

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Галиев Рамзиль Раушанович

**Оптимизация режима затягивания частоты
полупроводникового лазера высокочастотным
микрорезонатором**

Специальность 1.3.2
«Приборы и методы экспериментальной физики»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2022



Работа выполнена на кафедре физики колебаний физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель — *Биленко Игорь Антонович*
д.ф.-м.н., доцент

Официальные оппоненты — *Левин Геннадий Генрихович,*
д.т.н., профессор,
ФГУП «ВНИИОФИ»,
Зам. Нач. отделения «Голографии,
оптической томографии,
нанотехнологий и наноматериалов»

Наний Олег Евгеньевич,
д.ф.-м.н., профессор,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
профессор кафедры оптики, спектроскопии
и физики наносистем физического факультета

Хатырев Николай Петрович
к.т.н., доцент,
ФГУП «ВНИИФТРИ»,
Начальник научно-технического центра
«Оптические измерения» Главного
метрологического центра Государственной
службы времени и частоты

Защита диссертации состоится «10-го» ноября 2022 г. в 16-30 на заседании диссертационного совета МГУ.013.7 (МГУ.01.12) Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр.2, Физический факультет МГУ, ауд. ____.

E-mail: igorkartashov@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/496099422/>

Автореферат разослан «__» _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н.



И.Н. Карташов

Актуальность работы. Затыгивание - это динамическое явление, представляющее собой стабилизацию частоты излучения генератора высокoдобротным пассивным резонатором, позволяющим осуществлять частотно-фильтрованную когерентную обратную связь с резонатором генератора. Например, затыгивание частоты полупроводникового лазера на микрорезонатор с высокой добротностью может привести к существенному подавлению фазовых шумов и соответствующему уменьшению ширины линии генерации лазера на несколько порядков. Это явление широко изучалось в экспериментах и были получены впечатляющие результаты, в том числе и уменьшение ширины линии менее 1 Гц, но детальной теоретической модели, позволяющей как широко использовать эту методику в различных приложениях, так и оптимизировать ее для дальнейшего улучшения характеристик источников лазерного излучения, не существует. В данной работе разработана такая теория, а также детально проанализированы возможные режимы, реализующиеся при затыгивании одночастотных и многочастотных лазеров высокoдобротными микрорезонаторами.

Оптический эффект затыгивания интенсивно изучался в течение последних тридцати лет. Первоначально было показано, что добавление дополнительного частично прозрачного зеркала на выходе лазера Фабри-Перо может привести к уменьшению шума лазера [1; 2]. Однако эта схема стабилизации имеет существенные ограничения из-за динамической неустойчивости, возникающей при достаточно сильной оптической обратной связи. Обратная связь по относительной мощности на уровне 10^{-4} способна дестабилизировать систему.

Нестабильность может быть уменьшена, если обратная связь является частотно-селективной. Привязка частоты излучения лазера к моде с высокой добротностью внешнего резонатора обеспечивает быструю частотно-селективную оптическую обратную связь, что приводит к улучшенной стабилизации частоты лазера [3–6]. Эта конфигурация динамически стабильна и может производить когерентный свет, даже когда относительная обратная связь по мощности превышает десятки процентов. Первоначально она была продемонстрирована с вакуумными кольцевыми резонаторами [3]. Совсем недавно она была изучена с монолитными резонаторами, такими как резонаторы полного внутреннего отражения [4]. Было показано, что затыгивание приводит к

уменьшению фазового и амплитудного шума [3], позволяет перестраивать частоту лазерного излучения [4], а также способствует эффективному удвоению частоты [4]. Ширина линии лазера может быть улучшена на шесть порядков, если использовать микрорезонатор с высокой добротностью [6].

При применении высокодобротных микрорезонаторов с модами типа "шепчущей галереи" (МШГ) [7] для стабилизации лазеров используется эффект резонансного рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях, когда часть входящего излучения в резонансе с частотой МШГ моды отражается обратно на лазер, что приводит к известному в радиоперифизике эффекту затягивания. Известно, что если к одноконтурному радиочастотному генератору подключается резонансная нагрузка с добротностью выше, чем у контура генератора, то стабильность результирующей частоты генерации будет выше. Коэффициент стабилизации при этом может составлять много порядков и связан с отношением добротности высокодобротного резонатора к добротности контура генератора. При связи лазера с микрорезонатором этот эффект обеспечивает быструю оптическую обратную связь и может привести к значительному уменьшению ширины линии лазера. Впервые продемонстрированный со сферическими микрорезонаторами из плавленого кварца [8] этот метод теперь активно применяется для управления спектральными характеристиками, например, для сужения ширины линии и стабилизации частоты, различных лазерных источников [5; 9]. Отметим, что за последнее десятилетие был достигнут большой прогресс в применении этой методики: в 2010 году докладывалось об уменьшении ширины линии полупроводникового лазера с внешним резонатором в 10^4 раз и была достигнута мгновенная ширина линии менее 200 Гц [10], а в 2015 году ширина линии уменьшилась в 10^7 раз и достигла суб-Гц уровня [9].

Несмотря на отличные экспериментальные результаты, систематический анализ оптимальных параметров затягивания с использованием МШГ еще не проводился. В предварительных исследованиях [11] рассматривались упрощенные модели, не учитывающие всех параметров сложной системы. В данной работе была разработана детальная модель затягивания частоты лазера на собственную частоту высокодобротного резонатора, учитывающая все ключевые параметры влияющие на динамику затягивания. А также подробно изучен эффект затягивания для широкого диапазона параметров затяги-

вания и показано, что существует глобальный оптимум для коэффициента стабилизации.

Эффективность стабилизации лазера в классической схеме затягивания зависит от резонансного рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях микрорезонатора. Максимальная эффективность стабилизации лазера достигается, когда уровень рэлеевского рассеяния сравним с уровнем потерь в резонаторе, что является сложной технической задачей, так как в высокочастотных резонаторах внутренние и поверхностные неоднородности подавлены на стадии изготовления путем полировки и отжига. Разработан метод увеличения эффективности затягивания и улучшения шумовых характеристик лазера. Также, предложена модифицированная схема затягивания частоты лазера высокочастотным оптическим микрорезонатором с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между резонатором и дополнительной призмой.

Целью данной работы является разработка эффективных теоретических моделей, точно описывающих явление стабилизации одночастотных и многочастотных лазерных источников при их затягивании высокочастотными микрорезонаторами, поиск новых оптических схем и выявление оптимальных режимов, обеспечивающих наилучшее подавление фазовых шумов в стабилизированных лазерах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать оригинальную теоретическую модель для описания эффекта затягивания частоты многочастотного лазера на высокочастотный микрорезонатор и сравнить полученные численные результаты с имеющимися экспериментальными данными.
2. Выявить параметры системы, влияющие на эффективность стабилизации лазерных источников, затянутых на высокочастотные микрорезонаторы. Определить оптимальные параметры, обеспечивающие наибольшее подавление фазовых шумов затянутого лазера.
3. Проанализировать возможность использования дополнительных оптических элементов для расширения пределов применимости метода стабилизации лазера путем затягивания его на высокочастотный

микрорезонатор. Определить особенности и оптимальные параметры такой системы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложенная модель взаимодействия многочастотного полупроводникового лазера и оптического микрорезонатора, содержащая пять параметров, позволяет оптимизировать режим затягивания с учётом нелинейных эффектов в микрорезонаторе для достижения наилучшей стабилизации полупроводникового лазера и минимальной ширины линии генерации до 300 Гц.
2. Предложенная модель взаимодействия многочастотного полупроводникового лазера и оптического микрорезонатора позволяет настроиться на режим затягивания нескольких мод лазера, каждая из которых имеет узкую ширину линии, при этом не затянутые моды лазера подавлены на 35 дБ.
3. Предложенный метод управления характеристиками обратной волны с помощью дополнительной призмы и зеркала позволяет гибко контролировать процесс затягивания, что обеспечивает возможность получения минимальной ширины линии генерации при фиксированных параметрах микрорезонатора.
4. В оптимальном режиме затягивания частоты полупроводникового лазера на микрорезонатор с модами «шепчущей галереи» продемонстрирована генерация когерентных (солитонных) керровских частотных гребенок
5. Предложенная модель калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой позволяет найти оптимальное соотношение скорости перестройки частоты и ширины полосы узкополосного фильтра для разных типов фазового шума и узкополосного фильтра, обеспечивающего наивысшую точность измерения частоты лазера.

