}d\lambda = \mathcal{T}_r(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

где $\mathcal{T}_r(x)$ функция распределения Стьюдента с параметром r (с r «степенями свободы») с плотностью

$$t_r(x) = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(\frac{r}{2})}\Big(1+\frac{x^2}{r}\Big)^{-(r+1)/2}, \quad x\in\mathbb{R},$$

см. [67].

В этом случае $G_n(x)$ (25) имеет вид

$$G_n(x) = P\Big(\Lambda_n^{-1} > \frac{\sigma^2}{x^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma}\,E\sqrt{\Lambda_n^{-1}}\mathbb{I}\Big(\Lambda_n^{-1} \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}\Big) =$$

$$= \frac{n^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} \int\limits_{\sigma^2/x^2}^{\infty} \lambda^{r/2-1} e^{-n\lambda/2} d\lambda + \frac{|x| n^{r/2}}{2^{r/2}\sigma\Gamma(\frac{r}{2})} \int\limits_{0}^{\sigma^2/x^2} \lambda^{(r-1)/2} e^{-n\lambda/2} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})}\Big[\Gamma\Big(\frac{r}{2}, \frac{n\sigma^2}{2x^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\,\gamma\Big(\frac{r+1}{2}, \frac{n\sigma^2}{2x^2}\Big)\Big],$$

where $\gamma(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $\Gamma(\,\cdot\,,\cdot\,)$ нижняя и верхняя неполные гамма-функции соответственно.

Таким образом, из теоремы 7 получаем следующий результат.

Следствие 10. *Пусть $N_n^\star$ имеет пуассон-обратное гамма-распределение (28). Тогда*

$$\Delta_n^\star = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\, P\Big(S_{N_n^\star} < x\sigma\sqrt{\frac{n}{r}}\Big) - \mathcal{T}_r(x)\Big| \leqslant \frac{1.8546}{\sigma^2\Gamma(\frac{r}{2})}\Big\{\mathsf{E}\Big[X_1^2\Gamma\Big(\frac{r}{2}, \frac{n\sigma^2}{2X_1^2}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\,\mathsf{E}\Big[|X_1|^3\gamma\Big(\frac{r+1}{2}, \frac{n\sigma^2}{2X_1^2}\Big)\Big]\Big\}.$$

2. Неравномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при ослабленных моментных условиях

На протяжении данной главы будем считать, что все случайные величины определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$.

Пусть $X_1, X_2, ...$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathsf{E}X_i = 0 \ \text{ и } \ 0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma_i^2 \equiv \sigma^2 < \infty, \qquad i = 1, 2, ...$$

Причем

$$B_n^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2 = n\sigma^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Также пусть $\Phi(x)$, как и ранее, обозначает стандартную нормальную функцию распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \qquad x \in \mathbb{R},$$

в то время как

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \Delta_n(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathsf{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i < xB_n) - \Phi(x)|.$$

Всюду далее символ $\mathbb{I}(A) \equiv \mathbb{I}_A \equiv \mathbb{I}_A(\omega)$, $A \in \mathfrak{A}$, $\omega \in \Omega$, будет обозначать индикаторную функцию события A

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Для $\varepsilon \in (0,\infty)$ обозначим

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| \geqslant \varepsilon B_n), \quad M_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}(|X_i| < \varepsilon B_n).$$

В. В. Петров в 1979 г. в [45] работе показал, что существует конечная положительная абсолютная константа C_7, что

$$\Delta_n(x) \leqslant C_7 \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\mathsf{E}X_i^2 \mathbb{I}\big(|X_i| \geqslant (1+|x|)B_n\big)}{B_n^2(1+|x|)^2} + \frac{\mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+|x|)B_n\big)}{B_n^3(1+|x|)^3} \Big].$$

Позднее, в 2001г., данное соотношение было вновь доказано другим методом в [20]. В статьях [48] и [47] были опубликованы оценки константы C_7. Лучшая из них $C_7 \leqslant 76.17$ была представлена в работе [48].

В работе [68] были представлены неравенства

$$\Delta_n(x) \leqslant C_9(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}\big(|X_i| \geqslant (1+|x|)B_n\big)}{B_n^2(1+|x|)^2} + \\ + C_{10}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+|x|)B_n\big)}{B_n^3(1+|x|)^3}$$

и

$$\Delta_n(x) \leqslant C_{11}(x) \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}\big(|X_i| \geqslant (1+|x|)B_n\big)}{B_n^2(1+|x|)^2} + \frac{\mathsf{E}|X_i|^3 \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+|x|)B_n\big)}{B_n^3(1+|x|)^3}\Big],$$

а также приведены оценки величин $C_9(x), C_{10}(x), C_{11}(x)$. В частности, $C_{11}(x) \leqslant 39.25$ для случая независимых одинаково распределенных случайных величин.

В настоящей главе будет показано, что $C_{11}(x) \leqslant 37.9$ для случая независимых одинаково распределенных случайных величин. Аналогичные результаты будут получены для биномиальных и пуассоновских случайных сумм. Более того для этих случайных сумм будут доказаны аналоги неравенств Каца – Петрова – Розовского ([4], [6], [7]). Результаты данной главы были опубликованы в [69], [70] и [71].

2.1. Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для неслучайных сумм

Пусть $x \geqslant 0$. Рассмотрим усечения случайных величин X_i. Для $n \in \mathbb{N}$ и $x \geqslant 0$ введем следующие обозначения

$$Y_i(x) = \frac{X_i \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+x)B_n\big)}{B_n}, \quad Y_i = Y_i(0), \quad W_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x), \quad W_n = W_n(0).$$

В процессе доказательств также окажутся полезными соотношения

$$\big|\mathsf{E} X_i \mathbb{I}\big(|X_i| < (1+x)B_n\big)\big| = \big|\mathsf{E} X_i \mathbb{I}\big(|X_i| \geqslant (1+x)B_n\big)\big|, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k^2 \mathbb{I}\big(|X_k| < (1+x)B_n\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k^2 = B_n^2. \tag{30}$$

Приведем формулировки доказанных в главе 1 утверждений, которые будут полезны в данной части работы. Для удобства использования также присвоим им новые номера.

Лемма 8. *Для любой случайной величины X с конечным третьим абсолютным моментом $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$ и $\mathsf{E}X = a$ при любом a справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}|X-a|^3 \leqslant \min\left\{K \cdot \mathsf{E}|X|^3,\ \mathsf{E}|X|^3 + 3|a|\mathsf{E}\xi^2 + a^2\mathsf{E}|X|\right\},$$

где

$$K = \frac{17+7\sqrt{7}}{27} < 1.3156.$$

Доказательство. Формулировка и доказательство совпадают с формулировкой и доказательством леммы 2. □

Лемма 9. 1°. *Пусть K – число из леммы 8. При любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \geqslant 0$ для любого $p \in [1, K]$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 \leqslant \min\left\{KM_n(1+x), pM_n(1+x) + \frac{(5-p)\,L_n(1+x)}{1+x}\right\}.$$

2°. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \geqslant 0$ справедливы неравенства*

$$1 - 2L_n(1+x) \leqslant \mathsf{D}W_n(x) \leqslant 1.$$

3°. *Пусть $M_n(1) = \gamma L_n(1)$, $\gamma \geqslant 0$. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i - \mathsf{E}Y_i|^3 \leqslant L_n(1)\min\{K\gamma, \gamma+4\}.$$

Доказательство. Формулировка и доказательство совпадают с формулировкой и доказательством леммы 3. □

Лемма 10. *Пусть $q > 0$. Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi(qx) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\left(\max\left\{q, \frac{1}{q}\right\} - 1\right).$$

Доказательство. Формулировка и доказательство совпадают с формулировкой и доказательством п.1 леммы 4. □

Лемма 11. *Предположим, что* $L_n(1+x) \leqslant A$ *для некоторого* $A \in (0, \frac{1}{2})$. *Пусть*

$$B(A) = \frac{2}{(1+\sqrt{1-2A})\sqrt{1-2A}}.$$

Тогда

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}W_n}} \leqslant 1 + B(A)L_n(1+x).$$

Доказательство. Формулировка и доказательство совпадают с формулировкой и доказательством леммы 5. □

Далее докажем новые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных.

Лемма 12. *Пусть* K *– число из леммы 8. При любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \geqslant 0$ *для любого* $q \in [0,1]$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 \leqslant (K + q - Kq)M_n(1+x) + \frac{4qL_n(1+x)}{1+x}.$$

Доказательство. Согласно лемме 9

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 \leqslant \min\left\{KM_n(1+x), pM_n(1+x) + \frac{(5-p)L_n(1+x)}{1+x}\right\}$$

для любого $p \in [1, K]$.

Таким образом, для любого $q \in [0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 =$$

$$= q\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 + (1-q)\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 \leqslant$$

$$\leqslant q\left(M_n(1+x) + \frac{4L_n(1+x)}{1+x}\right) + (1-q)KM_n(1+x) =$$

$$(K + q - Kq)M_n(1+x) + \frac{4qL_n(1+x)}{1+x}.$$

Лемма доказана. □

Введем в рассмотрение центрированные и нормированные варианты усеченных случайных величин $Y_i(x)$. Обозначим

$$\overline{Y}_i(x) = \frac{Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}, \quad \overline{W}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i(x),$$

$$\overline{\Delta}_n(x) = \left| \mathsf{P}\left(\overline{W}_n(x) \leqslant \frac{x - \mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}} \right) - \Phi\left(\frac{x - \mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}} \right) \right|.$$

Лемма 13. *Если $L_n(1+x) \leqslant A$ для некоторого $A \in (0, \frac{1}{2})$, то для любого $q \in [0,1]$ справедливы неравенства*

$$\overline{\Delta}_n(x) \leqslant 0.4690 \left[\frac{4q(1+x)}{(1-2A)^{3/2}} \cdot \frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(K+q-Kq)(1+x)^3}{(1-2A)^{3/2}} \cdot \frac{M_n(1+x)}{(1+x)^3} \right] \quad (31)$$

и

$$\overline{\Delta}_n(x) \leqslant C^{**}(x) \left[\frac{4s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}(1+x)^2} \cdot \frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}} \cdot \frac{M_n(1+x)}{(1+x)^3} \right], \quad (32)$$

где

$$s(x;A) = \frac{(1+x)^3}{1 + \left(x - \frac{A}{1+x}\right)^3}, \quad (33)$$

$$C^{**}(x) = \begin{cases} 17.369, & \text{\textit{если} } x \geqslant 0; \\ 15.049, & \text{\textit{если} } x \geqslant 4; \\ 12.029, & \text{\textit{если} } x \geqslant 5; \\ 6.319, & \text{\textit{если} } x \geqslant 10. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно леммам 9 и 12 получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left|\overline{Y}_i(x)\right|^3 = \frac{1}{(\mathsf{D}W_n(x))^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}|Y_i(x) - \mathsf{E}Y_i(x)|^3 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(1-2L_n(1+x))^{3/2}} \left((K+q-Kq)M_n(1+x) + \frac{4qL_n(1+x)}{1+x} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(1-2A)^{3/2}} \left((K+q-Kq)M_n(1+x) + \frac{4qL_n(1+x)}{1+x} \right) \quad (34)$$

Поскольку $\overline{W}_n(x)$ представляет собой сумму независимых случайных величин $\overline{Y}_i(x)$ с

$$\mathsf{E}\overline{Y}_i(x) = 0, \quad \text{и} \quad \mathsf{D}\overline{W}_n(x) = 1,$$

то из неравенства Берри – Эссеена (см. [3]) с учетом (34) вытекает, что

$$\left|\mathsf{P}(\overline{W}_n(x) < z) - \Phi(z)\right| \leqslant 0.4690 \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left|\overline{Y}_i(x)\right|^3 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{0.4690}{(1-2A)^{3/2}} \left((K+q-Kq)M_n(1+x) + \frac{4qL_n(1+x)}{1+x} \right).$$

Последнее, как несложно видеть, эквивалентно неравенству (31).

Приступим к доказательству второй части теоремы. В силу (29)

$$\begin{aligned}
|\mathsf{E}W_n(x)| = \Big|\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i\mathbb{I}\big(|X_i|<(1+x)B_n\big)\Big| \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}\big|\mathsf{E}X_i\mathbb{I}\big(|X_i|<(1+x)B_n\big)\big| = \\
= \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}\big|\mathsf{E}X_i\mathbb{I}\big(|X_i|\geqslant(1+x)B_n\big)\big| \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|\mathbb{I}\big(|X_i|\geqslant(1+x)B_n\big) = \\
= \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left[\frac{X_i^2}{|X_i|}\mathbb{I}\big(|X_i|\geqslant(1+x)B_n\big)\right] \leqslant \frac{L_n(1+x)}{1+x} \leqslant \frac{A}{1+x}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, из последнего неравенства и леммы 9 следует, что

$$x-\frac{A}{1+x} \leqslant \frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}} \leqslant \frac{x+\frac{A}{1+x}}{\sqrt{1-2A}}. \tag{36}$$

Далее воспользуемся нервенством Берри – Эссеена и неравномерной оценкой, полученных И.Г. Шевцовой в [3]

$$\Delta_n(x) \leqslant 0.4690 l_{3,n}$$

и

$$x^3\Delta_n(x) \leqslant \begin{cases} 16.9 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 0; \\ 14.58 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 4; \\ 11.56 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 5; \\ 5.85 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 10. \end{cases}$$

Сложим полученные неравенства

$$(1+x^3)\Delta_n(x) \leqslant \begin{cases} 17.369 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 0; \\ 15.049 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 4; \\ 12.029 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 5; \\ 6.319 l_{3,n}, & \text{если } x \geqslant 10. \end{cases}$$

Применяя полученную неравномерную оценку с учетом неравенств (34) и (36) получаем

$$\overline{\Delta}_n(x) \leqslant \frac{C^{**}(x)}{1+\left(\frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right)^3}\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\big|\overline{Y}_i(x)\big|^3 \leqslant \frac{C^{**}(x)}{1+\left(x-\frac{A}{1+x}\right)^3}\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\big|\overline{Y}_i(x)\big|^3 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C^{**}(x)\,s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}(1+x)^3}\left(M_n(1+x)+\frac{4L_n(1+x)}{1+x}\right),$$

где

$$C^{**}(x)=\begin{cases}17.369, & \text{если } x\geqslant 0;\\ 15.049, & \text{если } x\geqslant 4;\\ 12.029, & \text{если } x\geqslant 5;\\ 6.319, & \text{если } x\geqslant 10.\end{cases}$$

Последнее, очевидно, эквивалентно неравенству (32).

