

ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертацию на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Линке Юлианы Юрьевны

на тему: «УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К НЕЛИНЕЙНЫМ РЕГРЕССИОННЫМ МОДЕЛЯМ» по специальности
1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертационная работа Ю. Ю. Линке посвящена решению некоторых актуальных задач непараметрической и нелинейной регрессии — важнейшему разделу современной математической статистики.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 318 страниц, включая 2 таблицы и 31 иллюстрацию. Список литературы содержит 350 наименований.

Введение содержит весьма подробный анализ современного состояния исследований, связанных с тематикой диссертации, и обширную библиографию. Это все крайне важно для понимания того места, которое занимают результаты диссертационной работы в этой активно развивающейся области математической статистики. Во введении приведена общая характеристика работы, сформулированы цели, обоснована актуальность тематики исследования и научная новизна полученных результатов. Кроме того, там приводятся положения, выносимые на защиту, сведения об апробации результатов, краткое содержание диссертации по главам и некоторые из полученных основных результатов.

Остановимся подробнее на содержании диссертации по главам.

В **первой главе** рассматриваются задачи непараметрической регрессии. Основное внимание уделено восстановлению методами ядерного сглаживания непрерывной регрессионной функции (возможно, случайной) по наблюдениям ее зашумленных значений в известном наборе точек, называемых регрессорами, и условиям на эти величины. Предположение о случайности регрессионной функции во многом объясняется использованием предлагаемых подходов, в частности, в различных постановках регрессионной задачи оценивания важнейших характеристик случайного процесса — функции среднего и ковариационной функции. Основное внимание в этой главе уделено условиям равномерной состоятельности ядерных оценок. Отметим, что сходимости в равномерной норме представляется вполне естественным свойством, если речь идет о сходимости к непрерывной регрессионной функции.

В первой главе соискатель приводит достаточно обширные библиографические сведения, связанные с методами ядерного сглаживания в рассматриваемых задачах, и разбирает эти многочисленные исследования на два класса по типу регрессоров, к которым соответственно относятся модели со случайными или детерминированными регрессорами. Если регрессоры случайны, то в работах предшественников предполагается, что они состоят либо из независимых одинаково распределенных случайных величин, либо удовлетворяют тем или иным формам слабой зависимости. При изучении моделей с детерминированными регрессорами, как правило, предполагается в известном смысле регулярное заполнение ими области задания регрессионной функции.

В диссертации предполагается, что набор регрессоров представляют собой случайные величины в схеме серий, причем в роли параметра серии выступает объем выборочных данных. Это позволило диссертанту включить в предложенную им схему в качестве частного случая также модели с детерминированными регрессорами. Прежде всего рассматривается ситуация скалярных регрессоров в задаче оценивания регрессионной

функции. Построены два новых класса ядерных оценок, относящихся по своему типу к локально-постоянным и локально-линейным. Во многом благодаря специальной структуре новых ядерных оценок, включающих конструкции интегральных сумм Римана, установлена равномерная состоятельность этих новых ядерных оценок при выполнении лишь следующего условия: регрессоры с высокой вероятностью образуют измельчающееся разбиение области задания регрессионной функции. Другими словами, регрессоры в известном смысле асимптотически плотно заполняют область задания регрессионной функции. Нельзя не согласиться с утверждением автора, что в отличие от известных ранее предположений новое условие универсально относительно стохастической природы регрессоров и характера их зависимости. Требование плотного заполнения включает в себя как ситуацию детерминированных регрессоров без дополнительного требования регулярности, так и случайных регрессоров, которые могут не удовлетворять условиям слабой зависимости. Такое требование также весьма наглядно и по существу является необходимым для восстановления регрессионной функции с той или иной точностью. Понятно, что свойство плотного заполнения практически не связано с тем или иным типом корреляции. Это свойство проиллюстрировано в диссертации соответствующими примерами, когда имеется плотное заполнение, но не выполнены предельные теоремы типа законов больших чисел. Отметим еще, что на практике бывает достаточно сложно определить характер зависимости выборочных данных. Использование условий в терминах плотных данных призвано устранить это препятствие, поскольку в оценивании теперь никак не учитывается тип зависимости регрессоров. Так что получение подобных условий важно не только с теоретической точки зрения, поскольку обобщает известные ранее условия, но и, безусловно, актуально для практики. Таким образом, результаты первой главы диссертации существенно усиливают полученные ранее результаты в области непараметрической регрессии и позволяют рассматривать модели с зависимыми регрессорами.

Далее в первой главе идея об условиях на регрессоры в терминах плотных данных развивается в различных направлениях. Получены обобщения на случай векторных регрессоров. Здесь в структуре новых ядерных оценок участвуют конструкции кратного интеграла Римана, условия плотного заполнения формулируются в терминах ϵ -сети, которую образуют регрессоры, с уменьшающимся по вероятности ее размером.