Научная новизна:

1. Впервые продемонстрирован метод создания одночастотного источника когерентного излучения на основе многочастотного полупроводникового лазера в режиме затягивания.

2. Разработана оригинальная модель для описания эффекта затягивания частоты многочастотного лазера на высокодобротный микрорезонатор.
3. Продемонстрированы и проанализированы новые типы диодных лазеров в режиме затягивания, работающих одновременно на нескольких длинах волн с узкой шириной линии.
4. Впервые выявлены параметры системы, влияющие на эффективность стабилизации лазерных источников, затянутых на высокодобротные микрорезонаторы.
5. Впервые определены оптимальные режимы и параметры системы, обеспечивающие наиболее эффективную стабилизацию лазера в зависимости от величины обратной связи с учётом нелинейных эффектов в микрорезонаторе.
6. Разработан оригинальный метод увеличения эффективности затягивания и улучшения шумовых характеристик лазера. Предложена модифицированная схема затягивания частоты лазера на высокодобротный оптический микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между дополнительной призмой и резонатором.
7. Разработана оригинальная модель для описания эффекта затягивания частоты лазера на высокодобротный микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом.
8. Впервые определены оптимальные режимы и параметры схемы затягивания с дополнительной призмой и зеркалом, обеспечивающие наиболее эффективную стабилизацию лазера в зависимости от величины обратной связи с учетом нелинейных эффектов в микрорезонаторе.

Научная и практическая значимость.

Для многих актуальных практических приложений необходимы компактные источники лазерного излучения с малой шириной линии. Зачастую существующие на сегодняшний день одночастотные лазеры из-за своих конструктивных особенностей, обеспечивающих одночастотный режим генерации, обладают недостаточной мощностью (несколько десятков милливатт).

При этом мощность представленных на рынке многочастотных лазерных диодов составляет несколько сотен милливатт, что делает их привлекательными объектами исследований. В данной работе впервые предложен метод создания одночастотного источника когерентного излучения на основе многочастотного лазерного диода, работающего в режиме затягивания модой высокодобротного микрорезонатора МШГ. Также разработана модель затягивания частоты лазера на высокодобротный микрорезонатор, которая, с одной стороны, позволяет глубже понять основные физические особенности затягивания, а с другой стороны, позволяет повысить его эффективность. Разработанная модель также проясняет фундаментальные ограничения на ширину линии затянутых лазеров.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются высокодобротные кристаллические микрорезонаторы с модами типа "шепчущей галереи" и полупроводниковые лазеры. Предметом исследования является эффект затягивания частоты лазерного диода на собственную частоту высокодобротного микрорезонатора с модами типа "шепчущей галереи", а также нелинейные эффекты в высокодобротных микрорезонаторах при накачке лазерным источником в режиме непрерывного излучения.

Методология и методы исследования. В работе использовались следующие методы: метод Рунге — Кутты для решения систем дифференциальных уравнений, метод гетеродинамирования для определения мгновенной ширины линии лазерных источников, метод квадратурного анализа спектральной плотности для характеристики уровня фазовых шумов лазерного излучения, методы Монте-Карло для исследования распределения статистик вероятностных распределений, а также общепринятые методы теоретической и экспериментальной физики.

Степень достоверности. Достоверность представленных в диссертационной работе результатов подтверждается соответствием теоретических результатов и результатов численного моделирования, а также соответствием результатов численного моделирования экспериментальным данным, полученных как в работах соискателя, так и в работах других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ряде престижных всероссийских и международных конференций: XXIX Всероссийская школа-семинар "Физика и применение микро-

волн” имени профессора А.П. Сухорукова ”Волны-2018” (Красновидово, Московская область, Россия, 2018), XXX Всероссийская школа-семинар ”Волновые явления в неоднородных средах” имени профессора А.П. Сухорукова ”Волны-2019” (Красновидово, Московская область, Россия, 2019), 18th International Conference on Laser Optics ”ICLO 2018” (Санкт-Петербург, Россия, 2018), SPIE Photonics West, (San Francisco, США, 2019), 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics/Europe – European Quantum Electronics Conference (Мюнхен, Германия, 2019), OSA Advanced Photonics Congress, OSA Virtual Event (США, 2020), SPIE Photonics Aisa, (San Francisco, США, 2020), IEEE Photonics Conference (2020), Frontiers in Optics (Optical Society of America, 2020), XII Международный симпозиум по фотонному эхо и когерентной спектроскопии ФЭКС - 2021 (Казань, Россия, 2021)

Личный вклад. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным руководителем работы. Все изложенные в работе результаты получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Лично автором разработана модель взаимодействия многочастотного полупроводникового лазера и оптического микрорезонатора и модель калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой, а также предложены алгоритмы расчета ширины линии затянутого лазера. Автор непосредственно участвовал в анализе экспериментальных данных, подготовке основных публикаций по выполненной работе.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 17 печатном издании [A1-A17], из которых 4 - статьи [A1-A4], индексируемые в базах SCOPUS, Web of Science.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 132 страницы с 28 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 168 наименований.

Содержание работы

Первая глава организована следующим образом. Вначале описывается теоретическая модель и выводятся основные уравнения. После представлены результаты аналитической и численной оптимизации системы. В конце главы анализируются возможные методы экспериментальной реализации оптимального режима затягивания и ограничения разработанной модели.

В данной главе вводятся пять основных параметров описывающих эффект затягивания частоты лазера на высокодобротный резонатор: а) коэффициент связи прямой и обратной волн, определяемая обратным рассеянием в резонаторе и соответствующей эффективностью обратной связи; б) фаза затягивания, определяемая оптическим путем между лазером и микрорезонатором и частотой режима затягивания микрорезонатора; в) оптический путь между лазером и микрорезонатором; г) перестройка частоты лазерного резонатора; д) эффективность связи накачки с режимом резонатора, определяемая геометрическим согласованием мод (отметим, что последние четыре параметра могут варьироваться и могут быть определены в эксперименте). Подробно изучен эффект затягивания для широкого диапазона этих параметров и показали, что существует глобальный оптимум для четырех из них. Показано, например, что увеличение коэффициента обратного рассеяния выше некоторого оптимального значения не обеспечивает лучшей стабилизации. Также предложены рекомендации по достижению оптимальной частоты излучения лазера и фазы затягивания. Показано, что оптимизация позволяет уменьшить ширину линии лазера на порядки по сравнению с неоптимально подобранными параметрами.