Лемма доказана. □

Лемма 14. *Пусть $L_n(1+x)\leqslant A$ для некоторого $A\in(0,\frac{1}{2})$. Тогда*

$$\Delta_n(x)\leqslant \overline{\Delta}_n(x)+\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}\big(D(x,A)+1\big),$$

где

$$D(x,A)=x(1+x)^2e^{-x^2/2}\frac{B(A)e^A}{\sqrt{2\pi}}+(1+x)e^{-x^2/2}\frac{\big(1+AB(A)\big)e^A}{\sqrt{2\pi}}.$$

Доказательство. В работе [47] доказано неравенство

$$\Delta_n(x)\leqslant\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}+\big|\mathsf{P}(W_n(x)<x)-\Phi(x)\big|,$$

поэтому достаточно убедиться, что верно соотношение

$$\big|\mathsf{P}(W_n(x)<x)-\Phi(x)\big|\leqslant\overline{\Delta}_n(x)+\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}D(x,A). \tag{37}$$

С учетом неравенства треугольника очевидно, что

$$\big|\mathsf{P}(W_n(x)<x)-\Phi(x)\big|\leqslant\left|\mathsf{P}\left(\overline{W}_n(x)<\frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right)-\Phi(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\Delta}_n(x)+\left|\Phi\left(\frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right)-\Phi(x)\right|.$$

Из соотношения (36) вытекает, что

$$\min\left\{x, \frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right\} \geqslant x - \frac{L_n(1+x)}{1+x}. \tag{38}$$

С помощью формулы Лагранжа с учетом (38) легко видеть, что

$$\left|\Phi\left(\frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \left|x\left(\frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}-1\right) - \frac{\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right| \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\min\left\{x, \frac{x-\mathsf{E}W_n(x)}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\right\}\right)^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}-1\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{L_n(1+x)}{1+x}\right)^2\right\} +$$
$$+ \frac{|\mathsf{E}W_n(x)|}{\sqrt{\mathsf{D}W_n(x)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{L_n(1+x)}{1+x}\right)^2\right\} \equiv I_1 + I_2.$$

Рассмотрим I_1. При $L_n(1+x) \leqslant A$ нетрудно убедиться, что

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{L_n(1+x)}{1+x}\right)^2\right\} \leqslant e^{-x^2/2}\exp\left\{\frac{xL_n(1+x)}{1+x}\right\} \leqslant e^A e^{-x^2/2}. \tag{39}$$

Таким образом, с учетом леммы 11 и соотношения (39), имеем

$$I_1 \leqslant \frac{e^A B(A) x L_n(1+x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leqslant x(1+x)^2 e^{-x^2/2}\frac{B(A)e^A}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}. \tag{40}$$

Теперь рассмотрим I_2. С учетом условия $L_n(1+x) \leqslant A$, соотношений (35), (39) и леммы 11 получим

$$I_2 \leqslant \frac{L_n(1+x)}{1+x}\cdot\frac{(1+B(A)L_n(1+x))e^A}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2} \leqslant$$
$$\leqslant (1+x)e^{-x^2/2}\frac{\big(1+AB(A)\big)e^A}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2}. \tag{41}$$

Объединяя (40), (41) и (37), получаем утверждение леммы.

Лемма доказана. □

Лемма 15. *Для любого $x > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}W_n(x)^4 \leqslant$$
$$\leqslant 1+(1+x)M_n(1+x)+\frac{L_n(1+x)M_n(1+x)}{1+x}+\left(\frac{L_n(1+x)}{1+x}\right)^2+\left(\frac{L_n(1+x)}{1+x}\right)^4.$$

Доказательство. Доказательство леммы содержится в [47] (см. утверждение 2.1). □

Лемма 16. *Для любого $x > 0$ справедливо неравенство*

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{\mathsf{E}W_n(x)^4}{x^4} + \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}.$$

Доказательство. См. соотношение (3.2) в [47]. □

Вновь вспомним лемму из первой главы.

Лемма 17. *Пусть X – случайная величина с $\mathsf{E}X^2 < \infty$. Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left(\frac{X - \mathsf{E}X}{\sqrt{\mathsf{D}X}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant 0.541.$$

Доказательство. Доказательство совпадает с доказательством леммы 6. □

Теорема 10. *Для любого $x \geqslant 0$ имеет место неравенство*

$$\Delta_n(x) \leqslant C_9(x)\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2} + C_{10}(x)\frac{M_n(1+x)}{(1+x)^3},$$

где $C_9(x)$ и $C_{10}(x)$ — положительные ограниченные функции, для которых справедлива каждая из следующих оценок

1°.

$$C_9(x) \leqslant 1.8546(1+x)^2; \quad C_{10}(x) \leqslant 1.8546(1+x)^3.$$

2°. *Если $L_n(1+x) \leqslant A$ для некоторого $A \in (0, \frac{1}{2})$, то для любого $q \in [0,1]$*

$$\begin{aligned}
(a)\quad & C_9(x) \leqslant \frac{4\cdot 0.469q(1+x)}{(1-2A)^{3/2}} + D(x,A) + 1;\\
& C_{10}(x) \leqslant \frac{0.469(K+q-Kq)(1+x)^3}{(1-2A)^{3/2}};\\
(b)\quad & C_9(x) \leqslant \frac{4\cdot C^{**}(x)s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}(1+x)^2} + D(x,A) + 1;\\
& C_{10}(x) \leqslant \frac{C^{**}(x)s(x;A)}{(1-2A)^{3/2}},
\end{aligned}$$

где $s(x;A)$ определено в (33),

$$C^{**}(x) = \begin{cases} 17.369, & \text{если } x \geqslant 0;\\ 15.049, & \text{если } x \geqslant 4;\\ 12.029, & \text{если } x \geqslant 5;\\ 6.319, & \text{если } x \geqslant 10. \end{cases}$$

3°. *Если* $L_n(1+x) \geqslant A$ *для некоторого* $A \in (0, \frac{1}{2})$, *то*

$$(a)\quad C_9(x) \leqslant \frac{0.541}{A} \cdot (1+x)^2; \quad C_{10}(x) = 0;$$

$$(b)\quad C_9(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^4(1+x)^2} + \left[\frac{1}{x^4} + \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\right] \cdot \frac{(1+x)^2}{A};$$

$$C_{10}(x) \leqslant \frac{(1+x)^4}{x^4} + \frac{(1+x)^2}{x^4}.$$

Доказательство. Доказательство проведем последовательно для каждого из пунктов теоремы.

1°. Для любого $x \geqslant 0$

$$L_n(1+x) + M_n(1+x) \geqslant L_n(1) + M_n(1).$$

Данное соотношение было доказано в главе 1.

Теперь, воспользовавшись равномерной оценкой в ЦПТ, описанной в теореме 2,

$$\Delta_n(x) \leqslant 1.8546(L_n(1) + M_n(1)),$$

получим требуемое.

2°. Утверждение получается непосредственно подстановкой результатов леммы 13 в неравенство леммы 14.

3°. Согласно лемме 17

$$\Delta_n(x) \leqslant 0.541 = \frac{0.541(1+x)^2}{L_n(1+x)} \cdot \frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2} \leqslant \frac{0.541(1+x)^2}{A} \cdot \frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2},$$

что доказывает пункт (a) утверждения. Оценки пункта (b) получаются подстановкой резльтутов леммы 15 в лемму 16 и вытекающего из (30) условия $L_n(1+x) < 1$. Теорема доказана. □

Следствие 11. *В условиях теоремы 10 для любого* $x \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_n(x) \leqslant C_{11}(x)\left(\frac{L_n(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{M_n(1+x)}{(1+x)^3}\right),$$

где

$$C_{11}(x) = max\{C_9(x), C_{10}(x)\}.$$

Для фиксированных x и A $C_{11}(x) = max\{C_9(x), C_{10}(x)\}$ минимальна, если $|C_9(x) - C_{10}(x)|$ минимальна. Это условие помогает вычислить q. Вводится сетка по x и A. Затем для каждой пары (x, A) вычисляется оптимальное значение q. После на каждом интервале значений x выбирается оптимальная оценка константы. Численная оптимизация на языке R позволяет получить оценку $C_{11}(x) \quad \leqslant \quad 37.9$.

2.2. Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для некоторых случайных сумм

2.2.1. Неравномерные оценки для биномиальных случайных сумм

Всюду далее также рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1,X_2,\ldots$ с $\mathsf{E}X_i = 0$ и $0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma^2 < \infty$.

Напомним определение биномиальной случайной суммы. Пусть $p \in (0,1]$ – произвольно. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – независимые случайные величины такие, что

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p, \end{cases} \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Случайная величина $N_{n,p} = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ может интерпретироваться как число успехов в схеме испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Случайная величина $N_{n,p}$ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p

$$\mathsf{P}(N_{n,p} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,\ldots,n.$$

Предположим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_{n,p},X_1,X_2,\ldots$ независимы в совокупности. В данной главе основным объектом изучения будут биномиальные случайные суммы вида

$$S_{N_{n,p}} = X_1 + \ldots + X_{N_{n,p}}.$$

При этом если $N_{n,p} = 0$, то $S_{N_{n,p}} = 0$.

Для $j \in \mathbb{N}$ введем случайные величины $\widetilde{X}_j$, полагая

$$\widetilde{X}_j = \begin{cases} X_j & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$

Несложно видеть, что $\widetilde{X}_j \stackrel{d}{=} \xi_j X_j$, где сомножители в правой части независимы (здесь и далее символ $\stackrel{d}{=}$ обозначает совпадение распределений).

Пусть $F(x)$ – общая функция распределения случайных величин X_j, $E_0(x)$ – функция распределения с единственным единичным скачком в нуле. Тогда, очевидно,

$$\mathsf{P}\big(\widetilde{X}_j < x\big) = pF(x) + (1-p)E_0(x), \qquad x \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}.$$

При этом $\mathsf{E}\widetilde{X}_j = 0$,

$$\mathsf{D}\widetilde{X}_j = \mathsf{E}\widetilde{X}_j^2 = p\sigma^2. \tag{42}$$

Лемма 18. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_j \in (0,1]$*

$$S_{N_{n,p}} \stackrel{d}{=} \widetilde{X}_1 + \ldots + \widetilde{X}_n, \tag{43}$$

где случайные величины в правой части (43) *независимы.*

Доказательство. См. доказательство леммы 7. □

С учетом (42) и (43) легко заметить, что

$$\mathsf{D}S_{N_{n,p}} = np\sigma^2.$$

Обозначим

$$\Delta_{n,p}(x) = \Big|\mathsf{P}\big(S_{N_{n,p}} < x\sigma\sqrt{np}\big) - \Phi(x)\Big|.$$

Теорема 11. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ и $p \in (0,1]$ справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,p}(x) \leqslant 37.9\Bigg[\frac{\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2} + \\ + \frac{\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3}\Bigg] \leqslant \\ \leqslant \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2}\cdot \mathsf{E}X_1^2\min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\right\}.$$

Доказательство. Из леммы 18 и соотношения (42) вытекает, что

$$\Delta_{n,p} = \Big|\ P\big(\widetilde{X}_1 + \ldots + \widetilde{X}_n < x\sigma\sqrt{np}\big) - \Phi(x)\Big|.$$

Правую часть этого соотношения оценим с помощью с учетом следствия 11 и получим

$$\Big|\mathsf{P}\big(\widetilde{X}_1 + \ldots + \widetilde{X}_n < x\sigma\sqrt{np}\big) - \Phi(x)\Big| \leqslant \\ \leqslant 37.9\Bigg[\frac{\mathsf{E}\widetilde{X}_1^2\mathbb{I}\big(|\widetilde{X}_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{p\sigma^2(1+|x|)^2} + \frac{\mathsf{E}|\widetilde{X}_1|^3\mathbb{I}\big(|\widetilde{X}_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3 p^{3/2}\sqrt{n}(1+|x|)^3}\Bigg] \leqslant \\ \leqslant 37.9\Bigg[\frac{\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2} + \frac{\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3}\Bigg] = \\ = \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2}\cdot \mathsf{E}X_1^2\min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\right\}.$$

□

Пусть, как и ранее, $\mathcal{G}$ – класс, в который входят функции $g \in \mathcal{G}$ со следующими характеристиками

- функция $g(x)$ четна;
- функция $g(x)$ неотрицательна при всех x и $g(x) > 0$ при $x > 0$;
- функция $g(x)$ не убывает при $x > 0$;
- функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

Теорема 12. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ *для некоторой функции* $g \in \mathcal{G}$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1]$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,p}(x) \leqslant \frac{37.9\,\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2} = \\
&\qquad = \mathsf{E}\frac{X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g(X_1)} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Последнее соотношение справедливо в силу того, что функция $g(x)$ не убывает.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3} = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left[\frac{X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3} \cdot \frac{|X_1|}{g(X_1)}\right] \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3} \cdot \frac{(1+|x|)\sigma\sqrt{np}}{g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})} = \\
&\qquad\qquad = \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Предпоследнее соотношение также справедливо в силу того, что функция $g(x)$ не убывает.

Объединяя (44) и (45), с учетом следствия 11 получаем требуемое.

Теорема доказана. □

Вновь напомним определения специальных подклассов класса $\mathcal{G}$.