Важно отметить, что соискателю удалось получить новые условия в терминах плотных данных поточечной и равномерной состоятельности и для классических локально-постоянных оценок (оценок Надарая–Ватсона) и классических локально-линейных оценок. При этом выясняется, что условия поточечной сходимости для классических оценок в точности совпадают с условиями, введенными в диссертации для новых ядерных оценок, что, по мнению рецензента, является приятным сюрпризом. Условия же на регрессоры, гарантирующие равномерную состоятельность, несколько более ограничительны, чем для новых ядерных оценок, и требуют по сути более равномерное плотное заполнение регрессорами области определения регрессионной функции (другими словами, исключают резкие перепады в плотности заполнения), но все равно существенно расширяют область применения этих известных ядерных оценок.

Наконец, в завершение главы рассматривается еще одна популярная задача непараметрической регрессии – оценивание функций среднего и ковариации непрерывного случайного процесса. В различных постановках этой задачи соискателем предложены универсальные равномерно состоятельные оценки ядерного типа, при этом опять же существенно ослабляются известные ранее условия на регрессоры.

Во второй главе рассматриваются модели нелинейной регрессии, то есть теперь, в дополнение к постановке первой главы, известна функциональная форма зависимости регрессионной функции от конечномерного параметра, являющаяся нелинейной относительно этого параметра. Так что задача сводится к оцениванию этого конечномерного

параметра. Хорошо известны трудности при вычислении в том или ином смысле оптимальных оценок в нелинейной регрессии. Подобные оценки (например, квазиправдоподобия, наименьших квадратов и др.), как правило, задаются неявно как решение того или иного уравнения, при этом ситуация нескольких корней этого уравнения считается типичной для задач нелинейной регрессии. Указанное обстоятельство порождает принципиальную проблему выбора корня уравнения, приближающего параметр. Эту проблему в известном смысле решает наличие некоторой предварительной оценки параметра, сходящейся к параметру с приемлемой скоростью. Если указанную оценку использовать в качестве стартовой точки метода Ньютона для приближенного поиска корней уравнения, то нередко лишь один шаг этой процедуры дает оценку, асимптотически эквивалентную искомой. Эта идея была предложена в свое время Р. Фишером в классической задаче приближенного вычисления оценок максимального правдоподобия. В дальнейшем за такими двухэтапными оценками прочно закрепился термин «одношаговые» и они находят широкое применение в современных статистических задачах, когда оценивание связано с поиском корней уравнений. Надо сказать, что проблема построения предварительных оценок для сколь-нибудь широких классов моделей нелинейной регрессии оставалась открытой и, как отмечает соискатель, лишь для небольшого числа моделей были известны явные оценки. Решению указанной проблемы и посвящена вторая глава.

В диссертации предложено два метода построения явных оценок, при этом оба метода тесно связаны с результатами первой главы. В основе первого подхода лежат ядерные методы сглаживания первой главы. Идея оценивания следующая: для построения оценки предлагается приравнять значения регрессионной функции в некотором наборе точек к значениям ее состоятельной непараметрической ядерной оценки в этих же точках и разрешить данную систему относительно неизвестного параметра. При этом число уравнений, т.е. число указанных точек, должно совпадать с размерностью параметра, а сам набор точек подбирается так, чтобы система была разрешима единственным образом с непрерывной зависимостью решения от непараметрической оценки. Последнее обстоятельство, в силу состоятельности ядерной оценки, будет гарантировать состоятельность искомой оценки конечного параметра нелинейной регрессии. Как отмечает автор, описанная методика по сути аналогична классическому методу моментов.

Второй подход основан на использовании сумм определенным образом взвешенных откликов в зависимости от конфигурации k -мерных регрессоров, главная часть которых представляет собой интегральную сумму кратного интеграла Римана, что идейно также перекликается с методологией первой главы диссертации. В итоге оценки имеют вид некоторых функций от сумм специальным образом взвешенных откликов, при этом веса определяются лишь конфигурацией набора регрессоров и не зависят от их распределений. Отметим, что оба метода оценивания универсальны относительно стохастической природы регрессоров, позволяют в едином подходе рассматривать как модели с детерминированными, так и со случайными регрессорами. Найдены условия состоятельности с некоторой скоростью или асимптотически нормальности построенных оценок.

Третья глава идейно продолжает вторую и посвящена вопросам одношагового оценивания. Речь идет о приближенном поиске так называемых M -оценок, которые весьма популярны в статистике. Например, классические оценки максимального правдоподобия являются M -оценками. В основе M -оценивания лежат идеи метода моментов. Если вам удалось найти функцию, зависящую от неизвестного параметра, математическое ожидание которой по истинному распределению наблюдаемой случайной величины обращается в ноль, то представляется естественным приравнять к нулю и соответствующий выборочный момент. В результате получится уравнение аддитивного типа, решение которого и принято называть M -оценкой. В диссертации представлен достаточно подробный анализ одношаговых M -оценок, при этом рассматривается в основном си-

туация разнораспределенных выборочных данных, что позволяет использовать полученные результаты в задачах нелинейной регрессии. Хорошо известно, что M -оценки в широких условиях асимптотически нормальны. В диссертации найдены условия, в которых одношаговые M -оценки имеют тут же асимптотическую точность, что и искомые асимптотически нормальные M -оценки. В частности, найдены достаточно общие условия асимптотической нормальности самих одношаговых M -оценок при широком спектре ограничений на точность предварительной оценки. Этот результат можно выделить в качестве основного в этой главе, и прежде всего, – с точки зрения практики. Далее рассматриваются вопросы о необходимых условиях на точность предварительной оценки, о построении оценок для асимптотической дисперсии, о тех или иных модификациях одношаговых оценок, а также об использовании k -шаговых оценок и ряд других вопросов.