Схематическое описание эффекта затягивания представлено на рис. 1, где сфокусированный лазерный луч резонансно связан с высокодобротным МШГ-резонатором. Из-за релеевского рассеяния внутри микрорезонатора [7], часть лазерного излучения резонансно обратно рассеивается (см. рис.1) в резонатор лазера, затягивая частоту лазерного излучения на частоту моды микрорезонатора [11].

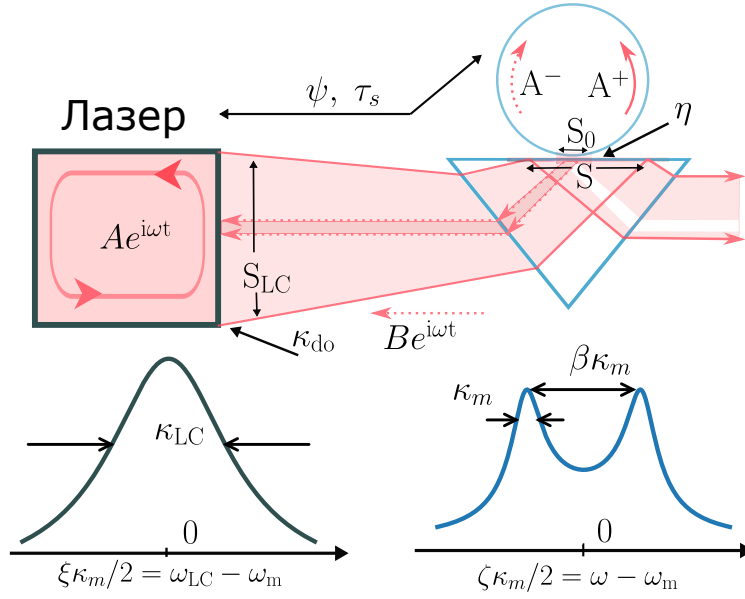


Рис. 1 — Схема затыгивания частоты лазера на МШГ резонатор с помощью призмы связи. Резонансные кривые лазера (слева) и МШГ(справа). A – амплитуда поля генерации лазера, ω_{LC} и κ_{LC} – частота и ширина линии моды резонатора лазера, κ_{do} – коэффициент связи выходного зеркала лазера, B – обратная отраженная волна, S_{LC} и S – площадь сечения лазерного пучка в апертуре лазера и на поверхности призмы, τ_s – время прохождения обратной волны, ψ – фаза затыгивания, A^+ и A^- – амплитуды прямой и обратной волн внутри микрорезонатора, η – коэффициент связи микрорезонатора, ω_m и κ_m – частота и ширина линии мод микрорезонатора, ω – частота генерации.

Было показано, что эта система может быть описана уравнением (см. [11]).

$$\dot{A} + \left[\frac{\kappa_{LC}}{2} - \frac{g}{2}(1 + i\alpha_g) - i(\omega - \omega_{LC}) \right] A = \kappa_{do}B, \quad (1)$$

где ω_{LC} и κ_{LC} – собственная частота и коэффициент потерь резонатора лазера, κ_{do} – коэффициент связи его выходного зеркала, $g = g(|A|^2)$ – коэффициент усиления лазера, α_g – коэффициент Генри лазерной среды, ω – частота генерации лазера, A – медленно меняющаяся комплексная амплитуда лазерного поля, B – комплексная амплитуда поля, отраженного от микрорезонатора. Отраженная волна может быть описана следующим уравнением

$$B(t) = \sqrt{\Theta} \frac{2i\eta\beta}{(1 - i\zeta)^2 + \beta^2} A(t - \tau_s) e^{i\omega\tau_s}, \quad (2)$$

где коэффициент $\Theta = S_{LC}/S$ – отношение площади апертуры лазера S_{LC} к конечной площади пучка S , вводится для учета перефокусировки пучка без изменения его мощности. $\zeta = 2(\omega - \omega_m)/\kappa_m$ – эффективная отстройка частоты излучения лазера ω от ближайшей собственной частоты микрорезонатора ω_m ; κ_m – коэффициент потерь моды микрорезонатора. τ_s – круговая задержка между резонатором и затянутым лазером. η – безразмерный коэффициент связи накачки; $\beta = \frac{\gamma}{\kappa_m}$ – нормированный коэффициент расщепления мод, где γ – коэффициент рэлеевского рассеяния [7].

Отраженная от микрорезонатора обратная волна, попадая в лазер, приводит к затягиванию частоты излучения лазера ω к собственной частоте резонатора ω_m . Модель полупроводникового лазера со слабым отражением от зеркала впервые была разработана Ланг-Кобаяши [12]. Приближенная модель затягивания частоты полупроводникового лазера на высокочастотный резонатор в режиме слабого резонансного отражения от микрорезонатора была разработана в [11]. Данные модели описывают зависимость ω (частоты излучения лазера) от ω_{LC} (частоты резонатора лазера), эта зависимость называется перестроечной кривой.

$$\omega - \omega_{LC} = \kappa_{do} \Im[\Gamma e^{i\omega\tau_s - i \arctan(\alpha)}], \quad (3)$$

где $\Gamma = B/A$ – коэффициент отражения от микрорезонатора. Обозначено $\kappa_{do} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\tau_d} \frac{1-R_o^2}{R_o}$, которая объединяет параметры полупроводникового лазера: α – фактор Генри, τ_d – время обхода лазерного резонатора и R_o – коэффициент отражения передней грани лазера. Затягивание происходит, когда собственная частота резонатора лазера ω_{LC} близка к собственной частоте микрорезонатора ω_0 . В этот момент отражение от микрорезонатора обеспечивает резонансную оптическую обратную связь, которая затягивает частоту излучения лазера ω на частоту микрорезонатора ω_0 . Резонансная оптическая обратная связь приводит к стабилизации частоты излучения лазера. Коэффициент

стабилизации определяется как

$$K = \frac{d\omega_d}{d\omega}, \quad (4)$$

что можно понять следующим образом: если частота свободного лазера ω_{LC} имеет амплитуду колебаний $\delta\omega_{\text{LC}}$, то частота затянутого лазера ω будет отклоняться только на $\delta\omega = \frac{\delta\omega_{\text{LC}}}{K}$. Таким образом, максимальное значение коэффициента стабилизации достигается на минимальном наклоне перестроечной кривой [рис. 2].

Важно отметить, что перестроечная кривая испытывает расщепление, аналогичное резонансному расщеплению при увеличении связи прямой и обратной волны [7]. В результате точка минимального наклона перестроечной кривой также расщепляется. Примеры перестроечных кривых для высоких и низких значений коэффициента расщепления мод β представлены на рис. 2.

В данной главе показано, что расщепление влияет на процесс затягивания, и стабилизация может ухудшаться при больших значениях расщепления. Также выводятся выражения для оптимальных значений параметров, то есть значений, которые позволяют настроиться на минимальный наклон перестроечной кривой. Обнаружено, что оптимальные значения параметров экспериментальной установки выражаются через один внутренний параметр микрорезонатора $\mu = \frac{\gamma}{\kappa_0}$, где κ_0 – декремент внутренних потерь в микрорезонаторе [A2].

Вторая глава организована следующим образом. Вначале представлена теоретическая модель схемы МШГ с дополнительной призмой и зеркалом. Затем представлена теоретическая модель стабилизации частоты полупроводникового лазера с помощью резонансной оптической обратной связи от МШГ с зеркалом. Данная глава содержит подробный вывод модели для предложенной схемы, а также рассматривается стабилизация частоты лазера при ограничениях на уровень оптической обратной связи и нелинейные эффекты, соответственно.