$\mathcal{G}_0$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x) \in \mathcal{G}$;

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x^2)}{xg(x)} = 0.$

$\mathcal{G}_1$ – класс, содержащий функции $g(x)$ такие, что

- $g(x) \in \mathcal{G}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{g(x)} = \infty.$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 13. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ *для некоторой функции* $g \in \mathcal{G}_0$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0{,}1]$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,p}(x) \leqslant \frac{Q\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)},$$

где $Q(y) = 37.9[Q_1(y) + Q_2(y) + Q_3(y)]$, *а функции* $Q_1(y)$, $Q_2(y)$ *и* $Q_3(y)$ *определены в* (46), (47) *и* (49) *соответственно. При этом* $\lim_{y\to\infty} Q(y) = 0$.

Доказательство. Из неравенства (44) непосредственно вытекает, что

$$\frac{\mathsf{E}X_1^2 \mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2} \leqslant \frac{Q_1\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}, \tag{46}$$

где для $y > 0$

$$Q_1(y) = \mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}(|X_1| \geqslant y).$$

При этом, если $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, то $\lim_{y\to\infty} Q_1(y) = 0$.

Рассмотрим величину

$$\frac{\mathsf{E}|X_1|^3 \mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3} \equiv A_1 + A_2,$$

где

$$A_1 = \frac{\mathsf{E}|X_1|^3 \mathbb{I}\big(|X_1| < \sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3},$$

$$A_2 = \frac{\mathsf{E}|X_1|^3 \mathbb{I}\big(\sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)} \leqslant |X_1| < \sigma\sqrt{np}(1+|x|)\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3}.$$

Далее получим оценку

$$A_2 \leqslant \frac{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| > \sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})} =$$

$$= \frac{Q_2\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}, \tag{47}$$

где
$$Q_2(y) = \mathsf{E} X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\big(|X_1| > \sqrt{y}\big).$$
При этом, если $\mathsf{E} X_1^2 g(X_1) < \infty$, то $\lim_{y\to\infty} Q_2(y) = 0$.

Наконец, рассмотрим A_1. Имеем

$$A_1 = \frac{\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1| < \sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\big)}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3} =$$
$$= \frac{1}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3}\mathsf{E}\Big[X_1^2 g(X_1)\cdot\frac{|X_1|}{g(X_1)}\cdot\mathbb{I}\Big(|X_1| < \sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\Big)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}}{\sigma^3\sqrt{np}(1+|x|)^3 g\big(\sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\big)}\mathsf{E}\Big[X_1^2 g(X_1)\mathbb{I}\Big(|X_1| < \sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\Big)\Big)$$
$$\leqslant \frac{\mathsf{E} X_1^2 g(X_1)}{\sigma^{5/2}(np)^{1/4}(1+|x|)^{5/2} g\big(\sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\big)}. \quad (48)$$

Обозначим $y = \sqrt{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}$. Тогда, продолжая цепочку (48), получим

$$A_1 \leqslant \frac{np\mathsf{E} X_1^2 g(X_1)}{y^5 g(y)} = \frac{1}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}\cdot\frac{g(y^2)\mathsf{E} X_1^2 g(X_1)}{y g(y)} =$$
$$= \frac{Q_3\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{np})}, \quad (49)$$

где
$$Q_3(y) = \frac{g(y^2)\mathsf{E} X_1^2 g(X_1)}{y g(y)}.$$
При этом, если $\mathsf{E} X_1^2 g(X_1) < \infty$, то из свойств функции $g \in \mathcal{G}_0$ вытекает, что $\lim_{y\to\infty} Q_1(y) = 0$.

Из теоремы 11 и неравенств (46), (47) и (49) вытекает следующее утверждение. □

Теорема 14. *Предположим, что $\mathsf{E} X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции $g \in \mathcal{G}_1$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1]$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\Delta_{n,p}(x) \leqslant \frac{Q^*\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)},$$

где
$$Q^*(y) = 37.9\, g(y)\mathsf{E}\bigg[X_1^2\min\bigg\{1, \frac{|X_1|}{y}\bigg\}\bigg].$$

При этом $\lim_{y\to\infty} Q^*(y) = 0$.

Доказательство. По теореме 11

$$\Delta_{n,p}(x) \leqslant \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2} \cdot \mathsf{E}X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\right\} =$$

$$= \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2} \frac{1}{g(\sigma\sqrt{np}(1+|x|))} \cdot \mathsf{E}X_1^2 g(\sigma\sqrt{np}(1+|x|)) \min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{np}(1+|x|)}\right\} =$$

$$= \frac{Q^*\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{np}\big)}.$$

Покажем, что $\lim_{y\to\infty} Q^*(y) = 0$.

$$Q^*(y) = 37.9\, g(y)\mathsf{E}\left[X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{y}\right\}\right].$$

В свою очередь

$$\mathsf{E}X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{y}\right\} = \frac{1}{g(y)} \mathsf{E}X_1^2 g(X_1) \frac{g(y)}{g(X_1)} \min\left\{1, \frac{|X_1|}{y}\right\} =$$

$$= \frac{1}{g(y)} \mathsf{E}X_1^2 g(X_1) A(X_1,y),$$

где

$$A(x,y) = \frac{g(y)}{g(x)} \cdot \min\left\{1, \frac{|x|}{y}\right\}.$$

Так как $g \in \mathcal{G}_1$, то $A(x,y) \leqslant 1$ и $A(x,y) \to 0$ при $y \to \infty$ при любом x. Поэтому по теореме о мажорируемой сходимости $Q^*(y) = 37.9\mathsf{E}\big[A(X_1,y)X_1^2 g(X_1)\big] \to 0$ при $y \to \infty$. Теорема доказана. $\square$

2.2.2. Неравномерные оценки для пуассоновских случайных сумм

Для $\lambda > 0$ пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму

$$S_{N_\lambda} = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}.$$

Если $N_\lambda = 0$, то полагаем $S_{N_\lambda} = 0$. Несложно убедиться, что $\mathsf{E}S_{N_\lambda} = 0$ и $\mathsf{D}S_{N_\lambda} = \lambda\sigma^2$ (см. главу 1).

Пусть также

$$\Delta_\lambda(x) = \left|\mathsf{P}\big(S_{N_\lambda} < x\sigma\sqrt{\lambda}\big) - \Phi(x)\right|.$$

Теорема 15. *Для любых* $\lambda > 0$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant 37.9 \left[\frac{\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant (1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2} + \frac{\mathsf{E}|X_1|^3\mathbb{I}\big(|X_1| < (1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}{\sigma^3\sqrt{\lambda}(1+|x|)^3}\right] =$$

$$= \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2} \cdot \mathsf{E}X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)}\right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем λ и наряду с N_λ рассмотрим случайную величину $N_{n,p}$, имеющую биномиальное распределение с произвольной парой параметров n и $p \in (0,1]$, удовлетворяющей условию $np = \lambda$. При этом

$$\mathsf{D}S_{N_\lambda} = \mathsf{D}S_{N_{n,p}} = \sigma^2\lambda = \sigma^2 np.$$

Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ по неравенству треугольника

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \Delta_{n,p}(x) + |\mathsf{P}(S_{N_\lambda} < x) - \mathsf{P}(S_{N_{n,p}} < x)|. \tag{50}$$

Первое слагаемое в правой части (50) оценим с помощью теоремы 11 и получим

$$\Delta_{n,p}(x) \leqslant \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2} \cdot \mathsf{E}X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)}\right\}. \tag{51}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (50). Имеем

$$\begin{aligned} &|\mathsf{P}(S_{N_\lambda} < x) - \mathsf{P}(S_{N_{n,p}} < x)| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\bigg(\sum\nolimits_{j=1}^{k} X_j < x\bigg)\big|\mathsf{P}(N_{n,p} = k) - \mathsf{P}(N_\lambda = k)\big| \leqslant \\ &\leqslant \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \big|\mathsf{P}(N_{n,p} = k) - \mathsf{P}(N_\lambda = k)\big|. \end{aligned} \tag{52}$$

Правую часть (52) оценим с помощью неравенства Ю. В. Прохорова [62] (также см. [63], с. 76), согласно которому

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \big|\mathsf{P}(N_{n,p} = k) - \mathsf{P}(N_\lambda = k)\big| \leqslant 2p\min\{1,\lambda\}. \tag{53}$$

Таким образом, из (50), (51) и (53) вытекает, что для любых n и p, удовлетворяющих условию $np = \lambda$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{37.9}{\sigma^2(1+|x|)^2} \cdot \mathsf{E}X_1^2 \min\left\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)}\right\} + \tfrac{2}{n} \cdot \lambda\min\{1,\lambda\}. \tag{54}$$

Теперь, устремляя в (54) $n \to \infty$, получаем окончательный результат.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 16. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ *для некоторой функции* $g \in \mathcal{G}$. *Тогда для любых* $\lambda > 0$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{37.9\,\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda})}.$$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы в качестве мажоранты для $\Delta_{n,p}(x)$ в неравенстве (50) следует использовать оценку, полученную в теореме 12.

Теорема доказана. □

Аналогично теоремам для биномиальных случайных сумм справедливы следующие утверждения.

Теорема 17. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ *для некоторой функции* $g \in \mathcal{G}_0$. *Тогда для любых* $\lambda > 0$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{Q\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)},$$

где $Q(y) = 37.9[Q_1(y) + Q_2(y) + Q_3(y)]$, *а функции* $Q_1(y)$, $Q_2(y)$ *и* $Q_3(y)$ *определены в* (46), (47) *и* (49) *соответственно с формальной заменой* np *на* λ. *При этом* $\lim_{y\to\infty} Q(y) = 0$.

Доказательство. К доказательству данного утверждения можно прийти рассуждениями, практически дословно повторяющими доказательство теоремы 13 с заменой теоремы 11 на теорему 15, а np на λ. □

Теорема 18. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$ *для некоторой функции* $g \in \mathcal{G}_1$. *Тогда для любых* $\lambda > 0$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda(x) \leqslant \frac{Q^*\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)}{\sigma^2(1+|x|)^2 g\big((1+|x|)\sigma\sqrt{\lambda}\big)},$$

где функция $Q^*(y)$ *определена в теореме 14. При этом* $\lim_{y\to\infty} Q^*(y) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем λ и наряду с N_λ рассмотрим случайную величину $N_{n,p}$, имеющую биномиальное распределение с произвольными параметрами n и p такими, что $np = \lambda$. Далее, воспользовавшись теоремой 14, получим утверждение теоремы. □

3. Равномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для функций концентрации сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях

Пусть далее все случайные величины, рассматриваемые в данной главе, определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$.

Рассмотрим определение функции концентрации $Q_\xi(z)$ случайной величины ξ

$$Q_\xi(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathsf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x+z), \quad z \geqslant 0.$$

Данное понятие было введено П. Леви в 1937 г. [51].

Оценки скорости убывания функций концентрации сумм независимых случайных величин с ростом числа слагаемых рассматривались достаточно давно, например, в [13], однако они не учитывали изменения формы функций концентрации. Впервые оценки функций концентрации, описывающие асимптотические изменения их формы, были получены В. Е. Бенингом, Н. К. Галиевой, В. Ю. Королевым в [52]. В данной работе результаты получены при предположении о существовании третьих абсолютных моментов у слагаемых. В настоящей главе будут впервые описаны оценки для функций концентрации при существовании лишь дисперсий у слагаемых. Резльтаты данной главы были описаны в статье [72] и ее версии на английском языке.

3.1. Равномерные оценки отклонений функций концентрации сумм независимых случайных величин от функции распределения полунормального закона

В [52] было доказано следующее утверждение

Лемма 19. *Пусть η и ξ — случайные величины такие, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(\eta < x) - \mathsf{P}(\xi < x)| \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$. Тогда

$$\sup_{z\geqslant 0} |Q_\xi(z) - Q_\eta(z)| \leqslant 4\delta.$$

Доказательство. Доказательство см. в [52]. □

Случайная величина ξ имеет унимодальное распределение (по Хинчину), если существует единственная точка x_0 такая, что функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ выпукла при $x < x_0$, а функция $1 - F_\xi(x)$, в свою очередь, выпукла при $x > x_0$. При этом точка x_0 называется модой случайной величины ξ.

Лемма 20. *Пусть ξ — случайная величина с симметричным унимодальным распределением. Тогда для $z > 0$ имеем*

$$Q_\xi(z) = \mathsf{P}\Big(|\xi| < \frac{z}{2}\Big).$$

Доказательство. Доказательство данного утверждения см. в [52]. □

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины с $\mathsf{E}X_i = 0$ и $0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma_i^2 < \infty$, $i = 1,2,\ldots$ Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

Пусть, как и ранее, $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функцию распределения полунормального закона обозначим $\Phi_0(x)$

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Напомним доказанную ранее теорему 1.

Теорема 19. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство*

$$\Delta_n \leqslant 1.8627\big[L_n(1) + M_n(1)\big].$$

В [72] была доказана следующая теорема.

Теорема 20. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее неравенство*

$$\sup_{z \geqslant 0} \Big| Q_{S_n}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2B_n}\Big)\Big| \leqslant 7.4508\big[L_n(\varepsilon) + M_n(\varepsilon)\big].$$

Доказательство. Согласно теореме 19

$$\Delta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}(S_n < xB_n) - \Phi(x)| \leqslant 1.8627\big[L_n(1) + M_n(1)\big].$$

По лемме 19, взяв $\delta \equiv 1.8627\big[L_n(1) + M_n(1)\big]$, получим

$$\sup_{z\geqslant 0} |Q_{\frac{S_n}{B_n}}(z) - Q_\Phi(z)| \leqslant 4\delta, \tag{55}$$

где $Q_\Phi(z)$ – функция концентрации нормального закона.

Несложно видеть, что если ζ вляется случайной величиной со стандартным нормальным распределением, то $\Phi_0(x) = \ P(|\zeta| < x)$.