В отличие от случая разнораспределенных наблюдений, в ситуации независимых одинаково распределенных наблюдений одношаговые M -оценки (и, в частности, оценки Фишера) достаточно хорошо были исследованы ранее. Тем не менее, автор предлагает новые идеи и в этой области. В работе предложен алгоритм уточнения оценок Фишера в случае медленно сходящихся предварительных оценок. Автор показывает как в оценке Фишера за счет использования поправочных слагаемых медленно сходящуюся оценку улучшить «за один шаг» до асимптотически эквивалентной оценке максимального правдоподобия. Этот подход альтернативен многошаговому оцениванию, когда за счет квадратичной скорости сходимости метода Ньютона медленно сходящаяся к параметру оценка может быть улучшена до оценки с нужной точностью.

Отметим, что некоторые результаты диссертации подкрепляются компьютерным моделированием. В частности, в первой главе с помощью численного моделирования сравниваются различные подходы к восстановлению регрессионной функции, при этом новые оценки весьма хорошо себя проявили в рассматриваемых примерах. В конце третьей главы иллюстрируется эффективность использования одношаговых оценок в случае приближенного вычисления оценок квазиправдоподобия и наименьших квадратов в нелинейной регрессии.

В качестве замечаний к диссертации выскажем следующее.

1. Как и в любом большом тексте имеется некоторое количество опечаток (не очень большое!), которые не мешают правильному пониманию текста.

2. В многомерном случае в условии плотного заполнения регрессорами k -мерного куба (см. условие (П2) во введении к диссертации или условие (D_2) в главе 1) следует добавить, что объемы элементов жорданова разбиения с одной выделенной точкой должны быть случайными величинами, т.е. измеримыми отображениями основного вероятностного пространства. Разумеется, это требование будет выполнено, если указан четкий алгоритм построения такого разбиения, как, например, мозаика Вороного или последовательные медианные сечения. Однако в той общности, в которой сформулировано указанное условие, факт измеримости объемов элементов разбиения как функций элементарного исхода ниоткуда не следует.

Предлагается также следующее пожелание. Автор сосредоточил свое внимание на равномерной состоятельности ядерных оценок. Однако, как отмечено в заключении, предложенная в диссертации методика применима и для регрессионных функций без разрывов второго рода. Конечно, в случае разрывных функций следует несколько ослабить равномерную норму, в которой в диссертации исследуется близость ядерных оценок и регрессионных функций. Можно, например, рассматривать классическую метрику Скорохода и L_p -метрики. На мой взгляд, подобное распространение методологии представляется весьма перспективным.

Высказанные замечания носят скорее рекомендательный характер и не снижают высокую оценку представленной диссертационной работы.

Оценивая диссертацию в целом, нужно сказать, что главы диссертации имеют тесную логическую связь друг с другом. Так что диссертация представляет собой целостное научное исследование, выполненное на высоком уровне. Выводы и положения отличаются новизной, они достоверны и обоснованы. Автором найдены решения ряда важных проблем регрессионного анализа. Результаты диссертации вносят значительный вклад в регрессионный анализ. Научная новизна работы определяется обнаружением и изучением ряда новых эффектов в непараметрической регрессии и новыми подходами к оценке параметров в нелинейных регрессионных моделях. Актуальность рассматриваемых задач и новизну предлагаемых решений подчеркивает в том числе и подробная библиография по тематике исследования, приведенная во введении. Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, публикациями в ведущих российских и международных журналах, многочисленными докладами на научно-исследовательских семинарах и конференциях. По теме диссертации опубликовано 19 работ в журналах, которые входят в библиографические базы Web of Science и/или Scopus. Автореферат и опубликованные статьи полно и правильно отражают содержание диссертации.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что представленная диссертация является научно-квалификационной работой, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Диссертационная работа удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук и оформлена согласно Положению о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. По моему мнению, автор диссертации Линке Юлиана Юрьевна заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математической статистики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
Хохлов Юрий Степанович

«23» мая 2024 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (916) 943-01-49; e-mail: yskhokhlov@yandex.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.05 — «Теория вероятностей и математическая статистика»

Адрес места работы: 119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК
Тел.: +7 (495) 939-53-94; e-mail: ms@cs.msu.su

Подпись профессора кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» Ю. С. Хохлова удостоверяю:

Декан факультета вычислительной математики и
кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова
академик РАН, профессор
Соколов Игорь Анатольевич