Предлагается схема затягивания частоты полупроводникового лазера на микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между дополнительной призмой и резонатором. Для этой схемы была разработана модель, анализ которой показал, что максимальный коэффициент стабилизации

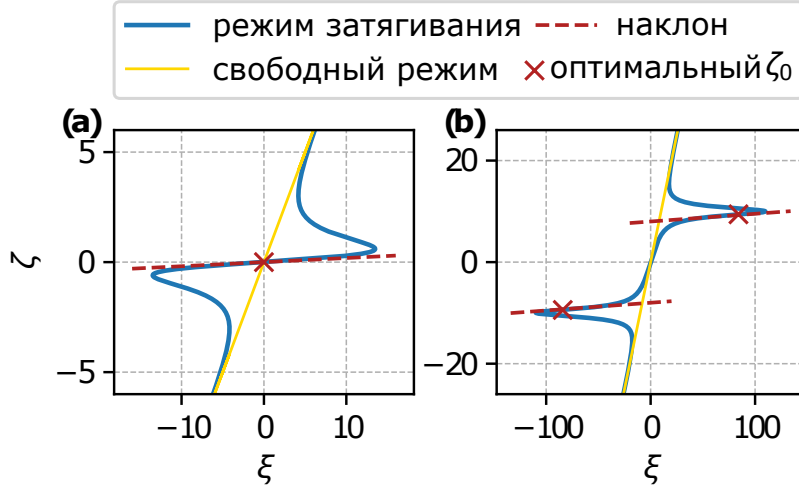


Рис. 2 — Синие линии показывают перестроечные кривые для $\beta = 0.1$ (панель **a**) и $\beta = 10$ (панель **b**) в режиме затягивания ($\psi = 0$, $\eta\tilde{\kappa}_{do}/\kappa_m = 50$ и $\kappa_m\tau_s = 0.011$). Желтые линии показывают перестроечные кривые ($\zeta = \xi$) в режиме свободного лазера, красные пунктирные линии показывают наклон полосы затягивания, а красные крестики показывают оптимальные точки $\zeta = \zeta_0$. Все величины представлены в безразмерных единицах.

предложенной схемы аналогичен максимальному коэффициенту стабилизации классической схемы, где оптическая обратная связь с МШГ возникает за счет рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях. Однако для классической схемы максимальный уровень стабилизации лазера требует точной настройки коэффициента рэлеевского рассеяния, что не является тривиальной задачей, в то время как это может быть легко реализовано с помощью настройки связи между дополнительной призмой и резонатором. Более того, было обнаружено, что оптимальный режим предложенной схемы находится далеко от критической связи (в отличие от классической схемы затягивания), что приводит к меньшим потерям излучения. Было показано, что для обеих схем мощность, циркулирующая в микрорезонаторе в оптимальном режиме, примерно одинакова, что важно, поскольку режим высокой мощности в микрорезонаторе может привести к нежелательным нелинейным эффектам, ограничивающим ширину линии затянутого лазера.

Схема установки затягивания на основе МШГ-резонатора, модифицированная зеркалом и дополнительной призмой, представлена на рис. 3. Для анализа влияния дополнительного элемента обратной связи используется квазигеометрический подход, который был представлен в [13]. Уравнения для

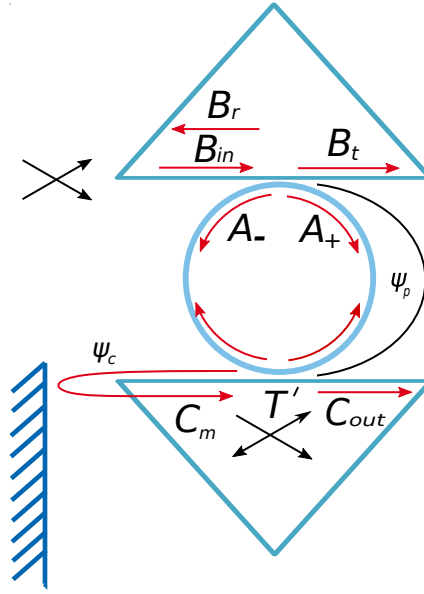


Рис. 3 — Схема затягивания с дополнительной призмой и зеркалом.

Амплитуды в точке связи входной призмы: B_{in} - амплитуда накачки; B_t и B_r - амплитуды, прохождения и отражения; A_+ и A_- - амплитуды прямой и обратной волны в микрорезонаторе. **Амплитуды в точке связи выходной призмы:** C_m - амплитуда, отраженная от зеркала обратно в выходную призму; C_{out} - выходная амплитуда. T и T' - амплитудный коэффициент прохождения входной и выходной призмы, соответственно.

амплитуд прямой и обратной волны МШГ A_+ и A_- в предположении идеально согласованных по моде (или одномодовых) устройств связи (для связи лазер-микрорезонатор и для связи зеркало-микрорезонатор) имеет вид

$$(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)A_+ = i\gamma A_- + i\frac{2\delta_c}{T}B_{in}, \quad (5)$$

$$(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)A_- = i(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})A_+, \quad (6)$$

где B_{in} - амплитуда накачки, $\delta_\Sigma = \delta_0 + \delta_c + \delta_m$; δ_0 - декремент внутренних потерь микрорезонатора; δ_c и δ_m - связь входной и выходной призмы, соответственно; γ - коэффициент обратного рассеяния Рэлея; $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ - отстройка резонансной частоты МШГ ω_0 от частоты накачки ω . $\tilde{R}$ - комплексный коэффициент отражения от зеркала, который включает набег фаз от зеркала до точки контакта выходной призмы с микрорезонатором. Далее предполагается, что комплексный коэффициент отражения от зеркала настроен оптимально ($\tilde{R} = 1$). Обозначив отражение и прохождение резонатора

$\Gamma = B_r/B_{in}$ и $T_{out} = B_t/B_{in}$, соответственно (см. рис. 3), получим:

$$\Gamma = -\frac{2i\delta_c(\gamma + 2\delta_m)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}, \quad (7)$$

$$T_{out} = \frac{(\delta_\Sigma - 2\delta_c + i\Delta\omega)(\delta_\Sigma + i\Delta\omega) + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}, \quad (8)$$

$$|C_{out}| = |B_{in}| \left| \sqrt{\frac{\delta_m}{\delta_c}} \frac{2\delta_c(\delta_\Sigma - 2\delta_m + i\Delta\omega - \gamma)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m)} \right|, \quad (9)$$

где C_{out} – амплитуда прошедшая через нижнюю призму [см. рис. 3].