Стандартное нормальное распределение является симметричным и унимодальным, по лемме 20 и упомянутому выше соотношению

$$Q_\Phi(z) = \mathsf{P}\Big(|\xi| < \frac{z}{2}\Big) = \Phi_0\Big(\frac{z}{2}\Big),$$

где ξ – нормально распределенная случайная величина. Тогда (55) имеет вид

$$\sup_{z\geqslant 0} |Q_{\frac{S_n}{B_n}}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2}\Big)| \leqslant 4\delta.$$

Очевидно, что $Q_{b\xi}(z) = Q_\xi\Big(\frac{z}{b}\Big)$. Тогда

$$\sup_{z\geqslant 0} |Q_{S_n}(zB_n) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2}\Big)| \leqslant 4\delta,$$

откуда следует утверждение теоремы. □

В силу того, что

$$M_n(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E} X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| < \varepsilon B_n) \leqslant \varepsilon,$$

справедливо следующее утверждение.

Следствие 12. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется следующее соотношение*

$$\sup_{z\geqslant 0} \Big| Q_{S_n}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2B_n}\Big)\Big| \leqslant 7.4508\big[\varepsilon + L_n(\varepsilon)\big].$$

Следствие 12 устанавливает, что при выполнении условия Линдеберга, необходимого и достаточного условия выполнения ЦПТ, функция концентрации суммы независимых случайных величин может быть аппроксимирована функцией распределения полунормального закона с аргументом, преобразованным соответствующим образом.

Напомним определение класса функций $\mathcal{G}$.

$\mathcal{G}$ — класс вещественных функций $g(x)$ аргумента $x \in \mathbb{R}$ таких, что

- функция $g(x)$ четна;
- функция $g(x)$ неотрицательна при всех x и $g(x) > 0$ при $x > 0$;
- функция $g(x)$ не убывает при $x > 0$;
- функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

Аналогично, с использованием результатов второй главы, может быть доказано следующее утверждение в терминах функции $g \in \mathcal{G}$.

Теорема 21. *Какой бы ни была функция $g \in \mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_i^2 g(X_i) < \infty$, $i \geqslant 1$, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_n}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2B_n}\Big)\Big| \leqslant \frac{7.4508}{B_n^2 g(B_n)}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i^2 g(X_i).$$

Доказательство. Объединяя утверждение леммы 19 с тем фактом, что соотношение (2) справедливо с константой из теоремы 1, получим утверждение теоремы. □

3.2. Равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации некоторых случайных сумм

3.2.1. Равномерные оценки для функций концентрации пуассон-биномиальных и биномиальных случайных сумм

Напомним определение пуассон-биномиальной случайной суммы. Всюду далее будем считать, что $X_1,X_2,\ldots$ – одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_i = 0$ и $0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma^2 < \infty$. Пусть $p_j \in (0,1]$ — произвольные числа, $j = 1,2,\ldots$. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\theta_n = p_1 + \ldots + p_n$, $\boldsymbol{p}_n = (p_1,\ldots,p_n)$. Распределение случайной величины

$$N_{n,\boldsymbol{p}_n} = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые случайные величины такие, что

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p_j, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p_j, \end{cases} \quad j = 1,\ldots,n,$$

принято называть пуассон-биномиальным распределением с параметрами n и $\boldsymbol{p}_n$. Предположим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_{n,\boldsymbol{p}_n},X_1,X_2,\ldots$

независимы в совокупности. Основным объектом, рассматриваемым в данной части диссертации, являются пуассон-биномиальные случайные суммы вида

$$S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} = X_1 + \ldots + X_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}}.$$

При этом, если $N_{n,\boldsymbol{p}_n} = 0$, то полагаем $S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} = 0$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 22. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_j \in (0,1]$, $j \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_{N_{n,\mathbf{p}_n}}}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\theta_n}}\Big)\Big| \leqslant \frac{7.4508}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{\theta_n}, |X_1|\big\}.$$

Доказательство. Данное утверждение следует из лемм 19, 20 и оценки

$$\Delta_{n,\boldsymbol{p}_n} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\mathsf{P}\big(S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} < x\sigma\sqrt{\theta_n}\big) - \Phi(x)\big| \leqslant \frac{1.8627}{\sigma^3\sqrt{\theta_n}}\,\mathsf{E}X_1^2\min\big\{\sigma\sqrt{\theta_n}, |X_1|\big\}.$$

доказанной в теореме 5. □

Теорема 23. *Какой бы ни была функция $g \in \mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_{N_{n,\mathbf{p}_n}}}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\theta_n}}\Big)\Big| \leqslant \frac{7.4508\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{\theta_n})}.$$

Доказательство. Данное утверждение следует из лемм 19, 20 и оценки

$$\Delta_{n,\boldsymbol{p}_n} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\mathsf{P}\big(S_{N_{n,\boldsymbol{p}_n}} < x\sigma\sqrt{\theta_n}\big) - \Phi(x)\big| \leqslant 1.8627\frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{\theta_n})},$$

доказанной в теореме 6. □

В частности, если $p_1 = p_2 = \ldots = p$, то пуассон-биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{p}_n$ становится классическим биномиальным распределением с параметрами n и p

$$N_{n,\boldsymbol{p}_n} \stackrel{d}{=} N_{n,p}, \quad \mathsf{P}(N_{n,p} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

В этом случае $\theta_n = np$, а $\mathsf{D}S_{N_{n,p}} = np\sigma^2$. Тогда справедливы следующие следствия.

Следствие 13. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_j \in (0,1]$, $j \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_{N_{n,p}}}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{np}}\Big)\Big| \leqslant \frac{7.4184}{\sigma^2}\,\mathsf{E}X_1^2\min\Big\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{np}}\Big\}.$$

Следствие 14. *Какой бы ни была функция $g \in \mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{z \geqslant 0} \Big| Q_{S_{N_{n,p}}}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{np}}\Big) \Big| \leqslant \frac{7.4184 \mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{np})}.$$

Доказательства данных утверждений аналогичны доказательству теоремы 19 и опираются на леммы 19 и 20, а также следствия 6 и 7.

3.2.2. Равномерные оценки для функций концентрации пуассоновских случайных сумм

В дополнение к обозначениям, введенным выше, пусть $\lambda > 0$ и N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Предположим, что при любом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму вида

$$S_{N_\lambda} = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}.$$

При этом, если $N_\lambda = 0$, то полагаем $S_{N_\lambda} = 0$. Несложно видеть, что $\mathsf{E}S_\lambda = 0$ и $\mathsf{D}S_\lambda = \lambda\sigma^2$.

Используя теорему 7 и леммы 19 и 20, получим оценки точности аппроксимации функции концентрации $Q_{S_\lambda}(z)$ функцией распределения полунормального закона.

Теорема 24. *Для любого $\lambda > 0$*

$$\sup_{z \geqslant 0} \Big| Q_{S_\lambda}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\lambda}}\Big) \Big| \leqslant \frac{7.4184}{\sigma^2}\, \mathsf{E}X_1^2 \min\Big\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\lambda}}\Big\}.$$

В то время, как леммы 19, 20 и теорема 8 дают следующее утверждение.

Теорема 25. *Какой бы ни была функция $g \in \mathcal{G}$ такая, что $\mathsf{E}X_1^2 g(X_1) < \infty$, имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{z \geqslant 0} \Big| Q_{S_\lambda}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\lambda}}\Big) \Big| \leqslant 7.4184 \frac{\mathsf{E}X_1^2 g(X_1)}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{\lambda})}.$$

Заметим, что использованная в теореме 25 верхняя оценка абсолютной константы равномерна по классу $\mathcal{G}$. В конкретных случаях эта оценка может быть существенно уточнена. Так, например, функция $g(x) \equiv |x| \in \mathcal{G}$, а неравенство из теоремы 8 для нее принимает вид неравенства Берри – Эссеена для пуассоновских случайных сумм, наилучшая на сегодняшний день верхняя оценка абсолютной константы для которого приведена в работе [73]

$$\Delta_\lambda \leqslant 0.3031\frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{\lambda}},$$

таким образом, если у слагаемых существует третий момент, то имеет место оценка

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_\lambda}(z) - \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{\lambda}}\Big)\Big| \leqslant 1.2124\frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{\lambda}}.$$

3.3. Равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм

3.3.1. Равномерные оценки для функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм в общем случае

В этой части работы будет рассмотрен случай, когда случайное число слагаемых имеет смешанное пуассоновское распределение. Напомним основные понятия и утверждения. Для удобства введем «бесконечно большой» параметр $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим случайные величины $N_n^\star$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}d\mathsf{P}(\Lambda_n < \lambda), \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{56}$$

где Λ_n — некоторая положительная случайная величина. Для простоты n может быть рассмотрено как параметр масштаба распределения Λ_n, т.е. $\Lambda_n = n\Lambda$, где Λ — некоторая положительная «стандартная» случайная величина, в том смысле, что $\mathsf{E}\Lambda = 1$ (если последнее существует).

Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_n^\star$ и $X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Как и ранее, пусть $S_{N_n^\star} = X_1 + \ldots + X_{N_n^\star}$. Если $N_n^\star = 0$, то $S_{N_n^\star} = 0$.

Согласно (56) легко видеть, что если $\mathsf{E}\Lambda_n < \infty$, то $\mathsf{E}N_n^\star = \mathsf{E}\Lambda_n$ и $\mathsf{D}S_n = \sigma^2\mathsf{E}\Lambda_n$.

Обозначим

$$\Delta_n^\star \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\big(S_{N_n^\star} < x\sigma\sqrt{E\Lambda_n}\big) - \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big)d\mathsf{P}\big(\Lambda_n < \lambda\mathsf{E}\Lambda_n\big)\right|.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ введем функцию

$$G_n(x) = \mathsf{E}\min\Big\{1, \frac{|x|}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\Big\} = \mathsf{P}\Big(\Lambda_n < \frac{x^2}{\sigma^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma}\mathsf{E}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\Big(\Lambda_n \geqslant \frac{x^2}{\sigma^2}\Big). \tag{57}$$

Функция $G_n(x)$ в (57) существует, т.к. случайная величина, стоящая под знаком математического ожидания, ограничена 1. Очевидно, что форма данной функции зависит от формы распределения случайной величины Λ_n.

Напомним следующую теорему из главы 1

Теорема 26. *Если* $\mathsf{E}\Lambda_n < \infty$, *то*

$$\Delta_n^\star \leqslant \frac{1.8546}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2G_n(X_1) = \frac{1.8546}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2\min\Big\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\Big\} =$$

$$= \frac{1.8546}{\sigma^2}\Big[\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant \sigma\sqrt{\Lambda_n}\big) + \mathsf{E}\frac{|X_1|^3}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\big(|X_1| < \sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)\Big],$$

где случайные величины X_1 и Λ_n предполагаются независимыми.

Принимая во внимание то, что масштабные смеси нормальных распределений с нулевым средним симметричны и унимодальны, используя леммы 19, 20 и теорему 26, получим соответствующую оценку точности аппроксимации $Q_{S_{N_n^\star}}(z)$ масштабной смесью функции распределения полунормального закона (см. [72]).

Теорема 27. *Если* $\mathsf{E}\Lambda_n < \infty$, *то*

$$\sup_{z\geqslant 0}\left|Q_{S_{N_n^\star}}(z) - \int\limits_0^\infty \Phi_0\Big(\frac{z}{2\sqrt{\lambda}}\Big)d\mathsf{P}\big(\Lambda_n < \lambda\mathsf{E}\Lambda_n\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{7.4184}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2G_n(X_1) = \frac{7.4184}{\sigma^2}\mathsf{E}X_1^2\min\Big\{1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\Big\} =$$

$$= \frac{7.4184}{\sigma^2}\Big[\mathsf{E}X_1^2\mathbb{I}\big(|X_1| \geqslant \sigma\sqrt{\Lambda_n}\big) + \mathsf{E}\frac{|X_1|^3}{\sigma\sqrt{\Lambda_n}}\mathbb{I}\big(|X_1| < \sigma\sqrt{\Lambda_n}\big)\Big],$$

где случайные величины X_1 и Λ_n предполагаются независисмыми.

Далее рассмотрены случаи, когда Λ_n имеет экспоненциальное, гамма и обратное гамма-распределние.

3.3.2. Равномерные оценки для функций концентрации геометрических случайных сумм

В данной части главы будут рассмотрены случайные суммы независимых случайных величин, в которых число слагаемых $N_n^\star$ имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{1+n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Как и ранее, предполагаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $N_n^\star, X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности. Снова будем использовать обозначение $S_{N_n^\star} = X_1 + \ldots + X_{N_n^\star}$. При $N_n^\star = 0$ положим $S_{N_n^\star} = 0$. Легко заметить, что $\mathsf{E}N_n^\star = n$, $DS_{N_n^\star} = n\sigma^2$. Также заметим, что для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \mathsf{P}(N_\lambda = k)\exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}\Big\}d\lambda,$$

где N_λ — пуассоновская случайная величина с параметром λ. Это означает, что для $N_n^\star$ представление (56) справедливо с Λ_n, имеющим экспоненциальное распределение с параметром $\frac{1}{n}$.

В дальнейшем будем использовать традиционные обозначения

$$\Gamma(\alpha, z) \equiv \int\limits_z^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy, \quad \gamma(\alpha, z) \equiv \int\limits_0^z y^{\alpha-1}e^{-y}dy \quad \text{и} \quad \Gamma(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha, 0) = \gamma(\alpha, \infty)$$

для верхней неполной гамма-функции, нижней неполной гамма-функции и гамма-функции соответственно, где $\alpha > 0$, $z > 0$.

В рассматриваемом случае

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \Phi_0\bigg(x\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\bigg)\exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}\Big\}d\lambda = \int\limits_0^\infty \Phi_0\Big(\frac{x}{\sqrt{y}}\Big)e^{-y}dy = 1 - e^{\sqrt{2}x}, \quad x \geqslant 0$$

(см., например, лемму 12.7.1 в [64]), т.е. аппроксимирующим является экспоненциальное распределение с парметром $\sqrt{2}$.