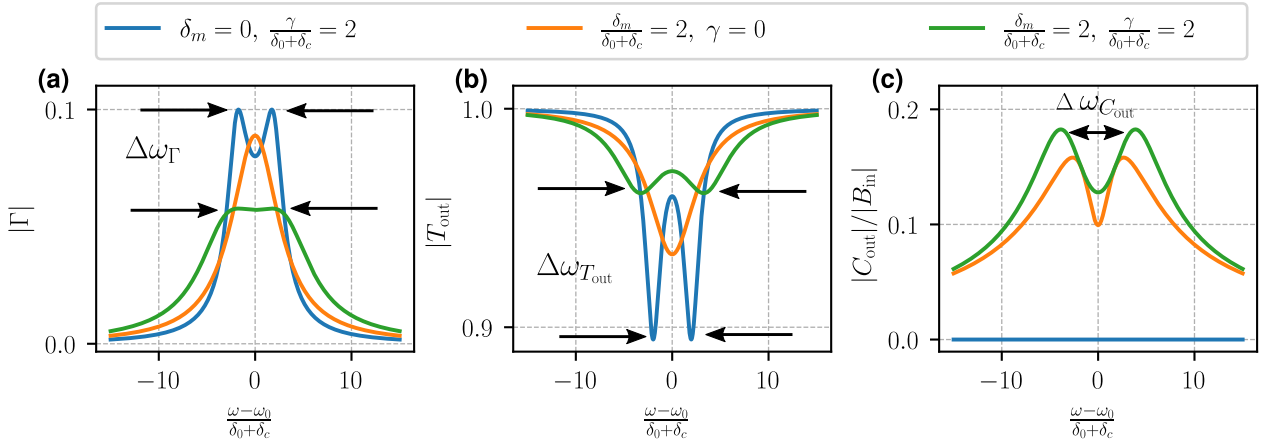


Рис. 4 — Резонансное расщепление отражения Γ , прохождения T_{out} и C_{out} представлены на рисунках **a**, **b** и **c**, соответственно. Синие линии соответствуют классической схеме $\delta_m = 0$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 2$. Оранжевые линии соответствуют малому обратному рассеянию $\frac{\delta_m}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 0$. Зеленые линии соответствуют общему случаю $\frac{\delta_m}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 2$.

Прямая и обратная волны в микрорезонаторе связаны через релеевское рассеяние, описываемое через γ и связь с зеркалом, которая выражается через δ_m (см. уравнения 5, 6). Связь прямой и обратной волн вызывает резонансное расщепление обратной связи $\Gamma(\omega)$ (см. рис. 4а) [А3]. Величина расщепления коэффициента отражения задается следующим образом:

$$\Delta\omega_\Gamma = \pm\sqrt{\gamma(\gamma + 2\delta_m) - \delta_\Sigma^2}. \quad (10)$$

Условием расщепления обратной связи является $\gamma(\gamma + 2\delta_m) > \delta_\Sigma^2$, что можно переписать как $\gamma > \delta_m + \sqrt{\delta_m^2 + \delta_\Sigma^2}$. Заметим, что нагружая δ_m можно устранить резонансное расщепление Γ . В классической схеме затягивания $\Delta\omega_\Gamma$ используется для оценки релеевского рассеяния γ [A4]. Аналогично, можно оценить δ_m через резонансное расщепление C_{out} , которое выражается как

$$\Delta\omega_{C_{\text{out}}}\Big|_{\gamma=0} = \pm\sqrt{(\delta_0 + \delta_c)(6\delta_m - \delta_0 - \delta_c) - \delta_m^2}. \quad (11)$$

Важно отметить, что расщепление C_{out} имеет место даже для случая $\gamma \ll \delta_0$ (см. оранжевые линии на рис. 4). Таким образом, в эксперименте расщепление C_{out} может быть использовано для расчета δ_c и δ_m даже для случая $\gamma \ll \delta_0$.

Для случая слабого релеевского обратного рассеяния $\gamma \ll \delta_0$ резонансное расщепление отсутствует и максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\Delta\omega = 0$ и $\omega\tau_s = \arctan(\alpha) + \frac{3\pi}{2}$. Тогда для фазово-оптимизированного коэффициента стабилизации предложенной схемы получаем

$$K = 1 + \kappa_{do} \frac{4\delta_c(\gamma + 2\delta_m)}{\delta_\Sigma^3}. \quad (12)$$

Эта формула является хорошим приближением для $\gamma < 0.3\delta_0$. Максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\delta_m = \delta_c = \delta_0$, при этом $K \approx \frac{8}{27} \frac{\kappa_{do}}{\delta_0}$, что в $\delta_0/(2\gamma)$ раз больше оптимума классической схемы затягивания ($\delta_m = 0$). Например, в [14] авторы измерили $|\Gamma| \approx 3 \times 10^{-2}$ при критической связи ($\delta_c \approx \delta_0$) для классической схемы затягивания, что соответствует $\frac{\gamma}{\delta_0} \approx 6 \times 10^{-2}$. Таким образом, схема затягивания с зеркалом может увеличить коэффициент стабилизации примерно в $\delta_0/(2\gamma) \approx 8$ раз (или уменьшить ширину линии частоты излучения лазера в 64 раза).

Максимальные значения коэффициента стабилизации для схемы затягивания с зеркалом и для классической схемы затягивания с оптимальным релеевским рассеянием, о которых сообщалось в [A2], примерно одинаковы (см. рис. 5). Однако для классической схемы максимальный уровень стабилизации лазера требует точной настройки релеевского рассеяния, что не является тривиальной задачей по сравнению с настройкой связи с зеркалом.

При высоком уровне релеевского рассеяния все три резонансные кривые мод расщепляются из-за связи прямой и обратной волн (см. (10), синие и

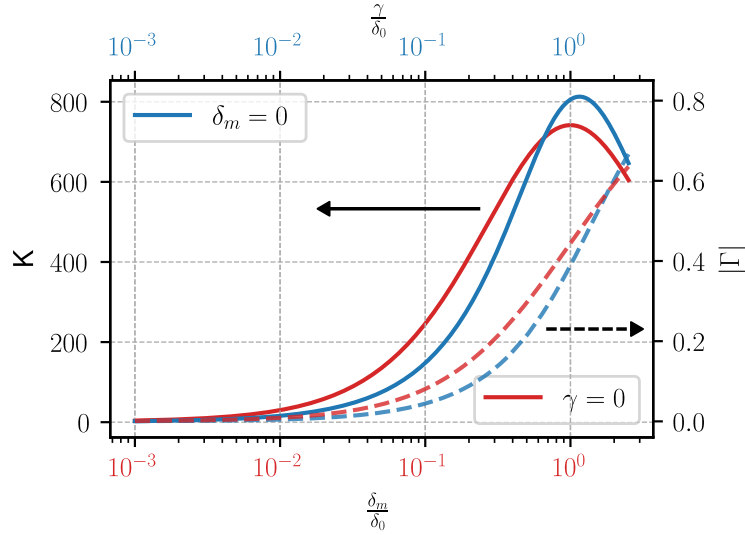


Рис. 5 — Сравнение коэффициента стабилизации (Сплошные линии — левая ось y) и коэффициента отражения $|\Gamma|$ (Пунктирные линии — правая ось y) для случая пренебрежимо малого рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия).

зеленые линии на рис. 4). В схеме затягивания с зеркалом при малом значении γ обратная волна накачивается в основном прямой волной за счет отражения от зеркала, поэтому расщепление в прохождении и отражении отсутствует (см. оранжевые линии на рис. 4a,b). Отсутствие расщепления упрощает процесс настройки на оптимальную точку, так как в этом случае при изменении связи с призмами нет необходимости подстраивать отстройку частоты и фазу затягивания.

В третьей главе представлен новый метод, позволяющий получать одночастотное излучение с шириной линии менее кГц от компактного многочастотного лазерного диода, затянутого на высокодобротный оптический микрорезонатор. Используя микрорезонатор MgF_2 с высокой добротностью и многочастотный лазерный диод, работающий на длине волны 1535 нм с выходной мощностью 100 мВт и спектром излучения, состоящим примерно из 50 линий с шириной полосы МГц, наблюдалось трансформация спектра излучения до одной линии или нескольких линий с шириной линии суб-кГц и выходной мощностью 50 мВт. В спектре затянутого лазера наблюдался и исследовался эффект Богатова, предсказанный более 30 лет назад [15]. Для анализа рассматриваемого эффекта была разработана оригинальная теоретическая модель, учитывающая эффект затягивания, конкуренцию мод и бога-

товское асимметричное взаимодействие мод, и проведено численное моделирование. Все численные результаты находятся в хорошем согласии с нашими экспериментальными данными. Были получены точные аналитические оценки для параметров, критических для рассматриваемого эффекта. Предложенный метод может быть применен для различных типов диодных лазеров, работающих в разных спектральных диапазонах.

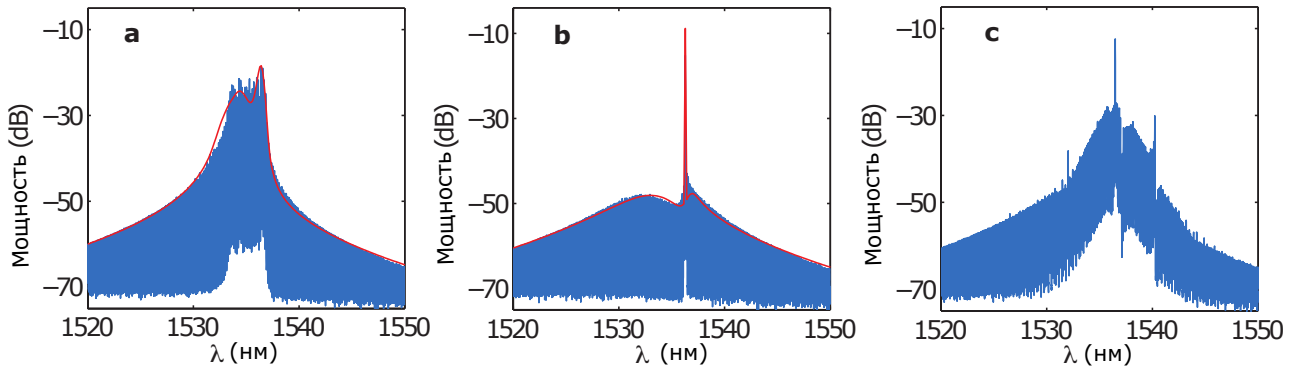


Рис. 6 — **a**: Экспериментальный (синяя линия) и численно рассчитанный (красная линия) спектр излучения свободного многочастотного диодного лазера; **b**: Экспериментальный (синяя линия) и численно рассчитанный (красная линия) спектр излучения затянутого многочастотного лазера. **c**: Спектр частотной гребенки в режиме затягивания.

Рисунок 6(b) демонстрирует эффект от затягивания частоты многочастотного диодного лазера на его выходной спектр. Видно, что первоначально многочастотный спектр излучения, состоящий примерно из 50 линий, был преобразован в одночастотный спектр с характерной асимметричной формой. Такой асимметричный спектр был впервые замечен и объяснен Богатовым [15]. Режим затягивания стабилен в стандартных лабораторных условиях в течение нескольких часов без какой-либо дополнительной техники стабилизации. Рисунок 7 демонстрирует эффект затягивания нескольких мод многочастотного диодного лазера на несколько мод микрорезонатора.

Изменение спектра является результатом эффекта затягивания, возникающего, когда частота одной из мод многочастотного лазера достаточно близка к резонансу МШГ [11]. В этом случае наблюдалось подавление соседних мод примерно на 35 дБ, что объясняется динамикой усиления лазера. Наиболее интенсивная мода "выжигает" инверсную населенность, тем самым лишая остальные моды источника энергии, что приводит к энергетической конкуренции мод. Таким образом, в затянутом режиме лазера в затянутую

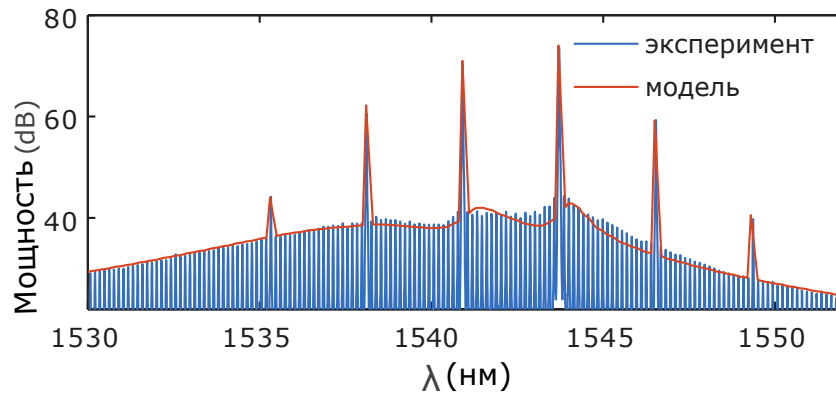


Рис. 7 — Спектр излучения многомодового режима затягивания частоты лазера (синяя линия - эксперимент, оранжевая линия - модель)

моду закачивается дополнительная энергия, и её интенсивность значительно возрастает [см. рис. 6]. Энергетическая эффективность такого преобразования спектра сильно зависит от коэффициента отражения внешнего резонатора [A1]. В наших экспериментах наблюдалось, что значительная часть ($\sim 95\%$) лазерной мощности излучается доминирующей модой. Однако, из-за потерь в оптической схеме (отражения на поверхностях линз и призм) эта мощность уменьшается, что приводит к $\sim 50\%$ эффективности одночастотного излучения (по сравнению с полной мощностью свободно работающего лазера). Ограничение на максимальную рабочую мощность зависит от стабильности диодного лазера при большом токе. Хотя использованный диод имел максимальную указанную мощность 200 мВт, но стабильный режим был возможен только до 100 мВт (типичное значение тока 200 мА). Выше этого уровня наблюдался тепловой дрейф частоты лазера, поэтому режим затягивания не был стабильным. Очевидно, что потери могут быть уменьшены с помощью оптимизированных элементов связи, а термостабилизация диода может быть улучшена. Тем не менее, максимальная мощность продемонстрированного одночастотного лазера (до 50 мВт) уже превышает мощность обычного одночастотного диодного лазера с распределённой обратной связью (РОС).

Ширина линии затянутого диодного лазера была измерена путем биения затянутого лазера с эталонным лазером (NKT Koheras Adjustik, ширина линии 0.1 кГц). Биения двух лазеров регистрировались высокоскоростным детектором, а ширина линии измерялась с помощью анализатора электрического спектра. На рисунке 8(а) показан результат измерения ширины линии