В то же время, функция $G_n(x)$ (см. (57)) имеет форму

$$G_n(x) = 1 - \exp\Big\{-\frac{x^2}{n\sigma^2}\Big\} + \frac{|x|}{n\sigma}\int\limits_{x^2/\sigma^2}^\infty \frac{e^{-\lambda/n}}{\sqrt{\lambda}}d\lambda = \gamma\Big(1, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma\sqrt{n}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big).$$

Таким образом, из теоремы 27 получаем следующий результат.

Следствие 15. *Пусть $N_n^\star$ имеет геометрическое распределение. Тогда*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_{N_n^\star}}(z)-1+\exp\Big\{-\frac{z}{2\sigma\sqrt{n}}\Big\}\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{7.4184}{\sigma^2}\Big\{\mathsf{E}\Big[X_1^2\gamma\Big(1,\frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big]+\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathsf{E}\Big[|X_1|^3\Gamma\Big(\frac{1}{2},\frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big]\Big\}.$$

3.3.3. Равномерные оценки для функций концентрации отрицательных биномиальных случайных сумм

Пусть $r>0$ — произвольное число. Предположим, что в представлении (56) Λ_n — случайная величина, имеющая гамма-распределение с плотностью

$$p(\lambda)=\frac{\lambda^{r-1}e^{-\lambda/n}}{n^r\Gamma(r)},\ \ \lambda>0.$$

Тогда случайная величина $N_n^\star$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и $\frac{1}{n+1}$

$$\mathsf{P}(N_n^\star=k)=\frac{1}{n^r\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\lambda^{r-1}e^{-\lambda/n}d\lambda=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\,k!}\Big(\frac{1}{1+n}\Big)^r\Big(\frac{n}{1+n}\Big)^k,$$
$$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Пусть

$$\mathcal{V}_r^+(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty\Phi_0\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big)\lambda^{r-1}e^{-\lambda}d\lambda,\quad x\in\mathbb{R},$$

ялвяется функцией распределения модуля случайной величины, имеющей симметричное дисперсионное гамма-распределение с параметром формы r. В рассматриваемом случае $\mathsf{E}N_n^\star=\mathsf{E}\Lambda_n=nr$, таким образом $\mathsf{D}S_{N_n^\star}=nr\sigma^2$ и для любого $x\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_0^\infty\Phi_0\Big(x\sqrt{\frac{\mathsf{E}\Lambda_n}{\lambda}}\Big)d\mathsf{P}(\Lambda_n<\lambda)=\frac{1}{n^r\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty\Phi_0\Big(x\sqrt{\frac{nr}{\lambda}}\Big)\lambda^{r-1}e^{-\lambda/n}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty\Phi_0\Big(\frac{x\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda}}\Big)\lambda^{r-1}e^{-\lambda}d\lambda\equiv\mathcal{V}_r^+(x\sqrt{r}).$$

Функция $G_n(x)$ (57) имеет вид

$$G_n(x) = \frac{1}{n^r\Gamma(r)} \int\limits_0^{x^2/\sigma^2} \lambda^{r-1}e^{-\lambda/n}d\lambda + \frac{|x|}{\sigma n^r\Gamma(r)} \int\limits_{x^2/\sigma^2}^{\infty} \lambda^{r-3/2}e^{-\lambda/n}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)}\Big[\gamma\Big(r, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma\sqrt{n}}\Gamma\Big(r-\frac{1}{2}, \frac{x^2}{n\sigma^2}\Big)\Big].$$

По теореме 27 получаем следующий результат.

Следствие 16. *Пусть $N_n^\star$ имеет отрицательное биномиальное рспределение. Тогда*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_{N_n^\star}}(z) - \mathcal{V}_r^+\Big(\frac{z}{2\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{7.4184}{\sigma^2\Gamma(r)}\Big\{\mathsf{E}\Big[X_1^2\gamma\Big(r, \frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big] + \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathsf{E}\Big[|X_1|^3\Gamma\Big(r-\frac{1}{2}, \frac{X_1^2}{n\sigma^2}\Big)\Big]\Big\}.$$

3.3.4. Равномерные оценки для функций концентрации зихелевых случайных сумм

Пусть $r > 1$ — некоторое произвольное число. Предположим, что в представлении (56) Λ_n — случайная величина, имеющая обратное гамма-распределение с параметрами $\frac{r}{2}$ и $\frac{n}{2}$ и плотностью

$$p(\lambda) = \frac{n^{r/2}\lambda^{-r/2-1}}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\exp\Big\{-\frac{n}{2\lambda}\Big\}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда случайная величина $N_n^\star$ имеет пуассон-обратное гамма-распределение

$$\mathsf{P}(N_n^\star = k) = \frac{n^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\lambda^{-r/2-1}\exp\Big\{-\frac{n}{2\lambda}\Big\}d\lambda, \qquad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

которое является частным случаем распределения Зихеля. Заметим, что

$$\mathsf{E}\Lambda_n = \frac{n}{r-2}$$

и

$$\mathsf{D}S_n^\star = \frac{n\sigma^2}{r-2}.$$

Будем проводить нормировку случайной суммы не среднеквадратичным отклонением, а его асимптотическим эквивалентом $\sigma\sqrt{n/r}$.

Как известно, если Λ_n имеет обратное гамма-распределение с параметрами $\frac{r}{2}$ и $\frac{n}{2}$, то Λ_n^{-1} имеет гамма-распределение с теми же параметрами. Таким образом, получим

$$\frac{n^{r/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty \Phi_0\Big(x\sqrt{\frac{n}{r\lambda}}\Big)\lambda^{-r/2-1}\exp\Big\{-\frac{n}{2\lambda}\Big\}d\lambda =$$

$$= \frac{n^{r/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty \Phi_0\Big(x\sqrt{\frac{n\lambda}{r}}\Big)\lambda^{r/2-1}\exp\Big\{-\frac{n\lambda}{2}\Big\}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^\infty \Phi\Big(x\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\Big)\lambda^{r/2-1}e^{-\lambda/2}d\lambda = \mathcal{T}_r^+(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

где $\mathcal{T}_r^+(x)$ — функция распределения модуля случайной величины, имеющей распределение Стьюдента параметром r (с r «степенями свободы»), соответствующая плотности

$$t_r^+(x) = \frac{2\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\sqrt{\pi r}\Gamma(\frac{r}{2})}\Big(1+\frac{x^2}{r}\Big)^{-(r+1)/2}, \quad x \geqslant 0,$$

см., напрмер, [67].

В данном случае функция $G_n(x)$ (57) принимает вид

$$G_n(x) = \mathsf{P}\Big(\Lambda_n^{-1} > \frac{\sigma^2}{x^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma}\mathsf{E}\sqrt{\Lambda_n^{-1}}\mathbb{I}\Big(\Lambda_n^{-1} \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}\Big) =$$

$$= \frac{n^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_{\sigma^2/x^2}^\infty \lambda^{r/2-1}e^{-n\lambda/2}d\lambda + \frac{|x|n^{r/2}}{2^{r/2}\sigma\Gamma(\frac{r}{2})}\int\limits_0^{\sigma^2/x^2}\lambda^{(r-1)/2}e^{-n\lambda/2}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})}\Big[\Gamma\Big(\frac{r}{2},\frac{n\sigma^2}{2x^2}\Big) + \frac{|x|}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\gamma\Big(\frac{r+1}{2},\frac{n\sigma^2}{2x^2}\Big)\Big],$$

где $\gamma(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $\Gamma(\,\cdot\,,\cdot\,)$ нижняя и верхняя неполные гамма-функции соответственно.

Таким образом, из теоремы 23 получим результат.

Следствие 17. *Пусть $N_n^\star$ имеет пуассон-обратное гамма-распределение. Тогда*

$$\sup_{z\geqslant 0}\Big|Q_{S_{N_n^\star}}(z)-\mathcal{T}_r^+\Big(\frac{z\sqrt{r}}{2\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{7.4184}{\sigma^2\Gamma(\frac{r}{2})}\bigg\{\mathsf{E}\Big[X_1^2\Gamma\Big(\frac{r}{2},\frac{n\sigma^2}{2X_1^2}\Big)\Big]+\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\,\mathsf{E}\Big[|X_1|^3\gamma\Big(\frac{r+1}{2},\frac{n\sigma^2}{2X_1^2}\Big)\Big]\bigg\}.$$

4. Точность нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости

На протяжении данной главы будем считать, что все случайные величины определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$.

Пусть $X_1, X_2, ...$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathsf{E}X_i = 0 \text{ и } 0 < \mathsf{E}X_i^2 \equiv \sigma_i^2 < \infty, \quad i = 1, 2, ...$$

Причем

$$S_n = X_1 + ... + X_n, \quad B_n^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как говорилось ранее, нормальная аппроксимация является одной из наиболее распространенных моделей в случае, когда наблюдаемые величины хотя бы предположительно имеют аддитивную структуру. В основе такой традиции лежит ЦПТ, согласно которой распределения сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих определенным условиям, например, условию Линдеберга

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \mathsf{E}X_i^2 \mathbb{I}(|X_i| \geqslant \varepsilon B_n) = 0 \text{ для любого } \varepsilon \in (0,\infty),$$

неограниченно сближаются с нормальным законом при неограниченном увеличении числа слагаемых. На практике же мы имеем дело с конечными объемами выборок, что приводит к невозможности проверки выполнения условий, гарантирующих справедливость ЦПТ. Однако зачастую данный факт не выступает убедительным доводом для прекращения использования моделей, основанных на ЦПТ. В связи с этим задача оценки адекватности применения таких моделей в случае, когда проверка выполняемости условий невозможна, либо же заранее известен факт нарушения условий ЦПТ, является особенно актуальной.

Более того, в некоторых ситуациях, связанных с компьютерным моделированием, если распределения слагаемых в сумме принадлежат области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем меньше двух, то наблюдаемое расстояние между распределениями нормированной суммы и нормальным законом сначала убывает с ростом числа слагаемых и начинает расти только тогда, когда количество слагаемых становится достаточно большим.

Результаты, описанные в настоящей главе, были опубликованы в статьях [74] и [75].

Переопределим заново $X_1, X_2, ...$ как независимые случайные величины. Обозначим $F_j(x) = \mathsf{P}(X_j < x)$, $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Без существенного ограничения общности будем считать, что все функции распределения $F_j(x)$ непрерывны.

Индикатор множества (события) $A \in \mathfrak{A}$ обозначим $\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_A(\omega)$, $\omega \in \Omega$, и определим следующим образом

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Рассмотрим $u > 0$, такое что $0 < F(u) < 1$. Очевидно, что $X_j = X_j\mathbb{I}_{\{|X_j| \leqslant u\}} + X_j\mathbb{I}_{\{|X_j| > u\}} \equiv X_j^{\leqslant u} + X_j^{> u}$. Тогда

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j\mathbb{I}_{\{|X_j| \leqslant u\}} + \sum_{j=1}^{n} X_j\mathbb{I}_{\{|X_j| > u\}} \equiv S_n^{(\leqslant u)} + S_n^{(>u)}.$$

Если условиться считать равенство единице индикатора $\mathbb{I}_{\{|X_j| \leqslant u\}}$ «успехом», а противоположное событие — «неудачей», то число $N_n(u)$ ненулевых слагаемых в сумме $S_n^{(\leqslant u)}$ будет случайной величиной, имеющей пуассон-биномиальное распределение с параметрами n и $p_j = p_j(u) = \mathsf{P}(|X_j| \leqslant u) = F_j(u) - F_j(-u)$, $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что при неограниченном увеличении u параметры p_j стремятся к единице.

Справеделиво следующее утверждение

Лемма 21. *Пусть* $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$. *Тогда* $\mathsf{P}(AB) \geqslant \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(\overline{B})$.

Доказательство. Заметим, что $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A) + 1 - \mathsf{P}(\overline{B}) - \mathsf{P}(AB)$. Следовательно, $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(\overline{B}) + 1 - \mathsf{P}(A \cup B)$. Очевидно, что $1 - \mathsf{P}(A \cup B) \geqslant 0$, откуда следует утверждение леммы. □

Равномерное (Колмогоровское) расстояние между функциями распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ случайных величин ξ и η будем обозначать

$$\rho(F_\xi, F_\eta) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_\xi(x) - F_\eta(x)|.$$

Нормальную функцию распределения со средним $a \in \mathbb{R}$ и дисперсией $\sigma^2 > 0$, как и ранее, обозначим

$$\Phi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\Big\{ -\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2} \Big\} dz = \Phi_{0,1}\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big) = \Phi_{0,\sigma}(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 22. *Для любых $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $b \in \mathbb{R}$*

$$\rho(\Phi_{a+b,\,\sigma}, \Phi_{a,\,\sigma}) = 2\Phi_{0,\sigma}\big(\tfrac{|b|}{2}\big) - 1.$$

Доказательство. Заметим, что если $H(x)$ и $G(x)$ – дифференцируемые функции распределения, то $\rho(H,G)$ реализуется (то есть точная верхняя грань $\sup\limits_x |H(x) - G(x)|$ по x достигается) в одной из точек x, где $F'(x) = G'(x)$. Действительно,

$$\rho(H,G) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |H(x) - G(x)| = \max\Big\{ \max_x \big[H(x) - G(x)\big], \max_x \big[G(x) - H(x)\big] \Big\},$$

и экстремум каждого из выражений в фигурных скобках достигается в той точке, где производная соответствующего выражения равна нулю, что равносильно равенству производных функций распределения H и G, то есть равенству соответствующих плотностей. В рассматриваемом случае нормальных плотностей последнее условие эквивалентно тому, что

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\frac{x-a-b}{\sigma}\Big)^2 \Big\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big)^2 \Big\},$$

или $\big(x - (a+b)\big)^2 = (x-a)^2$. Решая данное уравнение, получаем $x - a = \frac{b}{2}$, откуда, с учетом соотношения $\Phi_{0,\sigma}(-|b|) = 1 - \Phi_{0,\sigma}(|b|)$, вытекает требуемое утверждение. □

Используя формулу Лагранжа, из леммы 22 легко получить известное неравенство

$$\rho(\Phi_{a+b,\,\sigma}, \Phi_{a,\,\sigma}) \leqslant \frac{|b|}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

(см., например, неравенство 3.4 в книге [5]).