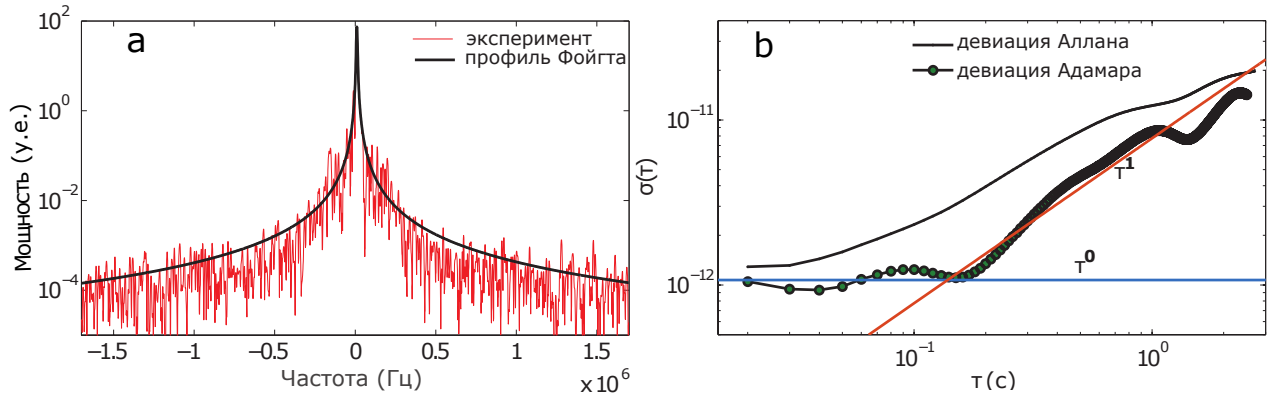


Рис. 8 — **a**: Сигнал биения (около 7,5 ГГц) затянутого лазера с эталонным лазером NKT Koheras Adjustik (красная линия) и аппроксимация Фойгта (черная линия). **b**: Отклонения Хадамарда и Аллана разности частот двух лазеров, затянутых на разные моды (частота биений 2.8 ГГц) в одном микрорезонаторе, аппроксимация частотного фликер шума $\propto \tau^0$ (синяя линия) и $\propto \tau^1$ аппроксимация (красная линия), что соответствует $\propto f^{-3}$.

(красная кривая). Чтобы учесть вклад белого шума и фликер шума частоты в ширину линии лазера, спектр биения (красная линия) аппроксимировался профилем Фойгта (черная линия) [16]. Таким образом, общая ширина линии была разложена на две составляющие: Лоренцеву $\Delta\nu_{\text{Lorentz}} = 0.3$ кГц для воздействия белого шума и Гауссову $\Delta\nu_{\text{Gauss}} = 1.7$ кГц для воздействия фликер шума частоты. Было обнаружено, что измеренный фликер шум частоты определяется эталонным лазером.

Для дальнейшего анализа внутренней частотной стабильности затянутого лазера аллановские и хадамардовские вариации относительной частоты $\sigma_A^2(\tau)$ и $\sigma_H^2(\tau)$ были измерены путем биений двух подобных диодных лазеров, затянутых на различные моды микрорезонатора (частота биений 2.8 ГГц) в одном и том же микрорезонаторе [см. рис. 8(b)]. Затягивание частот двух лазеров на один и тот же резонатор позволяет значительно подавить шум, вызванный тепловыми флуктуациями этого резонатора, тем самым подчеркивая остаточный шум затянутого лазера.

Стабилизация частоты излучения лазера позволило продемонстрировать генерацию диссипативных керровских солитонов в микрорезонаторе, накачиваемым затянутым лазером [см. рис. 6(c)] [A4-A5].

В **четвертой главе** подробно анализируется схема калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой и исследуется точность измерения

частоты лазера. В этой схеме момент времени, когда частота перестраиваемого лазера совпадает с линией опорной частотной гребенки, детектируются путем фильтрации сигнала гетеродина между частотой гребенки и перестраиваемого лазера узкополосным фильтром. Проанализирована зависимость точности измерения мгновенной частоты от скорости развертки частоты, параметров полосы пропускания фильтра, фазового шума лазера и опорной частотной гребенки. Представлено оптимальное соотношение скорости перестройки частоты и ширины полосы фильтра для разных типов фазового шума и узкополосного фильтра, обеспечивающего наивысшую точность калибровки частоты.

Заключение

В данной работе разработана оригинальная модель затягивания частоты лазера на высокочастотный микрорезонатор. Была исследована зависимость эффективности затягивания от параметров системы. Проведена оптимизация полупроводникового лазера в режиме затягивания на высокочастотный резонатор. Было установлено, что оптимальные параметры затягивания зависят только от одного параметра резонатора – обратного рассеяния, нормированного на внутренние потери микрорезонатора.

Оптимальные комбинации параметров затягивания были получены для различных экспериментально достижимых режимов. Было обнаружено, что нулевая отстройка и нулевая фаза являются оптимальными значениями для режима слабого обратного рассеяния. Также найден глобальный максимум коэффициента стабилизации для других режимов. Был также рассмотрен случай режима высокого обратного рассеяния. Результаты численного и аналитического моделирования были проверены по известным из литературы экспериментальным данным. Для параметров использовавшейся экспериментальной установки, была обнаружена возможность улучшения ширины линии по крайней мере на порядок, если параметры схемы настроены оптимально. Ширина линии может быть дальше улучшена на два порядка, если частота излучения лазера затягивается на оптимально подобранную моду. Нами разработаны рекомендации по экспериментальной реализации оптимального режима затягивания.

Нами разработан метод увеличения эффективности затягивания и улучшения шумовых характеристик лазера. Для этого предложена модифицированная схема затягивания частоты лазера высокочастотным оптическим микрорезонатором с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между дополнительной призмой и зеркалом. Для этой схемы была разработана модель, анализ которой показал, что максимальный коэффициент стабилизации предложенной схемы аналогичен максимальному коэффициенту стабилизации классической схемы, где оптическая обратная связь с МШГ возникает за счет рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях. Однако, для классической схемы максимальный уровень стабилизации лазера требует точной настройки коэффициента рэлеевского рассеяния относительно внутренних потерь резонатора, что ведет к падению эффективности стабилизации лазера, в то время как в предложенной схеме с зеркалом максимальный уровень стабилизации лазера может быть легко достигнут с помощью настройки связи между дополнительной призмой и зеркалом. Важно отметить, что в классической схеме затягивания при высоком уровне рэлеевского рассеяния резонанс расщепляется из-за связи прямой и обратной волн микрорезонатора. В предложенной схеме затягивания отсутствует взаимная связь между прямой и обратной волной, так как обратная волна создается прямой волной за счет отражения от зеркала, поэтому расщепление резонанса в обратной волне отсутствует. Отсутствие расщепления упрощает процесс настройки параметров системы в оптимальный режим.

В данной работе была разработана оригинальная теоретическая модель, позволяющая описать явление затягивания частоты многочастотного лазера высокочастотным оптическим микрорезонатором. Теория базируется на модели многочастотного лазера Ямады с учетом асимметричного взаимодействия мод, описанного Богатовым, и обратной связи, описываемой с помощью модели Лэнга-Кобаяши. Была численно показана возможность преобразования с помощью оптического микрорезонатора спектра излучения многочастотного лазера в эффективно одночастотный с сохранением полной мощности, а также в многочастотный с малым числом линий. Найдено пороговое значение уровня обратной связи, при котором происходит эффективная трансформация многочастотного спектра. Показано, что в случае затягивания частоты многочастотного лазера ярко проявляется асимметричное перераспределение мощности в спектре излучения, связанное с возникновением периодической структуры из носителей электрических зарядов, которая свя-

зывает различные моды лазерного резонатора (эффект Богатова). Это приводит к характерному профилю спектра затянутого лазера. Полученные с помощью созданной модели численные результаты показали хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Список опубликованных статей по теме диссертации (Scopus, Web of Science и RSCI)