Лемма 23. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины, $a_1, \ldots, a_n$ – положительные числа такие, что $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Тогда для любого $x > 0$*

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^n \xi_j\Big| \geqslant x\Big) \leqslant \sum_{j=1}^n \mathsf{P}(|\xi_j| \geqslant a_j x).$$

Если дополнительно случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, то

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^n \xi_j\Big| \geqslant x\Big) \leqslant n\mathsf{P}\big(|\xi_1| \geqslant \tfrac{x}{n}\big).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^n \xi_j\Big| \geqslant x\Big) \leqslant \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^n |\xi_j| \geqslant x\Big).$$

Из геометрических соображений вытекает, что

$$\Big\{\omega: \sum_{j=1}^{n}|\xi_j(\omega)| \geqslant x\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\omega: |\xi_1(\omega)| \geqslant a_1 x\} \bigcup \Big\{\omega: \sum_{j=2}^{n}|\xi_j(\omega)| \geqslant (1-a_1)x\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\omega: |\xi_1(\omega)| \geqslant a_1 x\} \bigcup \{\omega: |\xi_2(\omega)| \geqslant a_2 x\} \bigcup$$

$$\bigcup \Big\{\omega: \sum_{j=3}^{n}|\xi_j(\omega)| \geqslant (1-a_1-a_2)x\Big\} \subseteq \ldots$$

$$\ldots \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{\omega: |\xi_j(\omega)| \geqslant a_j x\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big| \geqslant x\Big) \leqslant \mathsf{P}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j| \geqslant x\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n}\{\omega: |\xi_j(\omega)| \geqslant a_j x\}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\mathsf{P}(|\xi_j| \geqslant a_j x).$$

$\square$

Лемма 24. *Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $n \in \mathbb{N}$. Пусть также $u > 0$ и $0 < F(u) < 1$, где $F(u)$ – функция распределения X_1. Тогда*

$$S_n^{(\leqslant u)} \stackrel{d}{=} \sum\nolimits_{j=0}^{N_n(u)} X_j^{(\leqslant u)}$$

и

$$S_n^{(>u)} \stackrel{d}{=} \sum\nolimits_{j=0}^{n-N_n(u)} X_j^{(>u)}, \tag{58}$$

где $N_n(u)$ – биномиальная случайная величина с параметрами n («количество испытаний») и $p = p(u) = \mathsf{P}(|X_1| \leqslant u) = F(u) - F(-u)$ (вероятность «успеха»). В свою очередь случаные величины $X_1^{(\leqslant u)},\ldots,X_n^{(\leqslant u)}$ независимы и имеют одинаковые функции распределения

$$F^{(\leqslant u)}(x) \equiv \mathsf{P}(X_1^{(\leqslant u)} < x) = \mathsf{P}\big(X_1\mathbb{I}_{\{|X_1|\leqslant u\}} < x \big|\, |X_1| \leqslant u\big) =$$

$$= \frac{\mathsf{P}(X_1 < x;\, |X_1| \leqslant u)}{\mathsf{P}(|X_1| \leqslant u)} = \begin{cases} 1, & x > u; \\ \dfrac{F(x) - F(-u)}{F(u) - F(-u)}, & |x| \leqslant u; \\ 0, & x < -u, \end{cases}$$

случайные величины $X_1^{(>u)},\ldots,X_n^{(>u)}$ *также независимы и имеют одинаковые функции распределения*

$$F^{(>u)}(x) \equiv \mathsf{P}(X_1^{(>u)} < x) = \mathsf{P}\big(X_1\mathbb{I}_{\{|X_1|>u\}} < x \big|\, |X_1| > u\big) =$$

$$= \frac{\mathsf{P}(X_1 < x;\, |X_1| > u)}{\mathsf{P}(|X_1| > u)} = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(-u)+1-F(u)}, & x < -u; \\ \dfrac{F(-u)}{F(-u)+1-F(u)}, & |x| \leqslant u; \\ \dfrac{F(-u)+F(x)-F(u)}{F(-u)+1-F(u)}, & x > u. \end{cases}$$

Более того, случайная величина N_n *не заивисит от* $X_1^{(\leqslant u)},\ldots,X_n^{(\leqslant u)}$ *и* $X_1^{(>u)},\ldots,X_n^{(>u)}$. *Для определенности будем считать, что если* $N_n(u) = 0$, *то* $S_n^{(\leqslant u)} = 0$, *если* $N_n(u) = n$, *то* $S_n^{(>u)} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим характеристическую функцию случайной величины $X_1\mathbb{I}_{\{|X_1|\leqslant u\}}$. Для $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathsf{E}\exp\{itX_1\mathbb{I}_{\{|X_1|\leqslant u\}}\} = 1\cdot\mathsf{P}(|X_1| > u) + \int_{-u}^{u} e^{itx}dF(x) =$$
$$= F(-u) + 1 - F(u) + \int_{-u}^{u} e^{itx}dF(x).$$

Так как $X_1,X_2,\ldots$ независимы, $X_1\mathbb{I}_{\{|X_1|\leqslant u\}},X_2\mathbb{I}_{\{|X_2|\leqslant u\}},\ldots$ также независимы. Следовательно, по формуле бинома Ньютона,

$$\mathsf{E}\exp\left\{itS_n^{(\leqslant u)}\right\} = \left[F(-u)+1-F(u)+\int_{-u}^{u} e^{itx}dF(x)\right]^n =$$

$$= \left[\big(F(-u)+1-F(u)\big) + \big(F(u)-F(-u)\big)\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF^{(\leqslant u)}(x)\right]^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\big(F(-u)+1-F(u)\big)^{n-k}\big(F(u)-F(-u)\big)^k\big(\mathsf{E}\exp\{itX_1^{(\leqslant u)}\}\big)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\big(F(-u)+1-F(u)\big)^{n-k}\big(F(u)-F(-u)\big)^k\mathsf{E}\exp\left\{it\sum_{j=1}^{k}X_j^{(\leqslant u)}\right\}.$$

По формуле полной вероятности последнее выражение равно

$$\mathsf{E}\exp\{it\sum_{j=1}^{N_n}X_j^{(\leqslant u)}\},$$

где слагаемые и количество слагаемых удовлетворяют условиям, указанным в формулировке леммы. Представление (58) доказывается аналогично. □

Лемма 25. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *– случайные величины, такие что* $\mathsf{E}|\xi_j|^\delta < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$, $j = 1, \ldots, n$. *Обозначим* $\theta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

(i) Если $0 < \delta \leqslant 1$, *то*

$$\mathsf{E}|\theta_n|^\delta \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|\xi_j|^\delta.$$

(ii) Если $1 \leqslant \delta \leqslant 2$, *случайные величины независимы* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *и* $\mathsf{E}\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, *тогда*

$$\mathsf{E}|\theta_n|^\delta \leqslant \Big(2 - \frac{1}{n}\Big) \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|\xi_j|^\delta.$$

Доказательство. Утвреждение (i) элементарно, утверждение (ii) доказано в [76]. □

4.1. Точность нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин в случае, когда ее применение некорректно

Рассмотрим оценку равномерного расстояния между распределением суммы

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j = S_n^{(\leqslant u)} + S_n^{(>u)}$$

и нормальным законом с соответствующим математическим ожиданием $a \in \mathbb{R}$ и дисперсией $\sigma > 0$, конкретный выбор которых прокомментируем ниже.

Теорема 28. *Пусть* $u > 0$ *– произвольно. Тогда для любых* $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$\rho(F_{S_n}, \Phi_{a,\sigma}) \leqslant \rho(F_{S_n^{(\leqslant u)}}, \Phi_{a,\sigma}) + \sum_{j=1}^{n} \big[F_j(-u) + 1 - F_j(u)\big]. \qquad (59)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. На основании леммы 21 имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n < x) = \mathsf{P}(S_n < x;\, |S_n^{(>u)}| \leqslant \varepsilon) + \mathsf{P}(S_n < x;\, |S_n^{(>u)}| > \varepsilon) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x - S_n^{(>u)};\, |S_n^{(>u)}| \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x - \varepsilon;\, |S_n^{(>u)}| \leqslant \varepsilon) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x - \varepsilon) - \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon). \quad (60) \end{aligned}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n < x) = \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x - S_n^{(>u)};\, |S_n^{(>u)}| \leqslant \varepsilon) + \mathsf{P}(S_n < x;\, |S_n^{(>u)}| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x + \varepsilon;\, |S_n^{(>u)}| \leqslant \varepsilon) + \mathsf{P}(S_n < x;\, |S_n^{(>u)}| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x + \varepsilon) + \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon). \quad (61) \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$|\mathsf{P}(S_n < x) - \Phi_{a,\,\sigma}(x)| = \max\big\{\mathsf{P}(S_n < x) - \Phi_{a,\,\sigma}(x), \Phi_{a,\,\sigma}(x) - \mathsf{P}(S_n < x)\big\}. \quad (62)$$

Используя (61) и лемму 22, получим

$$\mathsf{P}(S_n < x) - \Phi_{a,\,\sigma}(x) \leqslant \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon) + \big[\mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x+\varepsilon) - \Phi_{a,\,\sigma}(x+\varepsilon)\big] + \\ + \big[\Phi_{a,\,\sigma}(x+\varepsilon) - \Phi_{a,\,\sigma}(x)\big] \leqslant \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon) + \rho(F_{S_n^{(\leqslant u)}}, \Phi_{a,\,\sigma}) + \big[2\Phi_{0,\sigma}\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) - 1\big]. \quad (63)$$

Используя (60) и лемму 22, получим

$$\Phi_{a,\,\sigma}(x) - \mathsf{P}(S_n < x) \leqslant \Phi_{a,\,\sigma}(x) - \mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x-\varepsilon) + \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon) = \\ = \big[\Phi_{a,\,\sigma}(x) - \Phi_{a,\,\sigma}(x-\varepsilon)\big] - \big[\mathsf{P}(S_n^{(\leqslant u)} < x-\varepsilon) - \Phi_{a,\,\sigma}(x-\varepsilon)\big] + \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \big[2\Phi_{0,\sigma}\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) - 1\big] + \rho(F_{S_n^{(\leqslant u)}}, \Phi_{a,\,\sigma}) + \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon). \quad (64)$$

Подставив оценки (63) и (64) в (62), получим

$$\rho(F_{S_n}, \Phi_{a,\,\sigma}) \leqslant \rho(F_{S_n^{(\leqslant u)}}, \Phi_{a,\,\sigma}) + \big[2\Phi_{0,\sigma}\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) - 1\big] + \mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon). \quad (65)$$

Рассмотрим третье слагаемое в правой части (65). На основании леммы 23 по формуле полной вероятности, принимая во внимание тот факт, что $\frac{\varepsilon}{n} > 0$ и $|X_j(\omega)|\mathbb{I}_{\{|X_j(\omega)|>u\}} = 0$ для тех ω, для которых $|X_j(\omega)| \leqslant u$, $j = 1, \ldots, n$, имеем

$$\mathsf{P}(|S_n^{(>u)}| > \varepsilon) = \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^n X_j\mathbb{I}_{\{|X_j|>u\}}\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \sum_{j=1}^n \mathsf{P}\big(|X_j|\mathbb{I}_{\{|X_j|>u\}} > \tfrac{\varepsilon}{n}\big) = \\ = \sum_{j=1}^n \Big[\mathsf{P}\big(|X_j|\mathbb{I}_{\{|X_j|>u\}} > \tfrac{\varepsilon}{n}\big|\, |X_j| > u\big)\mathsf{P}(|X_j| > u) + \\ + \mathsf{P}\big(|X_j|\mathbb{I}_{\{|X_j|>u\}} > \tfrac{\varepsilon}{n}\big|\, |X_j| \leqslant u\big)\mathsf{P}(|X_j| \leqslant u)\Big] = \\ = \sum_{j=1}^n \big[1 - p_j(u)\big]\mathsf{P}\big(|X_j|\mathbb{I}_{\{|X_j|>u\}} > \tfrac{\varepsilon}{n}\big|\, |X_j| > u\big) \leqslant \sum_{j=1}^n \big[F_j(-u) + 1 - F_j(u)\big]. \quad (66)$$

Подставив (66) в (65) и устремив ε к нулю, получим требуемое. Теорема доказана. □

На практике в качестве параметров a и σ можно брать, например,

$$a = a(u) = \mathsf{E}S_n^{(\leqslant u)} = \mathsf{E}\sum_{j=1}^n X_j\mathbb{I}_{\{|\xi_j|\leqslant u\}} = \sum_{j=1}^n \mathsf{E}\big[X_j\mathbb{I}_{\{|\xi_j|\leqslant u\}}\big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j(u) \int_{-u}^{u} x dF_j(x),$$

$$\sigma^2 = \sigma^2(u) = \mathsf{D} S_n^{(\leqslant u)} = \mathsf{D} \sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{I}_{\{|\xi_j| \leqslant u\}} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}\big[X_j \mathbb{I}_{\{|\xi_j| \leqslant u\}}\big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[p_j(u) \int_{-u}^{u} x^2 dF_j(x) - \left(p_j(u) \int_{-u}^{u} x dF_j(x) \right)^2 \right].$$

При фиксированном $u > 0$ первое слагаемое в правой части (59) убывает с увеличением n, тогда как второе возрастает. При этом существует $n_0 \geqslant 1$ такое, что при $1 \leqslant n \leqslant n_0$ вся правая часть (59) убывает, а при $n \geqslant n_0$ возрастает. В случае одинаково распределенных слагаемых второе слагаемое возрастает как kn, где $k > 0$. При этом за счет выбора очень большого u можно добиться произвольной малости коэффициента k и, как следствие, очень медленного роста второго слагаемого. Поэтому параметр n_0 может принимать довольно большие значения.

Задачу определения указанного n_0 конкретизируем для частного случая. Предположим, что

$$\rho(F_{S_n^{(\leqslant u)}}, \Phi_{a,\sigma}) \leqslant C n^{-\gamma}, \tag{67}$$

где $\gamma > 0$, а коэффициент $C = C(u)$ определяется свойствами распределений слагаемых в сумме $S_n^{(\leqslant u)}$. Некоторые критерии справедливости (67) приведены, например, в [23]. Предположим также, что

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} \big[F_j(-u) + 1 - F_j(u)\big] \leqslant kn, \tag{68}$$

где $k = k(u) > 0$. Несложно убедиться, что минимум функции

$$g(x) = \frac{C}{x^\gamma} + kx$$

достигается в точке

$$x_0 = \left(\frac{C\gamma}{k}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

причем

$$\min_{x \geqslant 0} g(x) = g(x_0) = (\gamma + 1)\left(\frac{Ck^\gamma}{\gamma^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}. \tag{69}$$

Таким образом, в качестве n_0 выступает либо $[x_0]$, либо $[x_0] + 1$. При этом правую часть (69) можно рассматривать как приближенное значение наилучшей верхней оценки точности нормальной аппроксимации при справедливости условий (67) и (68).

4.2. Точность нормальной аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в случае, когда ее применение некорректно

Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Аналогично обозначениям в предыдущем параграфе определим $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x)$, $x \in \mathbb{R}$. Без существенного ограничения общности будем считать, что функция распределения $F(x)$ непрерывна.

Рассмотрим верхнюю границу равномерного расстояния между распределениями нормированной суммы

$$S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

и нормальным законом распределения с некоторым математическим ожиданием $a \in \mathbb{R}$ и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Выбор конкретных значений a и σ^2 будет рассмотрен далее.

Из сказанного выше следует, что

$$S_n^* \stackrel{d}{=} \frac{S_n^{(\leqslant u)}}{\sqrt{n}} + \frac{S_n^{(>u)}}{\sqrt{n}}.$$

Для удобства будем использовать следующие обозначения:

$$\zeta_n = \frac{S_n^{(\leqslant u)}}{\sqrt{n}}, \quad \eta_n = \frac{S_n^{(>u)}}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 29. *Пусть $u > 0$ произвольно. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.*

$$\rho(F_{S_n^*}, \Phi_{a,\sigma}) = \rho(F_{\zeta_n+\eta_n}, \Phi_{a,\sigma}) \leqslant \rho(F_{\zeta_n}, \Phi_{a,\sigma}) + n\big(F(-u) + 1 - F(u)\big). \qquad (70)$$

Доказательство. Цепочка рассуждений, аналогичная указанной в теореме 28, приводит к аналогу неравенства (65)

$$\rho(F_{\zeta_n+\eta_n}, \Phi_{a,\sigma}) \leqslant \rho(F_{\zeta_n}, \Phi_{a,\sigma}) + \left[2\Phi_{0,\sigma}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) - 1\right] + \mathsf{P}(|\eta_n| > \varepsilon), \qquad (71)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Чтобы оценить последнее слагаемое в правой части (71) будем использовать представление (58) для $S_n^{(>u)}$. Беря во внимание то, что $\sum_{j=0}^{0} = 0$, по формуле полной вероятности получим

$$\mathsf{P}(|\eta_n| > \varepsilon) = \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n-N_n(u)} X_j^{(>u)}\Big| > \varepsilon\sqrt{n}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k\big(F(-u)+1-F(u)\big)^k\big(F(u)-F(-u)\big)^{n-k}\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{k} X_j^{(>u)}\Big| > \varepsilon\sqrt{n}\Big) \quad (72)$$

Оценивая вероятность в последнем выражении по лемме 23, учитывая (72), получим

$$\mathsf{P}(|\eta_n| > \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_n^k\big(F(-u)+1-F(u)\big)^k\big(F(u)-F(-u)\big)^{n-k}k\mathsf{P}\big(|X_j^{(>u)}| > \tfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{k}\big) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\big(|X_j^{(>u)}| > \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big)\cdot\sum_{k=1}^{n} C_n^k\big(F(-u)+1-F(u)\big)^k\big(F(u)-F(-u)\big)^{n-k}k =$$

$$= n\big(F(-u)+1-F(u)\big)\mathsf{P}\big(|X_j^{(>u)}| > \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big).$$

Подставляя данную оценку в (71), получим

$$\rho(F_{\zeta_n+\eta_n}, \Phi_{a,\sigma}) \leqslant \rho(F_{\zeta_n}, \Phi_{a,\sigma}) + \big[2\Phi_{0,\sigma}\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) - 1\big] +$$
$$+ n\big(F(-u)+1-F(u)\big)\mathsf{P}\big(|X_j^{(>u)}| > \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big). \quad (73)$$

В (73) устремим $\varepsilon \to 0$, что даст утверждение теоремы. $\square$

На практике значения параметров a и σ можно выбрать по следующим соображениям. Рассматривая характеристические функции, легко проверить, что

$$S_n^{(\leqslant u)} \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{X}_j^{(\leqslant u)},$$

где $\widetilde{X}_1^{(\leqslant u)}, \ldots, \widetilde{X}_n^{(\leqslant u)}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\widetilde{X}_j^{(\leqslant u)} = \begin{cases} X_j^{(\leqslant u)} & \text{с вреотяностью } F(u) - F(-u); \\ 0 & \text{с вероятностью } F(-u) + 1 - F(u). \end{cases}$$

Тогда согласно лемме 24 параметр a может быть определен как

$$a = a(u) = n\mathsf{E}\widetilde{X}_1^{(\leqslant u)} = n[F(u) - F(-u)]\mathsf{E}X_1^{(\leqslant u)},$$

и параметр σ^2 может быть определен как

$$\sigma^2 = \sigma^2(u) = \mathsf{D}\widetilde{X}_1^{(\leqslant u)} = [F(u) - F(-u)]\mathsf{D}X_1^{(\leqslant u)} + [F(-u) + 1 - F(u)]\big(\mathsf{E}X_1^{(\leqslant u)}\big)^2.$$

При этих значениях a и σ первый член в правой части (70) будет стремиться к нулю по центральной предельной теореме при $n \to \infty$, и может быть оценен, например, неравенством Берри–Эссеена для биномиальных случайных сумм, см. [77, 78].

Что касается второго слагаемого в правой части (70), то при больших u, $p = F(u) - F(-u)$ близких к единице, и умеренных (но достаточно больших) n член η_n mможет быть малым из-за того, что сумма $S_n^{(>u)}$ содержит очень мало слагаемых. Более того, в случае легких хвостов, положив $u = u_n$ так, чтобы $n[F(-u) + 1 - F(u_n)] \to 0$ при $n \to \infty$, можно убедиться, что правая часть (70) может быть сделана сколь угодно малой путем выбора сколь угодно большого n так, что предельное распределение для нормированной суммы S_n^* будет нормальным.

При некоторых дополнительных условиях, за счет введения дополнительного параметра, зависимость второго члена оценки, приведенной в теореме 29, от n может быть улучшена.

Для $c \in (0,2]$ введем обозначение: $h(c) = \mathbb{I}_{(1,2]}(c)$.

Теорема 30. *Предположим, что функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \in (0,2)$. Если, дополнительно, $\alpha \geqslant 1$, то дополнительно предположим, что $F(x)$ симметрична (что означает, $F(-x) = 1 - F(x)$ для $x > 0$). Тогда для любых $u > 0$ $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,\alpha)$ имеем*

$$\rho(F_{\zeta_n+\eta_n}, \Phi_{a,\sigma}) \leqslant \rho(F_{\zeta_n}, \Phi_{a,\sigma}) + \\ + \big[2\Phi_{0,\sigma}\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) - 1\big] + 2^{h(\delta)}\varepsilon^{-\delta}n^{1-\delta/2}\big(F(-u) + 1 - F(u)\big)\mathsf{E}\big|X_1^{(>u)}\big|^\delta. \quad (74)$$

Доказательство. Отправной точкой доказательства является неравенство (71). В соответствии с результатами [79] и [80], в рассматриваемом случае $\mathsf{E}|X_1|^\delta < \infty$ для любого $\delta \in (0,\alpha)$, а значит, $\mathsf{E}|X_1^{(>u)}|^\delta < \infty$. Более того, если $\alpha > 1$, то математическое ожидание X_1 существует и из-за предположения, что в этом случае распределение X_1 симметрично, $\mathsf{E}X_1 = 0$. Поэтому в силу леммы 24, неравенства Маркова и леммы 25, продолжая (72), получаем

$$\mathsf{P}(|\eta_n| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\delta n^{\delta/2}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(F(-u)+1-F(u)\big)^k \big(F(u)-F(-u)\big)^{n-k} \mathsf{E}\Big|\sum_{j=0}^{k} X_j^{(>u)}\Big|^\delta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{h(\delta)}\mathsf{E}\big|X_1^{(>u)}\big|^{\delta}}{\varepsilon^{\delta}n^{\delta/2}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k k\big(F(-u)+1-F(u)\big)^k\big(F(u)-F(-u)\big)^{n-k} =$$

$$= 2^{h(\delta)}\varepsilon^{-\delta}n^{1-\delta/2}\big(F(-u)+1-F(u)\big)\mathsf{E}\big|X_1^{(>u)}\big|^{\delta}.$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в (74) степень n меньше, чем в (70). Однако в (74) появился дополнительный параметр ε. Второе слагаемое в правой части (74) можно сделать сколь угодно малым с помощью соответствующего выбора ε. При фиксированных n и ε третье слагаемое в правой части (74) может быть сделано сколь угодно малым путем выбора достаточно большого значения u.

Фактически теоремы 29 и 30 представляют собой простые варианты так называемой пред-предельной теоремы, см. [81].

Рассмотрим задачу определения такого n_0, что при росте n от 1 до n_0 расстояние $\rho(F_{\zeta_n+\eta_n},\Phi_{a,\sigma})$ убывает, а для $n > n_0$ это расстояние увеличивается. Первое слагаемое в правой части (70) с $a = a(u)$ и $\sigma^2 = \sigma^2(u)$ оценивается неравенством Берри–Эссеена с некоторым $\gamma \in (0,1]$

$$\rho(F_{\zeta_n},\Phi_{a(u),\sigma(u)}) \leqslant \frac{C(\gamma)\widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)}}{n^{\gamma/2}}, \tag{75}$$

где $\widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)}$ – Ляпуновская дробь порядка $2+\gamma$,

$$\widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)} = \frac{\mathsf{E}\big|\widetilde{X}_1^{(\leqslant u)} - \mathsf{E}\widetilde{X}_1^{(\leqslant u)}\big|^{2+\gamma}}{\big(\mathsf{D}\widetilde{X}_1^{(\leqslant u)}\big)^{1+\gamma/2}},$$

$C(\gamma) > 0$ – абсолютная константа, $C(\gamma) \leqslant 0.4690$ [73]. Легко проверить, что если $c > 0$, $d > 0$, то

$$\arg\min_{z>0}\Big(\frac{c}{z^{\gamma/2}} + dz\Big) = \Big(\frac{\gamma c}{2d}\Big)^{\frac{2}{2+\gamma}}.$$

Положив $z = n$, $c = C(\gamma)\widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)}$, $d = F(-u)+1-F(u)$, мы видим, что минимум верхней границы для $\rho(F_{\zeta_n+\eta_n},\Phi_{a(u),\sigma(u)})$ достигается или на n_γ, которое является целой частью

$$n_\gamma = \left[\frac{\gamma C(\gamma)\widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)}}{2\big(F(-u)+1-F(u)\big)}\right]^{\frac{2}{2+\gamma}},$$

или на $n_\gamma + 1$.

Подставляя (75) с $n = n_\gamma$ в (70), получим следующий результат.

Теорема 31. *Для любых* $u > 0$, $\gamma \in (0,1]$

$$\min_n \rho(F_{\zeta_n+\eta_n}, \Phi_{a(u),\sigma(u)}) \leqslant (2+\gamma) \cdot \left[\frac{C(\gamma)\widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)}}{2^{\gamma/2}\gamma}\right]^{\frac{2}{2+\gamma}} \cdot \big(F(-u) + 1 - F(u)\big)^{\frac{\gamma}{2+\gamma}}.$$

Если $\mathsf{E}|X_1|^{2+\gamma} < \infty$, то

$$\lim_{u\to\infty} \widetilde{L}_{2+\gamma}^{(\leqslant u)} = L_{2+\gamma} \equiv \frac{\mathsf{E}|X_1 - \mathsf{E}X_1|^{2+\gamma}}{(\mathsf{D}X_1)^{1+\gamma/2}} < \infty$$

Таким образом, согласно теореме 31

$$\lim_{u\to\infty} \min_n \rho(F_{\zeta_n+\eta_n}, \Phi_{a(u),\sigma(u)}) = 0.$$

В случае $\gamma = 0$, вместо (75) оценки, полученные в части 2 для пуассон-биномиальных случайных сумм, можно использовать для получения результатов, аналогичных теореме 31.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Уточнены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ для сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях. Показано, что данные оценки справедливы с константами:
   1.1. $C \leqslant 1.8627$ в общем случае;
   1.2. $C \leqslant 1.8546$ в случае независимых одинаково распределенных случайных величин;
   1.3. $C \leqslant 1.5769$ в случае независимых симметричных случайных величин;
   1.4. $C \leqslant 1.5645$ в случае независимых симметричных одинаково распределенных случайных величин.
2. Получены равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм:
   2.1. пуассон-биномиальных случайных сумм;
   2.2. биномиальных случайных сумм;
   2.3. пуассоновских случайных сумм.
3. Получены равномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к соответсвующим предельным законам при ослабленных моментных условиях:
   3.1. общий случай;
   3.2. случай сходимости распределений геометрических случайных сумм к распределению Лапласа;
   3.3. случай сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм к дисперсионному гамма-распределению;
   3.4. случай сходимости распределений зихелевых случайных сумм к распределению Стьюдента.
4. Уточнены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что константы в данных оценках не превосходят 37.9.
5. Получены неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ при ослабленных моментных условиях для некоторых случайных сумм:

   5.1. биномиальных случайных сумм;
   5.2. пуассоновских случайных сумм.
6. Получены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации сумм независимых случайных величин функцией распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях.
7. Получены равномерные оценки точности аппроксимации функций концентрации некоторых случайных сумм функцией распределения полунормального закона при ослабленных моментных условиях:
   7.1. пуассон-биномиальных случайных сумм;
   7.2. биномиальных случайных сумм;
   7.3. пуассоновских случайных сумм.
8. Получены равномерные оценки скорости сходимости функций концентрации смешанных пуассоновских случайных сумм к соответсвующим предельным законам при ослабленных моментных условиях:
   8.1. общий случай;
   8.2. случай сходимости функций концентрации геометрических случайных сумм к экспоненциальному распределению;
   8.3. случай сходимости функций концентрации отрицательных биномиальных случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей симметричное дисперсионное гамма-распределение;
   8.4. случай сходимости функций концентрации зихелевых случайных сумм к функции распределения модуля случайной величины, имеющей распределение Стьюдента.
9. Рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда данная аппроксимация, вообще говоря, не применима.