- A1 R. R. Galiev, N. G. Pavlov, N. M. Kondratiev, S. Koptyaev, V. E. Lobanov, A. S. Voloshin, A. S. Gorodnitskiy, and M. L. Gorodetsky, "Spectrum collapse, narrow linewidth, and Bogatov effect in diode lasers locked to high-Q optical microresonators," *Optics Express*. 2018. Vol. 26, No. 23, P. 30509-30522. Impact factor WoS 3.894
- A2 Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, Andrey B. Matsko, and Igor A. Bilenko, "Optimization of Laser Stabilization via Self-Injection Locking to a Whispering-Gallery-Mode Microresonator," *Physical Review Applied*. 2020. Vol. 14, No. 1, P. 014036. Impact factor WoS 4.985.
- A3 Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, Andrey B. Matsko, and Igor A. Bilenko, "Mirror-Assisted Self-Injection Locking of a Laser to a Whispering-Gallery-Mode Microresonator," *Physical Review Applied*. 2021. Vol. 16, No. 6, P. 064043. Impact factor WoS 4.985.
- A4 Raja A.S., Voloshin A.S., Guo H., Agafonova S.E., Liu J., Gorodnitskiy A.S., Karpov M., Pavlov N.G., Lucas E., Galiev R.R., Shitikov A.E., Jost J.D., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. "Electrically pumped photonic integrated soliton microcomb," *Nature communications*. 2019. Vol. 10., No. 1, P. 1-8. Impact factor WoS 14.919.

Статьи в сборниках материалов конференций

- A5 R. R. Galiev, N. G. Pavlov, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. S. Voloshin, A. S. Gorodnitskiy, S. Koptyaev, I. A. Bilenko, and M. L. Gorodetsky, "Spectrum collapse and Kerr frequency comb generation with multi-frequency laser diodes self-injection locked to high-Q optical microresonator," in 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe and European Quantum Electronics Conference, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2019), paper cb91.
- A6 R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Optimization of Laser Frequency Stabilization via Self-Injection Locking to WGM Microresonator," in OSA Advanced Photonics Congress (AP) 2020 (IPR, NP, NOMA, Networks, PVLED, PSC, SPPCom, SOF), L. Caspani, A. Tauke-Pedretti, F. Leo, and B. Yang, eds., OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2020), paper ITu4A.12.

- A7 R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Mirror-assisted tuning of laser stabilization via self-injection locking to WGM microresonator," in Laser Applications Conference, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2021), paper JTU1A.40
- A8 Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, and Igor A. Bilenko "Optimization of a frequency comb-based calibration of a tunable laser Proc. SPIE 11552, Optical Metrology and Inspection for Industrial Applications VII, 115521J (16 October 2020)
- A9 R. Galiev, N. Kondratiev, V. Lobanov and I. Bilenko, "Surface and bulk scattering engineering in microresonators for enhancement of laser stabilization via self-injection locking," 2020 IEEE Photonics Conference (IPC), 2020, pp. 1-2
- A10 R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Frequency Stability Enhancement of Self-Injection Locked Laser," in Frontiers in Optics / Laser Science, B. Lee, C. Mazzali, K. Corwin, and R. Jason Jones, eds., OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2020), paper JTh4A.2.
- A11 R. Galiev, N. M. Kondratiev, N. G. Pavlov, V. E. Lobanov and M. L. Gorodetsky, "Bogatov effect in self-injection locked multimode diode laser: Theory and experiment," 2018 International Conference Laser Optics (ICLO), 2018, pp. 155-155,
- A12 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А. Анализ поверхностного и объемного рассеяния в микрорезонаторах для усиления стабилизации лазера эффектом затягивания // Сборник трудов XII Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики – 2020». -С. 158-160
- A13 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А "Оптимизация схемы калибровки перестраиваемого лазера на основе частотной гребенки Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2020. – Изд-во «ФЭН» АН РТ. – С. 40 -43
- A14 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А "Эффективность подавления фазового шума диодного лазера затянутого на резонатор с модами шепчущей галереи Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2019. – Изд-во «ФЭН» АН РТ.
- A15 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Павлов Н.Г., Лобанов В.Е., Городецкий М.Л. "Теория затягивания частоты многочастного лазерного диода модой высокочастотного микрорезонатора Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2018. – Изд-во «ФЭН» АН РТ. – С. 54-57
- A16 Галиев Р.Р. и др. "Затягивание частоты многочастного лазерного диода модой высокочастотного микрорезонатора // в сборнике Труды школы-семинара «Волны-2018». Когерентная и нелинейная оптика. - 2018.
- A17 Галиев Р.Р. и др. "Генерация частотной гребенки многочастотным лазером, затянутым на высокочастотный резонатор // в сборнике Труды школы-семинара «Волны-2019». Когерентная и нелинейная оптика. - 2019.

Список литературы

1. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1980. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 347–355.
2. Agrawal G. Line narrowing in a single-mode injection laser due to external optical feedback // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1984. — May. — Vol. 20, no. 5. — Pp. 468–471.
3. Dahmani B., Hollberg L., Drullinger R. Frequency stabilization of semiconductor lasers by resonant optical feedback // Opt. Lett. — 1987. — Vol. 12, no. 11. — Pp. 876–878.
4. Hemmerich A., Zimmermann C., Hansch T. W. Compact source of coherent blue light // Appl. Opt. — 1994. — Vol. 33, no. 6. — Pp. 988–991.
5. Narrow-line-width diode laser with a high-Q microsphere resonator / V.V. Vassiliev, V.L. Velichansky, V.S. Ilchenko et al. // Opt. Commun. — 1998. — Vol. 158, no. 1. — Pp. 305 – 312.
6. Ultralow noise miniature external cavity semiconductor laser / W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Eliyahu et al. // Nat. Commun. — 2015. — Vol. 6. — P. 7371.
7. Gorodetsky M. L., Pryamikov A. D., Ilchenko V. S. Rayleigh scattering in high-Q microspheres // J. Opt. Soc. Am. B. — 2000. — Vol. 17, no. 6. — Pp. 1051–1057.
8. High-coherence diode laser with optical feedback via a microcavity with 'whispering gallery' modes / V. V. Vasilev, Vladimir L. Velichansky, M. L. Gorodetskii et al. // Quantum Electronics. — 1996. — aug. — Vol. 26, no. 8. — Pp. 657–658.
9. Compact stabilized semiconductor laser for frequency metrology / W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Eliyahu et al. // Appl. Opt. — 2015. — Vol. 54, no. 11. — Pp. 3353–3359.
10. Whispering-gallery-mode-resonator-based ultranarrow linewidth external-cavity semiconductor laser / W. Liang, V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov et al. // Opt. Lett. — 2010. — Aug. — Vol. 35, no. 16. — Pp. 2822–2824.
11. Self-injection locking of a laser diode to a high-Q WGM microresonator / N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. V. Cherenkov et al. // Opt. Express. — 2017. — Nov. — Vol. 25, no. 23. — Pp. 28167–28178.
12. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1980. — Mar. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 347–355.
13. Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S. Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-Q whispering-gallery modes // J. Opt. Soc. Am. B. — 1999. — Jan. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 147–154.

14. Narrow linewidth lasing and soliton Kerr-microcombs with ordinary laser diodes / N. G. Pavlov, S. Koptyaev, G. V. Lihachev et al. // Nat. Photon. — 2018. — Vol. 12. — Pp. 694–698.
15. Bogatov Alexandr P, Eliseev P G, Sverdlov B N. Anomalous interaction of spectral modes in a semiconductor laser // Soviet Journal of Quantum Electronics. — 1975. — Vol. 4, no. 10. — Pp. 1275–1276.
16. Olivero J.J., Longbothum R.L. Empirical fits to the Voigt line width: A brief review // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. — 1977. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 233 – 236.