Полученные результаты могут послужить основой для дальнейших исследований в области предельных теорем теории вероятностей, а также могут использоваться при решении практических задач.

В заключение соискатель выражает благодарность и большую признательность научному руководителю В. Ю. Королеву за постановку задач, поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

Список терминов

ЦПТ : центральная предельная теорема;

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$: множества всех действительных и натуральных чисел соответственно;

$\Phi(x)$: функция распределения стандартного нормального закона;

$\Phi_0(x)$: функция распределения полунормального закона;

$\Phi_{a,\,\sigma}$: функция распределения нормального закона с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2;

$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$: вероятностное простнство;

$\mathsf{P}(A)$: вероятность события A;

$F_X(x),\ x \in \mathbb{R}$: функция распределения случайной величины X;

$\varphi_X(t),\ t \in \mathbb{R}$: харктеристическая функция случайной величины X;

$\mathsf{E}X$: математическое ожидание случайной величины X;

$\mathsf{D}X$: дисперсия случайной величины X;

$Q_X(z)$: функция концентрации случайной величины X;

$\mathbb{I}(A) \equiv \mathbb{I}_A \equiv \mathbb{I}_A(\omega)$: индикаторная функция события A;

$\square$: конец доказательства.

Список литературы

[1] A.Bulinski, N.Kryzhanovskaya. Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization // Probab. and Math. Statist. — 2007. — V. 26. — P. 29-49.

[2] Ляпунов А. М. Новая форма теоремы о пределе вероятности // Записки Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия. — 1901. — Т. 12, № 5. — С. 1–24.

[3] Шевцова И. Г. Оптимизация структуры моментных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин: дис. ...д-ра физ.-мат. наук: 01.01.05. — Москва, 2013.

[4] Katz M. Note on the Berry–Esseen theorem // Annals of Math. Statist. — 1963. — Vol. 39. — № 4. — P. 1348–1349.

[5] Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. — Москва: Наука, 1972. — 416 с.

[6] Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — Т. 341. — С. 142–146.

[7] Розовский Л. В. Неравномерная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — Т. 351. — С. 238–241.

[8] Cramér H. On the Mathematical Theory of Risk // Skandia Jubilee Volume. — Stockholm Centraltryckeriet. — 1930.
Reprinted in: Cramer H. // Collective Works. — Berlin. — Springer-Verlag. — 1994. — P. 601–607.

[9] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach // Journal of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7. — P. 229–263.

[10] Kalashnikov V. V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. — 1997.

[11] Петров В. В. Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 160. — Вып.5. — С. 1013–1015.

[12] Осипов Л. В. Уточнение теоремы Линдеберга // Теория вероятностей и ее применения. — 1966. — Т. 11. — Вып. 2. — С. 39–342.

[13] Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Москва: Наука, 1987.

[14] Feller W. On the Berry–Esseen theorem // Z. Wahrsch. — Verw. Geb. — 1968. — Bd. 10. — S. 261–268.

[15] Paditz L. Bemerkungen zu einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List». — 1980. — Bd. 27. — № 4. — S. 829–837.

[16] Paditz L. On error-estimates in the central limit theorem for generalized linear discounting // Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statistics. — 1984. — Bd. 15. — № 4. — S. 601–610.

[17] Paditz L. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List». — 1986. — Vol. 33. — № 2. — P. 399–404.

[18] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением — М.: Наука, 1982.

[19] Barbour A. D., Hall P. Stein's method and the Berry – Esseen theorem // Australian Journal of Statisticsю — 1984. — Vol. 26. — P. 8–15.

[20] Chen L. H. Y., Shao Q. M. A non-uniform Berry–Esseen bound via Stein's method // Probability Theory and Related Fields. — 2001. — Vol. — 120. — P. 236–254.

[21] Korolev V., Popov S. On the universal constant in the Katz–Petrov and Osipov inequalities // Discussiones Mathematicae. Probability and Statisticsю — 2011. — Vol. 31. — P. 29–39.

[22] Королев В. Ю., Попов С. В. Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго // Теория вероятностей и ее применения. — 2011. — Т. 56. — Вып. 4. — С. 797–805.

[23] Королев В. Ю., Попов С. В. Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при ослабленных моментных условиях // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 445. — Вып. 3. — С. 265–270.

[24] Zolotarev V. M. Modern Theory of Summation of Random Variables. Utrecht: VSP, 1997.

[25] Cramér H. Sur un nouveau théorèm-limite de la théorie des probabilités. // Actualités scientifiques et industrielles. — Paris. — 1938. — № 736.

[26] Esseen C. G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace – Gaussian law // Acta Math. — 1945. — Vol. 77. — P. 1–125.

[27] Мешалкин Л. Д., Рогозин Б. А. Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме — Сборник «Предельные теоремы теории вероятностей». — Ташкент: изд-во АН УзССР, 1963. — 49–55 с.

[28] Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. — 1965. — Т. 10. — Вып. 2. — С. 231–254.

[29] Бикялис А. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. – Литовский математический сборник. — 1966. — Т. 6. — Вып. 3. — С. 323–34.

[30] Бикялис А. О точности аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин нормальным распредедением// Литовский математический сборник. — 1971. — Т. 11. — Вып. 2. — С. 237–240.

[31] Michel R. On the accuracy of nonuniform Gaussian approximation to the distribution functions of sums of independent and identically distributed random variables // Z. Wahrsch. verw. Geb. — 1976. — Bd. 35. — № 4. — P. 337–347.

[32] Nakata T. A nonuniform bound on convergence to normality for independent random variables // Advances in Applied Probability. — 1977. — Vol. 11. — № 2. — P. 285–286.

[33] Осипов Л. В., Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме. – Теория вероятностей и ее применения. — 1967. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 322–329.

[34] Heyde C. C. A nonuniform bound on convergence to normality // Ann. Probab. — 1975. — Vol. 3. — № 5. — P. 903–907.

[35] Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. der TU Dresden. — 1976. — Vol. 25. — P. 1169–1177.

[36] Paditz L. Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung: Dissertation A. Technische Universität Dresden. — Dresden, 1977.

[37] Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente // Math. Nachr. — 1978. — Vol. 82. — P. 131–156.

[38] Paditz L. Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. der TU Dresden. — 1979. — Vol. 28. — № 5. — P. 1197–1200.

[39] Michel R. On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem // Z. Wahrsch. verw. Geb. — 1981. — Bd. 55. — P. 109–117.

[40] Tysiak W. Gleichmäβige und nicht-gleichmäβige Berry–Esseen–Abschätzungen: Dissertation. — Wuppertal, 1983.

[41] Падитц Л., Мирахмедов Ш. А. Письмо в редакцию (Замечание к оценке абсолютной постоянной в неравномерной оценке скорости сходимости в ц.п.т.) // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. — 1986. — Вып. 3. — С. 80.

[42] Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятностей и ее применения. — 2012. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 62–97.

[43] Григорьева М. Е., Попов С. В. О верхней оценке абсолютной постоянной в неравномерном аналоге неравенства Берри–Эссеена для неодинаково распределённых слагаемых // ДАН. — 2012. — Т. 445. — № 4. — С. 380–382.

[44] Григорьева М. Е., Попов С. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Системы и средства информатики. — 2012. — Т. 22. — № 1. — С. 180–204.

[45] Петров В. В. Одна предельная теорема для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1979. — Т. 85. — С. 188–192.

[46] Neammanee K. On the constant in the nonuniform version of the Berry-Esseen theorem // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2005. — Vol. 12. — P. 1951–1967.

[47] Thongtha P., Neammanee K. Refinement of the constants in the non-uniform version of the Berry–Esseen theorem // Thai Journal of Mathematics. — 2007. — Vol. 5. — P. 1–13.

[48] Neammanee K., Thongtha P. Improvement of the non-uniform version of the Berry–Esseen inequality via Paditz–Shiganov theorems // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 8. — Iss. 4. — Art. 92.

[49] Попов С. В. Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме при ослабленных моментных условиях: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. — Москва, 2011.

[50] Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятностей и ее применения. — 2012. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 62–97.

[51] Lévy P. Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires. – Paris: Gauthier-Villars, 1937.

[52] Бенинг В. Е., Галиева Н. К., Королев В. Ю. Об оценках функций концентрации регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема // Информатика и ее применения. — 2013. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 116–123.

[53] Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Оценки точности нормального приближения для распределений случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь. — 2015. — Вып. 26. — С. 106–133.

[54] Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Об абсолютной константе в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме при отсутствии моментов порядков, больших второго // Вестник Карагандинского университета. — 2015. — Т. 78. — № 2. — С. 48–56.

[55] Korolev V., Dorofeeva A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment conditions // Lithuanian Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 57. — № 1. — P. 38–58.

[56] Hoeffding W. The extrema of the expected value of a function of independent random variables // Ann. Math. Statist. — 1948. — Vol. 19. — P. 239–325.

[57] Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986. — 415 с.

[58] Шевцова И. Г. Об абсолютных константах в неравенстве Берри–Эссеена и его структурных и неравномерных уточнениях // Информатика и ее применения. — 2013. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 124–125.

[59] Sunklodas J. K. On the normal approximation of a binomial random sum // Lithuanian Mathematical Journal. — 2014. — Vol. 54. — № 3.

[60] Korolev V. Yu., Shevtsova I. G. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // Scandinavian Actuarial Journal. — 2012. — Vol. 2012. — Iss. 2. — P. 81–105.

[61] Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений // Теория вероятностей и ее применения. — 2013. — Т. 58. — Вып. 1. — С. 152–176.

[62] Прохоров Ю. В. Асимптотическое поведение биномиального распределения // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 8. — С. 135–142.

[63] Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989.

[64] Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.

[65] Sichel H. S. On a family of discrete distributions particular suited to represent long tailed frequency data, in N. F. Laubscher (Ed.). Proceedings of the 3rd Symposium on Mathematical Statisticsr. year, Pretoria: CSIR, 1971.

[66] Willmot G. E. On recursive evaluation of mixed poisson probabilities and related quantities // Scandinavian Actuarial Journal. — 1993. — С. 114–133.

[67] Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. — 2004. — Т. 49. — Вып. 3. — С. 417–435.

[68] Попов С. В. Уточнение неравномерных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при существовании моментов не выше второго // Информатика и ее применения. — 2012. — Т. 6. — Вып. 1. — С. 7–11.

[69] Королев В. Ю., Дорофеева А. В. О неравномерных оценках точности нормальной аппроксимации для распределений некоторых случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН. — Москва. — 2018. — Т. 12. — № 4. — С. 86–91.

[70] Дорофеева А. В. Неравенства типа Каца–Петрова для некоторых случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь.— 2018. — Вып. 28. — С. 66–75.

[71] Дорофеева А. В. О неравенствах типа Каца – Петрова – Розовского для некоторых случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. Сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. — Пермь. — 2019. — Вып. 29. — С. 11–18.

[72] Королев В. Ю., Дорофеева А. В. Оценки функций концентрации случайных сумм при ослабленных моментных условиях // Теория вероятностей и ее применения. — Москва. — 2017. — Т. 62. — № 1. — С. 104–121.

Версия на английском языке: Korolev V., Dorofeeva A. Bounds for the concentration functions of random sums under relaxed moment conditions //

Theory of Probability and its Applications. — 2018. — Vol. 62. — № 1. — P. 84–97.

[73] Шевцова И. Г. Об абсолютных константах в неравенствах типа Берри-Эссеена // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 456. — Вып. 6. — С. 650–654.

[74] Королев В. Ю., Дорофеева А. В. О точности нормальной аппроксимации при отсутствии нормальной сходимости // Информатика и ее применения. — Москва. — 2021. — Т. 15. — № 1. — С. 116–121.

[75] Dorofeeva A., Korolev V., Zeifman A. Bounds for the accuracy of invalid normal approximation // Colloquium Mathematicum. — 2022. — Vol 169. — P. 243–253.

[76] von Bahr B., Esseen C.-G. Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables, $1 \leqslant r \leqslant 2$ // Annals of Mathematical Statistics. — 1965. — Vol 36. — № 1. — P. 299–303.

[77] Korolev V. Yu., Shevtsova I. G. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // Scandinavian Actuarial Journal. — 2012. — № 2. P. 81–105.

[78] Korolev V. Yu., Dorofeeva A. V. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment conditions // Lithuanian Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 57. — № 1. — P. 38–58.

[79] Tucker H. On moments of distribution functions attracted to stable laws // Houston Journal of Mathematics. — 1975. — Vol 1. — № 1. — P. 149–15

[80] Nagaev S. V. Some limit theorems for homogeneous Markov chains // Theory of Probability and its Applications. — 1957. — Vol. 2. —№ 4. — P. 378–406.

[81] Klebanov L. B., Rachev S. T., Szekely G. J. Pre-limit theorems and their applications // Acta Applicandae Mathematicae. — 1999. — Vol 58. — P. 159–174.